CIMAT

Centro de Investigación en Matemáticas A. C.

Soluciones a extensiones de juegos cooperativos y la energía de vértices de una gráfica

T E S I S

Que para obtener el grado de

Doctor en ciencias

con orientación en

Matemáticas Aplicadas

P R E S E N T A:

Oliver Antonio Juárez Romero

Director de tesis:

Dr. Francisco Sánchez Sánchez

Junio de 2017 Guanajuato, Gto., México

CIMAT

Centro de Investigación en Matemáticas A. C.

Soluciones a extensiones de juegos cooperativos y la energía de vértices de una gráfica

T E S I S

Que para obtener el grado de

Doctor en Ciencias

con orientación en

Matemáticas Aplicadas

P R E S E N T A:

Oliver Antonio Juárez Romero

Comité de evaluación:

Dr. Leobardo Pedro Plata Pérez
(Sinodal)

Dr. William José Olvera López
(Sinodal)

Dr. Luis Hernández Lamoneda
(Presidente)

Dr. Octavio Arizmendi Echegaray
(Secretario)

Dr. Francisco Sánchez Sánchez
(Vocal y Director de Tesis)

Junio de 2017 Guanajuato, Gto., México

Dedicatoria

A mi madre Rosa Francisca Romero, por su invaluable apoyo en cada una de las etapas de éste y de todos los proyectos que hemos alcanzado; su ejemplo de perseverancia está aquí reflejado.

A mi esposa Ruth Dayana Solórzano, por motivar y alegrar con su amor, sabiduría y paciencia cada uno de mis planes que ahora también son de ella.

A mi hijo Oliver Samuel Juárez, porque desde que llegó a mi vida la alegra con su sonrisa.

Agradecimientos

A Dios, por darme la vida, salud, paciencia y sabiduría para poder concluir esta tesis.

A mi madre Rosa Francisca Romero, quien siempre ha confiado en mí; gracias, éste es también un logro tuyo.

A mi esposa Ruth Dayana Solórzano, por su apoyo y comprensión.

A mi director de tesis, el Dr. Francisco Sánchez Sánchez, por su tiempo y trabajo dedicado a esta investigación. Muchas gracias por todo.

Al Dr. Octavio Arizmendi, por invitarme a trabajar con él en la teoría de la Energía de Gráficas.

A los revisores, por sus observaciones que ayudaron a mejorar la presentación de esta tesis.

Al Dr. William Olvera López, por sus valiosas aportaciones y correcciones hechas a este trabajo.

Al Dr. Luis Hernández Lamoneda, por hacer posible el sueño de estudiar en CIMAT.

Finalmente, al Consejo Nacional de Ciencia y Tecnología (CONACyT) por el apoyo económico bajo el número de beca 362701, otorgado durante los cuatro años que duró el doctorado.

Índice general

Introducción

La teoría de juegos tiene como principal objetivo analizar situaciones en las que existe un conflicto entre diversos agentes. Estas situaciones incluyen aquellos juegos que desde siempre se han designado como tales, pero además otras situaciones en las que el conflicto es entre empresas, fuerzas militares o países.

En general, los problemas que se refieren a conflictos de intereses se caracterizan por la existencia de un grupo de personas que se encuentran en una situación que puede tener más de un desenlace, respecto a cada uno de los cuales cada individuo tiene una cierta preferencia. Además, cada uno de los individuos controla alguna de las variables que determina el resultado final, aunque no controla la totalidad de dicho resultado. Cada una de estas situaciones se conoce como un juego, en una idea muy intuitiva. Así, un juego puede representar situaciones tan diversas como un juego de cartas o la negociación de acuerdos internacionales entre países.

La primera discusión conocida de la teoría de juegos aparece en una carta escrita por James Waldegrave en 1713. Sin embargo, no se publicó un análisis teórico de teoría de juegos en general hasta una publicación de Antoine Augustin Cournot en 1838. En este trabajo, Cournot considera un duopolio y presenta una solución que es una versión restringida del equilibrio de Nash. Aunque el análisis de Cournot es más general que el de Waldegrave, la teoría de juegos realmente no existió como campo de estudio aparte hasta que John von Neumann publicó una serie de artículos en 1928. Estos resultados fueron ampliados más tarde en su libro de 1944 “Theory of Games and Economic Behavior” [41] escrito junto con Oskar Morgenstern. Desde este año han aparecido numerosas publicaciones en este campo.

La teoría de juegos analiza las situaciones desde dos perspectivas distintas, aquellas en las que los jugadores no disponen de mecanismos para tomar acuerdos, también llamados juegos no cooperativos y aquellas situaciones en las que los jugadores sí disponen de estos mecanismos, los conocidos como juegos cooperativos.

La posibilidad de la cooperación permite a los agentes coordinar sus estrategias para conseguir la mayor utilidad posible. El hecho de que los agentes cooperen depende de las habilidades y de las interrelaciones entre ellos. Es frecuente encontrar situaciones conflictivas en las que los agentes además de coordinarse para maximizar la utilidad total que pueden conseguir también se coordinen en grupos (coaliciones). En estas situaciones el sentido de la cooperación es más amplio. Estos juegos son conocidos como juegos cooperativos en forma de función característica. En ellos nos centraremos la mayor parte de este trabajo.

El estudio que aquí proponemos se divide en cinco capítulos. La técnica general que utilizamos en los primeros 4 capítulos es el enfoque axiomático. Bajo esta técnica se agrupan problemas, se definen propiedades razonables y se pide que una solución satisfaga un conjunto de axiomas que la determinen unívocamente. Con ello, el problema de "resolver un juego" se reduce a únicamente aceptar o no la serie de supuestos generales que caractericen la solución. Desde un inicio, la teoría de uegos cooperativos ha utilizado este enfoque con éxito, desde los trabajos de Shapley [39], Nowak y Radzik [33] y Curiel et. al. [10] por citar solamente algunos, ya que el trabajo de investigación en este enfoque es muy amplio.

A continuación se presenta un breve resumen de los capítulos:

- El primero contiene una introducción a los conceptos básicos de la teoría de juegos cooperativos, en la cual, nuestro interés radica en el procedimiento que se utiliza para resolver un conjunto de problemas de manera única. El contenido de este capítulo no es original y su inclusión se justifica por la pretención de unificar en lo posible la notación, así como de lograr una coherencia en el contenido del trabajo.

- En el segundo capítulo, primeramente se abordan los conceptos necesarios para la definición de juegos con estructuras coalicionales. De igual manera, se presenta los axiomas que aracterizan el valor de Owen. Además, se presentan dos propiedades adicionales que satisface este valor. Estas propiedades involucran criterios de estabilidad modeladas a través del juego de lo que se deja de ganar y del juego de lo que se gana por asociación. Los resultados principales de este capítulo son los siguientes:

  Lema 1. *Sea $(B, v) \in ECJ^N$ un juego con estructura coalicional B. Entonces,*

  $$Ow(B, v^{\diamond}_{Ow})[B_k] = Ow(B, v)[B_k] = Ow(B, v^{*}_{Ow})[B_k], \quad \forall k \in M.$$

  y

  Teorema 1. *Para todo juego $(N, v) \in J^N$ con estructura coalicional B y para todo $i \in N$, tenemos que*

  $$Ow_i(B, v^{\diamond}_{Ow}) = Ow_i(B, v) = Ow_i(B, v^{*}_{Ow}).$$

  La satisfacción de estas propiedades viene a proveer una mayor estabilidad a dicho valor, ya que se demuestra que es inmune ante cierto tipo de manipulaciones de los jugadores.

- En el tercer capítulo estudiamos juegos en donde que una estructura de cooperación dada por una gráfica existe entre los jugadores antes de que el juego se realice. En este capítulo estudiamos el caso en donde la gráfica es un bosque, es decir, cada componente de la gráfica es un árbol y proponemos un familia de soluciones para este tipo de juegos las cuales tienen una expresión simple y una interpretación basada en transferencias entre los jugadores. Entre los principales resultados de este capítulo están los siguientes:

Teorema 2. *Dados $(v,g) \in FG^N$ y $\alpha_{ij}, \alpha_{ji} \in \mathbb{R}_{++}$ para todo $\{i,j\} \in g$, existe una única solución $\varphi(v,g)$ que satisface los axiomas de eficiencia por componentes y justicia por componentes generalizada.*

Proposición 3. *Para todo $(v,g) \in FG^N$, la solución de árbol promedio pertenece a $\mathfrak{F}(g)$. Además, esta solución tiene la siguiente expresión:*

$$AT_i(v,g) = \frac{v(N_i)}{|N_i|} + \sum_{\{i,j\}\in g} \left[\frac{|N_{ji}|v(N_{ij}) - |N_{ij}|v(N_{ji})}{|N_i|} \right],$$

para todo $i \in N$.

Teorema 4. *Existe una única solución $\varphi : FG^N \to \mathbb{R}^n$ que satisface los axiomas de eficiencia por componentes e igual trato por componentes. Además, esta solución tiene la siguiente formulación:*

$$\varphi_i(v,g) = \left(1 - \frac{1}{2}\mathrm{deg}_i(g)\right) v(N_i) + \frac{1}{2} \sum_{\{i,j\}\in g} \left[v(N_{ij}) - v(N_{ji}) \right],$$

para todo $i \in N$, $g \in F^N$.

y

Teorema 5. *Sea $\varphi : FG^N \to \mathbb{R}^n$ una solución en $\mathfrak{F}(g)$. Entonces, φ satisface los axiomas de (a) linealidad en J^N, (b) igual trato de jugadores vitales (c) descomposición en componentes.*

- El cuarto capítulo versa sobre valores para juegos en forma característica generalizada. Estos juegos modelan problemas en donde el beneficio (o costo) que producen los agentes depende tanto de quiénes y cuántos son, así como del orden que ellos tienen en un proceso dado. Resulta de interés estudiar cómo se puede dar solución a estos problemas y cómo se pueden, en medida de lo posible, adaptar los conceptos ya existentes en la teoría clásica de juegos cooperativos a esta situación. Específicamente, en este capítulo se presenta una nueva solución para estos juegos basada en la idea del potencial de Hart y Mas-Colell [22]. El principal resultado de este capítulo es el siguiente:

  Teorema 6. *Dado $(N^\circ, v) \in G^{N^\circ}$ tenemos que*

  $$P(S) = \frac{1}{s}v(S) + \sum_{T^\circ \subsetneq S^\circ} \sum_{T \in H(T^\circ)} \alpha(s,t)v(T),$$

  donde

  $$\alpha(s,t) = \begin{cases} 1 & \text{si } t = 0 \\ \frac{(t-1)!(s-t)!}{s!} \frac{(s-1)!(s-2)!\cdots 2!1!0!}{t!(t-1)!\cdots 2!1!0!} & \text{en otro caso} \end{cases}$$

  para todo $S \in H(S^\circ)$ y para todo $S^\circ \subseteq N^\circ$.

- En el quinto y último capítulo está dedicado al estudio de la energía de gráficas y constituye un trabajo independiente. En este capítulo presentamos los conceptos básicos de la energía de una gráfica y de la teoría de probabilidad no-conmutativa.

El objetivo principal que se persigue es el de analizar el concepto de energía de una gráfica desde el punto de vista de la probabilidad no-conmutativa. Además, introducimos el concepto de energía de un vértice y presentamos una nueva desigualdad para la energía de una gráfica en términos de este nuevo concepto. El principal resultado de este capítulo es el siguiente:

Teorema 7. *Para una gráfica G con vértices $v_1, ..., v_n$ y grados $d_1, ..., d_n$, con $d_i \neq 0$ para algún i, tenemos que*

$$\frac{(M_2^*)^2}{\sqrt{M_2^* M_4^*}} \leq \sum_{i=1}^{n} \frac{\phi_i(A^2)^{3/2}}{\phi_i(A^4)^{1/2}} \leq \mathcal{E}(G) \leq \sum_{i=1}^{n} \sqrt{d_i} \leq \sqrt{2mn}.$$

La última desigualdad es igualdad si y sólo si, G es una gráfica regular.

El objetivo genérico que motiva el presente trabajo de investigación es caracterizar soluciones a extensiones de juegos cooperativos como lo son los juegos con estructura coalicional, juegos de comunicación restringida y juegos en forma de función característica generalizada y, encontrar una serie de principios (axiomas) que determinen lógicamente estas soluciones. De entre los objetivos específicos, pueden destacarse los siguientes:

- Adaptar los conceptos ya existentes en la teoría clásica de juegos cooperativos a extensiones de juegos.
- Proporcionar soluciones que satisfagan una serie de axiomas determinados para extensiones de juegos cooperativos y de esta manera lograr su caracterización.
- Estudiar el comportamiento de algunas soluciones en determinadas situaciones de cooperación modificada, esto con el fin de proporcionar mayores propiedades a dichas soluciones.
- Analizar el concepto de energía de una gráfica desde el punto de vista de la probabilidad no-conmutativa.

Capítulo 1

Juegos cooperativos

En este capítulo nos restringiremos al estudio de los resultados fundamentales de la teoría de juegos cooperativos. El objetivo que se persigue es preparar las condiciones para el análisis posterior de los juegos con estructura coalicional, juegos de bosques y juegos en forma de función característica generalizada, en los cuales se aplica la técnica para caracterizar soluciones y se extienden algunos de los conceptos que abordaremos aquí.

Con el fin de concretar ideas, consideremos la siguiente situación:

Ejemplo 1. *Antonio, Juan y Pedro son tres emprendedores. Antonio tiene planeado la creación de varios inventos y patentes, y estima que sus ganancias por éstos inventos serán de \$170,000 por año. Juan es muy bueno en los negocios, y está interesado en formar una empresa de asesoramiento con la cual estima que puede tener ganancias de \$150,000 por año. Pedro es un excelente vendedor y está interesado en formar una compañia de ventas, con la cual estima que puede tener ingresos por \$180,000 al año. Los tres emprendedores reconocen que sus talentos son complementarios y que si ellos trabajan juntos pueden tener una mayor ganancia en comparación que si cada uno de ellos trabaja separadamente. Juan puede sugirir a Antonio cuáles son las patentes que tienen mayor demanda en el mercado y de esta manera ellos pueden tener ganancias de \$350,000 por año. De manera similar, Juan y Pedro pueden pueder formar una compañia en asesoramiento sobre ventas, en la cual ellos pueden tener ganancias de \$380,000 por año. Pedro puede vender los inventos de Antonio y ellos pueden obtener ganancias de \$360,000 por año. Si todos trabajan juntos Juan puede decirle a Antonio cuáles son los inventos que tiene mayor demanda en el mercado y Pedro puede vender estos inventos; la ganancia estimada de trabajar en conjunto es de \$560,000 por año. Los emprendedores entienden que hay ventaja en trabajar juntos, pero no es claro cómo ellos deberían de dividir las ganancias de una empresa en conjunto, si se llegara a formar, porque la contribución a la empresa de cada uno es diferente.*

1.1. Preliminares y definiciones

En lo que sigue $N = \{1, 2, \ldots, n\}$ es un conjunto finito de *jugadores* los cuales están considerando cooperar y 2^N es el conjunto potencia de N, es decir, $2^N = \{S \mid S \subseteq N\}$. Cada subconjunto $S \in 2^N$ es llamada una *coalición* y se interpreta como un grupo de jugadores que se puede formar para jugar unidos. Las coaliciones N y $\emptyset$ reciben los nombres de *gran coalición* y *coalición vacía*, respectivamente. Para cada $S \subseteq N$, $s = |S|$ denotará la *cardinalidad* o el número de elementos de S.

Definición 1. *Un juego cooperativo con utilidad transferible es un par (N, υ), donde N es un conjunto finito de jugadores y $\upsilon : 2^N \to \mathbb{R}$ es una función que asigna a cada coalición $S \subseteq N$ un valor, $\upsilon(S)$, satisfaciendo $\upsilon(\emptyset) = 0$.*

Para cada $S \in 2^N$, el número real $\upsilon(S)$ se interpreta como la valía que los jugadores en S pueden obtener si ellos deciden cooperar.

Ejemplo 2. *La situación descrita en el Ejemplo 1. puede ser modelada como un juego cooperativo con utilidad transferible (con utilidad en miles de dólares) (N, υ) donde $N = \{Antonio, Juan, Pedro\}$ y $\upsilon : 2^N \to \mathbb{R}$ como sigue:*

$$\begin{array}{ccc} \upsilon(\emptyset) & = & 0, \\ \upsilon(Antonio) & = & 170, \\ \upsilon(Juan) & = & 150, \\ \upsilon(Pedro) & = & 180, \\ \upsilon(Antonio, Juan) & = & 350, \\ \upsilon(Juan, Pedro) & = & 380, \\ \upsilon(Antonio, Pedro) & = & 360, \\ \upsilon(Antonio, Juan, Pedro) & = & 560. \end{array}$$

A (N, υ) se le denomina también juego en forma de función característica. Cuando el conjunto de jugadores sea claro, y por simplicidad, nos referiremos a (N, υ) simplemente como *juego* y lo identificaremos con υ.

Denotaremos por J^N el conjunto de todos los juegos con N como conjunto de jugadores. Es fácil ver que J^N es un espacio vectorial sobre el campo de los números reales si se define la suma y la multiplicación escalar sobre J^N de la siguiente manera:

1. $(\upsilon + \omega)(S) = \upsilon(S) + \omega(S), \qquad \forall \upsilon, \omega \in J^N, \quad \forall S \subseteq N.$
2. $(c\upsilon)(S) = c\upsilon(S), \qquad \forall \upsilon \in J^N, \quad \forall c \in \mathbb{R}, \quad \forall S \subseteq N.$

Una base este para espacio está formada por los denominados *juegos de unanimidad.*

Definición 2. *Para cada $T \in 2^N \setminus \{\emptyset\}$, se define el juego de unanimidad $u_T \in J^N$ por:*

$$u_T(S) = \begin{cases} 1, & si\ T \subseteq S, \\ 0, & en\ otro\ caso, \end{cases} \qquad \forall S \subseteq N. \tag{1.1}$$

La interpretación del juego de unanimidad u_T es que se obtiene una ganancia de una unidad por cualquier grupo de jugadores si y sólo si, todos los jugadores en la coalición T están involucrados en la cooperación.

Lema 2. *Todo $\upsilon \in J^N$ puede ser expresado como:*

$$\upsilon = \sum_{T \in 2^N \setminus \{\emptyset\}} \triangle_\upsilon(T) u_T, \tag{1.2}$$

donde $\triangle_\upsilon(T) \in \mathbb{R}$ se conoce como el dividendo de Harsanyi de la coalición T en el juego υ, y está dado por:

$$\triangle_\upsilon(T) = \sum_{S \subseteq T} (-1)^{t-s} \upsilon(S). \tag{1.3}$$

Demostración. La demostración sigue el desarrollo dado en Owen [35], página 263. Sea $S \subseteq N$. Entonces tenemos que

$$\begin{aligned}
\sum_{T\subseteq N} \triangle_v(T)u_T(S) &= \sum_{T\subseteq S} \triangle_v(T), \\
&= \sum_{T\subseteq S}\left(\sum_{R\subseteq T}(-1)^{t-r}v(R)\right), \\
&= \sum_{T\subseteq S}\left(\sum_{\substack{T\subseteq S\\ R\subseteq T}}(-1)^{t-r}\right)v(R), \\
&= \sum_{R\subseteq S}\left(\sum_{t=r}^{s}(-1)^{t-r}\binom{s-r}{t-r}\right)v(R), \\
&= v(S).
\end{aligned}$$

La última igualdad se sigue del hecho que la suma entre paréntesis es cero excepto para $r = s$. Así,

$$\sum_{T\subseteq N} \triangle_v(T)u_T(S) = v(S), \qquad \forall S \subseteq N. \tag{1.4}$$

□

Corolario 8. *La colección de los juegos de unanimidad $\mathcal{U} = \{u_T \mid T \subseteq N, T \neq \emptyset\}$ forma una base para J^N. La colección $\mathcal{U}$ se conoce como la base de unanimidad.*

Los dividendos de Harsanyi $\triangle_v$ de un juego $v \in J^N$ juegan un papel importante en el desarrollo de la teoría de conceptos de solución o valor. Es fácil calcular estos dividendos recursivamente con el siguiente procedimiento:

1. $\triangle_v(\emptyset) = 0$ y

2. para toda coalición $T \neq \emptyset$

$$\triangle_v(T) = v(T) - \sum_{R\subsetneq T} \triangle_v(R). \tag{1.5}$$

A continuación se muestran definiciones concernientes a diversas modalidades de juegos cooperativos.

Definición 3. *Dado un juego $v \in J^N$, se dice que el juego v es superaditivo si para todo par de coaliciones $S, T \subseteq N$ tales que $S \cap T = \emptyset$, se satisface la desigualdad*

$$v(S \cup T) \geq v(S) + v(T). \tag{1.6}$$

Si (1.6) se satisface para todo $S, T \subseteq N$ en el sentido contrario, entonces decimos que el juego es subaditivo. Si (1.6) se satisface con igualdad entonces decimos que el juego es aditivo.

Denotaremos por $\mathcal{S}(J^N)$ el conjunto de juegos superaditivos.

En lo que resta del capítulo supondremos que $v \in \mathcal{S}(J^N)$, esto debido a que la mayoría de juegos que surgen en la realidad son superaditivos. En este tipo de juegos dos coaliciones disjuntas pueden elegir jugar juntas garantizando al menos lo que ellas podrían obtener si trabajan separadamente. Esta propiedad hace posible la formación de la gran coalición N.

Definición 4. *Dado un juego $v \in J^N$, se dice que el juego v es simple si $v(S) \in \{0,1\}$ para todo $S \subsetneq N$ y $v(N) = 1$.*

En un juego simple, una coalición S es llamada *ganadora* si $v(S) = 1$, y *perdedora* si $v(S) = 0$. Los juegos simples también se representan usando la familia de coaliciones ganadoras $\mathcal{W} = \{S \subseteq N \mid v(S) = 1\}$.

Los juegos simples modelan votaciones en asambleas. En este caso $v(S) = 1$ significa que la coalición S puede aprobar una propuesta y $v(S) = 0$ que no puede aprobarla. Por ejemplo, el Consejo de Seguridad de Naciones Unidas que tiene 5 miembros permanentes y 10 no permanentes, puede ser modelado como un juego simple. Todo miembro permanente puede vetar cualquier propuesta del Consejo, y una propuesta necesita ser aprobada por una mayoría de 9 miembros del consejo. Ignorando la posibilidad de abstención, esto significa que para que una propuesta es aprobada por el consejo si tiene 5 miembros permanentes a favor y al menos 4 miembros no permanentes, la función característica asociada es este juego es la siguiente:

$$v(S) = \begin{cases} 1, & \text{si } s \geq 9 \text{ y } S \text{ contiene a todos los miembros permanentes,} \\ 0, & \text{en otro caso,} \end{cases} \qquad \forall S \subseteq N. \tag{1.7}$$

Los juegos de uninimidad son ejemplos de juegos simples.

