CIMAT

CENTRO DE INVESTIGACIÓN EN MATEMÁTICAS, A.C.

Cuantificación de Riesgo de Portafolios Multivariados.

T E S I S

Que para obtener el título de:

Maestra en Ciencias
con especialidad en Probabilidad y Estadística

Presenta:

Beatriz Villa Bahena.

Director de Tesis: Dr. Daniel Hernández Hernández.

Guanajuato, Gto., México, Agosto de 2016

SINODALES

Dr. Enrique Raúl Villa Diharce.
Centro de Investigación en Matemáticas, Guanajuato, México.

Dr. Leonel Pérez Hernández.
Universidad de Guanajuato, Guanajuato, México.
Centro de Investigación en Matemáticas, Guanajuato, México.

Dr. Daniel Hernández Hernández.
Centro de Investigación en Matemáticas, Guanajuato, México.

A mi familia

Agradecimientos

En primer lugar, quiero agradecer a los principales impulsores de mis sueños, mis padres Gabriel Villa Mundo y Angélica Bahena Rivera, que sin escatimar esfuerzo me han apoyado durante toda mi vida, brindándome su amor incondicional y sus palabras de aliento en momentos difíciles. A mis hermanos Gabriel, Angelica y Saúl Villa que son mis gurús desde que era una niña.

A la persona más especial que he conocido en estos últimos dos años, que me ha hecho reír con los chiste más simples y ha estado conmigo en los momentos más difíciles haciéndome pasar al lado de la luz y las risas cuando estoy en el lado oscuro, mi yoda personal Samuel A. Ramos.

A mis amigos Eduardo Álvarez y Julian Suárez me encantó compartir con ustedes tantas experiencias, y estudiar para los básicos, ambos son increíbles, los quiero mucho.

Con el más profundo de los respetos y admiración agradezco a mi asesor el Dr. Daniel Hernández Hernández por sus conocimientos, dedicaión, orientación y paciencia durante el desarrollo de este trabajo. También agradezco, a mis sinodales el Dr. Leonel Pérez Hernández y el Dr. Enrique Raúl Villa Diharce por sus por su tiempo dedicado a la revisión de esta tesis, y por sus sugerencias.

Finalmente doy las gracias, al Centro de Investogación en Matemáticas y al Consejo Nacional de Ciencia y Tecnología por el apoyo dado para que pudiera realizar mis estudios de maestría.

Índice general

Introducción **11**

1. Cópulas y Medidas de Riesgo **15**
1.1. Modelando dependencia con cópulas. 16
1.2. Inversa generalizada 20
1.3. Medidas de Riesgo 21

2. Medidas de Riesgo Estáticas **27**
2.1. Formulación del Problema 28
2.2. Obtención de Cotas para Medidas de Riesgo 30
2.3. Aspectos Computacionales 37

3. Medidas de Riesgo Condicionales **41**
3.1. Representación para medidas de riesgo condicionales 42
3.2. Cotas para las medidas de riesgo condicionales 43
3.3. Dualidad Condicional 48

Conclusiones **51**

Introducción

La cuantificación del riesgo en inversiones es una de las preocupaciones más importantes en la era moderna financiera, no sólo por la necesidad de responder a la normativa emitida por las entidades reguladoras nacionales e internacionales, como los Acuerdos de Basilea sobre la Supervisión Bancaría, sino también, y primordialmente, para mejorar continuamente los procesos de toma de decisiones de inversión.

Existen varios factores fundamentales que contribuyen al desarrollo de la gestión, medición y control del riesgo financiero. Tales factores manifiestan la necesidad que hay en la actualidad de cuantificar el riesgo en el cual se está incurriendo al realizar una inversión, ya sea de corto o de largo plazo. Esta necesidad de avanzar en el estudio del riesgo ha motivado a investigadores y operadores financieros a profundizar en diferentes campos como, jurídico, financiero, económico y matemático, con el fin de desarrollar herramientas capaces de responder a las necesidades del mercado en materia de riesgo. Entre los factores más destacados se encuentran los siguientes:

- **La Volatilidad.** Es nivel de inestabilidad económica en los mercados, la cual se ve reflejada en ciertos factores como, los mercados accionarios, las tasas de cambio y las tasas de interés por mencionar algunos. Todo esto ha llevado al crecimiento acelerado en el estudio del riesgo durante los últimos años.

- **Gran número de Transacciones.** Durante los últimos años, se ha evolucionado considerablemente en el desarrollo de instrumentos que faciliten las transacciones sobre los activos, esto ha ocasionado que tanto el número de activos negociados como el volumen de éstos, haya tenido un incremento considerable en el mundo financiero. Por ejemplo los análisis realizados por Robert Merton, Fisher Black, Myron Scholes llevaron al mercado de derivados financieros como, las opciones, futuros, forwards y swaps, ha tener un aumento evidente a partir de los años 70.

- **La Tecnología.** Este aspecto no solo se refiere a los avances computacionales, sino también, a la optimización de técnicas computacionales que mejoran la velocidad en su uso. Además del florecimiento del uso de la información, ya que en las últimas decadas se ha tomado conciencia acerca de la importancia de tener bases de datos, las cuales se han vuelto esenciales para un análisis de riesgo. Estos avances tecnológicos permiten obtener de forma rápida información fundamental para la toma de decisiones de inversión.

La constante y creciente incertidumbre sobre el rumbo de la economía nacional y mundial, hace que la implementación de medidas de riesgo se conviertan en un instrumento fundamental para la toma de decisiones dentro de las instituciones financieras. En los inicios de los noventas diversas instituciones financieras incursionaron en la concepción de diferentes maneras de medir el riesgo, entre las cuales sobresale J. P.Morgan con su metodología *Riskmetrics*, en la cual se plantea una nueva medida de riesgo, ésta medida es comúnmente conocida como Valor en Riesgo (*Value at Risk-VaR*). Así mismo, es destacable la incorporación del uso obligatorio del VaR, que el Comité de Supervisión Bancaria de Basilea propone en Basilea II (2004), adoptándolo como criterio de cuantificación de recursos propios necesarios por exposición frente al riesgo de mercado, para que un modelo pueda ser considerado como aceptable. Esto hace del Valor en Riesgo la medida éstandar industrial. Igualmente, distintos entes financieros prefieren optar por versiones del Valor en Riesgo para la identificación, cuantificación y control de los riesgos financieros, debido a que ésta medida tiene deficiencias, como penalizar en varias circunstancias la diversificación y no brindar la magnitud de las pérdidas. Este tipo de inconvenientes llevaron a la formulación de las medidas de riesgo coherentes hecha por Artzner, Delbaen, Eber y Heath (1999). A partir de este trabajo emergen distintas medidas de riesgo como el Déficit Esperado, la Medida de Riesgo Entrópica, la Expectativa Condicionada a lo Peor, etc. Estas medidas pueden verse más a fondo en Föllmer y Schied (2004).

En este trabajo nos enfocaremos particularmente en la aproximación de las medidas de riesgo *Valor en Riesgo* y el *Déficit Esperado*, a través de cotas basadas en cópulas. El precursor del estudio de la estimación del riesgo bajo el uso de cotas es Makarov (1981), el propuso unas cotas óptimas para la estimación de la función de distribución de la suma de dos variables aleatorias cuando las marginales son fijas. Posteriormente, Frank et al. (1987) probó el mismo resultado usando cópulas, es decir, introdujo estructuras de dependencia (sin mencionarlas explícitamente), además, extendió los resultados de Markarov excepto que no obtuvo cotas óptimas. Por otra parte, Williamson and Downs (1990), lograron las mejores cotas puntualmente posibles para el caso dos dimensional y desarrollaron un algoritmo para calcularlas computacionalmente. Después de este trabajo, Denuit et al. (1999) y Cossette et al. (2000) extendieron teóricamente los resultados para dimensiones mayores a dos. Nosotros nos centraremos en las cotas propuestas por Embrechts (2003) por su eficiencia puntual y generalidad respecto a la dimensión. Además, estas aproximaciones tienen la particularidad de no asumir ningún supuesto de dependencia entre las variables.

En la actualidad, el gran auge del uso de bases de datos ha llevado al sector financiero a la realización de nuevas metodologías para la cuantificación del riesgo asociadas a la información. Los autores Victor Chernozhukov y Len Umantsev (2000) consideran modelar el Valor en Riesgo tomando en cuenta información prevía para lo cual definen el Valor en Riesgo Condicional, que está dado en términos de la inversa de la función de distribución condicional. Por su parte So Yeon Chun y Alexander Shapiro (2012), abordan este tema considerando diferentes maneras de estimar el riesgo para una sola acción dada la información del mercado. Para esta tesis consideraremos los conceptos teóricos de estos trabajos para la obtención de cotas para el Valor en Riesgo Condicional y el Déficit Esperado Condicional.

En el Capítulo 1 se dan los fundamentos teóricos para la realización del estudio posterior. Empezamos con las definiciones y resultados básicos de cópulas, además de revisar algunas propiedades importantes como la ortodependencia y la comonotonicidad . Luego, presentamos algunos resultados de la función inversa generalizada que serán útiles en algunas demostraciones de nuestro trabajo. Posteriormente, damos una introducción de las medidas de riesgo coherentes, donde se analizan las propiedades primordiales como invarianza, homogeneidad, y subaditividad. Además, exhibimos las medidas de riesgo Valor en Riesgo y Déficit Esperado, las cuales son de vital importancia para el desarrollo del trabajo.

En el Capítulo 2 se presenta el planteamiento y análisis de la utilización de cópulas para la obtención de cotas que aproximen al Valor en Riesgo y al Déficit Esperado. El planteamiento de las cotas vía cópulas brindado por Embrechts es la fuente de concepción principal de este trabajo. Finalmente, en el Capítulo 3 se extienden los resultados del Capítulo 2 bajo la restricción de información adicional, lo cual representa nuestra principal aportación. En la parte final damos las conclusiones donde se proponen algunas ideas de como podría abordarse este problema de manera más general para continuar esta linea de investigación.

Capítulo 1

Cópulas y Medidas de Riesgo

En este capítulo se dan a conocer resultados y conceptos fundamentales que nos serán útiles para el desarrollo de este trabajo. En la Sección 1.1 abordaremos el tema de cópulas, ya que es una de las herramientas principales para el análisis de nuestro objetivo. Primero exhibiremos el resultado más importante de cópulas, el Teorema de Sklar(1959), y luego exponemos las cotas de Fréchet, las cuales debido a que siempre existen para cualquier cópula, son de gran utilidad en la obtención de cotas para funciones de distribución. Para más información de cópulas, veáse Nelsen (2006).

En la Sección 1.2 se exponen algunas propiedades de interés de la función inversa generalizada, puesto que eventualmente se utilizará la función cuantil para la cuantificación del riesgo. Se puede encontrar un estudio más a fondo de la función inversa generalizada en Embrechts y Hofert (2013). Finalmente, en la Sección 1.3 se da una introducción a las medidas de riesgo, describiendo algunas de sus principales propiedades de manera teórica y en sentido financiero. Además, se muestra el Valor en Riesgo y el Déficit Esperado, medidas en las cuales se centra nuestro estudio.

1.1. Modelando dependencia con cópulas.

El termino *cópula* proviene del Latín y significa vínculo. Una cópula acopla las funciones de distribución marginales para formar una función de distribución conjunta. La relación de dependencia de las marginales está completamente determinada por su cópula, mientras que la escala y la forma (media, desviación estándar y kurtosis) son determinadas por las marginales.

Las cópulas pueden ser utilizadas para obtener densidades multivariadas un poco más realistas que la común normal multivariada, por ejemplo podemos tener una cópula normal bivariada con una marginal T-student y otra marginal logística. Algunos trabajos que han estudiado este tipo de funciones de distribución son: Embrechts, Hoing y Juri (2003b), y Fang y Fang (2002). En esta sección se presentan resultados básicos de cópulas y su relación con medidas de dependencia de variables aleatorias.

Sean $X_1, \cdots, X_n$ variables aleatorias cuya dependencia entre ellas está totalmente determinada por su función de distribución conjunta $F(x_1, \cdots, x_n) = \mathbb{P}(X_1 \leq x_1, \cdots, X_n \leq x_n)$ en un periodo estático. Cuando se concibe a $F(x_1, \cdots, x_n)$ como una herramienta que describe la estructura de dependencia y el comportamiento marginal del vector aleatorio $(X_1, \ldots, X_n)$, nos lleva al concepto de cópula el cual fue introducido por Sklar(1959).

Definición 1.1.1. *Una cópula es una función $C : [0,1]^n \to [0,1]$ que satisface las siguientes propiedades:*

(i) *C es no decreciente en cada argumento.*

(ii) *Para todo $u_k \in [0,1], k = 1, \cdots, n$*

$$C(1, 1, \cdots, 1, u_k, 1, \cdots, 1) = u_k.$$

y para todo $u := (u_1, u_2, \ldots, u_{n-1}, u_n) \in [0,1]^n$ se tiene que

$$C(u) = 0 \text{ si al menos un } u_i = 0, \ i = 1, \ldots, n.$$

(iii) *C es $n-$creciente, es decir, para todo $a = (a_1, \cdots, a_n), b = (b_1 \cdots, b_n) \in [0,1]^n$ con $a_i \leq b_i, i = 1, \cdots n$, se tiene que:*

$$\sum_{j_1=1}^{2} \cdots \sum_{j_n=1}^{2} (-1)^{j_1+\cdots+j_n} C(u_{1j_1}, \cdots, u_{nj_n}) \geq 0,$$

donde $u_{ij_1} = a_i, u_{ij_2} = b_i$ para todo $i = 1, \cdots, n$.

El siguiente teorema es nombrado por varios autores como el resultado más importante de cópulas, y su uso es esencial en la teoría de probabilidad y estadística, particularmente, en problemas relacionados con dependencia dadas las marginales y funciones de variables aleatorias que son invariantes bajo transformaciones monótonas.

Teorema 1.1.1 (Teorema de Sklar)**.** *Sea H una función de distribución $n-$dimensional con funciones de distribución marginales $F_1, \cdots, F_n$. Entonces existe una cópula C $n-$dimensional tal que para todo $x \in \bar{\mathbb{R}}$,*

$$H(x_1, \cdots, x_n) = C(F_1(x_1), \cdots, F_n(x_n)). \tag{1.1.1}$$

Si $F_1, \cdots, F_n$ son todas continuas, entonces C es única, de otro modo C es únicamente determinada sobre $RanF_1 \times \cdots \times RanF_n$. Inversamente, si C es una cópula $n-$dimensional y $F_1, \cdots, F_n$ son funciones de distribución marginales, entonces la función H definida en (1.1.1)*, es una función de distribución $n-$dimensional con marginales $F_1, \cdots, F_n$.*

Notemos que en la ecuación (1.1.1) se describe como las cópulas relacionan las funciones de distribución multivariadas con sus marginales; en Nelsen (2006) puede encontrarse la demostración de éste.

Definición 1.1.2. *Sea $(U_1, \cdots, U_n)$ un vector aleatorio $n-$dimensional con marginales uniformes estándar en $(0, 1)$ y sea G su función de distribución. El dual de G está definido por*

$$G^d(u_1, \cdots, u_n) := \mathbb{P}(\cup_{i=1}^n \{U_i \leq u_i\})$$

y la cópula de supervivencia $\hat{C}$ de G es la función de distribución conjunta de $(1 - U_1, \cdots, 1 - U_n)$.

