Aplicaciones de la teoría de Wiener-Hopf a procesos de riesgo y de comonotonicidad en el cálculo de precios de opciones asiáticas

Tesis que presenta Henry Gaspar Panti Trejo
Centro de Investigación en Matemáticas
Director de tesis : Dra. Ekaterina Todorova Kolkovska

Agosto de 2006

Agradecimientos

A Dios por permitirme vivir este momento en la vida. A Verónica por su apoyo incondicional, amor y paciencia durante todo este tiempo. A mis padres por su orientación y consejos. A mis hermanos por su confianza y cariño.

Al CONACYT por otorgarme la beca número 184138. Al CIMAT por permitirme el uso de sus instalaciones, así como también por el apoyo para la realización de parte de esta tesis. Al proyecto SEP-2003-C02-42522/A1/, pieza importante para la culminación de este trabajo.

A mi asesora la Dra. Ekaterina Todorova Kolkovska por brindarme su tiempo, paciencia y dedicación. A mis sinodales: Dr. Joaquín Ortega Sánchez, Dr. Víctor Rivero Mercado, por sus críticas y comentarios para la mejora de esta tesis.

A mis profesores, Joaquín Ortega, Eloísa Díaz-Francés, Rogelio Ramos, Miguel Nakamura, Jorge Domínguez, José Alfredo López Mimbela, Ekaterina Todorova, por sus consejos y dedicación para enseñar. Un especial agradecimiento al Dr. José Alfredo López Mimbela por haber sido mi tutor y guía durante la Maestría, así como también a la Dra. Graciela González Farías por su apoyo durante su gestión como coordinador de la Maestría. A mis compañeros y amigos: Eliud, Luis Fernando, Mauricio, Antonio, Jair, Faustino, Esteban, Víctor, por su amistad sincera.

Contenido

Introducción

El estudio de las distribuciones de vectores aleatorios es de gran interés en Probabilidad y Estadística. En ocasiones, el conocimiento de las distribuciones marginales y la matriz de correlación del vector aleatorio no es suficiente para determinar completamente la estructura de dependencia que éste guarda. Una herramienta que ha sido desarrollada en los últimos años para tratar este problema son las cópulas. Las cópulas, de manera informal, son distribuciones multivariadas con marginales uniformes en el intervalo $(0, 1)$. Los primeros estudios de este tipo de distribuciones fueron realizados por Abe Sklar en 1959. En su trabajo, Sklar utilizó por primera vez la palabra cópula para designar a las distribuciones multivariadas que cumple lo antes mencionado. Mediante el teorema que Sklar demostró, el cual lleva su nombre, se puede obtener la distribución conjunta de un vector aleatorio con marginales fijas, con el conocimiento de la cópula asociada a este vector. Un tipo especial de cópulas, son las cópulas Arquimedianas, que por su sencilla definición poseen propiedades faciles de usar y generalizar en dimensiones mayores que dos. En la actualidad, esta herramienta sigue siendo tema de estudio y aplicaciones en modelos actuariales y financieros (ver [14],[15] y referencias que ahí se hacen). En el tema de estimación de cópulas, varias aproximaciones han sido usadas: métodos paramétricos (estimación via máxima verosimilitud y método de momentos), métodos no paramétricos (cópulas empíricas) y métodos semiparamétricos. También técnicas de simulación han tenido un papel importante, especialmente para investigar propiedades asintóticas de los estimadores. Para detalles véase Genest et al. [8], Deheuvels [3], y Fermanian & Scaillet [7].

Los procesos estocásticos conocidos como caminatas aleatorias son importantes en modelación estocástica. Dada una sucesión de variables aleatorias independientes e idénticamente distribuidas, se define una caminata aleatoria como las sumas parciales. Uno de los resultados más importantes en este tema es la celebre factorización de Wiener-Hopf, la cual permite factorizar la función característica de una variable aleatoria en términos de transformadas de Fourier de variables aleatorias asociadas a la caminata aleatoria. Entre las variables antes mencionadas se encuentran el tiempo de entrada de la caminata aleatoria al eje positivo y el valor con que ésto sucede. Otras variables de interés son: el máximo (en tiempo finito) y el supremo de la caminata aleatoria. Los primeros resultados importantes sobre las variables mencionadas fueron desarrollados por Frank Spitzer a finales de los años 50's. En [20], [21] se obtiene una expresión asintótica para la velocidad de convergencia de la distribución del máximo de una caminata aleatoria a la distribución del supremo de la misma, esta relación es útil (bajo ciertas condiciones) para hallar expresiones asintóticas para la probabilidad de ruina en el área de teoría de Riesgo.

Algunos temas de interés en la matemática actuarial de seguros son: evento ruina, tiempo en que ocurre la ruina, y la probabilidad de que esto suceda. En general, determinar estas cantidades no es una tarea sencilla. Es usual suponer independencia entre los tamaños de las reclamaciones y los tiempos en que éstas suceden. En la literatura existe un gran número de resultados bajo esta suposición que, aunque en ocasiones no es posible dar expresiones explícitas, se pueden obtener aproximaciones asintóticas [2], [16]. Mediante el uso de cópulas se puede introducir cierta estructura de dependencia en las variables antes mencionadas, y de esta manera obtener resultados más generales, bajo el supuesto que las transformadas de Laplace de ambas variables existen en una vecindad a la izquierda del cero. La factorización de Wiener-Hopf en este caso juega un papel muy importante, debido a que ésta permite expresar la probabilidad de ruina en términos de probabilidades de variables asociadas a la caminata aleatoria, y de esta manera, obtener aproximaciones mediante el uso de la teoría existente para este tipo de proceso. Como casos particulares se pueden obtener expresiones asintóticas para la probabilidad de ruina en tiempo finito e infinito.

La compra o venta de derivados en el mercado financiero se lleva a cabo mediante contratos conocidos como opciones. Estos contratos le dan el derecho (más no la obligación) al que los posee, de vender o comprar una porción de derivados a un precio previamente fijado. Debido a diversos factores sociales, políticos e inclusive ambientales, los precios en el mercado varían con el tiempo, por esta razón es adecuado modelar estos precios mediante un proceso estocástico. De esta forma, es necesario prefijar un precio a la opción, un precio que sea "justo" para ambos, el que la vende y el que la compra. Al procedimiento anterior se le conoce como valuación de opciones, y es uno de los temas de estudio en Finanzas. Existen varios tipos de opciones, por mencionar algunas las opciones Europeas, Americanas, Exóticas, etc. En 1973, Fischer Black and Myron Scholes propusieron un modelo para el precio de los derivados, el cual supone (bajo ciertas condiciones) que el precio sigue la dinámica de un movimiento Browniano geométrico. Para este modelo existen expresiones cerradas para los precios de las opciones Europeas. No obstante, bajo este mismo modelo, no se conocen expresiones cerradas para el precio de opciones asiáticas. Debido a que las opciones asiáticas involucran sumas finitas de variables aleatorias (no necesariamente independientes entre ellas), la teoría de comonotonicidad (máxima dependencia positiva posible) nos permite encontrar cotas para el precio de estas opciones, bajo el mismo modelo de Black-Scholes.

La presente tesis tiene por principal objetivo presentar en forma autocontenida resultados en ambos tópicos: teoría de Riesgo y Finanzas. En teoría de Riesgo se ilustrará el uso de cópulas y la factorización de Wiener-Hopf, las cópulas como un medio para introducir dependencia y la factorización de Wiener-Hopf como herramienta para obtener resultados asintóticos de las probabilidades de ruina, todo lo anterior bajo el supuesto que se tienen distribuciones de colas ligeras. Como aplicación de los resultados expuestos se desarrolló estimaciones concretas de la probabilidad de ruina para el caso en el cual la dependencia está descrita por medio de la cópula Gamma bivariada de Cheriyan y Ramabhadran. En la segunda parte de la tesis, dedicada a aplicaciones en Finanzas, se ilustrará la aplicación de resultados de comonotonicidad para la valuación de opciones asiáticas. En este tópico se realizó un programa en S-PLUS para obtener resultados numéricos.

Esta tesis esta fundamentada en los artículos de Albrecher & Teugels [1], Dhaene et al. [4], [5] y la estructura de la misma se detalla a continuación. En el capítulo 1 se da la definición de cópula, cópula Arquimediana y sus propiedades más importantes, se introduce el concepto de medidas de concordancia, así como también se introducen las caminatas aleatorias, propiedades, relaciones más importantes y la factorización de Wiener-Hopf. En el capítulo 2 se presenta el modelo de riesgo que junto con los resultados del capítulo 1 sobre caminatas aleatorias, permiten hallar expresiones asintóticas para la probabilidad de ruina. En el capítulo 3, se introducen el concepto de comonotonicidad, así como también el de orden convexo y primas stop-loss; se obtienen las cotas correspondientes para el valor de una opción asiática y para este caso algunos resultados numéricos. El capítulo 4 es a manera de apéndice, donde se hace un breve resumen de algunos resultados de procesos de renovación de gran utilidad para el desarrollo del capítulo 2.

Capítulo 1

Preliminares

1.1 Cópulas

1.1.1 Definición y propiedades

En esta sección se dará la definición de cópula bidimensional, así como también las propiedades más importantes que surgen. Cópulas n-dimensionales se pueden definir en forma similar, pero éstas quedan fuera del propósito de esta tesis. A lo largo de la tesis, f función no decreciente significará que si $x_1 < x_2$, entonces $f(x_1) \leq f(x_2)$; f función creciente será que si $x_1 < x_2$, entonces $f(x_1) < f(x_2)$. En forma similar, se tendrá para funciones no crecientes, decrecientes. Denotaremos con $\overline{\mathbb{R}}$ la recta extendida y con I el intervalo cerrado $[0, 1]$.

Definición 1.1.1 *Sean S_1, S_2 subconjuntos no vacios de $\overline{\mathbb{R}}$ y H una función con dominio $Dom\, H = S_1 \times S_2$. Sea $B = [x_1, x_2] \times [y_1, y_2]$ rectángulo cuyos vértices pertenecen al dominio de H. Entonces, el H-volumen de B está dado por*

$$V_H(B) := H(x_2, y_2) - H(x_2, y_1) - H(x_1, y_2) + H(x_1, y_1).$$

La función H se dice 2-creciente si $V_H(B) \geq 0$, para todo rectángulo B cuyos vértices pertenecen al dominio de H.

Nótese que si H es 2-creciente no necesariamente es no decreciente en cada argumento, ni viceversa. Lo anterior se verifica considerando las funciones $H_1(x, y) = (2x - 1)(2y - 1)$, $H_2(x, y) = \max(x, y)$ definidas en I^2. Se tiene que H_1 es 2-creciente, pero no cumple ser no decreciente en cada argumento; H_2 es no decreciente en cada argumento, pero no es 2-creciente porque $V_{H_2}(I^2) = -1$. No obstante, podemos obtener la propiedad de ser no decreciente para cierta función. Esto se puede ver en el siguiente lema.

Lema 1.1.2 *Sea H una función 2-creciente con dominio $S_1 \times S_2$. Sean $x_1, x_2 \in S_1$, $y_1, y_2 \in S_2$, que cumplen $x_1 \leq x_2$, $y_1 \leq y_2$. Entonces las funciones,*

$$t \longmapsto H(t, y_2) - H(t, y_1), \;\; t \longmapsto H(x_2, t) - H(x_1, t)$$

son no decrecientes en S_1 y S_2 respectivamente.

La demostración del lema anterior se sigue de la definición para funciones 2-crecientes. Ahora veremos que tipo de funciones 2-crecientes son no decrecientes en cada argumento. Para ello se da la siguiente definición.

Definición 1.1.3 *Sea H definida como antes y supongamos que S_1 tiene elemento mínimo a_1, S_2 elemento mínimo a_2. Decimos que H es con base si para todo $(x, y) \in S_1 \times S_2$ se cumple $H(x, a_2) = H(a_1, y) = 0$.*

Lema 1.1.4 *Sea H una función con base, 2-creciente. Entonces H es no decreciente en cada argumento.*

Demostración. Se sigue del lema anterior tomando $x_1 = a_1$ y $y_1 = a_2$. ∎

Ahora supóngase que S_1 y S_2 tienen elementos máximos b_1 y b_2, respectivamente. Entonces la función $H : S_1 \times S_2 \to \mathbb{R}$ tiene marginales F y G dadas por

$$Dom\, F = S_1,\ F(x) := H(x, b_2),\ x \in S_1, \quad Dom\, G = S_2,\ G(y) := H(b_1, y),\ y \in S_2.$$

Ejemplo 1.1.5 *La función $H : [-1, 1] \times [0, \infty] \to \mathbb{R}$ dada por*

$$H(x, y) = \frac{(x + 1)(e^y - 1)}{x + 2e^y - 1},$$

es con base ($a_1 = -1$, $a_2 = 0$) y tiene marginales

$$F(x) = \frac{x + 1}{2},\ G(y) = 1 - e^{-y}.$$

El lema siguiente muestra la relación entre la función H y sus marginales cuando H es con base.

Lema 1.1.6 *Sea H una función con base, 2-creciente. Sean $(x_1, y_1), (x_2, y_2) \in S_1 \times S_2$. Entonces*

$$|H(x_2, y_2) - H(x_1, y_1)| \le |F(x_2) - F(x_1)| + |G(y_2) - G(y_1)|.$$

Demostración. De la desigualdad del triángulo,

$$|H(x_2, y_2) - H(x_1, y_1)| \le |H(x_2, y_2) - H(x_1, y_2)| + |H(x_1, y_2) - H(x_1, y_1)|.$$

Supongamos $x_1 \le x_2$. Los lemas anteriores implican

$$0 \le H(x_2, y_2) - H(x_1, y_2) \le F(x_2) - F(x_1).$$

Una desigualdad similar se puede obtener cuando $x_2 \le x_1$. Por lo tanto

$$|H(x_2, y_2) - H(x_1, y_2)| \le |F(x_2) - F(x_1)|.$$

En forma análoga

$$|H(x_1, y_2) - H(x_1, y_1)| \le |G(y_2) - G(y_1)|,$$

lo cual termina la prueba. ∎

Definición 1.1.7 *Una **cópula** C 2-dimensional es una función con base, 2-creciente, con dominio el cuadrado unitario I^2, que satisface,*

$$C(1,v) = v,\ C(u,1) = u,\ \forall\, u,v \in I.$$

De la definición y del Lema 1.1.4 se sigue

$$0 = C(0,v) \leq C(u,v) \leq C(u,1) \leq C(1,1) = 1,$$

lo cual muestra que el rango de C está contenido en I $(Ran\, C \subseteq I)$. Además, cualquier cópula está acotada como veremos en el siguiente teorema.

Teorema 1.1.8 *Sea C una cópula. Entonces para todo $(u,v) \in I^2$ se cumple*

$$\max(u+v-1,0) \leq C(u,v) \leq \min(u,v) \tag{1.1}$$

Demostración. Tenemos

$$C(u,v) \leq C(u,1) = u,\ C(u,v) \leq C(1,v) = v.$$

De aquí se sigue la desigualdad derecha de (1.1).

Por otro lado,

$$V_C([u,1]\times[v,1]) \geq 0,\ C(u,v) \geq 0,$$

y debido a que $V_C([u,1]\times[v,1]) = C(u,v) - u - v + 1$, resulta el lado izquierdo de (1.1). ■

Definición 1.1.9 *Las funciones $M(u,v) = \min(u,v)$, $W(u,v) = \max(u+v-1,0)$ que aparecen en (1.1), son llamadas cotas superior e inferior de Fréchet-Hoeffding, respectivamente.*

De esta manera, las desigualdades del Teorema 1.1.8 se escriben en la forma

$$W(u,v) \leq C(u,v) \leq M(u,v).$$

Se puede mostrar que W y M son cópulas. Otra cópula de interés que se verá más adelante es $\Pi(u,v) = uv$, la cual se relaciona con la independencia de dos variables aleatorias continuas. El Lema 1.1.6 da como consecuencia el siguiente teorema.

Teorema 1.1.10 *Sea C una cópula. Entonces para todo $u_1, u_2, v_1, v_2 \in I$ se cumple*

$$|C(u_2,v_2) - C(u_1,v_1)| \leq |u_2 - u_1| + |v_2 - v_1|. \tag{1.2}$$

De aquí, C es uniformemente continua sobre su dominio.

Otras funciones de interés relacionadas con una cópula son la sección horizontal, vertical y diagonal de una cópula, las cuales definimos a continuación

Definición 1.1.11 *Sea C una cópula, $a \in I$. Las funciones*

$$\begin{aligned} t &\longmapsto C(t,a), \\ t &\longmapsto C(a,t), \\ t &\longmapsto C(t,t) := \delta_C(t), \end{aligned}$$

son llamadas sección horizontal, vertical y diagonal de la cópula C, respectivamente.

Del Lema 1.1.4 y del Teorema 1.1.10 se sigue el corolario siguiente.

Corolario 1.1.12 *Las secciones horizontal, vertical y diagonal de la cópula C son no decrecientes y uniformemente continuas sobre I.*

Una cópula tiene primeras derivadas parciales (en casi todas partes con respecto a la medida de Lebesque en I), como veremos en el siguiente teorema.

Teorema 1.1.13 *Sea C una cópula. Entonces para cada $v \in I$, la derivada parcial $\partial C/\partial u$ existe para casi toda u, y se tiene*

$$0 \leq \frac{\partial C(u,v)}{\partial u} \leq 1. \tag{1.3}$$

Similarmente, para cada $u \in I$, la derivada parcial $\partial C/\partial v$ existe para casi toda v, y se tiene

$$0 \leq \frac{\partial C(u,v)}{\partial v} \leq 1. \tag{1.4}$$

Además, las funciones $u \longmapsto \partial C(u,v)/\partial v, v \longmapsto \partial C(u,v)/\partial u$ están definidas y son no decrecientes en casi todas partes en I.

Demostración. La existencia de $\partial C/\partial u$, $\partial C/\partial v$ se sigue de la monotonicidad de las secciones horizontal y vertical, respectivamente. Las desigualdades (1.3) y (1.4) se siguen de (1.2) haciendo $v_1 = v_2, u_1 = u_2$, respectivamente. Ahora mostraremos la segunda afirmación del teorema. Si $v_1 \leq v_2$, entonces $u \longmapsto C(u,v_2) - C(u,v_1)$ es no decreciente. De aquí, $\partial(C(u,v_2) - C(u,v_1))/\partial u$ está definida y es no negativa en casi todas partes en I. Por lo tanto, $v \longmapsto \partial C(u,v)/\partial u$ está definida y es no decreciente en casi todas partes en I. En forma similar se prueba para $u \longmapsto \partial C(u,v)/\partial v$. ■

El siguiente teorema enfatiza la manera en la cual una cópula "acopla" una función de distribución a sus marginales univariadas. No se demostrará porque queda fuera del propósito de esta tesis, su demostración puede verse en [14].

Teorema 1.1.14 *(Teorema de Sklar). Sean X e Y variables aleatorias con funciones de distribución F y G, respectivamente, que tienen función de distribución conjunta H. Entonces existe una cópula C tal que*

$$H(x,y) = C(F(x), G(y)), \ \forall x, y \in \overline{\mathbb{R}}. \tag{1.5}$$

Si F y G son continuas, entonces C es única. En el caso general, C está unicamente determinada en $\operatorname{Ran} F \times \operatorname{Ran} G$. Recíprocamente, si C es cópula, F y G son funciones de distribución, entonces la función H definida por (1.5) es una función de distribución conjunta con marginales F y G.

En lo que sigue denotaremos por $C_{X,Y}$ la cópula que resulta del teorema de Sklar. El teorema de Sklar implica que para X e Y variables aleatorias continuas, X e Y son independientes si y solo si $C_{X,Y} = \Pi$. Otra consecuencia del teorema de Sklar es la siguiente desigualdad,

$$\max(F(x) + G(y) - 1, 0) \leq H(x,y) \leq \min(F(x), G(y)). \tag{1.6}$$

Definición 1.1.15 *Las cotas $\max(F(x)+G(y)-1, 0)$ y $\min(F(x), G(y))$ son llamadas cotas de Fréchet-Hoeffding para funciones de distribución conjunta H con marginales F y G.*

Un interesante problema para estudiar es bajo que condiciones la función H es igual a una de sus cotas, el cual estudiaremos más adelante.

Una importante propiedad de la cópula $C_{X,Y}$ es que permanece invariante bajo transformaciones crecientes de X e Y como se verá en el siguiente teorema.

Teorema 1.1.16 *Sean X e Y variables aleatorias continuas con cópula $C_{X,Y}$. Si α y β son funciones crecientes sobre $\operatorname{Ran} X$ y $\operatorname{Ran} Y$, respectivamente. Entonces se cumple $C_{\alpha(X),\beta(Y)} = C_{X,Y}$.*

Demostración. Sean F_1, G_1, F_2, G_2 las funciones de distribución de X, Y, $\alpha(X)$, $\beta(Y)$, respectivamente. Tenemos que α es creciente, por lo tanto,

$$\begin{aligned} F_2(x) &= P(\alpha(X) \leq x) \\ &= P(X \leq \alpha^{-1}(x)) \\ &= F_1(\alpha^{-1}(x)). \end{aligned}$$

En forma similar,

$$G_2(y) = G_1(\beta^{-1}(y)).$$

De esta manera, por el teorema de Sklar, para cualesquiera $x, y \in \overline{\mathbb{R}}$,

$$\begin{aligned} C_{\alpha(X),\beta(Y)}(F_2(x), G_2(y)) &= P(\alpha(X) \leq x, \beta(Y) \leq y) \\ &= P(X \leq \alpha^{-1}(x), Y \leq \beta^{-1}(y)) \\ &= C_{X,Y}(F_1(\alpha^{-1}(x)), G_1(\beta^{-1}(y))) \\ &= C_{X,Y}(F_2(x), G_2(y)). \end{aligned}$$

Debido a que X, Y son continuas se sigue que $Ran\, F_2 = Ran\, G_2 = I$. Por lo tanto $C_{\alpha(X),\beta(Y)} = C_{X,Y}$. ■

Cuando al menos una de las funciones α o β es decreciente, obtenemos resultados en los cuales la cópula de las variables aleatorias $\alpha(X)$, $\beta(Y)$ es una transformación de $C_{X,Y}$.

Teorema 1.1.17 *Sean X, Y variables aleatorias continuas con cópula $C_{X,Y}$. Sean α y β funciones monótonas sobre $Ran\, X$ y $Ran\, Y$, respectivamente.*

1. *Si α es creciente y β es decreciente, entonces*
$$C_{\alpha(X),\beta(Y)}(u,v) = u - C_{X,Y}(u, 1-v).$$
2. *Si α es decreciente y β es creciente, entonces*
$$C_{\alpha(X),\beta(Y)}(u,v) = v - C_{X,Y}(1-u, v).$$
3. *Si α y β son decrecientes, entonces*
$$C_{\alpha(X),\beta(Y)}(u,v) = u + v - 1 + C_{X,Y}(1-u, 1-v).$$

Demostración. Mostraremos *1*, los demás incisos se demuestran de forma análoga. Usando el mismo procedimiento del Teorema 1.1.16, tenemos
$$F_2(x) = F_1(\alpha^{-1}(x)),\ \ G_2(y) = 1 - G_1(\beta^{-1}(y)).$$
Entonces
$$\begin{aligned}
C_{\alpha(X),\beta(Y)}(F_2(x), G_2(y)) &= P(\alpha(X) \leq x, \beta(Y) \leq y)\\
&= P(X \leq \alpha^{-1}(x), Y \geq \beta^{-1}(y))\\
&= P(X \leq \alpha^{-1}(x)) - P(X \leq \alpha^{-1}(x), Y \leq \beta^{-1}(y))\\
&= F_1(\alpha^{-1}(x)) - C_{X,Y}(F_1(\alpha^{-1}(x)), G_1(\beta^{-1}(y)))\\
&= F_2(x) - C_{X,Y}(F_2(x), 1 - G_2(y)).
\end{aligned}$$
Usando el mismo razonamiento que en el Teorema 1.1.16 se sigue el resultado. ■

Cada cópula C induce una medida de probabilidad sobre I^2, a través de la relación
$$C(u,v) = V_C([0,u] \times [0,v]),$$
es decir, la C-medida de un conjunto es su C-volumen, V_C. De esta manera, consideramos la descomposición
$$C(u,v) = A_C(u,v) + S_C(u,v),$$
donde
$$A_C(u,v) = \int_0^u \int_0^v \frac{\partial^2}{\partial s \partial t} C(s,t)dtds,\ \ S_C(u,v) = C(u,v) - A_C(u,v).$$
La existencia de $\partial^2 C(s,t)/\partial s \partial t$ se sigue del Teorema 1.1.13.

Definición 1.1.18 *Si $C = A_C$, se dice que C es absolutamente continua. Si $C = S_C$, entonces C se llama singular. En el caso general, C tiene componente continuo y componente singular.*

Recordemos que el soporte de una función de distribución conjunta H es el complemento de la unión de todos los subconjuntos abiertos de $\mathbb{R}^2$ con H-medida cero, luego el soporte de un cópula es el complemento de la unión de todos los subconjuntos abiertos de I^2 con C-medida cero. Cuando el soporte de C es I^2, decimos que C tiene soporte completo. Cuando C es singular, su soporte tiene medida de Lebesgue cero y recíprocamente.

Se puede demostrar que las cópulas M y W son singulares con soporte los conjuntos

$$\{(u,v) \in I^2 : u = v\},\ \{(u,v) \in I^2 : u = 1 - v\},$$

respectivamente. En cambio, la cópula Π es absolutamente continua porque

$$\begin{aligned} A_\Pi(u,v) &= \int_0^u \int_0^v \frac{\partial^2}{\partial s \partial t}\Pi(s,t)dtds \\ &= \int_0^u \int_0^v 1dtds \\ &= \Pi(u,v) \end{aligned}$$

Ahora regresaremos a la ecuación (1.6) y veremos en que casos H es igual a alguna de sus cotas. Para ello tenemos la siguiente definición,

Definición 1.1.19 *Para $S \subset \overline{\mathbb{R}}^2$, se dice que S es no decreciente si para cada $(x,y),(u,v) \in S$, $x < u$ implica $y \leq v$. Y decimos que S es no creciente, si para cada $(x,y),(u,v) \in S, x < u$ implica $y \geq v$.*

Ejemplo 1.1.20 Sean A_1, A_2, A_3 definidos por

$$\begin{aligned} A_1 &= \{(x,x^2) : 0 \leq x \leq 1\}, \\ A_2 &= \{(x,x+1) : 1 \leq x \leq 2\}, \\ A_2 &= \{(x,4) : 2 \leq x \leq 3\}. \end{aligned}$$

Entonces el conjunto $S = A_1 \bigcup A_2 \bigcup A_3$ es un conjunto no decreciente en $\overline{\mathbb{R}}^2$.

Un conjunto S no decreciente, también es llamado comonotónico. Conjuntos comonotónicos en dimensiones mayores a dos serán considerados en el capítulo 3.

Lema 1.1.21 *Sea $S \subset \overline{\mathbb{R}}^2$. Entonces S es no decreciente si y sólo si para cada $(x,y) \in \overline{\mathbb{R}}^2$, se cumple alguna de las dos condiciones siguientes, para cada $(u,v) \in S$*

$$u \leq x \text{ implica } v \leq y \tag{1.7}$$

o bien

$$v \leq y \text{ implica } u \leq x \tag{1.8}$$

Demostración. Supongamos que S es no decreciente, y que no se cumplen (1.7) y (1.8). Entonces, existen $(a, b), (c, d) \in S$ tales que $a \leq x$, $b > y$, $d \leq y$ y $c > x$, lo que implica $c > a$ y $b > d$, lo cual es una contradicción porque S es no decreciente. Por lo tanto, se cumplen (1.7) y (1.8).

