CIMAT

CENTRO DE INVESTIGACIÓN EN MATEMÁTICAS, A.C.

Problema de Ejecución Óptima utilizando un Modelo Multiplicativo para el Impacto en el Precio

T E S I S

Que para obtener el título de:

Maestro en ciencias con especialidad en probabilidad y estadística

Presenta:

Samuel Alberto Ramos Álvarez

Director de Tesis: Dr. Daniel Hernández Hernández

Guanajuato, Gto., México, Septiembre 2016

A mi familia, a quienes siempre llevaré en mi corazón.

Agradecimientos

Quiero agradecer a mis padres, quienes no solo me han apoyado en mi formación profesional, sino que han sido un gran soporte y un gran ejemplo de perseverancia y lucha constante.

A mis hermanos quiero agradecerles la confianza y el apoyo, los cuales son invaluables y me han dado ánimo en momentos complicados.

Quiero agradecer a mi novia, quien ha estado a mi lado y me ha dado luz cuando el camino parece oscuro, quien me motiva a dar lo mejor de mi todos los días y siempre cree en mi.

Agradecer también al Doctor Daniel Hernández, de quien aprendí muchas lecciones, las cuales me ayudaron a crecer como profesionista y como ser humano.

Además, quiero agradecer a mis sinodales, quienes aportaron su gran conocimiento para la realización de este trabajo, así como a mi formación profesional. En general, quiero agradecer a CIMAT, por darme la oportunidad de recorrer este santuario de matemáticas, y de aprender de grandes investigadores y personas. Así como a CONACyT sin cuyo apoyo, mi paso por esta institución no habría sido posible.

Índice

Introducción

Gracias a los avances tecnológicos, la negociación de activos en los mercados financieros ha sufrido un cambio importante, tendiendo a mercados electrónicos en los cuales las dinámicas de compra/venta se hacen más sofisticadas, permitiendo que sean algoritmos los que ejecuten las órdenes que se envían al mercado, dándose el caso incluso en mercados en donde los mercados financieros electrónicos no son tan sofisticados [9]. A estos algoritmos se les conoce como algoritmos de transacción [7].

Estos algoritmos permiten a los inversionistas realizar transacciones de manera rápida, por lo que el inversionista se enfrenta al problema de qué estrategia seguir al vender o comprar activos financieros con el objetivo de maximizar sus ganancias o minimizar sus costos de implementación, en los cuales se pueden incluir: comisiones, diferencia entre el precio de compra y el precio de venta (bid/ask price), costos de oportunidad por esperar [5], así como el impacto en el precio debido a la transacción realizada.

Por lo tanto, si se considera a un inversionista con una gran cantidad de acciones por comerciar dentro de un intervalo de tiempo, el objetivo de este inversionista será optimizar algún criterio de desempeño. En algunos artículos, se han considerado como criterios de desempeño un criterio de media-varianza, utilidad esperada o la variación cuadrática media [11], por mencionar algunos. La elección de los ingresos esperados es razonable donde las condiciones regulares del mercado son independientes de las preferencias del inversionista.

Cada inversionista en cualquier mercado financiero brinda liquidez a éste, debido a las decisiones de compra y venta que cada uno de ellos realiza [10]. Algunas de las decisiones que puede tomar el inversionista son por ejemplo el hecho de deshacerse rápidamente de sus activos lo que generaría un decremento acelerado en el precio de los activos, o en el caso de que quiera hacerse con cierta cantidad de activos y lo hiciera rápidamente, esto generaría un incremento, también acelerado en el precio de los activos, lo que, en ambos casos, incrementaría sus costos de ejecución, o disminuiría su probable ganancia. Por lo tanto, una opción viable que el inversionista tiene es repartir la compra/venta de sus activos en bloques, sin embargo si los divide en bloques muy pequeños para ser ejecutados de manera secuencial a través del tiempo podría tomar mucho tiempo hacerlo. Por lo que el inversionista se enfrenta al problema de ejecución óptima el cual tiene como objetivo decidir cómo dividir sus activos, cuándo ejecutar sus órdenes y a qué precio [4].

Algunos autores han estudiado el problema de ejecución óptima revisando el tiempo que transcurre después de las transacciones, en lugar de revisar el impacto en el precio debido a estas transacciones [3]. Por otro lado, problemas en los que se buscaba una forma de elegir una estrategia de transacción se empezaron a estudiar antes, por ejemplo, por Kyle [1].

Uno de los hechos que debe reconocer el inversionista es que cada transacción afecta, no solo a los precios actuales, sino que también afectará los costos de transacción futuros, es decir, el impacto que tienen sus transacciones en el precio de los activos. Tanto el problema de ejecución óptima como el modelo de impacto en el precio, han sido estudiados por Bertsimas y Lo [4] así como por Almgren y Chriss [12], quienes propusieron un modelo aditivo de impacto en el precio. Empero, modelar el precio de un activo por un movimiento Browniano o caminata aleatoria con un impacto aditivo en el precio lleva a estrategias óptimas que son predecibles, lo que genera que sea posible manipular el mercado. Por lo tanto, se han implementado modelos con un impacto multiplicativo en el precio, los cuales se dice son más naturales que los modelos con impacto aditivo en el precio ya que por ejemplo no permiten que los precios sean negativos con probabilidad distinta de cero.

La tesis está organizada de la siguiente manera. En el Capítulo 1 se presenta una revisión del modelo aditivo que propusieron Almgren y Chriss [12], el cual ha sentado las bases para el estudio del problema de ejecución óptima, así como una revisión numérica de los resultados obtenidos al resolver el problema, con el fin de ver los pros y contras que este modelo plantea.

Para el Capítulo 2, se revisará el modelo multiplicativo de manera continua propuesto por Guo y Zervos [15], revisando las bases que se plantean para la solución de este problema así como su solución, asumiendo que se tienen transacciones de manera continua. En la solución a este problema se podrá observar que la estrategia óptima, bajo los supuestos y dinámicas de precios y del mercado, es de venta pura, lo que justifica un poco el hecho de que se decida resolver el problema discreto solo para venta de unidades del activo.

En el Capítulo 3, se propone un modelo multiplicativo discreto, con una propuesta en el impacto en el precio, asumiendo que este impacto no es fijo, mas bien es un impacto aleatorio, lo que permite dar mayor dinamismo al modelo del precio. Este modelo se resuelve utilizando programación dinámica, que además de dar una solución al problema de manera más sencilla permite entender las razones de las decisiones, esta metodología de solución está basada en la propuesta por Bertsimas y Lo [4]. Además, se realiza una revisión a valores numéricos a los resultados obtenidos, revisando principalmente valores distintos para situaciones dadas por el mercado, para ver de qué manera se afectan las decisiones del inversionista.

Capítulo 1

Problema de ejecución óptima

En la actualidad, la negociación de activos financieros en los mercados se encuentra en un proceso de evolución, cambiando de transacciones hechas en los pisos de remate a transacciones hechas por computadoras. Esto genera que la velocidad con la que se realizan las transacciones sea mayor y por lo tanto sean necesarios algoritmos que realicen operaciones en los mercados financieros tomando como insumos los parámetros de cotización [9]. A esto se le conoce como transacciones algorítmicas (algorithmic trading).

Estos algoritmos han generado que los inversionistas se preocupen por la manera en la que actuarán frente a los diferentes cambios en que se encuentra el mercado, así como preguntarse cómo es que afectan a este con sus decisiones, sin perder de vista el objetivo principal, el cual es generar una ganancia a partir de sus transacciones. En otras palabras, quieren ver una manera óptima de negociar sus activos financieros en el mercado.

Considérese entonces a un inversionista el cual tiene una gran cantidad de unidades de un activo, y éste quiere deshacerse de estas unidades en un horizonte de tiempo finito. Es claro que, gracias a las leyes de oferta y demanda, si el inversionista vende una gran cantidad de unidades del activo el precio de éste disminuirá, provocando que el inversionista obtenga menores ingresos que los que tendría si vendiera una pequeña cantidad de unidades del activo, con el objetivo de que el impacto que genera con sus ventas sea significativamente pequeño. Esto permitiría al inversionista aprovechar mejores niveles de precio; un fenómeno análogo ocurre si el inversionista quisiera comprar unidades del activo. Si éste comprara una gran cantidad de unidades del activo el precio empezará a aumentar, lo que generará que los costos del inversionista se incrementen, por lo que puede ser conveniente dividir la cantidad de unidades que el inversionista quiere adquirir y comprar en diferentes tiempos. Por lo tanto, se puede observar que el precio del activo depende de dos factores, un factor inherente al mercado, es decir que el inversionista no controla y otro factor que depende de las decisiones que el inversionista toma.

Así, el inversionista se enfrenta al problema de cuánto vender y/o comprar y en qué momento, con el objetivo de maximizar su ganancia. A través de los años se han tratado de estudiar y modelar el problema anterior, dando pie al llamado problema de ejecución óptima.

Este problema se podría describir como encontrar una estrategia de transacción dinámica que dé solución a una función objetivo apropiada sobre un periodo de tiempo fijo. Al modelar la dinámica de los precios, es importante considerar dos factores. El primero relacionado con el mercado y el segundo relacionado con las decisiones del inversionista, es decir el impacto en el precio por la venta de unidades, lo cual hace que el problema de ejecución óptima sea más completo.

Almgren y Chriss [12] son de los primeros investigadores en estudiar el problema de ejecución óptima e incorporar un modelo de impacto en el precio. En este trabajo fundamental se propuso un modelo aditivo para el impacto en el precio, el cual se presenta en este capítulo. Este modelo sentó las bases para el estudio de modelos de impacto en el precio y si bien esta tesis estudiará un modelo multiplicativo en el impacto en el precio, este capítulo pone en perspectiva uno de los modelos que se han utilizado antes, así como a sus soluciones.

Este modelo aditivo propuesto y resuelto por Almgren y Chriss [12], se basa a su vez, en un modelo propuesto por Bertsimas y Lo [4], quienes resuelven el problema de ejecución óptima incorporando un modelo aditivo en el precio utilizando un modelo sencillo y además introducen el concepto de mejor ejecución como una estrategia de ejecución óptima. Sin embargo, Bertimas y Lo en su trabajo, no consideran la volatilidad de los ingresos para diferentes estrategias, lo cual rescatan Almgren y Chriss. Además, éstos últimos incorporan dos tipos de impacto en el precio, un impacto temporal y otro permanente, lo que permite tener un acercamiento a la realidad así como una solución menos predecible.

Los resultados de este capítulo se presentan para un modelo que describe una estrategia de venta de un activo, sin embargo se pueden establecer resultados análogos para estrategias de compra.

1.1 Descripción del modelo

Sea un inversionista el cual cuenta con Y unidades de un activo financiero, y de las cuales se quiere deshacer al tiempo T. Este tiempo se dividirá en N intervalos de igual tamaño, es decir intervalos de tamaño $\tau = T/N$, teniendo por lo tanto que la ejecución de las unidades se realiza en los instantes k, para $k = 1, \cdots, N$. Ahora, sea y_k el número de unidades que el inversionista planea mantener al tiempo k, es decir, la *estrategia de transacción*. Así, $y_0 = Y$ con la restricción de $y_N = 0$, lo cual establece que al final del periodo el inversionista ha vendido todas las unidades del activo.

Sea entonces la variable

$$\theta_k = y_{k-1} - y_k, \text{ para } k = 1, \ldots, N,$$

la cual indica el número de unidades que se negociaron del tiempo $k-1$ al tiempo k. Es importante tener en cuenta que la restricción siguiente debe ser impuesta

$$Y = \sum_{k=1}^{N} \theta_k.$$

1.1.1 Dinámica del precio

Para la dinámica del precio supóngase primero que el activo tiene un precio inicial dado por S_0. El precio evoluciona debido a dos razones, la primera tiene que ver con las transacciones que realizan los demás inversionistas en el mercado y que no depende de las decisiones del inversionista y la segunda debido a las transacciones que realiza el inversionista, es decir, la forma en la que impacta el inversionista en el mercado. Con respecto a esta última podemos distinguir dos tipos de impacto en el mercado: el impacto permanente y el impacto temporal.

Impacto permanente en el precio

El impacto permanente en el precio se refiere a cambios en el precio debido a transacciones realizadas por el inversionista, y que permanecen durante el periodo completo en el que se están realizando las transacciones. Este impacto puede ser modelado de la siguiente manera:

$$S_k = S_{k-1} + \sigma\tau^{1/2}\xi_k - \tau g\left(\frac{\theta_k}{\tau}\right), \tag{1.1}$$

para $k = 1, \ldots, N$. Aquí σ representa la volatilidad en el precio del activo, ξ_j son variables aleatorias independientes con media 0 y varianza 1, y la función $g(x)$ representa el impacto permanente en el precio, la cual es una función de la tasa promedio de transacción θ_k/τ del intervalo $k-1$ a k. Esta es una caminata aleatoria la cual describe la evolución del precio a través del tiempo.