Definición 5. *Dado un juego $(N, v) \in J^N$, un subjuego de v es un juego (S, v_S) donde $S \subseteq N, S \neq \emptyset$ y $v_S(T) = v(T)$ para todo $T \subseteq S$. El subjuego (S, v_S) será denotado por* (S, v). El subjuego $v_\emptyset$ se define como $v_\emptyset(T) = 0$ para todo $T \subseteq N$.

Definición 6. *Dado un juego $v \in J^N$, se dirá que $i \in N$ es un jugador nulo en v si y sólo si,*

$$v(S) = v(S \cup \{i\}), \qquad \forall S \subseteq N \setminus \{i\}. \tag{1.8}$$

Un jugador nulo no contribuye a cualquier coalición que elige para unirse. En particular, si i es un jugador nulo, entonces $v(\{i\}) = 0$.

Consideremos el conjunto $S_n = \{\theta : N \to N \mid \theta \text{ es biyectiva}\}$, el grupo de permutaciones del conjunto de jugadores.

Definición 7. *Para cada $\theta \in S_n$ y cada $v \in J^N$ definimos el juego permutado $\theta * v$ como:*

$$(\theta * v)(S) = v(\theta^{-1}(S)), \qquad \forall S \subseteq N. \tag{1.9}$$

El juego permutado $\theta * v$ se obtiene intercambiando los papeles de los jugadores en v de acuerdo con θ.

Definición 8. *Se dice que el juego (N, v) es convexo si y sólo si para todo $S, T \subseteq N$ se cumple que*

$$v(S) + v(T) \leq v(S \cup T) + v(S \cap T). \tag{1.10}$$

Los juegos convexos estan caracterizados por la propiedad de que los jugadores tienen tienen incentivos para formar coaliciones grandes. Así, es natural asumir que en este tipos de juegos se formará la gran coalición.

1.2. El valor de Shapley

Dado el juego v, uno de los problemas que se abordan en juegos cooperativos es la distribución de $v(N)$, asumiendo que la gran coalición N se forma o considerando que $v \in \mathcal{S}(J^N)$, entre los jugadores en N. Una distribución de $v(N)$ es cualquier vector $x \in \mathbb{R}^n$, donde x_i representa el valor asignado al jugador i en el juego. A los vectores $x \in \mathbb{R}^n$ se les denomina *vectores de pago*. Así, el problema se puede parafrasear como encontrar un vector de pagos x que sea "justo" dadas las condiciones del juego v. Una forma de resolver este problema es por medio del concepto de *valor* desarrollado por Shapley [39].

Definición 9. *Un valor es un operador $\phi : J^N \to \mathbb{R}^n$, que asocia a cada juego $v \in J^N$ un vector de pagos $\phi(v) := (\phi_i(v))_{i \in N} \in \mathbb{R}^n$.*

Denotamos por $\Lambda := \{\phi \mid \phi : J^N \to \mathbb{R}^n\}$ el conjunto de valores.

Definición 10. *El valor de Shapley es el valor $Sh : J^N \to \mathbb{R}^n$, el cual para cada jugador $i \in N$ es dado por:*

$$Sh_i(v) = \sum_{S \subseteq N \setminus \{i\}} \frac{s!(n-s-1)!}{n!} \big[v(S \cup \{i\}) - v(S)\big]. \tag{1.11}$$

Ejemplo 3. *Si consideramos el juego definido en el Ejemplo 1. el valor de Shapley está dado por:*

$$Sh(v) = (200, 180, 180).$$

El valor de Shapley es el valor para juegos cooperativos más conocida en la literatura. A continuación mostramos y explicamos los axiomas que caracterizan este valor basado en el trabajo de Shapley [39].

Axioma 1. (Aditividad). *Un valor $\phi \in \Lambda$ satisface el axioma de aditividad si para todo $v, \omega \in J^N$ se cumple que:*

$$\phi(v + \omega) = \phi(v) + \phi(\omega). \tag{1.12}$$

Observar que, como se definió $v+\omega$, los jugadores no pueden obtener ventaja adicional por jugar los dos juegos en serie. Resulta natural pedir que lo que deba obtener cada jugador en el juego suma, sea exactamente la suma de lo que obtengan en los juegos originales.

Otra característica razonable que debería tener una solución es que no dependa de los atributos personales de los jugadores. En otras palabras, que sea *anónima* en el siguiente sentido.

Axioma 2. (Simetría). *Un valor $\phi \in \Lambda$ satisface el axioma de simetría si para todo juego $\upsilon \in J^N$ y toda permutación $\theta \in S_n$ se cumple que:*

$$\phi_i(\theta * \upsilon) = \phi_{\theta^{-1}(i)}(\upsilon). \tag{1.13}$$

Así, si los jugadores intercambian papeles en el juego, entonces lo que debe obtener cada jugador en el nuevo juego es lo que obtenía el jugador al cual suplanta.

Dados $\upsilon \in J^N$, un valor $\phi \in \Lambda$ y $S \subseteq N$, denotemos por:

$$\phi(\upsilon)(S) = \sum_{i \in S} \phi_i(\upsilon), \tag{1.14}$$

el monto que la coalición S obtiene con el valor ϕ.

Axioma 3. (Eficiencia). *Un valor $\phi \in \Lambda$ satisface el axioma de eficiencia si para todo $\upsilon \in J^N$ se tiene:*

$$\phi(\upsilon)(N) = \upsilon(N). \tag{1.15}$$

En otras palabras, el monto que se reparte entre todos los jugadores bajo ϕ es exactamente lo que puede conseguir la gran coalición.

Axioma 4. (Nulidad). *Un valor $\phi \in \Lambda$ satisface el axioma de nulidad si $i \in N$ es un jugador nulo en υ, entonces*

$$\phi_i(\upsilon) = 0. \tag{1.16}$$

El axioma de nulidad requiere que cada jugador nulo en υ obtenga un pago de cero, dado que no contribuye de ninguna manera a cualquier coalición a la que se une.

Teorema 9 (Shapley, [39]). *El valor de Shapley es el único valor que satisface los axiomas de aditividad, simetría, eficiencia y nulidad.*

Demostración. Es fácil ver que el valor de Shapley satisface los cuatro axiomas mencionados. Para mostrar lo contrario, recordemos primero que, usando la base de unanimidad $\mathcal{U}$, todo juego $\upsilon \in J^N$ puede ser escrito como

$$\upsilon = \sum_{T \in 2^N \setminus \emptyset} \triangle_\upsilon(T) u_T. \tag{1.17}$$

Sea $\phi \in \Lambda$ un valor que satisface los axiomas mencionados. Consideremos $T \subseteq N$ y $c \in \mathbb{R}$. Sea el juego cu_T definido de la siguiente manera:

$$cu_T(S) = \begin{cases} c, & \text{si } T \subseteq S, \\ 0, & \text{en otro caso,} \end{cases} \qquad \forall S \subseteq N. \tag{1.18}$$

Luego, los jugadores $j \notin T$ son nulos en cu_T y así tenemos que $\phi_j(cu_T) = 0$ para todo $j \notin T$. Luego si se elige $\theta \in S_n$ tal que $\theta(T) = T$ con $\theta(i) = j$ y $\theta(j) = i$ para $i, j \in T$ se tiene que por simetría $\phi_i(cu_T) = \phi_j(cu_T)$ para todo $i, j \in T$.

De aquí por eficiencia, tenemos que $\phi_i(cu_T) = \frac{c}{t}$ para todo $i \in T$. De donde por aditividad para un juego arbitrario v y cualquier jugador $i \in N$ se tiene que

$$\begin{aligned}\phi_i(v) &= \sum_{T\subseteq N} \phi_i(\triangle_v(T)u_T),\\ &= \sum_{T\ni i} \phi_i(\triangle_v(T)u_T),\\ &= \sum_{T\ni i} \frac{\triangle_v(T)}{t}.\end{aligned}$$

Por otro lado,

$$\begin{aligned}\sum_{T\ni i} \frac{\triangle_v(T)}{t} &= \sum_{T\ni i}\sum_{S\subseteq T} \frac{(-1)^{t-s}v(S)}{t},\\ &= \sum_{S\ni i}\sum_{T\supseteq S} \frac{(-1)^{t-s}v(S)}{t} + \sum_{S\not\ni i}\sum_{T\supseteq S\cup\{i\}} \frac{(-1)^{t-s}v(S)}{t}.\end{aligned}$$

Ahora, usando el hecho de que

$$\sum_{T\supseteq S} \frac{(-1)^{t-s}}{t} = \frac{(s-1)!(n-s)!}{n!},$$

la expresión anterior nos conduce a

$$\begin{aligned}\phi_i(v) &= \sum_{S\ni i} \frac{(s-1)!(n-s)!}{n!}v(S) - \sum_{S\not\ni i} \frac{s!(n-s-1)!}{n!}v(S),\\ &= \sum_{S\subseteq N\setminus\{i\}} \frac{s!(n-s-1)!}{n!}\big[v(S\cup\{i\}) - v(S)\big],\\ &= Sh_i(v).\end{aligned}$$

□

Observación 1. De la demostración anterior se desprende el hecho que el valor de Shapley se puede calcular utilizando los coeficientes de Harsanyi de la siguiente manera:

$$Sh_i(v) = \sum_{T\ni i} \frac{\triangle_v(T)}{t}.$$

Observación 2. Para comprender mejor el significado del valor de Shapley, consideremos el siguiente proceso aleatorio:

a) Se elige la cardinalidad de una coalición que no contenga al jugador i de acuerdo a una distribución uniforme sobre el conjunto $\{0, 1, 2, \ldots, n-1\}$.

b) Se elige de manera aleatoria a una coalición $S \subseteq N \setminus \{i\}$ con la cardinalidad dada en a), de acuerdo a una distribución uniforme sobre las $\binom{n-1}{s}$ coaliciones disponibles.

c) Se le da al jugador i la contribución marginal que aporta al incorporarse a S, es decir, $v(S \cup \{i\}) - v(S)$.

Entonces, el valor de Shapley $\varphi_i(v)$ es el pago esperado para el jugador i en este proceso.

Observación 3. Además de la expresión dada en (1.11), el valor de Shapley puede ser calculado con la siguiente expresión alterna:

$$\varphi_i(N,v) = \frac{1}{n!}\sum_{\theta\in S_n}\left[v(P_i^\theta \cup \{i\}) - v(P_i^\theta)\right], \qquad \forall i \in N, \tag{1.19}$$

donde $\theta \in S_n$ y P_i^θ denota el conjunto de los predecesores de i en θ, es decir,

$$P_i^\theta = \{j \in N : \theta(j) < \theta(i)\}. \tag{1.20}$$

Para ver que la expresiones (1.11) y (1.19) son iguales, sólo hay que notar que

$$|\{\theta \in S_n \mid P_i^\theta = S\}| = s!(n-s-1)!$$

Con la expresión (1.19), se elige al azar una permutación θ de N con una distribución uniforme sobre las $n!$ permutaciones posibles y si se le da al jugador i la utilidad marginal que aporta cuando se incorpora a los jugadores que lo preceden, $v(P_i^\theta \cup \{i\}) - v(P_i^\theta)$, entonces el pago esperado que obtiene es el valor de Shapley.

1.3. El potencial

Sea $v \in J^N$, una manera de abordar el problema de repartir $v(N)$ entre los jugadores en N consiste en asignar a cada jugador su *contribución marginal* a la gran coalición, esto es

$$m_i(N,v) := v(N) - v(N \setminus \{i\}), \quad \forall i \in N. \tag{1.21}$$

El problema que tiene el vector de pago dado en (1.21) es que en general no cumple el axioma de eficiencia.

Hart y Mas-Colell [22] proponen una forma de repartir $v(N)$ utilizando el vector de pago dado en (1.21). Su propuesta consiste en asociar a cada juego (N,v) un número real, llamado el *potencial del juego*, de modo tal que cada jugador reciba su contribución marginal a la gran coalición calculada de acuerdo a estos números.

Consideremos una función $P : J^N \to \mathbb{R}$ que asocia un número real $P(N,v)$ a cada juego $(N,v) \in J^N$. Con el fin de simplificar la notación, se escribirá $P(S)$ cuando se necesite hacer referencia a $P(S,v)$ con $S \subseteq N$. Con ello, la contribución marginal respecto a P del i-ésimo jugador se define como

$$D^iP(N) := P(N) - P(N \setminus \{i\}). \tag{1.22}$$

Definición 11. *La función $P : J^N \to \mathbb{R}$ con $P(\emptyset) = 0$ se conoce como función potencial si satisface la siguiente condición:*

$$\sum_{i\in N} D^iP(N) = v(N). \tag{1.23}$$

De esta manera, una función potencial es tal que la asignación de las contribuciones marginales de cada jugador con respecto a la gran coalición (de acuerdo a dicha función potencial) siempre sume exactamente la valía de la gran coalición.

Teorema 10 (Hart y Mas-Colell, [22]). *Para todo juego $(N, v) \in J^N$, el vector de pago resultante $(D^i P(N))_{i \in N}$ coincide con el valor de Shapley del juego. Más aún, el potencial de cualquier juego está únicamente determinado por las condiciones dadas en (1.21) aplicadas únicamente al juego y a sus subjuegos.*

Demostración. Debido a (1.23) y aplicando la función potencial a toda $S \subseteq N$, se tiene

$$P(S) = \frac{1}{s}\left[v(S) + \sum_{i \in S} P(S \setminus \{i\})\right]. \tag{1.24}$$

Iniciando con $P(\emptyset) = 0$, entonces se tiene determinada a $P(S)$ con $S \subseteq N$ de manera recursiva. Esto prueba la existencia de la función potencial, y además que $P(N, v)$ es únicamente determinado por (1.23) aplicado a (S, v) para todo $S \subset N$.

Ahora, consideremos que

$$v = \sum_{T \in 2^N \setminus \emptyset} \triangle_v(T) u_T,$$

y definamos

$$P(N, v) = \sum_{T \subset N} d_T \tag{1.25}$$

con

$$d_T = \frac{\triangle_v(T)}{t}.$$

□

Es fácil verificar que (1.23) es verificado por este P, así (1.25) define la función potencial. El hecho de que $(D^i P(N))_{i \in N}$ coincide con el valor de Shapley del juego se sigue la Observación 1.

Al igual que ocurre con el valor de Shapley, se procederá a dar una interpretación probabilística a la idea del potencial. Considérese el siguiente modelo para elegir un subconjunto $S \subseteq N$ con n elementos. Primeramente, se elige aleatoriamente un tamaño para la coalición $s = 1, 2, \ldots n$ (con probabilidad $\frac{1}{n}$ cada uno). Luego, se escoge aleatoriamente un subconjunto S de N de tamaño s (con probabilidad $\frac{1}{\binom{n}{s}}$). Equivalentemente, es posible ordenar los n elementos (existen $n!$ órdenes posibles), escoger un punto de corte s (es posible hacerlo de n maneras), y tomar los primeros s elementos en el orden. Sea $\mathbb{E}$ el valor esperado con respecto a esta distribución de probabilidad.

Proposición 11. *Sea P la función potencial. Entonces*

$$P(N) = \mathbb{E}\left[\frac{n}{s} v(S)\right], \qquad \forall S \subseteq N. \tag{1.26}$$

para todo juego (N, v).

Demostración. Usando las probabilidades explicitas descritas anteriormente, se demuestra que

$$P(N, v) = \sum_{S \subset N} \frac{(s-1)!(n-s)!}{n!} v(S). \tag{1.27}$$

Es fácil ver que las contribuciones marginales $D^i P$ de (1.23) coinciden con el valor de Shapley, luego (1.27) es la función potencial. □

Observación 4. El concepto de potencial puede verse como una nueva caracterización del valor de Shapley, en donde únicamente se necesita un axioma dado por las propiedades (1.23). Además, la fórmula presentada provee una forma simple y recursiva del potencial, y por lo tanto, el uso del potencial se convierte en un algoritmo muy eficiente para el cálculo del valor de Shapley.

1.4. Valores lineales, simétricos y eficientes

A partir de la expresión dada en (1.11) es fácil verificar que el valor Shapley es un operador lineal es decir,

$$\varphi(\alpha \upsilon + \beta \omega) = \alpha \varphi(\upsilon) + \beta \varphi(\omega), \quad \forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}, \forall \upsilon, \omega \in J^N. \tag{1.28}$$

En esta sección se presenta una familia de valores que satisfacen los axiomas de simetria, eficiencia y el siguiente axioma de linealidad.

Axioma 5. (Linealidad). *Una solución ϕ satisface el axioma de linealidad si para todo υ y $\omega \in J^N$ se cumple (1.28)*

Esta familia se conoce como valores lineales, simétricos y eficientes. Estos valores fueron inicialmente propuestos por Ruiz et al. [37]. Otras caracterizaciones pueden encontrarse en Chameni y Andjiga [9], Driessen y Radzik [15] y Hernández et al. [25].

Teorema 12 (Ruiz et al, [37]). *Un valor $\phi \in \Lambda$ satisface los axiomas de linealidad, simetría y eficiencia si y sólo si, es la de la forma*

$$\phi_i(N, \upsilon) = \frac{\upsilon(N)}{n} + \sum_{\substack{S \ni i \\ S \neq N}} \beta_s \frac{\upsilon(S)}{s} - \sum_{S \not\ni i} \beta_s \frac{\upsilon(S)}{n-s}, \qquad \forall i \in N. \tag{1.29}$$

donde $\{\beta_s\}_{s=1}^{n-1}$ son $n-1$ números reales arbitrarios.

Para demostrar este teorema necesitamos del siguiente resultado.

Lema 3. *Dado un valor $\phi \in \Lambda$, esté satisface los axiomas de linealidad y simetría si y sólo sí, existen reales $\{q_s\}_{s=1}^{n} \cup \{\hat{q}_s\}_{s=1}^{n-1}$ tales que*

$$\phi_i(\upsilon) = \sum_{S \ni i} q_s \upsilon(S) + \sum_{S \not\ni i} \hat{q}_s \upsilon(S) \tag{1.30}$$

para todo $i \in N$.

Demostración. $\Rightarrow$) Sean $\upsilon \in J^N$ y $\phi \in \Lambda$ una solución simétrica y lineal. Consideremos la base estándar $E = \{\chi_S\}_{S \subset N}$, así que $\upsilon = \sum_{S \subset N} \upsilon(S)\chi_S$. Dado que ϕ es lineal, entonces:

$$\phi_i(\upsilon) = \phi_i\left(\sum_{S \subset N} \upsilon(S)\chi_S\right) = \sum_{S \subset N} \upsilon(S)\phi_i(\chi_S).$$

Definamos $q_S^i = \phi_i(\chi_S)$, entonces $\phi_i(\upsilon) = \sum_{S \subset N} \upsilon(S) q_S^i$ para cada $i \in N$. Por otro lado, sean $j, k \in N$, $R, T \subset N$ tales que $r = t$ y $j \in R$, $k \in T$. Sea $\theta \in S_n$ tal que

$\theta(R) = T$ y $\theta(j) = k$.

Como $\theta(\chi_R) = \chi_{\theta(R)} = \chi_T$ por simetría de ϕ se tiene que

$$\phi_j(\chi_R) = \phi_{\theta(R)}(\theta(\chi_R)) = \phi_k(\chi_T),$$

por lo tanto $q_R^j = q_T^k$.

De igual manera se puede probar que $q_R^j = q_T^k$ si $r = t$ y $j \notin R$, $k \notin T$.

$\Leftarrow$) Es directo.

$\square$

Demostración del Teorema 12. Por el Lema anterior existen constantes reales $\{q_s\}_{s=1}^n \cup \{\hat{q}_s\}_{s=1}^{n-1}$ tal que

$$\phi_i(\upsilon) = \sum_{S \ni i} q_s \upsilon(S) + \sum_{S \not\ni i} \hat{q}_s \upsilon(S).$$

Usando que ϕ es eficiente y evaluando en la base estándar, obtenemos que:

Para $S \subset N$, $S \neq N$

$$\sum_{i \in N} \phi_{\chi_S} = sq_s + (n-s)\hat{q}_s = \chi_S(N) = 0.$$

Para N.

$$\sum_{i \in N} \phi_i(\chi_N) = nq_n = \chi_N(N) = 1.$$

De lo anterior obtenemos que $q_n = \dfrac{1}{n}$ y $\hat{q}_s = -\dfrac{sq_s}{(n-s)}$ para $s = 1, 2, \ldots, n-1$. Por lo tanto

$$\begin{aligned}
\phi_i(\upsilon) &= \sum_{S \ni i} q_s \upsilon(S) - \sum_{S \not\ni i} \frac{sq_s}{(n-s)} \upsilon(S), \\
&= \frac{\upsilon(N)}{n} + \sum_{\substack{S \ni i \\ S \neq N}} q_s \upsilon(S) - \sum_{S \not\ni i} \frac{sq_s}{n-s} \upsilon(S).
\end{aligned}$$

El resultado se sigue tomando $\beta_s = \dfrac{q_s}{s}$. $\square$

El Teorema 12 establece una correspondencia uno a uno entre los puntos $\beta \in \mathbb{R}^{n-1}$ y las soluciones lineales, simétricas y eficientes. Luego, tenemos que la dimensión de los valores que satisfacen estos tres axiomas es $n-1$. Se denota por ϕ^β la solución correspondiente a $\beta = (\beta_1, \ldots, \beta_{n-1})$.

Por otra lado, podemos interpretar (1.29) como sigue. Sea υ un juego arbitrario, entonces el pago para cada jugador con respecto a ϕ^β es determinado de la siguiente manera: primero se divide la valía de la gran coalición de manera igualitara y se le asigna una parte a cada jugador.

Luego, para cada $S \subsetneq N$ tenemos que los jugadores en S reciben $\beta_s \upsilon(S)$ de manera igualitaria, es decir, $\frac{\beta_s \upsilon(S)}{s}$, por otro lado, los miembros en $N \backslash S$ les pagan a los miembros en S la cantidad $\frac{\beta_s \upsilon(S)}{n-s}$. Al final de este procedimiento, cada jugardor $i \in N$ recibirá ϕ_i^β como en (1.24).

Dado que el valor de Shapley es lineal, simétrico y eficiente el siguiente resultado es inmediato del Teorema 12.