Observemos que para variables aleatorias $X_1, \ldots, X_n$, con función de distribución conjunta F, marginales $F_1, \cdots, F_n$ y cópula C, se tiene

$$C^d(F_1(x_1), \cdots, F_n(x_n)) = \mathbb{P}\left[\cup_{i=1}^n \{X_i \leq x_i\}\right], \tag{1.1.2}$$

$$\hat{C}(\bar{F}_1(x_1), \cdots, \bar{F}_n(x_n)) = \bar{F}(x_1, \cdots, x_n), \tag{1.1.3}$$

donde $\bar{F}_i(x_i) := 1 - F_i(x_i)$ y $\bar{F}(x_1, \cdots, x_n) = \mathbb{P}\left(X_1 > x_1, \cdots, X_n > x_n\right)$. Además veamos que, contrario a $\hat{C}$, el dual C^d no es una cópula y que

$$C^d(u_1, \cdots, u_n) = 1 - \hat{C}(1 - u_1, \cdots, 1 - u_n). \tag{1.1.4}$$

El siguiente resultado, cuya demostración se puede hallar en Nelsen(2006), nos permite acotar cualquier cópula, más aún, nos brinda la posibilidad de comparar las cópulas puntualmente.

Teorema 1.1.2. *Dada C una cópula para todo $(u_1, \cdots, u_n) \in [0,1]^n$*

$$\left(\sum_{i=1}^{n} u_i - n + 1\right)^{+} \leq C(u_1, \cdots, u_n) \leq \min_{1 \leq i \leq n} u_i. \tag{1.1.5}$$

Las cotas de la desigualdad (1.1.5) son llamadas cotas de *Fréchet-Hoeffding*, y comúnmente se definen como $W(u_1, \cdots, u_n) := (\sum_{i=1}^{n} u_i - n + 1)^{+}$ y $M(u_1, \cdots, u_n) := \min_{1 \leq i \leq n} u_i$ a la cota inferior y superior de *Fréchet-Hoeffding* respectivamente.
Para facilitar la notación de este trabajo denotaremos como $C_L := W(u_1, \cdots, u_n)$ y $C_U := M(u_1, \cdots, u_n)$. Observemos que cuando $n > 2$, C_U sigue siendo cópula, mientras que C_L ya no lo es. Además, a los vectores aleatorios $(X_1, \ldots, X_n)$ tales que su cópula es $C = C_U$ ó $C = C_L$ se les denomina *comonótonos*.

Comonóticidad y ortodependencia

Definición 1.1.3. *Sea C la cópula de las variables aleatorias $X_1, \ldots, X_n$. Decimos que éstas son comonótonas si $C = C_U$ ó $C = C_L$. Otra formulación equivalente de comonótonicidad es si existe una variable aleatoria Z tal que:*

$$(X_1, \ldots, X_n) \stackrel{D}{=} (f_1(Z), \ldots, f_n(Z)), \tag{1.1.6}$$

donde $f_1, \cdots, f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ son crecientes (veáse Embrechts et al. (2003a)).

De esta última se ve claramente que las variables aleatorias comonótonas dependen fuertemente entre ellas, pues son funciones crecientes de la misma variable aleatoria. Ésta característica es de gran utilidad en finanzas, cuando se trata de identificar si la relación entre los activos es positiva o negativa. A continuación se presenta una revisión de diferentes denominaciones de dependencia para un vector aleatorio.

Definición 1.1.4. *Sea $X = (X_1, \ldots, X_n)$ un vector aleatorio n-dimensional,*

- *X es positivamente ortante dependiente inferior (PLOD) si para todo $x = (x_1, \cdots, x_n) \in \mathbb{R}^n$,*

$$\mathbb{P}(X \leq x) \geq \prod_{i=1}^{n} \mathbb{P}(X_i \leq x_i). \tag{1.1.7}$$

- *X positivamente ortante dependiente superior (PUOD) si para todo $x = (x_1, \cdots, x_n) \in \mathbb{R}^n$,*

$$\mathbb{P}(X > x) \geq \prod_{i=1}^{n} \mathbb{P}(X_i > x_i). \tag{1.1.8}$$

- *X es positivamente ortante dependiente si para todo $x \in \mathbb{R}^n$, se cumplen* (1.1.7) *y* (1.1.8).

De manera análoga se puede definir que un vector aleatorio X es negativamente ortante dependiente inferior (NLOD), negativamente ortante dependiente superior (NUOD) y negativamente ortante dependiente (NOD), si se cumple (1.1.7) o/y (1.1.8) con las desigualdades contrarias.

Definición 1.1.5. *Sean $X = (X_1, \ldots, X_n)$ y $Y = (Y_1, \ldots, Y_n)$ vectores aleatorios tales que tienen marginales iguales por pares, y defina $\bar{F}_X(x_1, \ldots, x_n) := \mathbb{P}[X_1 > x_1, \ldots, X_n > x_n]$, $\bar{F}_Y(x_1, \ldots, x_n) := \mathbb{P}[Y_1 > x_1, \ldots, Y_n > x_n]$. Entonces, el vector aleatorio X es más pequeño que Y en el orden del ortante superior, y se denota como $X \leq_{uo} Y$, si $\bar{F}_X \leq \bar{F}_Y$. Similarmente se dice que X es más pequeño que Y en el orden del ortante inferior, y se denota como $X \leq_{lo} Y$, si $F_X \leq F_Y$.*

De forma intuitiva, PLOD y PUOD significan que si el vector aleatorio $X_1, \ldots, X_n$ representara un portafolio, sus riesgos son más propensos a tomar simultáneamente valores pequeños ó grandes a comparación de un portafolio con activos independientes. Además, si los activos fueran variables aleatorias continuas e independientes tendríamos que la cópula subyacente es la cópula producto.

Cópulas Condicionales

En esta subsección se describirá brevemente las versiones condicionales de la función cópula y el Teorema de Sklar, las cuales también pueden verse en Fantazzini (2008). Sea $(\mathcal{F}_t)_{t=0,\cdots,T}$ una filtración con un horizonte finito T sobre el espacio de probabilidad $\left(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_t)_{t\in\{0,\ldots,T\}}, \mathbb{P}\right)$, donde $\mathcal{F}_0 = \{\emptyset, \Omega\}$ y $\mathcal{F} = \sigma\left(\cup_{t\geq 0}\mathcal{F}_t\right)$. También definimos como $L_t^\infty := L^\infty(\Omega, \mathcal{F}_t, \mathbb{P})$ al espacio de funciones $\mathcal{F}_t-$ medibles esencialmente acotadas y por facilidad denotaremos como L^∞ a $L^\infty(\Omega, \mathcal{F}_T, \mathbb{P})$.

Definición 1.1.6. *La cópula condicional del vector aleatorio $(X_1, \ldots, X_n)$ es la función de distribución conjunta de $F_i(X_i|\mathcal{F}_t)$ $i = 1, \ldots, n$ dado $\mathcal{F}_t$, donde $F_i(X_i|\mathcal{F}_t)$ es la función de distribución condicional de X_i para $i = 1, \ldots, n$.*

La prueba del siguiente teorema puede verse en Sklar (1959) y en Patton (2006).

Teorema 1.1.3 (Teorema de Sklar para distribuciones condicionales)**.** *Sean $F_i^{t+1}(\cdot|\mathcal{F}_t)$ $i = 1, \ldots, n$ las funciones de distribución condicionales de X_i^{t+1} y H_t la función de distribución conjunta condicional n-dimensional de $(X_1^{t+1}, \ldots, X_n^{t+1})$ dado $\mathcal{F}_t$. Suponiendo que las funciones F_i^{t+1} son continuas en las X_i^{t+1} para todo $i = 1, \ldots, n$, entonces existe una única cópula condicional $C(\cdot|\mathcal{F}_t)$ tal que*

$$H_{t+1}(X_1^{t+1}, \ldots, X_n^{t+1}|\mathcal{F}_t) = C_{t+1}(F_1^{t+1}(X_1^{t+1}|\mathcal{F}_t), \ldots, F_n^{t+1}(X_n^{t+1}|\mathcal{F}_t)|\mathcal{F}_t). \quad (1.1.9)$$

Consecuentemente, si tenemos las F_i^{t+1} $i = 1, \ldots, n$ funciones de distribución condicionales de X_i^{t+1}'s, C_t cópula condicional, entonces H_{t+1} definida como en (1.1.9) *es una función de distribución condicional $n-$dimensional con marginales condicionales F_i^{t+1}, $i = 1, \ldots, n$.*

1.2. Inversa generalizada

Dado que la medida de riesgo más comúnmente utilizada es el Valor en Riesgo, la cual está definida en términos de una inversa generalizada (veáse la Definición 1.3.3), será de gran utilidad hacer un breve repaso de ésta, puesto que juega un papel importante para resultados posteriores.

Definición 1.2.1. *Sea $\phi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una función no decreciente. Sus inversas generalizadas continuas izquierda y derecha son las funciones $\phi^{-1} : \mathbb{R} \to \bar{\mathbb{R}}$ y $\hat{\phi} : \mathbb{R} \to \bar{\mathbb{R}}$ definidas por:*

$$\phi^{-1} := \text{ínf}\,\{x \in \mathbb{R}|\phi(x) \geq y\} \qquad \hat{\phi} := \sup\,\{x \in \mathbb{R}|\phi(x) \leq y\}$$

Lema 1.2.1. *La inversa generalizada posee las siguientes propiedades:*

(i) ϕ^{-1} *y* $\hat{\phi}$ *son funciones crecientes,*

(ii) ϕ^{-1} *y* $\hat{\phi}$ *son continuas por la izquierda y derecha sobre* $\mathbb{R}$, *respectivamente.*

(iii) Si ϕ *es continua por la derecha y* $\phi^{-1}(y) > -\infty$, *entonces* $\phi(x) \geq y \Leftrightarrow x \leq \phi^{-1}$,

(iv) Si ϕ *es continua por la izquierda y* $\hat{\phi}(y) > -\infty$, *entonces* $\phi(x) \leq y \Leftrightarrow x \geq \hat{\phi}$.

Corolario 1.2.1. *Sean* G, *y* F *funciones real valuadas no decrecientes, continuas por la derecha, tales que* $y_1 = F(x) \geq G(x) = y_2$ *para cada* $x, \in \mathbb{R}$. *Entonces, se tiene que*

$$F^{-1}(y_1) \leq G^{-1}(y_2).$$

Demostración. Notemos que por definición tenemos que

$$F^{-1}(y) := \text{ínf}\{x \in \mathbb{R} | F(x) \geq y\} \text{ y } G^{-1}(y) := \text{ínf}\{x \in \mathbb{R} | G(x) \geq y\}.$$

Luego denotemos como $A := \{x \in \mathbb{R} | G(x) \geq y\}$, y como $B := \{x \in \mathbb{R} | F(x) \geq y\}$. Por hipótesis se tiene que para todo $x_1 \in A$

$$F(x_1) \geq G(x_1) \geq y \Longrightarrow x_1 \in B,$$

es decir,

$$A \subset B \Longrightarrow \text{ínf}\, A \geq \text{ínf}\, B.$$

□

1.3. Medidas de Riesgo

La palabra riesgo proviene del latín "risicare"que significa "atreverse". En finanzas, el concepto de riesgo está relacionado con la posibilidad de que ocurra un evento que se traduzca en pérdidas para los participantes en los mercados financieros. El riesgo es producto de la incertidumbre que existe sobre el valor de los activos financieros.

En el mercado financiero se comercializan activos cuyos resultados futuros son inciertos e involucran riesgo para los inversionistas. Gestionar tales riesgos es de importancia central para el mercado financiero. Por ejemplo:

- Los entes reguladores buscan minimizar la ocurrencia e impacto de colapsos de instituciones financieras, emitiendo normas de restricción sobre los tipos y tamaños de transacciones permitidas, tales como límites de ventas en corto.

- Los administradores financieros en empresas de inversión que establecen restricciones sobre las actividades de inversionistas individuales, con el ánimo de evitar niveles de exposición que la empresa no puede cumplir en circunstancias extremas.
- Inversionistas individuales buscan diversificar sus posiciones de portafolio para evitar la excesiva exposición a movimientos inesperados.

Así pues, la necesidad de mejorar el control del riesgo financiero ha conducido al desarrollo de funcionales que nos ayudan a cuantificar el riesgo de una posición financiera, es decir, medidas de riesgo. El estudio de dichas medidas ha sido intensivo en los últimos años, y en consecuencia, se encuentran expresiones cada vez más sofisticadas de éstas, con el fin de mejorar su capacidad de modelación.

Más adelante se describirá a una posición financiera como una variable aleatoria X sobre un conjunto de escenarios posibles, de esta manera si se tiene la distribución de X podríamos medir el riesgo de X en términos de sus momentos o cuantiles. Un ejemplo de medida de riesgo basada en sus cuantiles para la cola inferior de la distribución, es el Valor en Riesgo (*VaR*), la cual refleja la asimetría básica en la interpretación financiera de X. Sin embargo, ésta no posee ciertas cualidades deseables en una medida de riesgo, como las descritas en la Definición 1.3.2. Esto ha motivado la investigación de otras medidas de riesgo como el Valor en Riesgo Condicional (CVaR), que se dice ser la generalización del *VaR*.

El propósito de esta sección es definir formalmente qué es una medida de riesgo, dar la interpretación financiera de sus propiedades, y mostrar algunas de las ventajas y desventajas de una medida sobre otra. Las demostraciones de los resultados y algunos de los conceptos que se introducirán a continuación pueden verse en Föllmer (2004) .

Consideremos el espacio de probabilidad $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ y denotemos como $L^\infty := L^\infty(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ al conjunto de variables aleatorias que son $\mathbb{P}-$esencialmente acotadas. A partir de ahora denominaremos a un elemento de L^∞ como un valor descontado de una posición financiera al final del horizonte de tiempo dado, por lo que nos referiremos a éstos valores como posiciones financieras sin especificar que pertenecen a L^∞. Así, dado X el valor descontado de un portafolio (un conjunto de acciones, bonos, un libro de derivados, etcétera.) al término de cierto periodo de una transacción, se desea cuantificar su riesgo, descrito por algún número $\rho(X)$.

Definición 1.3.1. *Un funcional $\rho : L^\infty \to \mathbb{R}$ es una medida de riesgo, si para cualesquiera $X, Y \in L^\infty$ se satisfacen las siguientes propiedades:*

- *Monotonía Inversa [MI]: Si $X \leq Y$, entonces $\rho(X) \geq \rho(Y)$.*
- *Invariante en Traslación [IT]: Si $m \in \mathbb{R}$, entonces $\rho(X + m) = \rho(X) - m$.*
- *Invarianza en Ley [IL]: Sean $X, Y \in L^\infty$, con la misma distribución bajo $\mathbb{P}$, entonces $\rho(X) = \rho(Y)$.*

La interpretación financiera de estas condiciones es:

(i) [MI] Nos indica que aquellas posiciones financieras que son mejores que otras en cualquier escenario, deben tener menor riesgo.

(ii) El sentido financiero de la propiedad [IT], es interpretar a $\rho(X)$ como la cantidad que debe ser agregada o retirada de la posición X, para que sea o siga siendo aceptable, desde la perspectiva del inversionista.

(iii) Finalmente, la propiedad [IL] nos dice que si dos posiciones se distribuyen de la misma forma, entonces su riesgo debe ser igual, por lo que estamos interesados en las medidas de riesgo que no distingan entre variables aleatorias con la misma distribución.