Impacto temporal en el precio

Este impacto considera los movimientos en la oferta y demanda del activo debidos a la transacción hecha por el inversionista, los cuales solo impactan de manera temporal el precio, volviendo a la dinámica descrita por (1.1).

Para entender la idea expuesta antes, supongamos que el inversionista quiere vender cierto número de unidades de un periodo a otro, por lo que deberá partir este lote en bloques, de tal manera que logre vender todos los activos de manera óptima. Si se enviara un gran número de unidades a la venta el precio de ejecución disminuiría de forma continua debido a que la demanda de liquidez en cada nivel de precio se estaría consumiendo, regresando a su nivel inicial, al precio de equilibrio.

Para modelar este efecto en el precio, se introducirá una función de impacto en el precio dada por $h(x)$, la cual también está dada por la tasa promedio θ_k/τ, pero ésta se mantendrá en un intervalo de tiempo. Este tipo de impacto en el precio se modela de la siguiente manera:

$$\tilde{S}_k = S_{k-1} - h\left(\frac{\theta_k}{\tau}\right). \tag{1.2}$$

Es importante notar que la función h no aparece en (1.1), es decir, este impacto solo afecta de manera temporal durante el periodo en el que se están realizando las transacciones.

1.1.2 Costos de transacción

Primero veamos como son los ingresos por las transacciones los cuales están descritos en la siguiente expresión

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{N}\theta_k\tilde{S}_k &= \sum_{k=1}^{N}\theta_k\left(S_{k-1} - h\left(\frac{\theta_k}{\tau}\right)\right)\\ &= YS_0 + \sum_{k=1}^{N}\left(\sigma\tau^{1/2}\xi_k - \tau g\left(\frac{\theta_k}{\tau}\right)\right)y_k - \sum_{k=1}^{N}\theta_k h\left(\frac{\theta_k}{\tau}\right).\end{aligned} \tag{1.3}$$

Se puede ver que el primer término de (1.3) corresponde al valor inicial de mercado de la posición del inversionista, y los términos siguientes explican las ganancias ó pérdidas obtenidas a través cada periodo de venta, dados cada uno de los factores que describen al mercado. De aquí se puede ver que se tiene un efecto por la volatilidad del precio del activo, debido al término $\sum\sigma\tau^{1/2}\xi_k$, una pérdida de valor de la posición total debida al efecto permanente en el precio dada por el término $-\sum\tau g\left(\frac{\theta_k}{\tau}\right)$, y por último la pérdida de valor de la posición debido al impacto temporal en el precio que se tuvo en cada una de las transacciones, observada en el último término de la expresión.

Dada (1.3), se puede definir al costo total de transacción como la variable aleatoria

$$X = YS_0 - \sum_{k=1}^{N}\theta_k\tilde{S}_k,$$

la cual será entendida como el *costo de implementación.*

Por lo tanto, el inversionista está interesado en el costo de implementación esperado (de aquí en adelante denotado por costo esperado) de esta variable, tomando en cuenta su varianza. Calculando el costo esperado se tiene

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}X &= \mathbb{E}\left[YS_0 - \sum_{k=1}^{N} \theta_k \tilde{S}_k\right] \\
&= YS_0 - \mathbb{E}\left[YS_0 + \sum_{k=1}^{N} \left(\sigma\tau^{1/2}\xi_k - \tau g\left(\frac{\theta_k}{\tau}\right)\right) y_k - \sum_{k=1}^{N} \theta_k h\left(\frac{\theta_k}{\tau}\right)\right] \\
&= \sum_{k=1}^{N} \tau x_k g\left(\frac{\theta_k}{\tau}\right) + \sum_{k=1}^{N} \theta_k h\left(\frac{\theta_k}{\tau}\right), \qquad (1.4)
\end{aligned}$$

mientras que la varianza del costo es

$$\begin{aligned}
Var\left(X\right) &= Var\left(YS_0 - \sum_{k=1}^{N} \theta_k \tilde{S}_k\right) \\
&= Var\left(\sum_{k=1}^{N} \sigma\tau^{1/2}\xi_k y_k\right) \\
&= \sigma^2 \sum_{k=1}^{N} \tau y_k^2. \qquad (1.5)
\end{aligned}$$

Utilizando el hecho de que las ξ_k's son independientes y las y_k's son las variables de decisión, y serán determinadas al momento de minimizar la función, podemos ver que los costos esperados están en función del valor de las unidades del activo en cada tiempo, por lo que se escribirá a los costos esperados como $EX(\mathbf{y})$. Los mismo sucede con la varianza de los costos, la cual se escribirá como $V(\mathbf{y})$.

1.2 Solución al problema de ejecución óptima

A partir de aquí se supondrá que el impacto en el precio, ya sea el permanente o el temporal es lineal, esto es que a medida que se van vendiendo las acciones, el precio decaerá de manera lineal.

Primero supóngase que el impacto permanente en el precio es de la siguiente manera

$$g\left(x\right) = \gamma x.$$

En este caso, la dinámica del precio tiene la siguiente forma

$$S_k = S_{k-1} + \sigma\tau^{1/2}\xi_k - \tau g\left(\frac{\theta_k}{\tau}\right)$$
$$= S_0 + \sigma\tau^{1/2}\sum_{j=1}^{k}\xi_j - \gamma\left(Y - y_k\right). \tag{1.6}$$

Se puede ver que el precio del activo al tiempo k con un impacto permanente lineal en el precio queda dado por el precio inicial menos la suma del impacto que tuvo el precio por cada una de las transacciones, más el cambio en el precio por la parte aleatoria inherente al mercado.

Por otro lado, suponga que el impacto temporal en el precio está dado de la siguiente manera

$$h\left(x\right) = sgn(\tau x)\epsilon + \eta x, \tag{1.7}$$

donde *sgn* representa a la función signo, es decir,

$$sgn(x) = \begin{cases} 1, & \text{si} \quad x > 0, \\ 0, & \text{si} \quad x = 0, \\ -1, & \text{si} \quad x < 0. \end{cases},$$

Se puede interpretar a ϵ como los costos fijos por la transacción y a η como un parámetro inherente a la microestructura del mercado.

Por lo tanto, si se toma en cuenta la ecuación (1.6), para el primer término en (1.4) tenemos lo siguiente

$$\sum_{k=1}^{N}\tau y_k g\left(\frac{\theta_k}{\tau}\right) = \gamma\sum_{k=1}^{N} y_k\theta_k$$
$$= \frac{1}{2}\gamma Y^2 - \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{N}\theta_k^2.$$

Por lo que, usando (1.7) y el resultado anterior, el costo esperado tiene la siguiente expresión

$$EX(\mathbf{y}) = \frac{1}{2}\gamma Y^2 - \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{N}\theta_k^2 + \sum_{k=1}^{N}\theta_k\left(sgn(\theta_k)\epsilon + \eta\frac{\theta_k}{\tau}\right)$$
$$= \frac{1}{2}\gamma Y^2 + \epsilon\sum_{k=1}^{N}\mid\theta_k\mid + \left(\frac{\eta - 1/2\gamma\tau}{\tau}\right)\sum_{k=1}^{N}\theta_k^2. \tag{1.8}$$

1.2.1 Frontera eficiente de la ejecución óptima

Para resolver el problema de ejecución óptima, es necesario revisar el concepto de frontera eficiente. Este concepto consiste en identificar que el objetivo que tenemos en mente es minimizar el costo esperado de nuestras transacciones, en base de un nivel de varianza máximo de este costo. Por lo tanto, podemos decir que una estrategia es *óptima* si no existe otra estrategia que tenga menor costo esperado para el mismo nivel de varianza. Así, se pretende elegir las variables de decisión y_i para un nivel de varianza menor o igual a un nivel máximo V de varianza, es decir

$$\begin{aligned} &\min_{\mathbf{y}} EX(\mathbf{y}) \\ \text{s.a.} \quad &V(\mathbf{y}) \leq V \end{aligned}$$

donde $\mathbf{y} = (y_1, \ldots, y_N)$.

Como este es un problema de optimización con restricciones, puede ser resuelto mediante *multiplicadores de Lagrange*, por lo que el problema de optimización quedaría de la siguiente manera

$$\min_{\mathbf{y}} U(\mathbf{y}), \quad \text{para} \quad \lambda > 0,$$

donde

$$U(\mathbf{y}) = EX(\mathbf{y}) + \lambda V(\mathbf{y}).$$

Se puede ver que la función $U(\mathbf{y})$ es una función estrictamente convexa, por lo que tiene una solución única $y^*(\lambda)$, la cual depende del valor de λ. Esta solución traza una frontera eficiente. El parámetro λ tiene una interpretación financiera, el cual indica la aversión al riesgo que tiene el inversionista, por lo que valores de λ cercanos o iguales a 0 indican que el inversionista prefiere una mayor ganancia sin darle importancia al riesgo que corre la estrategia y por otro lado, si el valor de λ es grande, el inversionista estaría frente a una estrategia más conservadora, dándole una gran importancia al riesgo en que incurre por la estrategia elegida.

1.2.2 Estrategia óptima

Cuando las funciones de impacto en el precio son lineales, se tienen las ecuaciones (1.8) y (1.5), y observando que los θ_k para $k = 1, \ldots, N$ no cambian de signo debido a que se está estudiando el caso de venta, la función $U(\mathbf{y})$ tiene una forma cuadrática en función de los parámetros de control $y_1, \ldots, y_{N-1}$. Por lo tanto, la función objetivo tiene un mínimo global único, por lo que los puntos críticos se van al calcular utilizando las derivadas parciales para las variables de control, es decir

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial U(\mathbf{y})}{\partial y_j} &= \left(\frac{\eta - 1/2\gamma\tau}{\tau}\right)\left(-2\left(y_{j-1} - y_j\right) + 2\left(y_j - y_{j+1}\right)\right) + 2\lambda\sigma^2\tau y_j \\
&= 2\tau\left(\left(\frac{\eta - 1/2\gamma\tau}{\tau^2}\right)\left(-y_{j-1} + 2y_j - y_{j+1}\right) + \lambda\sigma^2 y_j\right).
\end{aligned}
$$

Igualando a 0, se tiene que

$$
\begin{aligned}
0 &= \left(\frac{\eta - 1/2\gamma\tau}{\tau^2}\right)\left(-y_{j-1} + 2y_j - y_{j+1}\right) + \lambda\sigma^2 y_j \\
\lambda\sigma^2 y_j &= \left(\frac{\eta - 1/2\gamma\tau}{\tau^2}\right)\left(y_{j-1} - 2y_j + y_{j+1}\right) \\
\lambda\sigma^2 y_j &= \left(\frac{\eta - 1/2\gamma\tau}{\tau^2}\right)\left(y_{j-1} - 2y_j + y_{j+1}\right) \\
\frac{\lambda\sigma^2}{\eta - 1/2\gamma\tau} y_j &= \left(\frac{1}{\tau^2}\right)\left(y_{j-1} - 2y_j + y_{j+1}\right).
\end{aligned}
$$

Llamaremos a la fracción del lado izquierdo

$$
\kappa^2 = \frac{\lambda\sigma^2}{\eta - 1/2\gamma\tau},
$$

y definimos

$$
\tilde{\eta} = \eta - 1/2\gamma\tau.
$$

Por lo tanto, la solución de las variables de control y_j, con las condiciones $y_0 = Y$ y $y_N = 0$ es:

$$
y_j = \frac{\sinh\left(\kappa\left(T - j\right)\right)}{\sinh\left(\kappa T\right)} Y, \qquad j = 0, \ldots, N,
$$

y la transacción asociada tiene la siguiente expresión

$$
\theta_j = \frac{2\sinh\left(\frac{1}{2}\kappa\tau\right)}{\sinh\left(\kappa T\right)} \cosh\left(\kappa\left(T - t_{j-\frac{1}{2}}\right)\right) Y, \qquad j = 1, \ldots, N
$$

donde

$$t_{j-\frac{1}{2}} = \left(j - \frac{1}{2}\right)\tau.$$

Entonces, el costo esperado y la varianza del costo están dados por la siguientes expresiones

$$EX(\mathbf{y}) = \frac{1}{2}\gamma Y^2 + \epsilon Y + \tilde{\eta} Y^2 \frac{\tanh\left(\frac{1}{2}\kappa\tau\right)\left(\tau\sinh\left(2\kappa T\right) + 2T\sinh\left(\kappa\tau\right)\right)}{2\tau^2\sinh\left(\kappa T\right)},$$

$$V(\mathbf{y}) = \frac{1}{2}\sigma^2 Y^2 \frac{\tau\sinh\left(\kappa T\right)\cosh\left(\kappa\left(T-\tau\right)\right) - T\sinh\left(\kappa\tau\right)}{\sinh^2\left(\kappa T\right)\sinh\left(\kappa\tau\right)}.$$

Como se puede observar, κ depende del valor de λ, por lo que es necesario considerar valores de λ que no sean tan grandes.