Corolario 13. *El valor de Shapley es igual a (1.29) con*

$$\beta_s = \frac{s!(n-s!)}{n!}. \tag{1.31}$$

Demostración. Sustituyendo (1.31) en (1.29) se tiene que

$$\phi_i(N,\upsilon) = \frac{\upsilon(N)}{n} + \sum_{\substack{S \ni i \\ S \neq N}} \frac{(n-s)!(s-1)!}{n!}\upsilon(S) - \sum_{S \not\ni i} \frac{(n-s-1)!s!}{n!}\upsilon(S).$$

De aquí, notando que

$$\frac{(n-n)!(n-1)!}{n!} = \frac{1}{n},$$

y que $i \in N$, se tiene que

$$\phi_i(N,\upsilon) = \sum_{S \ni i} \frac{(n-s)!(s-1)!}{n!}\upsilon(S) - \sum_{S \not\ni i} \frac{(n-s-1)!s!}{n!}\upsilon(S).$$

Considerando $R = S \cup \{i\}$. entonces tenemos que $R \not\ni i$ y que $s = r+1$. Luego

$$\begin{aligned} \phi_i(N,\upsilon) &= \sum_{R \not\ni i} \frac{(n-r-1)!r!}{n!}\upsilon(R \cup \{i\}) - \sum_{R \not\ni i} \frac{(n-r-1)!r!}{n-r}\upsilon(R), \\ &= \sum_{R \not\ni i} \frac{(n-r-1)!r!}{n!}[\upsilon(R \cup \{i\}) - \upsilon(R)], \\ &= Sh_i(N,\upsilon). \end{aligned}$$

□

1.5. Conclusiones

Hasta ahora se han presentado los principales resultados en cuanto a soluciones de juegos cooperativos, descatando sus propiedades y axiomatizaciones, y a la vez sirviendo como una especie de repaso acerca de los conceptos básicos dentro de la teoría de juegos cooperativos. Con el estudio de este capítulo se pretendía dar todas las bases necesarias para abordar juegos con estructura coalicional, juegos con comunicación restringida y juegos en forma de función característica generalizada, los cuales se tratarán en los siguientes capítulos.

Capítulo 2

Juegos con estructura coalicional

Como se vio en el capítulo anterior, en la teoría de juegos cooperativos se asume que cualquier coalición se puede formar. Sin embargo, en muchas situaciones prácticas esto no es posible debido a la presencia de una estructura social, de comunicacion o económica establecida de antemano entre los jugadores. El estudio de juegos cooperativos con cooperación limitada, la cual se modela por medio de una estructura coalicional, fue iniciada en el año 1974 por Aumann y Dréze [1] y más tarde por Owen [34].

En el presente capítulo se presentaremos los conceptos básicos sobre cooperación limitida entre los jugadores, el valor de Owen para este tipo de juegos y nuevas propiedades que cumple el valor de Owen basadas en la capacidad de manipular el juego que tienen los jugadores.

2.1. Preliminares y definiciones

En todo lo que sigue consideramos un juego cooperativo $(N, v) \in J^N$ fijo.

Definición 12. *Dado un conjunto finito N, una estructura coalicional sobre N es una partición de N, es decir,*

$$B = \{B_1, \ldots, B_m\},$$

donde

1. $\bigcup_{k=1}^{m} B_k = N$,
2. $B_k \bigcap B_l = \emptyset$, *con* $k \neq l$.

Observación 5. 1. Los conjuntos $B_k \in B$ son llamados *uniones* o *bloques.*

2. Existen dos estructuras coalicionales triviales. La primera, la cual la denotamos por B^N, es cuando la gran coalición es formada, es decir, $B^N = \{N\}$; y la segunda es la estructura coalicional donde cada unión esta formada por un jugador y es denotada por B^n, esto es, $B^n = \{\{1\}, \{2\}, \ldots, \{n\}\}$.

En lo que resta del capítulo denotamos por $\mathcal{B}(N)$ el conjunto de estructuras coaliciones sobre N.

Definición 13. *Un juego con estructura coalicional es un triplete* (N, v, B) *donde* $(N, v) \in J^N$ *y* $B \in \mathcal{B}(N)$.

Un juego con estructura coalicional (N, v, B) es denotado por (B, v). Representamos por ECJ^N el conjunto de juegos con estructura coalcional con N como conjunto de jugadores.

Definición 14. *Para todo juego con estructura coalicional* $(B, v) \in ECJ^N$, *con* $B = \{B_1, \ldots B_m\}$ *el juego cociente es el juego* $(M, v_B) \in J^M$ *donde* $M = \{1, 2, \ldots, m\}$ *y*

$$v_B(T) = v\left(\bigcup_{i \in T} B_i\right), \qquad \forall T \subseteq M. \tag{2.1}$$

En el juego cociente (M, v_B) inducido por (B, v) se consideran los elementos de B como los jugadores. Observar que para la estructura coalicional B^n tenemos que $(M, v_B) \equiv (N, v)$.

Al considerar el juego cociente los axiomas de jugador nulo y jugadores simétricos tienen la siguente forma.

Definición 15. *Para* $k, l \in M$ *diremos que*

1. B_k *y* B_l *son simétricos en* (B, v), *si* k *y* l *son simétricos en el juego* (M, v_B),

2. B_k *es una coalición nula, si* k *es un jugador nulo en el juego cociente* (M, v_B).

Dada $B \in \mathcal{B}(N)$, para todo $k \in M$ y todo $S \subseteq B_k$, se denota por $B\mid_S$ la nueva estructura coalicional $(\cup_{j \neq k} B_j) \cup S$ la cual se genera cuando el complemento de S en B_k deja el juego, es decir,

$$B\mid_S = \{B_1, \ldots, B_{k-1}, S, B_{k+1}, \ldots, B_m\}. \tag{2.2}$$

Definición 16. *Un valor coalicional es una función* Φ *que asigna a cada juego con estructura coalicional* $(B, v) \in ECJ^N$ *un vector de pagos* $\Phi(B, v) \in \mathbb{R}^n$.

2.2. El valor de Owen

Uno de los valores coalicionales más importantes para juegos con estructura coalicional es el valor de Owen propuesto en Owen [34]. Este valor se puede calcular de la siguiente manera: Dado $(B, v) \in ECJ^N$ y $k \in M$, para todo $S \subseteq B_k$ denotamos $\bar{S} = B_k \setminus S$. Owen en [34] define un juego $(M, v_{B|_S}) \in J^N$ que describe lo que pasa en el juego cociente si el bloque B_k es reemplazado por $S \subseteq B_k$, es decir,

$$v_{B|_S}(T) = v\left(\bigcup_{j \in T} B_j \setminus \bar{S}\right), \qquad \forall T \subseteq M. \tag{2.3}$$

Luego, Owen define el *juego interno* $(B_k, v_k) \in J^N$ de la siguiente manera:

$$v_k(S) = Sh_k(M, v_{B|_S}), \qquad \forall S \subseteq B_k. \tag{2.4}$$

Así, $v_k(S)$ es el pago de S en el juego $v_{B|_S}$. El valor de Owen del juego (B, v) es el vector de pagos $Ow(B, v) \in \mathbb{R}^n$ definido por:

$$Ow_i(B, v) = Sh_i(B_k, v_k), \qquad \forall k \in M, \forall i \in B_k. \tag{2.5}$$

Este procedimiento tiene la siguiente interpretación: primero, el bloque k juego el juego cociente (M, v_B) entre los bloques; entonces, el pago obtenido es dividido entre sus miembros al resolver el juego interno (B_k, v_k). En ambos niveles de negociación los pagos son determinados utilizando el valor de Shapley.

Es claro que por la forma de calcular el valor de Owen, éste satisface la siguiente propiedad la cual se denomina la *propiedad del juego cociente*:

$$\sum_{i \in B_k} Ow_i(B, v) = Sh_k(M, v_B), \quad \text{para todo } k \in M. \tag{2.6}$$

Observar que para las estructuras coalicionales triviales B^N y B^n, se tiene que

$$Ow(B^N, v) = Ow(B^n, v) = Sh(N, v). \tag{2.7}$$

El valor de Owen puede ser calculado usando un procedimiento similar al utilizado para calcular el valor de Shapley dado en (1.19).

Definición 17. *Sea B una estructura coalicional sobre N y $\pi \in S_n$. Diremos que π es admisible con respecto a B si para todo $\{i, j, k\} \subseteq N$ y $l \in M$ tal que $\{i, k\} \subseteq B_l$, si $\pi(i) < \pi(j) < \pi(k)$, entonces $j \in B_l$. En otras palabras, π es admisible con respecto a B si los jugadores en todos los bloques de B aparecen de manera sucesiva en π.*

Denotamos por $\mathcal{A}(B, N)$ el conjunto de todas los órdenes admisibles (sobre N) respecto a B. Luego, el valor de Owen se puede calcular utilizando la siguiente formula:

$$Ow_i(B, v) = \frac{1}{\mid \mathcal{A}(B, N) \mid} \sum_{\pi \in \mathcal{A}(B,N)} \left[v(P_i^\pi \cup \{i\}) - v(P_i^\pi) \right], \quad \forall i \in N, \tag{2.8}$$

donde P_i^π denota el conjunto de predecesores de i en π, esto es,

$$P_i^\pi = \{j \in N : \pi(j) < \pi(i)\}. \tag{2.9}$$

Ahora, presentaremos los axiomas que caracterizan al valor de Owen. Antes de presentar los axiomas necesitaremos la siguiente definición:

Definición 18. *Sea Φ un valor coalicional. Denotamos por*

$$\Phi(B, v)[S] = \sum_{i \in S} \Phi_i(B, v), \qquad \forall S \subseteq N, \tag{2.10}$$

el pago que obtiene la coalición S de acuerdo a Φ .

Axioma 6. (Aditividad). *Una solución Φ satisface el axioma de aditividad si para todo $(B, v), (B', \omega) \in ECJ^N$, con $B = B'$ se cumple que:*

$$\Phi(B, v + \omega) = \Phi(B, v) + \Phi(B, \omega). \tag{2.11}$$

Axioma 7. (Eficiencia). *Una solución Φ satisface el axioma de eficiencia si para todo $(B, \upsilon) \in ECJ^N$ se cumple que:*

$$\Phi(B, \upsilon)[N] = \upsilon(N). \tag{2.12}$$

Axioma 8. (Simetría intercoalicional). *Una solución Φ satisface el axioma de simetría intercoalicional si para todo $(B, \upsilon) \in ECJ^N$, para todo $k \in M$ y para todo $\{i, j\} \subseteq B_k$, si i y j son jugadores simétricos en (N, υ), se cumple que:*

$$\Phi_i(B, \upsilon) = \Phi_j(B, \upsilon). \tag{2.13}$$

Axioma 9. (Simetría coalicional). *Una solución Φ satisface el axioma de simetría coalicional $(B, \upsilon) \in ECJ^N$ y para todo $\{k, l\} \subseteq M$, si B_k y B_l son jugadores simétricos en (B, υ), se cumple que:*

$$\Phi(B, \upsilon)[B_k] = \Phi(B, \upsilon)[B_l]. \tag{2.14}$$

Axioma 10. (Nulidad). *Una solución Φ satisface el axioma de nulidad sipara todo $(B, \upsilon) \in ECJ^N$ y para todo $i \in N$, si i es un jugdor nulo en (N, υ) se cumple que:*

$$\Phi_i(B, \upsilon) = 0. \tag{2.15}$$

Teorema 14 (Owen, [34])**.** *El valor de Owen es el único valor coalicional en ECJ^N que satisface los axiomas de aditividad, eficiencia simetría intercoalicional, simetría coalicional y nulidad.*

2.3. Propiedades adicionales del valor de Owen

En esta sección, se considera que (B, υ) y Φ están dados con anterioridad. Para $S \subseteq N$, se asume que los miembros en S deciden jugar juntos y dejar aquellos bloques a los que ellos pertenecen.

Definición 19. *Denotamos por $B'(S)$ la estructura coalicional inducida por este comportamiento de los miembros en S, es decir,*

$$B'(S) = \{B'_1, B'_2, \cdots, B'_m, S\}, \quad \textit{donde } B'_k = B_k \backslash S, \quad \forall B_k \in B. \tag{2.16}$$

Definición 20. *Se define $(N, \upsilon^*_\Phi) \in J^N$ donde la función característica υ^*_Φ esta dada por*

$$\upsilon^*_\Phi(S) = \Phi(B'(S), \upsilon)[S], \quad \forall S \subseteq N. \tag{2.17}$$

El juego $(N, \upsilon^*_\Phi) \in J^N$ es llamado el *juego de ganancia por asociación*, porque para todo $S \subseteq N$, $\upsilon^*_\Phi(S)$ representa la cantidad obtenida por S cuando los miembros de S deciden jugar como una unidad de colaboración y dejar a los bloques a los que pertenecían.

Definición 21. *Se define $(N, \upsilon^\diamond_\Phi)$, donde $\upsilon^\diamond_\Phi$ es dado por*

$$\upsilon^\diamond_\Phi(S) = \sum_{B_k : B_k \cap S \neq \emptyset} \Big[\Phi(B, \upsilon)[B_k] - \Phi(B'(S), \upsilon)[B'_k]\Big], \quad \textit{for all } S \subseteq N. \tag{2.18}$$

Así, $\upsilon^\diamond_\Phi(S)$ representa el cambio en los pagos de los bloques B_k donde $B_k \cap S \neq \emptyset$ es dado por la evento que causa la formación de la nueva estructura coalicional $B'(S)$. Por esta razón, $(N, \upsilon^\diamond_\varphi)$ es llamdo el *juego de pérdida por asociación.*

Lema 4. *Sea $(B, \upsilon) \in CSG^N$ un juego con estructura coalicional B. Entonces*

$$Ow(B, \upsilon_{Ow}^{\diamond})[B_k] = Ow(B, \upsilon)[B_k] = Ow(B, \upsilon_{Ow}^{*})[B_k], \quad \forall k \in M. \tag{2.19}$$

Demostración. Probaremos la identidad del lado izquierdo, porque para probar la del lado derecho se utilizan argumentos similares. De la propiedad del juego cociente, tenemos que $Ow(B, \upsilon)[B_k] = Sh_k(M, \upsilon_B)$. Entonces, calculando la valía de cada $B_k \in B$ en el juego $(N, \upsilon_{Ow}^{\diamond})$, podemos ver que:

$$\upsilon_{Ow}^{\diamond}(B_k) = Ow(B, \upsilon)[B_k]. \tag{2.20}$$

Definamos (M, υ_{Ow}^{B}), donde

$$\upsilon_{Ow}^{B}(T) = \sum_{t \in T} \upsilon_{Ow}^{\diamond}(B_t), \quad \forall T \subseteq M. \tag{2.21}$$

Luego, dado que el juego (M, υ_{Ow}^{B}) es aditivo, tenemos que:

$$Ow(B, \upsilon_{Ow}^{\diamond})[B_k] = Sh_k(M, \upsilon_{Ow}^{B}) = Ow(B, \upsilon)[B_k]. \tag{2.22}$$

□

Ahora, presentamos el resultado principal de este capítulo:

Teorema 15. *Para todo juego $(N, \upsilon) \in J^N$ con estructura coalicional B y para todo $i \in N$, tenemos que*

$$Ow_i(B, \upsilon_{Ow}^{\diamond}) = Ow_i(B, \upsilon) = Ow_i(B, \upsilon_{Ow}^{*}). \tag{2.23}$$

Demostración. Nuevamente, Probaremos la identidad del lado izquierdo, porque para probar la del lado derecho se utilizan argumentos similares. Probaremos que el resultado es válido para juegos con estructura coalicional con $B = B^n$. Para hacer esto, usaremos la expresión dada para el valor de Owen en (2.8). Así, el valor de Owen para $i \in N$ en el juego $(B, w_{\varphi}^{\diamond})$ es dado por:

$$Ow_i(B, \upsilon_{Ow}^{\diamond}) = \frac{1}{\mid \mathcal{A}(B, N) \mid} \sum_{\pi \in \mathcal{A}(B, N)} \left[\upsilon_{Ow}^{\diamond}(P_i^{\pi} \cup \{i\}) - \upsilon_{Ow}^{\diamond}(P_i^{\pi}) \right]. \tag{2.24}$$

Es fácil verificar que

$$\upsilon_{Ow}^{\diamond}(P_i^{\pi} \cup \{i\}) = \sum_{j \in P_i^{\pi} \cup \{i\}} Ow_j(B, \upsilon) \quad \text{y} \quad \upsilon_{Ow}^{\diamond}(P_i^{\pi}) = \sum_{j \in P_i^{\pi}} Ow_j(B, \upsilon). \tag{2.25}$$

Así,

$$\upsilon_{Ow}^{\diamond}(P_i^{\pi} \cup \{i\}) - \upsilon_{Ow}^{\diamond}(P_i^{\pi}) = Ow_i(B, \upsilon), \tag{2.26}$$

y

$$Ow_i(B, \upsilon_{Ow}^{\diamond}) = Ow_i(B, \upsilon). \tag{2.27}$$

Ahora probaremos que el resultado es válido cuando $B = B^N$. En este caso podemos ver que

$$\upsilon_{Ow}^{\diamond}(P_i^{\pi} \cup \{i\}) = \upsilon(N) - Ow(B'', \upsilon)[B_r \backslash \{i\}], \tag{2.28}$$

y

$$\upsilon^{\diamond}_{Ow}(P_i^{\pi}) = \upsilon(N) - Ow(B', \upsilon)[B_r], \tag{2.29}$$

donde $B'' = \{\{P_i^{\pi} \cup \{i\}\}, \{B_r \backslash \{i\}\}\}$ y $B' = \{\{P_i^{\pi}\}, \{B_r\}\}$ con $B_r = N \backslash P_i^{\pi}$.
Dado que

$$Ow(B'', \upsilon)[B_r \backslash \{i\}] = \upsilon(B_r \backslash \{i\}) + \frac{\upsilon(N) - \upsilon(B_r \backslash \{i\}) - \upsilon(P_i^{\pi} \cup \{i\})}{2}, \tag{2.30}$$

$$Ow(B', \upsilon)[B_r] = \upsilon(B_r) + \frac{\upsilon(N) - \upsilon(B_r) - \upsilon(P_i^{\pi})}{2}, \tag{2.31}$$

entonces

$$\upsilon^{\diamond}_{Ow}(P_i^{\pi} \cup \{i\}) - \upsilon^{\diamond}_{Ow}(P_i^{\pi}) = \frac{\upsilon(B_r) - \upsilon(B_r \backslash \{i\}) + \upsilon(P_i^{\pi} \cup \{i\}) - \upsilon(P_i^{\pi})}{2}. \tag{2.32}$$

En este caso es fácil verificar que existe $\pi' \in \mathcal{A}(B, N)$ tal que

$$P_i^{\pi'} \cup \{i\} = N \backslash \{P_i^{\pi}\} = B_r,$$

y

$$P_i^{\pi} = N \backslash \{P_i^{\pi'} \cup \{i\}\} = B_r \backslash \{i\}.$$

Así, concluimos que

$$\begin{aligned} Ow_i(B, \upsilon^{\diamond}_{Ow}) &= \frac{1}{|\mathcal{A}(B, N)|} \sum_{\mathcal{A}(B,N)} \left[\frac{\upsilon(B_r) - \upsilon(B_r \backslash \{i\})}{2} + \frac{\upsilon(P_i^{\pi} \cup \{i\}) - \upsilon(P_i^{\pi})}{2} \right] \\ &= Ow_i(B, \upsilon). \end{aligned}$$

En general $m \geq 2$ y, cuando existe al menos una coalición $B_k \in B$ talque $|B_k| \geq 2$, usaremos el Lema 4.

Es bien conocido que el valor de Owen satisface el axioma de contribuciones balanceadas entre coaliciones (ver Calvo et al., [8]). Esto es, para cualesquiera $i, j \in B_k \in B$ tenemos que

$$Ow_i(B, \upsilon) - Ow_i(B \setminus \{j\}, \upsilon) = Ow_j(B, \upsilon) - Ow_j(B \setminus \{i\}, \upsilon). \tag{2.33}$$

Sumando sobre todos los jugadores $j \in B_k \setminus \{i\}$ en la última expresión, tenemos que

$$\begin{aligned} |B_k - 1| Ow_i(B, \upsilon) &= \sum_{j \in B_k \setminus \{i\}} Ow_j(B, \upsilon) - \sum_{j \in B_k \setminus \{i\}} Ow_j(B \setminus \{i\}, \upsilon) \\ &\quad + \sum_{j \in B_k \setminus \{i\}} Ow_i(B \setminus \{j\}, \upsilon), \end{aligned}$$

la cual puede ser escrita como sigue:

$$|B_k| \; Ow_i(B, \upsilon) = Ow(B, \upsilon)[B_k] - Ow(B \setminus \{i\}, \upsilon)[B_k \setminus \{i\}] + \sum_{j \in B_k \setminus \{i\}} Ow_i(B \setminus \{j\}, \upsilon). \tag{2.34}$$

En el resto de la demostración, usaremos inducción matemática. Considerar el caso donde $|B_k| = 2$. Entonces, tenemos que $B_k = \{i, j\}$ y así,

$$B \setminus \{j\} = \{B_1, ..., B_{k-1}, B_k^*, B_{k+1}, ..., B_m\}, \tag{2.35}$$

donde $B_k^* = \{i\}$. Usando el Lema 2en (2.35) tenemos que

$$\begin{aligned} 2\ Ow_i(B,\upsilon) &= Ow(B,\upsilon)[B_k] - Ow(B\setminus\{i\},\upsilon)[B_k\setminus\{i\}] + Ow(B\setminus\{j\},\upsilon)[B_k^*], \\ &= Ow(B,\upsilon^{\diamond}_{Ow})[B_k] - Ow(B\setminus\{i\},\upsilon^{\diamond}_{Ow})[B_k\setminus\{i\}] \\ &\quad +Ow(B\setminus\{j\},\upsilon^{\diamond}_{Ow})[B_k^*], \\ &= 2\ Ow_i(B,\upsilon^{\diamond}_{Ow}), \end{aligned}$$

Así,

$$Ow_i(B,\upsilon) = Ow_i(B,\upsilon^{\diamond}_{Ow}). \tag{2.36}$$

Supongamos que el teorema es válido para coaliciones $B_k \in B$ tal que $|B_k| = s$. Probaremos que es válido cuando $|B_k| = s+1$. Para hacer esto, reescribir (2.34) donde $|B_k| = s+1$. De donde

$$(s+1)\ Ow_i(B,\upsilon) = Ow(B,\upsilon)[B_k] - Ow(B\setminus\{i\},\upsilon)[B_k\setminus\{i\}] + \sum_{j\in B_k\setminus\{i\}} Ow_i(B\setminus\{j\},\upsilon).$$

La suma de la ecuación anterior involucra el valor de Owen para $i \in B_k$. Por hipótesis de inducción , esto es igual a valor de Owen en el juego $(N, w^{\diamond}_{\varphi})$, y por el Lema 4 tenemos que

$$\begin{aligned} (s+1)\ Ow_i(B,\upsilon) &= Ow(B,\upsilon)[B_k] - Ow(B\setminus\{i\},\upsilon)[B_k\setminus\{i\}] + Ow(B\setminus\{j\},\upsilon)[B_k^*], \\ &= (s+1)\ Ow_i(B,\upsilon^{\diamond}_{Ow}). \end{aligned}$$

Entonces, concluimos que

$$Ow_i(B,\upsilon) = Ow_i(B,\upsilon^{\diamond}_{Ow}). \tag{2.37}$$

□

2.4. Conclusiones

En este capítulo se presentan los juegos con estructura coalicional y la solución de Owen para este tipo de juegos. Además, se consideran dos nuevas propiedades que cumple este valor. La satisfacción de estas propiedades establecidas en el Teorema 8 viene a proveer una mayor estabilidad a dicho valor, ya que se demuestra que es inmune ante cierto tipo de manipulaciones de los jugadores dadas en los juegos $\upsilon^{\diamond}_{Ow}$ y υ^{*}_{Ow}.