Ahora definimos la clase de medidas de riesgo más relevante; las medidas convexas, que fueron introducidas por Artzner et al. (1999).

Definición 1.3.2. *Una medida de riesgo $\rho : L^\infty \to \mathbb{R}$ es una medida de riesgo coherente, si satisface las siguientes condiciones:*

- *Subaditividad [S]: $\rho(X + Y) \leq \rho(X) + \rho(Y)$.*
- *Homogenidad Positiva [HP]: Si $\lambda \geq 0$, entonces $\rho(\lambda X) = \lambda\rho(X)$.*

Los significados en términos financieros de estas propiedades son:

- La propiedad [S] refleja la idea de que el riesgo puede reducirse mediante la diversificación, esta característica aminora el riesgo mediante la asignación de inversiones entre los diversos instrumentos financieros, industrias y otras categorías. Su objetivo es maximizar la rentabilidad mediante la inversión en diferentes áreas que reaccionan de manera diferente al mismo evento. Además, permite la descentralización de la gestión de riesgos. Por ejemplo, si un gerente de riesgo tiene una exposición de riesgo total B, la puede dividir en B_1 y B_2 donde $B_1 + B_2 = B$. De ésta manera se asignan las exposiciones de riesgo de B_1 y B_2 a dos diferentes operaciones. Así, el riesgo de toda la entidad tiene una mayor posibilidad de ser menor que el riesgo de B.

- La propiedad [HP] es algo controvertida y criticada por no penalizar la concentración de riesgo. En particular, algunos afirman que si $\lambda > 0$ es muy grande debería suceder $\rho(\lambda X) > \lambda\rho(X)$. Sin embargo, tal resultado es incompartible con la propiedad [S] ya que $\forall n \in \mathbb{N}$ y cualquier posición X, se tiene que:

$$\rho(nX) = \rho(X + \cdots + X) \leq n\rho(X), \tag{1.3.1}$$

cuya desigualdad se sigue de [S]. Note que bajo el supuesto de [HP] se tiene que (1.3.1) cumple la igualdad. Esto refleja el hecho de que no hay beneficios de la diversificación cuando se tiene múltiplos de la misma cartera, X. A continuación veremos un ejemplo de una medida de riesgo no subaditiva, pero primero recordemos la definición de cuantil y posteriormente la del Valor en Riesgo.

Definición 1.3.3. *Para $\lambda \in (0, 1)$ se define como $\lambda-$cuantil de una variable aleatoria X, a cualquier número real q con la siguiente propiedad:*

$$\mathbb{P}(X \leq q) \geq \lambda \text{ y } \mathbb{P}(X < q) \leq \lambda$$

El conjunto de todos los $\lambda-$cuantiles de X es el intervalo $[q_X^-(\lambda), q_X^+(\lambda)]$, donde

$$q_X^-(\lambda) = \inf \{x : \mathbb{P}(X \leq x) \geq \lambda\} \text{ y } q_X^+(\lambda) = \inf \{x : \mathbb{P}(X \leq x) > \lambda\}$$

son las funciones cuantil inferior y superior de X, respectivamente.

No es difícil probar que el *VaR* satisface las propiedades [MI], [IT], y [HP]. Por facilidad usaremos también la notación $F_X^{-1}(t) := q^-_{-X}(t)$, véase la Definición 1.2.1.

Definición 1.3.4. *Sea $\lambda \in (0, 1)$ un nivel (de confianza) dado. Para una posición financiera X, se define el Valor en Riesgo (VaR) al nivel λ como:*

$$VaR_\lambda(X) := -q_X^+(\lambda) = q_X^-(1 - \lambda) = \inf \{m : \mathbb{P}(X + m < 0) \leq \lambda\}. \tag{1.3.2}$$

Observación 1.3.1. *Valor en Riesgo no es una medida de riesgo coherente, ya que deja de ser subaditiva. Esta es quizás la principal crítica que se hace del Valor en Riesgo cuando se compara con otras medidas de riesgo.*

Ejemplo 1.3.1. *Considere dos bonos X y Y independientes e idénticamente distribuidos, que se distribuyen normal y están sujetos a brincos ocasionales independientes como*

$$X = \epsilon + \delta, \qquad \epsilon \sim \mathcal{N}(0,1), \qquad \delta = \begin{cases} 0 & \textit{con probabilidad } 0.991 \\ -10 & \textit{con probabilidad } 0.009 \end{cases}$$

Consideremos el portafolio X y Y. Entonces:

$$VaR_{.01}(X+Y) = 9.8 > VaR_{0.01}(X) + VaR_{0.01}(Y) = 3.1 + 3.1 = 6.2$$

de aquí que no se cumple la subaditividad, por lo que no es una medida de riesgo coherente. Dado que no cumple con esta propiedad, pueden ocurrir situaciones donde el VaR penalice la diversificación en lugar de fomentarla. Este ejemplo también puede verse en Danielsson et al. (2005).

En términos financieros la medida de riesgo *VaR* representa la menor cantidad de capital que debe ser agregada a la posición X e invertida en activos libres de riesgo, con el objetivo de mantener la probabilidad de un resultado negativo por debajo del nivel λ. Por otra parte, note que el *VaR* controla la probabilidad de pérdida, pero no brinda información acerca del tamaño de dicha pérdida, en caso de que esto ocurra. Otra clase de medidas de riesgo importantes son las llamadas *medidas de riesgo convexas.*

Definición 1.3.5. *Una medida de riesgo $\rho : L^\infty \to \mathbb{R}$ es una medida de riesgo convexa, si satisface la siguiente condición:*

- *Convexidad [C]:* $\rho(\lambda X + (1-\lambda)Y) \leq \lambda\rho(X) + (1-\lambda)\rho(Y)$.

Es sencillo verificar que el *VaR* tampoco cumple la condición [C]. La interpretación financiera de [C] es equivalente a la de la subaditividad, es decir, la diversificación del portafolio reduce el riesgo. Otra medida de riesgo común es el *Déficit Esperado* (*ES*), también conocida como *Valor Condicional al Riesgo* (*CVaR*) o *Promedio del Valor en Riesgo.* Algunos entes financieros prefieren esta medida de riesgo pues se dice que es la versión coherente del *VaR.*

Definición 1.3.6. *Sea $\lambda \in (0,1)$ un nivel de confianza dado. Definimos al ES con nivel de confianza λ de la posición X como:*

$$ES_\lambda(X) := \frac{1}{\lambda}\int_0^\lambda VaR_\gamma(X)d\gamma \tag{1.3.3}$$

Esta medida de riesgo satisface todas las condiciones descritas en las Definiciones 1.3.1, 1.3.2 y 1.3.5, las cuales son deseables en una medida de riesgo. Para definir una clase más general de medidas, se supondrá en adelante que el espacio de probabilidad $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ no tiene átomos.

Definición 1.3.7. *Sea $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ un espacio de probabilidad. Un átomo en dicho espacio es un conjunto $A \in \mathcal{F}$ tal que, para cualquier $B \in \mathcal{F}$ con $B \subset A$, se cumple una de las siguientes propiedades: $\mathbb{P}(A) > 0$ y $\mathbb{P}(B) = 0$ ó bien $\mathbb{P}(A) = \mathbb{P}(B)$.*

Además, se denotará como $\mathcal{M}_1((0,1])$ al conjunto de medidas de probabilidad en el $(0,1]$. Finalmente mostramos la noción de medida comonótona y un resultado importante de representación.

Definición 1.3.8. *Las variables aleatorias X y Y en $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ se dice que son comonótonas si,*

$$(X(\omega) - X(\omega'))(Y(\omega) - Y(\omega')) \geq 0 \text{ para todo } \omega, \omega' \in \Omega. \tag{1.3.4}$$

Más aun, se dice que una medida de riesgo $\rho : L^\infty \to \mathbb{R}$ es comonótona si

- *Comonoticidad [Cm]: $\rho(X + Y) = \rho(X) + \rho(Y)$.*

El siguiente lema es de gran utilidad para la construcción de medidas de riesgo comonótonas. Se omite la demostración, pero se puede encontrar en Föllmer et al. (2004).

Lema 1.3.1. *Las variables aleatorias X y Y son comonótonas si y sólo si existe una tercera variable aleatoria Z sobre $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ y funciones $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ no decrecientes real valuadas tales que $f(Z) = X$ y $g(Z) = Y$.*

Teorema 1.3.1 (Teorema de representación de Kusuoka)**.** *Sea $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ un espacio de probabilidad sin átomos. La clase de medidas de riesgo*

$$\rho(X) = \int_{(0,1]} ES_\lambda(X)\mu(d\lambda), \qquad \mu \in \mathcal{M}_1((0,1]), \tag{1.3.5}$$

coincide con la clase de las medidas de riesgo convexas invariantes en ley en L^∞ que son comonótonas. En particular, cualquier medida de riesgo convexa que es invariante en ley y comonótona es también coherente y continua por arriba.

Este resultado se conoce como *Teorema de representación de Kusuoka* y nos brinda una caracterización de una clase de medidas más general que posee las propiedades anteriormente mencionadas, en términos del Déficit Esperado (ES) y es de gran utilidad para caracterizar a las medidas de riesgo comonótonas. Se omite la demostración, pero puede encontrarse en Kusuoka (2001).

Capítulo **2**

Medidas de Riesgo Estáticas

A lo largo de la historia la ausencia de técnicas que midan el riesgo ha propiciado grandes desastres financieros. Mencionamos algunos:

- $*$ Bob Citron, el Tesorero del condado de Orange en los Estados Unidos, invirtió en posiciones altamente riesgosas que se tradujeron en más de $1,700$ millones de dólares, con el alza más alta en las tasas de interés registradas en 1994.
- $*$ Toshihide Iguchi un operador que manejaba posiciones en mercado de dinero en Daiwa Bank perdió $1,100$ millones de dólares en 1995.
- $*$ En diciembre de 1994, la devaluación del peso mexicano dejó al descubierto la fragilidad del sistema financiero, ya que en la totalidad de las instituciones financieras se presentaron fuertes pérdidas tanto por riesgos de mercado, como por riesgos de crédito.

Debido a esto, en la actualidad, la medición efectiva y cuantitativa de riesgo para una posición financiera es uno de los temas más importantes de la administración de riesgos. Esto ha motivado el desarrollo de nuevas formas de cuantificar el riesgo, como las que se presentarán en este trabajo.

En este capítulo se abordará el problema de cuantificar el riesgo a un portafolio multivariado de orden $n \geq 2$ por medio de cotas basadas en cópulas. Esto es debido a que no es posible calcular medidas de riesgo como el VaR y el CVaR, cuando se

desconoce la función de distribución conjunta del vector de portafolios. Para ello se recurre a la herramienta de cópulas descrita en el Capítulo 1, por su utilidad en la medición de dependencia de variables aleatorias, como consecuencia del Teorema de Sklar 1.1.1.
En la Sección 2.1 se formulará el problema y presentaremos una breve descripción de trabajos previos respecto a este problema.
En la Sección 2.2 se generaliza el resultado de la estimación sobre el Valor en Riesgo (*VaR*) dado por Embrechts (2003a), para las medidas de riesgo como el déficit esperado (*ES*), y para la clase propuesta por Kusuoka 1.3.1.
Cabe destacar que los resultados obtenidos en la Sección 2.2 son explicitamente teóricos, por lo que en la Sección 2.3 se lleva acabo una discretización de los mismos, y se presenta un ejemplo donde se visualiza claramente la eficiencia puntual de las cotas brindadas.

2.1. Formulación del Problema

El estudio sobre la estimación del riesgo mediante el uso de cotas fue iniciado por Makarov (1981), quien propuso unas cotas óptimas y demostró su forma para el caso $n = 2$ y una función $\phi(x_1, x_2) = x_1 + x_2$. Después de este trabajo, Frank et al. (1987) probó y extendió el mismo resultado de Makarov, usando copulas para una función ϕ creciente continua. Por otra parte, Williamson and Downs (1990) probaron las mejores cotas puntualmente posibles para el caso dos dimensional y además desarrollaron un algoritmo para calcularlas computacionalmente. Luego, Denuit et al. (1999) y Cossette et al. (2000) extendieron teóricamente los resultados para $n \geq 3$. Finalmente, Embrechts (2003) propuso unas cotas optimas basadas en cópulas para el VaR cuando ϕ es una función continua y creciente en la última entrada y $n \geq 2$. Nosotros utilizaremos las cotas propuestas por Embrechts por su eficiencia puntual y generalidad respecto a la dimensión.

Sea $X := (X_1, \dots, X_n)$ un vector aleatorio sobre el espacio de probabilidad $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$, cuyas funciones de distribución marginales $F_i(x) = \mathbb{P}(X_i \leq x)$, $i = 1, \dots, n$ son conocidas, pero la estructura de dependencia de X es parcial o completamente desconocida. Este vector aleatorio X puede concebirse como una representación de un portafolio en un periodo, y para nuestro trabajo, es de interés encontrar cotas para la función de distribución de la variable $\psi(X)$, donde $\psi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ es una función dada. Al acotarla, podemos obtener aproximaciones a cantidades de $\psi(X)$ como sus momentos o sus cuantiles, los cuales son útiles para cuantificar el riesgo del portafolio $(X_1, \dots, X_n)$ mediante uso de las diferentes medidas enunciadas en la Sección 1.3

Algunos ejemplos financieros de la función ψ son:

- $\psi(x_1,\ldots,x_n) = x_1+\ldots+x_n$. Esta función es asociada a la suma total de riesgos individuales de un portafolio.
- $\psi(x_1,\ldots,x_n) = \sum_{i=1}^{n}(x_i - k)^+,\ k \geq 0$. Ésta corresponde a un funcional de exceso de perdida en una aseguradora. Las $X_i's$ se podrían considerar como reclamos individuales o como las perdidas de seguros debido a las diferentes lineas de negocio.
- $\psi(x_1,\ldots,x_n) = \left(\sum_{i=1}^{n} x_i - k\right)^+,\ k \geq 0$. Esta función representa los derivados financieros (como una opción Asiática).
- Derivados, riesgo operacional de seguros, opciones exóticas, etc. cubren un numeroso campo de ejemplos interesantes.

Como ya se ha mencionado antes, estamos interesados en acotar a la variable aleatoria $\psi(X)$, sobre todas las posibles funciones de distribución para X teniendo sus marginales fijas. Recordemos que por el Teorema de Sklar 1.1.1 sabemos que dadas las marginales de X podemos encontrar una cópula C tal que $C(F_1(x_1),\ldots,F_n(x_n))$ es una representación de la función de distribución conjunta de X, la cual podemos acotar por las cotas de *Fréchet-Hoeffding* mostradas en el Teorema 1.1.2. Dado esto, es sensato proponer cotas para la función de distribución de la variable aleatoria $\psi(X)$, que estén relacionadas con cópulas. Las siguientes ecuaciones representan las cotas propuestas por Embrechts (2003a) para la función de distribución de $\psi(X)$,

$$\tau_{C,\psi}(F_1,\ldots,F_n)(s) = \sup_{x_1,\ldots,x_{n-1}\in\mathbb{R}} C(F_1(x_1),\ldots,F_{n-1}(x_{n-1}),F_n(\hat{\psi}_{x_1,\ldots,x_{n-1}}(s))), \tag{2.1.1}$$

$$\sigma_{C,\psi}(F_1,\ldots,F_n)(s) := \int_{\psi\leq s} dC(F_1(x_1),\ldots,F_{n-1}(x_{n-1}),F_n(x_n)), \tag{2.1.2}$$

$$\rho_{C,\psi}(F_1,\ldots,F_n)(s) := \inf_{x_1,\ldots,x_{n-1}\in\mathbb{R}} C^d(F_1(x_1),\ldots,F_{n-1}(x_{n-1}),F_n(\hat{\psi}_{x_1,\ldots,x_{n-1}}(s))). \tag{2.1.3}$$

donde denotamos por $\psi_{x_{i_1},\ldots,x_{i_k}}$ con $1 \leq i_1,\ldots,i_k \leq n$ a la función ψ con las variables $i_1,\ldots,i_k$-ésimas fijas y tomando los valores $x_{i_1},\ldots,x_{i_k}$. Recordemos que $\hat{\psi}$ es la inversa generalizada continua derecha de ψ,(véase la Definición 1.2.1).