1.3 Resultados numéricos

En esta sección se revisarán algunos cálculos numéricos con el fin de analizar diferentes valores para los parámetros, así como las propiedades que tiene el modelo y sus posibles oportunidades de mejora. Además permitirá hacer una comparación entre el modelo estudiado en este capítulo así como el que se presentará más adelante en el Capítulo 3.

Entonces, considérese que el precio inicial del activo es 50 unidades monetarias y que el inversionista tiene $1,000$ unidades al principio del periodo las cuales quiere vender en 10 periodos. Además, sean los parámetros para el impacto permanente y temporal de $\gamma = 2.5 \times 10^{-7}$ y $\eta = 2.5 \times 10^{-6}$, respectivamente. La siguiente tabla muestra en resumen los parámetros utilizados

$$\begin{array}{lcl} S_0 & = & 50 \\ Y & = & 1,000 \\ T & = & 10 \\ N & = & 10 \\ \gamma & = & 2.5 \times 10^{-7} \\ \eta & = & 2.5 \times 10^{-6} \end{array}$$

Tabla 1.1: Parámetros

Primero se hará una revisión de como se ve la ejecución óptima en base al perfil de riesgo del inversionista, es decir, los cambios en la ejecución para diferentes valores en el parámetro de aversión al riesgo.

Considérese a un inversionista el cual prefiere arriesgar un poco más con el fin de obtener mayores ganancias, dejando un poco de lado el riesgo en que incurre, esto se puede ver en el modelo tomando un valor de λ igual a 10^{-6}. Las unidades mantenidas así como las unidades vendidas con estos parámetros quedan de la siguiente manera:

y_1	$=$	684.18
y_2	$=$	467.80
y_3	$=$	319.40
y_4	$=$	217.42
y_5	$=$	147.03
y_6	$=$	98.01
y_7	$=$	63.24
y_8	$=$	37.66
y_9	$=$	17.55
y_{10}	$=$	0

Tabla 1.2: Unidades mantenidas

θ_1	$=$	315.81
θ_2	$=$	216.38
θ_3	$=$	148.39
θ_4	$=$	101.98
θ_5	$=$	70.38
θ_6	$=$	49.01
θ_7	$=$	34.77
θ_8	$=$	25.58
θ_9	$=$	20.10
θ_{10}	$=$	17.55

Tabla 1.3: Unidades vendidas

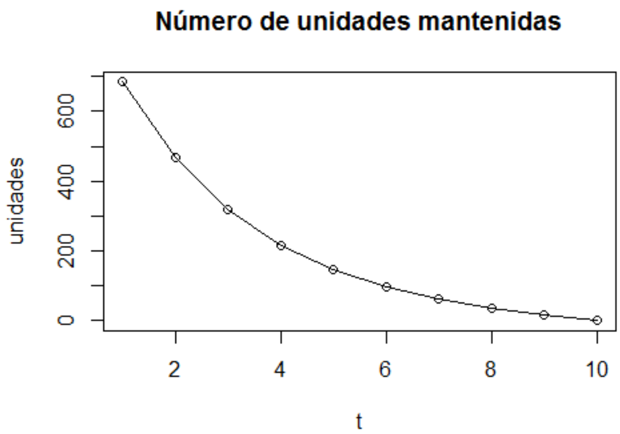

Figura 1.1: $\lambda = 10^{-6}$, $\sigma = 0.95$

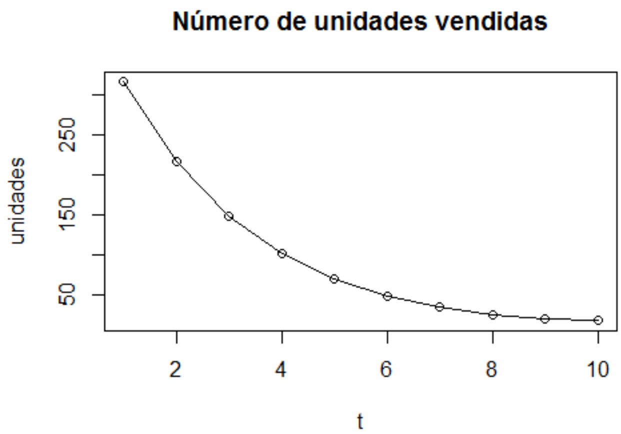

Figura 1.2: $\lambda = 10^{-6}$, $\sigma = 0.95$

En la Tabla 1.2, se observa que el inversionista no vende de manera precipitada durante los periodos, lo que refleja el perfil del inversionista ya que éste al preocuparse más por obtener ganancias mantiene por más tiempo las unidades del activo, arriesgándose a cambios desfavorables en el precio.

Si se considera ahora a un inversionista al cual le preocupan más los cambios en el precio debidos a la volatilidad, se podría considerar un valor de $\lambda = 2.5 \times 10^{-6}$, y se tienen los siguientes resultados así como las siguientes gráficas:

$$\begin{aligned} y_1 &= 387.76 \\ y_2 &= 150.35 \\ y_3 &= 58.30 \\ y_4 &= 22.60 \\ y_5 &= 8.76 \\ y_6 &= 3.39 \\ y_7 &= 1.31 \\ y_8 &= 0.49 \\ y_9 &= 0.16 \\ y_{10} &= 0 \end{aligned}$$

Tabla 1.4: Unidades mantenidas

$$\begin{aligned} \theta_1 &= 612.23 \\ \theta_2 &= 237.40 \\ \theta_3 &= 92.05 \\ \theta_4 &= 35.69 \\ \theta_5 &= 13.84 \\ \theta_6 &= 5.36 \\ \theta_7 &= 2.08 \\ \theta_8 &= 0.81 \\ \theta_9 &= 0.33 \\ \theta_{10} &= 0.16 \end{aligned}$$

Tabla 1.5: Unidades vendidas

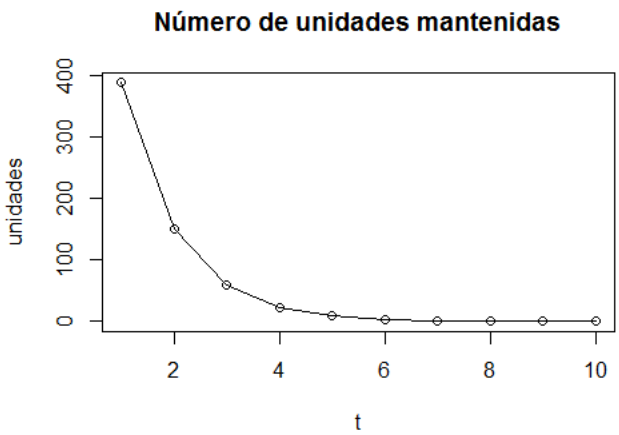

Figura 1.3: $\lambda = 2.5 \times 10^{-6}$, $\sigma = 0.95$

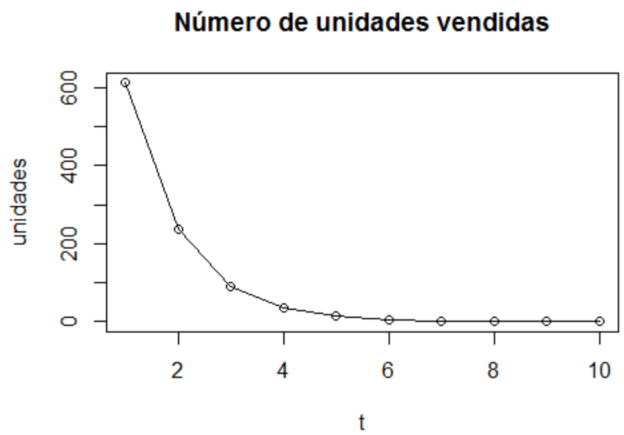

Figura 1.4: $\lambda = 2.5 \times 10^{-6}$, $\sigma = 0.95$

Se puede ver que para un valor de λ más pequeño (las primeras gráficas), la trayectoria es más lineal que para un valor de λ más alto, es decir, que si el inversionista quiere tomar más riesgo éste venderá poco a poco, esperando mejores oportunidades en el precio, mientras que para inversionistas están dispuestos a arriesgar menos su capital, éstos preferirán vender lo más rápido posible sus unidades, arriesgándose menos a cambios desfavorables en el precio.

Ahora, se hará una revisión de la volatilidad, lo cual no controla el inversionista, está completamente dada por el mercado. Para la revisión de este parámetro se considerará el parámetro de aversión al riesgo fijo, dado por $\lambda = 10^{-6}$.

Entonces, considérese una volatilidad por periodo dado por $\sigma = 0.95$, por lo que la estrategia óptima está dada por las Tablas 1.2 y 1.3.

Si ahora se considera una volatilidad del precio mayor por periodo de $\sigma = 1.6$, las unidades mantenidas así como las unidades vendidas están dadas de la siguiente manera

x_1	$=$	349.01
x_2	$=$	121.81
x_3	$=$	42.51
x_4	$=$	14.83
x_5	$=$	5.17
x_6	$=$	1.80
x_7	$=$	0.62
x_8	$=$	0.21
x_9	$=$	0.06
x_{10}	$=$	0

Tabla 1.6: Unidades mantenidas

θ_1	$=$	650.98
θ_2	$=$	227.20
θ_3	$=$	79.29
θ_4	$=$	27.67
θ_5	$=$	9.65
θ_6	$=$	3.37
θ_7	$=$	1.17
θ_8	$=$	0.41
θ_9	$=$	0.14
θ_{10}	$=$	0.06

Tabla 1.7: Unidades vendidas

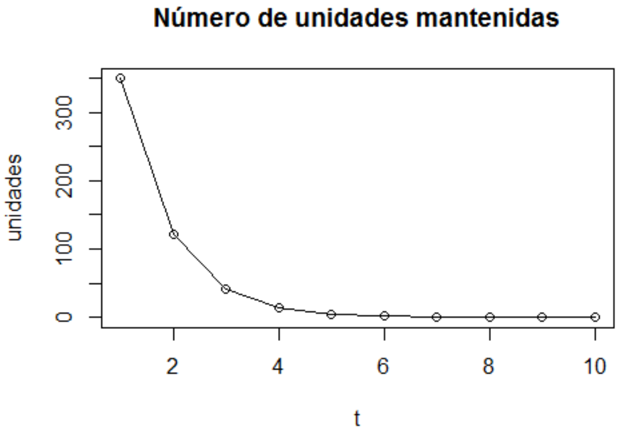

Figura 1.5: $\lambda = 10^{-6}$, $\sigma = 1.6$

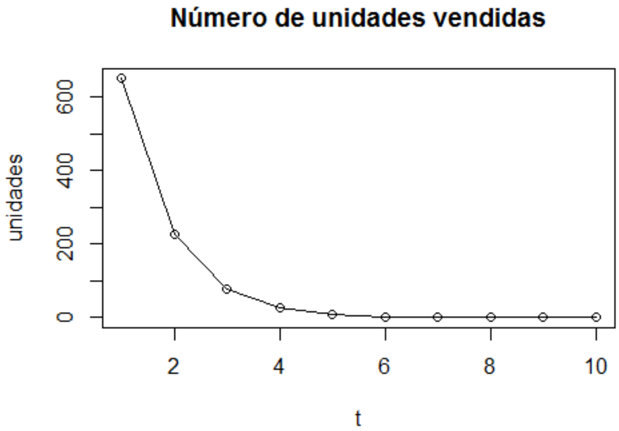

Figura 1.6: $\lambda = 10^{-6}$, $\sigma = 1.6$

Se puede observar que aún cuando el inversionista está dispuesto a aceptar un mayor riesgo, debido a la alta volatilidad que muestra el mercado, el inversionista no esperará a vender las unidades que tiene del activo, por lo que venderá grandes volúmenes de unidades para así no verse expuesto a un cambio brusco en el precio conforme el tiempo transcurre.

El modelo aditivo en el impacto en el precio tiene una falla, como se puede observar en la Tabla 1.1 que el valor del precio puede ser negativo con probabilidad positiva, ya que no hay restricciones en los valores que éste puede tomar, por lo que este modelo no es tan cercano a la realidad. Este problema se puede arreglar considerando un modelo multiplicativo en el precio, el cual evitaría que el precio pueda tomar valores negativos. Este modelo en el precio se repasará en los siguientes capítulos, en donde se abordará una solución al modelo de manera continua para después discretizar este modelo con el fin de dar ejemplos numéricos con los cuales contrastar con el modelo aditivo.