Ahora supongamos que S no es no decreciente. Entonces existen $(a, b), (c, d) \in S$ con $a < c$ y $b > d$. Sea $(x, y) = ((a+c)/2, (b+d)/2)$; entonces (x, y) no cumple (1.7) y (1.8). ■

Lema 1.1.22 *Sean X, Y variables aleatorias con función de distribución conjunta H. Entonces H es igual a su cota superior de Fréchet-Hoeffding si y sólo si para cada $(x, y) \in \overline{\mathbb{R}}^2$, se tiene $P(X > x, Y \leq y) = 0$ ó $P(X \leq x, Y > y) = 0$.*

Demostración. Sean F y G marginales de H. Entonces

$$F(x) = H(x, y) + P(X \leq x, Y > y), \; G(y) = H(x, y) + P(X > x, Y \leq y).$$

De esta forma, tenemos $H(x, y) = M(F(x), G(y))$ si y sólo si $P(X > x, Y \leq y) = 0$ ó $P(X \leq x, Y > y) = 0$. ■

Teorema 1.1.23 *Sean X, Y variables aleatorias con función de distribución conjunta H. Entonces H es igual a su cota superior de Fréchet-Hoeffding si y sólo si el soporte de H es un subconjunto no decreciente de $\overline{\mathbb{R}}^2$.*

Demostración. Sea S el soporte de H y $(x, y) \in \overline{\mathbb{R}}^2$. Entonces, (1.7) se cumple si y sólo si $\{(u, v) : u \leq x, v > y\} \cap S = \phi$, y esto ocurre si y sólo si $P(X \leq x, Y > y) = 0$. Analogamente, (1.8) se cumple si y sólo si $\{(u, v) : v \leq y, u > x\} \cap S = \phi$, y esto ocurre si y sólo si $P(X > x, Y \leq y) = 0$. El resultado se sigue de los Lemas 1.1.21 y 1.1.22. ■

Ahora veremos un tipo especial de cópulas, que son las cópulas de sobrevivencia. Recordemos que la función de sobrevivencia se define por $\overline{F}(x) = P(X > x) = 1 - F(x)$.

Definición 1.1.24 *Sea (X, Y) un vector aleatorio, la función conjunta de sobrevivencia está dada por $\overline{H}(x, y) = P(X > x, Y > y)$, con marginales:*

$$\overline{H}(x, -\infty) = \overline{F}(x), \;\; \overline{H}(-\infty, y) = \overline{G}(y).$$

De esta manera, tenemos la siguiente definición,

Definición 1.1.25 *La cópula de sobrevivencia $\widehat{C}$ relacionada con la cópula C, se define por la ecuación,*

$$\widehat{C}(u, v) = u + v - 1 + C(1 - u, 1 - v), \;\; u, v \in I.$$

Veamos que en efecto $\widehat{C}$ es cópula. Es claro que $\widehat{C}$ cumple con las condiciones de frontera. Ahora, para $u_1 \leq u_2, v_1 \leq v_2 \in I$, tenemos

$$V_{\widehat{C}}([u_1, u_2] \times [v_1, v_2]) = V_C([1 - u_2, 1 - u_1] \times [1 - v_2, 1 - v_1]) \geq 0.$$

De lo anterior se sigue que $\widehat{C}$ es 2-creciente, por lo tanto $\widehat{C}$ es cópula.

Si (X, Y) es un vector aleatorio continuo con función de distribución conjunta de sobrevivencia $\overline{H}$ y marginales de sobrevivencia $\overline{F}(x)$ y $\overline{G}(y)$, usando el teorema de Sklar,

$$\begin{aligned}\overline{H}(x,y) &= 1 - F(x) - G(y) + C_{X,Y}(F(x), G(y)) \\ &= \overline{F}(x) + \overline{G}(y) - 1 + C_{X,Y}(1-\overline{F}(x), 1-\overline{G}(y)) \\ &= \widehat{C}(\overline{F}(x), \overline{G}(y)),\end{aligned}$$

es decir, tenemos una ecuación involucrando las funciones de sobrevivencia similar a la obtenida en el teorema de Sklar.

En el conjunto de las cópulas es posible definir un orden, el cual es útil para comparar elementos en familias paramétricas de cópulas. Este orden es un orden parcial, y se define a continuación.

Definición 1.1.26 *Sean C_1 y C_2 cópulas. Se dice que C_1 es más pequeña que C_2 (o que C_2 es más grande que C_1), denotado por $C_1 \prec C_2$ (o $C_2 \succ C_1$), si $C_1(u,v) \leq C_2(u,v)\, \forall\, u, v \in I$.*

Como se mencionó, el orden definido anteriormente es un orden parcial (las cópulas $(1/2)(W+M)$ y Π no son comparables). No obstante, existen familias de cópulas que son totalmente ordenadas. Una familia de cópulas $\{C_\theta\}$ será *positivamente ordenada* si $C_\alpha \prec C_\beta$ siempre que $\alpha \leq \beta$ y *negativamente ordenada* si $C_\alpha \succ C_\beta$ siempre que $\alpha \leq \beta$.

Ejemplo 1.1.27 La familia de cópulas Ali-Mikhail-Haq $\{C_\theta\}$, dada por

$$C_\theta(u,v) = \frac{uv}{1-\theta(1-u)(1-v)}, \;\; \theta \in [-1,1],$$

es positivamente ordenada porque para $u, v \in (0,1)$ se cumple

$$\frac{C_\alpha(u,v)}{C_\beta(u,v)} = \frac{1-\beta(1-u)(1-v)}{1-\alpha(1-u)(1-v)} \leq 1,$$

siempre que $\alpha \leq \beta$.

A continuación estudiaremos una clase especial de cópulas, a saber, las cópulas Arquimedianas. Éstas son importantes por la forma general de su construcción, la gran variedad de familias que pertenecen a esta clase y las propiedades que poseen.

Definición 1.1.28 *Sea $\varphi : I \longmapsto [0,\infty]$ continua, decreciente tal que $\varphi(1) = 0$. La pseudo-inversa de φ se define de la siguiente manera:*

$$\varphi^{[-1]} = \begin{cases} \varphi^{-1}(t), & 0 \leq t \leq \varphi(0), \\ 0, & \varphi(0) \leq t \leq \infty. \end{cases}$$

En lo que sigue, Φ denota el conjunto de las funciones continuas de I en $[0,\infty]$, decrecientes con $\varphi(1)=0$. De la definición se siguen las siguientes observaciones.

Observaciones

1. $Dom\,\varphi^{[-1]}=[0,\infty]$, $Ran\,\varphi^{[-1]}=I$. Además, $\varphi^{[-1]}$ es continua, no creciente en $[0,\infty]$ y decreciente en $[0,\varphi(0)]$.

2. Para cada $u\in I$, $\varphi^{[-1]}(\varphi(u))=u$ y

$$\begin{aligned}\varphi(\varphi^{[-1]}(u)) &= \begin{cases} u, & 0\le u\le \varphi(0),\\ \\ \varphi(0), & \varphi(0)\le u\le\infty,\end{cases}\\ &= \min\{u,\varphi(0)\}.\end{aligned}$$

3. Si $\varphi(0)=\infty$, entonces $\varphi^{[-1]}=\varphi^{-1}$.

Lema 1.1.29 *Sea $\varphi\in\Phi$ con pseudo-inversa $\varphi^{[-1]}$, y sea $C: I^2\longmapsto I$ definida por*

$$C(u,v)=\varphi^{[-1]}[\varphi(u)+\varphi(v)]. \tag{1.9}$$

Entonces C satisface las condiciones de frontera de una cópula.

Demostración. Debido a que $\varphi(u)+\varphi(0)\ge\varphi(0)$,

$$C(u,0)=\varphi^{[-1]}(\varphi(u)+\varphi(0))=0.$$

Y por la Observación *2*,

$$C(u,1)=\varphi^{[-1]}(\varphi(u)+\varphi(1))=\varphi^{[-1]}(\varphi(u))=u.$$

Por simetría, $C(0,v)=0$, $C(1,v)=v$. ∎

El siguiente lema nos proporciona una condición necesaria y suficiente para que la función definida por (1.9) sea 2-creciente.

Lema 1.1.30 *Bajo las condiciones del Lema 1.1.29, C es 2-creciente si y sólo si para todo $v\in I$,*

$$C(u_2,v)-C(u_1,v)\le u_2-u_1, \tag{1.10}$$

cuando $u_1\le u_2$.

Demostración. Supongamos que C es 2-creciente. Debido a que C es 2-creciente, $V_C([u_1,u_2]\times[v,1])\ge 0$, y el resultado se sigue por el Lema 1.1.29.

Reciprocamente, sean $u_1\le u_2$, $v_1\le v_2\in I$. Nótese que $C(0,v_2)=0\le v_1\le v_2=C(1,v_2)$. Debido a que C es continua (φ y $\varphi^{[-1]}$ lo son) existe $t\in I$ tal que $C(t,v_2)=v_1$ (o $\varphi(t)+\varphi(v_2)=\varphi(v_1)$, si $v_1\neq 0$). Demostraremos

$$C(u_2,v_1)-C(u_1,v_1)\le C(u_2,v_2)-C(u_1,v_2). \tag{1.11}$$

Nótese que si $v_1 = 0$ entonces (1.11) claramente se satisface. Supongamos $v_1 \neq 0$ y consideremos los casos:

1. $\varphi(u_2) + \varphi(v_2) > \varphi(0)$ ó $\varphi(u_1) + \varphi(v_2) > \varphi(0)$,

2. $\varphi(u_2) + \varphi(v_2) \leq \varphi(0)$ y $\varphi(u_1) + \varphi(v_2) \leq \varphi(0)$.

Para el caso 1, tenemos que para u fijo $C(u, v_1) \leq C(u, v_2)$, porque φ y $\varphi^{[-1]}$ son no crecientes. En forma análoga para v fijo, $C(u_1, v) \leq C(u_2, v)$. De esta manera, si $\varphi(u_2) + \varphi(v_2) > \varphi(0)$ entonces $C(u_2, v_2) = 0$, lo que implica que $C(u_1, v_2) = 0 = C(u_2, v_1)$, y (1.11) resulta. En forma análoga se sigue el caso $\varphi(u_1) + \varphi(v_2) > \varphi(0)$.

Ahora veamos el caso 2. Por la observación hecha al inicio de la prueba, tenemos

$$\begin{aligned} C(u_2, v_1) - C(u_1, v_1) &= \varphi^{[-1]}(\varphi(u_2) + \varphi(v_1)) - \varphi^{[-1]}(\varphi(u_1) + \varphi(v_1)) \\ &= \varphi^{[-1]}(\varphi(u_2) + \varphi(v_2) + \varphi(t)) - \varphi^{[-1]}(\varphi(u_1) + \varphi(v_2) + \varphi(t)) \\ &= C(C(u_2, v_2), t) - C(C(u_1, v_2), t) \\ &\leq C(u_2, v_2) - C(u_1, v_2). \end{aligned}$$

■

Los Lemas 1.1.29 y 1.1.30 implican que las funciones que satisfacen (1.11) son cópulas. En el Teorema 1.1.32 veremos que tipos de funciones φ hacen de C, definida por la fórmula (1.9), una cópula. Primero demostraremos el siguiente lema.

Lema 1.1.31 *Sea $\varphi \in \Phi$ con pseudoinversa $\varphi^{[-1]}$. Si φ es midconvexa, es decir,*

$$\varphi\left(\frac{s+t}{2}\right) \leq \frac{\varphi(s) + \varphi(t)}{2}, \ \ \forall\, s, t,$$

entonces φ es convexa. Además, φ es convexa si y sólo si $\varphi^{[-1]}$ es convexa.

Demostración. Supongamos que φ no es convexa, entonces existen $s < t$ tal que para algún $\lambda \in (0, 1)$

$$\varphi(\lambda t + (1-\lambda)s) > \lambda\varphi(t) + (1-\lambda)\varphi(s).$$

Sean

$$\begin{aligned} A^- &= \{\eta < \lambda : \varphi(\eta t + (1-\eta)s) = \eta\varphi(t) + (1-\eta)\varphi(s)\}, \\ A^+ &= \{\eta > \lambda : \varphi(\eta t + (1-\eta)s) = \eta\varphi(t) + (1-\eta)\varphi(s)\}, \end{aligned}$$

y $\alpha = \sup A^-$, $\beta = \inf A^+$. De la continuidad de φ se sigue que $\alpha < \beta$,

$$\varphi(\alpha t + (1-\alpha)s) = \alpha\varphi(t) + (1-\alpha)\varphi(s), \quad \varphi(\beta t + (1-\beta)s) = \beta\varphi(t) + (1-\beta)\varphi(s).$$

De esta manera, tomando $s^* = \alpha t + (1-\alpha)s$, $t^* = \beta t + (1-\beta)s$, obtenemos

$$\varphi\left(\frac{s^* + t^*}{2}\right) > \frac{\varphi(s^*) + \varphi(t^*)}{2},$$

lo que contradice la midconvexidad de φ. Por lo tanto, φ es convexa.

Ahora demostraremos que φ convexa implica $\varphi^{[-1]}$ convexa; el recíproco es análogo. Sean $s, t \in [0, \infty]$; sin pérdida de generalidad podemos suponer $s < t < \varphi(0)$. Para s y t dados tenemos que existen $u > v \in I$ tal que $s = \varphi(u)$, $t = \varphi(v)$. Debido a que φ es convexa,

$$\varphi(\lambda u + (1-\lambda)v) \leq \lambda\varphi(u) + (1-\lambda)\varphi(v). \tag{1.12}$$

Como φ es decreciente, φ^{-1} también lo es. De esta manera de (1.12) se sigue

$$\lambda u + (1-\lambda)v \geq \varphi^{-1}(\lambda\varphi(u) + (1-\lambda)\varphi(v)),$$

es decir,

$$\lambda\varphi^{[-1]}(s) + (1-\lambda)\varphi^{[-1]}(t) \geq \varphi^{[-1]}(\lambda s + (1-\lambda)t),$$

Por lo tanto, $\varphi^{[-1]}$ es convexa. ■

Teorema 1.1.32 *Sea $\varphi \in \Phi$ con pseudoinversa $\varphi^{[-1]}$. La función definida por (1.9) es una cópula si y sólo si φ es convexa.*

Demostración. Ya hemos probado que C satisface las condiciones de frontera para una cópula. Como consecuencia del Lema 1.1.30 solo necesitamos mostrar que (1.10) se cumple si y sólo si φ es convexa. Nótese que (1.10) es equivalente a

$$u_1 + \varphi^{[-1]}(\varphi(u_2) + \varphi(v)) \leq u_2 + \varphi^{[-1]}(\varphi(u_1) + \varphi(v)),$$

para $u_1 \leq u_2$, así que si hacemos $a = \varphi(u_1)$, $b = \varphi(u_2)$, $c = \varphi(v)$, entonces (1.10) es equivalente a

$$\varphi^{[-1]}(a) + \varphi^{[-1]}(b+c) \leq \varphi^{[-1]}(b) + \varphi^{[-1]}(a+c), \tag{1.13}$$

donde $a \geq b$, $c \geq 0$.

Supongamos que $\varphi^{[-1]}$ satisface (1.13), y $s, t \in [0, \infty]$ son tales que $0 \leq s < t$. Si sustituimos $a = (s+t)/2$, $b = s$, $c = (t-s)/2$ en (1.13), obtenemos

$$\varphi^{[-1]}\left(\frac{s+t}{2}\right) \leq \frac{\varphi^{[-1]}(s) + \varphi^{[-1]}(t)}{2}.$$

De esta manera, $\varphi^{[-1]}$ es midconvexa, y por el Lema 1.1.31 $\varphi^{[-1]}$ es convexa, de donde φ también lo es.

Recíprocamente, por el Lema 1.1.31 podemos suponer $\varphi^{[-1]}$ es convexa. Sean $a, b, c \in [0, \infty]$ fijos, tales que, $a \geq b$, $c \geq 0$; sea $\gamma = (a-b)/(a-b+c)$. Entonces $a = (1-\gamma)b + \gamma(a+c)$, $b + c = \gamma b + (1-\gamma)(a+c)$, y

$$\begin{aligned} \varphi^{[-1]}(a) &\leq (1-\gamma)\varphi^{[-1]}(b) + \gamma\varphi^{[-1]}(a+c), \\ \varphi^{[-1]}(b+c) &\leq \gamma\varphi^{[-1]}(b) + (1-\gamma)\varphi^{[-1]}(a+c), \end{aligned}$$

de donde se sigue (1.13). ■

En lo que sigue Φ^* denota el conjunto de las funciones $\varphi \in \Phi$ convexas. De esta forma, tenemos la siguiente definición.

Definición 1.1.33 *Sea $\varphi \in \Phi^*$. Las cópulas C de la forma (1.9) son llamadas cópulas Arquimedianas. La función φ es llamada un generador de la cópula. Si $\varphi(0) = \infty$, decimos que φ es un generador estricto. En este caso, $\varphi^{[-1]} = \varphi^{-1}$ y $C(u,v) = \varphi^{-1}(\varphi(u) + \varphi(v))$ se llama cópula Arquimediana estricta.*

De la definición se siguen las siguientes propiedades para las cópulas Arquimedianas:

1. C es simétrica; i.e., $C(u,v) = C(v,u)\ \forall\, u,v \in I$.
2. C es asociativa; i.e., $C(C(u,v),w) = C(u,C(v,w))\ \forall\, u,v,w \in I$.
3. Si $c > 0$; entonces $c\varphi$ también es un generador de C, lo cual implica que el generador de una cópula Arquimediana no es único.
4. La sección diagonal $\delta_C(u)$ satisface $\delta_C(u) < u$, para todo $u \in (0,1)$.

Ejemplo 1.1.34 Tenemos que Π y W son Arquimedianas con generadores $\varphi_\Pi(t) = -\ln t$ y $\varphi_W(t) = 1 - t$, respectivamente. La cópula M no es Arquimediana, porque no cumple $\delta_C(u) < u$, para todo $u \in (0,1)$.

Definición 1.1.35 *Los conjuntos de nivel t de una cópula C se definen como*

$$\{(u,v) \in I^2 \mid C(u,v) = t\}.$$

Para una cópula Arquimediana y para $t > 0$, el conjunto de nivel t consiste de los puntos sobre la *curva de nivel* $\varphi(u) + \varphi(v) = \varphi(t)$ en I^2, la cual conecta los puntos $(1,t)$ y $(t,1)$. Debido a que $\varphi(t) - \varphi(u) \in [0, \varphi(0))$, podemos escribir v como función de u, esto es,

$$v = \varphi^{[-1]}(\varphi(t) - \varphi(u)) = \varphi^{-1}(\varphi(t) - \varphi(u)) := L_t(u) \tag{1.14}$$

Definición 1.1.36 *Para $t = 0$, denotaremos por $Z(C) = \{(u,v) \in I^2 \mid C(u,v) = 0\}$, el conjunto cero de C, y $v = L_0(u)$ la curva cero.*

Las curvas de nivel de cualquier cópula Arquimediana cumplen el siguiente teorema.

Teorema 1.1.37 *Las curvas de nivel de una cópula Arquimediana son convexas.*

Demostración. Sea C una cópula Arquimediana con generador φ. Para $t \in (0,1)$, las curvas de nivel estan dadas por (1.14), por lo tanto, sólo necesitamos probar que $L_t(u)$ es midconvexa, debido a que es continua. Debido a que φ es convexa, se tiene,

$$\varphi(t) - \varphi\left(\frac{u_1 + u_2}{2}\right) \geq \varphi(t) - \frac{\varphi(u_1) + \varphi(u_2)}{2} = \frac{[\varphi(t) - \varphi(u_2)] + [\varphi(t) - \varphi(u_2)]}{2},$$

y como φ^{-1} es decreciente y convexa, resulta

$$
\begin{aligned}
L_t\left(\frac{u_1+u_2}{2}\right) &= \varphi^{-1}\left(\varphi(t)-\varphi\left(\frac{u_1+u_2}{2}\right)\right) \\
&\leq \varphi^{-1}\left[\frac{[\varphi(t)-\varphi(u_1)+[\varphi(t)-\varphi(u_2)]}{2}\right] \\
&\leq \frac{1}{2}[\varphi^{-1}(\varphi(t)-\varphi(u_1))+\varphi^{-1}(\varphi(t)-\varphi(u_2))] \\
&= \frac{L_t(u_1)+L_t(u_2)}{2}.
\end{aligned}
$$

■

La C-medida de cada curva de nivel de una cópula Arquimediana C está dada en el siguiente teorema

Teorema 1.1.38 *Sea C una cópula Arquimediana generada por $\varphi \in \Phi^*$. Entonces*

1. *Para $t \in (0,1)$, la C-medida de la curva de nivel $\varphi(u)+\varphi(v)=\varphi(t)$ está dada por*

$$\varphi(t)\left[\frac{1}{\varphi'(t^-)}-\frac{1}{\varphi'(t^+)}\right], \tag{1.15}$$

donde $\varphi'(t^-)$ y $\varphi'(t^+)$ denotan las derivadas izquierda y derecha de φ en t, respectivamente. En particular, si $\varphi'(t)$ existe, el cual es el caso excepto a lo más en un número contable de puntos, entonces la C-medida es 0.

2. *Si C no es estricta, entonces la C-medida de su curva de nivel $\varphi(u)+\varphi(v)=\varphi(0)$ es igual a*

$$-\frac{\varphi(0)}{\varphi'(0^+)}, \tag{1.16}$$

y de esta manera es igual a 0 siempre que $\varphi'(0^+)=-\infty$.

Demostración. Ya que φ es convexa, $\varphi'(t^-)$ y $\varphi'(t^+)$ existen en $(0,1]$ y $[0,1)$ respectivamente, y son iguales salvo en un número contable de puntos (ver [18]). Sea $t \in (0,1)$ y $w=\varphi(t)$. Sea n entero positivo fijo, y

$$\pi_n=\{t_0=t,\ldots,t_n=1\},$$

una partición del intervalo $[t,1]$ dada por $t_{n-k}=\varphi^{[-1]}(kw/n)$. Debido a que $w<\varphi(0)$ se tiene

$$
\begin{aligned}
C(t_j,t_k) &= \varphi^{[-1]}(\varphi(t_j)+\varphi(t_k)) \\
&= \varphi^{[-1]}\left(\frac{n-j}{n}w+\frac{n-k}{n}w\right) \\
&= \varphi^{[-1]}\left(w+\frac{n-j-k}{n}w\right).
\end{aligned}
$$

En particular, $C(t_j, t_{n-j}) = \varphi^{[-1]}(w) = t$. Sean $R_k = [t_{k-1}, t_k] \times [t_{n-k}, t_{n-k+1}]$, $S_n = \bigcup_{k=1}^n R_k$. De la convexidad de $\varphi^{[-1]}$ se sigue

$$0 \leq t_1 - t_0 \leq t_2 - t_1 \leq \ldots \leq t_n - t_{n-1} = 1 - t_{n-1}.$$

Además, $\lim_{n\to\infty}(1 - t_{n-1}) = 1 - \varphi^{[-1]}(0) = 0$. Por lo tanto la C-medida de la curva $\varphi(u) + \varphi(v) = \varphi(t)$ está dada por $\lim_{n\to\infty} V_C(S_n)$. Para cada k tenemos

$$\begin{aligned} V_C(R_k) &= C(t_{k-1}, t_{n-k}) - t - t + C(t_k, t_{n-k+1}) \\ &= [\varphi^{[-1]}(w + w/n) - \varphi^{[-1]}(w)] - [\varphi^{[-1]}(w) - \varphi^{[-1]}(w - w/n)]. \end{aligned}$$

De esta forma,

$$\begin{aligned} \lim_{n\to\infty} V_C(S_n) &= \lim_{n\to\infty} w \left[\frac{\varphi^{[-1]}(w + w/n) - \varphi^{[-1]}(w)}{w/n} - \frac{\varphi^{[-1]}(w) - \varphi^{[-1]}(w - w/n)}{w/n} \right] \\ &= \varphi(t) \left[\frac{1}{\varphi'(t^-)} - \frac{1}{\varphi'(t^+)} \right], \end{aligned}$$

y obtenemos (1.15).

Si C no es estricta, entonces $\varphi(0)$ es finito y $C(u, v) = 0$ sobre y debajo de la curva de nivel $\varphi(u) + \varphi(v) = \varphi(0)$. Entonces para cada k, $V_C(R_k) = C(t_k, t_{n-k+1})$, usando el mismo argumento de la primera parte se obtiene (1.16). ∎

Teorema 1.1.39 *Sea C una cópula Arquimediana generada por $\varphi \in \Phi^*$. Sea $K_C(t)$ la C-medida del conjunto $\{(u, v) \in I^2 \mid C(u, v) \leq t\}$ (equivalentemente $\{(u, v) \in I^2 \mid \varphi(u)+\varphi(v) \geq \varphi(t)\}$). Entonces para todo $t \in I$,*

$$K_C(t) = t - \frac{\varphi(t)}{\varphi'(t^+)}. \tag{1.17}$$

Demostración. Sea $t \in (0, 1)$ y $w = \varphi(t)$. Para n entero positivo consideramos las mismas particiones de $[t, 1]$ y $[0, w]$ del Teorema 1.1.38. Denotamos por $R_k^* = [t_{k-1}, t_k] \times [0, t_{n-k+1}]$, $S_n^* = \bigcup_{k=1}^n R_k^*$. Procediendo como en el Teorema 1.1.38 obtenemos

$$\begin{aligned} K_C(t) &= V_C([0, t] \times [0, 1]) + \lim_{n\to\infty} V_C(S_n^*) \\ &= t + \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^n (C(t_k, t_{n-k+1}) - t) \\ &= t - \lim_{n\to\infty} w \left[\frac{\varphi^{[-1]}(w) - \varphi^{[-1]}(w - w/n)}{w/n} \right] \\ &= t - \frac{\varphi(t)}{\varphi'(t^+)}. \end{aligned}$$

∎

El siguiente corolario es una generalización del teorema anterior.

Corolario 1.1.40 *Sea C una cópula Arquimediana generada por $\varphi \in \Phi^*$. Sea $K'_C(s,t)$ la C-medida del conjunto $\{(u,v) \in I^2 \mid u \leq s, C(u,v) \leq t\}$. Entonces para cualquier $s, t \in I$, se tiene*

$$K'_C(s,t) = \begin{cases} s, & s \leq t \\ & \\ t - \dfrac{\varphi(t) - \varphi(s)}{\varphi'(t^+)}, & s > t. \end{cases} \tag{1.18}$$

Demostración. Si $s \leq t$ entonces

$$\{(u,v) \in I^2 \mid u \leq s, C(u,v) \leq t\} = \{(u,v) \in I^2 \mid u \leq s\},$$

de donde, $K'_C(s,t) = s$. Ahora supongamos $s > t$. Procediendo como en el Teorema 1.1.38 y Teorema 1.1.39, denotamos $z = \varphi(s)$ y consideramos la partición del intervalo $[t, s]$ inducida por el intervalo $[z, w]$, es decir,

$$t_{n-k} = \varphi^{[-1]}(z + [k(w-z)/n]), \;\; k = 0, 1, \ldots n,$$

y

$$C(t_j, t_k) = \varphi^{[-1]}(w + [(n-j-k)(w-z)/n]).$$

El resto de la demostración es como en el teorema anterior. ■

El siguiente corolario presenta una interpretación probabilística del Teorema 1.1.39 y Corolario 1.1.40.

Corolario 1.1.41 *Sean U, V dos variables aleatorias uniformemente distribuidas en $(0,1)$, cuya función de distribución conjunta es la cópula Arquimediana C generada por $\varphi \in \Phi^*$. Entonces la función K_C dada por (1.17) es la función de distribución de la variable aleatoria $C(U,V)$. Además, la función K'_C dada por (1.18) es la función de distribución conjunta de U y $C(U,V)$.*

Ahora veremos cuando se pueden comparar dos cópulas Arquimedianas en el sentido del orden parcial $\prec$, previamente definido. Para este fin, definimos la noción de subaditivad de una función.

Definición 1.1.42 *Una función f definida en $[0, \infty)$ es subaditiva si para todo $x, y \in [0, \infty)$,*

$$f(x+y) \leq f(x) + f(y). \tag{1.19}$$

El conocimiento del comportamiento de los generadores te permite obtener condiciones suficientes, en ocasiones necesarias también, para comparar dos cópulas. Esto lo veremos en los siguientes teoremas.

Teorema 1.1.43 *Sean C_1, C_2 cópulas Arquimedianas generadas por $\varphi_1, \varphi_2 \in \Phi^*$, respectivamente. Entonces $C_1 \prec C_2$ si y sólo si $\varphi_1 \circ \varphi_2^{[-1]}$ es subaditiva.*

Demostración. Sea $f = \varphi_1 \circ \varphi_2^{[-1]}$. Nótese que f es continua, no decreciente, $f(0) = 0$. De la definición de C_1 y C_2 se sigue que $C_1 \prec C_2$ si y sólo si para todo $u, v \in I$,

$$\varphi_1^{[-1]}(\varphi_1(u) + \varphi_1(v)) \leq \varphi_2^{[-1]}(\varphi_2(u) + \varphi_2(v)). \tag{1.20}$$

Si hacemos $x = \varphi_2(u)$, $y = \varphi_2(v)$, entonces (1.20) se puede escribir en la forma

$$\varphi_1^{[-1]}(f(x) + f(y)) \leq \varphi_2^{[-1]}(x + y), \tag{1.21}$$

para todo $x, y \in [0, \varphi_2(0)]$. Por otro lado, para x, y que cumplan $x > \varphi_2(0)$ o $y > \varphi_2(0)$, la igualdad se obtiene en (1.21). De esta forma, (1.21) se cumple para todo $x, y \geq 0$.