Notemos que si $(X_1,\ldots,X_n)$ tiene cópula C y marginales $F_1,\ldots,F_n$, entonces $\sigma_{C,\psi}(F_1,\ldots,F_n) = F_{\psi(X_1,\ldots,X_n)}$. Además, observemos que $\tau_{C,\psi}(F_1,\ldots,F_n)$ y $\rho_{C,\psi}(F_1,\ldots,F_n)$ son funciones de distribución. Entonces $\tau_{C,\psi}$, $\sigma_{C,\psi}$ y $\rho_{C,\psi}$ pueden ser vistos como operadores que mapean $\Delta^n \to \Delta$, donde Δ es el conjunto de funciones de distribución uno dimensionales. Sin embargo, no es cierto en general, que éstas sean funciones de distribución de la variable aleatoria $\psi(X_1,\ldots,X_n)$.

2.2. Obtención de Cotas para Medidas de Riesgo

El objetivo de esta sección es dar una generalización para otras medidas de riesgo basándonos en los resultados obtenidos por Embrechts (2003a). El primer resultado proporciona unas cotas vía cópulas para el Valor en Riesgo, y el segundo resultado muestra la eficiencia puntual de las cotas obtenidas previamente. Ambos resultados se generalizan para el Déficit Esperado (ES) y para la representación de clases de medidas de riesgo dada en el Teorema de Kusuoka 1.3.1.
El siguiente teorema muestra unas cotas para la función de distribución $\psi(X)$.

Teorema 2.2.1. *Sea $(X_1, \ldots, X_n)$ un vector aleatorio con funciones de distribución marginales $F_1, \ldots, F_n$ y sea $\psi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ una función creciente y continua por la izquierda en el último argumento. Si la cópula C de $(X_1, \ldots, X_n)$ satisface $C_0 \leq C$ y $C^d \leq C_1^d$ (ver 1.1.2), para algunas cópulas C_0 y C_1^d dadas, entonces*

$$\tau_{C_0,\psi}(F_1, \ldots, F_n) \leq \sigma_{C_0,\psi}(F_1, \ldots, F_n) \leq \rho_{C_1,\psi}(F_1, \ldots, F_n) \tag{2.2.1}$$

Demostración. Sea s fijo y $t_1, \ldots, t_{n-1} \in \mathbb{R}$ tal que $\hat{\psi}_{t_1,\ldots,t_{n-1}}(s)$ es finito. Por el lema 1.2.1 se tiene que para $X_i > t_i \quad i = 1, \ldots, n-1$ y $X_n > \hat{\psi}_{t_1,\ldots,t_{n-1}}(s)$ implican

$$\psi(X_1, \ldots, X_n) > \psi_{t_1,\ldots,t_{n-1}}(X_n) > s,$$

por lo que

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(\psi(X_1, \ldots, X_n) \leq s) &= \mathbb{P}\left(\cup_{i=1}^{n-1}\{X_i \leq t_i\} \cup \{X_n \leq \hat{\psi}_{t_1,\ldots,t_{n-1}}(s)\}\right) \\
&= C^d(F_1(t_1), \ldots, F_{n-1}(t_{n-1}), F_n(\hat{\psi}_{t_1,\ldots,t_{n-1}}(s))) \\
&\leq C_1^d(F_1(t_1), \ldots, F_{n-1}(t_{n-1}), F_n(\hat{\psi}_{t_1,\ldots,t_{n-1}}(s)))
\end{aligned}$$

Si $\hat{\psi}_{t_1,\ldots,t_{n-1}}(s) = +\infty$, entonces tenemos que

$$C_1^d(F_1(t_1), \ldots, F_{n-1}(t_{n-1}), F_n(\hat{\psi}_{t_1,\ldots,t_{n-1}}(s))) = 1.$$

Por otro lado si $\hat{\psi}_{t_1,\ldots,t_{n-1}}(s) = -\infty$, entonces $\psi_{t_1,\ldots,t_{n-1}}(t_n) > s$ para todo $t_n \in \mathbb{R}$ y además

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(\psi(X_1,\ldots,X_n) \leq s) &= \mathbb{P}\left[(\psi(X_1,\ldots,X_n) \leq s) \cap \cup_{i=1}^{n-1}\{X_i \leq t_1\}\right] \\ &\qquad + \mathbb{P}\left[\{\psi(X_1,\ldots,X_n) \leq s\} \cap \cap_{i=1}^{n-1}\{X_i > t_i\}\right] \\ &\leq \mathbb{P}\left[\cup_{i=1}^{n-1}\{X_i \leq t_i\}\right] + 0 \\ &= C^d(F_1(t_1),\ldots,F_{n-1}(t_{n-1}),0) \\ &= C_1^d(F_1(t_1),\ldots,F_{n-1}(t_{n-1}),F_n(\hat{\psi}_{t_1,\ldots,t_{n-1}}(s))).\end{aligned}$$

Tomando el ínfimo sobre todos los $t_1,\ldots,t_{n-1} \in \mathbb{R}$ se tiene que

$$\sigma_{C_0,\psi}(F_1,\ldots,F_n) \leq \rho_{C_1,\psi}(F_1,\ldots,F_n)$$

De manera análoga, si $\hat{\psi}_{t_1,\ldots,t_{n-1}}(s)$ es finito, entonces $X_i \leq t_i$ para $i = 1,\ldots,n-1$ y $X_n \leq \hat{\psi}_{t_1,\ldots,t_{n-1}}(s)$ estas dos condiciones implican

$$\psi(X_1,\ldots,X_n) \leq \psi_{t_1,\ldots,t_{n-1}}(X_n) \leq s.$$

Entonces,

$$\begin{aligned}\mathbb{P}\left[\psi(X_1,\ldots,X_n) \leq s\right] &= 1 - \mathbb{P}\left[\psi(X_1,\ldots,X_n) > s\right] \\ &= 1 - \mathbb{P}\left[\{\psi(X_1,\ldots,X_n) > s\} \cap \cup_{i=1}^{n-1}\{X_i > t_i\} \cup \{X_n > \hat{\psi}_{t_1,\ldots,t_n}(s)\}\right] \\ &\geq 1 - \mathbb{P}\left[X_i > t_i, i = 1,\ldots,n, X_n > \hat{\psi}_{t_1,\ldots,t_n}(s)\right] \\ &= C(F_1(t_1),\ldots,F_{n-1}(t_{n-1}),F_n(\hat{\psi}_{t_1,\ldots,t_{n-1}}(s))) \\ &\geq C_0(F_1(t_1),\ldots,F_{n-1}(t_{n-1}),F_n(\hat{\psi}_{t_1,\ldots,t_{n-1}}(s))).\end{aligned}$$

Si $\hat{\psi}_{t_1,\ldots,t_{n-1}}(s) = +\infty$, entonces $\hat{\psi}_{t_1,\ldots,t_{n-1}}(t_n) \leq s$ para toda $t_n \in \mathbb{R}$ y además

$$\begin{aligned}\mathbb{P}\left[\psi(X_1,\ldots,X_n) \leq s\right] &\geq C_0(F_1(t_1),\ldots,F_{n-1}(t_{n-1}),1) \\ &= C_0(F_1(t_1),\ldots,F_{n-1}(t_{n-1}),F_n(\hat{\psi}_{t_1,\ldots,t_{n-1}}(s))).\end{aligned}$$

Si $\hat{\psi_{t_1,\ldots,t_{n-1}}}(s) = -\infty$, entonces

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}\left[\psi(X_1,\ldots,X_n) \leq s\right] &\geq 1 - \mathbb{P}\left[\{\psi(X_1,\ldots,X_n) > s\} \cup \{\cup_{i=1}^{n-1} X_i > t_i\} \cup \{X_n > -\infty\}\right] \\
&= 1 - 1 = 0 \\
&= \mathbb{P}\left[X_i < t_i, i = 1,\ldots,n-1, X_n < -\infty\right] \\
&= \mathbb{P}\left[X_i < t_i, i = 1,\ldots,n-1, X_n < \hat{\psi_{t_1,\ldots,t_{n-1}}}(s)\right] \\
&= C(F_1(t_1),\ldots,F_{n-1}(t_{n-1}),0) \\
&\geq C_0(F_1(t_1),\ldots,F_{n-1}(t_{n-1}),0) = 0.
\end{aligned}$$

de aquí tomando el supremo en ambos lados de la desigualdad sobre todos los $t_1,\ldots,t_{n-1} \in \mathbb{R}$ tenemos que

$$\tau_{C_0,\psi}(F_1,\ldots,F_n) \leq \sigma_{C_0,\psi}(F_1,\ldots,F_n).$$

□

La importancia del teorema anterior, esta al notar que de la desigualdad (2.2.1) podemos obtener cotas para la medida de riesgo VaR, es decir, para una $\alpha \in (0,1)$ se tiene que

$$\rho_{C_1,\psi}(F_1,\ldots,F_n)^{-1}(\alpha) \leq VaR_\alpha(\psi(F_1,\ldots,F_n)) \leq \tau_{C_0,\psi}(F_1,\ldots,F_n)^{-1}. \tag{2.2.2}$$

Ahora proponemos integrar con respecto a α y multiplicar por el inverso de $\lambda \in (0,1)$ la desigualdad anterior, así notemos que se conserva

$$\begin{aligned}
\frac{1}{\lambda}\int_0^\lambda \rho_{C_1,\psi}(F_1,\ldots,F_n)^{-1}(\alpha)d\alpha &\leq \frac{1}{\lambda}\int_0^\lambda VaR_\alpha(\psi(X_1,\ldots,X_n))d\alpha \qquad (2.2.3)\\
&\leq \frac{1}{\lambda}\int_0^\lambda \tau_{C_0,\psi}(F_1,\ldots,F_n)^{-1}d\alpha,
\end{aligned}$$

y por la Definición 1.3.6, tenemos unas cotas para el Déficit Esperado ES al nivel de confianza $\lambda \in (0,1)$

$$\begin{aligned}
\frac{1}{\lambda}\int_0^\lambda \rho_{C_1,\psi}(F_1,\ldots,F_n)^{-1}(\alpha)d\alpha &\leq ES_\lambda(\psi(X_1,\ldots,X_n)) \qquad (2.2.4)\\
&\leq \frac{1}{\lambda}\int_0^\lambda \tau_{C_0,\psi}(F_1,\ldots,F_n)^{-1}(\alpha)d\alpha.
\end{aligned}$$

Para facilitar la escritura denotemos como

$$\tilde{\rho}_{C_1,\psi}(F_1,\dots,F_n)(\lambda) := \frac{1}{\lambda}\int_0^{\lambda} \rho_{C_1,\psi}(F_1,\dots,F_n)^{-1}(\alpha)d\alpha,$$
$$\tilde{\tau}_{C_0,\psi}(F_1,\dots,F_n)(\lambda) := \frac{1}{\lambda}\int_0^{\lambda} \tau_{C_0,\psi}(F_1,\dots,F_n)^{-1}(\alpha)d\alpha.$$

De manera análoga, para la clase de medidas propuesta en el Teorema de representación de Kusuoka 1.3.1 tenemos que

$$\begin{aligned}\int_{(0,1]} \tilde{\rho}_{C_1,\psi}(F_1,\dots,F_n)(\lambda)\mu(d\lambda) &\leq \int_{(0,1]} ES_{\lambda}(\psi(X_1,\dots,X_n))\mu(d\lambda) \\ &\leq \int_{(0,1]} \tilde{\tau}_{C_0,\psi}(F_1,\dots,F_n)(\lambda)\mu(d\lambda)\end{aligned} \tag{2.2.5}$$

Esto nos brinda cotas por arriba y por abajo para el Déficit Esperado y para toda un familia de medidas de riesgo. El siguiente resultado nos muestra que estas cotas son eficientes puntualmente.

Teorema 2.2.2. *Supongamos que las hipótesis del teorema anterior se satisfacen. Sea $s \in \mathbb{R}$ fijo y consideremos $\alpha := \tau_{C_0,\phi}(F_1,\dots,F_n)(s) \leq \rho_{C_1,\phi}(F_1,\dots,F_n)(s) =: \beta$, entonces existen cópulas C^{α} y C^{β} tales que*

$$\sigma_{C^{\alpha},\phi}(F_1,\dots,F_n)(s) = \alpha \quad y \quad \sigma_{C^{\beta},\phi}(F_1,\dots,F_n)(s) = \beta$$

Demostración. Para la optimalidad de $\tau_{C_0,\psi}(F_1,\dots,F_n)$ veamos que si se define a la cópula C^{α} satisfaciendo

$$C^{\alpha} \geq C_0, \tag{2.2.6}$$
$$\mu^{\alpha}\left(\{C_0 \leq \alpha\}\right) \leq \alpha \tag{2.2.7}$$

donde μ^{α} es la medida correspondiente a C^{α}, es decir, $\mu^{\alpha}(A) = \int_A dC^{\alpha}$, para un conjunto A. Notemos que de la ecuación (2.2.6) y del teorema anterior se tiene que $\alpha = \tau_{C_0,\psi}(F_1,\dots,F_n)(s) \leq \sigma_{C^{\alpha},\psi}(F_1,\dots,F_n)(s)$. Por lo tanto, solo falta mostrar que

$$\sigma_{C^{\alpha},\psi}(F_1,\dots,F_n)(s) \leq \alpha. \tag{2.2.8}$$

Para la demostración de la ecuación (2.2.8), el punto esencial está basado sobre la idea de transportar todo el problema a un cubo unitario $[0,1]^n$. Sea $(U_1^{\alpha},\dots,U_n^{\alpha})$

un vector aleatorio con función de distribución C^α. Además, sea $(X_1^\alpha, \ldots, X_n^\alpha) := (F_1^{-1}(U_1^\alpha), \ldots, F_n^{-1}(U_n^\alpha))$ el vector aleatorio con cópula C^α y marginales $F_1, \ldots, F_n$. Luego, para la distribución ν^α del vector aleatorio $(X_1^\alpha, \ldots, X_n^\alpha)$, usando la transformación $h := (F_1^{-1}, \ldots, F_n^{-1})$ se tiene que

$$\nu^\alpha(G) = \mathbb{P}[(X_1^\alpha, \ldots, X_n^\alpha) \in G] = \mathbb{P}[h(U_1^\alpha, \ldots, U_n^\alpha) \in G] = \mu^\alpha(h^{-1}(G)).$$

donde $G \subset \mathbb{R}^n$ es cualquier conjunto medible. Además, para $G = \{\psi \leq s\}$ tenemos que

$$h^{-1}(\{\psi \leq s\}) = \left\{(u_1, \ldots, u_n) \in [0,1]^n | \psi(F_1^{-1}(u_1), \ldots, F_n^{-1}(u_n)) \leq s\right\} =: A.$$