Una línea de investigación adicional la constituye la caracterización de este valor utilizando las propiedades mecionadas así como otras propiedades relavantes en la literarura de juegos con estructura coalicional.

Capítulo 3

Juegos con comunicación restringida

Los juegos cooperativos son una herramienta efectiva para resolver problemas de asignación entre un conjunto de agentes cuando ellos están dispuestos a cooperar. Una situación interesante en el estudio de los juegos surge al considerar que una estructura de cooperación existe entre los jugadores antes de que el juego se realice. Myerson [32] estudió esta situación cuando la estructura de cooperación está dada por una gráfica. Bajo este modelo, el conjunto de nodos representa el conjunto de jugadores y las aristas representan lazos de cooperación directa entre los jugadores.

En este capítulo estudiamos el caso en donde la gráfica es un bosque, es decir, cada componente de la gráfica es un árbol y proponemos un familia de soluciones para este tipo de juegos las cuales tienen una expresión simple y una interpretación basada en transferencias entre los jugadores.

3.1. Preliminares y definiciones

3.1.1. Gráficas

En este capítulo utilizaremos la notación dada Myerson [32] para denotar gráficas. Esta notación difere de la usual en teoría de gráficas que será adoptada en el Capítulo 5.

Sea $N := \{1, \dots, n\}$ un conjunto de nodos.

Definición 22. *Una gráfica en N está definida como un conjunto de pares no ordenados de diferentes elementos de N. Nos referimos a cada uno de estos pares como una arista.*

Denotamos la *gráfica completa* de N como $g^N := \{\{i,j\} \mid i,j, \in N, i \neq j\}$ y el conjuntos de las posibles gráficas con nodos en N por $GR^N := \{g \mid g \subseteq g^N\}$. Para $g \in GR^N$, $n(g)$ representa el conjunto de nodos de las aristas de g y $|n(g)|$ la cardinalidad de $n(g)$. Para $S \subseteq N$, definimos la gráfica que se obtiene al restringir el conjunto de nodos de g a S como

$$g(S) := \{\{i,j\} \in g \mid \{i,j\} \subseteq S\}.$$

A continuación presentamos los conceptos necesarios para el desarrollo de este capítulo.

Definición 23. *Dada una gráfica $g \in GR^N$,*

1. *Un camino en g es una secuencia de nodos $i_1, \ldots, i_k$ tal que*

$$\{\{i_j, i_{j+1}\}\}_{j=1}^{k-1} \subseteq g.$$

2. *Un camino es llamado un ciclo si todos los nodos del camino son diferentes, excepto $i_1 = i_k$.*

3. *Dos nodos $i, j \in N$ están conectados en g si $i = j$ o existe un camino en g donde $i_1 = i, i_k = j$. Un nodo es aislado si no está conectado con otro. El conjunto de nodos aislados de g es denotado por $I(g)$.*

Así, diremos que g está *conectada* si cualquiera dos nodos en $n(g)$ están conectados. Un nodo aislado es considerado conectado. Una gráfica $g' \in GR$ es llamada una *subgráfica* de g si $g' \subseteq g$. Una subgráfica g' de g es conocida como una *componente* de g si g' es conectada y cada par de nodos $i \in n(g'), j \in n(g) \setminus n(g')$ no están conectados.

El conjunto de componentes de g es denotado por $C(g)$, y C_i denota la componente en $C(g)$ que contiene el nodo $i \in n(g)$. Además, el conjunto de nodos en la misma subgráfica que i será representada como $N_i := n(C_i)$. El conjunto de todas las subgráficas en g es denotada por $\widehat{C}(g)$.

Definición 24. *Una gráfica $g \in GR^N$ es un árbol si es conectada y no tiene ciclos.*

Denotamos el conjunto de todos los árboles en GR^N como T^N. De lo anterior es claro que $T^N \subset GR^N$. Una gráfica $g \in GR^N$ tal que $g' \in C(g)$ es un árbol, es conocido como un *bosque* o una *gráfica libre de ciclos*. El conjunto de todas las gráficas libre de ciclos será denotada como F^N.

Definición 25. *Una orientación de una gráfica $g \in GR^N$ es una gráfica dirigida d obtenida a partir de g al remplazar cada arista $\{i, j\}$ por la arista dirigida (i, j) o (j, i).*

3.1.2. Juegos de bosques

Definición 26. *Un juego de gráficas sobre N es un par (v, g) tal que $v \in J^N$ y $g \in GR^N$, donde g representa una estructura de cooperación entre los jugadores.*

En este caso, cada arista de g representa una relación de comunicación bidireccional entre dos jugadores. En un juego de gráficas, sólamente las coaliciones conectadas están permitidas a cooperar. En el resto del capítulo, nos enfocaremos sobre el conjunto de juegos de bosques, es decir, el conjunto de todos los pares (v, g) donde $v \in J^N$ y $g \in F^N$.

Denotamos como FG^N el subconjunto de todos los juegos de gráficas donde la gráfica es un bosque.

Definición 27. *Una solución sobre FG^N es un operador φ que asigna a cada $(v, g) \in FG^N$ un vector de pago $\varphi(v, g) \in \mathbb{R}^n$.*

Sobre la clase de juegos de bosques FG^N, Herings et al. [23] introdujo y caracterizó una solución que se conoce en la literatura como la *solución de árbol promedio*, que es caracterizada por los siguientes axiomas:

Axioma 11. (Eficiencia por componentes, Myerson [32]). Una solución $\varphi : FG^N \to \mathbb{R}^n$ es *eficiente por componentes*, si

$$\sum_{i\in n(C)} \varphi_i(v,g) = v(n(C)), \qquad \forall C \in C(g). \tag{3.1}$$

para todo $g \in F^N$.

Este axioma requiere que, para cada componente $C \in C(g)$, la solución asigna la cantidad $v(n(C))$ entre los jugadores en $n(C)$.

Sea $C \in C(g)$ una componente de una gráfica. Al eliminar la arista $\{i,j\} \in C$ provoca la divisón de la componente C en dos árboles. Para cada arista $\{i,j\} \in g$, denotamos por $C_{ij} := \{C \in C(g \setminus \{i,j\}) \mid i \in n(C)\}$ la componente en $g \setminus \{i,j\}$ que contiene al nodo i después de eliminar la arista $\{i,j\}$ y por $N_{ij} := n(C_{ij})$ el conjunto de nodos en la misma componente del nodo i después de eliminar la arista $\{i,j\}$.

Axioma 12. (Justicia por componentes, Herings et al. [23]) Una solución $\varphi : FG^N \to \mathbb{R}^n$ satisface el axioma de *justicia por componente* axiom si

$$\frac{1}{|N_{ij}|}\sum_{h\in N_{ij}} \left[\varphi_h(v,g) - \varphi_h(v,g')\right] = \frac{1}{|N_{ji}|}\sum_{h\in N_{ji}} \left[\varphi_h(v,g) - \varphi_h(v,g')\right], \tag{3.2}$$

para todo $g \in F^N$ y para todo $\{i,j\} \in g$, donde $g' = g \setminus \{i,j\}$.

De acuerdo con este axioma, si eliminamos la arista $\{i,j\}$ de g, la pérdida (o beneficio) promedio en los pagos de los jugadores en N_{ij} y en N_{ji} debe ser igual.

La solución de árbol promedio puede ser expresada como el promedio de vectores de contribución marginales, los cuales necesitan de algunas definiciones para ser descritos. Seguiremos a Herings et al. [23] en esta descripción:

Un árbol con raíz t_r en la subgráfica $g(n(C))$, es una orientación que se origina de una componente C en el bosque g seleccionando un nodo $r \in n(C)$, que llamaremos *raíz*, y direccionando todos las aristas de $g(n(C))$ que salen de r.

Para un árbol dado $g(n(C))$, cada agente $r \in C$ es la raíz de exactamente un árbol con raíz t_r en $g(n(C))$. Observar que para cualquier árbol con raíz t_r en C, para cualquier nodo $k \in n(C) \setminus \{r\}$, existe exactamente un arista dirigida (j,k); donde el nodo j es el único *predecesor* de k y k es un *sucesor* de j en t_r. Denotemos por $s_r(j)$ el conjunto, posiblemente vacío, de sucesores de un agente j en t_r. Un agente k es un *subordinado* de j en t_r si existe un camino dirigido de j a k. El conjunto $S_r(j)$ denota la unión de todos los subordinados de j en t_r y $\{j\}$.

Consideremos el juego de gráficas libre de ciclos $(v,g) \in FG^N$, una componente $C \in C(g)$, y un nodo raíz $r \in n(C)$. Luego un vector de contribución marginal $m^r(v,g)$ en $\mathbb{R}^{|n(C)|}$ es definido como sigue:

$$m_i^r(v,g) = v(S_r(i)) - \sum_{j\in s_r(i)} v(S_r(j)), \qquad \forall i \in n(C).$$

La contribución marginal $m_i^r(v,g)$ de $i \in n(C)$ en t_r es igual al valor de la coalición consistiendo del agente i y de todos sus subordinados en t_r menos la suma de los valores de las coaliciones consistiendo de cualquier sucesor de i y todos los subordinados de este sucesor en t_r.

La solución de árbol promedio es la solución AT que asigna a cada $(v,g) \in FG^N$ el vector de pagos en el cual el agente i en una componente $C \in C(g)$ obtiene el promedio sobre $r \in n(C)$ de $m_i^r(v,g)$:

$$AT_i(v,g) = \frac{1}{|n(C)|} \sum_{r \in n(C)} m_i^r(v,g), \qquad \forall C \in C(g), \forall i \in n(C). \tag{3.3}$$

Para un estudio más detallado de la solución de árbol promedio ver Herings et al. [24] y Baron et al. [3].

3.2. Una familia de soluciones

En esta sección presentamos una generalización del axioma de justicia por componentes. Con este axioma más el axioma de eficiencia por componentes, obtendremos una expresión para una familia de soluciones para juegos de bosques. Representaremos el conjunto de los números reales estrictamente mayores que cero como $\mathbb{R}_{++}$.

Axioma 13. (Justicia por componentes generalizada). Una solución $\varphi : FG^N \to \mathbb{R}^n$ satisface el axioma de *justicia por componentes generalizada* si

$$\frac{1}{\alpha_{ij}} \sum_{h \in N_{ij}} \left[\varphi_h(v,g) - \varphi_h(v,g')\right] = \frac{1}{\alpha_{ji}} \sum_{h \in N_{ji}} \left[\varphi_h(v,g) - \varphi_h(v,g')\right], \tag{3.4}$$

para todo $g \in F^N$, para todo $\{i,j\} \in g$ donde $g' = g \setminus \{i,j\}$ y $\alpha_{ij}, \alpha_{ji} \in \mathbb{R}_{++}$ para todo $\{i,j\} \in g$.

Cuando una arista $\{i,j\}$ es removida, dos nuevos árboles se forman. La constante α_{ij} está relacionada con el árbol que contiene al nodo i después de remover la arista y similarmente para α_{ji}. Estas constantes indican que el cambio en los pagos de los jugadores en cada componente es ponderado dado a la eliminación de la arista $\{i,j\}$.

En la misma dirección de Béal et al. [5] podemos relacionar el axioma de justicia por componentes generalizado con una solución a problemas de bancarrota, donde las componentes C_{ij} y C_{ji} tiene que negociar la creación de la arista $\{i,j\}$.

Así, si consideramos soluciones que satisfacen el axioma de eficiencia por componentes, una opción natural para considerar como el punto de desacuerdo es el punto $(v(N_{ij}), v(N_{ji}))$. Además, asumiendo que el juego es superaditivo, es decir, $v(N_i) \geq v(N_{ij}) + v(N_{ji})$ para toda arista $\{i,j\} \in g$, se tiene que el conjunto acuerdos factibles está dado por $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x+y \leq v(N_i)\}$. Si el poder de negociación de las coaliciones N_{ij} y N_{ji} durante la negociación está dado por $\alpha_{ij}/(\alpha_{ij}+\alpha_{ji})$ y $\alpha_{ji}/(\alpha_{ij}+\alpha_{ji})$ respecticamente, la solución asimétrica de Nash, ver Binmore et al. [6], para este problema de negociación es precisamente dada por nuestro axioma de justicia por componentes generalizada.

Teorema 16. *Dados* $(\upsilon, g) \in FG^N$ *y* $\alpha_{ij}, \alpha_{ji} \in \mathbb{R}_{++}$ *para todo* $\{i,j\} \in g$, *existe una única solución* $\varphi(\upsilon, g)$ *que satisface los axiomas de eficiencia por componentes y justicia por componentes generalizada.*

Demostración. Sea (υ, g) un juego de bosques y $\varphi : FG^N \to \mathbb{R}^n$ una solución que satisface los axiomas de eficiencia por componentes y justicia por componentes generalizada. Sea $\{i,j\}$ una arista de g. Así,

$$\alpha_{ji}\left[\sum_{h\in N_{ij}} \varphi_h(\upsilon, g) - \upsilon(N_{ij})\right] = \alpha_{ij}\left[\sum_{h\in N_{ji}} \varphi_h(\upsilon, g) - \upsilon(N_{ji})\right].$$

Observar que para todo $C \in C(g)$, tenemos que

$$\sum_{i\in n(C)} \sum_{\{i,j\}\in g} \frac{\alpha_{ji}\upsilon(N_{ij}) - \alpha_{ij}\upsilon(N_{ji})}{\alpha_{ij} + \alpha_{ji}} = 0.$$

Ahora, consideremos que para toda arista$\{i,j\} \in g$,

$$\sum_{h\in N_{ij}} \varphi_h(\upsilon, g) = \frac{\alpha_{ij}}{\alpha_{ij} + \alpha_{ji}}\upsilon(N_i) + \left[\frac{\alpha_{ji}\upsilon(N_{ij}) - \alpha_{ij}\upsilon(N_{ji})}{\alpha_{ij} + \alpha_{ji}}\right]. \tag{3.5}$$

La expresión anterior indica la suma de las soluciones para todos los jugadores en N_{ij}. Eliminando las otras aristas que son incidentes al nodo i, $\{h,i\} \in g$, $h \neq j$, obtenemos expresiones similares para uno de los nodos en N_{hi}. Ahora, restando estas expresiones de (3.5), tenemos que

$$\begin{aligned}\varphi_i(\upsilon, g) = &\left(\frac{\alpha_{ij}}{\alpha_{ij} + \alpha_{ji}} - \sum_{\{i,h\}\in g, h\neq j} \frac{\alpha_{hi}}{\alpha_{ih} + \alpha_{hi}}\right)\upsilon(N_i) \\ &+ \sum_{\{i,h\}\in g}\left[\frac{\alpha_{hi}\upsilon(N_{ih}) - \alpha_{ih}\upsilon(N_{hi})}{\alpha_{ih} + \alpha_{hi}}\right].\end{aligned}$$

Luego, por manipulación algebraica, obtenemos la siguiente expresión

$$\varphi_i(\upsilon, g) = \left(1 - \sum_{\{i,h\}\in g} \frac{\alpha_{hi}}{\alpha_{ih} + \alpha_{hi}}\right)\upsilon(N_i) + \sum_{\{i,h\}\in g}\left[\frac{\alpha_{hi}\upsilon(N_{ih}) - \alpha_{ih}\upsilon(N_{hi})}{\alpha_{hi} + \alpha_{ih}}\right]. \tag{3.6}$$

Por lo tanto, dado un conjunto de constantes $\alpha_{ij}, \alpha_{ji} \in \mathbb{R}_{++}$ para cada $\{i,j\} \in g$, la solución previa está determinada de manera única. □

Béal et al. [5], consideran una versión débil del axioma de justicia por componente generalizada, llamado el axioma de *componentes ponderadas*, con la restricción $\beta_{ij}+\beta_{ji} = 1$ para $\beta_{ij}, \beta_{ji} \in \mathbb{R}_{++}$ para cada $\{i,j\} \in g$. Ellos obtienen una familia de soluciones con la siguiente expresión:

$$\varphi_i^{\beta}(\upsilon, g) = \upsilon(N_i) - \sum_{\{i,j\}\in g} \upsilon(N_{ij}) - \sum_{\{i,j\}\in g} \beta_{ij}[\upsilon(N_i) - \upsilon(N_{ij}) - \upsilon(N_{ji})], \tag{3.7}$$

para toda $C \in C(g)$, y para todo $i \in n(C)$.

Tomando en cuenta las últimas dos expresiones, cualquier especificación del axioma de justicia por componentes generalizada dada por un par $\alpha_{ij}, \alpha_{ji} \in \mathbb{R}_{++}$ para cada $\{i, j\} \in g$ induce el sistema de pesos β como los considerados en Béal et al. [5] tal que $\beta_{ji} = \frac{\alpha_{ji}}{\alpha_{ji}+\alpha_{ij}}$ y $\beta_{ij} = \frac{\alpha_{ij}}{\alpha_{ij}+\alpha_{ji}}$.

Estas expresiones explican por qué un ejemplo de justicia por componentes ponderado con algún sistema de pesos no nulos no puede ser obtenido por una especificación de justicia por componente generalizada. Como una consecuencia el Teorema 16 provee una expresión ligeramente más general para una familia de soluciones.

Para todo $g \in F^N$ denotamos como $\mathfrak{F}(g)$ el conjunto de soluciones que satisfacen los axiomas de eficiencia por componentes y justicia por componentes generalizada, con conjunto de constantes $\alpha_{ij}, \alpha_{ji} \in \mathbb{R}_{++}$ para cada $\{i, j\} \in g$.

La expresión (3.6) indica cómo es el proceso de determinación del vector de pago de acuerdo a una solución de juegos de bosques que satisface los axiomas de eficiencia por componentes y justicia por componentes generalizada: primero, el valor de la componente que contiene al nodo i es dividido proporcionalmente entre los agentes en esa componente de acuerdo a los pesos $1 - \sum_{\{i,h\}\in g} \frac{\alpha_{hi}}{\alpha_{ih}+\alpha_{hi}}$. Después, hay varias transferencias entre el nodo i y todos los nodos h que están conectados directamente con el nodo i: el jugador i recibe $\alpha_{hi}v(N_{ih})/(\alpha_{hi} + \alpha_{ih})$ del jugador h, pero el jugador h recibe $\alpha_{ih}v(N_{hi})/(\alpha_{hi} + \alpha_{ih})$ del jugador i. Al final de todas estas transferencias, el vector de pagos final para el jugador i en el juego de bosques $(v, g) \in FG^N$ está dado por (3.6).

Así, obtenemos nuevas soluciones basadas en una forma natural de calcular los pesos α_{ij} y α_{ji} caracterizados de manera única por los axiomas de eficiencia por componentes y justicia por componentes generalizada con estos pesos dados en la ecuación (3.5).

3.3. Casos particulares

Proposición 17. *Para todo $(v, g) \in FG^N$, la solución de árbol promedio pertenece a $\mathfrak{F}(g)$. Además, esta solución tiene la siguiente expresión:*

$$AT_i(v, g) = \frac{v(N_i)}{|N_i|} + \sum_{\{i,j\}\in g} \left[\frac{|N_{ji}|v(N_{ij}) - |N_{ij}|v(N_{ji})}{|N_i|}\right], \tag{3.8}$$

para todo $i \in N$.

Demostración. Para todo $(v, g) \in FG^N$, es claro que la solución de árbol promedio pertenece a $\mathfrak{F}(g)$ tomando $\alpha_{ij} = |N_{ij}|$ para casa arista $\{i, j\} \in g$. Entonces, aplicamos los resultados del Teorema 16. Consideramos que para todo arista $\{i, j\} \in g$,

$$\sum_{h\in N_{ij}} \varphi_h(v, g) = \frac{|N_{ij}|v(N_i)}{|N_{ij}| + |N_{ji}|} + \frac{|N_{ji}|v(N_{ij}) - |N_{ij}|v(N_{ji})}{|N_{ij}| + |N_{ji}|}. \tag{3.9}$$

Luego, por el axioma de eficiencia por componente, tenemos que

$$v(N_i) = \sum_{h\in N_{ij}} \varphi_h(v, g) + \sum_{h\in N_{ji}} \varphi_h(v, g).$$

Reemplanzando la última expresión en (3.9) y por manipulación algebraica, obtenemos (3.3). □

La expresión (3.8) proporciona una formulación alternativa para la solución del árbol promedio dada por (3.3). En nuestra expresión observamos que los pagos están asignados de la siguiente manera. Primero, la valía de cada componente es dividida equitativamente entre los jugadores en la componente. Luego, varias transferencias son realizadas entres cada para par de nodos conectados. Para un jugador $i \in N$, y considerando que $|N_i| \neq 1$, eliminamos una a una las aristas incidentes a i, $\{i, j\}$. Luego, el jugador j da $|N_{ij}|/|N_i|$ del valor de su componente resultante, $v(N_{ji})$, al jugador i. Por otro lado, el jugador i da $|N_{ji}|/|N_i|$ de $v(N_{ij})$ al jugador j. Así, el pago está dado en (3.8) y es el resultado de este proceso.

Proponiendo diferentes valores para las constantes α_{ij}, α_{ji} para cada arista $\{i, j\} \in g$ en (3.4), obtenemos soluciones alternativas.

Axioma 14. (Igual trato por componentes, Béal et al. [4]). Una solución $\varphi : FG^N \to \mathbb{R}^n$ satisface el axioma *igual trato por componentes* si, para toda $g \in F^N$ y para toda arista $\{i, j\} \in g$, la siguiente expresión se cumple:

$$\sum_{h \in N_{ij}} \left[\varphi_h(g) - \varphi_h(g')\right] = \sum_{h \in N_{ji}} \left[\varphi_h(g) - \varphi_h(g')\right],$$

donde $g' = g \setminus \{i, j\}$.

Este axioma establece que la pérdida (o beneficio) que los agentes en N_{ij} y N_{ji} obtienen al remover la arista $\{i, j\}$ debe ser igual para cada uno de estos conjuntos.

Dada una gráfica $g \in GR^N$ y un nodo $i \in N$, definimos el *grado* de i, $\deg_i(g) := |\{j \in N \mid \{i, j\} \in g\}|$, como el número de nodos en g conectados con i.