Sin embargo, el modelo aditivo en el precio ayuda a dar una visión general de como se resuelve el problema de ejecución, además de dar una fácil interpretación tanto de los parámetros como de las diferentes trayectorias que sigue el inversionista.

Además, se puede observar que este modelo muestra las preferencias del inversionista, ya que refleja que para un inversionista que admite mayor riesgo la venta de unidades es menor, ya que espera un cambio positivo en el precio. Por el contrario, para un inversionista que no admite mucho riesgo la estrategia óptima muestra que el inversionista no esperará mucho para vender y se deshará rápidamente de las unidades que tiene, para no exponerse al riesgo que tiene el mercado.

Es importante notar lo anterior ya que algo que no se mencionó al inicio de este capítulo es que se pueden considerar diferentes funciones objetivo, las cuales darán diferentes interpretaciones. Por ejemplo, esta función objetivo permitió introducir un parámetro de aversión al riesgo del inversionista.

Por otro lado, el modelo también refleja los cambios en el mercado, mostrando que la estrategia óptima que el inversionista debe seguir se modifica cuando la volatilidad incrementa, lo que genera que el inversionista venda más rápido para así evitar que esté expuesto a cambios desfavorables en el precio y que pueda afectar su ingreso promedio.

Capítulo 2

Modelo continuo con impacto multiplicativo en el precio

En el capítulo anterior se revisó el problema de ejecución óptima utilizando un modelo de impacto aditivo en el precio, en donde la ejecución se hacía de manera discreta, es decir, se partió el intervalo de tiempo en el que se ejecutarían las unidades del activo en intervalos de tiempo iguales y la idea fue encontrar la ejecución óptima de las unidades en estos intervalos. Resolver el modelo de manera discreta permite tener resultados numéricos, lo que brinda la oportunidad de analizar diferentes escenarios para diferentes valores en los parámetros.

En este capítulo se revisará el problema de ejecución óptima con un modelo continuo considerando un impacto multiplicativo en el precio, basando el estudio en el realizado por Guo y Zervos [15]. En el artículo de estos autores, se explora de manera continua el problema de ejecución óptima utilizando un impacto multiplicativo en el precio. Además, se basan en el resultado presentado en el Capítulo 1, dado por Almgren y Chriss [12]. El problema de ejecución óptima ha sido estudiado a tiempo continuo por Gatheral y Schied [8], quienes incorporaron el modelo aditivo de impacto en el precio estudiado por Almgren y Chriss [12]. En el artículo de Guo y Zervos [15], se realiza un estudio de las propiedades analíticas del modelo con impacto multiplicativo, lo cual no se ha realizado para un modelo a tiempo continuo.

La principal razón por la cual es mejor considerar un impacto multiplicativo es que se evita que el precio del activo tome valores negativos con probabilidad distinta de cero. Esto genera que el modelo esté más cercano a la realidad. Otro punto es que un impacto multiplicativo en el precio implica una descomposición natural de los costos de ejecución, en donde se puede ver que el ingreso se puede descomponer en la parte inherente al mercado y los ingresos obtenidos al vender. lo cual está relacionado directamente con los llamados costos de implementación, los cuales menciona Pérold [2].

En este capítulo se resolverá el problema de ejecución óptima para el caso de compra y venta, ya que bajo este enfoque es resuelto por Guo y Zervos [15]. Es importante notarlo ya que es una diferencia entre el planteamiento de modelo en este capítulo en relación al presentado en el capítulo anterior. Sin embargo, el resultado como se verá más adelante indica que la mejor estrategia de ejecución es la venta pura de unidades. Además, las variables de control están dadas por el número de unidades que el inversionista ha vendido o comprado hasta el tiempo t, lo cual difiere de las variables de control que se resuelven en el Capítulo 1, que son las unidades mantenidas a cada tiempo t.

Este modelo permitirá revisar un modelo discreto del mismo en el Capítulo 3, con el objetivo de poder analizar los resultados presentados para los valores de los parámetros, además de comparar los resultados obtenidos a partir del modelo aditivo en el impacto en el precio.

2.1 Descripción del modelo

Para este modelo considérese un espacio de probabilidad $(\Omega, \mathcal{F}, \mathcal{F}_t, \mathbb{P})$, el cual satisface las condiciones usuales. En el modelo se tiene a un inversionista que al tiempo t cuenta con $y_t \geq 0$ unidades de cierto activo y puede comprarlas o venderlas en el mercado, sin embargo considere que no puede hacerlo al mismo tiempo.

Sean ξ_t^s y ξ_t^b el número total de unidades que al tiempo t el inversionista ha vendido o comprado, respectivamente. Como el inversionista no puede disminuir el número de unidades que ha venido o comprado, los procesos mencionados anteriormente son procesos crecientes, $(\mathcal{F}_t)$ - adaptados, continuos por la izquierda con límites por la derecha, y además, como el inversionista empieza con cierto número de unidades del activo, estos procesos empiezan en cero ($\xi_0^s = \xi_0^b = 0$). El número de unidades que el inversionista tiene al tiempo t está dado por $y_t = Y - \xi_t^s + \xi_t^b$, en donde $Y \geq 0$ es el número de unidades que el inversionista tiene al tiempo 0.

Como en el capítulo anterior, se considerará un tiempo finito T para terminar de ejecutar las unidades de la acción, por lo que las estrategias de ejecución cumplen la condición

$$y_{T+} = 0. \tag{2.1}$$

Esta condición coincide con al restricción dada en el Capítulo I de $y_N = 0$, la cual está dada ya que el objetivo del inversionista e deshacerse de todas las unidades del activo en un tiempo T. Para el modelo del precio se asumirá que si el inversionista no realiza transacciones, el precio seguirá un movimiento Browniano geométrico, el cual se denotará por $\tilde{S}$ y está dado por

$$d\tilde{S}_t = \mu \tilde{S}_t dt + \sigma \tilde{S}_t dW_t, \quad \tilde{S}_0 = x > 0, \tag{2.2}$$

donde x es el precio inicial de la acción y μ y $\sigma \neq 0$ son constantes. El modelo que se está describiendo considera que cuando el inversionista realiza una transacción, ésta transacción impacta el precio, pero a diferencia del impacto descrito en el capítulo anterior, la transacción impacta en una proporción del precio en el que se empieza a ejecutar la transacción y a la cantidad de unidades que el inversionista ejecuta. Considere que el inversionista realiza una transacción pequeña de las unidades que tiene y sea $\epsilon > 0$ la cantidad de unidades de la acción vendidas ó compradas al tiempo t. Entonces el cambio en el precio es el siguiente

$$\Delta S_t = S_{t+} - S_t = -\lambda\epsilon S_t \quad \text{ó} \quad \Delta S_t = S_{t+} - S_t = \lambda\epsilon S_t,$$

para $\lambda > 0$ una constante. Se asumirá que S es un proceso continuo por la izquierda con límites por la derecha.

Por lo tanto, el precio del activo una vez ejecutada la transacción, tiene la siguiente expresión

$$S_{t+} = (1 - \lambda\epsilon) \simeq e^{-\lambda\epsilon} S_t \quad \text{ó} \quad S_{t+} = (1 + \lambda\epsilon) \simeq e^{\lambda\epsilon} S_t,$$

para venta ó compra, respectivamente.

Si se considera entonces una transacción grande hecha por el inversionista, el precio sigue el mismo comportamiento, ya que se puede dividir la transacción en transacciones más pequeñas, por lo que si éste realiza una venta de $\Delta\xi_t^s$ unidades, ésta se puede ver como N ventas individuales más pequeñas de $\epsilon = \Delta\xi_t^s/N$ unidades cada una, entonces el precio de la acción tiene la siguiente dinámica

$$S_{t+} = e^{-\lambda N\epsilon} S_t = e^{-\lambda\Delta\xi_t^s} S_t, \tag{2.3}$$

cuando N es suficientemente grande. En la expresión anterior, se puede observar el impacto multiplicativo en el precio debido a una venta hecha por el inversionista. Lo mismo ocurre para el caso en el que el inversionista realiza una compra, donde el nuevo precio está dado por

$$S_{t+} = e^{\lambda N\epsilon} S_t = e^{\lambda\Delta\xi_t^b} S_t. \tag{2.4}$$

Una vez que se ha descrito la manera en que se impacta el precio a través de las transacciones, se puede observar que la dinámica que sigue el precio es

$$dS_t = \mu S_t dt - \lambda S_t \circ_s d\xi_t^s + \lambda S_t \circ_b d\xi_t^b + \sigma S_t dW_t, \tag{2.5}$$

en donde

$$S_t \circ_s d\xi_t^s = S_t d\left(\xi^s\right)_t^c + S_t \int_0^{\Delta\xi_t^s} e^{-\lambda u} du \tag{2.6}$$

y

$$S_t \circ_b d\xi_t^b = S_t d\left(\xi^b\right)_t^c + S_t \int_0^{\Delta\xi_t^b} e^{\lambda u} du, \tag{2.7}$$

donde los procesos $(\xi^s)^c$ y $\left(\xi^b\right)^c$ son la parte continua de ξ^s y ξ^b, respectivamente.

Una vez que se tiene el modelo multiplicativo en el precio, se puede hacer uso de la fórmula de Itô, obteniendo que el precio S_t al tiempo t está dado por

$$S_t = \tilde{S}_t \exp\left(-\lambda\xi_t^s + \lambda\xi_t^b\right), \tag{2.8}$$

donde $\tilde{S}_t$ es la solución a (2.2) y está dada por

$$\tilde{S}_t = x \exp\left(\left(\mu - \frac{1}{2}\sigma^2\right)\right).$$

Esta dinámica del precio expresa que al tiempo t, los cambios en éste son debidos a las dinámicas del mercado, es decir a las decisiones de los demás participantes del mercado, y también está dado por el impacto que ha provocado el inversionista al hacer transacciones.

Ya definido el modelo de impacto en el precio, el inversionista puede utilizar diferentes criterios a optimizar para elegir la mejor estrategia para hacer transacciones, como se mencionó en el capítulo anterior. En este modelo se considera maximizar el siguiente criterio de desempeño sobre todas las estrategias $\left(\xi^s, \xi^b\right)$ posibles

$$I_{\bar{T},x,Y}\left(\xi^s, \xi^b\right) = \mathbb{E}\left[\int_{[0,T]} e^{-\delta t}\left[S_t \circ_s d\xi_t^s - S_t \circ_b d\xi_t^b - C_s d\xi_t^s - C_b d\xi_t^b\right]\right], \tag{2.9}$$

para $(T, x, Y) \in \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}_+$, donde $\mathbb{R}_+ = [0, \infty)$ y $\mathbb{R}_+^* = (0, \infty)$.

Este criterio es equivalente a pensar en los ingresos que el inversionista obtendría por la ejecución de las unidades que tiene del activo, descontadas por cierto factor $\delta \geq 0$, el cual representa un parámetro de impaciencia del inversionista, y puede ser igual a 0 si se consideran horizontes de tiempo pequeños. Por otro lado, se puede considerar $\delta > 0$ para problemas de ejecución que duran varios días.

En la expresión (2.9) $C_s, C_b \geq 0$ representan la diferencia entre el precio de compra y el precio de venta o costos proporcionales de transacción, como las comisiones. En términos concretos, la expresión de la ecuación anterior muestra las ganancias adquiridas por la venta de unidades menos los costos por la compra de unidades, y los costos en los que incurre el inversionista al vender o comprar en el mercado.

Entonces, se puede definir la función de valor del inversionista como

$$v(T, x, Y) = \sup_{(\xi^s, \xi^b) \in \mathcal{A}_{\bar{T},Y}} I_{T,x,Y}\left(\xi^s, \xi^b\right)$$

donde $\mathcal{A}_{\bar{T},Y}$ es la familia de todas las estrategias de liquidación posibles, para la cual se tiene la siguiente definición.

Definición 1.1. Dado un horizonte de tiempo $T \in (0, \infty)$ y una posición inicial de $Y \geq 0$ unidades, la familia $\mathcal{A}_{T,Y}$ consiste de todas las estrategias de liquidación admisibles $\left(\xi^s, \xi^b\right)$ compuesta por los procesos crecientes, continuos por la izquierda con límites por la derecha, $(\mathcal{F}_t)$ - adaptados ξ^s y ξ^b tales que $\xi_0^s = \xi_0^b = 0$. Si $\xi_t = \xi_t^s - \xi_t^b$, entonces la variación finita de ξ_t es $\check{\xi}_t = \xi_t^s + \xi_t^b$ para toda $t \geq 0$ y además se cumple (2.1) con

$$y_t = Y - \xi_t^s + \xi_t^b \geq 0. \tag{2.10}$$

Se asume que

$$\mathbb{E}\left[e^{4\lambda \xi_{t+}^b}\right] < \infty \quad \text{para todo} \quad t \in [0, T] \cap \mathbb{R}_+. \tag{2.11}$$

Además, se denotará como $\mathcal{A}_{T,Y}^s$ a la familia de todos los procesos ξ^s tales que $(\xi^s, 0) \in \mathcal{A}_{T,Y}$.