Con esto, notemos que la desigualdad (2.2.8) es equivalente a $\mu^\alpha(A) \leq \alpha$. Luego, sin perdida de generalidad, supongamos que $\{\psi \leq s\} \neq \emptyset$, es decir, que $A \neq \emptyset$ y consideremos $(t_1, \ldots, t_n) \in \{\psi \leq s\}$. Para cualquier punto, por el Lema 1.2.1 tenemos que $t_n \leq \hat{\psi}_{t_1,\ldots,t_n}(s)$ y además

$$\begin{aligned} C_0(F_1(t_1), \ldots, F_n(t_n)) &\leq C_0(F_1(t_1), \ldots, F_{n-1}(t_{n-1}), F_n(\hat{\psi}_{t_1,\ldots,t_n}(s))) \qquad (2.2.9) \\ &\leq \tau_{C_0,\psi}(F_1, \ldots, F_n)(s) = \alpha. \qquad (2.2.10) \end{aligned}$$

La ecuación (2.2.9) y el Lema 1.2.1 implican que para $(u_1, \ldots, u_n) \in A$

$$C^\alpha(u_1, \ldots, u_n) \leq C_0(F_1(F_1^{-1}(u_1)), \ldots, F_n(F_n^{-1}(u_n))) \leq \alpha$$

es decir, que $A \subset \{C_0 \leq \alpha\}$. Esto significa que (2.2.7) implica (2.2.8).
Observemos que la siguiente cópula satisface la condición (2.2.6), ya que C_U es la cota superior de Fréchet.

$$C^\alpha(u_1, \ldots, u_n) := \begin{cases} C_0(u_1, \ldots, u_n) \vee \alpha & \text{cuando } (u_1, \ldots, u_n) \in [\alpha, 1]^\alpha, \\ C_U(u_1, \ldots, u_n) & \text{otro caso.} \end{cases}$$

Además, notemos que μ^α asigna masa α a cualquier subconjunto $[0, u_1] \times, \ldots, \times [0, u_n]$ tal que $C_0(u_1, \ldots, u_n) = \alpha$. Así se sigue que $\mu^\alpha(\{C_0 \leq \alpha\}) = \alpha$ por lo que (2.2.8) ha sido probada.

La prueba de optimalidad de $\rho_{C_1,\psi}(F_1,\ldots,F_n)$ es análoga a la anterior. De hecho es suficiente definir una cópula C^β tal que

$$(C^\beta)^d \leq C_1^d, \tag{2.2.11}$$

$$\mu^\beta(\left\{C_1^d \geq \beta\right\}) \leq 1-\beta, \tag{2.2.12}$$

donde μ^β es la medida que corresponde a C^β. Luego de (2.2.11) y el Teorema anterior tenemos que $\beta = \rho_{C_1,\psi}(F_1,\ldots,F_n)(s) \geq \sigma_{C^\beta,\psi}(F_1,\ldots,F_n)(s)$. Consecuentemente, lo único que tenemos que mostrar es que

$$\sigma_{C^\beta,\psi}(F_1,\ldots,F_n)(s) \geq \beta, \tag{2.2.13}$$

que es lo mismo que mostrar $1-\sigma_{C^\beta,\psi}(F_1,\ldots,F_n)(s) \leq 1-\beta$. Usando esto vemos que

$$\begin{aligned} 1-\sigma_{C^\beta,\psi}(F_1,\ldots,F_n)(s) &= \mathbb{P}[\psi(X_1^\beta,\ldots,X_n^\beta) > s] \\ &\leq \mathbb{P}[\psi(F_1\hat{}(U_1^beta),\ldots,F_n\hat{}(U_n^beta)) > s] = \mu^\beta(B), \end{aligned}$$

donde $B := g^{-1}(\{\psi > s\})$ y $g := (F_1\hat{},\ldots,F_n\hat{})$. Supongamos sin perdida de generalidad que $\{\psi > s\} \neq \emptyset$, es decir, que B no es un conjunto vacío. Luego, para $(x_1,\ldots,x_n) \in \{\psi > s\}$ el Lema 1.2.1 implica que $x_n > \hat{\psi}_{x_1,\ldots,x_{n-1}}(s)$ y además

$$\begin{aligned} &\beta = \rho_{C_1}(F_1,\ldots,F_n)(s) \leq C_1^d(F_1(x_1),\ldots,F_{n-1}(x_{n-1}),F_n(\hat{\psi}_{x_1,\ldots,x_{n-1}}(s))) \\ &\quad \leq C_1^d(F_1(x_1),\ldots,f_{n-1}(x_{n-1}),F_n(x_n)). \end{aligned}$$

Así, se sigue que para cualquier $(u_1,\ldots,u_n) \in B$ que

$$\beta \leq C_1^d(F_1(F\hat{}_1(u_1)),\ldots,F_1(F\hat{}_n(u_1))) \leq C_1^d(u_1,\ldots,u_n)$$

es decir, $B \subset \left\{C_1^d \geq \beta\right\}$. Esto significa que la ecuación (2.2.12) implica que (2.2.13) se satisface. La idea de la elección del C^β se entiende mejor en el caso $n=2$, donde la condición (2.2.11) es equivalente a $C^\beta \geq C_1$. Por esta razón proponemos $C^\beta = C_U$ sobre $[0,1]^2 \setminus [0,\beta)^2$. De aquí que $\mu^\beta([0,\beta]^2) = \beta$. Luego, es suficiente definir C^β tal que μ^β le asigna masa cero a cualquier rectángulo $[u_1,\beta]\times[u_2,\beta]$ con $C_1^d(u_1,u_2) = \beta$.

Mas precisamente:

$$\begin{aligned}0 &= C^\beta(\beta,\beta) - C^\beta(u_1,\beta) - C^\beta(\beta,u_2) + C^\beta(u_1,u_2)\\ &= \beta - u_1 - u_2 + C^\beta(u_1,u_2) = C_1^d(u_1,u_2) - u_1 - u_2 + C^\beta(u_1,u_2)\\ &= -C_1(u_1,u_2) + C^\beta(u_1,u_2).\end{aligned}$$

En otras palabras, C^β debe ser igual a C_1 sobre $\left\{C_1^d = \beta\right\}$. En resumen, definimos

$$C^\beta(u_1,u_2) := \begin{cases} u_1 \wedge u_2 & \text{si } (u_1,u_2) \in [0,1]^2 \setminus [0,\beta)^2 \\ u_1 + u_2 - \beta & \text{si } (u_1,u_2) \in [0,\beta)^2 \cap \left\{C_1^d \geq \beta\right\} \\ C_1(u_1,u_2) & \text{si } (u_1,u_2) \in [0,\beta)^2 \cap \left\{C_1^d < \beta\right\} \end{cases}$$

Notemos que C^β es una cópula que satisface (2.2.11) y (2.2.12) sobre $\left\{C_1^d \geq \beta\right\}$. Además, $C_1(u_1,u_2) \leq u_1 + u_2 - \beta$ y por lo tanto $(C^\beta)^d(u_1,u_2) \leq C_1^d(u_1,u_2)$ para todo u_1, u_2. Estos argumentos puede ser generalizados para $n \geq 2$, la idea es definir C^β tal que $\mu^\beta([0,1]^n \setminus [0,\beta)^n) = 1 - \beta$ y $\mu^\beta\left(\prod_{1=1}^n [u_i,\beta]\right) = 0$ para cualquier $(u_1,\ldots,u_n)$ con $C_1^d(u_1,\ldots,u_n) = \beta$. Además, la condición $(C^\beta)^d \leq C_1^d$ es tomada en cuenta cuando se construye C^β. $\square$

Así, procediendo de manera análoga a la generalización de Teorema 2.2.1, este resultado también es posible generalizarlo. Para un s fijo se cumple

$$\tau_{C_0,\psi}(F_1,\ldots,F_n)(s) = \sigma_{C^\alpha,\psi}(F_1,\ldots,F_n)(s),$$

lo que implica que

$$VaR_\alpha(F_1,\ldots,F_n)(\alpha) = \tau_{C_0}^{-1}(F_1,\ldots,F_n)(\alpha),$$

con esto procedemos igual que en la generalización del Teorema 2.2.1, y así tenemos que

$$\frac{1}{\lambda}\int_0^\lambda VaR_\alpha(F_1,\ldots,F_n)(\alpha)d\alpha = \frac{1}{\lambda}\int_0^\lambda \tau_{C_0}^{-1}(F_1,\ldots,F_n)(\alpha)d\alpha$$

y también

$$\int_{(0,1]} ES_\lambda(\psi(X_1,\ldots,X_n))\mu(d\lambda) = \int_{(0,1]} \frac{1}{\lambda}\int_0^\lambda \tau_{C_0}^{-1}(F_1,\ldots,F_n)(\alpha)d\alpha\mu(d\lambda).$$

Y de igual forma para el caso $\sigma_{C^\beta,\psi}(F_1,\ldots,F_n)(s)=\beta$. De esta forma, podemos concluir que este Teorema es válido para el Déficit Esperado ES y, más aún, para la familia de medidas de riesgo definidas en el Teorema de Representación de Kusuoka 1.3.1.

2.3. Aspectos Computacionales

En esta sección discretizaremos las expresiones $\tau_{C_0,\psi}$, $\rho_{C_1,\psi}$, $\tilde{\rho}_{C_1,\psi}$ y $\tilde{\tau}_{C_0,\psi}$, ya que en la mayoría de los casos estas expresiones no poseen una forma cerrada, por lo que en general calcularlas puede ser algo complicado. Por conveniencia denotemos

$$F_{min} = \tau_{C_0,\psi}(F_1,\ldots,F_n) \quad \text{y} \quad F_{max} = \rho_{C_1,\psi}(F_1,\ldots,F_n), \tag{2.3.1}$$
$$\tilde{F}_{min} = \tilde{\rho}_{C_1,\psi}(F_1,\ldots,F_n) \quad \text{y} \quad \tilde{F}_{max} = \tilde{\tau}_{C_0,\psi}(F_1,\ldots,F_n). \tag{2.3.2}$$

Debido a que estamos interesados en cuantificar las inversas de F_{min} y F_{max}, las cuales están definidas en términos de un supremo y un ínfimo respectivamente, sobre el espacio no acotado $\mathbb{R}^{n-1}$. De esta manera, si realizáramos una discretización sobre $\mathbb{R}^{n-1}$, tendríamos que hacer una comparación sobre una cantidad infinita de números para encontrar el máximo y el mínimo de estas expresiones. Por otro lado, notemos que una vez teniendo las inversas el cálculo de las integrales se vuelve sencillo. Algunas excepciones donde estas cotas si pueden ser calculadas fácilmente son $\psi(x_1,\ldots,x_n) = \sum_{i=1}^n x_i$ y las $F_i's$ son variables aleatorias idénticamente distribuidas.

2.3.1. Dualidad

Para lo siguiente, definamos el vector aleatorio $(U_1,\ldots,U_n)$ con función de distribución C e indices $1 \le i_1 < \ldots < i_k \le n$, y denotemos como $C_{i_1,\ldots,i_k}$ a la función de distribución de $(U_{i_1},\ldots,U_{i_k})$ y como $C^d_{i_1,\ldots,i_k}$ a su dual.

Ahora recurriremos al principio de dualidad de Frank y Schweizer (1979), para dar solución a nuestro problema de discretización.

Teorema 2.3.1 (Dualidad). *Sea* $-\infty \leq a < b \leq +\infty$ *y* $\psi : [a,b]^n \to [a,b]$ *una función continua creciente con rango* $[a,b]$*. Para una cópula* C_0*, marginales* $F_1, \ldots, F_n$ *y cualquier* $0 \leq \alpha < 1$ *se tiene*

$$F^{-1}_{min}(\alpha) = \inf_{C_0(u_1,\ldots,u_n)=\alpha} \psi(F_1^{-1}(u_1), \ldots, F_n^{-1}(u_n)) \tag{2.3.3}$$

$$F^{-1}_{max}(\alpha) = \sup_{C_0(u_1,\ldots,u_n)=\alpha} \psi(F_1^{-1}(u_1), \ldots, F_n^{-1}(u_n)) \tag{2.3.4}$$

Notemos que en este resultado se pide que la función ψ tenga como dominio $[a,b]^n$ y rango $[a,b]$, a diferencia de los Teoremas 2.2.1 y 2.2.2, los cuales se siguen satisfaciendo bajo estas restricciones. Además, veamos que los espacios bajo los que se obtendrán el supremo y el ínfimo son compactos, lo cual vuelve posible la cuantificación de las expresiones (2.3.3) y (2.3.4). Otro punto importante es que el Teorema de Dualidad 2.3.1 nos ayuda a poder calcular los cotas para el *VaR* y para el Déficit Esperado, pero esto ya no se realizará para la familia de medidas de riesgo descritas en el Teorema 1.3.1.

2.3.2. Implementación Computacional

Sea $\alpha = \frac{\lambda}{N}$, donde $N \in \mathbb{N}$ fijo y $\lambda \in (0,1)$. Además, consideremos $l_1, \ldots, l_{n-1} \in \{0, \ldots, M\}$, con M entero fijo, y buscamos una solución $\nu_{\lambda, l_1, \ldots, l_{n-1}}$ a

$$C_0(l_1/M, \ldots, l_{n-1}/M, \nu_{\lambda, l_1, \ldots, l_{n-1}}) = \lambda/N.$$

Como $C_0(l_1/M, \ldots, l_{n-1}/M, \cdot) : [0,1] \to [0, (C_0)(l_1/M, \ldots, l_{n-1}/M)]$ tenemos que una solución $\nu_{\lambda, l_1, \ldots, l_{n-1}}$ siempre existe si:

$$(C_0)_{1,\ldots,n-1}(l_1/M, \ldots, l_{n-1}/M) \geq \lambda/N$$

entonces la aproximación para (2.3.3) es

$$q_{min}(\lambda/N) = \min_{A_\lambda, l_1, \ldots, l_{n-1}} \psi(F_1^{-1}(l_1/M), \ldots, F_{n-1}^{-1}(l_{n-1}/M), F_n^{-1}(\nu_{\lambda, l_1, \ldots, l_{n-1}})),$$

donde el ínfimo es tomado sobre el conjunto

$$A_\lambda, l_1, \ldots, l_{n-1} := \{l_1, \ldots, l_{n-1} | (C_0)_{1,\ldots,n-1}(l_1/M, \ldots, l_{n-1}/M) \geq \lambda/N\}.$$

Luego nuestra aproximación para $\tilde{F}_{min}$ es:

$$\tilde{q}_{min} = \frac{1}{\lambda} \sum_{r=1}^{N} q_{min}\left(\frac{r\lambda}{N}\right).$$

Similarmente, buscamos una solución $\nu^*_{\lambda,l_1,\ldots,l_{n-1}}$ a la ecuación

$$C_1^d(l_1/M,\ldots,l_{n-1}/M,\nu^*_{\lambda,l_1,\ldots,l_{n-1}})=\lambda/N, \tag{2.3.5}$$

cuya solución existe siempre y cuando

$$(C_1)^d_{1,\ldots,n-1}(l_1/M,\ldots,l_{n-1}/M)\leq\lambda/N.$$

De aquí definimos el conjunto

$$B_\lambda,l_1,\ldots,l_{n-1}:=\Big\{l_1,\ldots,l_{n-1}|(C_1)^d_{1,\ldots,n-1}(l_1/M,\ldots,l_{n-1}/M)\leq\lambda/N\Big\},$$

sobre el cual tomamos el máximo $\nu^*_{\lambda,l_1,\ldots,l_{n-1}}$ que cumpla (2.3.3) y así obtenemos que la mejor aproximación para F^{-1}_{max} es

$$q_{max}(\lambda/N)=\max_{B_\lambda,l_1,\ldots,l_{n-1}}\psi(F_1^{-1}(l_1/M),\ldots,F_{n-1}^{-1}(l_{n-1}/M),F_n^{-1}(\nu^*_{\lambda,l_1,\ldots,l_{n-1}}))$$

y la mejor aproximación para $\tilde{F}_{max}$ es

$$\tilde{q}_{max}=\sum_{r=1}^{N}q_{max}\left(\frac{r\lambda}{N}\right).$$

Ejemplo 2.3.1. *Sean X_1,X_2 variables aleatorias independientes idénticamente distribuidas, cuya cópula C es igual a la cópula producto $C_{X_1,X_2}=\prod$.*

α,λ	0.95	0.97	0.99
VaR_α	2.3261	2.6598	3.2899
$q_{min}(\alpha)$	2.3278	2.6615	3.2916

De aquí notamos que dadas estas condiciones el VaR_α y la cota propuesta son prácticamente iguales, por lo que incluso podemos concluir que puntualmente es eficiente. Ahora estimamos para el Déficit Esperado con varios valores de λ. Además de observar que también es optima, es interesante ver como $ES_\lambda\geq VaR_\lambda$ con $\lambda\in(0,1]$, por lo que podemos decir que el Déficit Esperado es una cota robusta del Valor en Riesgo.