Supongamos $C_1 \prec C_2$. Entonces aplicando φ_1 en ambos lados de (1.21) resulta

$$\begin{aligned} f(x+y) &\leq \varphi_1[\varphi_1^{[-1]}(f(x) + f(y))] \\ &\leq f(x) + f(y), \end{aligned}$$

porque $\varphi_1(\varphi_1^{[-1]}(w)) \leq w$, para todo $w \geq 0$. Por lo tanto, f es subaditiva.

Ahora supongamos que f satisface (1.19). Entonces aplicando $\varphi_1^{[-1]}$ en ambos lados de (1.19) resulta

$$\begin{aligned} \varphi_1^{[-1]}(f(x) + f(y)) &\leq \varphi_1^{[-1]}(f(x+y)) \\ &= \varphi_1^{[-1]}[\varphi_1(\varphi_2^{[-1]}(x+y))] \\ &= \varphi_2^{[-1]}(x+y), \end{aligned}$$

el cual es (1.21). Por lo tanto, $C_1 \prec C_2$. ■

No obstante, verificar la subaditividad de $\varphi_1 \circ \varphi_2^{[-1]}$ no es sencillo. Por esta razón, daremos condiciones suficientes para obtener orden en cópulas Arquimedianas. Antes tenemos el siguiente lema.

Lema 1.1.44 *Sea f definida en $[0, \infty)$. Si f es concava y $f(0) = 0$, entonces f es subaditiva.*

Demostración. Sean $x, y \in [0, \infty)$. Sin pérdida de generalidad podemos suponer $x + y > 0$, entonces

$$x = \frac{x}{x+y}(x+y) + \frac{y}{x+y}(0), \;\; y = \frac{x}{x+y}(0) + \frac{y}{x+y}(x+y).$$

Si f es concava y $f(0) = 0$, entonces

$$\begin{aligned} f(x) &\geq \frac{x}{x+y}f(x+y) + \frac{y}{x+y}f(0) = \frac{x}{x+y}f(x+y), \\ f(y) &\geq \frac{x}{x+y}f(0) + \frac{y}{x+y}f(x+y) = \frac{y}{x+y}f(x+y). \end{aligned}$$

Sumando las dos desigualdades anteriores obtenemos (1.19). ■

Usando el lema anterior se tiene el siguiente corolario.

Corolario 1.1.45 *Bajo las hipótesis del Teorema 1.1.43, si $\varphi_1 \circ \varphi_2^{[-1]}$ es concava, entonces $C_1 \prec C_2$.*

El siguiente Corolario nos proporciona condiciones sobre el cociente de los generadores de las cópulas Arquimedianas para obtener orden.

Corolario 1.1.46 *Bajo las hipótesis del Teorema 1.1.43, si φ_1/φ_2 es no decreciente, entonces $C_1 \prec C_2$.*

Demostración. Sea $f = \varphi_1 \circ \varphi_2^{[-1]}$. Sea g en $(0, \infty)$ definida por $g(t) = f(t)/t$. Mostraremos que f es subaditiva o equivalentemente que para todo $x, y \geq 0$,

$$(x+y)g(x+y) \leq xg(x) + yg(y).$$

Nótese que para $t \geq \varphi_2(0)$, $g(t) = \varphi_1(0)/t$, lo cual muestra que g es no creciente en $[\varphi_2(0), \infty)$. También para $t < \varphi_2(0)$ se tiene $g(\varphi_2(t)) = \varphi_1(t)/\varphi_2(t)$, y debido a que φ_1/φ_2 es no decreciente, se sigue que g es no creciente en $(0, \varphi_2(0))$. Por lo tanto, g es no creciente en su dominio. De esta manera, para $x, y \geq 0$,

$$x[g(x+y) - g(x)] + y[g(x+y) - g(y)] \leq 0,$$

lo cual implica

$$(x+y)g(x+y) \leq xg(x) + yg(y).$$

■

Por último tenemos el siguiente corolario, el cual da condiciones sobre el cociente de las derivadas de los generadores para obtener orden en cópulas Arquimedianas.

Corolario 1.1.47 *Bajo las hipótesis del Teorema 1.1.43, si φ_1 y φ_2 son continuamente diferenciables y φ_1'/φ_2' es no decreciente en $(0,1)$, entonces $C_1 \prec C_2$.*

Demostración. Sea $g = \varphi_1/\varphi_2$. Mostraremos que g es no decreciente. Sea $f = \varphi_1'/\varphi_2'$, y supongamos que f es no decreciente. Nótese que f es positiva y continua en $(0,1)$. De esta manera, $\lim_{t \to 1^-} f(t)$ existe (finito o infinito).

Ahora bien, debido a que

$$\lim_{t \to 1^-} \varphi_1(t) = 0 = \lim_{t \to 1^-} \varphi_2(t),$$

entonces la regla de l'Hopital aplica y

$$\lim_{t \to 1^-} f(t) = \lim_{t \to 1^-} g(t).$$

Por otro lado,

$$g' = \frac{\varphi_2\varphi_1' - \varphi_1\varphi_2'}{\varphi_2^2} = \left(\frac{\varphi_1'}{\varphi_2'} - \frac{\varphi_1}{\varphi_2}\right)\frac{\varphi_2'}{\varphi_2} = (f-g)\frac{\varphi_2'}{\varphi_2}. \tag{1.22}$$

De esta manera, debido a que φ_2'/φ_2 es negativa, solo tenemos que probar que $f(t) \leq g(t)$ para todo $t \in (0,1)$. Supongamos que existe $t_0 \in (0,1)$ tal que $f(t_0) > g(t_0)$. Entonces

$$g(t_0) < f(t_0) \leq \lim_{t \to 1^-} f(t) = \lim_{t \to 1^-} g(t).$$

Por (1.22), $g'(t_0) < 0$, entonces existe $t_1 \in (0,1)$ tal que $g(t_1) < g(t_0)$ y $g'(t_1) = 0$. Pero también,

$$g(t_1) < g(t_0) < f(t_0) \leq f(t_1),$$

y por (1.22) $g'(t_1) < 0$, lo cual es una contradicción. Por lo tanto, $f(t) \leq g(t)$, para todo $t \in (0,1)$. ∎

Ejemplo 1.1.48 Sea $\{C_\theta, \theta \in [-1,1)\}$ la familia de cópulas dada por

$$C_\theta(u,v) = \frac{uv}{1-\theta(1-u)(1-v)}, \quad u,v \in I.$$

La cópula C_θ tiene generador

$$\varphi_\theta(t) = \ln \frac{1-\theta(1-t)}{t}, \quad t \in (0,1].$$

Sea $\theta_1 \leq \theta_2$. Tenemos que

$$\frac{\varphi_{\theta_1}'(t)}{\varphi_{\theta_2}'(t)} = \left(\frac{1-\theta_1}{1-\theta_2}\right)\left(\frac{1-\theta_2(1-t)}{1-\theta_1(1-t)}\right), \quad t \in (0,1).$$

Ahora bien, para $t_1 < t_2$

$$(1-\theta_2(1-t_2))(1-\theta_1(1-t_1)) - (1-\theta_2(1-t_1))(1-\theta_1(1-t_2)) = (t_2-t_1)(\theta_2-\theta_1) \geq 0,$$

lo cual muestra que $\varphi_{\theta_1}'/\varphi_{\theta_2}'$ es no decreciente, por lo tanto $C_{\theta_1} \prec C_{\theta_2}$. De esta manera, tenemos que la familia $\{C_\theta, \theta \in [-1,1)\}$ es positivamente ordenada.

1.1.2 Medidas de Concordancia

En esta sección se dará el concepto de concordancia y de medida de concordancia. Se definirán dos medidas de concordancia muy usadas. Además daremos algunas formas de calcularlas usando las propiedades de cópulas.

Definición 1.1.49 *Sean (x_i, y_i), (x_j, y_j) dos observaciones de un vector (X,Y) de variables aleatorias continuas. Se dice que (x_i, y_i) y (x_j, y_j) son* ***concordantes*** *si $(x_i - x_j)(y_i - y_j) > 0$. Similarmente, se dice que (x_i, y_i) y (x_j, y_j) son* ***discordantes*** *si $(x_i - x_j)(y_i - y_j) < 0$.*

En forma equivalente, (x_i, y_i) y (x_j, y_j) son concordantes si $x_i > x_j$ e $y_i > y_j$ o si $x_i < x_j$ e $y_i < y_j$, discordantes si $x_i > x_j$ e $y_i < y_j$ o si $x_i < x_j$ e $y_i > y_j$.

Definición 1.1.50 *Una medida numérica de asociación κ entre dos variables aleatorias continuas X e Y cuya cópula es C, es una medida de concordancia si satisface las siguientes propiedades*

1. *κ está definida para cada pareja X, Y de variables aleatorias continuas.*
2. $-1 \leq \kappa_{X,Y} \leq 1$, $\kappa_{X,X} = 1$, $\kappa_{X,-X} = -1$.
3. $\kappa_{X,Y} = \kappa_{Y,X}$
4. *Si X, Y son independientes, entonces $\kappa_{X,Y} = \kappa_{\Pi} = 0$.*
5. $\kappa_{-X,Y} = \kappa_{X,-Y} = -\kappa_{X,Y}$.
6. *Si C_1 y C_2 son cópulas tales que $C_1 \prec C_2$, entonces $\kappa_{C_1} \leq \kappa_{C_2}$.*
7. *Si $\{(X_n, Y_n)\}$ es una sucesión de vectores aleatorios continuos con cópulas C_n, y si $\{C_n\}$ converge puntualmente a C, entonces $\lim_{n\to\infty} \kappa_{C_n} = \kappa_C$.*

Teorema 1.1.51 *Sea κ medida de concordancia para las variables aleatorias continuas X e Y.*

1. *Si Y es casi seguramente función creciente de X, entonces $\kappa_{X,Y} = \kappa_M = 1$.*
2. *Si Y es casi seguramente función decreciente de X, entonces $\kappa_{X,Y} = \kappa_W = -1$.*
3. *Si α, β son funciones casi seguramente crecientes sobre RanX y RanY respectivamente, entonces $\kappa_{\alpha(X),\beta(Y)} = \kappa_{X,Y}$.*

Demostración. Demostraremos *1*, la prueba de *2* es similar. Sea α una función creciente sobre *Ran X* tal que $Y = \alpha(X)$. Por el Teorema 1.1.16, $C_{X,\alpha(X)} = C_{X,X} = M$. Por lo tanto, por los axiomas *2* y *6*, $\kappa_{X,Y} = \kappa_{X,X} = 1$.

Ahora demostremos *3*. Sean α y β funciones crecientes sobre *Ran X* y *Ran Y* respectivamente. Por Teorema 1.1.16 $C_{\alpha(X),\beta(Y)} = C_{X,Y}$. Por lo tanto, por el Axioma *6* $\kappa_{\alpha(X),\beta(Y)} = \kappa_{X,Y}$. ■

Nótese que la parte *3* del teorema anterior implica que las medidas de concordancia son invariantes bajo transformaciones crecientes. Ahora vamos a definir la primera medida de concordancia.

Definición 1.1.52 *Sean (X_1, Y_1), (X_2, Y_2) vectores aleatorios independientes e idénticamente distribuidos con distribución conjunta H. La medida τ de Kendall está definida por la siguiente ecuación:*

$$\tau = \tau_{X,Y} = P[(X_1 - X_2)(Y_1 - Y_2) > 0] - P[(X_1 - X_2)(Y_1 - Y_2) < 0],$$

es decir, la τ de Kendall es la diferencia entre la probabilidad de concordancia y la probabilidad de discordancia.

Más adelante se demostrará que la τ de Kendall es en efecto una medida de concordancia. La τ de Kendall puede determinarse a partir de la cópula asociada al vector (X, Y), el cual tiene distribución conjunta dada H. Para ver esto, primero definimos una "función de concordancia", la cual denotaremos por Q.

Definición 1.1.53 *Sean (X_1, Y_1), (X_2, Y_2) vectores aleatorios continuos e independientes con funciones de distribución conjunta H_1 y H_2, respectivamente, y con marginales comunes F (de X_1 y X_2) y G (de Y_1 e Y_2). Sea Q dada por:*

$$Q = P[(X_1 - X_2)(Y_1 - Y_2) > 0] - P[(X_1 - X_2)(Y_1 - Y_2) < 0].$$

Nótese que si $H_1 = H_2$ entonces $Q = \tau$. El siguiente teorema proporciona una expresión cerrada para Q en términos de las cópulas asociadas a (X_1, Y_1) y (X_2, Y_2).

Teorema 1.1.54 *Sean (X_1, Y_1), (X_2, Y_2) y Q como en la definición anterior. Sean C_1 y C_2 las cópulas de (X_1, Y_1) y (X_2, Y_2), respectivamente. Entonces*

$$Q = Q(C_1, C_2) = 4 \int_{I^2} C_2(u, v) dC_1(u, v) - 1.$$

Demostración. Debido a que las variables aleatorias son continuas,

$$P[(X_1 - X_2)(Y_1 - Y_2) < 0] = 1 - P[(X_1 - X_2)(Y_1 - Y_2) > 0],$$

por lo tanto,

$$Q = 2P[(X_1 - X_2)(Y_1 - Y_2) > 0] - 1.$$

Por definición,

$$P[(X_1 - X_2)(Y_1 - Y_2) > 0] = P(X_1 > X_2, Y_1 > Y_2) + P(X_1 < X_2, Y_1 < Y_2),$$

y

$$\begin{aligned} P(X_1 > X_2, Y_1 > Y_2) &= \int_{\mathbb{R}^2} P(X_2 \le x, Y_2 \le y) dH_1(x, y) \\ &= \int_{\mathbb{R}^2} P(X_2 \le x, Y_2 \le y) dC_1(F(x), G(y)) \\ &= \int_{\mathbb{R}^2} C_2(F(x), G(y)) dC_1(F(x), G(y)) \\ &= \int_{I^2} C_2(u, v) dC_1(u, v) \end{aligned}$$

En forma análoga,

$$\begin{aligned} P(X_1 < X_2, Y_1 < Y_2) &= \int_{\mathbb{R}^2} P(X_2 > x, Y_2 > y) dH_1(x, y) \\ &= \int_{\mathbb{R}^2} [1 - F(x) - G(y) + C_2(F(x), G(y))] dC_1(F(x), G(y)) \\ &= \int_{I^2} [1 - u - v + C_2(u, v)] dC_1(u, v). \end{aligned}$$

Debido a que C_1 es la distribución conjunta de una pareja (U, V) de variables aleatorias uniformes sobre $(0,1)$, con $E(U) = E(V) = 1/2$, se sigue que

$$\begin{aligned} P(X_1 < X_2, Y_1 < Y_2) &= 1 - \frac{1}{2} - \frac{1}{2} + \int_{I^2} C_2(u,v)dC_1(u,v) \\ &= \int_{I^2} C_2(u,v)dC_1(u,v). \end{aligned}$$

De esta manera

$$P[(X_1 - X_2)(Y_1 - Y_2) > 0] = 2\int_{I^2} C_2(u,v)dC_1(u,v),$$

y el resultado se sigue. ∎

La función de concordancia Q tiene propiedades interesantes, las cuales se enuncian en el siguiente corolario.

Corolario 1.1.55 *Sean C_1, C_2 y Q como en el teorema anterior. Entonces*

1. *Q es simétrica en sus argumentos: $Q(C_1, C_2) = Q(C_2, C_1)$.*
2. *Q es no decreciente en cada argumento: si $C_1 \prec C_1'$ y $C_2 \prec C_2'$ entonces $Q(C_1, C_2) \leq Q(C_1', C_2')$.*
3. *Cópulas pueden ser reemplazadas por cópulas sobrevivencia, i.e., $Q(C_1, C_2) = Q(\widehat{C}_1, \widehat{C}_2)$.*

Demostración. Para *1* tenemos

$$\begin{aligned} Q(C_1, C_2) &= P[(X_1 - X_2)(Y_1 - Y_2) > 0] - P[(X_1 - X_2)(Y_1 - Y_2) < 0] \\ &= P[(X_2 - X_1)(Y_2 - Y_1) > 0] - P[(X_2 - X_1)(Y_2 - Y_1) < 0] \\ &= Q(C_2, C_1). \end{aligned}$$

Para *2* tenemos

$$\begin{aligned} Q(C_1, C_2) &= 4\int_{I^2} C_1(u,v)dC_2(u,v) - 1 \\ &\leq 4\int_{I^2} C_1'(u,v)dC_2(u,v) - 1 \\ &= 4\int_{I^2} C_2(u,v)dC_1'(u,v) - 1 \\ &\leq 4\int_{I^2} C_2'(u,v)dC_1'(u,v) - 1 \\ &= Q(C_1', C_2'). \end{aligned}$$

Por último, si $\widehat{C}$ es una cópula de sobrevivencia, entonces $d\widehat{C}(u,v) = dC(1-u, 1-v)$. De esta manera, tenemos

$$\begin{aligned}\int_{I^2} \widehat{C}_1(u,v)d\widehat{C}_2(u,v) &= \int_{I^2} \widehat{C}_1(u,v)dC_2(1-u,1-v) \\ &= \int_{I^2} \widehat{C}_1(1-u,1-v)dC_2(u,v) \\ &= 1 - \frac{1}{2} - \frac{1}{2} + \int_{I^2} C_1(u,v)dC_2(u,v),\end{aligned}$$

de donde se sigue *3*. ■

La función Q se puede calcular facilmente para las cópulas M, W, Π. Recordemos que el soporte de M es la diagonal $u = v$ en I^2. Debido a que M tiene marginales uniformes en $(0,1)$, se sigue que si $g : I^2 \longmapsto \mathbb{R}$ es una función integrable, entonces

$$\int_{I^2} g(u,v)dM(u,v) = \int_0^1 g(u,u)du. \tag{1.23}$$

En forma análoga, debido a que el soporte de W está sobre la recta $u+v=1$ en I^2, tenemos

$$\int_{I^2} g(u,v)dW(u,v) = \int_0^1 g(u,1-u)du. \tag{1.24}$$

Finalmente, $d\Pi(u,v) = dudv$, por lo tanto

$$\int_{I^2} g(u,v)d\Pi(u,v) = \int_0^1 \int_0^1 g(u,v)dudv.$$

Como consecuencia,

$$\begin{aligned}Q(M,M) &= 4\int_{I^2} \min(u,v)dM(u,v) - 1 = 4\int_0^1 udu - 1 = 1; \\ Q(M,\Pi) &= 4\int_{I^2} uvdM(u,v) - 1 = 4\int_0^1 u^2du - 1 = 1/3; \\ Q(M,W) &= 4\int_{I^2} \max(u+v-1,0)dM(u,v) - 1 = 4\int_{1/2}^1 (2u-1)du - 1 = 0; \\ Q(W,\Pi) &= 4\int_{I^2} uvdW(u,v) - 1 = 4\int_0^1 u(1-u)du - 1 = -1/3; \\ Q(W,W) &= 4\int_{I^2} \max(u+v-1,0)dW(u,v) - 1 = 4\int_0^1 0du - 1 = -1; \\ Q(\Pi,\Pi) &= 4\int_{I^2} uvd\Pi(u,v) - 1 = 4\int_0^1\int_0^1 uvdudv - 1 = 0.\end{aligned}$$

Ahora, sea C una cópula arbitraria. Ya que Q es la diferencia de dos medidas de probabilidad, $Q(C,C) \in [-1,1]$. Como consecuencia de la parte *2* del Corolario 1.1.55 y de los cálculos anteriores, se sigue que

$$Q(C,M) \in [0,1] \quad Q(C,W) \in [-1,0] \quad Q(C,\Pi) \in [-1/3,1/3]$$

De la definición de la medida τ de Kendall y del teorema anterior se obtiene el siguiente resultado.

Teorema 1.1.56 *Sean X e Y variables aleatorias continuas cuya cópula es C. Entonces la medida τ de Kendall para X e Y está dada por*

$$\tau_{X,Y} = \tau_C = Q(C,C) = 4\int_{I^2} C(u,v)dC(u,v) - 1 \tag{1.25}$$

Nótese que la integral que aparece en (1.25) puede ser interpretada como el valor esperado de la función $C(U,V)$ de variables aleatorias U, V uniformemente distribuidas en $(0,1)$, cuya función de distribución conjunta es C, i.e.,

$$\tau_C = 4E[C(U,V)] - 1. \tag{1.26}$$

En general, evaluar la medida τ de Kendall requiere del cálculo de la doble integral en (1.25). Para una cópula Arquimediana, el cálculo es más simple, esto lo vemos en el siguiente corolario.

Corolario 1.1.57 *Sean X e Y variables aleatorias con cópula Arquimediana C generada por $\varphi \in \Phi^*$. Entonces*

$$\tau_C = 1 + 4\int_0^1 \frac{\varphi(t)}{\varphi'(t)}dt. \tag{1.27}$$

Demostración. Sean U, V variables aleatorias uniformes en $(0,1)$ con distribución conjunta C, y sea K_C la función de distribución conjunta de $C(U,V)$. Entonces de (1.26)

$$\tau_C = 4E(C(U,V)) - 1 = 4\int_0^1 t dK_C(t) - 1,$$

y después de integrar por partes, obtenemos

$$\tau_C = 3 - 4\int_0^1 K_C(t)dt.$$

Por el Teorema 1.1.39 y Corolario 1.1.41, la función de distribución conujunta de $C(U,V)$ está dada por

$$K_C(t) = t - \frac{\varphi(t)}{\varphi'(t^+)},$$

de aquí,

$$\tau_C = 3 - 4\int_0^1 \left[t - \frac{\varphi(t)}{\varphi'(t^+)}\right] dt = 1 + 4\int_0^1 \frac{\varphi(t)}{\varphi'(t)}dt,$$

donde se ha reemplazado $\varphi'(t^+)$ por $\varphi'(t)$ en el denominador del integrando porque las funciones convexas son diferenciables en casi todas partes. ∎

Ejemplo 1.1.58 Considérese la familia $\{C_\theta\}_{\theta\geq 1}$ dada por

$$C_\theta(u,v) = \exp\{-[(-\ln u)^\theta + (-\ln v)^\theta]^{1/\theta}\},$$

y cuyo generador es $\varphi_\theta(t) = (-\ln t)^\theta$. Usando la ecuación (1.27) obtenemos

$$\begin{aligned} \tau_C &= 1 + \frac{4}{\theta}\int_0^1 t\ln t dt \\ &= 1 - \frac{1}{\theta}. \end{aligned}$$

Ahora definimos la segunda medida de concordancia que nos interesa.

Definición 1.1.59 *Sean (X_1, Y_1), (X_2, Y_2), (X_3, Y_3) vectores aleatorios continuos independientes e idénticamente distribuidos, con función de distribución conjunta H, con marginales F, G, y cópula C. La medida ρ de Spearman está dada por la siguiente ecuación:*

$$\rho = \rho_{X,Y} = 3\{P[(X_1 - X_2)(Y_1 - Y_3) > 0] - P[(X_1 - X_2)(Y_1 - Y_3) < 0]\}, \tag{1.28}$$

es decir, la medida ρ de Spearman es proporcional a la probabilidad de concordancia menos la probabilidad de discordancia para las vectores (X_1, Y_1), (X_2, Y_3).

Nótese que el vector (X_2, Y_3) tiene función de distribución conjunta $F(x)G(y)$, entonces la cópula de (X_2, Y_3) es Π. De esta manera, tenemos el siguiente teorema.

Teorema 1.1.60 *Sean X, Y variables aleatorias continuas cuya cópula es C. Entonces la medida ρ de Spearman para X e Y está dada por*

$$\begin{aligned} \rho_{X,Y} = \rho_C &= 3Q(C,\Pi) \\ &= 12\int_{I^2} uv dC(u,v) - 3 \\ &= 12\int_{I^2} C(u,v) du dv - 3. \end{aligned}$$

Por último demostraremos que en efecto las medidas τ de Kendall y ρ de Spearman son medidas de concordancia.

Teorema 1.1.61 *Sean X, Y variables aleatorias continuas con cópula C, entonces $\tau_{X,Y}$ y $\rho_{X,Y}$ son medidas de concordancia.*

Demostración. Mostraremos que $\tau_{X,Y}$ satisface los 7 axiomas de la definición de medida de concordancia. El caso $\rho_{X,Y}$ es análogo. Tenemos que $\tau_{X,Y}$ existe porque X e Y son variables aleatorias continuas. Además, de la definición se sigue que $-1 \leq \tau_{X,Y} \leq 1$, $\tau_{X,X} = 1$, $\tau_{X,-X} = -1$. De esta manera, tenemos *1* y *2* de la definición de medida de concordancia.

Ahora para demostrar *3*, sean (X_1, Y_1), (X_2, Y_2) dos vectores con función de distribución conjunta H y marginales comunes F y G. Entonces

$$\begin{aligned}
\tau_{X,Y} &= P[(X_1 - X_2)(Y_1 - Y_2) > 0] - P[(X_1 - X_2)(Y_1 - Y_2) < 0] \\
&= P[(Y_1 - Y_2)(X_1 - X_2) > 0] - P[(Y_1 - Y_2)(X_1 - X_2) < 0] \\
&= \tau_{Y,X},
\end{aligned}$$

y se obtiene *3*. El axioma *4* se sigue del hecho $Q(\Pi, \Pi) = 0$. Mostraremos solo la segunda igualdad del axioma *5*, la primera se prueba de forma similar. Por Teorema 1.1.17 tenemos

$$C_{X,-Y}(u, v) = u - C_{X,Y}(u, 1 - v),$$

de donde se sigue que

$$\begin{aligned}
\int_{I^2} C_{X,-Y}(u, v) dC_{X,-Y}(u, v) &= -\int_{I^2} C_{X,-Y}(u, v) dC_{X,Y}(u, 1 - v) \\
&= \int_{I^2} C_{X,-Y}(u, 1 - v) dC_{X,Y}(u, v) \\
&= \frac{1}{2} - \int_{I^2} C_{X,Y}(u, v) dC_{X,Y}(u, v),
\end{aligned}$$

de donde

$$\begin{aligned}
\tau_{X,-Y} &= 4 \int_{I^2} C_{X,-Y}(u, v) dC_{X,-Y}(u, v) - 1 \\
&= 1 - 4 \int_{I^2} C_{X,Y}(u, v) dC_{X,Y}(u, v) \\
&= -\tau_{X,Y}.
\end{aligned}$$

Esto demuestra *5*. El axioma *6* se sigue de *2* del Corolario 1.1.55. Por último de la ecuación (1.2) se sigue que cualquier familia de cópulas es equicontinua, por lo tanto la convergencia $C_n \to C$ es uniforme, de donde obtenemos *7*. ■

1.2 Caminatas aleatorias y teoría de Wiener-Hopf

En esta sección, $X_1, X_2, \ldots$ denota una sucesión de variables aleatorias independientes con distribución común F no concentrada en semiejes y función característica ψ, con $E|X_i| < \infty$. En lo que sigue, $\mathbb{N}_0 = \mathbb{N} \bigcup \{0\}$.