Teorema 18. *Existe una única solución $\varphi : FG^N \to \mathbb{R}^n$ que satisface los axiomas de eficiencia por componentes e igual trato por componentes. Además, esta solución tiene la siguiente formulación:*

$$\varphi_i(v, g) = \left(1 - \frac{1}{2}\deg_i(g)\right) v(N_i) + \frac{1}{2} \sum_{\{i,j\} \in g} \left[v(N_{ij}) - v(N_{ji})\right], \tag{3.10}$$

para todo $i \in N$, $g \in F^N$.

Demostración. El resultado se sigue si tomamos $\alpha_{ij} = \alpha_{ji} = c$ en la expresión (3.6). □

La solución dada en (3.10) es llamada como la *solución de orientación promedio* en Béal et al. [4]. Esta solución proporciona un proceso de deteminación de los pagos a los jugadores en un juego de bosques. Primero, la valía de cada componente $C \in C(g)$ es dividida entre los nodos que la forman, donde el jugador $i \in n(C)$ recibe la proporción $1 - \deg_i(g)/2$ de $v(N_i)$. Luego, una serie de transferencias entre cada par de nodos conectados son hechas. Cada jugador i paga $v(N_{ji})/2$ al jugador j por cada $\{i, j\} \in g$. Además, el jugador i también recibe $v(N_{ij})/2$ del jugador j. Después de todas estas transferencias, el pago resultante está indicado por (3.10). Es importante destacar que nuevamente obtenemos una expresión diferente para esta solución en comparación con la obtenida por Béal et al. [5].

Después de cierta manipulación algebraica, la solución dada en (3.10) puede ser escrita como sigue:

$$\varphi_i(v,g) = v(N_i) - \sum_{\{i,j\}\in g}\left[\frac{v(N_i)-v(N_{ij})+v(N_{ji})}{2}\right], \qquad \forall i \in N.$$

Así, si asumimos que el juego es superaditivo, el proceso de determinación de los pagos de acuerdo a (3.10) puede ser interpretado como sigue: primero, cada jugador i en una componente $C \in C(g)$ recibe $v(N_i)$. Después de eso, para toda arista $\{i,j\} \in C$, las componentes C_{ij} and C_{ji} resuelven un problema de la prenda en disputa con reclamos $v(N_{ij})$ y $v(N_{ji})$ respectivamente sobre el estado $v(N_i)$, de acuerdo a la recomendación del Talmud. Entonces, el jugador i descuenta para su pago la solución a este problema para la componente C_{ij}. Después de todas estos descuentos, el pago final para el jugador i está dado por (3.10). Para información adicional acerca del problema de la prenda en disputa y la solución propuesta en el Talmud ver Aumann y Maschler [2].

3.4. Propiedades adicionales

En esta sección demostramos que todo miembro de la familia de soluciones $\mathfrak{F}(g)$ satisface otras propiedades bien conocidas dentro de la teoría de juegos cooperativos.

Axioma 15. (Igual trato de jugadores vitales, Jackson [28]) Una solución $\varphi : FG^N \to \mathbb{R}^n$ satisface el axioma de *igual trato de jugadores vitales* si para cada $S \subseteq N$ tal que $S = n(C)$ para algún $C \in C(g)$ o $S = \{j\}$ para algún $j \in I(g)$:

$$\varphi_i(u_S, g) = \begin{cases} 1/s, & \text{si } i \in S, \\ 0, & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

Supongamos que es necesario la cooperación de todos los jugadores en una compa-nente para obtener una cantidad de una unidad. De otra manera, ellos no obtienen nada. Así, el axioma anterior establece que los pagos para los jugadores en la componente debe de ser tal que la unidad es dividida equitativamente entre ellos.

Sea $v \in J^N$ y $S \subseteq N$. Para todo $g \in GR^N$, denotamos como $g_S := g \cap g^S$ la subgráfica en g restringida a los nodos en S.

Axioma 16. (Descomposición en componentes, van den Nouweland [40]). Una solución $\varphi : FG^N \to \mathbb{R}^n$ satisface el axioma de *descomposición en componentes* si para todo $S \subseteq N$ tal que $S = n(C)$ para algún $C \in C(g)$, o $S = \{j\}$ para todo $j \in I(g)$ la siguiente condición se cumple:

$$\varphi_i(v,g) = \varphi_i(v_S, g_S),$$

para todo $i \in S$ y $g \in F^N$.

Esta propiedad establece que la solución para los jugadores en una componente no depende de cómo los otros jugadores están organizados en las otras componentes.

Teorema 19. *Sea $\varphi : FG^N \to \mathbb{R}^n$ una solución en $\mathfrak{F}(g)$. Entonces, φ satisface los axiomes de (a) linealidad en J^N, (b) igual trato de jugadores vitales y (c) descomposición en componentes.*

Demostración. (a) Para probar que (3.6) es una solución en J^N, nosotros necesitamos calcular la solución (3.6) sustituyendo el juego $(\lambda_1 \upsilon_1 + \lambda_2 \upsilon_2)$ en el lugar de $\upsilon \in G^N$. Entonces, aplicando la definición de la suma de dos juegos, distribuyendo y reorganizando los términos, el resultado es obtenido.

(b) Sean g una gráfica en T^N y $S \subseteq N$ una coalición tal que $S = n(C)$ para algún $C \in C(g)$ o $S = \{j\}$ con $j \in I(g)$; observar que $u_S(N_{ij}) = u_S(N_{ji}) = 0$ para todo $\{i, j\} \in g$. Considerando lo anterior el resultado se sigue.

(c) Es directo ver que la solución (3.6), para un jugador $i \in N$, solamente toma en cuenta las subgráficas en la misma componente que i. Así, claramente, restringiendo el juego de gráficas en esa componente, el pago para los jugadores en esa componente debe ser igual.

□

3.5. Conclusiones

Con el último resultado, finalizamos nuestro estudio sobre la familia de soluciones $\mathfrak{F}(g)$ para juegos de gráficas, con $\varphi \in \mathfrak{F}(g)$. El resultado dado en (3.6) proporciona un forma sobre cómo generar nuevas soluciones para este tipo de juegos: es suficiente considerar una manera diferente y resonable sobre cómo los cambios en los pagos de las componentes deben de ser dado la desconexión de dos nodos, y cómo este hecho define el conjunto de constantes α_{ij}, α_{ji} para cada $\{i, j\} \in g$ de manera única.

Una línea adicional de investigación es la siguiente: en Herings et al. [23] una caracterización de la solución de árbol promedio con el axioma de linealidad es presentada. Así una pregunta natural es ¿es posible caracterizar la famila de soluciones $\mathfrak{F}(g)$ con una caracterización (ajustada) usando esta propiedad? Si no es posible obtener tal caracterización, podría ser interesante estudiar otras propiedades en este contexto.

Capítulo 4

Juegos en forma de función característica generalizada

Como estudiamos en el Capítulo 1, en un juego cooperativo la valía que pueden conseguir los miembros de una coalición S es dada mediante la función característica: dada una coalición S, $v(S)$ es la utilidad que pueden garantizarse los miembros de la coalición S si deciden cooperar. Sin embargo, en algunas situaciones económicas la valía de una coalición puede depender no sólo de sus miembros, sino también del orden en que se forma la coalición como lo muestra el siguiente ejemplo:

Ejemplo 4. *Considerar un juego entre un vendedor (jugador 1) y dos compradores (jugadores 2 y 3). El vendedor desea vender dos productos y los compradores están interesados en su adquisición. Cada comprador valora en* 1 *unidad monetaria cada uno de los productos. Supongamos que si el vendedor es el primero en llegar al mercado, entonces él espera por los posibles compradores, pero si un comprador es el primero en llegar, entonces éste no espera al vendedor. Los arribos al mercado se modelan como ordenaciones del vendedor y de los compradores. Por ejemplo,* $(1,2,3)$ *modela la situación en donde primero llega el vendedor al mercado y pone a la venta ambos productos, a continuación llega un comprador y compra un producto (a precio* x*, con* $0 < x \leq 1$*), y después aparece otro comprador y compra el otro producto (a precio* y*,con* $0 < y \leq 1$*). Así, la utilidad que conseguirían los jugadores en* $(1,2,3)$ *es igual a* $x+y+1-x+1-y=2$*. En el orden* $(2,1,3)$ *primero llegaría un comprador y al no haber productos a la venta, se iría; a continuación llegaría el vendedor y luego el otro comprador que le compraría un producto a un precio* y*. Luego, la utilidad que conseguirían los jugadores en* $(2,1,3)$ *es igual a* $y+1-y=1$*.*

4.1. Preliminares y definiciones

En este capítulo denotaremos los conjuntos con una notación especial dada por $^\circ$. Así, $N^\circ = \{1,2,\ldots,n\}$ es el conjunto jugadores. Dada una coalición $S^\circ \in 2^{N^\circ}$ denotaremos por $H(S^\circ)$ el conjunto de todas las posibles ordenaciones de los jugadores en S. Por ejemplo, si $N^\circ = \{1,2,,3,4\}$ y $S^\circ = \{1,2,4\}$, entonces

$$H(S^\circ) = \{(1,2,4),(1,4,2),(2,1,4),(2,4,1),(4,1,2),(4,2,1)\}.$$

El elemento $S \in H(S^\circ)$ es llamado una *coalición ordenada*. De lo anterior se desprende que usamos S° para representar una coalición general de cardinalidad s sin orden y S

para representar una coalición ordenada con el mismo conjunto de jugadores. Observar que $H(\emptyset) = \emptyset$ y que $H(\{i\}) = \{(i)\}$ para todo $i \in N^\circ$. Sea $\Omega(N^\circ)$ el conjunto de todas las posibles ordenaciones de todas las coaliciones de N°, es decir,

$$\Omega(N^\circ) = \{S \mid S \in H(S^\circ), S^\circ \in 2^{N^\circ}\}. \tag{4.1}$$

Es claro que el número total de coaliciones ordenadas en $\Omega(N^\circ)$ es igual a

$$m := \sum_{s=0}^{n} s! \binom{n}{s}, \qquad \text{para todo } 0 \leq s \leq n. \tag{4.2}$$

Dado $S^\circ = \{a_1, \ldots, a_s\}$, denotamos un elemento genérico de $S \in H(S^\circ)$ por $S = (a_1, \ldots, a_s)$.

Definición 28. *Un juego en forma de función característica generalizada es un par (N°, υ) donde N° es el conjunto de jugadores y $\upsilon : \Omega(N^\circ) \to \mathbb{R}$ asigna a cada $S \in \Omega(N^\circ)$, un número real $\upsilon(S)$ siendo $\upsilon(\emptyset) = 0$.*

Para cada coalición ordenada S, $\upsilon(S)$ representa la utilidad que los jugadores en S° pueden garantizarse si la coalición ha sido formada siguiendo el orden S.

Ejemplo 5. *La situación dada en el Ejemplo 4 puede ser modelado como un juego en forma de función característica generalizada (N°, υ) donde $N^\circ = \{1, 2, 3\}$ y $\upsilon : \Omega(N^\circ) \to \mathbb{R}$ como sigue* [1]

$$\upsilon(\emptyset) = \upsilon(1) = \upsilon(2) = \upsilon(3) = 0,$$
$$\upsilon(3,1) = \upsilon(3,2) = \upsilon(2,3) = \upsilon(2,1) = \upsilon(2,3,1) = \upsilon(3,2,1) = 0,$$
$$\upsilon(1,2) = \upsilon(1,3) = \upsilon(2,1,3) = \upsilon(3,1,2) = 1,$$

y

$$\upsilon(1,2,3) = \upsilon(1,3,2) = 2.$$

Por brevedad en lo que resta de este capítulo asumiremos que N° es fijo, nos referiremos al juego en forma de función característica generalizada (N°, υ) simplemente como *juego generalizado* y lo identificaremos con υ.

Denotaremos por G^{N° el conjunto de todos los juegos generalizados con N° como conjunto de jugadores. Es fácil ver que G^{N° es un espacio vectorial sobre el campo de los números reales si se define la suma y la multiplicación escalar sobre G^{N° de la siguiente manera:

1. $(\upsilon + \omega)(S) = \upsilon(S) + \omega(S), \qquad \forall \upsilon, \omega \in G^{N^\circ}, \quad \forall S \in H(S^\circ), \quad \forall S^\circ \subseteq N^\circ.$
2. $(c\upsilon)(S) = c\upsilon(S), \qquad \forall \upsilon \in G^{N^\circ}, \quad \forall c \in \mathbb{R}, \qquad \forall S \in H(S^\circ), \quad \forall S^\circ \subseteq N^\circ.$

Observación 6. Si denotamos por $G_0^{N^\circ}$ el conjunto de juegos generalizados en donde υ es constante en $H(S^\circ)$ para cada $S^\circ \subseteq N^\circ$, si tiene que $G_0^{N^\circ} \cong J^{N^\circ}$, es decir, J^{N° está "incluido" de manera natural en G^{N°. Esto es claro definiendo $\tau : J^{N^\circ} \hookrightarrow G^{N^\circ}$ de la siguiente manera:

$$\tau(\upsilon)(S) := \upsilon(S^\circ), \qquad \forall S \in H(S^\circ), \quad \forall S^\circ \subseteq N^\circ.$$

[1] Por simplicidad, escribiremos $\upsilon(1,2)$ en lugar de $\upsilon((1,2))$.

En lo que resta de este capítulo nos referiremos a J^{N°, en lugar de $G_0^{N^\circ}$, como un subconjunto de G^{N° y lo llamaremos el conjunto de *juegos clásicos*.

Observación 7. Dado un juego generalizado $v \in G^{N^\circ}$ es posible asociar tres juegos clásicos $\operatorname{mín} v$, $\overline{v}$ y $\operatorname{máx} v \in J^{N^\circ}$, donde

$$(\operatorname{mín} v)(S^\circ) := \operatorname*{mín}_{S\in H(S^\circ)} v(S), \qquad \forall S^\circ \subseteq N^\circ,$$

$$\overline{v}(S^\circ) := \frac{1}{s!}\sum_{S\in H(S^\circ)} v(S), \qquad \forall S^\circ \subseteq N^\circ,$$

$$(\operatorname{máx} v)(S^\circ) := \operatorname*{máx}_{S\in H(S^\circ)} v(S), \qquad \forall S^\circ \subseteq N^\circ.$$

Estos juegos tienen las siguientes interpretaciones. Para toda coalición S tenemos que $(\operatorname{mín} v)(S)$, $\overline{v}(S)$ y $(\operatorname{máx} v)(S)$ representan la mínima valía, la valía esperada y el máxima valía que S puede obtener cuando todas las coaliciones son igualmente probables, respectivamente.

Es claro que se cumple la siguiente relación

$$(\operatorname{mín} v)(S^\circ) \leq \overline{v}(S^\circ) \leq (\operatorname{máx} v)(S^\circ), \qquad \forall S^\circ \subseteq N^\circ.$$

En G^{N° existen diversas formas de definir un juego de unanimidad. Las siguientes definiciones juegan un papel importante para tal fin.

Definición 29. *Sea $S \in H(S^\circ)$, $S^\circ \subseteq N^\circ$ dada. Una coalición ordenda $T \in \Omega(N)$ es llamada una extensión de S si $S^\circ \subseteq T^\circ$ y la coalición ordenda de los primeros s miembros en T es igual a S. Denotamos por $\mathcal{E}(S)$ el conjunto de todas las extensiones de S. Si $S = (a_1, \ldots, a_s)$, entonces*

$$\mathcal{E}(S) = \{T \in \Omega \mid T = (b_1, \ldots, b_s, b_{s+1}, \ldots, b_t) \text{ con } b_k = a_k, \forall k \leq s\} \tag{4.3}$$

Como un caso especial definimos la extensión $T = (S, i^{s+1})$ con $i \notin S^\circ$, $t = s+1$ como sigue: dados un jugador $i \in N^\circ$, una coalición $S^\circ \subseteq N^\circ \setminus \{i\}$ de cardinalidad s, una coalición ordenda $S \in H(S^\circ)$ y una posición $h \in \{1, 2, \ldots s+1\}$, denotamos por (S, i^h) la coalición ordenada en $H(S^\circ \cup \{i\})$ donde el jugador i es "insertado" en S en la posición h, es decir, si $S = (a_1, \ldots, a_s)$, entonces $(S, i^1) = (i, a_1, \ldots, a_s)$, $(S, i^{s+1}) = (a_1, \ldots, a_s, i)$ y $(S, i^h) = (a_1, \ldots, a_{h-1}, i, a_h, \ldots, a_s)$.

Por conveniencia notacional escribimos (S, i) en lugar de (S, i^{s+1}) y si $T = (a_1, \ldots, a_t)$, entonces $T\backslash a_1 = (a_2, \ldots, a_t)$, $T\backslash a_t = (a_1, \ldots, a_{t-1})$ y $T\backslash a_h = (a_1, \ldots, a_{h-1}, a_{h+1}, \ldots a_t)$ para todo $h \in \{2, \ldots t-1\}$.

Definición 30. *Sea $S \in H(S^\circ)$, $S^\circ \subseteq N^\circ$ dada. Una coalición ordenda $T \in \Omega(N^\circ)$ es llamada una restricción de S si $T^\circ \subseteq S^\circ$ y el orden de los jugadores en T está en corcondancia con el orden de estos jugadores en S. Denotamos por $\mathcal{R}(S)$ el conjunto de todas las restricciones de S.*

Con el fin de explicar el concepto de restricción, introducimos la noción de predecesores y sucesores. Considerar una coalición ordenda arbitraria $S \in \Omega(N^\circ)$,

$$S = (a_1, \ldots, a_{k-1}, a_k, a_{k+1}, \ldots, a_s).$$

Para cualquier $k \in \{2, \dots, s\}$, denotamos los *predecesores* de a_k en S por $pre(a_k, S)$. Para cualquier $k \in \{1, 2, \dots, s-1\}$, denotamos los *sucesores* de a_k en S por $suc(a_k, S)$. Entonces $pre(a_k, S) = \{a_1, \dots, a_{k-1}\}$ y $suc(a_k, S) = \{a_{k+1}, \dots, a_s\}$. Luego T es una restricción de S significa que para cualquier $i, j \in T^\circ$ si $i \in pre(j, S)$ entonces $i \in pre(j, T)$ o si $i \in suc(j, S)$ entonces $i \in suc(j, T)$.

Con las definiciones anteriores definimos los siguientes juegos de unanimidad:

Definición 31. a) *Para cada $T \in \Omega(N^\circ) \setminus \{\emptyset\}$, se define el juego de unanimidad $u_T \in G^{N^\circ}$ por:*

$$u_T(S) = \begin{cases} 1, & si\ S \in \mathcal{E}(T), \\ 0, & en\ otro\ caso, \end{cases} \qquad \forall S \in \Omega(N^\circ). \tag{4.4}$$

b) *Para cada $T \in \Omega(N^\circ) \setminus \{\emptyset\}$, se define el juego de unanimidad $w_T \in G^{N^\circ}$ por:*

$$w_T(S) = \begin{cases} 1, & si\ T \in \mathcal{R}(S), \\ 0, & en\ otro\ caso, \end{cases} \qquad \forall S \in \Omega(N^\circ). \tag{4.5}$$

Lema 5. *a) Todo $\upsilon \in G^{N^\circ}$ puede ser expresado como*

$$\upsilon = \sum_{\substack{T \in \Omega(N^\circ) \\ T \neq \emptyset}} \lambda_T u_T, \tag{4.6}$$

donde para $T = (a_1, \dots, a_t)$ se tiene que

$$\lambda_T = \upsilon(T) - \upsilon(T \setminus a_t). \tag{4.7}$$

b) Para cada $\upsilon \in G^{N^\circ}$,

$$\upsilon = \sum_{\substack{T \in \Omega(N^\circ) \\ T \neq \emptyset}} c_T w_T, \tag{4.8}$$

donde para cada $T \in \Omega(N^\circ) \setminus \{\emptyset\}$

$$c_T = \sum_{S \in \mathcal{R}(T)} (-1)^{t-s} \upsilon(S). \tag{4.9}$$

Demostración. a) Sea $S \in \Omega(N^\circ) \setminus \{\emptyset\}$ y sea $\mathcal{F}$ la familia de todas las coaliciones ordenadas T' tal que $S \in \mathcal{E}(T)$. Entonces tenemos que

$$\sum_{\substack{T \in \Omega(N^\circ) \\ T \neq \emptyset}} \lambda_T u_T(S) = \sum_{T \in \mathcal{F}} \lambda_T u_T(S) = \sum_{T \in \mathcal{F}} (\upsilon(T) - \upsilon(T \setminus a_t)) = \upsilon(S) - \upsilon(\emptyset) = \upsilon(S),$$

con lo cual termina la demostración.

b) Sea $S \in \Omega(N^\circ)$. Entonces

$$\begin{aligned}
\sum_{\substack{T\in\Omega(N^\circ)\\ T\neq\emptyset}} c_T w_T(S) &= \sum_{T\in\Omega(N^\circ)\setminus\{\emptyset\}} \left(\sum_{R\in\mathcal{R}(T)} (-1)^{t-r}\upsilon(R)\right) w_T(S),\\
&= \sum_{T\in\mathcal{R}(S)} \left(\sum_{R\in\mathcal{R}(T)} (-1)^{t-r}\upsilon(R)\right),\\
&= \sum_{R\in\mathcal{R}(S)} \left(\sum_{\substack{T\in\mathcal{R}(S)\\ R\in\mathcal{R}(T)}} (-1)^{t-r}\right) \upsilon(R),\\
&= \sum_{R\in\mathcal{R}(S)} \left(\sum_{t=r}^{s} \binom{s-r}{s-t}(-1)^{t-r}\right) \upsilon(R).
\end{aligned}$$

Como $\sum_{t=r}^{s} \binom{s-r}{s-t}(-1)^{t-r}$ vale 1 si $s=r$ y 0 si $s\neq r$ concluimos que

$$\sum_{\substack{T\in\Omega(N^\circ)\\ T\neq\emptyset}} c_T w_T(S) = \upsilon(S). \tag{4.10}$$

□

Corolario 20. *Las colecciones de juegos $\mathcal{U}=\{u_T \mid T\in\Omega(N)\setminus\{\emptyset\}\}$ y $\mathcal{W}=\{w_T \mid T'\in\Omega(N)\setminus\{\emptyset\}\}$ son bases para G^{N°, respectivamente.*

4.2. Extensiones del valor de Shapley

Recordemos que uno de los problemas principales que se abordan en juegos clásicos es la distribución de $\upsilon(N^\circ)$ entre los jugadores en N°. En el caso de juegos generalizados tenemos $n!$ utilidades distintas que puede conseguir la gran coalición según el orden en que se forme. Por esto, si suponemos que los jugadores no controlan el orden, el problema principal en esta nueva clase de juegos es la distribución de la utilidad esperada de la gran coalición en los distintos órdenes.

Definición 32. *Un valor es un operador $\phi : G^{N^\circ} \to \mathbb{R}^n$, que asocia a cada juego generalizado $\upsilon\in G^{N^\circ}$ un vector de pagos $\phi(\upsilon) := (\phi_i(\upsilon))_{i\in N}\in\mathbb{R}^n$.*

A continuación presentaremos los dos valores más importantes para juegos en forma de función característica generalizada.