Capítulo **3**

Medidas de Riesgo Condicionales

Un marco más general en la obtención de medidas de riesgo surge al considerar que se posee información previa. Por este motivo daremos cabida a las medidas de riesgo condicionales, éstas son consideradas como mapeos que satisfacen las Definiciones 1.3.1 y 1.3.2, y asocian a un portafolio $(X_1, \ldots, X_n)$ a la medida de riesgo $\rho(X)$, la cual depende de $(\mathcal{F}_t)_{t=0,\ldots,T}$ la $\sigma-$álgebra generada por $\{X^t : t \geq 0\}$. Ésta extensión de la medida de riesgo, tiene la importancia de explicar como, a partir de la información que se va teniendo con el tiempo, va cambiando la medida de riesgo que se le da a una posición.

Un ejemplo clásico de las medidas de riesgo condicionales es el Valor en Riesgo condicional, el cual se define en términos de la inversa de una función de distribución condicional. Éste ejemplo ha sido analizado por diferentes autores como Koenker (1996), en este trabajo él propone el método de regresión de cuantiles en los modelos ARCH; Chernozhukov (2001) hace mención de diferentes aspectos para modelar el Valor en Riesgo condicional, basados en regresión; Kouteras (2005) ofrece una comparación de las cuatro especificaciones del modelo CAViaR: *Adaptado, valor absoluto simétrico, pendiente asimétrica* y *GARCH(1,1) indirecto*, por mencionar algunos.

En este trabajo hemos obtenido hasta ahora, el riesgo para un portafolio multivariado $(X_1, \ldots, X_n)$ del cual desconocemos las dependencias entre los activos X_i's, por lo que el objetivo de esté capítulo es plantear lo antes formulado, tomando en cuenta que se tiene $(\mathcal{F}_t)_{t=0,\ldots,T}$ la $\sigma-$álgebra generada por $\{X^t : t \geq 0\}$.

En la Sección 3.1 daremos la definición formal de medida de riesgo condicional y las representaciones condicionales de las medidas de riesgo más comunes.

En la Sección 3.2 mostraremos cotas mediante cópulas condicionales para las medidas de riesgo condicionales: *Valor en Riesgo Condicional* y *Déficit Esperado Condicional*, que son una generalización de las obtenidas en la Sección 2.2. Por último en la sección 3.3 mostramos una representación discreta que facilita los cálculos computacionales de los resultados obtenidos en la Sección 3.2 y brindamos un ejemplo de éstos.

3.1. Representación para medidas de riesgo condicionales

Sea $(\mathcal{F}_t)$ la $\sigma-$álgebra generada por $\{X_t : t \geq 0\}$ sobre el espacio de probabilidad $\left(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_t)_{t\in\{0,\dots,T\}}, \mathbb{P}\right)$, para un horizonte finito T, $\mathcal{F}_0 = \{\emptyset, \Omega\}$ y $\mathcal{F} = \sigma\left(\cup_{t\geq 0}\mathcal{F}_t\right)$. Para realizar este análisis solo nos enfocaremos en el caso $T = 2$ y definimos como $L_t^\infty := L^\infty(\Omega, \mathcal{F}_t, \mathbb{P})$ como el espacio de funciones $\mathcal{F}_t-$medibles esencialmente acotadas y denotamos como L^∞ a $L^\infty(\Omega, \mathcal{F}_T, \mathbb{P})$.

Definición 3.1.1. *Una medida de riesgo condicional es un mapeo $\rho_t : L^\infty(\mathcal{F}_T) \to L^\infty(\mathcal{F}_t)$, que asigna a cada portafolio $X \in L^\infty$, una variable $\rho_t(X)$ $\mathcal{F}_t$-medible, que cuantifica el riesgo de la posición X dada $\mathcal{F}_t$.*

- *Invariante en Traslación: Para cualquier $X \in L^\infty$ y $m_t \in L_t^\infty$:*

$$\rho_t(X + m_t) = \rho_t(X) - m_t;$$

- *Monotonicidad: Para cualesquiera $X, Y \in L^\infty$:*

$$X \leq Y \Rightarrow \rho_t(X) \geq \rho_t(Y);$$

Notemos que de igual forma al caso no condicional, se pueden definir todas las propiedades deseables dadas en las Definiciones 1.3.1 y 1.3.2 para las medidas de riesgo condicionales.

Definición 3.1.2. *Decimos que una medida de riesgo condicional $\rho_t : L^\infty(\mathcal{F}_T) \to L^\infty(\mathcal{F}_t)$ es convexa, si satisface las propiedades de Invariante en Traslación, Monotonicidad y además*

- *Normalización: $\rho(0) = 0$.*

- *Convexidad: Para todo $\lambda \in L_t^\infty$, $0 \leq \lambda \leq 1$,*

$$\rho_t(\lambda X + (1-\lambda)Y) \leq \lambda\rho_t(X) + (1-\lambda)\rho_t(Y);$$

Observación 3.1.1. *Las propiedades de Invariante en Traslación, Monotonicidad y Convexidad Condicional ya fueron discutidas dentro del marco financiero en la Sección* 1.3*, no obstante, la propiedad de Normalización no tiene una relevancia económica, sino puramente matemática, ya que permite la simplificación de cálculos e implica que* $\rho(\alpha) = -\alpha$ *para todo* $\alpha \in \mathbb{R}$*. Una definición más formal de medida de riesgo condicional puede verse en Detlefsen y Scandolo (2005).*

Dado que el Valor en Riesgo y Déficit Esperado son de las medidas de riesgo más empleadas en la industria financiera, enseguida mostraremos sus versiones condicionales.

Definición 3.1.3. *Sea* X *una posición financiera y* $\alpha \in (0,1)$ *un nivel de confianza dado. Definimos como el Valor en Riesgo Condicional a* $\mathcal{F}_t$*, con nivel* α *como:*

$$VaR_\alpha(X|\mathcal{F}_t) := F_X^{-1}(1-\alpha|\mathcal{F}_t) = \text{ínf}\,\{m : \mathbb{P}(X+m<0|\mathcal{F}_t) \leq \alpha\} \qquad m \in \mathbb{R}. \tag{3.1.1}$$

Definición 3.1.4. *Definimos al Déficit Esperado Condicional con nivel de confianza* $\lambda \in (0,1)$ *dado, de la posición* X *dada la filtración* $\mathcal{F}_t$*, como:*

$$ES_\lambda(X|\mathcal{F}_t) := \frac{1}{\lambda}\int_0^\lambda VaR_\gamma(X|\mathcal{F}_t)d\gamma \tag{3.1.2}$$

Note que de acuerdo con las Definiciones 1.3.4 y 1.3.6 de las medidas de riesgo el Valor en Riesgo y el Déficit Esperado, respectivamente, podemos concluir que ambas son funcionales de la función de distribución de la variable X. En particular, para la versión condicional del Valor en Riesgo, se puede ver que corresponde al $\alpha-$cuantil de la función de distribución Condicional de X respecto a $\mathcal{F}_t$ la $\sigma-$álgebra generada por $\{X^t : t \geq 0\}$.

3.2. Cotas para las medidas de riesgo condicionales

Nuevamente nuestro problema a enfrentar será el no poder calcular directamente los riesgos para portafolios multivariados de los cuales desconocemos sus relaciones de dependencia bajo el supuesto de tener información adicional.

En esta sección daremos una generalización para medidas de riesgo condicionales de los resultados obtenidos por Embrechts (2003a). De igual forma al Capítulo 2, iniciaremos dando a conocer unas cotas basadas en cópulas para el Valor en Riesgo Condicional y para Déficit Esperado Condicional, y finalizaremos esta sección mostrando la optimalidad de las cotas obtenidas previamente. Para realizar este análisis nos restringiremos a los tiempos $t \in \{0,1,2\}$. Recordemos que deseamos cuantificar el riesgo del portafolio $X^{t+1} := (X_1^{t+1}, \ldots, X_n^{t+1})$ al tiempo $t+1$, dado que nosotros conocemos el portafolio $X^t := (X_1^t, \ldots, X_n^t)$ al tiempo t, pero desconocemos las relaciones de dependencia entre las variables aleatorias X_i^{t+1} $i = 1, \ldots, n$ por lo que es factible volver a recurrir a la valiosa herramienta de cópulas.

Esto nos lleva a notar que podemos rescribir las ecuaciones que representan las cotas propuestas por Embrechts (2003a) condicionadas a $\mathcal{F}_t$ la $\sigma-$álgebra generada por $\{X^t : t \geq 0\}$, para la función de distribución de la variable aleatoria $\psi(X^{t+1})$ $\mathcal{F}_t$-medible

$$\begin{aligned}
&\tau_{C\psi}(F_1', \ldots, F_n'|\mathcal{F}_t)(s) \\
&\qquad := \sup_{x_1^{t+1},\ldots,x_{n-1}^{t+1}\in\mathbb{R}} C(F_1'(x_1^{t+1}), \ldots, F_{n-1}'(x_{n-1}^{t+1}), F_n'(\hat{\psi}_{x_1^{t+1},\ldots,x_{n-1}^{t+1}}(s))|\mathcal{F}_t), \\
&\sigma_{C\psi}(F_1', \ldots, F_n'|\mathcal{F}_t)(s) := \int_{\psi\leq s} dC(F_1'(x_1^{t+1}), \ldots, F_{n-1}'(x_{n-1}^{t+1}), F_n'(x_n^{t+1})|\mathcal{F}_t), \\
&\rho_{C\psi}(F_1', \ldots, F_n'|\mathcal{F}_t)(s) \\
&\qquad := \inf_{x_1^{t+1},\ldots,x_{n-1}^{t+1}\in\mathbb{R}} C^d(F_1'(x_1^{t+1}), \ldots, F_{n-1}'(x_{n-1}^{t+1}), F_n'(\hat{\psi}_{x_1^{t+1},\ldots,x_{n-1}^{t+1}}(s))|\mathcal{F}_t).
\end{aligned}$$

donde x_i^{t+1} representa a una realización de la variable aleatoria X_i^{t+1} cuya función de distribución condicional es $F_i^{t+1}(X_i^{t+1}|\mathcal{F}_t)$ $i = 1, \ldots, n$ y denotamos por $\psi_{x_{i_1}^{t+1},\ldots,x_{i_k}^{t+1}}$ con $1 \leq i_1, \ldots, i_k \leq n$ a la función ψ con las variables $i_1, \ldots, i_k$-ésimas fijas y tomando los valores $x_{i_1}^{t+1}, \ldots, x_{i_k}^{t+1}$ al tiempo $t+1$. Además, recordemos que $\hat{\psi}$ es la inversa generalizada continua derecha de ψ,(véase la Definición 1.2.1).
Así, el teorema análogo al Teorema 2.2.1, para medidas de riesgo condicionales es el que se muestra a continuación.

Teorema 3.2.1. *Sea $(X_1^{t+1}, \ldots, X_n^{t+1})$ un vector aleatorio con funciones de distribución marginales condicionales $F_1' := F_{1,|\mathcal{F}_t}^{t+1}, \ldots, F_n' := F_{n,|\mathcal{F}_t}^{t+1}$ dada $\mathcal{F}_t$, la $\sigma-$álgebra generada por $\{X^t : t \geq 0\}$ y sea $\psi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ una función creciente, continua por la izquierda en el último argumento. Si la cópula $C(\psi(X_1^{t+1}, \ldots, X_n^{t+1})|\mathcal{F}_t)$ satisface las siguientes desigualdades*

- $C_0(\psi(X_1^{t+1}, \ldots, X_n^{t+1})|\mathcal{F}_t) \leq C(\psi(X_1^{t+1}, \ldots, X_n^{t+1})|\mathcal{F}_t)$
- $C^d(\psi(X_1^{t+1}, \ldots, X_n^{t+1})|\mathcal{F}_t) \leq C_1^d(\psi(X_1^{t+1}, \ldots, X_n^{t+1})|\mathcal{F}_t)$

para algunas cópulas condicionales $C_0(\cdot|\mathcal{F}_t) := C_{0|\mathcal{F}_t}$ y $C_1^d(\cdot|\mathcal{F}_t) := C_{1|\mathcal{F}_t}^d$ dadas, entonces se cumplen las siguientes desigualdades

1. $\tau_{C_0,\psi}(F_1', \ldots, F_n'|\mathcal{F}_t) \leq \sigma_{C,\psi}(F_1', \ldots, F_n'|\mathcal{F}_t) \leq \rho_{C_1,\psi}(F_1', \ldots, F_n'|\mathcal{F}_t)$
2. $\rho_{C_1,\psi}(F_1', \ldots, F_n'|\mathcal{F}_t)^{-1}(\alpha) \leq VaR_\alpha(\psi(F_1', \ldots, F_n')|\mathcal{F}_t) \leq \tau_{C_0,\psi}(F_1', \ldots, F_n'|\mathcal{F}_t)^{-1}$.
3.
$$\begin{aligned}
\frac{1}{\lambda}\int_0^\lambda \rho_{C_1,\psi}(F_1', \ldots, F_n'|\mathcal{F}_t)^{-1}(\alpha)d\alpha &\leq ES_\lambda(\psi(X_1^{t+1}, \ldots, X_n^{t+1})|\mathcal{F}_t) \\
&\leq \frac{1}{\lambda}\int_0^\lambda \tau_{C_0,\psi}(F_1', \ldots, F_n'|\mathcal{F}_t)^{-1}(\alpha)d\alpha.
\end{aligned}$$