Definición 1.2.1 *Definimos* $\{S_n\} = \{S_n, n \in \mathbb{N}_0\}$*:*

$$S_0 = 0, \;\; S_n = X_1 + \ldots + X_n, \; n \geq 1.$$

La sucesión $\{S_n\}$ *es llamada caminata aleatoria generada por* F*.*

Definición 1.2.2 *Para* n *fijo, definimos* $\{S_k^*, k = 0, \ldots n\}$ *por*

$$S_k^* = S_n - S_{n-k} = \sum_{j=1}^{k} X_{n-j+1}, \;\; k = 0, \ldots n,$$

la cual es llamada caminata dual de S_n*.*

Debido a que $(X_1, \ldots, X_n) \stackrel{d}{=} (X_n, \ldots, X_1)$, las distribuciones conjuntas de $(0, S_1, \ldots, S_n)$ y $(0, S_1^*, \ldots, S_n^*)$ son iguales. De aquí se sigue que

$$\begin{aligned} P(S_k < 0, k = 1, \ldots, n-1, S_n = 0) &= P(S_k^* < 0, k = 1, \ldots, n-1, S_n^* = 0) \\ &= P(S_n < S_{n-k}, k = 1, \ldots, n-1, S_n^* = 0) \\ &= P(S_k > 0, k = 1, \ldots, n-1, S_n = 0), \end{aligned} \tag{1.29}$$

y también, para cualquier $I \subset (0, \infty)$,

$$\begin{aligned} P(S_n > S_k, k = 0, \ldots, n-1, S_n \in I) &= P(S_k^* > 0, k = 1, \ldots, n, S_n^* \in I) \\ &= P(S_k > 0, k = 1, \ldots, n, S_n \in I) \end{aligned} \tag{1.30}$$

Definición 1.2.3 *Sean*

$$\tau_+ = \inf\{n \geq 1 : S_n > 0\},$$

con $\tau_+ = \infty$ *si* $S_n \leq 0$ *para toda* $n \in \mathbb{N}$*, y*

$$\tau_- = \inf\{n \geq 1 : S_n \leq 0\}.$$

con $\tau_- = \infty$ *si* $S_n > 0$ *para toda* $n \in \mathbb{N}$*. Las variables aleatorias* τ_+ *y* τ_- *son llamadas primer punto escalera ascendente (estricto) y primer punto escalera descendente (débil), respectivamente.*

Definición 1.2.4 *En el evento* $\{\tau_+ < \infty\}$ *definimos* S_{τ_+}*, la cual es llamada altura escalera ascendente de* S_n*. En forma similar, denotamos con* S_{τ_-} *la altura escalera descendente de* S_n*, definida en el evento* $\{\tau_- < \infty\}$*. Denotaremos la distribución de* S_{τ_+} *por* H^+ *con transformada de Fourier* $\widehat{H^+}$

Analogamente definimos los puntos escalera ascendente débil y descendente estricto mediante las ecuaciones

$$\tau_+^W := \inf\{n \geq 1 : S_n \geq 0\}, \;\; \tau_-^S := \inf\{n \geq 1 : S_n < 0\}.$$

Nótese que si tomamos la filtración $\{\mathcal{F}_n\}_{n\geq 0}$ definida por

$$\mathcal{F}_0 = \{\phi, \Omega\}, \;\; \mathcal{F}_k = \{\omega : (S_1(\omega), \ldots, S_n(\omega)) \in B, B \in \mathcal{B}(\mathbb{R})\}, \;\; k \geq 1,$$

entonces τ_+ y τ_- son tiempos de paro con respecto a esta filtración. De esta forma, si $E[\tau_+], E[\tau_-] < \infty$, la identidad de Wald [6] se aplica y

$$E[S_{\tau_+}] = E[\tau_+]E[X], \;\; E[S_{\tau_-}] = E[\tau_-]E[X].$$

Definición 1.2.5 *Sean las sucesiones* $\{\tau_+(n)\} = \{\tau_+(n), n \in \mathbb{N}_0\}$ *y* $\{\tau_-(n)\} = \{\tau_-(n), n \in \mathbb{N}_0\}$ *dadas por*

$$\tau_+(0) = 0, \quad \tau_+(1) = \tau_+, \quad \tau_+(n+1) = \inf\{j > \tau_+(n) : S_j > S_{\tau_+(n)}\},\, n > 1,$$

$$\tau_-(0) = 0, \quad \tau_-(1) = \tau_-, \quad \tau_-(n+1) = \inf\{j > \tau_-(n) : S_j \leq S_{\tau_-(n)}\},\, n > 1.$$

Las variables aleatorias $\tau_+(n)$ *y* $\tau_-(n)$ *son llamadas el n-ésimo punto escalera ascendente (estricto) y el n-ésimo punto escalera descendente (débil) de* S_n*, respectivamente.*

Definición 1.2.6 *Sobre el evento* $\{\tau_+(n) < \infty\}$ *definimos* $S_{\tau_+(n)}$*, el cual es llamado n-ésimo punto escalera ascendente (estricto) de* S_n*. Analogamente, definimos* $S_{\tau_-(n)}$ *sobre el evento* $\{\tau_-(n) < \infty\}$*, el cual es llamado n-ésimo punto escalera descendente (débil) de* S_n*.*

De las propiedades trayectoriales de S_n se sigue que la sucesión $\tau_+(1), \tau_+(2) - \tau_+(1), \ldots,$ es de variables aleatorias independientes e idénticamente distribuidas. De esta manera, la sucesión $\{\tau_+(n)\}_{n\geq 0}$ forma un proceso de renovación (ver apéndice para definición y resultados básicos). Analogamente, la sucesión $\{S_{\tau_+(n)}\}_{n\geq 0}$ es un proceso de renovación asociado a la función de distribución $H^+(x) = P(S_{\tau_+} \leq x)$, [16].

Definición 1.2.7 *Para la sucesión* $\{S_n\}$ *definimos,*

$$M_n = \max\{0, S_1, \ldots, S_n\}, \;\; M = \sup\{0, S_1, \ldots, \}.$$

Un interesante problema a estudiar es bajo que condiciones la variable aleatoria M es finita. El siguiente teorema da condiciones necesarias y suficientes para que ésto suceda.

Teorema 1.2.8 *Las siguientes afirmaciones son equivalentes*

1. $E(X) < 0$.
2. $M = \sup\{0, S_1, \dots\}$ *es finito con probabilidad 1.*
3. $H^+(\infty) < 1$.

Además, si $M < \infty$ *con probabilidad 1, se tiene*

$$G(x) = P(M \leq x) = \sum_{n=0}^{\infty}(1 - H^+(\infty))(H^+)^{*n}(x), \;\; x \geq 0. \tag{1.31}$$

En particular, si $\widehat{G}$ *denota la transformada de Laplace de* G*, entonces para* $\theta > 0$*,*

$$\widehat{G}(\theta) = \frac{1 - H^+(\infty)}{1 - \widehat{H^+}(i\theta)}. \tag{1.32}$$

Demostración. Supongamos que *1* es cierto. Sea $\{n_k\}$ tal que

$$M_{n_k} = S_{\tau_+(k)}$$

Como $M_n \to M$, $n \to \infty$, entonces $M_{n_k} \to M$, $k \to \infty$. De esta manera, si *2* no es cierto, entonces con probabilidad positiva la subsucesión $\{S_{n_k}\}$ dada por

$$S_{n_k} = M_{n_k},$$

converge a ∞, lo cual es una contradicción porque por la ley de grandes números se tiene que $\lim_{n\to\infty} S_n = -\infty$ con probabilidad 1. Por lo tanto, *2* debe cumplirse.

Ahora suponemos que *2* es cierto. Nótese que $M = S_\nu$, donde

$$\nu = \sup\{n \geq 0 : \tau_+(n) < \infty\}. \tag{1.33}$$

Nótese también que $\nu = \infty$ si y sólo si $\tau_+(n) < \infty$, para todo $n \geq 0$. De esta manera, si $M < \infty$ con probabilidad 1, entonces

$$\begin{aligned} P(\tau_+(n) < \infty, \forall n) &= P(\nu = \infty) \\ &= P(M = \infty) \\ &= 0. \end{aligned}$$

Por otro lado,

$$\begin{aligned} P(\tau_+(n) < \infty, \forall n) &= \lim_{m\to\infty} P(\tau_+(n) < \infty, 1 \leq n \leq m) \\ &= \lim_{m\to\infty} P(\tau_+(n) - \tau_+(n-1) < \infty, 1 \leq n \leq m) \\ &= \lim_{m\to\infty} [P(\tau_+ < \infty)]^m, \end{aligned}$$

donde en la última igualdad se uso que la sucesión $\{\tau_+(n) - \tau_+(n-1)\}_{n=1}^{\infty}$ es de variables aleatorias independientes e idénticamente distribuidas. Por lo tanto,

$$\lim_{m\to\infty} [P(\tau_+ < \infty)]^m = 0,$$

de donde necesariamente $0 < P(\tau_+ < \infty) < 1$, y se sigue *3*. Nótese que no se obtiene $P(\tau_+ < \infty) = 0$ porque implicaría que la distribución F está concentrada en el semieje negativo.

Para probar *3* implica *1*, supongamos que $P(\tau_+ < \infty) = H^+(\infty) < 1$. Sea

$$N = \begin{cases} \inf\{n : S_n = \sup_{j\geq 0} S_j\}, & \sup_{j\geq 0} S_j < \infty \\ \\ \infty, & \sup S_j = \infty. \end{cases}$$

De la ecuación (1.30) se sigue que

$$P\left(\sum_{k=j+1}^{n} X_k > 0, j = 0, \ldots, n-1\right) = P(S_j > 0, j = 1, \ldots n), \ \ n \geq 1,$$

de las propiedades trayectoriales de $\{S_n\}$ resulta

$$P\left(\sum_{k=n+1}^{j} X_k \leq 0, \forall j > n\right) = P(S_j \leq 0, \forall j \geq 0) = P(\tau_+ = \infty),$$

y de la definición de N se obtiene

$$P(N = 0) = P(S_j \leq S_0, \forall j > 0) = P(\tau_+ = \infty).$$

De todo lo anterior, tenemos,

$$\begin{aligned}
1 &\geq P(N < \infty) \\
&= P(N=0) + \sum_{n=1}^{\infty} P\left(\{S_j < S_n, j = 0, \ldots, n-1\} \bigcap \{S_j \leq S_n, \forall j > n\}\right) \\
&= P(\tau_+ = \infty) + \sum_{n=1}^{\infty} P\left(\left\{\sum_{k=j+1}^{n} X_k > 0, j = 0, \ldots, n-1\right\} \bigcap \left\{\sum_{k=n+1}^{j} X_k \leq 0, \forall j > n\right\}\right) \\
&= P(\tau_+ = \infty) + \sum_{n=1}^{\infty} P\left(\sum_{k=j+1}^{n} X_k > 0, j = 0, \ldots, n-1\right) P\left(\sum_{k=n+1}^{j} X_k \leq 0, \forall j > n\right) \\
&= P(\tau_+ = \infty) + \sum_{n=1}^{\infty} P(\tau_- > n) P(\tau_+ = \infty) \\
&= P(\tau_+ = \infty) \sum_{n=0}^{\infty} P(\tau_- > n) \\
&= P(\tau_+ = \infty) E(\tau_-).
\end{aligned}$$

Debido a que $P(\tau_+ = \infty) > 0$, de la desigualdad anterior obtenemos $E(\tau_-) < \infty$, además $\tau_- > 0$ casi seguramente, lo que implica $E(\tau_-) > 0$. Por otro lado, por la identidad de Wald,

$$E(S_{\tau_-}) = E(\tau_-)E(X). \tag{1.34}$$

Debido a que $S_{\tau_-} \leq 0$ y $P(S_{\tau_-} < 0) \geq P(X_1 < 0) > 0$ entonces $E(S_{\tau_-}) < 0$, por lo tanto, de la igualdad (1.34), $E(X) < 0$.

Para mostrar la última afirmación, sea ν como en (1.33). Nótese que

$$\{\nu = n\} = \{\tau_+(j) < \infty, j = 0, \ldots, n, \tau_+(n+1) = \infty\}, \quad n = 0, 1, \ldots,$$

de aquí

$$P(\nu = n) = [P(\tau_+ < \infty)]^n [1 - P(\tau_+ < \infty)],$$

es decir, ν tiene distribución geométrica de parámetro $p = P(\tau_+ < \infty) = H^+(\infty)$.

Por otro lado, para $n \geq 1$

$$\begin{aligned} P(S_{\tau_+(k)} - S_{\tau_+(k-1)} \leq x \mid \nu = n) &= \frac{P(S_{\tau_+(k)} - S_{\tau_+(k-1)} \leq x, \nu = n)}{P(\nu = n)} \\ &= \frac{P(S_{\tau_+(1)} \leq x)[H^+(\infty)]^{n-1}[1 - H^+(\infty)]}{P(\nu = n)} \\ &= \frac{H^+(x)}{H^+(\infty)}, \quad k \leq n. \end{aligned}$$

.

Por lo tanto, para $x \geq 0$

$$\begin{aligned} P(M \leq x) &= P(M \leq x, \nu = 0) + \sum_{n=1}^{\infty} P(M \leq x, \nu \neq 0) \\ &= P(\nu = 0) + \sum_{n=1}^{\infty} P\left(\sum_{k=1}^{\nu} \{S_{\tau_+(k)} - S_{\tau_+(k-1)}\} \leq x \middle| \nu = n \right) P(\nu = n) \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} (1 - H^+(\infty))(H^+)^{*n}(x). \end{aligned}$$

■

Ahora demostraremos que la función característica ψ de la variable aleatoria X es factorizable en términos de las funciones características de las distribuciones conjuntas de los puntos escaleras ascendente, descendente (estrictos) y la función generadora de probabilidades de (1.29).

Sea $A \subset \mathbb{R}$, con $A' = \mathbb{R} \setminus A$. Definimos $\tau^{A'}$ por

$$\tau^{A'} = \inf\{n \geq 1 : S_n \in A'\},$$

con $\tau^{A'} = \infty$ si $S_n \notin A'$ para todo $n \geq 1$. En el caso $\tau^{A'} < \infty$ consideramos $S_{\tau^{A'}}$. Denotamos por $H_n^{A'}$ la función de distribución conjunta de $(\tau^{A'}, S_{\tau^{A'}})$, es decir, $H_n^{A'}$ tiene medida de Lebesgue-Stieltjes definida por

$$H_n^{A'}\{I\} = \begin{cases} P(\tau^{A'} = n, S_{\tau^{A'}} \in I), & I \subset A', \\ & \\ 0, & I \subset A. \end{cases} \qquad n = 1, 2 \dots$$

También consideramos la medida K_n^A definida por

$$K_n^A\{I\} = \begin{cases} P(\tau^{A'} > n, S_n \in I), & I \subset A, \\ & \\ 0, & I \subset A', \end{cases} \qquad n = 1, 2 \dots$$

la cual es la probabilidad de que al tiempo n la caminata aleatoria se encuentre en I sin previas visitas a A'.

Considerando la posición de S_n en los tiempos $n = 1, 2, \dots$, obtenemos para $I \subset A'$

$$H_{n+1}^{A'}\{I\} = \int_A F(I - y) dK_n^A(y), \tag{1.35}$$

donde $F(I - y)$ denota la medida de Lebesgue-Stieltjes generada por F, evaluada en el conjunto $I - y$. En forma similar, para $I \subset A$

$$K_{n+1}^A\{I\} = \int_A F(I - y) dK_n^A(y).$$

Poniendo $K_0^A = \delta_0$ (medida de probabilidad concentrada en el origen) obtenemos que para cualquier $I \subset \mathbb{R}$,

$$H_{n+1}^{A'}\{I\} + K_{n+1}^A\{I\} = \int_A F(I - y) dK_n^A(y), \ \ n = 0, 1, \dots. \tag{1.36}$$

Ahora consideramos las cantidades

$$\chi^{A'}(s, \zeta) = \sum_{n=1}^{\infty} s^n \int_{A'} e^{i\zeta x} dH_n^{A'}(x), \ \ \gamma^A(s, \zeta) = \sum_{n=0}^{\infty} s^n \int_A e^{i\zeta x} dK_n^A(x),$$

para $|s| < 1$. Tomando transformadas de Fourier-Stieltjes en la relación (1.36), y usando que la transformada de Fourier de convolución es producto de las transformadas de Fourier, obtenemos

$$\begin{aligned} \chi_{n+1}^{A'}(\zeta) + \gamma_{n+1}^A(\zeta) &= \int_{A'} e^{i\zeta x} dH_{n+1}^{A'}(x) + \int_A e^{i\zeta x} dK_{n+1}^A(x) \\ &= \left(\int_A e^{i\zeta x} dK_n^A(x) \right) \left(\int e^{i\zeta x} dF(x) \right) \\ &= \gamma_n^A(\zeta) \psi(\zeta). \end{aligned}$$

Multiplicando por s^{n+1} y sumando sobre $n = 0, 1, \ldots$, obtenemos

$$\chi^{A'}(s,\zeta) + \gamma^A(s,\zeta) - 1 = s\gamma^A(s,\zeta)\psi(\zeta),$$

para $|s| < 1$. De esta manera, se establece la identidad básica de Wiener-Hopf

$$1 - \chi^{A'} = \gamma^A(1 - s\psi). \tag{1.37}$$

En particular, tomando $A' = (0, \infty)$, tenemos por definición que $\tau^{A'} = \tau_+$ y

$$H_n^{(0,\infty)}\{I\} = H_n\{I\} = \begin{cases} P(\tau_+ = n, S_{\tau_+} \in I), & I \subset (0,\infty), \\ \\ 0, & I \subset (-\infty, 0], \end{cases} \qquad n = 1, 2 \ldots,$$

con $H_0 = 0$. De esta manera,

$$\chi^{A'}(s,\zeta) = \chi(s,\zeta) := E[s^{\tau_+}e^{\imath\zeta S_{\tau_+}}] = \sum_{n=1}^{\infty} s^n \int_{(0,\infty)} e^{\imath\zeta x} dH_n(x).$$

En forma similar, tomando $A' = (-\infty, 0)$, tenemos

$$H_n^{(-\infty,0)}\{I\} = H_n^-\{I\} = \begin{cases} P(\tau_-^S = n, S_{\tau_-^S} \in I), & I \subset (-\infty,0), \\ \\ 0, & I \subset [0, \infty), \end{cases} \qquad n = 1, 2 \ldots$$

con $H_0^- = 0$, y

$$\chi^{A'}(s,\zeta) = \chi^-(s,\zeta) := E[s^{\tau_-^S}e^{\imath\zeta S_{\tau_-^S}}] = \sum_{n=1}^{\infty} s^n \int_{(-\infty,0)} e^{\imath\zeta x} dH_n^-(x).$$

Sea f_n definida por

$$f_n = P(S_k < 0, k = 1, \ldots, n-1, S_n = 0), \ \ n \geq 1.$$

Nótese que $f_n = 0$, para todo $n \geq 1$ si F es continua. Denotemos por $f(s)$ la función generadora de probabilidades de $\{f_n\}$:

$$f(s) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n s^n.$$

Para $\chi(s,\zeta)$, $\chi^-(s,\zeta)$ y $f(s)$ tenemos el siguiente lema.

Lema 1.2.9 *Para* $|s| < 1$

$$\log \frac{1}{1 - \chi(s,\zeta)} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{s^n}{n} \int_{0+}^{\infty} e^{i\zeta x} dF^{*n}(x), \tag{1.38}$$

$$\log \frac{1}{1 - \chi^-(s,\zeta)} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{s^n}{n} \int_{\infty}^{0-} e^{i\zeta x} dF^{*n}(x), \tag{1.39}$$

$$\log \frac{1}{1 - f(s)} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{s^n}{n} P(S_n = 0). \tag{1.40}$$

Demostración. Primero demostraremos que para la sucesión $\{R_n, n \in \mathbb{N}_0\}$ dada por

$$R_n\{I\} = \begin{cases} P(\tau_+^W = n, S_{\tau_+^W} \in I), & I \subset [0, \infty) \\ & \qquad\qquad n = 1, 2, \ldots, \\ 0, & I \subset (-\infty, 0). \end{cases}$$

con $R_0 \equiv 0$ y transformada ρ, se cumple:

$$\log \frac{1}{1 - \rho(s, \zeta)} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{s^n}{n} \int_{0-}^{\infty} e^{i\zeta x} dF^{*n}, \quad |s| < 1. \tag{1.41}$$

Tomando $A' = [0, \infty)$ en (1.37) tenemos

$$1 - s\psi(\zeta) = \frac{1 - \rho(s, \zeta)}{\gamma(s, \zeta)},$$

donde

$$\gamma(s, \zeta) - 1 = \sum_{n=1}^{\infty} s^n \int_{(-\infty, 0)} e^{i\zeta x} dK_n(x),$$

con

$$K_n(x) = P(S_1 < 0, S_2 < 0, \ldots, S_{n-1} < 0, S_n \leq x), \;\; x < 0, \;\; n = 1, 2 \ldots$$

Aplicando logaritmos, obtenemos para $|s| < 1$:

$$\frac{1}{\log [1 - s\psi(\zeta)]} = \frac{1}{\log [1 - \rho(s, \zeta)]} + \log [\gamma(s, \zeta)],$$

y expandiendo en series obtenemos

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{s^n}{n} [\psi(\zeta)]^n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{[\rho(s, \zeta)]^n}{n} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n} [\gamma(s, \zeta) - 1]^n. \tag{1.42}$$

Ahora bien, para s fijo, $|s| < 1$, ρ y $(\gamma - 1)$ son funciones características de las medidas acotadas $\overline{\mu} = \sum s^k R_k$, $\widetilde{\mu} = \sum s^i K_i$ con soporte en $[0, \infty)$ y $(-\infty, 0)$ respectivamente. De esta manera, $\mu = \sum \overline{\mu}^{*n}/n$ tiene soporte en $[0, \infty)$ y $\mu' = \sum (-1)^n \widetilde{\mu}^{*n}/n$ tiene soporte en $(-\infty, 0)$. Sea $H = \sum s^n F^{*n}/n$. Entonces, escribimos (1.42) en la forma

$$\widehat{H} = \widehat{\mu} + \widehat{\mu'},$$

donde $\widehat{H}$, $\widehat{\mu}$ y $\widehat{\mu}'$ son las transformadas de H, μ y μ', respectivamente. De aquí H coincide con μ sobre $[0, \infty)$ y de esta forma se establece

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{s^n}{n} \int_{0-}^{\infty} e^{i\zeta x} dF^{*n} = \log \frac{1}{1 - \rho(s, \zeta)}.$$

La prueba de (1.38) y (1.39) es similar a la anterior.

Ahora demostraremos (1.40). De (1.41) se sigue

$$H\{0\} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{s^n}{n} F^{*n}\{0\} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{s^n}{n} P(S_n = 0).$$

Por otro lado

$$\overline{\mu}\{0\} = \sum_{n=1}^{\infty} s^n R_n\{0\} = \sum_{n=1}^{\infty} s^n f_n = f(s),$$

y usando inducción resulta

$$\overline{\mu}^{*n}\{0\} = [f(s)]^n.$$

Por lo tanto,

$$H\{0\} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\overline{\mu}^{*n}\{0\}}{n} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{[f(s)]^n}{n} = \log \frac{1}{1 - f(s)}.$$

■

El siguiente es el celebre teorema de Wiener-Hopf, el cual expresa la función característica de una variable aleatoria X arbitraria en términos de la función generadora de probabilidades de que la caminata aleatoria correspondiente regrese al 0 a través de valores negativos y las transformadas de dos distribuciones concentradas en los dos semiejes.

Teorema 1.2.10 *(Factorización de Wiener-Hopf). Para $|s| \leq 1$, se tiene,*

$$1 - s\psi(\zeta) = (1 - f(s))(1 - \chi(s, \zeta))(1 - \chi^{-}(s, \zeta)). \tag{1.43}$$

Ésta representación determina unicamente a χ y χ^{-}.

Demostración. Por el Lema 1.2.9, tenemos para $|s| < 1$

$$\begin{aligned}
\log \frac{1}{1 - f(s)} + \log \frac{1}{1 - \chi(s, \zeta)} + \log \frac{1}{1 - \chi^{-}(s, \zeta)} &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{s^n}{n} \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\zeta x} dF^{*n}(x) \\
&= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{s^n}{n} [\psi(\zeta)]^n \\
&= \log \frac{1}{1 - s\psi(\zeta)},
\end{aligned}$$

de donde se sigue (1.43). ■

Nótese que si F es continua, entonces $f_n = 0$ para todo $n \geq 1$, lo que implica que $\tau_{-} = \tau_{-}^{S}$, c.s. De esta manera, (1.43) se puede escribir en la forma

$$1 - s\psi(\zeta) = (1 - E[s^{\tau_{+}} e^{i\zeta S_{\tau_{+}}}])(1 - E[s^{\tau_{-}} e^{i\zeta S_{\tau_{-}}}]). \tag{1.44}$$

Además si τ es la función generadora de probabilidades de la variable aleatoria τ_+, entonces de (1.38), con $\zeta = 0$ obtenemos

$$\log \frac{1}{1-\tau(s)} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{s^n}{n} P(S_n > 0). \tag{1.45}$$

De aquí, haciendo $s \to 1$ obtenemos que τ_+ es defectuosa si y sólo si

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} P(S_n > 0) < \infty.$$

Por último, calcularemos las transformadas de M_n y M (cuando ésta última sea finita).

Teorema 1.2.11 *Sea $\omega_n(\zeta) = E[e^{i\zeta M_n}]$ la función característica de M_n, y $\eta(\zeta) = E[e^{i\zeta M}]$ la función característica de M. Entonces, para $|s| < 1$, $\zeta \in \mathbb{R}$ se tiene*

$$\sum_{n=0}^{\infty} s^n \omega_n(\zeta) = \frac{1}{1-s} \exp\left\{ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{s^n}{n} \int_{0+}^{\infty} (e^{i\zeta x} - 1) dF^{*n}(x) \right\} \tag{1.46}$$

Si $M < \infty$ casi seguramente, entonces

$$\eta(\zeta) = \exp\left\{ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \int_{0+}^{\infty} (e^{i\zeta x} - 1) dF^{*n}(x) \right\}. \tag{1.47}$$

Demostración. Sea $\{L_n, n \in \mathbb{N}_0\}$ dada por

$$L_0 = 0, \;\; L_n = \min\{r \geq 0, S_r = \max_{0 \leq k \leq n} S_k\}.$$

Tenemos que $M_v \in I$, $I \subset [0, \infty)$ si y sólo si (n, S_n) es un punto escalera ascendente para algún $n \in \{0, \ldots, v\}$, $S_n \in I$, y $S_k \leq S_n$ para $k = n+1, \ldots, v$. De aquí, por las propiedades trayectoriales de $\{S_n\}$ se sigue que

$$P(M_v \in I) = \sum_{k=0}^{v} a_{v-k}(I) b_k, \;\; I \subset [0, \infty), \tag{1.48}$$

donde $a_n(I) = P(L_n = n, S_n \in I)$, $b_n = P(\tau_+ > n)$, $n = 0, 1, \ldots v$.

Veamos que la función generadora de probabilidades de b_n es $g(s) = (1-\tau(s))/(1-s)$. En efecto,

$$\begin{aligned}
(1-s)g(s) &= (1-s)\sum_{n=0}^{\infty} s^n b_n \\
&= \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{k=n+1}^{\infty}(s^n - s^{n+1})P(\tau_+ = k) \\
&= \sum_{k=1}^{\infty} P(\tau_+ = k)\sum_{n=0}^{k-1}(s^n - s^{n+1}) \\
&= \sum_{k=1}^{\infty} P(\tau_+ = k)(1-s^k) \\
&= 1-\tau(s).
\end{aligned}$$

Entonces,

$$\begin{aligned}
\frac{1}{1-s}\exp\left\{-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{s^n}{n}\int_{0+}^{\infty} dF^{*n}(x)\right\} &= \exp\left\{\log\frac{1}{1-s} - \sum_{n=1}^{\infty}\frac{s^n}{n}P(S_n > 0)\right\} \\
&= \exp\left\{\log\frac{1-\tau(s)}{1-s}\right\} \\
&= g(s),
\end{aligned}$$

donde en la segunda igualdad usamos (1.45).