4.2.1. El valor de Nowak y Radzik

Nowak y Radzik [33] fueron los primeros en estudiar los juegos en forma de función característica generalizada e introducur axiomáticamente un valor ϕ en G^{N°.

Definición 33. *El valor de Nowak y Radzik es el valor $\varphi^{NR} : G^{N^\circ} \to \mathbb{R}^n$, el cual para cada jugador $i \in N^\circ$ es dado por:*

$$\varphi^{NR}(v) = \sum_{S^\circ \subseteq N^\circ \setminus \{i\}} \sum_{S \in H(S^\circ)} \frac{(n-s-1)!}{n!} \left[v(S,i) - v(S) \right]. \tag{4.11}$$

A continuación mostramos y explicamos los axiomas que caracterizan el valor φ^{NR} basado en el trabajo de Nowak y Radzik [33].

Definición 34. *Dado un juego generalizado $v \in G^{N^\circ}$, un jugador $i \in N^\circ$ es un jugador nulo en el juego v si para cada coalición ordenada $S \in \Omega(N^\circ)$ tal que $i \notin S^\circ$, se tiene que*

$$v(S,i) = v(S). \tag{4.12}$$

Un jugador nulo no contribuye a cualquier coalición ordenada que elige para unirse cuando ocupa la última posición. En particular, si i es una jugador nulo, entonces

$$v(i) = 0.$$

Axioma 17. (Eficiencia esperada). *Un valor ϕ en G^{N° satisface el axioma de eficiencia esperada si para todo $v \in G^{N^\circ}$ se tiene*

$$\sum_{i \in N^\circ} \phi_i(v) = \frac{1}{n!} \sum_{N \in H(N^\circ)} v(N). \tag{4.13}$$

En otras palabras, el monto que se reparte entre todos los jugadores bajo ϕ es exactamente el promedio que consigue la gran coalición sobre todos los posibles órdenes.

Axioma 18. (Nulidad). *Un valor ϕ en G^{N° satisface el axioma de nulidad si $i \in N^\circ$ es un jugador nulo en v, entonces*

$$\phi_i(v) = 0. \tag{4.14}$$

El axioma de nulidad requiere que cada jugador nulo en v obtenga un pago de cero, dado que no contribuye de ninguna manera a cualquier coalición ordenada a la que se une ocupando la última posición.

Axioma 19. (Aditividad). *Un valor ϕ en G^{N° satisface el axioma de aditividad si para todo v y $\omega \in G^{N^\circ}$* se tiene que:

$$\phi(v + \omega) = \phi(v) + \phi(\omega). \tag{4.15}$$

Es claro que en J^{N° estos axiomas coinciden con los axiomas clásicos de eficiencia, jugador nulo y aditividad.

Lema 6. *Sean α una constante, $k \in N^\circ$ un jugador y S es una coalición ordendada tal que $k \notin S^\circ$. Si ϕ satisface los axiomas de eficiencia esperada y nulidad, entonces*

$$\phi_i(\alpha u_{(S,k)}) = \begin{cases} \alpha \frac{(n-s-1)!}{n!} & si\ i = k, \\ 0 & en\ otro\ caso. \end{cases} \tag{4.16}$$

Demostración. Para simplificar la notación asumiremos sin pérdida de generalidad que $\alpha = 1$. Fijemos una coalición ordenda S tal que $k \notin S^\circ$. Si $i \in N^\circ \setminus \{k\}$, entonces para cada coalición ordenada T tal que $k \notin T^\circ$, tenemos que $u_{(S,k)}(T,i) = u_{(S,k)}(T)$. Así, todo $i \in N^\circ \setminus \{k\}$ es jugador nulo en el juego $u_{(S,k)}$ y por nulidad tenemos que $\phi_i(u_{(S,k)}) = 0$ para todo $i \neq k$.

Por eficiencia esperada, podemos concluir que

$$\begin{aligned}
\phi_k(u_{(S,k)}) &= \sum_{i \in N^\circ} \phi_i(u_{(S,k)}), \\
&= \frac{1}{n!} \sum_{N \in H(N^\circ)} u_{(S,k)}(N), \\
&= \frac{1}{n!} \sum_{\substack{N \in H(N^\circ) \\ N \in \mathcal{E}((S,k))}} u_{(S,k)}(N), \\
&= \frac{(n-s-1)!}{n!},
\end{aligned}$$

lo cual da el resultado deseado. □

Teorema 21 (Nowak y Radzik, [33]). *El valor de Nowak y Radzik es el único valor que satisface los axiomas de eficiencia esperada, nulidad y aditividad.*

Demostración. Es fácil ver que φ^{NR} satisface eficiencia esperada, nulidad y aditividad. Ahora probaremos la unicidad. Sea $v \in G^N$, por el Lema 4 parte a), Lema 6 y el axioma de aditividad, tenemos que

$$\begin{aligned}
\varphi_i^{NR}(v) &= \sum_{\substack{T \in \Omega(N^\circ) \\ T \neq \emptyset}} \varphi_i^{NR}(\lambda_T u_T), \\
&= \sum_{S^\circ \subseteq N^\circ \setminus \{i\}} \sum_{T \in H(S^\circ)} \varphi_i^{NR}(\lambda_{(T,i)} u_{(T,i)}), \\
&= \sum_{S^\circ \subseteq N^\circ \setminus \{i\}} \sum_{T \in H(S^\circ)} \lambda_{(T,i)} \frac{(n-s-1)!}{n!}, \\
&= \sum_{S^\circ \subseteq N^\circ \setminus \{i\}} \sum_{T \in H(S)} \frac{(n-s-1)!}{n!} (v(T,i) - v(T)),
\end{aligned}$$

la cual es la fórmula (4.11). □

Observación 8. Además de la expresión dada en (4.11), el valor de Nowak y Radzik puede ser calculado utilizando el siguiente procedimiento:

Dado $N = (a_1, \ldots, a_n) \in H(N^\circ)$ considere el vector $x(N) \in \mathbb{R}^n$ donde

$$x_i(N) = v(a_1, \ldots, a_{i-1}, a_i) - v(a_1, \ldots, a_{i-1}), \qquad \forall i \in N^\circ. \tag{4.17}$$

Entonces

$$\varphi_i^{NR}(v) = \frac{1}{n!} \sum_{N \in H(N^\circ)} x_i(N). \tag{4.18}$$

Para ver que la expresiones (4.11) y (4.18) son iguales, sólo hay que notar que

$$|\{N \in H(N^\circ) \mid (a_1, \ldots, a_{i-1}) = S\}| = (n - s - 1)!$$

Con la expresión (4.18), se elige al azar una coalición ordenada $N \in H(N^\circ)$ con una distribución uniforme sobre las $n!$ ordenaciones posibles y si se le da al jugador i la utilidad marginal que aporta cuando se incorpora a la coalición ordenada de los jugadores que le preceden, $v(a_1, \ldots, a_{i-1}, a_i) - v(a_1, \ldots, a_{i-1})$, entonces el pago esperado que obtiene es el valor de Nowak y Radizk.

Ejemplo 6. *Si consideramos el juego generalizado (N°, v) dado en el Ejemplo 7 tenemos que utilizando la fórmula (4.18)*

	$x_i(N)$		
N	$i = 1$	$i = 2$	$i = 3$
$(1, 2, 3)$	0	1	1
$(1, 3, 2)$	0	1	1
$(2, 1, 3)$	0	0	1
$(2, 3, 1)$	0	0	0
$(3, 1, 2)$	0	1	0
$(3, 2, 1)$	0	0	0
	0	3	3

de donde

$$\varphi^{NR}(v) = \left(0, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right).$$

Observación 9. Cuando φ^{NR} es restringido a aquellos juegos en los que la función característica es constante en todos los órdenes, coincide con el valor de Shapley.
En efecto

$$\begin{aligned}
\varphi_i^{NR}(\tau(v)(S)) &= \sum_{S^\circ \subseteq N^\circ \setminus \{i\}} \sum_{S \in H(S)} \frac{(n-s-1)!}{n!} \left[\tau(v)(S, i) - \tau(v)(S)\right], \\
&= \sum_{S^\circ \subseteq N^\circ \setminus \{i\}} \frac{s!(n-s-1)!}{n!} \big[v(S \cup \{i\}) - v(S)\big], \\
&= Sh_i(v).
\end{aligned}$$

4.2.2. El valor de Bergantiños y Sánchez

En el Capítulo 1 se vio que Shapley [39] axiomatizó su valor utilizando los axiomas de eficiencia, simetría, jugador nulo y aditividad para juegos clásicos. En la sección anterior se presento cómo Nowak y Radzik [33] extendieron este valor para juegos en forma de función característica generalizada modificando el axioma de eficiencia y el de jugador nulo.

Teniendo en cuenta que los jugadores no controlan el orden de juego, y suponiendo que todos los órdenes son igualmente probables, el axioma de eficiencia parece claro. No lo es tanto el axioma de jugador nulo. En el Ejemplo 6, el vendedor es un jugador nulo.

Sin embargo, un comprador obtiene 0 cuando él esta solo o cuando llega de primero al mercado. Así, la importancia del vendedor se hace evidente y no se ve reflejado en el reparto propuesto por Nowak y Radzik.

Bergantiños y Sánchez [38] introducen un valor y nuevos conceptos de jugador nulo, que nosotros llamamos *jugador nulo fuerte*, y de jugadores simétricos para el caso de juegos generalizados.

Definición 35. *El valor de Bergantiños y Sánchez es el valor $\varphi^{BS} : G^{N^\circ} \to \mathbb{R}^n$, el cual para cada jugador $i \in N$ es dado por:*

$$\varphi^{BS}(v) = \sum_{i \in S^\circ \subseteq N^\circ} \sum_{S \in H(S^\circ)} \frac{(n-s)!}{sn!} \left[v(S) - v(S \setminus i) \right], \qquad \forall i \in N. \tag{4.19}$$

Otra forma de expresar el valor de Bergantiños y Sánchez es la siguiente:

$$\varphi^{BS}(v) = \sum_{S^\circ \subseteq N^\circ \setminus \{i\}} \sum_{S \in H(S^\circ)} \frac{(n-s-1)!}{n!(s+1)} \sum_{l=1}^{s+1} \left[v(S, i^l) - v(S) \right], \qquad \forall i \in N. \tag{4.20}$$

A continuación mostramos y explicamos los axiomas que caracterizan el valor φ^{BS} basado en el trabajo de Bergantiños y Sánchez [38].

Definición 36. *Un jugador i es un jugador nulo fuerte en el juego $v \in G^{N^\circ}$ si para cada coalición ordenada $S \in \Omega(N^\circ)$ tal que $i \notin S^\circ$, se tiene que*

$$v(S, i^h) = v(S), \qquad \forall h = 1, \ldots, s+1. \tag{4.21}$$

Un jugador $i \in N^\circ$ es nulo fuerte si el valor de cualquier coalición ordenada no se ve afectado por la presencia del jugador i, cualquiera que sea el lugar que ocupa en la ordenación. Es trivial probar que un si i es un jugador nulo fuerte entonces i es jugador nulo. Sin embargo, el reciproco es falso.

Definición 37. *Dos jugadores $i, j \in N^\circ$ son simétricos en el juego $v \in G^{N^\circ}$ si para toda coalición ordenda $S \in \Omega(N^\circ)$ talque $i, j \notin S^\circ$ se tiene que*

$$v(S, i^h) = v(S, j^h), \qquad \forall h = 1, \ldots, s+1. \tag{4.22}$$

Dos jugadores son simétricos cuando al ocupar la misma posición, no alteran la valía de la coalición ordenada.

Con las definiciones anteriores Bergantiños y Sánchez [38] consideran nuevos axiomas.

Axioma 20. (Nulidad fuerte). *Un valor ϕ en G^{N° satisface el axioma de nulidad fuerte si $i \in N^\circ$ es un jugador nulo fuerte en v, entonces*

$$\phi_i(v) = 0. \tag{4.23}$$

El axioma de nulidad fuerte requiere que cada jugador nulo fuerte en v obtenga un pago de cero, dado que no contribuye de ninguna manera a cualquier coalición ordenada a la que se une cuando ocupa cualquier posición.

Axioma 21. (Simetría). *Un valor ϕ en G^{N° satisface el axioma de simetría si para $\upsilon \in G^{N^\circ}$ y para cada par de jugadores simetricos $i, j \in N^\circ$, se tiene que*

$$\phi_i(\upsilon) = \phi_j(\upsilon). \tag{4.24}$$

Es claro que en J^{N° estos axiomas coinciden con los axiomas clásicos de nulidad y simetría.

Lema 7. *Sean α una constante y $T \in \Omega(N^\circ)$. Si ϕ satisface los axiomas de eficiencia esperada, nulidad fuerte y simetría, entonces*

$$\phi_i(w_T) = \begin{cases} \alpha \frac{1}{t!t} & si\ i \in T^\circ, \\ 0 & en\ otro\ caso. \end{cases} \tag{4.25}$$

Demostración. Para simplificar la notación asumiremos sin pérdida de generalidad que $\alpha = 1$. Si $i \notin T^\circ$, entonces i es jugador nulo fuerte y por nulidad tenemos que $\phi_i(w_T) = 0$. Aplicando eficiencia esperada tenemos que:

$$\sum_{i \in N^\circ} \phi_i(w_T) = \frac{1}{n!} \sum_{N \in H(N^\circ)} w_T(N) = \frac{\frac{n!}{t!}}{n!} = \frac{1}{t!}.$$

Como todos los jugadores en T' son simétricos, por simetría tenemos que

$$\phi_i(w_T) = \begin{cases} \frac{1}{t!t} & \text{si } i \in T^\circ, \\ 0 & \text{en otro caso.} \end{cases} \tag{4.26}$$

□

Teorema 22 (Bergantiños y Sánchez, [38]). *El valor de Bergantiños y Sánchez es el único valor que satisface los axiomas de eficiencia esperada, nulidad fuerte, simetría y aditividad.*

Demostración. Se prueba fácilmente que φ^{BS} satisface los axiomas de eficiencia esperada, nulidad fuerte, simetría y nulidad. Ahora probaremos la unicidad. Sea $\upsilon \in G^{N^\circ}$, por el Lema 4 b), Lema 6 y el axioma de aditividad obtenemos que

$$\begin{aligned}
\phi_i(\upsilon) &= \sum_{\substack{T \in \Omega(N^\circ) \\ T \neq \emptyset}} \phi_i(c_T w_T), \\
&= \sum_{\substack{T \in \Omega(N^\circ) \\ i \in T^\circ}} c_T \frac{1}{t!t}, \\
&= \sum_{\substack{T \in \Omega(N^\circ) \\ i \in T^\circ}} \frac{1}{t!t} \left(\sum_{R \in \mathcal{R}(T)} (-1)^{t-r} \upsilon(R) \right), \\
&= \sum_{\substack{R \in \Omega(N^\circ) \\ R \neq \emptyset}} \left(\sum_{\substack{T \in \Omega(N^\circ) \\ i \in T^\circ \\ R \in \mathcal{R}(T)}} (-1)^{t-r} \frac{1}{t!t} \right) \upsilon(R), \\
&= \sum_{i \in S^\circ \subseteq N^\circ} \sum_{S \in H(S^\circ)} \gamma_i(S) \left[\upsilon(S) - \upsilon(S \setminus i) \right],
\end{aligned}$$

donde $\gamma_i(S) = \sum_{\substack{T\in\Omega(N^\circ)\\ i\in T^\circ\\ R\in\mathcal{R}(T)}} (-1)^{t-r}\frac{1}{t!t}$. Con algunos cálculos adicionales obtenemos que

$$\begin{aligned}
\gamma_i(S') &= \sum_{t=s}^{n} \binom{n-s}{t-s}\frac{t!}{s!}(-1)^{t-s}\frac{1}{t!t},\\
&= \frac{1}{s!}\sum_{t=s}^{n}\binom{n-s}{t-s}(-1)^{t-s}\frac{1}{t},\\
&= \frac{1}{s!}\frac{(s-1)!(n-s)!}{n!},\\
&= \frac{(n-s)!}{sn!},
\end{aligned}$$

por lo tanto para cada $i\in N^\circ$ se tiene que

$$\phi_i(v) = \sum_{i\in S^\circ\subseteq N^\circ}\ \sum_{S\in H(S^\circ)} \frac{(n-s)!}{sn!}\left[v(S)-v(S\setminus i)\right] = \varphi_i^{BS}(v).$$

$\square$

Observación 10. Dado $v\in G^{N^\circ}$, el valor de Shapley del juego promedio $\overline{v}\in J^{N^\circ}$ es el valor de Bergantiños y Sánchez de v.
En efecto

$$\begin{aligned}
Sh_i(\overline{v}) &= \sum_{S^\circ\subseteq N^\circ\setminus\{i\}} \frac{s!(n-s-1)!}{n!}\left[\overline{v}(S^\circ\cup\{i\})-\overline{v}(S^\circ)\right],\\
&= \sum_{S^\circ\subseteq N^\circ\setminus\{i\}} \frac{s!(n-s-1)!}{n!}\left[\frac{1}{(s+1)!}\sum_{S\in H(S^\circ\cup\{i\})} v(S) - \frac{1}{s!}\sum_{S\in H(S^\circ)} v(S)\right],\\
&= \sum_{S^\circ\subseteq N^\circ\setminus\{i\}} \frac{s!(n-s-1)!}{n!}\left[\frac{\sum_{S\in H(S^\circ\cup\{i\})} v(S) - (s+1)\sum_{S\in H(S^\circ)} v(S)}{(s+1)!}\right],\\
&= \sum_{S^\circ\subseteq N^\circ\setminus\{i\}}\ \sum_{S\in H(S^\circ)} \frac{(n-s-1)!}{n!(s+1)}\sum_{l=1}^{s+1}\left[v(S,i^l)-v(S)\right],\\
&= \varphi_i^{BS}(v).
\end{aligned}$$

Ejemplo 7. *El juego promedio $\overline{v}$ asociado al juego generalizado v dado en el Ejemplo 4 está dado por*

$$\overline{v}(\emptyset)=\overline{v}(1)=\overline{v}(2)=\overline{v}(3)=0,$$

$$\overline{v}(2,3)=0,$$

$$\overline{v}(1,2)=\overline{v}(1,3)=\frac{1}{2},$$

y

$$\overline{v}(1,2,3)=1.$$

Así, utilizando la fórmula (1.19) para calcular el valor de Shapley del juego $\overline{v}$ tenemos que

	$i=1$	$i=2$	$i=3$
$(1,2,3)$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$
$(1,3,2)$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$
$(2,1,3)$	$\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$
$(2,3,1)$	1	0	0
$(3,1,2)$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	0
$(3,2,1)$	1	0	0
	3	$\frac{3}{2}$	$\frac{3}{2}$

de donde

$$\varphi^{BS}(v) = \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{4}\right).$$

Observación 11. Cuando φ^{BS} es restringido a aquellos juegos en los que la función característica es constante en todos los órdenes, coincide con el valor de Shapley.
En efecto

$$\begin{aligned}
\varphi_i^{BS}(\tau(v)(S)) &= \sum_{S^\circ \subseteq N^\circ \setminus \{i\}} \sum_{S \in H(S^\circ)} \frac{(n-s-1)!}{n!(s+1)} \sum_{l=1}^{s+1} \Big[\tau(v)(S, i^l) - \tau(v)(S)\Big], \\
&= \sum_{S^\circ \subseteq N^\circ \setminus \{i\}} \frac{(n-s-1)!}{n!(s+1)} s!(s+1)\big[v(S^\circ \cup \{i\}) - v(S^\circ)\big], \\
&= \sum_{S^\circ \subseteq N^\circ \setminus \{i\}} \frac{s!(n-s-1)!}{n!} \big[v(S^\circ \cup \{i\}) - v(S^\circ)\big], \\
&= Sh_i(v).
\end{aligned}$$

4.3. El valor φ^*

En esta sección presentamos un nuevo valor para juegos en forma de función caraterística generalizada la cual se obtiene en dos pasos. Esta solución es inspirada en la interpretación del valor de Nowak y Radzik dada en la Observación 8.

1. Dada una coalición ordenda $N \in H(N^\circ)$, dividimos $v(N)$ entre los jugadores en N°. Se denota $x_i^*(N)$ el pago obtenido por el jugador $i \in N^\circ$ en la coalición ordenada N.

2. Luego promediamos los pagos obtenidos en todas las coaliciones ordenadas de la gran coalición N, es decir,

$$\varphi_i^*(N^\circ, v) = \frac{1}{n!} \sum_{N \in H(N^\circ)} x_i^*(N). \tag{4.27}$$

Para realizar el primer paso construiremos una función potencial P basados en la idea del potencial de Hart y Mas-Colell de la siguiente manera: dado $(N^\circ, v) \in G^{N^\circ}$, definimos el conjunto de los subjuegos de este juego como

$$\mathcal{S}(v) := \{v|_{S^\circ} \mid S^\circ \subseteq N^\circ\}, \tag{4.28}$$

donde para todo $S^\circ \subseteq N^\circ$ se tiene que $v|_{S^\circ} : \Omega(S^\circ) \to \mathbb{R}$ y

$$v|_{S^\circ}(T) = v(T), \qquad \forall T \in \Omega(S^\circ).$$

con $v|_S(\emptyset) = 0$.

Luego, sea $P : \mathcal{S}(v) \to \mathbb{R}$ donde

$$\sum_{i\in S^\circ} \left[P(S) - \sum_{T\in H(S^\circ\setminus\{i\})} P(T) \right] = v(S), \quad \forall S \in H(S^\circ), \forall S^\circ \subseteq N^\circ, \tag{4.29}$$

con $P(\emptyset) = 0$.

Con un poco de manipulación algebraica podemos reescribir (4.29) como

$$P(S) = \frac{1}{s} \left[v(S) + \sum_{i\in S^\circ} \sum_{T\in H(S^\circ\setminus\{i\})} P(T) \right], \quad \forall S \in H(S^\circ), \forall S^\circ \subseteq N^\circ, \tag{4.30}$$

con $P(\emptyset) = 0$.

Al considerar la función potencial P definimos

$$x_i^*(N) = P(N) - \sum_{T\in H(N^\circ\setminus\{i\})} P(T) \tag{4.31}$$

Ejemplo 8. *Si consideramos el juego generalizado (N, v) dado en el Ejemplo 7 tenemos que la función potencial P está definida como sigue*

$$\begin{aligned} P(1,2) = P(1,3) &= \frac{1}{2}, \\ P(1,2,3) = P(1,3,2) &= 1, \\ P(2,1,3) = P(3,1,2) &= \frac{2}{3}, \\ P(2,3,1) = P(3,2,1) &= \frac{1}{3}, \end{aligned}$$

y $P(S') = 0$ para el resto de coaliciones ordenadas.