Demostración. Nuevamente sea s fijo y $Z_1, \ldots, Z_{n-1} \in \mathbb{R}$ tal que $\hat{\psi}_{Z_1,\ldots,Z_{n-1}}(s)$ es finito. Tenemos que para $X_i^{t+1} > Z_i \quad i = 1, \ldots, n-1$ y $X_n^{t+1} > \hat{\psi}_{Z_1,\ldots,Z_{n-1}}(s)$ implican

$$\psi(X_1^{t+1}, \ldots, X_n^{t+1}) > \psi_{Z_1,\ldots,Z_{n-1}}(X_n^{t+1}) > s,$$

entonces

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(\psi(X_1^{t+1}, \ldots, X_n^{t+1}) \leq s|\mathcal{F}_t) &= \mathbb{P}\left(\cup_{i=1}^{n-1}\{X_i^{t+1} \leq t_i\} \cup \{X_n^{t+1} \leq \hat{\psi}_{Z_1,\ldots,Z_{n-1}}(s)\}|\mathcal{F}_t\right)\\ &\leq C_1^d(F_1'(Z_1), \ldots, F_{n-1}'(Z_{n-1}), F_n'(\hat{\psi}_{Z_1,\ldots,Z_{n-1}}(s))|\mathcal{F}_t).\end{aligned}$$

Cuando $\hat{\psi}_{Z_1,\ldots,Z_{n-1}}(s) = +\infty$, entonces tenemos que

$$C_1^d(F_1'(t_1), \ldots, F_{n-1}'(Z_{n-1}), F_n'(\hat{\psi}_{Z_1,\ldots,Z_{n-1}}(s))|\mathcal{F}_t) = 1.$$

Por otro lado, se cumple que para todo $Z_n \in \mathbb{R}$

$$\hat{\psi}_{Z_1,\ldots,Z_{n-1}}(s) = -\infty \Rightarrow \psi_{Z_1,\ldots,Z_{n-1}}(Z_n) > s,$$

lo que implica que

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(\psi(X_1^{t+1}, \ldots, X_n^{t+1}) \leq s|\mathcal{F}_t) &\leq \mathbb{P}\left[\cup_{i=1}^{n-1}\{X_i^{t+1} \leq Z_i\}|\mathcal{F}_t\right]\\ &= C^d(F_1'(Z_1), \ldots, F_{n-1}'(Z_{n-1}), 0|\mathcal{F}_t)\\ &\leq C_1^d(F_1'(Z_1), \ldots, F_{n-1}'(Z_{n-1}), F_n'(\hat{\psi}_{Z_1,\ldots,Z_{n-1}}(s))|\mathcal{F}_t).\end{aligned}$$

Así, tomando el ínfimo sobre todos los $Z_1, \ldots, Z_{n-1} \in \mathbb{R}$ se tiene que

$$\sigma_{C,\psi}(F_1', \ldots, F_n'|\mathcal{F}_t) \leq \rho_{C_1,\psi}(F_1', \ldots, F_n'|\mathcal{F}_t).$$

De manera análoga, si $\hat{\psi}_{Z_1,\ldots,Z_{n-1}}(s)$ es finito, entonces $X_i^{t+1} \leq Z_i$, $i = 1, \ldots, n-1$, y $X_n^{t+1} \leq \hat{\psi}_{Z_1,\ldots,Z_{n-1}}(s)$, estas condiciones conducen a que

$$\psi(X_1^{t+1}, \ldots, X_n^{t+1}) \leq \psi_{Z_1,\ldots,Z_{n-1}}(X_n^{t+1}) \leq s,$$

lo que implica que

$$\begin{aligned}\mathbb{P}\left[\psi(X_1^{t+1},\ldots,X_n^{t+1})\le s|\mathcal{F}_t\right] &= 1-\mathbb{P}\left[X_i^{t+1}>Z_i, i=1,\ldots,n, X_n>\hat{\psi}_{Z_1,\ldots,Z_n}(s)|\mathcal{F}_t\right]\\ &= C(F_1'(Z_1),\ldots,F_{n-1}'(Z_{n-1}),F_n'(\hat{\psi}_{Z_1,\ldots,Z_{n-1}}(s))|\mathcal{F}_t)\\ &\ge C_0(F_1'(Z_1),\ldots,F_{n-1}'(Z_{n-1}),F_n'(\hat{\psi}_{Z_1,\ldots,Z_{n-1}}(s))|\mathcal{F}_t).\end{aligned}$$

Por otra parte,

$$\hat{\psi}_{Z_1,\ldots,Z_{n-1}}(s)=+\infty \quad\Rightarrow\quad \hat{\psi}_{Z_1,\ldots,Z_{n-1}}(Z_n)\le s \qquad \forall Z_n\in\mathbb{R}$$

y además

$$\begin{aligned}\mathbb{P}\left[\psi(X_1^{t+1},\ldots,X_n^{t+1})\le s|\mathcal{F}_t\right] &\ge C_0(F_1'(Z_1),\ldots,F_{n-1}'(Z_{n-1}),1|\mathcal{F}_t)\\ &= C_0(F_1'(Z_1),\ldots,F_{n-1}'(Z_{n-1}),F_n'(\hat{\psi}_{Z_1,\ldots,Z_{n-1}}(s))|\mathcal{F}_t).\end{aligned}$$

En otro caso, si $\hat{\psi}_{Z_1,\ldots,Z_{n-1}}(s)=-\infty$, entonces

$$\begin{aligned}&\mathbb{P}\left[\psi(X_1^{t+1},\ldots,X_n^{t+1})\le s|\mathcal{F}_t\right]\\ &\qquad\ge 1-\mathbb{P}\left[\{\psi(X_1^{t+1},\ldots,X_n^{t+1})>s\}\cup\{\cup_{i=1}^{n-1}X_i^{t+1}>t_i\}\cup\{X_n^{t+1}>-\infty|\mathcal{F}_t\}\right]=0\\ &\qquad=\mathbb{P}\left[X_i^{t+1}<Z_i, i=1,\ldots,n-1, X_n^{t+1}<\hat{\psi}_{Z_1,\ldots,Z_{n-1}}(s)|\mathcal{F}_t\right]\\ &\qquad=C(F_1'(Z_1),\ldots,F_{n-1}'(Z_{n-1}),0|\mathcal{F}_t)\\ &\qquad\ge C_0(F_1'(Z_1),\ldots,F_{n-1}'(Z_{n-1}),0|\mathcal{F}_t)=0.\end{aligned}$$

De aquí tomando el supremo en ambos lados de la desigualdad sobre todos los $Z_1,\ldots,Z_{n-1}\in\mathbb{R}$ tenemos que

$$\tau_{C_0,\psi}(F_1',\ldots,F_n'|\mathcal{F}_t)\le\sigma_{C,\psi}(F_1',\ldots,F_n'|\mathcal{F}_t).$$

□

Con el teorema anterior se probó que se tiene cotas para las medidas de riesgo condicionales, las cuales tiene la misma forma que las dadas en le Capítulo 2. Además el resultado de cotas eficientes de manera puntual también se conserva.

Teorema 3.2.2. *Suponiendo que las hipótesis del teorema anterior se satisfacen y para un $s\in\mathbb{R}$ fijo, consideremos $\alpha:=\tau_{C_0,\psi}(F_1',\ldots,F_n'|\mathcal{F}_t)(s)\le\rho_{C_1,\psi}(F_1',\ldots,F_n'|\mathcal{F}_t)(s)=:\beta$. Entonces existen cópulas $C^{\alpha}_{|\mathcal{F}_t}$ y $C^{\beta}_{|\mathcal{F}_t}$ tales que*

$$\sigma_{C^\alpha,\psi}(F_1',\ldots,F_n'|\mathcal{F}_t)(s)=\alpha \quad y \quad \sigma_{C^\beta,\psi}(F_1',\ldots,F_n'|\mathcal{F}_t)(s)=\beta$$

Demostración. Para la optimalidad de $\tau_{C_0,\psi}(F_1',\ldots,F_n')$ veamos que si se define a la cópula $C^{\alpha}_{|\mathcal{F}_t}$ satisfaciendo

$$C^{\alpha}_{|\mathcal{F}_t} \geq C_{0,|\mathcal{F}_t} \tag{3.2.1}$$

$$\mu^{\alpha}_{|\mathcal{F}_t}\left(\left\{C_{0,|\mathcal{F}_t} \leq \alpha\right\}\right) \leq \alpha \tag{3.2.2}$$

donde $\mu^{\alpha}_{|\mathcal{F}_t}$ es la medida correspondiente a $C^{\alpha}_{|\mathcal{F}_t}$, es decir, $\mu^{\alpha}_{|\mathcal{F}_t}(A) = \int_A dC^{\alpha}_{|\mathcal{F}_t}$, para un conjunto A. Notemos que de la ecuación (3.2.1) y del teorema anterior se tiene que $\alpha = \tau_{C_0,\psi}(F_1',\ldots,F_n'|\mathcal{F}_t)(s) \leq \sigma_{C^{\alpha},\psi}(F_1',\ldots,F_n'|\mathcal{F}_t)(s)$. Por lo que solo tendremos que mostrar que

$$\sigma_{C^{\alpha},\psi}(F_1',\ldots,F_n'|\mathcal{F}_t)(s) \leq \alpha. \tag{3.2.3}$$

Nuevamente para la demostración de la ecuación (3.2.3), la idea será de transportar todo el problema a un cubo unitario $[0,1]^n$. Sea $(U_1^{\alpha},\ldots,U_n^{\alpha})$ un vector aleatorio con función de distribución $C^{\alpha}_{|\mathcal{F}_t}$.
Además, sea $(X_1^{\alpha\, t+1},\ldots,X_n^{\alpha\, t+1}) := (F_1^{'-1}(U_1^{\alpha}),\ldots,F_n^{'-1}(U_n^{\alpha}))$ el vector aleatorio con cópula $C^{\alpha}_{|\mathcal{F}_t}$ y marginales $F_1',\ldots,F_n'$. Luego, para la distribución de $\nu^{\alpha}_{|\mathcal{F}_t}$ de $(X_1^{\alpha\, t+1},\ldots,X_n^{\alpha\, t+1})$, la transformación $h := (F_1^{'-1},\ldots,F_n^{'-1})$ y cualquier conjunto $\mathcal{F}_t$-medible $G \subset \mathbb{R}^n$ se tiene que

$$\nu^{\alpha}_{|\mathcal{F}_t}(G) = \mathbb{P}[(X_1^{\alpha\, t+1},\ldots,X_n^{\alpha\, t+1}) \in G|\mathcal{F}_t] = \mathbb{P}[h(U_1^{\alpha},\ldots,U_n^{\alpha}|\mathcal{F}_t) \in G] = \mu^{\alpha}(h^{-1}(G)|\mathcal{F}_t).$$

Además, para $G = \{\psi \leq s\}$ tenemos que

$$h^{-1}(\{\psi \leq s\}) = \left\{(u_1,\ldots,u_n) \in [0,1]^n | \psi(F_1^{'-1}(u_1),\ldots,F_n^{'-1}(u_n)) \leq s\right\} =: A.$$

Notemos que la desigualdad (3.2.3) es equivalente a $\mu^{\alpha}_{|\mathcal{F}_t}(A) \leq \alpha$. Sin perdida de generalidad, supongamos que $\{\psi \leq s\} \neq \emptyset$, es decir, que $A \neq \emptyset$ y consideremos $(Z_1,\ldots,Z_n) \in \{\psi \leq s\}$. Para cualquier punto, por el Lema 1.2.1 tenemos que $Z_n \leq \hat{\psi}_{Z_1,\ldots,Z_n}(s)$ y además

$$C_0(F_1'(Z_1),\ldots,F_n'(Z_n)|\mathcal{F}_t) \leq C_0(F_1'(Z_1),\ldots,F_{n-1}'(Z_{n-1}),F_n'(\hat{\psi}_{Z_1,\ldots,Z_n}(s))|\mathcal{F}_t) \tag{3.2.4}$$

$$\leq \tau_{C_0,\psi}(F_1',\ldots,F_n'|\mathcal{F}_t)(s) = \alpha. \tag{3.2.5}$$

así la ecuación (3.2.4) y el Lema 1.2.1 implican que para $(u_1,\ldots,u_n)\in A$

$$C^\alpha(u_1,\ldots,u_n|\mathcal{F}_t)\leq C_0(F_1'(F_1^{'-1}(u_1)),\ldots,F_n'(F_n^{'-1}(u_n))|\mathcal{F}_t)\leq\alpha$$

es decir, que $A\subset\left\{C_{0,|\mathcal{F}_t}\leq\alpha\right\}$. Esto significa que (3.2.2) implica (3.2.3). Veamos que la siguiente cópula

$$C^\alpha_{|\mathcal{F}_t}(u_1,\ldots,u_n):=\begin{cases} C_{0,|\mathcal{F}_t}(u_1,\ldots,u_n)\vee\alpha & \text{cuando } (u_1,\ldots,u_n)\in[\alpha,1]^\alpha,\\ C_{U,|\mathcal{F}_t}(u_1,\ldots,u_n) & \text{otro caso.}\end{cases}$$

satisface la condición (3.2.1) ya que $C_{U,|\mathcal{F}_t}$ es la cota superior de Fréchet condicionada a $\mathcal{F}_t$. Notemos que $\mu^\alpha_{|\mathcal{F}_t}$ asigna masa α a cualquier subconjunto $[0,u_1]\times,\ldots,\times[0,u_n]$ tal que $C_{0,\mathcal{F}_t}(u_1,\ldots,u_n)=\alpha$. Así se sigue que $\mu^\alpha_{|\mathcal{F}_t}(\left\{C_{0,|\mathcal{F}_t}\leq\alpha\right\})=\alpha$ por lo tanto (3.2.3) ha sido probada.
La prueba de optimalidad de $\rho_{C_1,\psi}(F_1',\ldots,F_n'|\mathcal{F}_t)$ es basada en argumentos similares a los ya vistos en el Capítulo 2. □

Dados estos dos resultados para medidas de riesgo condicionales, el siguiente paso será hacer una discretización de las cotas condicionales obtenidas en el Teorema 3.2.1 para facilitar su cuantificación, ya que generalmente no tendrán una forma cerrada.

3.3. Dualidad Condicional

Para discretizar las expresiones obtenidas en el Teorema 3.2.1, utilizaremos el principio de Dualidad Frank y Schweizer (1979), pero con funciones de distribución condicionales. Para facilitar la notación definamos

$$F'_{min}=\tau_{C_0,\psi}(F_1',\ldots,F_n'|\mathcal{F}_t);\qquad F'_{max}=\rho_{C_1,\psi}(F_1',\ldots,F_n'|\mathcal{F}_t)$$
$$\tilde{F}'_{min}=\frac{1}{\lambda}\int_0^\lambda\rho_{C_1,\psi}(F_1',\ldots,F_n'|\mathcal{F}_t)^{-1}(\alpha)d\alpha;\qquad \tilde{F}'_{max}=\frac{1}{\lambda}\int_0^\lambda\tau_{C_0,\psi}(F_1',\ldots,F_n'|\mathcal{F}_t)^{-1}(\alpha)d\alpha.$$

Además, definamos $(U_1',\ldots,U_n'):=(U_1^{t+1},\ldots,U_n^{t+1})$ con función de distribución $C':=C_{|\mathcal{F}_t}$ y para los indices $1\leq i_1<\ldots<i_k\leq n$, denotemos como $C'_{i_1,\ldots,i_k}$ a la función de distribución de $(U'_{i_1},\ldots,U'_{i_k})$ y como $C'^d_{i_1,\ldots,i_k}$ a su dual.