Ahora bien, tomando $A' = (-\infty, 0]$ en (1.37), obtenemos

$$1 - s\psi(\zeta) = \frac{1-\chi^{A'}(s,\zeta)}{\gamma^A(s,\zeta)},$$

donde por definición

$$\gamma^A(s,\zeta) = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} s^n \int_{(0,\infty)} e^{i\zeta x} dK_n^A(x),$$

con

$$K_n^A(x) = P(S_k > 0, k = 1,\ldots,n, S_n \leq x), \;\; x > 0, \;\; n = 1, 2, \ldots.$$

Usando la unicidad de la factorización de Wiener-Hopf se sigue

$$\frac{1}{\gamma^A(s,\zeta)} = 1 - \chi(s,\zeta),$$

de donde,

$$\gamma^A(s,\zeta) = \exp\left\{\sum_{n=1}^{\infty}\frac{s^n}{n}\int_{0+}^{\infty} e^{i\zeta x} dF^{*n}(x)\right\}.$$

Por otro lado, debido a (1.30),

$$\begin{aligned} a_n(x) : &= P(S_n > S_k, k = 0, \ldots, n-1, S_n \leq x) \\ &= P(S_k > 0, k = 1, \ldots, n, S_n \leq x) \\ &= K_n^A(x). \end{aligned}$$

De aquí,

$$\sum_{n=0}^{\infty} s^n \int_0^{\infty} e^{i\zeta x} da_n(x) = \exp\left\{ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{s^n}{n} \int_{0+}^{\infty} e^{i\zeta x} dF^{*n}(x) \right\}. \tag{1.49}$$

Por lo tanto, usando (1.48),

$$\begin{aligned} \sum_{n=0}^{\infty} s^n \omega_n(\zeta) &= \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{n} s^n b_k \int_0^{\infty} e^{i\zeta x} da_{n-k}(x) \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} s^k b_k \sum_{n=0}^{\infty} s^n \int_0^{\infty} e^{i\zeta x} da_n(x) \\ &= g(s) \sum_{n=0}^{\infty} s^n \int_0^{\infty} e^{i\zeta x} da_n(x) \\ &= \frac{1}{1-s} \exp\left\{ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{s^n}{n} \int_{0+}^{\infty} (e^{i\zeta x} - 1) dF^{*n}(x) \right\}. \end{aligned}$$

Por último, supongamos que $M < \infty$. Debido a que

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} P(S_n > 0) < \infty,$$

el teorema de convergencia dominada nos permite hacer $s \to 1$ y obtener

$$\begin{aligned} 1 - \widehat{H^+}(\zeta) &= 1 - \lim_{s \to 1} E[s^{\tau_+} e^{i\zeta S_{\tau_+}}] \\ &= 1 - \chi(1, \zeta) \\ &= \exp\left\{ - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \int_{0+}^{\infty} e^{i\zeta x} dF^{*n}(x) \right\}, \end{aligned}$$

donde en la última igualdad se usa (1.38). Además, $H^+(\infty) = \widehat{H^+}(0)$ y la igualdad anterior implican,

$$1 - H^+(\infty) = 1 - \widehat{H^+}(0) = \exp\left\{ - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \int_{0+}^{\infty} dF^{*n}(x) \right\}.$$

Por otro lado, $\widehat{H^+}(\zeta)$ cumple $|\widehat{H^+}(\zeta)| \leq P(S_{\tau_+} < \infty) < 1$, para todo ζ. De esta manera, de (1.31) se sigue

$$\begin{aligned}
\eta(\zeta) &= \sum_{n=0}^{\infty}[1 - H^+(\infty)[\widehat{H^+}(\zeta)]^n \\
&= \frac{1 - \widehat{H^+}(0)}{1 - \widehat{H^+}(\zeta)} \\
&= \exp\left\{\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}\int_{0+}^{\infty}(e^{i\zeta x} - 1)dF^{*n}(x)\right\},
\end{aligned}$$

la cual es (1.47). ■

1.3 Procesos de Riesgo

El proceso de Riesgo es un proceso estocástico de la Matemática Actuarial que describe la evolución en el tiempo del capital de una compañía aseguradora expuesta a reclamaciones aleatorias. Al tiempo $t = 0$, la compañía dispone de un capital inicial $u \geq 0$. En tiempos positivos ésta recibe un ingreso de $c \geq 0$ unidades por unidad de tiempo, proveniente de las primas que aportan los asegurados. También recibe reclamaciones, con tiempos entre reclamaciones denotados por $T_1, T_2, \ldots$, los cuales también son variables aleatorias no negativas, independientes e idénticamente distribuidas. El número de reclamaciones hasta el tiempo t es $N(t) := \sup\{n : \sum_{k=1}^{n} T_k \leq t\}$, el cual cumple la relación $N(t) = n$ si y sólo si $T_n \leq t < T_{n+1}$. Sean Z_1, Z_2, $\ldots$ los montos de tales reclamaciones, los cuales son variables aleatorias no negativas, independientes e idénticamente distribuidas. Así, el capital de la compañía al tiempo t está dado por

$$R(t) := u + ct - \sum_{k=1}^{N(t)} Z_k, \tag{1.50}$$

(con la convención de que $\sum\limits_{k=1}^{0} Z_k = 0$). A la constante c se le llama *prima de riesgo*. El proceso $\{R(t), t \geq 0\}$ es llamado *proceso de riesgo*. En general, para este tipo de procesos interesa el evento ruina, es decir, el valor t que hace $R(t) < 0$, matematicamente,

$$\tau(u) := \inf\{t \geq 0 : R(t) < 0\}, \tag{1.51}$$

si lo anterior no sucede, entonces $\tau(u) = \infty$. Caso contrario, se calcula

$$\Psi(u) = P(\tau(u) < \infty),$$

la cual es conocida como la *probabilidad de ruina* del proceso de riesgo $R(t)$. No hay fórmulas explícitas para Ψ en la mayoría de los casos. También

$$\Psi(u, x) = P(\tau(u) \leq x),$$

llamada *probabilidad de ruina en horizonte finito*. Nótese

$$\Psi(u, x) \longrightarrow \Psi(u), \text{ cuando } x \to \infty.$$

Es usual suponer independencia entre las variables T_i y Z_i. Cuando esto sucede, la ecuación (1.50) es conocida como modelo Sparre-Andersen. En general, se supone que las reclamaciones llegan de acuerdo a un proceso de renovación. En lo que sigue la distribución común de los tiempos entre reclamaciones $\{T_i, i \in \mathbb{N}_0\}$ con $T_0 = 0$ será denotada por F_T, mientras que la de los tamaños de las reclamaciones $\{Z_i, i \in \mathbb{N}\}$ se denotará por F_Z.

Sea R_n la reserva de riesgo después del pago de la n-ésima reclamación. Sea la reserva inicial $R_0 = u$. Definimos

$$\tau^*(u) := \inf\{n : R_n < 0\},$$

el cual es el tiempo de ruina para el proceso $\{R_n, n \in \mathbb{N}_0\}$. Ahora nótese que para $n \geq 0$ se tiene

$$\begin{aligned} R_{n+1} &= R_n + cT_{n+1} - Z_{n+1} \\ &= u - \sum_{k=1}^{n+1}(Z_k - cT_k). \end{aligned}$$

Sea $\{X_n, n \in \mathbb{N}\}$ dada por

$$X_n = Z_n - cT_n,$$

la cual será llamada *variable genérica* y puede ser interpretada como la pérdida entre la $(n-1)$-ésima y la n-ésima reclamación. La caminata aleatoria $\{S_n, n \in \mathbb{N}_0\}$ que nos interesa es la generada por la sucesión $\{X_n, n \in \mathbb{N}\}$. De esta forma, podemos escribir a R_n como:

$$R_n = u - S_n.$$

Supondremos que $E(X) = E(Z) - cE(T) < 0$, porque en otro caso la compañía se va a la ruina con probabilidad uno ([16]). Nótese que $\tau^*(u)$ se puede reescribir en términos de la caminata aleatoria $\{S_n\}$, a saber,

$$\tau^*(u) = \inf\{n : u < S_n\}.$$

Nótese también que $\tau(u) = \sum_{n=1}^{\tau^*(u)} T_n$. Además, $\tau^*(0) = \tau_+$, primer punto escalera ascendente de S_n, y

$$\{n < \tau^*(u) < \infty\} = \{M_n \leq u < M\},$$

donde $M_n = \max\{0, S_1, \ldots, S_n\}$, $M = \sup\{0, S_1, \ldots, \}$. La expresión anterior implica que la ruina ocurrirá en *tiempo finito* después de la n-ésima reclamación si y solamente si M_n no excede u pero M si lo hace. De aquí

$$\begin{aligned} P(n < \tau^*(u) < \infty) &= P(M_n \leq u < M) \\ &= 1 - P\left(\{M_n > u\} \bigcup \{M \leq u\}\right) \\ &= P(M_n \leq u) - P(M \leq u) \\ &= G_n(u) - G(u). \end{aligned}$$

En particular

$$\Psi(u) = P(M > u).$$

Capítulo 2

Aplicación de la teoría de Wiener-Hopf a modelos de dependencia en teoría de Riesgo

2.1 El uso de cópulas en teoría de Riesgo

Sean (Z, T) y $X = Z - cT$ como en el capítulo 1. En el modelo que vamos a considerar en esta tesis supondremos que la función de distribución conjunta $F_{Z,T}$ tiene densidad bivariada $f_{Z,T}$. Como antes, ψ será la función caracteristica de X, esto es

$$\psi(\zeta) = \int_0^\infty \int_0^\infty e^{i\zeta(z-ct)} f_{Z,T}(z,t) dz dt, \ \ \zeta \in \mathbb{R}.$$

En caso que exista se denotará por $\widehat{F}_X$ la transformada de Laplace de X, es decir,

$$\widehat{F}_X(\theta) = \psi(i\theta) = \int_0^\infty \int_0^\infty e^{-\theta(z-ct)} f_{Z,T}(z,t) dz dt.$$

En la misma forma, $\widehat{F}_Z$ y $\widehat{F}_T$ denotan las transformadas de Laplace de f_Z y f_T, respectivamente.

Definición 2.1.1 *Sean F función de distribución y $\widehat{F}$ su transformada de Laplace. Sean*

$$\sigma_F^l = \inf\{\theta : \widehat{F}(\theta) < \infty\}, \ \ \sigma_F^r = \sup\{\theta : \widehat{F}(\theta) < \infty\}.$$

Entonces, σ_F^l y σ_F^r son llamadas abscisa izquierda y derecha de convergencia, respectivamente.

De esta manera, $\widehat{F}(\theta)$ es finita para $\theta \in (\sigma_F^l, \sigma_F^r)$. Si $\sigma_F^l < 0$ entonces F es llamada *super-exponencial*. Recordemos que F está acotada exponencialmente en su cola derecha si existen $\gamma, M > 0$, tales que

$$1 - F(t) \leq M e^{-\gamma t}, \ \ t \geq 0.$$

En [23] (cap. 3) se puede ver que: F está acotada exponencialmente en su cola derecha si y sólo si $\widehat{F}$ es finita en una vecindad a la izquierda del origen. Lo anterior nos dice que F está acotada exponencialmente en su cola derecha si y sólo si F es super-exponencial.

En lo que sigue, supondremos que Z y T son variables aleatorias con funciones de distribución super-exponenciales. Se escribirá $\sigma_F^l = -\sigma_F = -\sigma_Y$ para la abscisa izquierda de convergencia de la variable aleatoria Y con función de distribución F. Debido a que $T \geq 0$, entonces $X \leq Z$, luego $-\sigma_X \leq -\sigma_Z \leq 0$, esto quiere decir que tamaños de reclamaciones con función de distribución super-exponencial resultan en variables aleatorias genéricas con función de distribución super-exponencial.

El siguiente teorema muestra la relación entre la cópula asociada a (Z,T) y las transformadas $\widehat{F}_X$, $\widehat{F}_Z$, $\widehat{F}_T$, permitiendo introducir dependencia para (Z,T) a través de cópulas.

Teorema 2.1.2 *Suponemos que la función de distribución conjunta $F_{Z,T}$ tiene densidad $f_{Z,T}$. Sea C la cópula asociada a (Z,T). Entonces, para cada $\theta > -\sigma_Z$ tenemos*

$$\begin{aligned}\widehat{F}_X(\theta) - \widehat{F}_Z(\theta) - \widehat{F}_T(-c\theta) + 1 &= -c\theta^2 \int_0^1 \int_0^1 e^{-\theta F_Z^{-1}(u) + c\theta F_T^{-1}(v)} (1 - u - v \\ &\quad + C(u,v)) dF_Z^{-1}(u) dF_T^{-1}(v). \end{aligned} \tag{2.1}$$

Demostración. Por el Teorema 1.1.14 (teorema de Sklar), $F_{Z,T}(x,y) = C(F_Z(x), F_T(y))$. Tenemos

$$1 - F_Z(z) - F_T(t) + F_{Z,T}(z,t) = \int_t^\infty \int_z^\infty f_{Z,T}(x,y)dxdy. \tag{2.2}$$

De esta manera, sustituyendo $u = F_Z(z)$, $v = F_T(t)$, obtenemos

$$\begin{aligned}
&-c\theta^2 \int_0^1 \int_0^1 e^{-\theta F_Z^{-1}(u) + c\theta F_T^{-1}(v)} (1 - u - v + C(u,v)) dF_Z^{-1}(u) dF_T^{-1}(v) \\
&= -c\theta^2 \int_0^\infty \int_0^\infty e^{-\theta z + c\theta t} (1 - F_Z(z) - F_T(t) + F_{Z,T}(z,t)) dzdt \\
&= -c\theta^2 \int_0^\infty \int_0^\infty e^{-\theta z + c\theta t} \left(\int_t^\infty \int_z^\infty f_{Z,T}(x,y)dxdy \right) dzdt \\
&= -c\theta^2 \int_0^\infty \int_0^\infty \int_0^y \int_0^x e^{-\theta z + c\theta t} f_{Z,T}(x,y) dzdtdxdy \\
&= \int_0^\infty \int_0^\infty (e^{-\theta x} - 1)(e^{c\theta y} - 1) f_{Z,T}(x,y)dxdy \\
&= \widehat{F}_X(\theta) - \widehat{F}_Z(\theta) - \widehat{F}_T(-c\theta) + 1
\end{aligned}$$

donde en la tercera igualdad aplicamos (2.2), y en la cuarta se usó el teorema de Fubini. ∎

En forma análoga se puede obtener la fórmula

$$\widehat{F}_X(\theta) = \widehat{F}_Z(\theta)\widehat{F}_T(-c\theta) - c\theta^2 \int_0^1 \int_0^1 e^{-\theta F_Z^{-1}(u) + c\theta F_T^{-1}(v)} (C(u,v) - uv) dF_Z^{-1}(u) dF_T^{-1}(v). \tag{2.3}$$

Ejemplo 2.1.3 Supongamos que Z y T son independientes. Para este caso, denotaremos por F_I la función de distribución de $X = Z - cT$. Supongamos que $\sigma_Z, \sigma_T > 0$. Tenemos que $\widehat{F}_Z(\theta)$ converge para $\theta > -\sigma_Z$ y $\widehat{F}_T(-c\theta)$ converge para $-c\theta > -\sigma_T$. La cópula asociada a (Z, T) es $\Pi(u, v) = uv$, entonces por la fórmula (2.3):

$$\widehat{F}_I(\theta) = \widehat{F}_Z(\theta)\widehat{F}_T(-c\theta), \;\; -\sigma_Z < \theta < \frac{1}{c}\sigma_T.$$

De aquí se sigue que $\sigma_{F_I} = \sigma_Z$.

En el sentido del orden $C_1 \prec C_2$ definido en el Capítulo 1, la máxima dependencia positiva posible entre Z y T se alcanza con la cópula $M(u, v) = \min(u, v)$. Sea F_M la función de distribución de X en este caso. La transformada de Laplace de F_M está dada por:

$$\widehat{F}_M(\theta) = \int_0^\infty e^{-\theta(z - cF_T^{-1}(F_Z(z)))} f_Z(z)dz. \tag{2.4}$$

En efecto, haciendo $F_Z(z) = u$, se tiene que

$$\begin{aligned}
\int_0^\infty e^{-\theta(z - cF_T^{-1}(F_Z(z)))} f_Z(z)dz &= \int_0^1 e^{-\theta(F_Z^{-1}(u) - cF_T^{-1}(u))} du \\
&= \int_0^1 \int_0^1 e^{-\theta(F_Z^{-1}(u) - cF_T^{-1}(v))} dM(u, v) \\
&= \int_0^\infty \int_0^\infty e^{-\theta(z - ct)} dF_{Z,T}(z, t) \\
&= \widehat{F}_M(\theta),
\end{aligned}$$

donde en la segunda igualdad se usó la ecuación (1.23). En forma análoga, la dependencia negativa más fuerte posible entre Z y T se logra por la cópula $W(u, v) = \max(u + v - 1, 0)$. Usando (1.24), en forma similar a (2.4) se puede mostrar

$$\widehat{F}_W(\theta) = \int_0^\infty e^{-\theta(z - cF_T^{-1}(1 - F_Z(z)))} f_Z(z)dz = \int_0^1 e^{-\theta(F_Z^{-1}(v) - cF_T^{-1}(1 - v))} dv. \tag{2.5}$$

Ejemplo 2.1.4 Supóngase que Z y T tienen distribución exponencial de parámetro λ_1 y λ_2 respectivamente. Entonces por las ecuaciones (2.4) y (2.5) se tiene

$$\begin{aligned}
\widehat{F}_M(\theta) &= \int_0^\infty e^{-\theta\left(1 - c\frac{\lambda_1}{\lambda_2}\right)z} \lambda_1 e^{-\lambda_1 z} dz \\
&= \frac{\lambda_1}{\lambda_1 + \theta\left(1 - c\frac{\lambda_1}{\lambda_2}\right)}, \quad \theta\left(1 - c\frac{\lambda_1}{\lambda_2}\right) + \lambda_1 > 0, \\
\widehat{F}_W(\theta) &= \int_0^1 e^{-\theta\left(-\frac{1}{\lambda_1}\ln(1-v) + c\frac{1}{\lambda_2}\ln v\right)} dv \\
&= \int_0^1 (1 - v)^{\frac{\theta}{\lambda_1}} + v^{-\frac{c}{\lambda_2}} dv \\
&= B\left(1 + \frac{\theta}{\lambda_1}, 1 - \frac{c\theta}{\lambda_2}\right), \;\; -\lambda_1 < \theta < c\lambda_2,
\end{aligned}$$

donde $B(a,b)$ es la función beta de parámetros a y b.

Si Z y T tienen distribución uniforme en el intervalo $(0,\beta_1)$ y $(0,\beta_2)$ respectivamente, entonces usando de nuevo las ecuaciones (2.4) y (2.5) resulta

$$\begin{aligned}
\widehat{F}_M(\theta) &= \frac{1}{\beta_1}\int_0^{\beta_1} e^{-\theta\left(1-c\frac{\beta_2}{\beta_1}\right)z}dz \\
&= \frac{1-e^{\theta(\beta_1-c\beta_2)}}{\beta_1-c\beta_2}, \\
\widehat{F}_W(\theta) &= \int_0^1 e^{-\theta(\beta_1 v-c\beta_2(1-v))}dv \\
&= e^{c\beta_2\theta}\int_0^1 e^{-\theta(\beta_1+c\beta_2)v}dv \\
&= \frac{e^{c\beta_2\theta}-e^{-\beta_1\theta}}{\theta(\beta_1+c\beta_2)}.
\end{aligned}$$

Por último, debido a que cualquier cópula $C(u,v)$ cumple

$$C_W(u,v) \leq C(u,v) \leq C_M(u,v),$$

entonces por la fórmula (2.1) se sigue que para marginales F_Z y F_T fijos,

$$\widehat{F}_M(\theta) \leq \widehat{F}_C(\theta) \leq \widehat{F}_W(\theta),$$

para aquellos valores de θ donde las funciones anteriores esten definidas.

2.2 Tiempo de ruina en horizonte infinito

De ahora en adelante usaremos la notación

$$B(s) := \sum_{n=1}^{\infty}\frac{s^n}{n}P(S_n>0), \quad s \geq 0. \tag{2.6}$$

En el capítulo 1 se mostró que si $E(X)<0$ entonces $B=B(1)<\infty$.

Recordemos que el problema de ruina y la caminata aleatoria están relacionados por la ecuación

$$P(\tau(u)<\infty) = P(M>u) = 1-G(u).$$

De la ecuación (1.44) con $s=1$, $\zeta = i\theta$ se sigue

$$1-\widehat{F}_X(\theta) = (1-E[e^{-\theta S_{\tau_+}}])(1-E[e^{-\theta S_{\tau_-}}]).$$

Entonces la abscisa de convergencia de $\widehat{F}_X(\theta)$ es la misma que la de $E[e^{-\theta S_{\tau_+}}]$ y por lo tanto también la misma que la de la distribución G. De aquí, $\sigma_F = \sigma_G$.

Ahora supongamos que existe un coeficiente de ajuste $R>0$ para el cual $E[e^{RS_{\tau_+}}]=1$. La factorización de Wiener-Hopf implica $\widehat{F}_X(-R)=1$. La condición anterior es conocida como la condición de Cramer. Para este coeficiente de ajuste tenemos el siguiente teorema

Teorema 2.2.1 *Sea $R > 0$ que cumple $E[e^{RS_{\tau_+}}] = 1$. Entonces podemos expresar la probabilidad de ruina en términos de la caminata aleatoria correspondiente:*

$$P(\tau(u) < \infty) \sim \frac{e^{-B}}{RE[S_{\tau_+}e^{RS_{\tau_+}}]}e^{-Ru}, \;\; u \to \infty. \tag{2.7}$$

Demostración. Del Teorema 1.2.11 y de (1.38) se obtiene para $\theta > 0$,

$$\begin{aligned}
\int_0^\infty e^{-\theta x} dG(x) &= \exp\left\{-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}\int_{0+}^{\infty}(1-e^{-\theta x})dF^{*n}(x)\right\} \\
&= \exp\left\{-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}P(S_n > 0)\right\}\exp\left\{\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}\int_{0+}^{\infty}e^{-\theta x}dF^{*n}(x)\right\} \\
&= \frac{e^{-B}}{1-E[e^{-\theta S_{\tau_+}}]}.
\end{aligned} \tag{2.8}$$

Comparando con (1.32), obtenemos $1 - H^+(\infty) = e^{-B}$. Poniendo $\beta = \theta + R$ en la ecuación anterior resulta

$$\begin{aligned}
\int_0^\infty e^{-\beta x} d\left(\int_0^x e^{Ry}dG(y)\right) &= \int_0^\infty e^{-\theta x}dG(x) \\
&= \frac{e^{-B}}{1-E[e^{-\theta S_{\tau_+}}]} \\
&= \frac{e^{-B}}{1-E[e^{-\beta \widetilde{S}_{\tau_+}}]},
\end{aligned}$$

donde $P(\widetilde{S}_{\tau_+} \leq x) = \int_0^x e^{Ry}dH^+(y) = F_R(x)$. De aquí se sigue que la función $e^B H_1(x)$ definida por

$$e^B H_1(x) = \int_0^x e^{Ry}dG(y),$$

es función de renovación (Teorema 4.1.5). En forma exacta

$$e^B H_1(u) = \sum_{n=0}^{\infty} F_R^{*n}(u).$$

Por otro lado, la función $z(u) = e^{Ru}(H^+(\infty) - H^+(u))$ es d.R.i. (vease apéndice). En efecto, por el teorema de Fubini

$$\begin{aligned}
\int_0^\infty z(u)du &= \int_0^\infty e^{Ru}\int_0^\infty I_{(u,\infty)}(v)dH^+(v)du \\
&= \int_0^\infty\int_0^\infty e^{Ru}I_{[0,v]}(u)dudH^+(v) \\
&= \frac{1}{R}\int_0^\infty (e^{Rv}-1)dH^+(v) \\
&= \frac{1-H^+(\infty)}{R} \\
&= \frac{e^{-B}}{R}<\infty.
\end{aligned}$$

Además $z_1(u)=e^{Ru}$ es creciente, $z_2(u)=H^+(\infty)-H^+(u)$ es decreciente y

$$\lim_{h\to 0}\sup\left\{\frac{z_1(x+y)}{z_1(x)}: x\geq 0, 0\leq y\leq h\right\}=\lim_{h\to 0}e^{Rh}=1.$$

Por lo tanto, por el Teorema 4.1.7 (apéndice) se sigue que $z(u)=z_1(u)z_2(u)$ es d.R.i.

De esta manera por el teorema de Renovación (vease apéndice)

$$Z(u)=\int_0^u z(u-x)d(e^BH_1(x))\sim\frac{1}{\mu_R}\int_0^\infty z(u)du,\ \ u\to\infty,$$

donde

$$\mu_R=\int_0^\infty xdF_R(x)=\int_0^\infty xe^{Rx}dH^+(x)=E[S_{\tau_+}e^{RS_{\tau_+}}].$$

Ahora bien

$$\begin{aligned}
Z(u) &= \int_0^u e^{R(u-x)}(H^+(\infty)-H^+(u-x))e^Be^{Rx}dG(x) \\
&= e^{Ru}e^B\left(H^+(\infty)\int_0^u dG(x)-\int_0^u H^+(u-x)dG(x)\right)
\end{aligned}$$

Por otro lado, usando (1.31),

$$\begin{aligned}
\int_0^u H^+(u-x)dG(x) &= (1-H^+(\infty))\sum_{n=0}^\infty\int_0^u H^+(u-x)d(H^+)^{*n}(x) \\
&= (1-H^+(\infty))\sum_{n=1}^\infty (H^+)^{*n}(u) \\
&= G(u)-(1-H^+(\infty)),
\end{aligned}$$

de donde

$$\begin{aligned}
Z(u) &= e^{Ru}e^B(H^+(\infty)G(u)+(1-H^+(\infty))-G(u)) \\
&= e^{Ru}e^B(1-H^+(\infty))(1-G(u)) \\
&= e^{Ru}(1-G(u)).
\end{aligned}$$

De aquí se sigue (2.7). ■

Ejemplo 2.2.2 Sea T con distribución exponencial de parámetro λ e independiente de Z. Vamos a demostrar que en este caso

$$P(\tau(u) < \infty) \sim \frac{c - \lambda E[Z]}{\lambda E[Ze^{RZ}] - c} e^{-Ru}, \ \ u \to \infty.$$

Sea $Y = -X$ y $\{S_n^Y\}$ definida por

$$S_0^Y = 0, \ \ S_n^Y = Y_1 + \ldots + Y_n, \ \ n \geq 1.$$

Nótese que $E[Y] > 0$, lo que implica que $S_{\tau_+^Y}^Y$ es no defectuosa. De aquí, $S_{\tau_-} = -S_{\tau_+^Y}^Y$ es no defectuosa.

Ahora bien, tomando $A' = (-\infty, 0)$ en (1.35) tenemos que

$$H_{n+1}^-(x) = \int_{[0,\infty)} F_X(x-y) dK_n(y),$$

con

$$K_n(y) = P(S_1 \geq 0, \ldots, S_{n-1} \geq 0, S_n \leq y) \ \ y \geq 0, \ \ n = 1, 2, \ldots.$$

De aquí se sigue que para $x \leq 0$

$$\begin{aligned} P(S_{\tau_-} \leq x) &= \int_{[0,\infty)} F_X(x-y) \sum_{n=0}^{\infty} dK_n(y) \\ &= \int_{[0,\infty)} F_X(x-y) dK(y). \end{aligned}$$

Por otro lado, $X = -cT + Z$, y cT tiene distribución exponencial de parámetro λ/c. Entonces para $x \leq 0$ se cumple

$$F_X(x) = C_0 e^{\frac{\lambda}{c}x}, \tag{2.9}$$

con C_0 constante. Usando que S_{τ_-} es no defectuosa y (2.9) se sigue

$$P(S_{\tau_-} \leq x) = e^{\frac{\lambda}{c}x}, \ \ x \leq 0.$$

De aquí, $-S_{\tau_-}$ tiene distribución exponencial de parametro λ/c. Lo que implica

$$E[e^{i\zeta S_{\tau_-}}] = \frac{\lambda/c}{\lambda/c + i\zeta}. \tag{2.10}$$

Por otro lado,

$$1 - \psi_X(\zeta) = 1 - \frac{\lambda/c}{\lambda/c + i\zeta} E[e^{i\zeta Z}] = \left(1 - \frac{\lambda/c}{\lambda/c + i\zeta}\right)\left(1 + \frac{\lambda}{c}\frac{1 - E[e^{i\zeta Z}]}{i\zeta}\right).$$

De aquí, usando (2.10) y la unicidad de la factorización de Wiener-Hopf se sigue

$$E[e^{i\zeta S_{\tau_+}}] = -\frac{\lambda}{ci\zeta}(1 - E[e^{i\zeta Z}]),$$

de donde

$$E[e^{-\theta S_{\tau_+}}] = \frac{\lambda}{c\theta}(1 - E[e^{-\theta Z}]). \tag{2.11}$$

Debido a que $E[e^{RS_{\tau_+}}] = 1$, $E[e^{RZ}] = cR/\lambda + 1$. Entonces de (2.11) resulta

$$E[S_{\tau_+} e^{RS_{\tau_+}}] = \frac{\lambda E[Ze^{RZ}] - c}{cR}.$$

Por otro lado, de Wiener-Hopf se tiene

$$\log \frac{1}{1 - \tau(1)} = B,$$

de aquí, $1 - \tau(1) = e^{-B}$. Además

$$\begin{aligned} \tau(1) &= \lim_{\theta \to 0} E[e^{-\theta S_{\tau_+}}] \\ &= -\frac{\lambda}{c} \lim_{\theta \to 0} \frac{E[e^{-\theta Z}] - 1}{\theta} \\ &= \frac{\lambda}{c} E[Z]. \end{aligned}$$

De aquí

$$e^{-B} = 1 - \frac{\lambda}{c} E[Z].$$

Por lo tanto, de la ecuación (2.7) resulta la expresión conocida para el modelo clásico de Cramer-Lundberg ([16]),

$$P(\tau(u) < \infty) \sim \frac{c - \lambda E[Z]}{\lambda E[Ze^{RZ}] - c} e^{-Ru}, \;\; u \to \infty.$$

Este es uno de los pocos casos en los cuales se conoce explícitamente los factores de Wiener-Hopf

En lo subsecuente denotaremos por R_I, cuando exista, al coeficiente de ajuste que en el caso independiente. Nótese que cuando existe orden entre dos cópulas, $C_1 \prec C_2$, la fórmula (2.1) implica

$$\widehat{F}_{C_1}(\theta) \geq \widehat{F}_{C_2}(\theta),$$

para aquellos valores de θ para los cuales estan definidas $\widehat{F}_{C_1}$ y $\widehat{F}_{C_2}$. De aquí, si $C_1 \prec C_2$ y $\widehat{F}_{C_1}(-R_1) = \widehat{F}_{C_2}(-R_2) = 1$ entonces $R_1 \leq R_2$. En particular, si $C_1 \prec \Pi$, entonces $R \leq R_I$; si $C_1 \succ \Pi$, entonces $R \geq R_I$. En el caso cuando C_1 es una cópula Arquimediana, por el corolario 1.1.46 es suficiente con verificar que el generador φ_1 hace que $-\varphi_1(t)/\ln t$ sea no decreciente para obtener $C_1 \prec \Pi$.