Así, utilizando la fórmula (4.27) para calcular el valor φ^* del juego v tenemos que

	$i=1$	$i=2$	$i=3$
$(1,2,3)$	1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$
$(1,3,2)$	1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$
$(2,1,3)$	$\frac{2}{3}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$
$(2,3,1)$	$\frac{1}{3}$	$-\frac{1}{6}$	$-\frac{1}{6}$
$(3,1,2)$	$\frac{2}{3}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$
$(3,2,1)$	$\frac{1}{3}$	$-\frac{1}{6}$	$-\frac{1}{6}$
	4	1	1

de donde

$$\varphi^*(v) = \left(\frac{2}{3}, \frac{1}{6}, \frac{1}{6} \right).$$

A continuación mostramos una expresión para el potencial P en términos de los subjuegos del juego generalizado $(N, v) \in G^N$.

Teorema 23. *Dado* $(N^\circ, v) \in G^{N^\circ}$ *tenemos que*

$$P(S) = \frac{1}{s}v(S) + \sum_{T^\circ \subsetneq S^\circ} \sum_{T \in H(T^\circ)} \alpha(s,t)v(T), \tag{4.32}$$

donde

$$\alpha(s,t) = \begin{cases} 1 & \textit{si } t = 0 \\ \frac{(t-1)!(s-t)!}{s!} \frac{(s-1)!(s-2)!\cdots 2!1!0!}{t!(t-1)!\cdots 2!1!0!} & \textit{en otro caso} \end{cases} \tag{4.33}$$

para todo $S \in H(S^\circ)$ *y para todo* $S^\circ \subseteq N^\circ$.

Demostración. Para $S^\circ = \{i\}$ con $i \in N^\circ$ tenemos que (4.28) y (4.30) son iguales a

$$P(i) = v(i).$$

Para $S = \{i, j\}$ con $i, j \in N, i \neq j$ tenemos que (4.28) y (4.30) son iguales a

$$P(S') = \frac{1}{2}v(S') + \frac{1}{2}v(i) + \frac{1}{2}v(j),$$

donde $S' \in \{(i,j),(j,i)\}$.

Supongamos que (4.28) y (4.30) son iguales para $T \in H(S^\circ \setminus \{i\})$ y para todo $i \in S$ con $S \subseteq N$. Entonces

$$\frac{1}{s}\sum_{i\in S^\circ} \sum_{T \in H(S^\circ \setminus \{i\})} P(T) \quad = \quad \frac{1}{s}\sum_{i\in S^\circ} \sum_{T \in H(S^\circ \setminus \{i\})} \left[\frac{1}{s-1}v(T) + \sum_{RS^\circ \subsetneq TS^\circ} \sum_{R \in H(RS^\circ)} \alpha(t,r)v(R)\right].$$

Ahora, dado que $TS^\circ = SS^\circ \setminus \{i\}$ tenemos que

$$\begin{aligned}
&= \sum_{i\in S^\circ} \sum_{T \in H(S^\circ \setminus \{i\})} \frac{1}{s(s-1)}v(T) + \sum_{i\in S^\circ} \sum_{T \in H(S^\circ \setminus \{i\})} \sum_{R^\circ \subsetneq T^\circ} \sum_{R \in H(R^\circ)} \frac{\alpha(t,r)}{s}v(R), \\
&= \sum_{i\in S^\circ} \sum_{T \in H(S^\circ \setminus \{i\})} \frac{1}{s(s-1)}v(T) + \sum_{i\in S^\circ} \sum_{R^\circ \subsetneq S^\circ \setminus \{i\}} \sum_{R \in H(R^\circ)} \frac{\alpha(s-1,r)(s-1)!}{s}v(R), \\
&= \sum_{i\in S^\circ} \sum_{R^\circ \subseteq S^\circ \setminus \{i\}} \sum_{R \in H(R^\circ)} \frac{\alpha(s-1,r)(s-1)!}{s}v(R), \\
&= \sum_{R^\circ \subsetneq S^\circ} \sum_{R \in H(R^\circ)} \frac{\alpha(s-1,r)(s-r)(s-1)!}{s}v(R), \\
&= \sum_{R^\circ \subsetneq S^\circ} \sum_{R \in H(R^\circ)} \alpha(s,r)v(R), \\
&= P(T) - \frac{1}{s}v(T).
\end{aligned}$$

□

4.4. Conclusiones

En este capítulo se realizo un estudio de juegos en forma coalicional en el cual la función característica está definida sobre todos los posibles órdenes de los jugadores. Se presentan las caracterizaciones de las principales valores para este tipo de juegos y un nuevo valor que se obtiene en dos pasos.

Una linea adicional de investigación es la caracterización de la solución propuesta así como el análisis del axioma de simetría para este tipos de juegos.

Capítulo 5

Energía de vértices de una gráfica

La energía de una gráfica es un invariante que es calculado a partir de los valores propios de la matriz de adyacencia de la gráfica. En la literatura matemática, esta cantidad fue formalmente definida en 1978, por Gutman [17, 18], pero sus raíces químicas se remotan a los años 40's, ver Cvetković et al. [12]. A pesar de esto, este tópico recientemente ha sido considerado como un tema de interés para unos pocos matemáticos. Por otro lado, la probabilidad no-conmutativa se empezo a desarrollar desde los años 80's por Hudson y Parthasarathy [27], entre otros, motivados por las ideas de von Neumann en mecánica cuántica. Durante la última decada el estudio a través de la probabilidad no-conmutativa del análisis espectral de gráficas se desarrollado considerablemente (ver Hora y Obata [26]).

En este capítulo presentaremos los conceptos básicos de la energía de una gráfica y de la teoría de probabilidad no-conmutativa. El objetivo principal que se persigue es el de analizar el concepto de energía de una gráfica desde el punto de vista de la probabilidad no-conmutativa. Además, introducimos el concepto de energía de un vértice y presentamos un nueva desigualdad para la energía de una gráfica en términos de este nuevo concepto.

5.1. Preliminares y definiciones

5.1.1. Teoría de gráficas

En esta sección presentamos la teoría de gráficas. Nuestro interés radica en el estudio del espectro de una gráfica, por el medio del cual se define la energía de una gráfica.

Definición 38. *Sean V un conjunto no vacío y E un subconjunto de $V \times V$. El par $G = (V, E)$ se llama gráfica con conjunto de vértices V y conjunto de aristas E.*

Decimos que dos vértices $v_i, v_j \in V$ son *adyacentes* si $(v_i, v_j) \in E$ y escribimos $v_i \sim v_j$. Una gráfica es *finita* cuando $|V| < 0$. Llamamos *lazo* a una arista de la forma (v_i, v_i) y decimos que una gráfica es *simple* cuando no tiene lazos. Una gráfica se dice *no dirigida* si $(v_i, v_j) \in E$, entonces $(v_j, v_i) \notin E$. El número de vértices y aristas de G son denotados por n y m, respectivamente.

En este capítulo sólo consideraremos gráficas finitas simples no dirigidas.

Definición 39. *Para un vértice $v_i \in V$ de G, el grado de v_i se define como*

$$\deg_G(v_i) = |\{v_j \in V \mid v_i \sim v_j\}|.$$

A continuación presentamos algunos tipos de gráficas especiales.

Definición 40. *Una camino es una gráfica $P_n = (V, E)$ con $V = \{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$ y $E = \{(v_1, v_2), (v_2, v_3), \ldots, (v_{n-1}, v_n)\}$.*

Los puntos v_1 y v_n se llaman *vértices extremos* del camino P_n. La *longitud* del camino es número de sus aristas.

Definición 41. *Una caminata es una generalización de camino en donde no se pueden repetir aristas.*

Definición 42. *Una gráfica es completa si $\deg_G(v_i) = n - 1$ para todo $v_i \in V$, y se denota como K_n.*

Definición 43. *Un ciclo $C_n = (V, E)$ es una gráfica con $V = \{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$ y $E = \{(v_1, v_2), (v_2, v_3), \ldots, (v_n, v_1)\}$.*

Definición 44. *Una gráfica es bipartita $K_{n,m} = (V, E)$ donde $V = \{1, 2, \ldots, n, n + 1, n + 2, \ldots, n + m\}$ y*

$$E = \{(v, w) \in V \times V \mid v \in \{1, 2, \ldots, n\} \text{ y } v \in \{n + 1, n + 2, \ldots, n + m\}\}.$$

La gráfica bipartita $K_{1,m}$ es llama *estrella* y es denotada por S_n.

Con el fin de distinguir unas gráficas de otras definimos lo que es un *isomorfismo* entre gráficas.

Definición 45. *Sean $G = (V, E)$ y $G' = (V', E')$ dos gráficas. Decimos que G y G' son isomorfas, y escribimos $G \simeq G'$, si existe una biyección $\varphi : V \to V'$ tal que $(v_i, v_j) \in E$ si y sólo si, $(\varphi(v_i), \varphi(v_j)) \in E$.*

A continuación definimos el concepto de matriz adyacencia, el cual nos permite definir el espectro de una gráfica

Definición 46. *La matriz de adyacencia $A = A(G)$ de G es una matriz cuadrada de orden n cuyas entradas están definidas como:*

$$A_{ij} = \begin{cases} 1, & \textit{si los vértices } v_i \textit{ y } v_j \textit{ son adyacentes,} \\ 0, & \textit{en otro caso.} \end{cases} \tag{5.1}$$

Definición 47. *El polinomio característico de G es un polinomio de grado n definido como:*

$$\phi(G, x) = det[xI - A(G)], \tag{5.2}$$

donde I es la matriz identidad de orden n.

Los valores propios de $A(G)$ son las raíces del polinomio característico y nos referiremos a ellos como los valores propios de la gráfica G.

Una gráfica con n vértices tiene n valores propios (no todos necesariamente distintos); estos serán denotamos por $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ y etiquetados de manera decreciente: $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \cdots \geq \lambda_n$.

El espectro de una gráfica G es por definición el espectro de su matriz de adyacencia, es decir, el conjunto formado por los valores propios junto con su multiplicidad..

Dado que $A(G)$ es autoadjunta, entonces los valores propios de la gráfica G son números reales. Además, dado que G no tiene lazos entonces la traza de la matriz A es igual a 0, es decir,

$$Tr(A) = \lambda_1 + \cdots + \lambda_n = 0.$$

Así, si $\lambda_1^+, ..., \lambda_k^+$ y $\lambda_{k+1}^-, ..., \lambda_n^-$ denotan los valores propios positivos y negativos, respectivamente, tenemos que:

$$\sum_{j=1}^{k} \lambda_j^+ = - \sum_{j=k+1}^{n} \lambda_j^-. \tag{5.3}$$

Las propiedades espectrales de gráficas (incluidas las propiedades del polinomio característico) han sido extensamente estudiados; para un resumen detallado ver Brouwer et al. [7] y Cvetkovic et al. [12].

5.1.2. Energía de gráficas

El concepto de energía de una gráfica fue primero definido por Gutman [17, 18] y emerge de la idea de la energía molecular de Hückel en química teórica la cual será brevemente explicada en la Sección 5.1.3.

Definición 48. *La energía de una gráfica G, denotada por $\mathcal{E}(G)$, es la suma de los valores absolutos de los valores propios de la matriz de adyancencia $A = A(G)$ asociada a G;*

$$\mathcal{E}(G) = \sum_{i=1}^{n} |\lambda_i|. \tag{5.4}$$

En lo que resta del capítulo usaremos el termino "energía" para nos referinos a la energía de una gráfica en general. A continuación presentamos algunos ejemplos de la energía para ciertas gráficas especiales:

Ejemplo 9. La Gráfica completa. *Es bien conocido que el espectro de la gráfica completa K_n está formado por $n-1$ (con multiplicidad 1) y -1 (con multiplicidad $n-1$). Así, la energía de K_n es*

$$\mathcal{E}(K_n) = n - 1 + (n-1)(1) = 2n - 2. \tag{5.5}$$

La estrella. *Dado que el polinomio característico de la estrella S_n es*

$$\phi(S_n) = x^n - (n-1)x^{n-2},$$

se tiene que su energía es

$$\mathcal{E}(S_n) = 2\sqrt{n-1}. \tag{5.6}$$

El ciclo. *La energía del ciclo C_n es*

$$\mathcal{E}(C_n) = \begin{cases} \dfrac{4\cos\frac{\pi}{n}}{\operatorname{sen}\frac{\pi}{n}}, & si\ n \equiv 0(mod\ 4) \\ \dfrac{4}{\operatorname{sen}\frac{\pi}{n}}, & si\ n \equiv 2(mod\ 4) \\ \dfrac{2}{\operatorname{sen}\frac{\pi}{n}}, & si\ n \equiv 1(mod\ 2) \end{cases}. \tag{5.7}$$

El camino. *La energía del camino P_n es*

$$\mathcal{E}(P_n) = \begin{cases} \dfrac{2}{\operatorname{sen}\frac{\pi}{2(n+1)}} - 2, & si\ n \equiv 0(mod\ 2) \\ \dfrac{2\cos\frac{\pi}{2(n+1)}}{\operatorname{sen}\frac{\pi}{2(n+1)}}, & si\ n \equiv 1(mod\ 2) \end{cases}. \tag{5.8}$$

Observación 12. Existe otro forma de calcular la energía: Coulson [11] proporciona la siguiente fórmula integral para la energía:

$$\mathcal{E}(G) = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\left(n - \frac{ix\phi'(G,ix)}{\phi(G,ix)}\right)dx, \tag{5.9}$$

donde $\phi'(G,x)$ es la derivada del polinomio característico de la gráfica G.

Observación 13. Al considerar la clase de todos los árboles de orden n, se tiene que S_n la gráfica con menor energía y P_n es la gráfica con mayor energía.

5.1.3. Motivación química de la energía de una gráfica

Ahora presentamos la teoría química relacionada con la definición de la energía y seguimos la exposición dada en Li et al. [30].

En la decada de los años 30's, Hückel sugirió un método de aproximación para la ecuación de Schrödinger para una cierta clase de moléculas organicas, denominadas hidrocarbonos conjugados. Este método es referido en la literatura química como "Teoría Orbital Molecular de Hückel" (HMO por sus siglas en inglés).

Recordemos que la ecuación de Schrödinger es una ecuación parcial diferencial de segundo orden de la forma:

$$\hat{H}\Xi = \mathcal{E}\Xi, \tag{5.10}$$

donde Ξ es la denominada la función de onda del sistema, $\hat{H}$ el operador hamiltoniano y $\mathcal{E}$ la energía del sistema. Cuando consideramos un molécula, la ecuación de Schrödinger nos permite describir el comportamiento de los electrones en esta molécula.

Ahora, en lugar de resolver (5.6), se trata de aproximar $\hat{H}$ por un operador finito dimensional $\mathbf{H}$ y resolver el problema:

$$\mathbf{H}\Xi = \mathcal{E}\Xi. \tag{5.11}$$

Aquí **H** es la matriz cuyas entradas están definidas como sigue:

$$\mathbf{H}_{ij} = \begin{cases} \alpha, & \text{si } i = j, \\ \beta, & \text{si los atomos } i \text{ y } j \text{ están químicamente acotados}, \\ 0, & \text{en otro caso.} \end{cases} \tag{5.12}$$

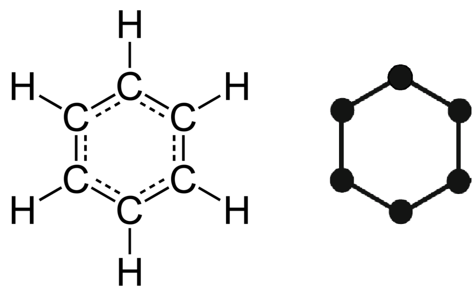

Figura 5.1: Una molecula de benzeno el cual tiene un sistema de π-electrones y su gráfica asociada.

Es claro que si asociamos a un molecula la gráfica en donde $i \sim j$ e i y j están químicamente acotados (ver Figura 5.1), entonces tenemos que:

$$\mathbf{H} = \alpha I + \beta A(G). \tag{5.13}$$

Resulta que, en la aproximación en HMO, la energía total de todos los π-electrones está dado por

$$\mathcal{E}_\pi = \alpha_n + \beta \sum_{j=1}^{n} g_j \lambda_j, \tag{5.14}$$

donde g_j es el llamado número de ocupación. Dado que α y β son constantes, es de interés solamente la cantidad

$$\mathcal{E} = \sum_{j=1}^{n} g_j \lambda_j. \tag{5.15}$$

Por una regla física general, g_j puede tomar solamente los valores $0, 1$ o 2. Sin embargo, para la mayoría de los casos químicamente relevantes, tenemos que:

$$g_j = \begin{cases} 2, & \text{cuando } \lambda_j > 0, \\ 0, & \text{en otro caso ,} \end{cases} \tag{5.16}$$

De lo anterior, obtenemos la expresión:

$$\mathcal{E} = \mathcal{E}(G) = \sum_{j=1}^{k} 2\lambda_j^+ = \sum_{j=1}^{n} |\lambda_j|. \tag{5.17}$$

que es por definición la energía de la gráfica G.

5.1.4. Espacio de probabilidad no-conmutativo

En esta sección presentaremos los conceptos básicos de la teoría de probabilidad no-conmutativa, la cual nos servirá para el estudio de la energía.

Definición 49. *Un álgebra $\mathcal{A}$ sobre un campo $\mathcal{K}$, es un espacio vectorial sobre $\mathcal{K}$ el cual tiene definida una operación $\cdot : \mathcal{A} \times \mathcal{A} \to \mathcal{A}$ tal que para cualesquiera $\alpha \in \mathcal{K}$, $x, y, z \in \mathcal{A}$ se tiene que:*

1. $\alpha(xy) = (\alpha x)y = x(\alpha y)$,
2. $x(y + z) = xy + xz$,
3. $(x + y)z = xz + yz$.

Si para todo $x, y \in \mathcal{A}$ se tiene que $xy = yx$, se dice que $\mathcal{A}$ es un álgebra *conmutativa*. En este estudio estamos interesados en álgebras no-conmutativas sobre $\mathbb{C}$.

Definición 50. *Sea $\mathcal{A}$ un álgebra sobre $\mathbb{C}$. Decimos que $\mathcal{A}$ es una $*$-álgebra si $\mathcal{A}$ está dotada de una involución antilineal $* : \mathcal{A} \times \mathcal{A} \to \mathcal{A}$, es decir, una operación tal que:*

1. $(a^*)^* = a$,
2. $(ab)^* = b^*a^*$,
3. $(\alpha a + \beta b)^* = \bar{\alpha}a^* + \bar{\beta}b^*$,

para todo $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$ y para todo $a, b \in \mathcal{A}$.

A continuación presentaremos el concepto de espacio de probailidad no-conmutativo. Este objeto nos dará un marco de trabajo adecuado para el estudio de la energía.

Definición 51. 1. *Un espacio de probabilidad no-conmutativo es un par $(\mathcal{A}, \tau)$, donde $\mathcal{A}$ es un álgebra sobre $\mathbb{C}$ con unidad $1_{\mathcal{A}}$ y $\tau : \mathcal{A} \to \mathbb{C}$ es un funcional lineal tal que $\tau(1_{\mathcal{A}}) = 1$.*

2. *Si $\mathcal{A}$ es una $*$-álgebra y τ es positivo, es decir, $\tau(a^*a) \geq 0$ para todo $a \in \mathcal{A}$, entonces el par $(\mathcal{A}, \tau)$ es llamado $*$-espacio de probabilidad no-conmutativo.*

En el resto del capítulo trabajaremos con $*$-espacios de probabilidad no-conmutativos. Los elementos de $\mathcal{A}$ son llamados *variables aleatorias* no conmutativas. Un elemento $a \in \mathcal{A}$ tal que $a = a^*$ es llamado *autoadjunto*. Si τ satisface que $\tau(ab) = \tau(ba)$ para todo a, b en $\mathcal{A}$ diremos que τ es *tracial*. El funcional τ debe ser entendido como la esperanza en probabilidad clásica.

A continuación presentaremos los dos tipos de $*$-espacios de probabilidad no-conmutativos en los que trabajaremos en el resto del capítulo.

Ejemplo 10. *El primero es canónico, el espacio de probabilidad no-conmutativo $(\mathcal{M}_n(\mathbb{C}), tr)$, donde $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ es el conjunto de matrices con coeficientes en $\mathbb{C}$ de tamaño $n \times n$. Para una matriz $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, tr denota la traza normalizada, es decir,*

$$tr(M) = \frac{1}{n}Tr(M) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} M_{ii}. \tag{5.18}$$

Ejemplo 11. *El segundo es el espacio de probabilidad no conmutativo* $(\mathcal{M}_n(\mathbb{C}), \phi_i)$ *con* $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$*, donde* $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ *es el conjunto de matrices con coeficientes en* $\mathbb{C}$ *de tamaño* $n \times n$*. Para una matriz* $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$*,* ϕ_i *evaluado en* M *está dado por:*

$$\phi_i(M) = M_{ii}. \tag{5.19}$$

Definición 52.

1. *Para* $a \in \mathcal{A}$*, nos referimos a el valor de* $\tau(a^k)$*,* $k \in \mathbb{N}$*, como el* k*-ésimo momento de* a*.*

2. *Sea* $p > 0$*, la norma* L_p *de una variable aleatoria* $a \in A$ *está dada por*

$$||a||_p = \tau(|a|^p)^{1/p},$$

donde $|a| = (aa^*)^{1/2}$ *denota el valor absoluto de* a*.*

En el caso $p = 1$ *es llamada la norma traza o norma nuclear y será denota por* $||a||_*$*. Esta norma satisface las siguientes relaciones*

$$||a||_* = \tau(|a|) = \tau(|a^*|) = ||a^*||_*.$$

3. *Sea* $0 < r, p, q \leq \infty$ *tal que* $1/r = 1/p + 1/q$*. La desigualdad de Hölder se extiende al contexto no conmutativo de la siguiente forma:*

$$||ab||_r \leq ||a||_p ||b||_q. \tag{5.20}$$

En particular para $p = 2$ y $q = 2$, dado que $\tau(|ab|) \geq |\tau(ab)|$ obtenemos la desigualdad de Cauchy-Schwarz:

$$|\tau(ab)| \leq \tau(aa^*)^{1/2}\tau(bb^*)^{1/2}. \tag{5.21}$$

Además, tomando $b = 1$, obtenemos que $p \leq r$

$$||a||_r \leq ||a||_p. \tag{5.22}$$

Ambos funcionales en los ejemplos 10 y 11 tiene interesantes relaciones cuando se aplican a gráficas. Sea $G = (V, E)$ una gráfica finita con conjunto de vértices $\{1, \ldots, n\}$ y sea $A(G)$ la matriz de adyacencia. Denotamos por $\mathcal{A}(G) \subset \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ el álgebra de adyancencia, es decir, $*$-álgebra generada por $A(G)$.