Teorema 3.3.1. *Sea $-\infty\leq a<b\leq+\infty$ y $\psi:[a,b]^n\to[a,b]$ una función continua creciente con rango $[a,b]$. Sea $C_{0,|\mathcal{F}_t}$ una cópula con marginales $F_1':=F_{1,|\mathcal{F}_t},\ldots,F_n':=$*

$F_{n,|\mathcal{F}_t}$ *y cualquier* $0 \leq \alpha < 1$ *se tiene*

$$F'^{-1}_{min}(\alpha) = \inf_{C_0(u_1,\ldots,u_n|\mathcal{F}_t)=\alpha} \psi(F'^{-1}_1(u'_1),\ldots,F'^{-1}_n(u'_n)) \tag{3.3.1}$$

$$F'^{-1}_{max}(\alpha) = \sup_{C_0(u'_1,\ldots,u'_n|\mathcal{F}_t)=\alpha} \psi(F'^{-1}_1(u'_1),\ldots,F'^{-1}_n(u'_n)). \tag{3.3.2}$$

3.3.1. Discretización de las cotas

De manera análoga al Capítulo 2, sea $\lambda \in (0,1)$ y $N \in \mathbb{N}$ fijo, y definamos $\alpha = \frac{\lambda}{N}$,. Además, tomemos $l_1,\ldots,l_{n-1} \in \{0,\ldots,M\}$, para un M entero fijo. Recuerde que deseamos obtener la solución $\nu'_{\lambda,l_1,\ldots,l_{n-1},|\mathcal{F}_t}$ a

$$C'_0(l_1/M,\ldots,l_{n-1}/M,\nu_{\lambda,l_1,\ldots,l_{n-1}}|\mathcal{F}_t) = \lambda/N$$

Dado que $C'_0(l_1/M,\ldots,l_{n-1}/M,\cdot,|\mathcal{F}_t) : [0,1] \to [0,(C_0)(l_1/M,\ldots,l_{n-1}/M,|\mathcal{F}_t)]$, tenemos que una solución $\nu'_{\lambda,l_1,\ldots,l_{n-1},|\mathcal{F}_t}$ siempre existe si:

$$(C'_0)_{1,\ldots,n-1}(l_1/M,\ldots,l_{n-1}/M|\mathcal{F}_t) \geq \lambda/N.$$

De aquí, definamos el conjunto sobre el que será el ínfimo como

$$A'_\lambda, l_1,\ldots,l_{n-1} := \left\{l_1,\ldots,l_{n-1}|(C'_0)_{1,\ldots,n-1}(l_1/M,\ldots,l_{n-1}/M|\mathcal{F}_t) \geq \lambda/N\right\}.$$

Entonces, la aproximación para F'^{-1}_{min} es

$$q'_{min}(\lambda/N) = \min_{A'_\lambda,l_1,\ldots,l_{n-1}} \psi(F'^{-1}_1(l_1/M),\ldots,F'^{-1}_{n-1}(l_{n-1}/M),F'^{-1}_n(\nu_{\lambda,l_1,\ldots,l_{n-1}})),$$

Así, nuestra aproximación para $\tilde{F'}_{min}$ es:

$$\tilde{q'}_{min} = \sum_{r=1}^{N} q'_{min}\left(\frac{r\lambda}{N}\right).$$

De igual forma, definimos el conjunto

$$B'_\lambda, l_1,\ldots,l_{n-1} := \left\{l_1,\ldots,l_{n-1}|(C_1)'^{d}_{1,\ldots,n-1}(l_1/M,\ldots,l_{n-1}/M|\mathcal{F}_t) \leq \lambda/N\right\},$$

sobre el cual tomamos el máximo $\nu'^{*}_{\lambda,l_1,\ldots,l_{n-1}}$, para encontrar la solución de la ecuación

$$C'^{d}_1(l_1/M,\ldots,l_{n-1}/M,\nu^*_{\lambda,l_1,\ldots,l_{n-1}}|\mathcal{F}_t) = \lambda/N. \tag{3.3.3}$$

ya que esta solución $\nu'^{*}_{\lambda,l_1,\ldots,l_{n-1}}$ solo existe cuando

$$(C_1)'^{d}_{1,\ldots,n-1}(l_1/M,\ldots,l_{n-1}/M|\mathcal{F}_t)\leq\lambda/N.$$

De aquí, se cumple (3.3.1) y así obtenemos que una aproximación para F'^{-1}_{max} es

$$q'_{max}(\lambda/N)=\max_{B'_{\lambda},l_1,\ldots,l_{n-1}}\psi(F'^{-1}_1(l_1/M),\ldots,F'^{-1}_{n-1}(l_{n-1}/M),F'^{-1}_n(\nu^{*}_{\lambda,l_1,\ldots,l_{n-1}})|\mathcal{F}_t)$$

y así la aproximación para $\tilde{F'}_{max}$ es

$$\tilde{q'}_{max}=\frac{1}{\lambda}\sum_{r=1}^{N}q'_{max}\left(\frac{r\lambda}{N}\right).$$

Ejemplo 3.3.1. *Sea $\bar{X}^t=(X_1^t,X_2^t)$ nuestro portafolio al tiempo t, conformado por variables aleatorias normales estándar independientes idénticamente distribuidas, con cópula C es igual a la cópula producto $C_{X_1^t,X_2^t}=\prod$. Además, supongamos que el portafolio evoluciona de la siguiente manera*

$$X_1^t|X_1^{t-1}=\beta_0^{t-1}+\beta_1^{t-1}X_1^{t-1}+\epsilon_1\qquad X_2^t|X_1^{t-1}=\gamma_0^{t-1}+\gamma_1^{t-1}X_1^{t-1}+\epsilon_2$$

con $\epsilon_i\sim\mathcal{N}(0,1)$ $i=1,2$. Y estamos interesados en obtener el riesgo para la función $\psi(\bar{X})=X_1+X_2$ en los tiempos $t\in\{1,2\}$. Haciendo uso del método de regresión lineal podemos estimar los valores para $\beta_0^{t-1},\beta_1^{t-1},\gamma_0^{t-1},\gamma_1^{t-1}$ y obtenerlas distribuciones de las condicionales, para finalmente poder calcular el Valor en Riesgo Condicional de $\psi(\bar{X}^1)$ y $\psi(\bar{X}^2)$

α	0.95	0.97	0.99
$VaR_\alpha(\psi(\bar{X}^1))$	2.85972	3.18787	3.8361
$q_{min}(\alpha)(\psi(\bar{X}^1))$	2.87786	3.211532	3.84164
$VaR_\alpha(\psi(\bar{X}^2))$	1.81711	2.15558	2.78979
$q_{min}(\alpha)(\psi(\bar{X}^2))$	1.82454	2.16788	2.79418

De aquí notamos que los valores de riesgo obtenidos para las variables condicionales se van refinando y que efectivamente conservamos la eficiencia puntual. También estimamos el Déficit Esperado Condicional con varios valores de λ, donde se aprecia mucho más el refinamiento.

λ	0.95	0.97	0.99
$ES_\lambda(\psi(\bar{X}^1))$	10.0457	10.66299	11.0147
$\tilde{q}_{min}(\lambda)(\psi(\bar{X}^1))$	10.353	10.9716	11.3954
$ES_\lambda(\psi(\bar{X}^2))$	4.6483	5.75314	6.85791
$\tilde{q}_{min}(\lambda)(\psi(\bar{X}^2))$	4.97066	6.0547	7.1934

Conclusiones

En este trabajo se tuvo como objetivo la cuantificación del riesgo para portafolios multivariados de manera estática y también bajo la restricción del conocimiento de información adicional en un horizonte de tiempo finito. Para llevar a cabo este trabajo, fue necesario recurrir al estudio de cópulas que resultan ser una herramienta útil en la discusión sobre las propiedades deseables de una medida de dependencia, ya que para variables aleatorias continuas, determinan de manera única la distribución conjunta, y por ello, contienen la información relevante sobre la estructura de dependencia. También se realizó un análisis intensivo de las medidas de riesgo, enfocado principalmente al Valor en Riesgo y al Déficit Esperado, puesto que son las medidas de riesgo más comúnmente usadas en la industria y por ello son las medidas que elegimos para hacer la construcción de sus cotas basadas en cópulas. Todo esto se ve reflejado en el Capítulo 1.

El estudio descrito previamente se elaboró para lograr entender la propuesta de Embrechts (2003) la cual fue el pilar principal de este estudio. Ésta nos permitió cuantificar el riesgo por medio de cotas vía cópulas no solo para el VaR como lo plantea Embrechts sino también para el Déficit Esperado y para una clase de medidas de riesgo dada en el trabajo de Kusuoka [20], donde construye una familia de medidas de riesgo que son coherentes y satisfacen las propiedades de invarianza en ley y comonotonicidad, y que además están definidas en términos del Déficit Esperado. Como las expresiones obtenidas para las cotas no necesariamente tienen expresiones cerradas, se hizo una discretización para poderlas calcular computacionalmente. Estos resultados fueron hechos para el VaR y para el Déficit Esperado los cuales se ejemplifican al final del Capítulo 2.

Motivados por el ascendente uso de la información en la actualidad, al igual que los autores Victor Chernozhukov y Len Umantsev (2000) y So Yeon Chun, Alexander Shapiro y Stan Uryasev (2011), cuyos trabajos nos fueron provechosos para una buena conceptualización de medidas de riesgo condicionales como el Valor en Riesgo Condicional y el Déficit Esperado Condicional, además de inspirar nuestro ejemplo final del Capítulo 3, se dio solución a nuestro problema bajo la condición de tener información adicional. Así, nuevamente guiándonos por el trabajo de Embrechts de igual forma al Capítulo 2, generalizamos los dos principales resultados de Embrechts trabajando bajo la restricción de contar con información del portafolio en el tiempo anterior, con ello se logró cimentar cotas para medidas de riesgo condicionales: Valor al Riesgo Condicional y Déficit Esperado Condicional vía cópulas. Todo esto fue descrito en el Capítulo 3.

Algunas propuestas de estudio para continuar esta linea de trabajo son

- Relajar las condiciones de las funciones de los principales resultados.
- Analizar el caso condicional para la clase de medidas de riesgo del Teorema de representación de Kusuoka y estudiar la vialidad de obtener cotas basadas en cópulas condicionales.
- No tomar ningún supuesto acerca de la evolución del portafolio, sino mas bien realizar un planteamiento también basado en cópulas de éste, con ello se obtendría generalidad respecto a las estructuras del portafolio y a su evolución en el tiempo.
- Generalizar los resultados de la obtención de cotas basadas en cópulas para las medidas de riesgo condicionales a las medidas de riesgo dinámicas.

Como podemos notar los resultados aquí obtenidos son bastante aplicables y proponen buenas interrogantes para continuar trabajos futuros.

Bibliografía

[1] Artzner, P., Delbaen, F., Eber, J.M. y Heath, D. (1999). *Coherent Measures of Risk.*, Mathematical Finance 9: 203-228.

[2] Acciaio, B., Penner, I. (2011). *Dynamic risk measures.* In Advanced Mathematical Methods for Finance (pp. 1-34). Springer Berlin Heidelberg.

[3] Cahuich D., Hernández D. (2001) *Optimización de portafolios bajo medidas de riesgo distorsionadas.* CIMAT, A. C.

[4] Chernozhukov V., Umantsev L. (2000). *Conditional value-at-risk: Aspects of modeling and estimation*, Empirical Economics, 26(1), 271-292.

[5] Chun, Y.S., Shapiro, A. Uryasev, S. (2012). *Conditional Value-at-Risk and Average Value-at-Risk: Estimation and Asymptotics,* Operations Research 60(**4**), 739-756.

[6] Cossette, H. and Denuit, M. and Marceau, E. (2000). *Distributional bounds for functions of dependent risks*, Université Catholique de Louvain. Submited.

[7] Danielsson, J., Jorgensen, B. N., Mandira, S., Samorodnitsky, G., De Vries, C. G. (2005). *Subadditivity re-exxamined: the case for value-at-risk.*

[8] Denuit, M., Genest, C. and Marceau, E. (1999). *Stochastic bounds on sums of dependent risks*, Insurance Math. Econom. **25**, 85-104.

[9] etlefsen, K., Scandolo, G. (2005). *Conditional and dynamic convex risk measures.* Finance and Stochastics, 9(4), 539-561.

[10] Embrechts, P. Hoeing, A. Juri, A. (2003). *Using to bound Value-at-Risk for funtions of dependent risks*, Finance & Stochastic.

[11] Embrechts, P. Hoeing, A. Juri, A. (2003). *Dynamic copula models for multivariate high-frequency data in finance*, Discution paper, Department of Mathematics ETH Zurich.

[12] Embrechts, P., Hofert, M. (2013). *A note on generalized inverses.* Mathematical Methods of Operations Research, 77(3), 423-432.

[13] Fang, H. y K. Fang. (2002) *The metaelliptical distributions with given marginals,* Journal of Multivariate Analysis, 82, 1-16.

[14] Fantazzini, D. (2008). *Dynamic copula modelling for value at risk.* Frontiers in Finance and Economics, 5(2), 72-108.

[15] Föllmer H. Schied, A. (2004). *Stochastic Finance: An Introduction in Discrete Time*, Berlin: Walter de Gruyter Studies in Mathematics 27.

[16] Frank, M.J., R.B. and Schweizer, B.(1987): *Best-possible bounds for the distribution for a sum - a problem of Kolmogorov*, Probab. Th. Rel. Fields **74**, 199-211 (1987).

[17] Frank, M.J., R.B. and Schweizer, B.(1987): *On te duality of generalized infimal and supremal convolutions.*, Rend. Mat. Ser. VI **12**, 1-23.

[18] Koenker, R., and Zhao, Q. (1996). *Conditional quantile estimation and inference for ARCH models.* Econometric Theory, 12(05), 793-813.

[19] Kouretas, G. P.,and Zarangas, L. (2005). *Conditional Autoregressive Value at Risk by Regression Quantiles: Estimating market risk for major stock markets* (No. 0521).

[20] Kusuoka, S. (2001). *On Law Invariant Coherent Risk Measure*, Advances in Mathematical Economics 3:83-95.

[21] Makarov, G.D.:(1981). *Estimates for the distribution function of a sum of two random variables when the marginal distributions are fixed*, Th. Probab. Appl. **26**, 803-806.

[22] Nelsen, R. B.(2006). *An Introduction to Copulas*, Springer Series in Stadistic.

[23] Patton, A. (2006). *Modelling Asymmetric Exchange Rate Dependence,* International Economic Review, 47(2).

[24] Schweizer, B., Sklar, A. (2005). *Probabilistic Metric Spaces*, Dover (New York). RepublicaciÂ´on de la edición de 1983, con referencias y notas históricas adicionales.

[25] Romero Meza, R. (2005). *Medidas de riesgo financiero.*

[26] Sklar, A. (1959). *Fontions de Repartion a n dimensions et leurs marges,* Publ. Inst. Statis. Univ. Paris, 8,229-231.

[27] Williamson, R. C. and Downs, T. (1990). *Probabilistic arithmetic: numerical methods for calculating convolutions and dependency bounds,* J. Approximate Reasoning 4(**2**), 89-158.