En general, no es posible obtener en forma explícita R, no obstante se puede usar la expansión de Lagrange para obtener una aproximación para R por medio de R_I, que es más fácil de obtener. Para ver esto, tenemos el siguiente teorema, el cual no probaremos (ver [22]).

Teorema 2.2.3 *(Teorema de Lagrange). Sean $f(z)$ y $\varphi(z)$ funciones de z analíticas sobre y en el interior de un contorno γ rodeando al punto a, y sea t tal que la desigualdad*

$$|t\varphi(z)| < |z - a|,$$

se satisface para todos los puntos z sobre el perímetro de γ; entonces la ecuación

$$\zeta = a + t\varphi(\zeta),$$

considerada como una ecuación en ζ, tiene una raiz en el interior de γ; además cualquier función de ζ analítica sobre y en el interior de γ puede ser expandida como serie de potencias en t por la fórmula

$$f(\zeta) = f(a) + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{t^n}{n!} \left. \frac{d^{n-1}}{dz^{n-1}} \right|_{z=a} [f'(z)\{\varphi(z)\}^n].$$

Aplicando el teorema con φ, f y a dadas por,

$$\varphi(z) = \frac{z + R_I}{\widehat{F}(z) - \widehat{F}(-R_I)}, \quad f(z) = z, \quad a = -R_I,$$

obtenemos

$$\begin{aligned} -R &= -R_I + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{d^{n-1}}{dw^{n-1}} \left. \left(\frac{w + R_I}{\widehat{F}(w) - \widehat{F}(-R_I)} \right)^n \right|_{w=-R_I} \frac{(1 - \widehat{F}(-R_I))^n}{n!} \\ &= -R_I + \frac{1 - \widehat{F}(-R_I)}{\widehat{F}'(-R_I)} - \frac{1}{2} \frac{\widehat{F}''(-R_I)}{\widehat{F}'(-R_I)^3} (1 - \widehat{F}(-R_I))^2 + \ldots, \end{aligned}$$

la serie es convergente siempre que la inversa de $\widehat{F}(\theta)$ sea analítica bajo el dominio a consideración y $\widehat{F}'(-R_I) \neq 0$. Aquí $\widehat{F}(\theta)$ se calcula de (2.1) para C, F_Z y F_T fijos. Estas distribuciones se pueden obtener de los datos númericos.

2.3 Tiempo de ruina en horizonte finito

La velocidad de convergencia de una caminata aleatoria hacia su límite superior se traduce en el siguiente teorema para el tiempo de ruina finito de nuestro proceso de riesgo (ver [20], [21], para una prueba de este resultado).

Teorema 2.3.1 *Supóngase que*

1. $-\infty < E[X] < 0$;
2. $\widehat{F}_X(\theta)$ *es finita para* $-\sigma_F < \theta \leq 0$, *donde* $\sigma_F > 0$;
3. *para algún* $\omega \in (0, \sigma_F)$ *se alcanza un mínimo* $\widehat{F}_X(-\omega) := \alpha < 1$.

Entonces para todo $u \geq 0$,

$$P(n < \tau^*(u) < \infty) \sim cH(u)\alpha^n n^{-3/2} \ \ \textit{cuando } n \to \infty,$$

donde $c = \frac{\alpha}{1-\alpha}c_1$, $c_1^2 = \alpha(2\pi\omega^2\widehat{F}_X''(-\omega))$ *es una constante conocida y* H *una función que solo depende de* u.

La expresión para la función H involucra las cantidades α y ω (ver [20]). De esta forma la función H depende de F_X. La condición *1* del teorema anterior es necesaria para la sobrevivencia del portafolio, i.e., para que no ocurra ruina con probabilidad 1; en lo subsecuente será llamada *condición de balance*. La existencia del coeficiente de ajuste R es suficiente para que se cumplan las condiciones *2* y *3*. El siguiente ejemplo muestra que el caso independiente cumple con la condición *3*.

Ejemplo 2.3.2 *Caso independiente.* Supóngase $\sigma_{F_I} = \sigma_Z > 0$. Recordemos que para Z y T independientes $\widehat{F}_I(\theta) = \widehat{F}_Z(\theta)\widehat{F}_T(-c\theta)$. Sea $f(\theta) = \ln \widehat{F}_I(\theta)$, $\theta \in (-\sigma_Z, \frac{1}{c}\sigma_T)$. Entonces $f'(\theta) = 0$ si y sólo si

$$\frac{\widehat{F}_Z'(\theta)}{\widehat{F}_Z(\theta)} = c\frac{\widehat{F}_T'(-c\theta)}{\widehat{F}_T(-c\theta)}.$$

Sean

$$\varphi_Z(\theta) = -\frac{\widehat{F}_Z'(\theta)}{\widehat{F}_Z(\theta)}, \ \ \theta > -\sigma_Z, \ \ \varphi_T(\theta) = -\frac{\widehat{F}_T'(\theta)}{\widehat{F}_T(\theta)}, \ \ \theta > -\sigma_T.$$

En este caso la solución de la ecuación

$$\varphi_Z(\theta) = c\varphi_T(-c\theta), \tag{2.12}$$

es un punto de inflexión de $\widehat{F}_I$ y éste es un mínimo puesto que $\varphi_Z(\theta)$ es estrictamente decreciente en $(-\sigma_Z, \infty)$ y $\varphi_T(-c\theta)$ es estrictamente creciente en $(-\infty, 0]$. A este punto lo llamamos $-\omega$. En efecto, si $-\sigma_Z < r_1 < r_2 < \infty$, entonces

$$\widehat{F}_Z(r_1) > \widehat{F}_Z(r_2), \ \ \widehat{F}_Z'(r_1) < \widehat{F}_Z'(r_2),$$

debido a que Z es no negativa. De aquí, $\varphi_Z(r_1) > \varphi_Z(r_2)$. En forma análoga se demuestra que $\varphi_T(-c\theta)$ es estrictamente creciente en $(-\infty, 0]$. Haciendo $h(\theta) = \varphi_Z(\theta) - c\varphi_T(-c\theta)$ vemos que h es continua, estrictamente decreciente en $(-\sigma_Z, 0]$, $h(0) = E(X) < 0$, $h(\theta) \uparrow \infty$, si $\theta \downarrow -\sigma_Z$. Por lo tanto, existe un único punto $-\omega$ que cumple $h(-\omega) = 0$, es decir, $-\omega$ satisface (2.12).

Ahora fijemos las marginales de Z y T, consideremos el comportamiento de α y ω en la presencia de dependencia. Nótese que por la fórmula (2.1), si $C_1 \succ C_2$ entonces $\alpha_1 < \alpha_2$ y si $C_1 \prec C_2$ entonces $\alpha_1 > \alpha_2$. En particular, si $C \succ \Pi$ entonces $\alpha < \alpha_I$; $C \prec \Pi$ implica $\alpha > \alpha_I$. En contraste, no se pueden establecer desigualdades para ω y ω_I: en el ejemplo 2.3.7 más adelante se verá que ω no depende del grado de dependencia de Z y T. No obstante, debido a que $\widehat{F}'(\theta)$ es analítica en $-\omega_I$, podemos usar el Teorema de Lagrange. De esta manera, si $\widehat{F}''(-\omega_I) \neq 0$, obtenemos

$$\begin{aligned} -\omega &= -\omega_I + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{d^{n-1}}{d\omega^{n-1}} \left(\frac{\omega + \omega_I}{\widehat{F}'(\omega) - \widehat{F}'(-\omega_I)} \right)^n \Bigg|_{\omega=-\omega_I} \frac{(-\widehat{F}'(-\omega_I))^n}{n!} \\ &= -\omega_I - \frac{\widehat{F}'(-\omega_I)}{\widehat{F}''(-\omega_I)} + \frac{1}{2} \frac{\widehat{F}'''(-\omega_I)\widehat{F}(-\omega_I)^2}{\widehat{F}''(-\omega_I)^3} + \dots . \end{aligned}$$

Esta serie converge si $\omega - \omega_I$ es suficientemente pequeño ([22]).

Por medio del teorema de Bürmann ([22]), el cual enunciamos a continuación, podemos obtener información sobre el valor de α directamente en términos de las propiedades de $\widehat{F}$ en ω_I.

Teorema 2.3.3 *Sean S una región cerrada, y a un punto interior de S. Sea $\phi(z)$ analítica en S y $\phi(a) = b$. Definimos Ψ por*

$$\Psi(z) = \frac{z - a}{\phi(z) - b}.$$

Entonces una función $f(z)$ analítica cerca de $z = a$, puede ser expandida en la forma

$$f(z) = f(a) + \sum_{n=1}^{m-1} \frac{\phi(z) - b}{m!} \frac{d^{n-1}}{dx^{n-1}} [f'(x)\{\Psi(x)\}^n] \Big|_{x=a} + R_m,$$

donde

$$R_m = \frac{1}{2\pi i} \int_a^z \int_\gamma \left[\frac{\phi(z) - b}{\phi(t) - b} \right]^{m-1} \frac{f'(t)\phi'(z)}{\phi(t) - \phi(z)} dt dz,$$

y γ es un contorno en el t-plano, encerrando los puntos a y z, y tal que si ζ es cualquier punto en su interior, la ecuación $\phi(t) = \phi(\zeta)$ no tiene raices sobre o en el interior del contorno, excepto una raiz simple en $t = \zeta$.

Aplicando el teorema anterior, con $a = -\omega_I$, $z = -\omega_F$, $\phi(x) = \widehat{F}'(x)$, $f(x) = \widehat{F}(x)$, obtenemos

$$\alpha = \widehat{F}(-\omega_I) + \sum_{n=1}^{m-1} \frac{d^{n-1}}{d\omega^{n-1}} \frac{(-\widehat{F}'(-\omega_I))^n}{n!} \left(\widehat{F}'(\omega) \left[\frac{\omega + \omega_I}{\widehat{F}'(\omega) - \widehat{F}'(-\omega_I)} \right]^n \right) \Bigg|_{\omega=-\omega_I} + R_m, \quad (2.13)$$

donde el residuo está dado por

$$R_m = \frac{1}{2\pi i}\int_{-\omega_I}^{-\omega_F}\int_{\gamma}\left(\frac{\widehat{F}'(-\omega)+\widehat{F}'(-\omega_I)}{\widehat{F}'(t)-\widehat{F}'(-\omega_I)}\right)^{m-1}\frac{\widehat{F}'(t)\widehat{F}''(-\omega)}{\widehat{F}'(t)-\widehat{F}'(-\omega)}dtd\omega,$$

y γ es un contorno en el t-plano encerrando a los puntos $-\omega_I$, $-\omega_F$ tal que la ecuación $\widehat{F}'(t) = \widehat{F}'(\zeta)$ no tiene raices en el interior o sobre de γ excepto en $t = \zeta$, donde ζ es cualquier punto dentro de D. La expresión anterior provee una aproximación para obtener resultados de sensitividad sobre el grado de dependencia de las cantidades determinando el comportamiento asintótico del proceso de Riesgo si la transformada de Laplace $\widehat{F}(\theta)$ está dada para el caso dependiente. En algunos casos es posible obtener la transformada de Laplace empírica a partir de los datos sobre Z y T.

Consideremos el caso de combinación convexa de cópulas. Supóngase que C, cópula, puede escribirse en la forma

$$C(u,v) = \beta C_1(u,v) + (1-\beta)C_2(u,v),$$

donde $\beta \in (0,1)$, C_i, $i = 1,2$ cópulas. Supóngase que la función de distribución conjunta $F_{Z,T}$ tiene asociada la cópula C, con C_i asociada a la distribución F_i, $i = 1,2$. Entonces por la fórmula (2.1) tenemos

$$\widehat{F}_X(\theta) = \beta\widehat{F}_1(\theta) + (1-\beta)\widehat{F}_2(\theta),$$

para valores de θ donde $\widehat{F}, \widehat{F}_1, \widehat{F}_2$ esten definidos.

En este caso tenemos que $\sigma_{F_X} = \min\{\sigma_{F_1}, \sigma_{F_2}\}$, $\min\{\omega_1,\omega_2\} \leq \omega_{F_X} \leq \max\{\omega_1,\omega_2\}$. En efecto, $\widehat{F}_1$, $\widehat{F}_2$ convergen en una vecindad a la izquierda del origen si y solamente si $-\sigma_{F_1}, -\sigma_{F_2} < \theta < 0$, entonces $-\sigma_{F_X} = \max\{-\sigma_{F_1}, -\sigma_{F_2}\}$. Para verificar la segunda afirmación, sea $-\omega_i \in (-\sigma_{F_i}, 0]$, $i = 1,2$, que cumple la condición *2* del teorema 2.3.1. Si $-\omega_1 > -\omega_2$, entonces $\widehat{F}_X(\theta)$ es estrictamente decreciente en $(-\sigma_{F_X}, -\omega_2)$ y estrictamente creciente en $(-\omega_1, 0]$, de aquí $\widehat{F}_X$ alcanza su mínimo en $(-\omega_2, -\omega_1)$, esto es, $-\omega_{F_X} \in (-\omega_2, -\omega_1)$. En forma análoga se tiene que $-\omega_{F_X} \in (-\omega_1, -\omega_2)$ si $-\omega_1 < -\omega_2$. De lo anterior se sigue la segunda afirmación. Por último, nótese que

$$\alpha_{F_X} = \widehat{F}_X(-\omega_F) \geq \beta\alpha_1 + (1-\beta)\alpha_2,$$

donde $\alpha_i = \widehat{F}_i(-\omega_{F_i})$, $i = 1,2$. Ahora veamos el siguiente ejemplo.

Ejemplo 2.3.4 *Cópula lineal positiva de Spearman.* Ésta cópula se define por

$$\begin{aligned} C_{\rho_s}(u,v) &= \begin{cases} (u+\rho_s(1-u))v, & v \leq u, \\ \\ (v+\rho_s(1-v))u, & v > u, \end{cases} \\ &= (1-\rho_s)\Pi(u,v) + \rho_s M(u,v), \end{aligned}$$

con $\rho_s \geq 0$. Para esta cópula el coeficiente $\rho_{C_{\rho_s}}$ de Spearman coincide con el parámetro ρ_s. En efecto, de la definición de $\rho_{C_{\rho_s}}$ se sigue

$$\begin{aligned}
\rho_{C_{\rho_s}} &= 12Q(C_{\rho_s}, \Pi) - 3 \\
&= 12[(1-\rho_s)Q(\Pi,\Pi) + \rho_s Q(M,\Pi)] - 3 \\
&= \rho_s.
\end{aligned}$$

Y también

$$\begin{aligned}
\tau_{C_{\rho_s}} &= Q(C_{\rho_s}, C_{\rho_s}) \\
&= (1-\rho_s)^2 Q(\Pi,\Pi) + 2\rho_s(1-\rho_s)Q(M,\Pi) + \rho_s^2 Q(M,M) \\
&= \frac{1}{3}\rho_s(2+\rho_s).
\end{aligned}$$

Además

$$\widehat{F}(\theta) = (1-\rho_s)\widehat{F}_I(\theta) + \rho_s \widehat{F}_M(\theta).$$

De la ecuación anterior se sigue que $\sigma_F = \sigma_Z$ para $\rho_s < 1$, la distribución marginal de Z tiene que ser superexponencial para que la condición *2* del Teorema 2.3.1 se satisfaga. También, ω_{ρ_s} es la solución de la ecuación

$$\frac{\widehat{F}_M(-\theta)}{\widehat{F}_I(-\theta)} = -\frac{1-\rho_s}{\rho_s} < 0,$$

de donde

$$-\omega_{\rho_s} > -\omega_I, \;\; \alpha_{\rho_s} < \alpha_I.$$

Como caso particular, si Z y T son distribuidas exponencialmente con parámetros λ_1 y λ_2, respectivamente, para que la condición *1* del Teorema 2.3.1 se cumpla es necesario que $c\lambda_1 > \lambda_2$. De esta manera, se tiene

$$\widehat{F}(\theta) = (1-\rho_s)\frac{\lambda_1}{\lambda_1+\theta}\frac{\lambda_2}{\lambda_2 - c\theta} + \rho_s \frac{\lambda_1}{\theta\left(1-\frac{c\lambda_1}{\lambda_2}\right)+\lambda_1}.$$

A continuación veremos algunos ejemplos donde se pueden calcular en forma explícita $-\omega$, α y en algunos casos el coeficiente de ajuste R.

Ejemplo 2.3.5 *Exponencial bivariada de Moran y Downton.* La función de densidad conjunta de esta distribución está dada por

$$f_{Z,T}(z,t) = \frac{\lambda_1\lambda_2}{1-\rho} I_0\left(\frac{2\sqrt{\rho\lambda_1\lambda_2}}{1-\rho}\right)\exp\left\{-\frac{\lambda_1 z + \lambda_2 t}{1-\rho}\right\},$$

donde $I_0(z) = \sum_{j=0}^{\infty}\frac{1}{j!}\left(\frac{z}{2}\right)^{2j}$ es la función modificada de Bessel de primer tipo y orden cero, $0 \leq \rho \leq 1$ es la correlación entre Z y T, y $\lambda_1, \lambda_2, u, t > 0$. Las distribuciones marginales son exponenciales de parámetros λ_1 y λ_2. En [12] se puede ver que la función generadora de momentos conjunta del vector (Z, T) está dada por

$$E[e^{-t_1 Z - t_2 T}] = \frac{\lambda_1 \lambda_2}{(\lambda_1 + t_1)(\lambda_2 + t_2) - \rho t_1 t_2}.$$

De aquí se sigue que

$$\widehat{F}_X(\theta) = \frac{\lambda_1 \lambda_2}{c(\rho - 1)\theta^2 + (\lambda_2 - c\lambda_1)\theta + \lambda_1 \lambda_2}.$$

Nótese que la transformada $\widehat{F}_X(\theta)$ tiene dos asíntotas, las cuales son las raices del polinomio $p(\theta) = c(\rho - 1)\theta^2 + (\lambda_2 - c\lambda_1)\theta + \lambda_1 \lambda_2$. Sean

$$a = c(\rho - 1), \;\; b = \lambda_2 - c\lambda_1, \;\; c = \lambda_1 \lambda_2.$$

Nótese que la condición *1* del Teorema 2.3.1 se satisface si $b < 0$. Además se tiene que $a < 0$ y $c > 0$. Por lo tanto, el polinomio p tiene raices $r_1 < 0 < r_2$. De la forma de $\widehat{F}_X(\theta)$ y de lo anterior tenemos que se cumplen *2* y *3* del Teorema 2.3.1. En forma precisa

$$-\sigma_F = r_1 = \frac{\lambda_2 - c\lambda_1 - \sqrt{(c\lambda_1 - \lambda_2)^2 + 4c\lambda_1\lambda_2(1 - \rho)}}{2c(1 - \rho)},$$

y el valor $-\omega$ se puede encontrar derivando $\widehat{F}_X(\theta)$ e igualando a cero. De esta manera

$$-\omega = \frac{\lambda_2 - c\lambda_1}{2c(1 - \rho)},$$

de donde

$$\alpha = \widehat{F}_X(-\omega) = \frac{\lambda_1 \lambda_2}{\lambda_1 \lambda_2 + \frac{1}{4}\frac{(c\lambda_1 - \lambda_2)^2}{1 - \rho}}.$$

Además, $\widehat{F}_X(\theta) = 1$ si y solamente si

$$\theta = 0, \;\; \frac{c\lambda_1 - \lambda_2}{c(1 - \rho)}.$$

Lo anterior nos da en forma precisa el coeficiente de ajuste R, el cual es

$$R = \frac{c\lambda_1 - \lambda_2}{c(1 - \rho)},$$

y cumple ser positivo para $c\lambda_1 > \lambda_2$.

Ejemplo 2.3.6 *Distribución Gamma bivariada de Cheriyan y Ramabhadran.* Recordemos que si X tiene distribución $Gamma(a, \lambda)$, entonces tiene densidad dada por

$$f(x) = \frac{\lambda^a x^{a-1} e^{-\lambda x}}{\Gamma(a)}, \ \ x \geq 0, \ a, \lambda > 0,$$

donde

$$\Gamma(a) = \int_0^\infty x^{a-1} e^{-x} dx.$$

Recordemos también que

$$E[X] = \frac{a}{\lambda}, \ \ E[e^{tX}] = \left(\frac{\lambda}{\lambda - t}\right)^a, t < \lambda.$$

La forma de construir la distribución Gamma bivariada de Cheriyan y Ramabhadran es la siguiente: sean Y_0, Y_1, Y_2 variables aleatorias independientes que cumplen $Y_i \sim Gamma(\theta_i, 1)$, $\theta_i > 0$, $i = 0, 1, 2$. Definimos $X_i = Y_0 + Y_i$, entonces

$$f_{Y_0,Y_1,Y_2}(y_0, y_1, y_2) = \frac{1}{\Gamma(\theta_0)\Gamma(\theta_1)\Gamma(\theta_2)} e^{-(y_0+y_1+y_2)} y_0^{\theta_0-1} y_1^{\theta_1-1} y_2^{\theta_2-1}.$$

De aquí se obtiene la densidad conjunta de (Y_0, X_1, X_2), a saber

$$f_{Y_0,X_1,X_2}(y_0, x_1, x_2) = \frac{1}{\Gamma(\theta_0)\Gamma(\theta_1)\Gamma(\theta_2)} y_0^{\theta_0-1} (x_1 - y_0)^{\theta_1-1} (x_2 - y_0)^{\theta_2-1} e^{y_0-x_1-x_2},$$

para $x_i \geq y_0 \geq 0, i = 1, 2$. Por lo tanto

$$f_{X_1,X_2}(x_1, x_2) = \frac{e^{-(x_1+x_2)}}{\Gamma(\theta_0)\Gamma(\theta_1)\Gamma(\theta_2)} \int_0^{\min\{x_1,x_2\}} y_0^{\theta_0-1} (x_1 - y_0)^{\theta_1-1} (x_2 - y_0)^{\theta_2-1} e^{y_0} dy_0.$$

La función generadora de momentos conjunta de (X_1, X_2) es la siguiente:

$$\begin{aligned} E[e^{t_1 X_1 + t_2 X_2}] &= E[e^{(t_1+t_2)Y_0}] E[e^{t_1 Y_1}] E[e^{t_2 Y_2}] \\ &= \frac{1}{(1 - (t_1 + t_2))^{\theta_0}} \frac{1}{(1 - t_1)^{\theta_1}} \frac{1}{(1 - t_2)^{\theta_2}}, \ \ t_1, t_2, t_1 + t_2 < 1. \end{aligned}$$

De esta manera, si (Z, T) tiene la distribución de (X_1, X_2), la transformada de Laplace de $X = Z - cT$ se puede obtener de la expresión anterior sustituyendo $t_1 = -\theta$, $t_2 = c\theta$, esto es

$$\widehat{F}_X(\theta) = \frac{1}{(1 - \theta(c-1))^{\theta_0} (1 + \theta)^{\theta_1} (1 - c\theta)^{\theta_2}}, \ \ -1 < \theta < 1/c.$$

De aquí se sigue que $-\sigma_F = -1$, $\widehat{F}_X(\theta) > 0$, para $\theta \in (-1, 1/c)$. Además, Z y T tienen distribución Gamma de parámetros $(1, \theta_0 + \theta_1)$ y $(1, \theta_0 + \theta_2)$, respectivamente. De esta manera, la condición de balance es:

$$(\theta_0 + \theta_1) - c(\theta_0 + \theta_2) < 0. \tag{2.14}$$

Ahora calculemos $-\omega$, cuando éste existe. Sea $f(\theta)$ definida por

$$f(\theta) = (1-\theta(c-1))^{\theta_0}(1+\theta)^{\theta_1}(1-c\theta)^{\theta_2}, \ \ -1 < \theta < 1/c.$$

Calculando la derivada de $\widehat{F}(\theta)$ resulta

$$\widehat{F}'_X(\theta) = -\frac{g(\theta)}{f(\theta)(1-\theta(c-1))(1+\theta)(1-c\theta)}, \ \ -1 < \theta < 1/c, \tag{2.15}$$

donde

$$g(\theta) = A\theta^2 + B\theta + C,$$

y las constantes A, B y C estan dadas por

$$\begin{aligned} A &= c(c-1)(\theta_0+\theta_1+\theta_2) \\ B &= c^2(\theta_0+\theta_2) - 2c(\theta_0+\theta_1+\theta_2) + (\theta_0+\theta_1) \\ C &= -c(\theta_0+\theta_2) + (\theta_0+\theta_1). \end{aligned}$$

Nótese que de (2.15) se sigue que $\widehat{F}'_X(\theta) = 0$ si y sólo si $g(\theta) = 0$. De esta manera, encontrar los puntos críticos de $\widehat{F}'_X(\theta)$ equivale a resolver la ecuación cuadrática $g(\theta) = 0$.

Haciendo los cálculos correspondientes tenemos que los coeficientes A, B y C cumplen

$$A + C - B = c(c+1)\theta_1 > 0, \tag{2.16}$$

y

$$B^2 - 4AC = [c^2(\theta_0+\theta_2) - (\theta_0+\theta_1)]^2 + 4\theta_1\theta_2 > 0.$$

Lo anterior muestra que g tiene dos raices distintas, las cuales son

$$r_1 = \frac{-B+\sqrt{B^2-4AC}}{2A}, \ \ r_2 = \frac{-B-\sqrt{B^2-4AC}}{2A} \tag{2.17}$$

Veremos bajo que supuestos se cumplen las condiciones *1, 2, 3* del Teorema 2.3.1. Previamente vimos que $-\sigma_F = -1$. De esta manera, solo veremos las condiciones *1* y *3*. La ecuación (2.14) se puede escribir en la forma

$$\frac{\theta_0+\theta_1}{\theta_0+\theta_2} < c. \tag{2.18}$$

Nótese que B como función de c es un polinomio cuadrático, el cual tiene raices

$$c_1 = \frac{\theta_0+\theta_1+\theta_2+\gamma}{\theta_0+\theta_2}, \ \ c_2 = \frac{\theta_0+\theta_1+\theta_2-\gamma}{\theta_0+\theta_2},$$

con

$$\gamma = \sqrt{\theta_1^2+\theta_2^2+\theta_0\theta_1+\theta_0\theta_2+\theta_1\theta_2},$$

que cumplen

$$c_2 < \frac{\theta_0+\theta_1}{\theta_0+\theta_2} < c_1, \ \ c_2 < 1 < c_1, \tag{2.19}$$

y

$$B > 0, \text{ para } 0 < c < c_2 \text{ o } c > c_1, \quad B < 0, \text{ para } c_2 < c < c_1.$$

La condición *3* del teorema nos dice que estamos interesados en mínimos en el intervalo $(-1, 0)$, los candidatos serán las raices de g. Veremos el comportamiento de r_1 y r_2 bajo diferentes valores de c. Para este fin, calculamos la "forma" de la segunda derivada de $\widehat{F}_X(\theta)$. Debido a que $\widehat{F}'_X(\theta)$ se puede escribir en la forma

$$\widehat{F}'_X(\theta) = -\frac{g(\theta)}{h(\theta)}, \;\; -1 < \theta < \frac{1}{c},$$

con $h(\theta) > 0$, para $\theta \in (-1, 1/c)$. De aquí

$$\widehat{F}''_X(\theta) = -\frac{g'(\theta)h(\theta) - h'(\theta)g(\theta)}{[h(\theta)]^2}, \;\; -1 < \theta < \frac{1}{c}. \tag{2.20}$$

Nótese que para $c \leq c_2$ no se cumple la ecuación (2.18), por lo que este caso no se considera. De esta manera, estudiaremos los casos:

1. $c \geq c_1$,

2. $c_2 < c < c_1$.