Una vez que se ha construido el modelo de impacto en el precio y la función de valor para el inversionista, se procederá a estudiar algunas características del mercado, las cuales darán restricciones al modelo con el fin de evitar las oportunidades de arbitraje.

2.2 Estudio del mercado

En esta sección se revisarán las características del mercado en el que se está negociando, revisando qué debe cumplir el modelo para evitar oportunidades de arbitraje y manipulación en los precios. Los resultados que se presentan fueron obtenidos por Guo y Zervos[15].

Primero se darán tres definiciones que explican ciertas características del mercado. Para las siguientes definiciones se tomará $\delta = 0$ ya que la elección de la tasa de descuento es inherente al inversionista y las definiciones que se enunciarán se refieren al mercado. Se empezará con la definición de transacciones de ida y vuelta, que son transacciones en las cuales se vende lo que se va comprando durante el horizonte de tiempo T.

Definición 2.1. Una transacción de ida y vuelta (round-trip) aceptable con horizonte de tiempo $T \in \mathbb{R}_+^*$ es cualquier par $\left(\zeta^s, \zeta^b\right)$ de procesos crecientes càglàd $(\mathcal{F}_t)$ - adaptados tales que $\zeta_0^s = \zeta_0^b = 0$,

$$\zeta_{T+}^s = \zeta_{T+}^b \quad \text{y} \quad \sup_{t\in[0,T]} \left(\zeta_{T+}^s - \zeta_{T+}^b\right) \leq \Gamma, \tag{2.12}$$

para alguna constante $\Gamma > 0$ que depende de la estrategia de transacción.

La desigualdad en (2.12) hace referencia a una condición de admisibilidad que requiere que el máximo número de unidades en una transacción de ida y vuelta esté acotado por una constante. Las transacciones de ida y vuelta dan pie a oportunidades de arbitraje, ya que intuitivamente, el hecho de poder comprar y vender después las unidades compradas más las iniciales hacen pensar que el inversionista puede comprar a un precio conveniente y esperar a que el precio de la acción aumente, lo que le permitirá generar ganancias a partir de esto, lo anterior se puede ver en la siguiente definición.

Definición 2.2. El mercado permite oportunidades de arbitraje si existe una transacción de ida y vuelta con ingresos positivos e ingresos estrictamente positivos con probabilidad estrictamente positiva, es decir, si existe una transacción de ida y vuelta (ζ^s, ζ^b) tal que

$$R(\zeta^s, \zeta^b) = \int_{[0,T]} \left[S_t \circ_s^\lambda d\zeta_t^s - S_t \circ_b^\kappa d\zeta_t^b - C_s d\zeta_t^s - C_b d\zeta_t^b\right] \geq 0 \tag{2.13}$$

y

$$\mathbb{P}\left[R(\zeta^s, \zeta^b) > 0\right] > 0.$$

Otra definición que es importante tomar en cuenta es la de manipulación de precios, la cual se da enseguida

Definición 2.3. Una manipulación de precios es una transacción ida y vuela (ζ^s, ζ^b) que resulta en un ingreso esperado estrictamente positivo, es decir, $\mathbb{E}\left[R(\zeta^s, \zeta^b)\right] > 0$, donde R es definido como en (2.13). Una manipulación de precios no acotada es una sucesión de transacción ida y vuelta $(\zeta^{s,n}, \zeta^{b,n})$ tal que

$$\lim_{n\to\infty} \mathbb{E}\left[R(\zeta^{s,n}, \zeta^{b,n})\right] = \infty.$$

Esta definición establece que el mercado permite que el inversionista pueda impactar el mercado a su conveniencia, haciendo que sus decisiones se muevan de manera favorable para futuras transacciones. El primer resultado que se puede obtener a partir de las definiciones anteriores se presenta en la siguiente proposición

Proposición 2.4. Las siguientes afirmaciones son ciertas:

(i) Si la dinámica del proceso de precios está dada por

$$dS_t = \mu S_t dt - \lambda S_t \circ_s^{\lambda} d\xi_t^s + \kappa S_t \circ_b^{\kappa} d\xi_t^b + \sigma X_t dW_t, \tag{2.14}$$

para algunas $\kappa > \lambda > 0$, entonces el mercado presenta oportunidades de arbitraje. Por lo tanto, ganancias grandes libres de riesgo pueden ser realizadas arbitrariamente mediante transacciones de ida y vuelta.

(ii) Si la dinámica del proceso de precios está dada por (2.14), para algunas $\lambda > \kappa > 0$, entonces el mercado puede presentar oportunidades de arbitraje.

(iii) Suponga que la dinámica del proceso de precios está dada por (2.5). Si $\mu < 0$, entonces puede existir manipulación de precios, mientras que si $\mu > 0$ entonces existe manipulación de precios no acotada.

(iv) Considere el problema de ejecución óptima formulado en la sección anterior, en el cual la dinámica del proceso de precios está dado por (2.5). Si $0 \leq \delta < \mu$, entonces transacciones de ida y vuelta con ventas en corto pueden generar grandes ganancias esperadas y

$$v(T, x, Y) = \infty \quad \text{para todo} \quad (T, x, Y) \in \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}_+. \tag{2.15}$$

De esta proposición podemos concluir en primer lugar que el mercado presenta oportunidades de arbitraje, si se tienen diferentes parámetros para el impacto en el precio por venta ó compra respectivamente, ya que se pueden obtener ganancias grandes libres de riesgo mediante transacciones de ida y vuelta. Por otro lado, el inciso (*iii*) de la Proposición 2.4 concluimos que si el precio sigue cierta tendencia (creciente o decreciente), entonces se puede tener manipulación en el precio, es decir, no existe manipulación de precios si y solo si la dinámica del proceso de precios es una martingala en ausencia de transacciones de un inversionista grande.

Por último, se puede ver que si la tasa de descuento del inversionista es estrictamente menor que la tendencia del precio de activo, el problema de optimización del inversionista se vuelve trivial, es decir, cualquier estrategia genera grandes ganancias esperadas. Por lo tanto, a partir de aquí se asumirá que $\delta > max\{0, \mu\}$.

Proposición 2.5. Considere el problema de ejecución óptima formulado en la sección anterior. Dado un horizonte de tiempo $T \in (0, \infty)$ y cualquier par $(x, Y) \in \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}_+$, las siguientes afirmaciones son ciertas:

(i) La estrategia de liquidación óptima implica que la compra de unidades no es necesaria, es decir

$$v(T,x,Y) = \sup_{\xi^s \in \mathcal{A}^s_{T,Y}} I_{T,x,Y}(\xi^s, 0). \tag{2.16}$$

En particular, el mercado no permite manipulación de precios.

(ii) La función de valor satisface

$$\frac{1}{\lambda} x \left[1 - e^{-\lambda Y}\right] - C_s Y \leq v(T,x,Y) \leq \frac{1}{\lambda} x \left[1 - e^{-\lambda Y}\right], \tag{2.17}$$

para toda $T \in (0,\infty)$ y $(x,Y) \in \mathbb{R}^*_+ \times \mathbb{R}_+$.

(iii) Si $C_s = 0$, entonces es óptimo vender todas las unidades de la acción al tiempo 0 y la función de valor está dada por $v(T,x,Y) = \frac{1}{\lambda} x \left[1 - e^{-\lambda Y}\right]$, para toda $T \in (0,\infty)$ y $(x,Y) \in \mathbb{R}^*_+ \times \mathbb{R}_+$.

(iv) Suponga que $\delta = \mu \geq 0$. Si $T \in \mathbb{R}^*_+$, entonces es óptimo vender todas las unidades disponibles al tiempo T. En este caso, la función de valor está dada por

$$v(T,x,Y) = \frac{1}{\lambda} s \left[1 - e^{-\lambda Y}\right] - e^{-\delta T} C_s Y, \tag{2.18}$$

para todo $(x,Y) \in \mathbb{R}^*_+ \times \mathbb{R}_+$.

Es importante rescatar varios aspectos de los resultados anteriores. Uno de ellos es que el resultado del inciso (*iv*) de la Proposición 2.5 es válido aun cuando se permitieran ventas en corto. Por otro lado, es importante ver que si las condiciones de los incisos (*iii*) y (*iv*) de la Proposición 2.5 entonces toda estrategia admisible es óptima.

Proposición 2.6. Considere el modelo de mercado desarrollado en la sección anterior y las definiciones 2.2 y 2.3. Las siguientes afirmaciones son ciertas

(i) El mercado no permite oportunidades de arbitraje.

(ii) Si $\mu = 0$, entonces no existe manipulación de precios.

2.3 Solución al problema de ejecución óptima

Después de revisar los supuestos del modelo y las condiciones que se deben cumplir para evitar que haya arbitraje o manipulación en el precio, se procederá a resolver el problema de ejecución óptima.

Si se tiene que el inversionista se encuentra en algún momento antes del tiempo T, y que cuenta con Y unidades del activo en ese momento. Además, supóngase que el precio del activo en ese momento es de x y que el tiempo restante para deshacerse de las Y unidades del activo que tiene es t. Entonces, si el inversionista observa que el precio del activo es desfavorable, el inversionista puede esperar un tiempo a que el precio recupere valor y después continuar ejecutando de manera óptima. Por otro lado, si el precio del activo es favorable, el inversionista podría decidir realizar una transacción distinta a la óptima con la finalidad de obtener un beneficio y después continuar de manera óptima.

Para el primer caso, sea Δt el periodo de tiempo que el inversionista espera a que el precio sea favorable, el principio de optimalidad de Bellman implica que esperar cierto tiempo a que el precio mejore no es necesariamente óptimo, por lo que se tiene la siguiente desigualdad

$$v\left(t,x,Y\right) \geq \mathbb{E}\left[e^{-\delta\Delta t}v\left(t-\Delta t, X_{\Delta t}, Y\right)\right].$$

Aplicando la fórmula de Itŏ, dividiendo entre Δt y haciendo Δt tender a 0, se tiene que

$$-v_t\left(t,x,Y\right) + \frac{1}{2}\sigma^2 x^2 v_{xx}\left(t,x,Y\right) + \mu x v_x\left(t,x,Y\right) - \delta v\left(t,x,Y\right) \leq 0. \tag{2.19}$$

Para el segundo caso, supóngase que se vende un monto $\epsilon > 0$ de unidades, y después se continúa de manera óptima. Por el principio de optimalidad de Bellman, de nuevo considerando que este no sea necesariamente el camino óptimo, se tiene la siguiente desigualdad

$$v\left(t,x,Y\right) \geq v\left(t, x-\lambda x\epsilon, Y-\epsilon\right) + (x-C_s)\epsilon,$$

despejando y haciendo tender ϵ a 0 se tiene que

$$-\lambda v_x\left(t,x,Y\right) - v_Y\left(t,x,Y\right) + x - C_s \leq 0. \tag{2.20}$$

Resumiendo, una de estas dos opciones con las que cuenta el inversionista (2.19) ó (2.20) tiene que ser óptima. Además, considerando el resultado de la Proposición 2.5 inciso (i), se espera que la función de valor definida en la Sección 1 tenga una solución $w : \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ a la ecuación de HJB, dada por

$$max\left\{-w_t(t,x,Y) + \mathcal{L}w(t,x,Y), -\lambda x w_x(t,x,Y) - w_y(t,x,Y) + x - C_s\right\} = 0, \tag{2.21}$$

con condición de frontera

$$w(0,x,Y) = \frac{1}{\lambda}x\left[1 - e^{-\lambda x}\right] - C_s Y. \tag{2.22}$$

Aquí

$$\mathcal{L}w(t,x,Y) = \frac{1}{2}\sigma^2 x^2 w_{xx}(t,x,Y) + \mu x w_x(t,x,Y) - \delta w(t,x,Y) \leq 0. \tag{2.23}$$

Sean

$$\begin{aligned}\mathcal{W} &= \left\{(t,x,Y) \in [0,T] \times \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}_+ | - w_t(t,x,Y) + \mathcal{L}w(t,x,Y) = 0\right\}\\ \mathcal{S} &= \left\{(t,x,Y) \in [0,T] \times \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}_+ | - \lambda x w_x(t,x,Y) + w_y(t,x,Y) - x + C_s = 0\right\},\end{aligned}$$

donde $\mathcal{W}$ será la región de espera y $\mathcal{S}$ la región de venta.

Se enunciará un teorema de verificación que asocia una solución a la ecuación de HJB (2.21)-(2.22) con la función de valor del problema de control, y dicha solución será la estrategia óptima.