Es fácil ver que k-ésimo momento de A con respecto a ϕ_i está dado por el número de caminatas en G de tamaño k empezando y terminando en el vértice v_i, es decir,

$$\phi_i(A^k) = |\{(w_1, ..., w_k) : w_1 = w_k = v_i \text{ y } (w_j, w_{j+1}) \in E, \ \forall j \in \{1, 2, \ldots k-1\}\}|. \tag{5.23}$$

Similarmente, dado que $tr(A) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^n \phi_i(A)$ entonces el k-ésimo momento de A con respecto a tr obtenemos el número esperado de caminatas cerradas de un punto elegido de manera uniforme, esto es

$$Tr(A^k) = |\{(w_1, ..., w_k) : w_1 = w_k \text{ y } (w_j, w_{j+1}) \in E, \ \forall j \in \{1, 2, \ldots k-1\}\}|. \tag{5.24}$$

De esta manera, podemos obtener información combinatoria de G de los valores de ϕ_i con $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$ y de los elementos de $A(G)$ y viceversa.

Multiplicando por n ambos lados de la desigualdad de Hölder para la traza normalizada, obtenemos la conocida desigualdad de Hölder para la traza de una matriz,

$$Tr(|MN|) \leq Tr(|M|^p)^{1/p} Tr(|N|^q)^{1/q}. \tag{5.25}$$

Finalmente, observar que para una gráfica con n vértices tenemos que

$$\mathcal{E}(G) = ntr(|A(G)|) = \sum_{i=1}^{n} \phi_i(|A(G)|). \tag{5.26}$$

5.2. Cotas para energía de gráficas

En esta sección, nos centramos en algunas de las más importantes cotas para la energía. Presentaremos algunas de las demostraciones originales para estás cotas.

Una de las primeras desigualdades fue dada por McClelland [31]. Él considera una gráfica con n vértices y m aristas para obtener la siguiente cota superior.

Teorema 24 (Mcclelland [31]). *Para cualquier gráfica G con n vértices y m aristas, se tiene que:*

$$\mathcal{E}(G) \leq \sqrt{2mn}. \tag{5.27}$$

Demostración. Redordemos que la desigualdad Cauchy-Schwarz

$$\left(\sum_{i=1}^{N} a_i b_i \right)^2 \leq \left(\sum_{i=1}^{N} a_i^2 \right) \left(\sum_{i=1}^{N} b_i^2 \right), \tag{5.28}$$

se cumple para cualesquiera números reales a_i, b_i con $i = 1, 2, \ldots, N$.

Así, eligiendo en (5.28) $N = n$, $a_i = |\lambda_i|$, $b_i = 1$ y usando que $\sum_{i=1}^{n} \lambda_i^2 = 2m$, obtenemos el resultado deseado. □

Demostración alternativa. Aplicando (5.22) para $r = 1$ y $p = 2$ tenemos que

$$\frac{\mathcal{E}(G)}{n} = tr(|A|) \leq tr(|A|^2)^{1/2} = \left(\frac{2m}{n} \right)^{1/2}. \tag{5.29}$$

□

Koolen y Moulton [29] mejoraron la cota superior dada por McClelland por medio de un uso inteligente de (5.28).

Teorema 25 (Koolen-Moulton [29]). *Sea cualquier gráfica de G con n vértices y m aristas. Si $2m \geq n$, entonces*

$$\mathcal{E}(G) \leq \frac{2m}{n} + \sqrt{(n-1)\left[2m - \left(\frac{2m}{n} \right)^2 \right]}. \tag{5.30}$$

La igualdad en (5.30) se cumple si $G \cong \frac{n}{2}K_2$, $G \cong K_n$ o G es una es a gráfica regular fuertemente conectada no completa [1] *con dos valores propios con valores absolutos iguales a* $\sqrt{\frac{2m-\left(\frac{2m}{n}\right)^2}{n-1}}$.

Demostración. Eligiendo $N = n-1$, $a_i = |\lambda_{i+1}|$, $b_i = 1$ en (5.28), tenemos que

$$(\mathcal{E}(G) - \lambda_1)^2 \leq \left(2m - \lambda_1^2\right)(n-1). \tag{5.31}$$

Tomando raíz cuadrada ambos lados obtenemos

$$\mathcal{E}(G) \leq \lambda_1 + \sqrt{(n-1)\left(2m - \lambda_1^2\right)}. \tag{5.32}$$

Ahora, consideremos la función

$$f(x) = x + \sqrt{(n-1)\left(2m - x^2\right)}.$$

Por calculo elemental podemos ver que f es monótona decreciente en el intervalo $(\sqrt{2m/n}, \sqrt{2m})$.

Luego, dado que $\frac{2m}{n} \geq 1$, entonces $\frac{2m}{n} \leq \lambda_1$ (see Brouwer et al. [?]). Así,

$$\mathcal{E}(G) \leq \frac{2m}{n} + \sqrt{(n-1)\left[2m - \left(\frac{2m}{n}\right)^2\right]}. \tag{5.33}$$

□

5.3. Momentos espectrales

El método de los momentos espectrales es una técnica importante que nos permite obtener cotas inferiores para la energía. La primera aplicación de este método puede encontrarse en De la Peña et al. [13] y [14].

Definición 53. *Para una gráfica con n vértices, el k-ésimo momento está dado por*

$$M_k^* = M_k^*(G) = \sum_{i=1}^{n} |\lambda_i|^k, \qquad k \in \mathbb{N}. \tag{5.34}$$

El siguiente resultado fue reportado primero por Rada et al. [36] para gráficas bipartitas y para todas las gráficas por De la Peña et al. [14]. Aquí, presentamos una nueva demostración corta para este teorema.

Teorema 26. *Sea G una gráfica de orden n con al menos una arista. Entonces*

$$\mathcal{E}(G) \geq \frac{(M_2^*(G))^2}{\sqrt{M_2^*(G) M_4^*(G)}}. \tag{5.35}$$

[1] Una gráfica regular fuertemente con parámetros (n, d, λ, μ) es una gráfica d-regular con n vértices tal que para todo dos vértices adyacentes tenemos λ vecinos comunes y para todo dos vecinos no adyancentes tenemos μ vecinos comunes.

Demostración. De (5.25) podemos ver que tomando $p = 3$ y $q = 3/2$, para $M = |A|^{4/3}$ y $N = |A|^{2/3}$, obtenemos que:

$$Tr(|A|^2) \leq Tr(|A|)^{2/3} Tr(|A|^4)^{1/3}, \tag{5.36}$$

de donde

$$\mathcal{E}(G) = Tr(|A|) \geq Tr(|A|^2)^{3/2} Tr(|A|^4)^{-1/2}. \tag{5.37}$$

□

De la demostración del resultado previo fácilmente podemos demostrar lo siguiente:

Teorema 27. *Sea G una gráfica de orden n con al menos un arista. Entonces*

$$\mathcal{E}(G) \geq \frac{(M_u^*(G))^p}{(M_{uq+1}^*(G))^{p/q}}. \tag{5.38}$$

Una generalización sofisticada de (5.35) fue dada por Zhou et al. [42] la cual se sigue del teorema anterior:

Teorema 28 (Zhou et al. [42])**.** *Sean G una gráfica de orden n con al menos una arista y r, s, t números reales no negativos tal que $4r = s + t + 2$. Entonces*

$$\mathcal{E}(G) \geq M_r^*(G)^2 [M_s^*(G) M_t^*(G)]^{-\frac{1}{2}}. \tag{5.39}$$

La igualdad se cumple en (5.39) si y sólo si, las componentes de la gráfica G son vértices aislados o gráficas bipartitas completas $K_{p_1,q_1}, \ldots, K_{p_k,q_k}$ para algún $k \geq 1$, tal que $p_1 q_1 = \cdots = p_k q_k$.

Tomando $r = s = 2$ y $t = 4$ en el último teorema recobramos (5.35). La demostración original en Zhou et al. [42] está basada en una sucesiva y cuidadosa aplicación de la desigualdad de Cauchy-Schwarz.

Una interesante aplicación de (5.35) fue observada en Gutman et al. [20], en donde se consideran gráficas r-regulares.

Definición 54. *Una gráfica G con n vértices es r-regular si los grados de todos los vértices en la gráfica son iguales a r. En este caso G posee $m = \frac{1}{2}nr$ aristas.*

Una cota superior para la energía de una gráfica regular es deducida para la desigualdad de McClelland (5.27), es decir,

$$\mathcal{E}(G) \leq n\sqrt{r}, \tag{5.40}$$

Mientrás, que por aplicación de la desigualdad de Koolen-Moulton (5.30), obtenemos

$$\mathcal{E}(G) \leq r + \sqrt{(n-1)(nr - r^2)}. \tag{5.41}$$

La siguiente cota inferior para la energía de gráficas regulares, en términos de los parámetros n y r, se sigue de (5.35) combinado con el hecho de que el número de caminatas cerradas de tamaño 4 en una gráfica r-regular está acotada por nr^3.

Teorema 29 (Gutman et al. [20]). *Sea G una gráfica regular con n vértices de grado r, $r > 0$. Entonces,*

$$\mathcal{E}(G) \geq n. \tag{5.42}$$

La igualdad en (5.42) se cumple si y sólo si, toda componente de G es isomorfa a la gráfica bipartita completa $K_{r,r}$.

Del resultado anterior resulta natural preguntarnos si la desigualdad (5.42) se cumple en general. Sin embargo, esto no es cierto como se demuestra en Gutman [19].

Definición 55. *Una gráfica G es llamada hipoenergética si la energía de G es menor que el número de vértices de G.*

Si nos restringimos a aquellas gráficas que no contiene triángulos y cuadrágulos, entonces el número de caminatas cerradas de tamaño 4 no es mayor que $n(2r^2 - r)$. Así, en este caso podemos mejorar la última cota como sigue:

Lema 8 (Gutman et al. [20]). *Si G es una gráfica regular con n vértices de grado r, $r > 0$ sin triángulos y cuadrángulos, entonces*

$$\mathcal{E}(G) \geq \frac{nr}{\sqrt{2r-1}}. \tag{5.43}$$

5.4. Energía de un vértice

En este sección introducimos el concepto de energía de un vértice y derivamos algunas propiedades relacionadas con la energía. La introducción de este concepto es nuevo, además el enfoque en esta sección para tratar la energía no sido usado antes. En este sentido, consideramos que esta definición nos permitirá tener un mejor entendimiento de la energía de una gráfica.

Recordemos que para todo $i \in \{1, \ldots, n\}$ el par $(M_n(\mathbb{C}), \phi_i)$ es un $*$-espacio de probabilidad no-conmutativo donde ϕ_i es positivo y tracial. Nuestra idea fundamental es explotar el hecho de que la traza usual es la suma de funcionales lineales ϕ_i:

$$Tr(|A(G)|) = \phi_1(|A(G)|) + \cdots + \phi_n(|A(G)|), \tag{5.44}$$

y entonces analizar cada uno de los funcionales lineales. Para hacer esto, definimos la energía de un vértice en G como sigue:

Definición 56. *Sea $G = (V, E)$ una gráfica con vértices $v_i, ..., v_n$ y con matriz de adyacencia $A \in M_n(\mathbb{C})$. Definimos la energía del vértice v_i con respecto a G como*

$$\mathcal{E}_G(v_i) = \phi_i(|A|), \qquad \textit{para } i = 1, \ldots, n \tag{5.45}$$

donde

$$|A| = (AA^*)^{1/2}.$$

En lo que sigue podemos calcular la energía de una gráfica sumando las energías individuales de los vértices de G, es decir,

$$\mathcal{E}(G) = \mathcal{E}_G(v_1) + \cdots + \mathcal{E}_G(v_n). \tag{5.46}$$

La energía de un vértice puede ser entendido como la contribución de este vértice a la energía de la gráfica, en términos sobre cómo este interactua con los otros vértices.

Es fácil ver que la energía del vértice depende sólamente de los vértices que están en la misma componente en la que esta v_i. Para ser más precisos $\mathcal{E}_G(v_i) = \mathcal{E}_{C(v_i)}(v_i)$, donde $C(v_i)$ es la componente en la que esta v_i. En particular, recobramos el hecho trivial de que si v_i es un vértice aislado, entonces este no contribuye a la energía de la gráfica.

Dado que ϕ_i es positivo podemos usar las desigualdades (5.20) y (5.21) de la Sección 5.1.4, las cuales establecen que para todo $i \in \{1, \ldots, n\}$:

$$\phi_i(|A|)^2 < \phi_i(|A|^2), \tag{5.47}$$

y

$$\phi_i(|A|) > \phi_i(A^2)^{3/2}/\phi_i(A^4)^{1/2}. \tag{5.48}$$

Con las desigualdades anteriores obtenemos el siguiente resultado que mejora la desigualdad de McClelland y cota inferior dada en De la Peña et al. [13] en término del cuarto momento.

Teorema 30. *Para una gráfica G con vértices $v_1, ..., v_n$ y grados $d_1, ..., d_n$, con $d_i \neq 0$ para algún i, tenemos que*

$$\frac{(M_2^*)^2}{\sqrt{M_2^* M_4^*}} \leq \sum_{i=1}^n \frac{\phi_i(A^2)^{3/2}}{\phi_i(A^4)^{1/2}} \leq \mathcal{E}(G) \leq \sum_{i=1}^n \sqrt{d_i} \leq \sqrt{2mn}. \tag{5.49}$$

La última desigualdad es igualdad si y sólo si, G es una gráfica regular.

Demostración. La cota inferior

$$\sum_{i=1}^n \frac{\phi_i(A^2)^{3/2}}{\phi_i(A^4)^{1/2}} \leq \mathcal{E}(G),$$

se sigue sumando (5.48) para todo $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$. Similarmente, la cota superior

$$\mathcal{E}(G) \leq \sum_{i=1}^n \sqrt{d_i},$$

se sigue de (5.47) y del hecho de que $\phi_i(|A|)^2 \leq \phi_i(|A|^2) = \phi_i(A^2) = d_i$.

La última desigualdad $\sum_{i=1}^n \sqrt{d_i} \leq \sqrt{2mn}$ es una aplicación directa de la desigualdad de Cauchy-Schwarz en (5.28) para los vectores $(d_1, ..., d_n)$ y $(1, ..., 1)$ dado que $\sum_{i=1}^n d_i = 2m$.

Finalmente, la primera desigualdad es probada como sigue: sean $a_i = \phi_i(A^2)$ y $b_i = \phi_i(A^4)$, entonces aplicando la desigualdad de Hölder usual para $p = 3/2$ y $q = 3$ a los vectores

$$X = \left(\frac{a_1}{b_1^{1/3}}, \ldots, \frac{a_n}{b_n^{1/3}} \right),$$

y

$$Y = \left(b_1^{1/3}, \ldots, b_n^{1/3} \right),$$

obtenemos que

$$\sum_{i=1}^{n} a_i = \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{a_i}{b_i^{1/3}}\right) b_i^{1/3} \leq \left(\sum_{i=1}^{n} \frac{a_1^{3/2}}{b_i^{1/2}}\right)^{2/3} \left(\sum_{i=1}^{n} b_i\right)^{1/3}. \tag{5.50}$$

Luego, dado que $\sum_{i=1}^{n} a_i = Tr(A^2) = M_2^*$ y $\sum_{i=1}^{n} b_i = Tr(A^4) = M_4^*$, por reordenamiento de los términos en (5.50) obtenemos el resultado deseado. $\square$

5.5. Conclusiones

En este capítulo analizamos el concepto de energía desde el punto de vista de la probabilidad no-conmutativa. Además, introducimos el concepto de energía de un vértice y presentamos un nueva desigualdad para la energía de una gráfica en términos de este nuevo concepto.

Teniendo en cuentar el concepto de energía de vértice, líneas adicionales de investigación son tratar de responder las siguientes interrogantes:

1. ¿Es posible determinar una desigualdad al estilo McClelland o Koolen-Moulton para la energía de vértices?

2. Al considerar una clase de gráficas, digamos los árboles, ¿es posible determinar de manera explicita para la energía de los vértices?

3. Dada una gráfica particular ¿es posible caracterizar los vértices con mayor y menor energía de los vértices?

Bibliografía

[1] Aumann, R. J. y Dréze J. (1974) Cooperative games with coalition structures. *International Journal of Game Theory* 3 (4): 217–37.

[2] Aumann, R. J. y Maschler, M. (1985) Game theoretic analysis of a bankruptcy problem from the Talmud, *J Econ theory*, **36**, 195–213.

[3] Baron R., Béal S., Rémila E. y Solal P. (2001) *Average Tree solutions and the distribution of Harsanyi dividends*, *Int. J. Game Theory*, **40**, 331–349.

[4] Béal S., Lardon A., Rémila E. y Solal P. (2012a) *The Average Tree solution for multi-choice forest games*, *Annals of Operations Research*, **196**, 27–51.

[5] Béal S., Rémila E. y Solal P. (2012b) *Weighted component fairness for forest games*, *Math Social Sci*, **64** , 144–151.

[6] Binmore K., Rubinstein A. y Wolinsky A. (1986) *The Nash bargaining solution in economic modelling*, *The RAND Journal of Economics*, 176–188.

[7] Brouwer, A. E. y Haemers, W. H. (2011). Spectra of graphs. Springer Science and Business Media.

[8] Calvo, E., Lasaga, J. J., y Winter, E. (1996). The principle of balanced contributions and hierarchies of cooperation. *Mathematical Social Sciences*, 31(3), 171-182.

[9] Chameni N., C. y Andjiga, N. G. (2008). Linear, efficient and symmetric values for TU- games. *Economics Bulletin* 3(71): 1-10.

[10] Curiel, I., Giorgio P. y Stef T. (1989) Sequencing games. *European Journal of Operational Research* 40.3: 344-351.

[11] Coulson, C. A. (1940). On the calculation of the energy in unsaturated hydrocarbon molecules. *Proc. Camb. Philos. Soc.* 36, 201-203

[12] Cvetkovic, D. M., Michael D. y Horst S. (1980) *Spectra of graphs: theory and application.* Vol. 87. Academic Press.

[13] De la Peña, J.A. y Mendoza, L. (2006) Moments and π-electron energy of hexagonal systems in 3-space. MATCH Commun. Math. Comput. Chem. 56, 113-129

[14] De la Peña, J. A. , Mendoza, L. y Rada, J. (2005) Comparing momenta and π-electron energy of benzenoid molecules, *Discr. Math.* 302 77-84.

[15] Driessen, T. y Radzik, T. (2003). Extensions of Hart and Mas-Colell's consistency to efficient, linear, and symmetric values for TU-games. *ICM Millenium lectures on Games*. Springer, 147-166.

[16] Gudiño, I. y Rada, J. (2010). A lower bound for the spectral radius of a digraph. *Linear Algebra Appl.* 433 233-240.

[17] Gutman. I. (1978). The Energy of a graph. *Ber. Math. Statist. Sekt. Forschungsz. Graz* 103, 1-22.

[18] Gutman, I. (2001). The energy of a graph: old and new results. In Algebraic combinatorics and applications (pp. 196-211). Springer Berlin Heidelberg.

[19] Gutman, I. (2008). On graphs whose energy exceeds the number of vertices. *Linear Algebra and Its Applications*, 429(11), 2670-2677.

[20] Gutman, I., Firoozabadi, S. Z., de la Peña, J. A., Rada, J. (2007). On the energy of regular graphs. *MATCH Commun. Math. Comput. Chem,* 57, 435-442.

[21] Gutman, I., Gudiño, E., Quiroz, D. (2009). Upper bound for the energy of graphs with fixed second and fourth spectral moments. *Kragujevac J. Math,* 32, 27-35.

[22] Hart, S. y Mas-Colell, A. (1989). Potential, value, and consistency. *Econometrica: Journal of the Econometric Society,* 589-614.

[23] Herings, P., van der Laan G. y Talman, D. (2008) *The Average Tree solution for cycle-free graph games*, *Game Econ Behav*, **62**, 77–92.

[24] Herings, P., van der Laan G., Talman, D. y Yang, Z. (2010) The average tree solution for cooperative games with limited communication structure, *Game Econ Behav*, **68** 626–633.

[25] Hernández Lamoneda, L., Juarez, R. y Sánchez Sánchez, F. (2008). Solutions without dummy axiom for TU cooperative games. *Economics Bulletin* 3(1): 1-9.

[26] Hora, A., Obata, N. (2007). *Quantum probability and spectral analysis of graphs.* Springer Science and Business Media.

[27] Hudson, R. L., y Parthasarathy, K. R. (1984). Quantum Ito's formula and stochastic evolutions. *Communications in Mathematical Physics*, 93(3), 301-323.

[28] Jackson, M. O. (2005), Allocation rules for network games, *Game Econ Behav*, **51** 128–154.

[29] Koolen, J. H. y Moulton, V. (2001). Maximal energy graphs. *Adv. Appl. Math.* 26, 47-52

[30] Li, X., Shi, Y. y Gutman, I. (2012). *Graph Energy.* Springer Science and Business Media.

[31] McClelland, B. (1971). Properties of the latent roots of a matrix: the estimation of π-electron energies. *J. Chem. Phys.* 54, 640-643

[32] Myerson, R. B. (1977) Graphs and cooperation on games, *Math Operations Res*, **2**, 225–229.

[33] Nowak, A. S., y Radzik, T. (1994). The Shapley value for n-person games in generalized characteristic function form. *Games and Economic Behavior,* 6(1), 150-161.

[34] Owen, G. (1977). Values of games with a priori unions. *In Essays in Mathematical Economics and Game Theory*, ed. by R. Henn and O. Moeschlin. New York. Springer-Verlag, pp. 76-88

[35] Owen, G. (1995) *Game theory* (3rd ed.). San Diego, CA: Academic Press.

[36] Rada, J. y Tineo, A. (2004). Upper and lower bounds for the energy of bipartite graphs. *Journal of mathematical analysis and applications,* 289(2), 446-455.

[37] Ruiz, L.M., Valenciano, F. y Zarzuelo, F. M., (1998) The Family of Least Square Values for Transferable Utility Games. *Games and Economic Behavior* 24, 109-130.

[38] Sánchez, E., y Bergantiños, G. (1997). On values for generalized characteristic functions. *Operations-Research-Spektrum*, 19(3), 229-234.

[39] Shapley, L. S. (1953) A value for n-person game, in *Contributions to the theory of games II, Annals of Mathematics Studies*, (eds. Kuhn, H.W. and Tucker, A.W.), Princeton University Press, **28** , 307–317.

[40] van den Nouweland, A. (1993) *Games and graphs in economic situations*, Ph.D. thesis, Tilburg University, The Netherlands.

[41] von Neumann, J., y Morgenstern, O. (1944). *Theory of games and economic behavior.* Princeton university press.

[42] Zhou, B., Gutman, I., de la Peña, J. A., Rada, J. y Mendoza, L. (2007). On spectral moments and energy of graphs. *MATCH Commun. Math. Comput. Chem*, 57, 183-191.