Veamos el caso *1*. Supongamos que $c \geq c_1$. De la ecuación 2.19 se sigue que

$$A > 0, \;\; B \geq 0, \;\; C < 0.$$

Consideremos primero el caso cuando $c = c_1$. Para este caso tenemos que $B = 0$ y

$$r_1 = \frac{\sqrt{-AC}}{A}, \;\; r_2 = -\frac{\sqrt{-AC}}{A}.$$

De esta manera, $r_2 < 0 < r_1$. Debido a que estamos interesados en el mínimo en $(-1, 0)$ consideramos solamente r_2. Ahora, nótese que $r_2 > -1$ si y solamente si $-A < -\sqrt{-AC}$, y esto sucede si y solamente si $A + C > 0$, y esta última desigualdad es cierta por (2.16). Por lo tanto $r_2 \in (-1, 0)$. Por último

$$\widehat{F}''_X(r_2) = \frac{\sqrt{-4AC}}{h(r_2)} > 0,$$

lo que muestra que r_2 es un mínimo local en $(-1, 0)$. De esta manera, las condiciones *1* y *3* se satisfacen. Ahora supongamos que $c > c_1$. Nótese que

$$2A - B > 0 \Longleftrightarrow c > \sqrt{\frac{\theta_0 + \theta_1}{\theta_0 + 2\theta_1 + \theta_2}}. \tag{2.21}$$

En efecto,
$$2A - B = c^2(\theta_0 + 2\theta_1 + \theta_2) - (\theta_0 + \theta_1),$$
es un polinomio cuadrático con raices
$$\pm\sqrt{\frac{\theta_0 + \theta_1}{\theta_0 + 2\theta_1 + \theta_2}}.$$
Debido a que suponemos $c > 0$, se sigue (2.21). Ahora, nótese que
$$c > c_1 > 1 > \sqrt{\frac{\theta_0 + \theta_1}{\theta_0 + 2\theta_1 + \theta_2}},$$
por lo tanto (2.21) se satisface. Nótese también que $r_2 < 0 < r_1$, por lo cual solo consideramos la raíz r_2. Usando (2.21) tenemos que $r_2 > -1$ si y solamente si $(2A - B)^2 > B^2 - 4AC$, y lo anterior se cumple si y solamente si $4A(A + C - B) > 0$, lo cual es cierto porque $A > 0$ y por (2.16). Evaluando r_2 en $\widehat{F}''_X(\theta)$ resulta
$$\widehat{F}''_X(r_2) = \frac{\sqrt{B^2 - 4AC}}{h(r_2)} > 0.$$
Por lo tanto, r_2 cumple la condición *3* del Teorema.

Ahora veamos el caso *2*. Para este caso consideraremos los subcasos

1. $\theta_1 \geq \theta_2$,

2. $\theta_1 < \theta_2$.

Supongamos $\theta_1 \geq \theta_2$. Nótese que para $c_2 < c \leq 1$, se tiene
$$(\theta_0 + \theta_1) - c(\theta_0 + \theta_2) \geq \theta_1 - \theta_2 > 0,$$
por lo cual la condición *2* no se satisface. Además
$$\frac{\theta_0 + \theta_1}{\theta_0 + \theta_2} \geq 1.$$
Se pide además que
$$\frac{\theta_0 + \theta_1}{\theta_0 + \theta_2} < c < c_1.$$
Para este caso, tenemos
$$A > 0, \;\; B < 0, \;\; C < 0.$$
De nuevo, las raices r_1 y r_2 cumplen $r_2 < 0 < r_1$, por lo que solo consideraremos la raiz r_2. Ahora, $r_2 > -1$ si y solamente si $\sqrt{B^2 - 4AC} < 2A - B$, y esto se puede mostrar como en el caso anterior. Evaluando r_2 en $\widehat{F}''_X(\theta)$ resulta
$$\widehat{F}''_X(\theta) = \frac{\sqrt{B^2 - 4AC}}{h(r_2)} > 0.$$

Por lo tanto, r_2 cumple con la condición *3* del Teorema.

Ahora supongamos $\theta_1 < \theta_2$. En esta parte tenemos

$$\frac{\theta_0 + \theta_1}{\theta_0 + \theta_2} < 1,$$

por lo cual consideraremos los casos

1. $\frac{\theta_0+\theta_1}{\theta_0+\theta_2} < c < 1$,

2. $c = 1$,

3. $1 < c < c_1$.

Cuando $1 < c < c_1$ se utiliza el mismo procedimiento que el subcaso anterior para mostrar que $-1 < r_2 < 0 < r_1$; r_2 satisface la condición *3* del Teorema.

Para $c = 1$, $g(\theta)$ se transforma:

$$g(\theta) = -(\theta_1 + \theta_2)\theta + \theta_1 - \theta_2,$$

y tiene una sola raiz:

$$r = \frac{\theta_1 - \theta_2}{\theta_1 + \theta_2},$$

la cual cumple $-1 < r < 0$, y evaluando en la segunda derivada se muestra que r es un mínimo.

Por último, supongamos que

$$\frac{\theta_0 + \theta_1}{\theta_0 + \theta_2} < c < 1.$$

En este caso tenemos

$$A < 0, \;\; B < 0, \;\; C < 0.$$

Ahora, $r_1 < r_2$, y debido a que $B^2 - 4AC < B^2$, entonces $r_2 < 0$. Por otro lado, $r_1 < -1$ si y solamente si $-2A + B < \sqrt{B^2 - 4AC}$, veamos que esta última desigualdad es cierta. Si $-2A + B \leq 0$, la desigualdad es cierta. Si $-2A + B > 0$, entonces $-2A + B < \sqrt{B^2 - 4AC}$ si y solamente si $-4A(A + C - B) > 0$, la cual es cierta por (2.17). De esta manera, estamos interesados de nuevo en r_2. Ahora, $r_2 > -1$ si y solamente si $2A - B < \sqrt{B^2 - 4AC}$; procediendo en forma análoga al anterior se sigue ésta última. Y también $\widehat{F}_X''(r_2) > 0$, lo cual muestra que r_2 es mínimo.

En resumen: Para $c \neq 1$, si tenemos las cantidades A, B, C, r_2, c_1, c_2 dadas por

$$\begin{aligned}
A &= c(c-1)(\theta_0+\theta_1+\theta_2),\\
B &= c^2(\theta_0+\theta_2) - 2c(\theta_0+\theta_1+\theta_2) + (\theta_0+\theta_1),\\
C &= -c(\theta_0+\theta_2) + (\theta_0+\theta_1),\\
r_2 &= \frac{-B-\sqrt{B^2-4AC}}{2A},\\
c_1 &= \frac{\theta_0+\theta_1+\theta_2+\gamma}{\theta_0+\theta_2},\\
c_2 &= \frac{\theta_0+\theta_1+\theta_2-\gamma}{\theta_0+\theta_2},
\end{aligned}$$

con

$$\gamma = \sqrt{\theta_1^2+\theta_2^2+\theta_0\theta_1+\theta_0\theta_2+\theta_1\theta_2}, \quad \theta_i > 0, \quad i = 1,2,3,$$

entonces, $\sigma_F = 1$, $E(X) < 0$, r_2 es un mínimo en $(-\sigma_F, 0)$ si

1. *$c \geq c_1$, o bien*
2. *$\frac{\theta_0+\theta_2}{\theta_0+\theta_2} < c < c_1$.*

Para $c = 1$ se tiene: $\sigma_F = 1$, $E(X) < 0$ cuando $\theta_1 < \theta_2$, y r dado por

$$r = \frac{\theta_1-\theta_2}{\theta_1+\theta_2},$$

es mínimo en $(-\sigma_F, 0)$.

Ejemplo 2.3.7 *Distribución Gamma bivariada de Kibble y Moran.* Esta distribución bivariada con marginales gamma estándar (parámetro de forma $a > 0$) está definida a través de su función generadora de momentos ([12]), a saber

$$E[e^{t_1 Z + t_2 T}] = \left(1 - \frac{\beta+1}{\beta}t_1 - \frac{\beta+1}{\beta}t_2 - \frac{\beta+1}{\beta}t_1 t_2\right)^{-a}.$$

Aquí $\beta > 0$ es el parámetro de dependencia y el coeficiente de correlación de Pearson está dado por $1/(1+\beta)$ ([12]). Sustituyendo $t_1 = -\theta$, $t_2 = c\theta$ resulta

$$\widehat{F}_X(\theta) = \frac{1}{\left(-c\frac{\beta+1}{\beta}\theta^2 + (1-c)\frac{\beta+1}{\beta}\theta + 1\right)^a}.$$

En este caso, la condición de balance $E[X] < 0$ implica $(1-c) < 0$. De esta manera, tenemos un caso similar al ejemplo 2.3.5. Usando el mismo razonamiento para el polinomio cuadrático del denominador resulta

$$-\sigma_F = \frac{(1-c)(\beta+1) - \sqrt{[(1-c)(\beta+1)]^2 + 4c\beta(\beta+1)}}{2c(\beta+1)}$$

y
$$-\omega=-\frac{c-1}{2c},\ \ R=\frac{c-1}{c}=2\omega.$$
Además
$$\alpha=\left(\frac{4c\beta}{1+\beta+2c(\beta-1)+c^2(\beta+1)}\right)^a.$$
La importancia de este ejemplo radica en ilustrar que tanto $-\omega$ como el coeficiente de ajuste R no dependen del parámetro de dependencia β.

2.4 Propiedades asintóticas de H

En esta sección se encontrará una expresión asintótica para la función H o en forma precisa para $1-H$. Supondremos las condiciones del Teorema 2.3.1. En [20] se obtiene que las series que aparecen en (1.49) y (2.6) tienen radio de convergencia $1/\alpha>1$ y que $B(1/\alpha)$ es finito. Además se obtiene $H(0)=\exp\{-B(1/\alpha)\}$. Para $u>0$ la forma de $H(u)$ no es sencilla. No obstante, podemos usar la estructura Markoviana de la caminata aleatoria para obtener su transformada de Laplace.

Sean a_n y L_n como antes:
$$a_n(x)=P(S_n>S_k,k=0,\dots,n-1,S_n\le x),\ \ L_n=\min\{r\ge 0,S_r=\max_{0\le k\le n}S_k\}.$$
Por la propiedad Markoviana de la caminata aleatoria $\{S_n\}$ se sigue
$$\begin{aligned}P(n<\tau^*(u)<\infty) &= \sum_{k=0}^{n}P(n-k<\tau^*(0)<\infty)P(L_k=k,S_k\le u)\\ &= \sum_{k=0}^{n}P(n-k<\tau^*(0)<\infty)a_k(u),\end{aligned}$$
de donde
$$\frac{P(n<\tau^*(u)<\infty)}{P(n<\tau^*(0)<\infty)}=\sum_{k=0}^{n}\frac{P(n-k<\tau^*(0)<\infty)}{P(n<\tau^*(0)<\infty)}a_k(u).$$
Por otro lado del Teorema 2.3.1 se sigue que para $u=0$
$$\lim_{n\to\infty}\frac{P(n-k<\tau^*(0)<\infty)}{P(n<\tau^*(0)<\infty)}=\alpha^{-k},$$
para cada k fijo. Entonces
$$\begin{aligned}\frac{H(u)}{H(0)} &= \lim_{n\to\infty}\frac{P(n<\tau^*(u)<\infty)}{P(n<\tau^*(0)<\infty)}\\ &= \lim_{n\to\infty}\sum_{k=0}^{n}\frac{P(n-k<\tau^*(0)<\infty)}{P(n<\tau^*(0)<\infty)}a_k(u)\\ &= \sum_{k=0}^{\infty}\alpha^{-k}a_k(u).\end{aligned}$$

Usando las ecuaciones (1.49) y (1.38) obtenemos la transformada de Laplace de H:

$$\begin{aligned}\widehat{H}(\theta) &= H(0)\int_0^\infty e^{-\theta x} d(H/H(0))(x) \\ &= H(0)\exp\left\{\sum_{n=1}^\infty \frac{\alpha^{-n}}{n}\int_{0+}^\infty e^{-\theta x} dF^{*n}(x)\right\} \\ &= \frac{e^{-B(1/\alpha)}}{1-E[\alpha^{-\tau_+}e^{-\theta S_{\tau_+}}]}. \end{aligned} \tag{2.22}$$

De esta forma la transformada de Laplace de H esta determinada por los factores de Wiener-Hopf.

Ahora consideramos una caminata aleatoria asociada. Para $\delta \in (-\sigma_F, 0]$ definimos la función de distribución

$$F_\delta(x) = \frac{1}{\widehat{F}(\delta)}\int_{-\infty}^x e^{-\delta u} dF(u).$$

Entonces la transformada de Laplace de F_δ cumple

$$\begin{aligned}\widehat{F}_\delta(\theta) &= \int_{-\infty}^\infty e^{-\theta x} dF_\delta(x) \\ &= \frac{1}{\widehat{F}(\delta)}\int_{-\infty}^\infty e^{-(\theta+\delta)} dF(x) \\ &= \frac{\widehat{F}(\theta+\delta)}{\widehat{F}(\delta)}. \end{aligned}$$

Aplicando la factorización de Wiener-Hopf a $\widehat{F}_\delta(\theta)$ resulta

$$1 - s\widehat{F}_\delta(\theta) = (1-\chi_\delta(s, i\theta))(1-\chi_\delta^-(s, i\theta)).$$

Por otro lado, para $|s| < \widehat{F}(\delta)$, se tiene

$$1 - \frac{s}{\widehat{F}(\delta)}\widehat{F}(\theta+\delta) = \left(1-\chi\left(\frac{s}{\widehat{F}(\delta)}, i(\theta+\delta)\right)\right)\left(1-\chi^-\left(\frac{s}{\widehat{F}(\delta)}, i(\theta+\delta)\right)\right).$$

Por la unicidad de la factorización de Wiener-Hopf queda

$$\chi_\delta(s, i\theta) = \chi\left(\frac{s}{\widehat{F}(\delta)}, i(\theta+\delta)\right),$$

es decir,

$$E[s^{\tau_+^\delta} e^{-\theta S^\delta_{\tau_+}}] = E\left[\left(\frac{s}{\widehat{F}(\delta)}\right)^{\tau_+} e^{-(\theta+\delta)S_{\tau_+}}\right],$$

donde τ_+^δ es el primer punto escalera de la caminata aleatoria generada por la distribución F_δ y $S_{\tau_+^\delta}$ es su correspondiente altura. De esta fórmula y de (2.22), sustituyendo $\theta = \delta + \beta$ resulta

$$\begin{aligned} \frac{e^{-B(1/\alpha)}}{1 - E\left[\left(\frac{\widehat{F}(\delta)}{\alpha}\right)^{\tau_+^\delta} e^{-\beta S_{\tau_+^\delta}}\right]} &= \frac{e^{-B(1/\alpha)}}{1 - E\left[\left(\dfrac{1}{\alpha}\right)^{\tau_+} e^{-\theta S_{\tau_+}}\right]} \\ &= \int_0^\infty e^{-\beta x} d\left(\int_0^x e^{-\delta u} dH(u)\right), \;\; \beta > -\delta. \end{aligned}$$

Tomamos $\delta = -\omega$, i.e., $\widehat{F}(\delta) = \alpha$. Entonces

$$\int_0^\infty e^{-\beta x} d\left(\int_0^x e^{\omega u} dH(u)\right) = \frac{e^{-B(1/\alpha)}}{1 - E\left[e^{-\beta S_{\tau_+^{-\omega}}}\right]}, \;\; \forall \beta > \omega. \tag{2.23}$$

Ahora vamos a mostrar que

$$1 - H(u) \sim \frac{e^{-B(1/\alpha)}}{\omega E[S_{\tau_+^{-\omega}}]} e^{-\omega u}, \;\; u \to \infty. \tag{2.24}$$

Sea

$$\nu(dx) = e^{B(1/\alpha)} H_1(dx),$$

donde $H_1(x) = \int_0^x e^{\omega u} dH(u)$. Sea también U, medida de renovación, dada por

$$U(dx) = \sum_{n=0}^\infty F_1^{*n}(dx),$$

con $F_1(dx) = P(S_{\tau_+^{-\omega}} \in dx)$. De la expresión (2.23) se sigue que las transformadas de las medidas ν y U coinciden en el intervalo (ω, ∞) con $\omega > 0$. Lo anterior implica que las medidas ν y U son iguales [6].

Por otro lado, debido a que $\widehat{H}(0) = H(\infty)$ de la segunda igualdad de (2.22) se sigue que $H(\infty) = 1$. Denotamos por $\delta_x(A)$ la función indicadora del conjunto A, es decir,

$$\delta_x(A) = \begin{cases} 1, & x \in A, \\ 0, & \text{otro caso.} \end{cases}$$

Sea

$$z(x) = \begin{cases} e^{\omega x}, & x \leq 0, \\ 0, & \text{otro caso.} \end{cases}$$

Se observa que z es d.R.i (vease apéndice). De todo lo anterior y del Teorema 4.1.10 se obtiene

$$\begin{aligned}
e^{B(1/\alpha)}e^{\omega u}(1-H(u)) &= e^{B(1/\alpha)}e^{\omega u}\int_u^\infty dH(x) \\
&= e^{\omega u}\int_u^\infty e^{B(1/\alpha)}e^{-\omega x}dH_1(x) \\
&= \int_u^\infty e^{\omega(u-x)}\nu(dx) \\
&= \int_u^\infty e^{\omega(u-x)}U(dx) \\
&= \int_{-\infty}^\infty e^{\omega(u-x)}\delta_{u-x}((-\infty,0])U(dx) \\
&\longrightarrow \frac{1}{E[S_{\tau_+^{-\omega}}]}\int_{-\infty}^\infty e^{\omega s}\delta_s((-\infty,0])ds = \frac{1}{\omega E[S_{\tau_+^{-\omega}}]} \ \text{ cuando } \ u\to\infty,
\end{aligned}$$

De aquí se sigue (2.24).

Capítulo 3

Comonotonicidad en Finanzas y aplicaciones para calcular precios de activos financieros

3.1 Introducción

En un contexto de seguros se está interesado en la distribución de sumas de variables aleatorias. Tales sumas aparecen cuando se consideran las reclamaciones agregadas de un portafolio de seguros sobre un cierto período de referencia. También aparecen cuando se consideran pagos descontados relacionados a una sola poliza o a un portafolio en diferentes puntos en el tiempo. La suposición de independencia mutua es muy adecuada desde el punto de vista computacional, pero algunas veces no es realista. En esta sección describiremos como tomar decisiones más seguras sobre sumas de variables aleatorias X_i's cuando sólo se conocen la distribuciones marginales de las X_i, y no la dependencia entre ellas. La dependencia más fuerte que puede haber entre ellas es la conocida como comonotonicidad. Consideraremos la suma de variables aleatorias cuyos elementos pertenecen a un vector comonotónico, las cuales denotaremos por S^c. Entre las ventajas más importantes que la suma comonotónica S^c ofrece sobre la suma ordinaria S son las siguientes:

1. Las variables aleatorias S y S^c tienen el mismo valor esperado.

2. La función de distribución de S puede ser obtenida solamente si la estructura de dependencia se conoce, aún así puede ser una tarea no sencilla de llevar a cabo. En cambio, la función de distribución de S^c se obtiene facilmente, S^c tiene distribución unidimensional, únicamente dependiendo de una variable aleatoria uniforme U.

3. Las primas stop-loss de S^c se pueden calcular a partir de las primas stop-loss de las marginales involucradas. En contraste, las primas stop-loss de S solo pueden ser obtenidas cuando la estructura de dependencia es conocida.

3.2 Comonotonicidad

3.2.1 Definición y propiedades

Antes de dar la definición de comonotonicidad veremos resultados útiles en la construcción de cotas comonotónicas. En lo que sigue se considerarán variables aleatorias con media finita. Para este tipo de variables aleatorias se tiene el siguiente resultado.

Proposición 3.2.1 *Sea X variable aleatoria con función de distribución acumulada F_X que cumple $E(X) < \infty$. Entonces*

1. $\lim_{x\to\infty} x(1 - F_X(x)) = 0$, $\lim_{x\to-\infty} xF_X(x) = 0$.
2. $E(X) = -\int_{-\infty}^{0} F_X(x)dx + \int_0^\infty (1 - F_X(x))dx$

Demostración. Tenemos

$$x(1 - F_X(x)) = x\int_x^\infty dF_X(t) \leq \int_x^\infty tdF_X(t).$$

Debido a que $E(X) < \infty$, $\lim_{x\to\infty} \int_x^\infty tdF_X(t) = 0$. Y de la desigualdad anterior se sigue la primera parte de *1.* En forma análoga se muestra

$$xF_X(-x) \leq -\int_{-\infty}^{-x} tdF_X(t) \longrightarrow 0, \;\; x \to \infty.$$

De aquí se sigue la segunda parte de *1.*

De la técnica de integración por partes, la primera parte del teorema y la relación:

$$E(X) = \int_{-\infty}^{0} xdF_X(x) - \int_0^\infty xd(1 - F_X(x)),$$

se sigue *2.* ■

Si además tenemos $E(X^2) < \infty$, entonces *1* se cumple con x^2 en lugar de x, i.e.

$$\lim_{x\to\infty} x^2(1 - F_X(x)) = 0, \lim_{x\to-\infty} x^2 F_X(x) = 0.$$

Ahora se define la prima stop-loss, la cual será de utilidad para "ordenar" variables aleatorias.

Definición 3.2.2 *La prima stop-loss de una variable aleatoria X con retención d, está definida por*

$$\pi_X(d) := E[(X - d)_+].$$

En la matemática actuarial, una compañía aseguradora puede protegerse de una reclamación X (variable aleatoria no negativa), adquiriendo un seguro a otra compañía de seguros (reaseguro). Una forma de hacerlo es adquiriendo un seguro del tipo stop-loss. En este tipo de reaseguros, la compañía aseguradora retiene una cantidad d, llamada *retención*. Si la reclamación X excede la retención d la compañia reaseguradora se compromete a pagar la diferencia $X - d$; caso contrario, la compañía aseguradora cubre la reclamación. De esta manera, la prima stop-loss es la cantidad promedio que la compañía reaseguradora tiene que cubrir en el caso que una reclamación ocurra.

Nótese que de la Proposición 3.2.1 se sigue que

$$\begin{aligned}
\pi_X(d) &= -\int_d^\infty (x-d)d(1-F_X(x)) \\
&= -(x-d)(1-F_X(x))|_d^\infty + \int_d^\infty (1-F_X(x))dx \\
&= \int_d^\infty (1-F_X(x))dx, \quad -\infty < d < +\infty. \qquad (3.1)
\end{aligned}$$

De aquí que π_X sea derivable y su derivada sea

$$\pi_X'(d) = F_X(d) - 1.$$

Lo anterior muestra que π_X es una función continua decreciente de d, con derivada $F_X(d)-1$ en d y que satisface:

$$\lim_{d\to\infty} \pi_X(d) = 0.$$

Ahora se define el orden stop-loss para variables aleatorias.

Definición 3.2.3 *Sean X e Y variables aleatorias. Se dice que X precede a Y en orden stop-loss, denotado $X \leq_{sl} Y$, si $\pi_X(d) \leq \pi_Y(d)$, $-\infty < d < +\infty$.*

Teorema 3.2.4 *Si $X \leq_{sl} Y$ entonces $E(X) \leq E(Y)$. Recíprocamente, si $E(X) \leq E(Y)$ y las funciones F_X y F_Y se cruzan solo una vez, entonces $X \leq_{sl} Y$.*

Demostración. Tenemos de (3.1)

$$d + E[(X-d)_+] = -\int_d^0 F_X(x)dx + \int_0^\infty (1-F_X(x))dx, \quad d < 0.$$

De aquí y la Proposición 3.2.1

$$E(X) = \lim_{d\to-\infty}(d + E[(X-d)_+]) \leq \lim_{d\to-\infty}(d + E[(Y-d)_+]) = E(Y).$$

Recíprocamente, supóngase $E(X) \leq E(Y)$, F_X y F_Y solo se cruzan una vez y denótese por c el punto de cruce. Sea f definida por

$$f(d) = E[(Y-d)_+] - E[(X-d)_+], \quad -\infty < d < +\infty.$$

Entonces $f'(d) = F_Y(d) - F_X(d)$ cumple $f'(d) \geq 0$, $d < c$, $f'(d) \leq 0$, $d > c$ (f crece y luego decrece). Ya que $\lim_{d\to-\infty} f(d) = E(Y) - E(X) \geq 0$, $\lim_{d\to\infty} f(d) = 0$, se sigue $f \geq 0$, es decir, $X \leq_{sl} Y$. ∎

Definición 3.2.5 *Sean X e Y variables aleatorias. Se dice que X precede a Y en orden convexo, denotado $X \leq_{cx} Y$, si*

$$\begin{aligned} E(X) &= E(Y) \\ E[(X-d)_+] &\leq E[(Y-d)_+], \quad -\infty < d < +\infty. \end{aligned}$$

En general, estamos interesados en valores grandes de una pérdida aleatoria. El orden stop-loss nos dice que Y genera pérdidas más grandes si $\pi_X(d) \leq \pi_Y(d)$, de esta forma Y se dice que es menos atractiva que X. Los valores negativos de esta variable aleatoria pueden interpretarse como ganancias. No obstante, demasiadas ganancias puede ser perjudicial desde el punto de vista de impuestos, es por esta razón que se pide $E[(d-X)_+] \leq E[(d-Y)_+]$ (Teorema 3.2.6). Esta es la motivación del orden convexo. Nótese también que $X \leq_{cx} Y$ si y sólo si $-X \leq_{cx} -Y$, de esta forma, la interpretación de las variables aletorias como pagos o ingresos es irrelevante.

Nótese que de la Proposición 3.2.1 y de la técnica de integración por partes se sigue

$$E[(d-X)_+] = \int_{-\infty}^{d} F_X(x)dx.$$

Por lo tanto,

$$d - E[(d-X)_+] = -\int_{-\infty}^{0} F_X(x)dx + \int_{0}^{d} (1-F_X(x))dx, \quad d > 0,$$

de donde, usando la Proposición 3.2.1 parte *2*,

$$\lim_{d\to+\infty} (d - E[(d-X)_+]) = E(X). \tag{3.2}$$

El siguiente teorema no es más que otra forma de caracterizar el orden convexo.

Teorema 3.2.6 *Sean X e Y variables aleatorias. Entonces $X \leq_{cx} Y$ si y sólo si*

$$\begin{aligned} E[(X-d)_+] &\leq E[(Y-d)_+], \quad -\infty < d < +\infty, \\ E[(d-X)_+] &\leq E[(d-Y)_+], \quad -\infty < d < +\infty. \end{aligned}$$

Demostración. Supongamos que $X \leq_{cx} Y$. Entonces

$$\begin{aligned} E[(X-d)_+] - E[(d-X)_+] &= \int_{d}^{\infty} (x-d)dF_X(x) - \int_{-\infty}^{d} (d-x)dF_X(x) \\ &= E(X) - d. \end{aligned}$$

Ya que $E(X) = E(Y)$, la segunda desigualdad se sigue.

Recíprocamente, supongamos que las dos desigualdades del teorema se satisfacen. De la primera desigualdad resulta

$$E(X) = \lim_{d\to-\infty}(d + E[(X-d)_+]) \leq \lim_{d\to-\infty}(d + E[(Y-d)_+]) = E(Y).$$

Por (3.2) y la segunda desigualdad resulta

$$E(X) = \lim_{d\to+\infty}(d - E[(d-X)_+]) \geq \lim_{d\to+\infty}(d - E[(d-Y)_+]) = E(Y).$$

Y de aquí se sigue que $X \leq_{cx} Y$. ■

Se puede demostrar que $X \leq_{cx} Y$ si y sólo si $E[v(X)] \leq E[v(Y)]$, para cualquier función convexa v, con el supuesto de que los valores esperados existen. Ésta es la razón del nombre orden convexo.

Ahora supóngase que $E(X^2), E(Y^2) < \infty$. Ya que $v(x) = x^2$ es convexa se sigue que $Var(X) \leq Var(Y)$ si $X \leq_{cx} Y$. El recíproco en general no es cierto. Con esta suposición tenemos el siguiente teorema,

Teorema 3.2.7 *Sean X e Y variables aleatorias con $E(X^2), E(Y^2) < \infty$ y $X \leq_{cx} Y$. Entonces*

$$\int_{-\infty}^{\infty} \{E[(Y-t)_+] - E[(X-t)_+]\}\, dt = \frac{1}{2}[Var(Y) - Var(X)].$$

Demostración. Es suficiente demostrar

$$\int_{-\infty}^{\infty}\{E[(X-t)_+] - (E(X)-t)_+\}dt = \frac{1}{2}Var(X). \tag{3.3}$$

Tenemos

$$\int_{-\infty}^{\infty}\{E[(X-t)_+] - (E(X)-t)_+\}dt = \int_{-\infty}^{E(X)} E[(t-X)_+]dt + \int_{E(X)}^{\infty} E[(X-t)_+]dt,$$

porque $E[(X-t)_+] - E[(t-X)_+] = E(X) - t$.