Proposición 3.1. Considere el problema de ejecución óptima de la Sección 1. Dado un horizonte de tiempo $T \in (0,\infty)$, suponga que una función $w : [0,T] \times \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ es $C^{1,2,1}$ solución a la ecuación de HJB (2.21)-(2.22) tal que

$$-C_s Y \leq w(t,x,Y) \leq \tfrac{1}{\lambda}x \quad \text{para todo} \quad (t,x,Y) \in [0,T] \times \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}_+. \tag{2.24}$$

Si para todas las condiciones iniciales $(x,Y) \in \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}_+$, existe $\xi^{s\star} \in \mathcal{A}_{T,Y}^s$ tal que

$$(X_t^\star, Y_t^\star) \in \mathcal{W} \quad \text{para todo} \quad t \geq 0 \quad \mathbb{P}-\text{c.s.} \tag{2.25}$$

$$\xi_{t+}^{s\star} = \textstyle\int_{[0,t]} \mathbf{1}_{\{(X_t^\star, Y_t^\star) \in \mathcal{S}\}} d\xi_t^{s\star} \quad \text{para todo} \quad t \geq 0 \quad \mathbb{P}-\text{c.s.} \tag{2.26}$$

donde $X^\star$ y $Y^\star$ son el precio y las unidades de la acción respectivamente asociados a la estrategia de liquidación $(\xi^{s\star}, 0)$, entonces w es igual a la función de valor v definida en la sección 1. En particular

$$v(T,x,Y) = \sup\nolimits_{\xi^s \in \mathcal{A}_{T,Y}^s} I_{T,x,Y}(\xi^s, 0) = w(T,x,Y) \quad \text{para todo} \quad (x,Y) \in \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}_+, \tag{2.27}$$

y $(\xi^{s\star}, 0)$ es una estrategia de liquidación óptima.

Se puede observar que la estrategia de liquidación óptima está dada por una estrategia de venta pura, esto es, no comprar ninguna unidad, lo que es conveniente para el siguiente capítulo de este trabajo, ya que se planteará un modelo discreto de este modelo, y se trabajará con un modelo en el cual solo se venden unidades.

Como se puede ver en la solución a este modelo, la ejecución óptima se divide en dos regiones, una en la que el inversionista espera a que el precio sea favorable no realizando ninguna transacción hasta que el precio llegue a un nivel en el que la ejecución es óptima. La otra región es en la que el precio es muy favorable para el inversionista, y por lo tanto éste decide vender una cantidad apropiada de unidades, lo que genera un impacto en el precio moderado con el fin de continuar después de manera óptima.

Capítulo 3

Modelo discreto con impacto multiplicativo del impacto en el precio

En este capítulo se presenta la solución al problema de ejecución óptima para un modelo multiplicativo de impacto en el precio de manera discreta, tomando como base el modelo de impacto en el precio presentado en el capítulo anterior con algunas diferencias, con la finalidad de tener resultados numéricos, que permitan comparar estos resultados con los obtenidos en el Capítulo 1.

Como se ha hecho en los capítulos anteriores, lo que interesa es la solución al problema de ejecución óptima, encontrando la ejecución óptima de las unidades con las que cuenta un inversionista con el objetivo de obtener los mejores beneficios. Se está estudiando un modelo multiplicativo en el impacto en el precio, ya que parece representar de mejor manera las dinámicas de los precios, como se menciona en Guo y Zervos [15]. Este modelo tiene algunas ventajas sobre un modelo aditivo. En primer lugar, como se ha mencionado anteriormente, este modelo garantiza que el precio sea no negativo con probabilidad positiva, lo que explica de manera mas verídica la dinámica del precio.

Por otro lado, para el modelo del impacto en el precio que se utilizará en este capítulo, se considerarán dos componentes, como en Bertsimas y Lo [4], y que además rescatan Guo y Zervos [15] que se vio en el capítulo anterior. El primer componente depende completamente del inversionista, en el que se modela el impacto en el precio debido a las decisiones del inversionista, el cual será considerado como un impacto temporal. El segundo componente es un impacto que no depende de las decisiones del inversionista, que es inherente al mercado.

En los modelos que se han revisado hasta ahora, el impacto en el precio se ha considerado fijo, es decir, cuando el inversionista hace una transacción el precio es afectado, sin considerar una probabilidad de que este impacto pueda verse realmente reflejado en el precio. Por lo tanto, en este modelo se considerará que el impacto en el precio al realizarse una transacción es aleatorio, dando mayor veracidad a las dinámicas en el precio. Impactos de este estilo se han considerado en trabajos como el de Bielecki, Hernández y Pliska [14].

Para la solución de este modelo, se utilizará una técnica de optimización llamada programación dinámica estocástica, la cual permitirá encontrar una solución cerrada al problema. Esta metodología permite descomponer el problema de optimización inicial en subproblemas, los cuales son más sencillos de resolver. Además de que la solución a estos problemas da la solución al problema original, estas soluciones se hacen de manera secuencial.

Por último, con la solución obtenida en este capítulo para el problema multiplicativo se hará una revisión numérica, para poder comprarla con la solución al problema aditivo.

3.1 Descripción del modelo

Considere un inversionista con una cantidad $Y > 0$ de unidades de un activo, las cuales desea vender dentro de un periodo de tiempo finito T. Además, sea y_t el número de unidades que el inversionista tiene al tiempo t antes de realizar una venta, y sea θ_t la cantidad de unidades que el inversionista vende en el periodo de tiempo de t al $t+1$. Las variables θ_k representan en este modelo a las variables de control. Entonces, se tiene que

$$y_t = y_{t-1} - \theta_{t-1}, \qquad t = 1, \cdots, T, \tag{3.1}$$

con la condición $y_{T+1} = 0$. Esta condición corresponde al hecho de que el inversionista quiere deshacerse de las unidades que tiene al final del periodo, la cual se ha considerado en los capítulos anteriores.

3.2 Dinámica del precio

Como en el Capítulo II, considere que cuando el inversionista no realiza ninguna transacción, el precio solo se ve afectado por las decisiones tomadas por los demás actores del mercado, cuya dinámica es

$$\tilde{S}_t = \tilde{S}_{t-1} e^{\sigma W_t}, \quad \text{para} \quad t = 0, \cdots, T+1, \tag{3.2}$$

donde W_t es una variable aleatoria con media igual a 0 y varianza igual a 1, y $\sigma > 0$ es una constante la cual indica la volatilidad del precio del activo.

Suponga que el inversionista realiza una transacción y para este modelo se considerarán dos escenarios. El primer escenario en el cual el precio se ve afectado por la transacción del inversionista en una proporción del precio en el que se empieza a ejecutar la transacción y de las unidades que se ejecutan, es decir si se considera que la transacción se hizo en el tiempo t

se tiene un impacto de $1 - \lambda\theta_t$, donde λ es una constante que indica el tamaño del impacto de las unidades negociadas y es tal que

$$0 < \lambda < \frac{1}{Y}, \tag{3.3}$$

para asegurar que el precio no toma valores negativos para toda $t = 1, \cdots, T$.

El segundo escenario consiste en que el precio no se ve afectado a partir de la transacción hecha por el inversionista, por lo que el impacto sería de 1. Como se podría esperar en un escenario real, el escenario más probable es que haya un impacto en el precio. Entonces el impacto en el precio debido a la decisión tomada por el inversionista está dado por la variable aleatoria Z_t, cuya distribución está dada por

$$\begin{aligned} \mathbb{P}\left(Z_t = 1 - \lambda\theta_t\right) &= p \\ \mathbb{P}\left(Z_t = 1\right) &= 1 - p, \end{aligned}$$

donde se tomará a p como un valor muy cercano a 1, y λ está dado como en (3.3). El valor esperado condicional de Z_t está dado por

$$\begin{aligned} \mathbb{E}\left(Z_t | \theta_t\right) &= p\left(1 - \lambda\theta_t\right) + 1 - p \\ &= 1 - p\lambda\theta_t. \end{aligned} \tag{3.4}$$

Entonces, sea S_t el precio del activo al tiempo t, para $t = 0, \cdots, T$ donde $S_0 = x$. La dinámica que sigue el precio del activo está dada por

$$S_t = \tilde{S}_t Z_t. \tag{3.5}$$

Se puede observar que esta expresión es parecida a (2.8), en donde se puede ver que el impacto multiplicativo en el precio.

3.3 Problema de optimización

El problema que el inversionista quiere resolver consiste en maximizar el valor esperado de sus ganancias, en función de las decisiones de venta que va a tomar, es decir

$$\max_{\{\theta_t\}} \mathbb{E}\left[\sum_{t=1}^{T} S_t\theta_t\right] \tag{3.6}$$

con la restricción

$$\sum_{t=1}^{T} \theta_t = Y.$$

Esta última restricción refleja la condición de que el inversionista debe vender todas las unidades del activo que posee. Además, S_t sigue la dinámica dada por (3.5).

Para resolver este problema de optimización se utilizará programación dinámica, la cual establece que la solución al problema original dada por $\{\theta_1^*, \cdots, \theta_T^*\}$ sigue siendo óptima para valores intermedios. Es decir, que para $0 < t < T$, la solución $\left\{\theta_t^*, \theta_{t+1}^*, \cdots, \theta_T^*\right\}$ es óptima para

$$\max_{\{\theta_k\}_t^T} \mathbb{E}\left[\sum_{k=t}^{T} S_k \theta_k\right].$$

Las ecuaciones recursivas de Bellman hacia atrás, están dadas por

$$V_t\left(\tilde{S}_{t-1}, y_t\right) = \max_{\{\theta_t\}} \mathbb{E}\left[S_t\theta_t + V_{t+1}\left(\tilde{S}_t, y_{t+1}\right)\right], \tag{3.7}$$

con condición final

$$V_{T+1}\left(\tilde{S}_T, y_{T+1}\right) = 0.$$

3.4 Solución al problema de ejecución

Ahora que ya se tiene establecido el problema de optimización, se puede dar una solución al problema de ejecución óptima. Se supondrá que W_t sigue una distribución normal estándar, por lo que

$$c := \mathbb{E}\left[e^{\sigma W_t}\right] = e^{\sigma^2/2}. \tag{3.8}$$

Entonces, considerando que al tiempo $T+1$ el inversionista ya se deshizo de todas las unidades que tenía, y tomando en cuenta la condición inicial, se tiene que

$$V_{T+1}\left(\tilde{S}_T, y_{T+1}\right) = 0.$$

Para el siguiente periodo, y por (3.7) se tiene

$$\begin{aligned} V_T\left(\tilde{S}_{T-1}, y_T\right) &= \max_{\{\theta_T\}} \mathbb{E}\left[S_T\theta_T + V_{T+1}\left(\tilde{S}_T, y_{T+1}\right)\right] \\ &= \max_{\{\theta_T\}} \mathbb{E}\left[S_T\theta_T\right]. \end{aligned} \tag{3.9}$$

Es claro que para el último periodo de venta, el valor que maximiza su ganancia es vender todas las unidades que le quedan, es decir que el valor que maximiza la ecuación (3.9) es $\theta_T^* = y_T$, por lo que se tiene que

$$\begin{aligned} V_T\left(\tilde{S}_{T-1}, y_T\right) &= \mathbb{E}\left[S_T y_T\right] \\ &= \mathbb{E}\left[\tilde{S}_T Z_T y_T\right] \\ &= \mathbb{E}\left[\tilde{S}_{T-1} e^{\sigma W_T} Z_T y_T\right] \\ &= c\tilde{S}_{T-1}\mathbb{E}\left[Z_T\right] y_T \\ &= c\tilde{S}_{T-1}\left(1 - p\lambda y_T\right) y_T. \end{aligned}$$

Ahora, para $T-1$, por la ecuación (3.7) se tiene que

$$\begin{aligned} V_{T-1}\left(\tilde{S}_{T-2}, y_{T-1}\right) &= \max_{\{\theta_{T-1}\}} \mathbb{E}\left[S_{T-1}\theta_{T-1} + V_T\left(\tilde{S}_{T-1}, y_T\right)\right] \\ &= \max_{\{\theta_{T-1}\}} \mathbb{E}\left[S_{T-1}\theta_{T-1} + c\tilde{S}_{T-1}\left(1 - p\lambda y_T\right) y_T\right] \\ &= \max_{\{\theta_{T-1}\}} \mathbb{E}\left[\tilde{S}_{T-1} Z_{T-1}\theta_{T-1} + c\tilde{S}_{T-1}\left(1 - p\lambda(y_{T-1} - \theta_{T-1})\right)\left(y_{T-1} - \theta_{T-1}\right)\right] \\ &= \max_{\{\theta_{T-1}\}} \mathbb{E}\left[\tilde{S}_{T-1}\left(Z_{T-1}\theta_{T-1} + c\left(1 - p\lambda(y_{T-1} - \theta_{T-1})\right)\left(y_{T-1} - \theta_{T-1}\right)\right)\right] \\ &= \max_{\{\theta_{T-1}\}} c\tilde{S}_{T-2}\left[(1 - p\lambda\theta_{T-1})\theta_{T-1} + c\left(1 - p\lambda(y_{T-1} - \theta_{T-1})\right)\left(y_{T-1} - \theta_{T-1}\right)\right]. \end{aligned} \tag{3.10}$$

Por lo que derivando e igualando a cero, se puede ver que

$$\theta_{T-1}^* = a_1 y_{T-1} + b_1, \tag{3.11}$$

donde

$$a_1 = \frac{c}{c+1}, \tag{3.12}$$

$$b_1 = -\frac{c-1}{2p\lambda\left(c+1\right)}. \tag{3.13}$$

Entonces, sustituyendo el valor óptimo en la ecuación (3.10), se tiene que

$$V_{T-1}\left(\tilde{S}_{T-2}, y_{T-1}\right) = c\tilde{S}_{T-2}\left[d_1 + e_1 y_{T-1} + f_1 y_{T-1}^2\right]. \tag{3.14}$$

donde

$$d_1 = b_1(1-p\lambda b_1) - cb_1(1+p\lambda b_1) \tag{3.15}$$
$$e_1 = a_1(1-2p\lambda b_1) + c(1-a_1)(1+2p\lambda b_1) \tag{3.16}$$
$$f_1 = -p\lambda a_1. \tag{3.17}$$

Para $T-2$, la ecuación de Bellman queda de la siguiente manera

$$V_{T-2}\left(\tilde{S}_{T-3}, y_{T-2}\right) = \max_{\{\theta_{T-2}\}} c\tilde{S}_{T-3}\left[(1-p\lambda\theta_{T-2})\theta_{T-2} + c\left(d_1 + e_1(y_{T-2}-\theta_{T-2}) + f_1(y_{T-2}-\theta_{T-2})^2\right)\right]. \tag{3.18}$$

Por lo que, derivando la función e igualando a 0 se tiene que

$$\theta_{T-2}^* = a_2 y_{T-2} + b_2, \tag{3.19}$$

donde

$$a_2 = \frac{cf_1}{cf_1 - p\lambda}, \tag{3.20}$$
$$b_2 = \frac{cf_1 - 1}{2\left(cf_1 - p\lambda\right)}. \tag{3.21}$$

Ahora, sustituyendo (3.19) en la ecuación (3.18), se tiene

$$V_{T-2}\left(\tilde{S}_{T-3}, y_{T-2}\right) = c\tilde{S}_{T-3}\left[d_2 + e_2 y_{T-2} + f_2 y_{T-2}^2\right], \tag{3.22}$$

donde

$$d_2 = b_2(1-p\lambda b_2) - cb_2(e_1 - f_1 b_2) + cd_1 \tag{3.23}$$
$$e_2 = a_2(1-2p\lambda b_2) + c(1-a_2)(e_1 - 2f_1 b_2) \tag{3.24}$$
$$f_2 = -p\lambda a_2. \tag{3.25}$$

Por lo tanto, utilizando inducción se puede ver que para $k = 2, \cdots, T-1$, se cumple que el valor óptimo para la venta está dado por

$$\theta^*_{T-k} = a_k y_{T-k} + b_k, \tag{3.26}$$

donde

$$a_k = \frac{cf_{k-1}}{cf_{k-1} - p\lambda}, \tag{3.27}$$

$$b_k = \frac{cf_{k-1} - 1}{2\left(cf_{k-1} - p\lambda\right)}. \tag{3.28}$$

Y la función de valor para cada tiempo k, tiene la siguiente forma

$$V_{T-k}\left(\tilde{S}_{T-(k+1)}, y_{T-k}\right) = c\tilde{S}_{T-(k+1)}\left[d_k + e_k y_{T-k} + f_k y^2_{T-k}\right], \tag{3.29}$$

donde

$$d_k = b_k(1 - p\lambda b_k) - cb_k(e_{k-1} - f_{k-1}b_k) + cd_{h-1} \tag{3.30}$$

$$e_k = a_k(1 - 2p\lambda b_k) + c(1 - a_k)(e_{k-1} - 2f_{k-1}b_k) \tag{3.31}$$

$$f_k = -p\lambda a_k. \tag{3.32}$$

Se puede observar que los valores de las variables de control están dadas de manera recursiva, ya que dependen de valores obtenidos en pasos anteriores.

3.5 Resultados numéricos

En esta sección se evaluarán los resultados obtenidos en la sección anterior. Se estudiará la solución para tres valores de la volatilidad con el fin de estudiar los diferentes escenarios y las decisiones del inversionista. Después, para evaluar la similitud con el resultado obtenido en el capítulo anterior, se revisarán los resultados para diferentes valores del precio.

Sea el precio inicial del activo de 50 unidades monetarias, y considere que el inversionista tiene $1,000$ unidades del activo al inicio y quiere deshacerse de éstas en 10 periodos. Además la probabilidad de que se refleje el impacto en el precio al realizar una transacción está dada por $p = 0.9$. Considerando el valor inicial de unidades del inversionista sea $\lambda = 1/1001$. La siguiente tabla muestra el resumen de los parámetros que se considerarán en estos primeros resultados

$$\begin{array}{lcl} S_0 & = & 50 \\ Y & = & 1,000 \\ T & = & 10 \\ \lambda & = & 1/1001 \end{array}$$

Tabla 3.1: Parámetros

Primero supóngase que la volatilidad del precio del activo tiene un valor de $\sigma = 0.3$. A continuación se muestran las unidades mantenidas en cada periodo, así como las unidades que el inversionista debería vender para maximizar sus ganancias

$$\begin{aligned}
y_1 &= 997.74 \\
y_2 &= 971.11 \\
y_3 &= 921.18 \\
y_4 &= 848.98 \\
y_5 &= 755.48 \\
y_6 &= 641.63 \\
y_7 &= 508.32 \\
y_8 &= 356.41 \\
y_9 &= 186.70 \\
y_{10} &= 0
\end{aligned}$$

Tabla 3.2: Unidades mantenidas

$$\begin{aligned}
\theta_1 &= 2.25 \\
\theta_2 &= 26.63 \\
\theta_3 &= 49.93 \\
\theta_4 &= 72.20 \\
\theta_5 &= 93.49 \\
\theta_6 &= 113.85 \\
\theta_7 &= 133.31 \\
\theta_8 &= 151.92 \\
\theta_9 &= 169.70 \\
\theta_{10} &= 186.70
\end{aligned}$$

Tabla 3.3: Unidades vendidas

Se puede observar que en este caso, la venta al principio es pequeña, y a medida que avanza el tiempo se tiene una mayor venta de unidades, esto se debe a que en un principio el inversionista espera disminuir poco el precio mediante la decisión de vender una pequeña cantidad de unidades, lo que generará que en periodos mas adelante el precio se mantenga o incluso suba un poco el precio, debido a la alta volatilidad que presenta el mercado, generando que se tengan mayores ganancias mas adelante ya que el inversionista estaría vendiendo a un precio mas alto que al inicio del periodo.

A continuación se presenta una tabla con el valor del precio esperado para cada periodo, así como dos gráficas en las que se reflejan las trayectorias de la ejecución óptima y las unidades mantenidas en cada periodo.

S_0	S_1	S_2	S_3	S_4	S_5	S_6	S_7	S_8	S_9
50	52.18	53.13	52.80	51.25	48.60	45.05	40.85	36.25	31.49

Tabla 3.4: Precio esperado por periodo

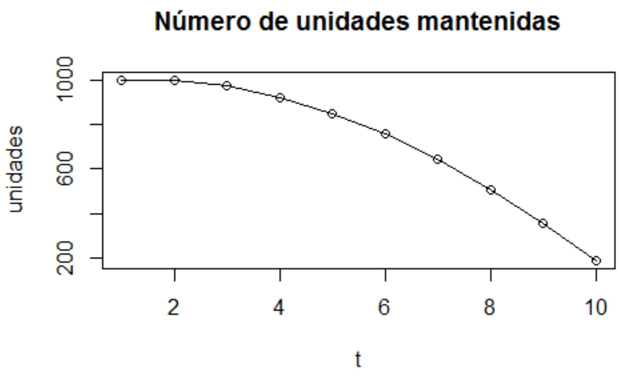

Figura 3.1: $\sigma = 0.3$

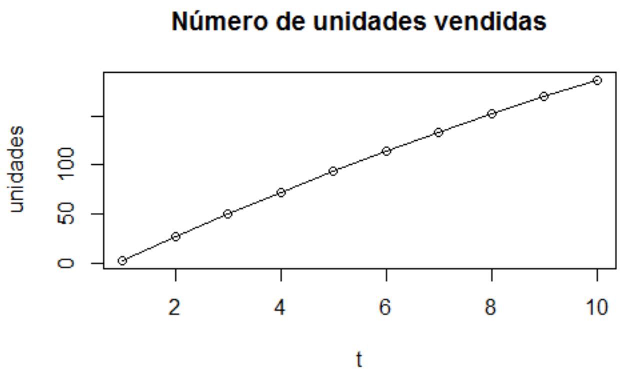

Figura 3.2: $\sigma = 0.3$

Ahora considérese que la volatilidad del precio del activo es más chica dada por un valor de $\sigma = 0.2$, entonces la ejecución óptima está dada por

$$
\begin{aligned}
y_1 &= 942.13 \\
y_2 &= 874.39 \\
y_3 &= 796.99 \\
y_4 &= 710.10 \\
y_5 &= 613.93 \\
y_6 &= 508.65 \\
y_7 &= 394.44 \\
y_8 &= 271.48 \\
y_9 &= 139.94 \\
y_{10} &= 0
\end{aligned}
$$

Tabla 3.5: Unidades mantenidas

$$
\begin{aligned}
\theta_1 &= 57.86 \\
\theta_2 &= 67.73 \\
\theta_3 &= 77.40 \\
\theta_4 &= 86.88 \\
\theta_5 &= 96.17 \\
\theta_6 &= 105.28 \\
\theta_7 &= 114.20 \\
\theta_8 &= 122.95 \\
\theta_9 &= 131.53 \\
\theta_{10} &= 139.94
\end{aligned}
$$

Tabla 3.6: Unidades vendidas

Como se puede observar, para un valor de la volatilidad mas pequeño, el inversionista preferirá vender un poco mas de unidades al principio debido a que el precio del activo no presenta una volatilidad tan alta como en el primer caso, lo que hace que no sea tan atractivo para el inversionista esperar a que el precio se mueva, vendiendo un número mayor de unidades al principio.

S_0	S_1	S_2	S_3	S_4	S_5	S_6	S_7	S_8	S_9
50	48.06	45.71	43.03	40.09	36.97	33.75	30.50	27.29	24.18

Tabla 3.7: Precio esperado por periodo

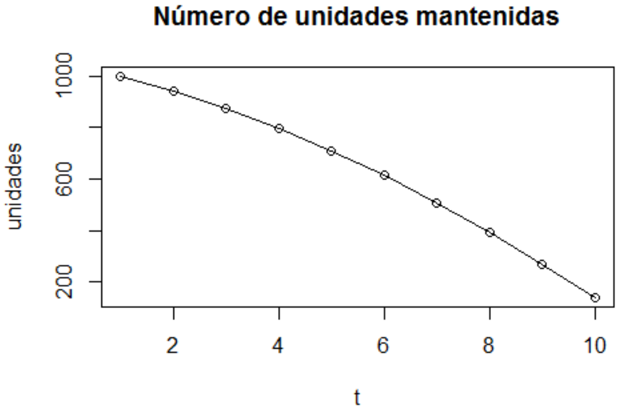

Figura 3.3: $\sigma = 0.1$

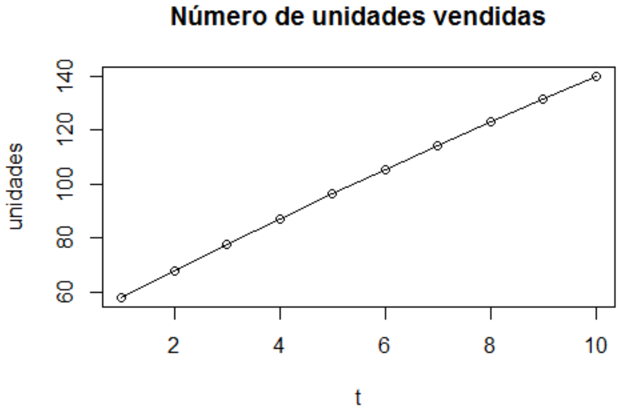

Figura 3.4: $\sigma = 0.1$

Por último, considerando una volatilidad dada por $\sigma = 0.005$, es decir una volatilidad muy pequeña en el precio del activo, se tiene que la ejecución óptima está dada por

$$\begin{aligned} y_1 &= 900.03 \\ y_2 &= 800.05 \\ y_3 &= 700.06 \\ y_4 &= 600.07 \\ y_5 &= 500.07 \\ y_6 &= 400.07 \\ y_7 &= 300.06 \\ y_8 &= 200.04 \\ y_9 &= 100.03 \\ y_{10} &= 0 \end{aligned}$$

Tabla 3.8: Unidades mantenidas

$$\begin{aligned} \theta_1 &= 99.97 \\ \theta_2 &= 99.98 \\ \theta_3 &= 99.99 \\ \theta_4 &= 99.99 \\ \theta_5 &= 99.99 \\ \theta_6 &= 100.00 \\ \theta_7 &= 100.01 \\ \theta_8 &= 100.01 \\ \theta_9 &= 100.02 \\ \theta_{10} &= 100.02 \end{aligned}$$

Tabla 3.9: Unidades vendidas

En este caso en el que la volatilidad es muy pequeña, la decisión del inversionista es vender de manera equilibrada sus unidades, ya que como el mercado no presenta un gran cambio en el precio, para el inversionista es indiferente si vende al principio o vende después, y dado que el impacto en el precio será muy parecido en cada periodo el impacto va a disminuir de manera constante.

S_0	S_1	S_2	S_3	S_4	S_5	S_6	S_7	S_8	S_9
50	45	40.51	36.46	32.82	29.54	26.59	23.93	21.54	19.39

Tabla 3.10: Precio esperado por periodo

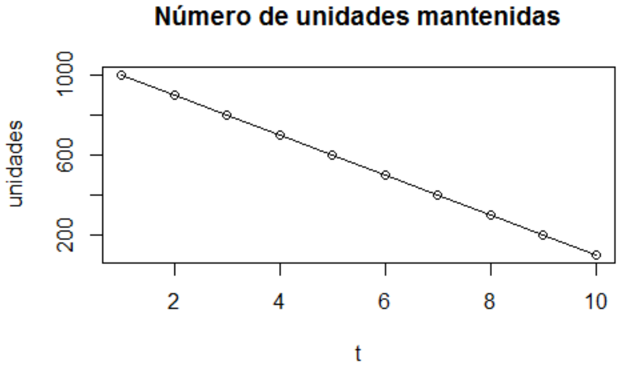

Figura 3.5: $\sigma = 0.005$

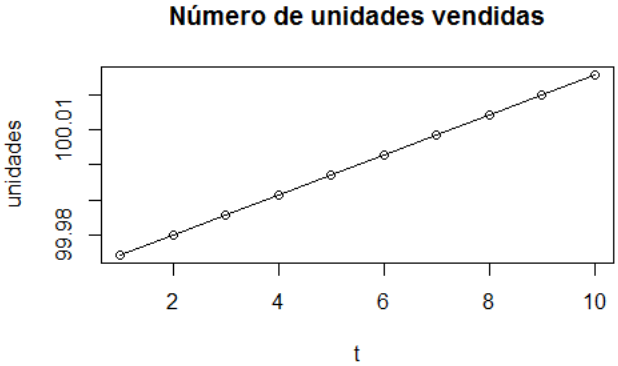

Figura 3.6: $\sigma = 0.005$

Se puede observar que a diferencia del modelo presentado en el Capítulo 1, en este caso la ejecución óptima empieza con una venta menor en los primeros periodos, permitiendo que el precio sea impactado de menor manera, esperando que el precio no baje demasiado o se mantenga constante.

Por otro lado, si bien la solución a este modelo no es tan sencilla como la presentada en el Capítulo 1, es posible incorporar al modelo un impacto aleatorio hecho por las decisiones del inversionista, permitiendo que el modelo sea menos predecible ya que no se tiene certeza de que el impacto sea determinista.

Se puede observar que el modelo reconoce los distintos valores en la volatilidad del mercado, lo que permite al inversionista tomar mejores decisiones, en función de como observa el mercado.

Es claro que la función objetivo resuelta en este capítulo no es igual a la resuelta en el Capítulo 1. Esto se debe a la complejidad que presenta la solución del modelo al incorporar la varianza de los costos de implementación, ya que en este caso se consideran dos factores aleatorios. Por lo que la comparación directa de los resultados no es posible. Sin embargo, una ventaja de contar con una solución al modelo multiplicativo es que no parece tan complicada la generalización a dos activos.

A continuación se anexa el código con el que se generaron los resultados numéricos.

```
# Programa de solucion al problema de ejecucion optima de venta
# Parametros del programa
s <- .3
c <- exp(((s)^2)/2)
yi <- 1000
p <- .9
l <- 1/(yi + 1)
```

```
T <- 10


# Aqui se llenan los vectores con los valores de las constantes para
# cada periodo
a <- rep(0,T)
b <- rep(0,T)
d <- rep(0,T)
e <- rep(0,T)
f <- rep(0,T)

a[1] <- c/(c + 1)
b[1] <- -(c - 1)/(2*p*l*(c + 1))

d[1] <- b[1]*(1 - p*l*b[1]) - c*b[1]*(1 + p*l*b[1])
e[1] <- a[1]*(1 - 2*p*l*b[1]) + c*(1 - a[1])*(1 + 2*p*l*b[1])
f[1] <- -p*l*a[1]

for(i in 2:T){
 a[i] <- (c*f[i-1])/(c*f[i-1] - p*l)
 b[i] <- (c*e[i-1] - 1)/(2*(c*f[i-1] - p*l))

 d[i] <- b[i]*(1 - p*l*b[i]) - c*b[i]*(e[i-1] - f[i-1]*b[i]) + c*d[i
    -1]
 e[i] <- a[i]*(1 - 2*p*l*b[i]) + c*(1 - a[i])*(e[i-1] - 2*f[i-1]*b[i
    ])
 f[i] <- -p*l*a[i]
}

# Ahora se calculan los valores de las thetas y de las y

theta <- rep(0,T)
y <- c(yi,rep(0,T-1))

for(k in 1:(T-1)){
 theta[k] <- a[T-k]*y[k] + b[T-k]
 y[k+1] <- y[k] - theta[k]
}
theta[T] <- y[T]

j <- seq(1,T,1)
plot(j,y,type='o',xlab="t",ylab="unidades",main="N\'umero de unidades
   mantenidas")
plot(j,theta,type='o',xlab="t",ylab="unidades",main="N\'umero de
   unidades vendidas")
```

```
# Por ultimo se calcula el precio esperado del activo

S0 <- 50
S <- c(S0,rep(0,T-1))
for(i in 2:T){
  S[i] <- S[i-1]*c*(1 - l*theta[i-1])
}
```

Conclusiones

El modelo multiplicativo muestra una mejora, en cuanto a la dinámica de los precios, principalmente debido a que no permite que el precio tome valores negativos. Además, el modelo multiplicativo muestra una ventaja al poder incorporar efectos temporales en el impacto debido a las decisiones del inversionista.

Como se vio en el Capítulo 1, el modelo aditivo permite dar una visión amplia de la solución del problema de ejecución óptima, además es sencillo definir la dinámica de precios y sus diferentes componentes, ya que es fácil interpretar las funciones de impacto temporal y permanente así como los parámetros asociados a estas funciones. Además de dar una forma en la cual se puede resolver el problema.

Además, se pueden observar en el Capítulo 1 las preferencias del inversionista, ya que refleja que para un inversionista que admite mayor riesgo la venta de unidades es menor, ya que espera un cambio positivo en el precio. Por el contrario, para un inversionista que no admite mucho riesgo la estrategia óptima muestra que el inversionista no esperará mucho para vender y se deshará rápidamente de las unidades que tiene, para no exponerse al riesgo que tiene el mercado. Por otro lado, el modelo también refleja los cambios en el mercado, mostrando que la estrategia óptima que el inversionista debe seguir se modifica cuando la volatilidad incrementa, lo que genera que el inversionista venda más rápido para así evitar que esté expuesto a cambios desfavorables en el precio y que pueda afectar su ingreso promedio.

Al considerar una función objetivo como la utilizada en el Capítulo 1 compuesta por la esperanza de los costos de implementación y poner como restricción a la varianza, se puede dar una interpretación al multiplicador de Lagrange, la cual está directamente relacionada con el perfil de inversión del inversionista, lo que permite dar una mejor explicación de los resultados, así como plantear diferentes escenarios.

De lo anterior, se puede dar una conclusión más amplia al considerar la función objetivo utilizada en el Capítulo 3, ya que en este caso, la función objetivo fue maximizar los ingresos esperados, en donde el modelo no incorpora el perfil de inversión del inversionista, lo que reduce la posibilidad de plantear diferentes escenarios. Resolver una función objetivo como al planteada en el Capítulo 1 utilizando un modelo multiplicativo en el precio, resulta complicado al introducir un impacto aleatorio, ya que calcular la varianza de los costos supone un trabajo complejo.

Del Capítulo 2 se puede observar que el modelo multiplicativo se puede construir de una manera muy intuitiva, explicando de manera verosímil el comportamiento del precio a raíz de las transacciones que realiza el inversionista las cuales impactan el precio de la acción.

Por otro lado, bajo ciertas características en el mercado, sobretodo en los parámetros de impacto en el precio, este modelo no presenta oportunidades de arbitraje, así como manipulación en los precios.

Para el Capítulo 3, se puede observar que incorporar aleatoriedad en el impacto en el precio, permitiendo tener una solución al problema de ejecución óptima, no generando grandes problemas. Observando un mayor dinamismo en la solución del problema.

La solución dada en el Capítulo 3 para el modelo multiplicativo es una solución suficiente para dar una respuesta razonable al problema de ejecución óptima, en donde se puede observar que el modelo es sensible al mercado, permitiendo expresar diferentes posturas del inversionista ante valores del mercado. Además brinda dinamismo a las decisiones del inversionista debido a la aleatoriedad considerada en el impacto en el precio, lo que reduce la posibilidad de manipulación en el precio. Además, debido a la dinámica del precio, se puede observar que el comportamiento racional del inversionista será no vender una gran cantidad de unidades en los primeros periodos debido a que esperará no impactar de gran manera el precio, esperando a aprovechar mejores niveles en el precio.

Se queda como trabajo posterior la revisión de un modelo general para mas de un activo, tomando en cuenta la correlación entre los activos. También se podría considerar un modelo en el cual no solo de venta pura, es decir que considere compra de unidades, aprovechado el impacto en el precio. Y poder generalizar un modelo para un portafolio de activos.

Bibliografía

[1] Albert S. Kyle, *Continuous auctions and insider trading*, Econometrica, Vol. 53, (1985).

[2] André F. Perold, *The implementation shortfall: paper versus reality*, Journal of Portfolio Management, 14, (1988).

[3] Anna Obizhaeva, Jiang Wang, *Optimal trading strategy and supply/demand dynamics*, (2006).

[4] Dimitris Bertsimas, Andrew W. Lo, *Optimal control of execution costs*, Journal of Financial Markets (1998).

[5] Dimitris Bertsimas, Andrew W. Lo, Paul Hummel, *Optimal control of execution costs for portfolios*, Computational Finance (1999).

[6] Enzo Busseti, Fabrizio Lillo, *Calibration of optimal execution of financial transactions in the presence of transient market impact*, (2012).

[7] Jean-Pierre Fouque, *Handbook on systemic risk*, Cambridge University Press (2013).

[8] Jim Gatheral, Alexander Schied, *Optimal trade execution under geometric Brownian motion in the Almgren and Chriss framework*, International Journal on Theoretical and Applied Finance, 14, (2011).

[9] Katherine Sánchez Casas, *Optimización con órdenes límite y restricción de inventario con transacciones de alta frecuencia*, Tesis, Universidad Nacional de Colombia (2014).

[10] Marco Avellaneda, Sasha Stoikov, *High-Frequency trading in a limit order book*, New York University (2007).

[11] P.A. Forsyth, J.S. Kennedy, S.T. Tse, H. Windcliff, *Optimal trade execution: A mean-quadratic-variation approach*, (2011).

[12] Robert Almgren, Neil Chriss, *Optimal Execution of Portfolio Transactions*, (2000).

[13] Steven Shreve, Prasad Chalasani, Somesh Jha, *Stochastic Calculus and Finance*, (1997).

[14] Tomasz Bielecki, Daniel Hernández Hernández, Stanley R. Pliska, *Risk sensitive control of finite state Markov chains in discrete time, with applicationsto portfolio managment*, Mathematical Methods of Operations Research (1999).

[15] Xin Guo, Mihail Zervos, *Optimal execution with multiplicative pricce impact*, Journal of Financial Mathematics (2015).