Ahora bien

$$\begin{aligned}
\int_{-\infty}^{E(X)} E[(t-X)_+]dt &= \int_{-\infty}^{E(X)}\int_{-\infty}^{t} F_X(x)dxdt \\
&= \int_{-\infty}^{E(X)}\int_{x}^{E(X)} F_X(x)dtdx \\
&= \int_{-\infty}^{E(X)} [E(X)-x]F_X(x)dx \\
&= \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{E(X)} [x-E(X)]^2 dF_X(x),
\end{aligned}$$

donde para obtener la última igualdad se usó integración por partes. En forma análoga,

$$\begin{aligned}\int_{E(X)}^{\infty} E[(X-t)_+]dt &= \int_{E(X)}^{\infty}\int_{t}^{\infty}(1-F_X(x))dxdt\\ &= \int_{E(X)}^{\infty}(x-E(X))(1-F_X(x))dx\\ &= \frac{1}{2}\int_{E(X)}^{\infty}[x-E(X)]^2 dF_X(x).\end{aligned}$$

De aquí se sigue (3.3). ■

Corolario 3.2.8 *Si* $X \leq_{cx} Y$ *y* $Var[X] = Var[Y]$, *entonces* $X \stackrel{d}{=} Y$. *Por lo tanto, si* $X \stackrel{d}{\neq} Y$ *y* $X \leq_{cx} Y$ *entonces* $Var[X] < Var[Y]$.

3.2.2 Funciones inversas

Definición 3.2.9 *Sea* F_X *la función de distribución de una variable aleatoria* X. *La función inversa de* F_X, *denotada* F_X^{-1}, *se define por*

$$F_X^{-1}(p) := \inf\{x \in \mathbb{R} : F_X(x) \geq p\}, \;\; p \in [0,1],$$

donde $\inf \phi = +\infty$ *por convención.*

Para F_X^{-1} tenemos la siguiente proposición.

Proposición 3.2.10 *Sea* F_X *la función de distribución de una variable aleatoria* X, *con inversa* F_X^{-1}. *Entonces*

1. *Para toda* $x \in \mathbb{R}$ *y* $p \in [0,1]$ *se cumple:* $F_X^{-1}(p) \leq x$ *si y sólo si* $p \leq F_X(x)$.

2. F_X^{-1} *es no decreciente y continua a la izquierda.*

Demostración. De la definición se sigue la parte *1* y el hecho que F_X^{-1} es no decreciente. Demostraremos ahora que F_X^{-1} es continua a la izquierda. Sean $p \in (0,1]$, $p_n \uparrow p$, y supongamos que $F_X^{-1}(p-) < F_X^{-1}(p)$. Entonces existen y y $\delta > 0$ tales que

$$F_X^{-1}(p_n) < y < F_X^{-1}(p) - \delta, \;\forall n. \tag{3.4}$$

De la primera parte de la proposición y la parte izquierda de (3.4) se sigue que $p_n \leq F_X(y)$, de donde $p \leq F_X(y)$. Aplicando nuevamente la primera parte de la proposición, resulta $F_X^{-1}(p) \leq y$, lo que contradice la parte derecha de (3.4). Por lo tanto F_X^{-1} es continua a la izquierda. ■

Otra forma de definir la inversa de F_X es la siguiente.

Definición 3.2.11 *Sea F_X^{-1+} definida por*

$$F_X^{-1+}(p) := \sup\{x \in \mathbb{R} : F_X(x) \leq p\}, \ \ p \in [0,1],$$

con la convención $\sup \phi = -\infty$.

Se puede demostrar, como en la proposición anterior, que F_X^{-1+} es no decreciente y continua a la derecha. Nótese que $F_X^{-1}(0) = -\infty$, $F_X^{-1+}(1) = +\infty$ y que toda la masa de probabilidad de X está concentrada en el intervalo $[F_X^{-1+}(0), F_X^{-1}(1)]$. Nótese también que $F_X^{-1}(p), F_X^{-1+}(p)$ son finitos para todo $p \in (0,1)$.

En lo que sigue $p \in (0,1)$, a menos que se especifique lo contrario.

Definición 3.2.12 *Para $\alpha \in [0,1]$, sea*

$$F_X^{-1(\alpha)}(p) = \alpha F_X^{-1}(p) + (1-\alpha)F_X^{-1+}(p), \ \ p \in (0,1),$$

la α-inversa de F_X.

Corolario 3.2.13 *Para d que satisface $0 < F_X(d) < 1$ se cumple*

$$F_X^{-1}(F_X(d)) \leq d \leq F_X^{-1+}(F_X(d)).$$

De aquí existe α_d tal que $F_X^{-1(\alpha_d)}(F_X(d)) = d$.

El siguiente teorema muestra la relación entre la inversa de la distribución de una variable aleatoria X y la inversa de una transformación monotona $g(X)$ de X.

Teorema 3.2.14 *Sean X, $g(X)$ variables aleatorias y $0 < p < 1$.*

1. *Si g es no decreciente y continua a la izquierda, entonces*

$$F_{g(X)}^{-1}(p) = g(F_X^{-1}(p)).$$

2. *Si g es no decreciente y continua a la derecha, entonces*

$$F_{g(X)}^{-1+}(p) = g(F_X^{-1+}(p)).$$

3. *Si g es no creciente y continua a la izquierda, entonces*

$$F_{g(X)}^{-1+}(p) = g(F_X^{-1}(1-p)).$$

4. *Si g es no creciente y continua a la derecha, entonces*

$$F_{g(X)}^{-1}(p) = g(F_X^{-1+}(1-p)).$$

Demostración. Se demostrará la parte *1*, los demás incisos son análogos. Sea $0 < p < 1$. Nótese que si se cumple la equivalencia:

$$F_{g(X)}^{-1}(p) \leq x \iff g(F_X^{-1}(p)) \leq x, \ \ \forall\, x \in \mathbb{R}, \tag{3.5}$$

entonces *1* se sigue. En efecto, debido a que $g(F_X^{-1}(p)) \leq g(F_X^{-1}(p))$, tenemos que se cumple $F_{g(X)}^{-1}(p) \leq g(F_X^{-1}(p))$, y si x es tal que $F_{g(X)}(x) \geq p$, entonces por la parte *1* de la Proposición 3.2.10, $F_{g(X)}^{-1}(p) \leq x$, (3.5) implica $g(F_X^{-1}(p)) \leq x$ y de aquí $F_{g(X)}^{-1}(p) \geq g(F_X^{-1}(p))$. Por lo tanto es suficiente demostrar (3.5).

Usando la parte *1* de Proposición 3.2.10 tenemos

$$F_{g(X)}^{-1}(p) \leq x \iff p \leq F_{g(X)}(x),$$

y debido a que g es no decreciente y continua a la izquierda, se tiene que para cualesquiera z, x reales:

$$g(z) \leq x \iff z \leq \sup\{y : g(y) \leq x\}.$$

De aquí

$$p \leq F_{g(X)}(x) \iff p \leq F_X(\sup\{y : g(y) \leq x\}).$$

Si $\sup\{y : g(y) \leq x\}$ es finito, entonces *1* de la Proposición 3.2.10 implica

$$p \leq F_X(\sup\{y : g(y) \leq x\}) \iff F_X^{-1}(p) \leq \sup\{y : g(y) \leq x\}. \tag{3.6}$$

En el caso en que $\sup\{y : g(y) \leq x\} = -\infty$, la equivalencia (3.6) se convierte en

$$p \leq 0 \iff F_X^{-1}(p) \leq -\infty,$$

la cual cierta, si $\sup\{y : g(y) \leq x\} = +\infty$, la equivalencia (3.6) se convierte en

$$p \leq 1 \iff F_X^{-1}(p) \leq +\infty,$$

que también se cumple. En cualquier caso obtenemos (3.6). Por otro lado, debido a que g es no decreciente y continua a la izquierda se sigue

$$F_X^{-1}(p) \leq \sup\{y : g(y) \leq x\} \iff g(F_X^{-1}(p)) \leq x.$$

Combinando todas las equivalencias obtenemos (3.5). ■

Sea U variable aleatoria distribuida uniformemente en el intervalo $(0,1)$. Nótese que $F_X^{-1}(p)$ y $F_X^{-1+}(p)$ son diferentes solo en segmentos horizontales y debido a que F_X tiene a lo más un número contable de segmentos horizontales, se sigue que para cualquier $\alpha \in [0,1]$

$$F_X^{-1}(U) \overset{d}{=} F_X^{-1+}(U) \overset{d}{=} F_X^{-1(\alpha)}(U).$$

Ahora bien, para $F_X^{-1}(U)$ tenemos

$$F_{F_X^{-1}(U)}(x) = P(U \leq F_X(x)) = F_X(x).$$

De esta manera hemos establecido la siguiente proposición.

Proposición 3.2.15 *Si U tiene distribución uniforme en $(0,1)$, entonces para $\alpha \in [0,1]$,*

$$X \stackrel{d}{=} F_X^{-1}(U) \stackrel{d}{=} F_X^{-1+}(U) \stackrel{d}{=} F_X^{-1(\alpha)}(U).$$

Ahora definimos el concepto de comonotonicidad. En lo que sigue, denotaremos por $\mathbf{x}$ al vector $(x_1, \ldots, x_n)$ y escribiremos $\mathbf{x} \leq \mathbf{y}$ si $x_i \leq y_i$, para todo $i = 1, \ldots, n$.

Definición 3.2.16 *Un conjunto $A \subset \mathbb{R}^n$ es llamado comonotónico si para cualesquiera $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in A$ se cumple $\mathbf{x} \leq \mathbf{y}$ o $\mathbf{x} \geq \mathbf{y}$.*

De esta manera, un conjunto $A \subset \mathbb{R}^n$ es comonotónico, si para cualesquiera $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in A$, si $x_i \leq y_i$ para algún i, entonces se debe cumplir $\mathbf{x} \leq \mathbf{y}$; por lo tanto los componentes crecen monotonamente en conjunto, de donde viene el nombre “comonotónico”.

Denotaremos por $A_{i,j}$ la (i,j)-ésima proyección de A, es decir,

$$A_{i,j} = \{(x_i, x_j) \mid \mathbf{x} \in A\}.$$

De esta forma tenemos el siguiente lema.

Lema 3.2.17 *$A \subset \mathbb{R}^n$ es comonotónico si y sólo si $A_{i,j}$ es comonotónico para todo $i \neq j$.*

Demostración. De la definición se sigue que si A es comonotónico, $A_{i,j}$ también tiene que serlo. Ahora supongamos que $A_{i,j}$ es comonotónico para todo $i \neq j$. Sean $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in A$. Si se cumple $x_i \leq y_i$ para algún i, entonces $x_j \leq y_j$ para todo $j \neq i$ porque $A_{i,j}$ es comonotónico, es decir, $\mathbf{x} \leq \mathbf{y}$. En forma similar, si tenemos que $x_i \geq y_i$ para algún i, entonces $\mathbf{x} \geq \mathbf{y}$. Por lo tanto, A es comonotónico. ■

En general, la comonotonicidad de $A_{i,i+1}$, $i = 1, \ldots, n-1$ no implica la comonotonicidad de A: considerése A dado por

$$A = \{(x_1, 1, x_2) \mid 0 < x_1, x_2 < 1\}.$$

A no es comonotónico, sin embargo $A_{1,2}$ y $A_{2,3}$ si lo son.

Definición 3.2.18 *Un vector aleatorio $\mathbf{X} = (X_1, \ldots, X_n)$ es comonotónico si tiene soporte comonotónico.*

La definición de comonotonicidad de un vector aleatorio $\mathbf{X}$ implica que sus componentes crecen o decrecen simultaneamente. Además, grandes valores de un componente X_i estan asociados con grandes valores de cualquier otro componente X_k. El siguiente teorema proporciona algunas caracterizaciones equivalentes de comonotonicidad.

Teorema 3.2.19 *Un vector aleatorio* $\mathbf{X}$ *es comonotónico si y sólo si una de las siguientes condiciones equivalentes se cumple:*

1. $\mathbf{X}$ *tiene soporte comonotónico.*

2. *Para todo* $\mathbf{x} = (x_1, \ldots, x_n)$*, tenemos*

$$F_{\mathbf{X}}(\mathbf{x}) = \min\{F_{X_1}(x_1), \ldots, F_{X_n}(x_n)\}.$$

3. *Para* U *variable aleatoria uniforme en* $(0,1)$*, tenemos*

$$\mathbf{X} \stackrel{d}{=} (F_{X_1}^{-1}(U), \ldots, F_{X_n}^{-1}(U)). \tag{3.7}$$

4. *Existe una variable aleatoria* Z *y funciones no decrecientes* f_i*,* $i = 1, \ldots, n$*, tales que*

$$\mathbf{X} \stackrel{d}{=} (f_1(Z), \ldots, f_n(Z)).$$

Demostración. Supongamos que *1* se cumple y demostremos *2*. Sea B el soporte comonotónico de $\mathbf{X}$. Sea $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ y A_j definido por

$$A_j = \{y \in B : y_j \leq x_j\}, \;\; j = 1, \ldots, n.$$

De la comonotonicidad de B se sigue que existe i tal que $A_i = \bigcap_{j=1}^n A_j$. Por lo tanto $A_i \subset A_j$, y de aquí $F_{X_i}(x_i) \leq F_{X_j}(x_j)$ para todo $j \neq i$. De esta manera

$$\begin{aligned} F_{\mathbf{X}}(\mathbf{x}) &= P(\mathbf{X} \in A_j, j = 1, \ldots, n) \\ &= P(\mathbf{X} \in A_i) \\ &= F_{X_i}(x_i) \\ &= \min\{F_{X_1}(x_1), \ldots, F_{X_n}(x_n)\}, \end{aligned}$$

obtenemos la parte *2*.

Ahora supongamos que *2* es cierto, esto es

$$F_{\mathbf{X}}(\mathbf{x}) = \min\{F_{X_1}(x_1), \ldots, F_{X_n}(x_n)\}, \;\; \mathbf{x} = (x_1, \ldots, x_n).$$

Por la Proposicion 3.2.10,

$$\begin{aligned} P(F_{X_1}^{-1}(U) \leq x_1, \ldots, F_{X_n}^{-1}(U) \leq x_n) &= P(U \leq F_{X_1}(x_1), \ldots, U \leq F_{X_n}(x_n)) \\ &= P(U \leq \min\{F_{X_i}(x_i), i = 1, \ldots, n\}) \\ &= \min\{F_{X_i}(x_i), i = 1, \ldots, n\}, \end{aligned}$$

y obtenemos *3*.

Si *3* es cierto, tomando $Z = U$, $f_i = F_{X_i}^{-1}$, $i = 1, \ldots, n$ se sigue *4*.

Por último supongamos que *4* se satisface. Esto es, existe variable aleatoria Z con soporte S y funciones no decrecientes f_i, $i = 1, \ldots, n$ tales que

$$\mathbf{X} \stackrel{d}{=} (f_1(Z), \ldots, f_n(Z)).$$

De esta manera el conjunto de posibles valores de $\mathbf{X}$ es $\{f_1(z), \ldots, f_n(z) \mid z \in S\}$, el cual es comonotónico y de aquí se verifica *1*. ■

De (3.7) vemos que si todas las $X_i's$ son idénticamente distribuidas, la comonotonicidad de $\mathbf{X}$ es equivalente a $X_1 = \ldots = X_n$ con probabilidad 1.

Como los vectores $(F_{X_1}^{-1}(U), \ldots, F_{X_n}^{-1}(U))$ y $(F_{X_1}^{-1(\alpha_1)}(U), \ldots, F_{X_n}^{-1(\alpha_n)}(U))$, $\alpha_i \in [0, 1]$ son iguales con probabilidad uno. Entonces, $\mathbf{X}$ es comonotónico si y sólo si

$$\mathbf{X} \stackrel{d}{=} (F_{X_1}^{-1(\alpha_1)}(U), \ldots, F_{X_n}^{-1(\alpha_n)}(U)),$$

donde U es una variable aleatoria distribuida uniformemente en el intervalo $(0, 1)$. Además, debido a que $1 - U$ también se distribuye uniformemente en $(0, 1)$, $\mathbf{X}$ es comonotónico si y sólo si

$$\mathbf{X} \stackrel{d}{=} (F_{X_1}^{-1}(1 - U), \ldots, F_{X_n}^{-1}(1 - U)).$$

De esta forma, se puede demostrar que $\mathbf{X}$ es comonotónico si y sólo si existe una variable aleatoria Z y funciones no crecientes f_i, $i = 1, \ldots, n$, tales que

$$\mathbf{X} \stackrel{d}{=} (f_1(Z), \ldots, f_n(Z)).$$

El Teorema 3.2.19 asegura la existencia de un vector comonotónico con las mismas marginales que $\mathbf{X}$. De ahora en adelante denotaremos por $\mathbf{X}^c := (X_1^c, \ldots, X_n^c)$ al vector comonotónico resultante del Teorema 3.2.19. De (3.7), vemos que para cualquier vector aleatorio $\mathbf{X}$, el soporte del vector comonotónico $\mathbf{X}^c$ es el conjunto

$$\{(F_{X_1}^{-1}(p), \ldots, F_{X_n}^{-1}(p)) \mid 0 < p < 1\}.$$

Este soporte de $\mathbf{X}^c$ no necesariamente es una curva conexa. Todos los segmentos horizontales de cada F_{X_i} pueden crear "piezas faltantes" en esta curva. Este soporte puede ser visto como una serie de curvas ordenadas conexas. Si se unen los puntos extremos de las curvas consecutivas, obtenemos una curva comonotónica en $\mathbb{R}^n$. De aquí, puede ser recorrida en dirección creciente para todos los componentes simultaneamente. De esta manera tenemos la siguiente definición.

Definición 3.2.20 *El soporte conexo del vector comonotónico* $\mathbf{X}^c$ *está dado por:*

$$\{(F_{X_1}^{-1(\alpha)}(p), \ldots, F_{X_n}^{-1(\alpha)}(p)) \mid 0 < p < 1, 0 \leq \alpha \leq 1\}.$$

Nótese que la parametrización del soporte conexo de un vector comonotónico no es necesariamente única. Existen puntos en el soporte que pueden ser representados por diferente valores de α.

Definición 3.2.21 *Sea* $\mathbf{X}^c = (X_1^c, \ldots, X_n^c)$ *vector comonotónico y sea* S^c *la suma de los componentes del vector, es decir*

$$S^c = X_1^c + \ldots + X_n^c.$$

Una de las ventajas del uso de vectores comonotónicos es que se puede obtener la función de distribución conjunta con solo el conocimiento de las marginales. Además, como se verá más adelante, la prima stop-loss para la suma de sus coordenadas se puede calcular en términos de las primas stop-loss de cada coordenada.

Teorema 3.2.22 *La distribución* α*-inversa* $F_{S^c}^{-1(\alpha)}$ *de una suma* S^c *de variables aleatorias comonotónicas está dada por*

$$F_{S^c}^{-1(\alpha)}(p) = \sum_{i=1}^{n} F_{X_i}^{-1(\alpha)}(p), \;\; 0 < p < 1, \;\; 0 \leq \alpha \leq 1.$$

Demostración. Tenemos

$$g(U) \stackrel{d}{=} X_1^c + \ldots + X_n^c,$$

donde $g(u) = \sum_{i=1}^{n} F_{X_i}^{-1}(u)$, U variable aleatoria distribuida uniformemente en $(0,1)$. Es claro que g es no decreciente y continua a la izquierda, entonces por el Teorema 3.2.14

$$\begin{aligned} F_{S^c}^{-1}(p) &= F_{g(U)}^{-1}(p) \\ &= g(F_U^{-1}(p)) \\ &= \sum_{i=1}^{n} F_{X_i}^{-1}(p), \;\; 0 < p < 1. \end{aligned} \tag{3.8}$$

En forma análoga se muestra

$$F_{S^c}^{-1+}(p) = \sum_{i=1}^{n} F_{X_i}^{-1+}(p). \tag{3.9}$$

Multiplicando (3.8) por α, (3.9) por $(1-\alpha)$, y sumando, se sigue el resultado. ■

El teorema anterior implica que la α-inversa de la suma de un vector comonotónico está completamente determinada por la α-inversa de cada uno de sus componentes. Además

$$S^c \stackrel{d}{=} \sum_{i=1}^{n} F_{X_i}^{-1(\alpha)}(U).$$

Y por el teorema anterior, el soporte conexo de S^c está dado por

$$\{F_{S^c}^{-1(\alpha)}(p) \mid 0 < p < 1, 0 \leq \alpha \leq 1\}.$$

Esto implica

$$
\begin{aligned}
F_{S^c}^{-1+}(0) &= \sum_{i=1}^{n} F_{X_i}^{-1+}(0), && (3.10)\\
F_{S^c}^{-1}(1) &= \sum_{i=1}^{n} F_{X_i}^{-1}(1). && (3.11)
\end{aligned}
$$

De aquí, el valor mínimo de una suma comonotónica es igual a la suma de los valores mínimos de cada término. En forma similar, el valor máximo de la suma comonotónica es igual a la suma de los valores máximos de cada término. Nótese también

$$
\begin{aligned}
F_{S^c}^{-1+}(1) &= \sum_{i=1}^{n} F_{X_i}^{-1+}(1) = +\infty,\\
F_{S^c}^{-1}(0) &= \sum_{i=1}^{n} F_{X_i}^{-1}(0) = -\infty.
\end{aligned}
$$

Para cada i, $X_i \geq F_{X_i}^{-1+}(0)$ con probabilidad 1. Por lo tanto, para cualquier vector $\mathbf{X} = (X_1, \ldots, X_n)$, $S \geq \sum_{i=1}^{n} F_{X_i}^{-1+}(0)$ con probabilidad 1. Esto implica

$$\sum_{i=1}^{n} F_{X_i}^{-1+}(0) \leq F_S^{-1+}(0).$$

En forma similar,

$$F_S^{-1}(1) \leq \sum_{i=1}^{n} F_{X_i}^{-1}(1).$$

Esto quiere decir que la suma S de los componentes de cualquier vector $\mathbf{X}$ tiene soporte contenido en el intervalo $[\sum_{i=1}^{n} F_{X_i}^{-1+}(0), \sum_{i=1}^{n} F_{X_i}^{-1}(1)]$.

Dadas las funciones inversas $F_{X_i}^{-1}$, $i = 1, \ldots, n$, por el Teorema 3.2.22 la función de distribución de S^c puede ser determinada como sigue

$$
\begin{aligned}
F_{S^c}(x) &= \sup\{p \in (0,1) : F_{S^c}(x) \geq p\}\\
&= \sup\{p \in (0,1) : F_{S^c}^{-1}(p) \leq x\}\\
&= \sup\left\{p \in (0,1) : \sum_{i=1}^{n} F_{X_i}^{-1}(p) \leq x\right\} && (3.12)
\end{aligned}
$$

En lo que sigue, para cualquier variable aletoria X, la expresión "F_X estrictamente creciente" será interpretada como "F_X estrictamente creciente sobre $(F_X^{-1+}(0), F_X^{-1}(1))$". Observese que para cualquier variable aleatoria X: F_X es estrictamente creciente si y sólo si F_X^{-1} es continuo en $(0,1)$; F_X es continuo si y sólo si F_X^{-1} es estrictamente creciente en $(0,1)$. De esta manera, si F_{X_i} es continua y estrictamente creciente, también lo será F_{S^c}.

Por lo tanto, en el caso que todas las marginales sean estrictamente crecientes y continuas, para cualquier $x \in (F_{S^c}^{-1+}(0), F_{S^c}^{-1}(1))$, la probabilidad F_{S^c} está únicamente determinada por $F_{S^c}^{-1}(F_{S^c}(x)) = x$, o equivalentemente

$$\sum_{i=1}^{n} F_{X_i}^{-1}(F_{S^c}(x)) = x, \;\; F_{S^c}^{-1+}(0) < x < F_{S^c}^{-1}(1). \tag{3.13}$$

En el siguiente teorema mostraremos que las primas stop-loss de una suma de variables aleatorias comonotónicas pueden ser obtenidas de las primas stop-loss de cada término.

Teorema 3.2.23 *Las primas stop-loss de la suma S^c de los componentes de un vector comonotónico $(X_1, \ldots, X_n)$ estan dadas por*

$$E[(S^c - d)_+] = \sum_{i=1}^{n} E[(X_i - d_i)_+], \;\; F_{S^c}^{-1+}(0) < d < F_{S^c}^{-1}(1), \tag{3.14}$$

donde d_i está dado por

$$d_i = F_{X_i}^{-1(\alpha_d)}(F_{S^c}(d)), \;\; i = 1, \ldots, n, \tag{3.15}$$

y $\alpha_d \in [0, 1]$ determinada por

$$F_{S^c}^{-1(\alpha_d)}(F_{S^c}(d)) = d. \tag{3.16}$$

Demostración. Sea H dado por

$$H = \{\mathbf{x} : x_1 + \ldots + x_n = d\}.$$

Tomemos $d \in (F_{S^c}^{-1+}(0), F_{S^c}^{-1}(1))$, i.e., $0 < F_{S^c}(d) < 1$. Nótese que el hiperplano H no contiene puntos $\mathbf{x}$, $\mathbf{y}$, tales que $\mathbf{x} < \mathbf{y}$ o $\mathbf{x} > \mathbf{y}$. Por lo tanto existe a lo más un punto en la intersección del hiperplano H con el soporte conexo de X^c. Mostraremos que $\mathbf{d} = (d_1, \ldots, d_n)$ definido como en el teorema es el único punto de intesección. Debido a que $0 < F_{S^c}(d) < 1$, existe $\alpha_d \in [0, 1]$ tal que se satisface (3.16). Además, por el teorema anterior $\sum_{i=1}^{n} d_i = d$. Por lo tanto $\mathbf{d}$ es el único punto en la intersección del soporte conexo S^c con el hiperplano H.

Ahora sea $\mathbf{x}$ elemento del soporte conexo de X^c. Entonces se sigue

$$(x_1 + \ldots + x_n - d)_+ = (x_1 - d_1)_+ + \ldots + (x_n - d_n)_+.$$

Esto es cierto porque $\mathbf{x}$ y $\mathbf{d}$ pertenecen al soporte conexo de $\mathbf{X}^c$, y de aquí si existe j tal que $x_j > d_j$, entonces tenemos que $x_k \geq d_k$ para todo k, entonces el lado izquierdo y el derecho son iguales porque $\sum_{i=1}^{n} d_i = d$. Por otro lado, si $x_i \leq d_i$ para todo i, el lado izquierdo también es cero. Reemplazando las constantes por las variables aleatorias en la igualdad anterior y tomando esperanza, obtenemos (3.14). ∎

Nótese que

$$E[(S^c - d)_+] = \sum_{i=1}^{n} E(X_i) - d, \;\; \text{si } d \leq F_{S^c}^{-1+}(0), \tag{3.17}$$

y

$$E[(S^c-d)_+]=0,\ \text{ si } d\geq F_{S^c}^{-1}(1). \tag{3.18}$$

De esta manera de (3.10), (3.11), (3.17), (3.18) y del teorema anterior se concluye que para cualquier real d, existen d_i con $\sum_{i=1}^n d_i=d$, tales que $E[(S^c-d)_+]=\sum_{i=1}^n E[(X_i-d_i)_+]$.

La expresión de las primas stop-loss de S^c puede ser escrita en términos de funciones de distribución inversas. En efecto, para cualquier $d\in(F_{S^c}^{-1+}(0),F_{S^c}^{-1}(1))$ se tiene

$$\begin{aligned}
&E[(X_i-F_{X_i}^{-1(\alpha_d)}(F_{S^c}(d)))_+]\\
=\ &E[(X_i-F_{X_i}^{-1}(F_{S^c}(d)))_+]-[F_{X_i}^{-1(\alpha_d)}(F_{S^c}(d))-F_{X_i}^{-1}(F_{S^c}(d))][1-F_{S^c}(d)].
\end{aligned}$$

Sumando sobre i y recordando la definición de α_d, obtenemos

$$E[(S^c-d)_+]=\sum_{i=1}^n E[(X_i-F_{X_i}^{-1}(F_{S^c}(d)))_+]-[d-F_{S^c}^{-1}(F_{S^c}(d))][1-F_{S^c}^{-1}(d)]. \tag{3.19}$$

En el caso que cada F_{X_i} sea estrictamente creciente, (3.19) se reduce a

$$E[(S^c-d)_+]=\sum_{i=1}^n E[(X_i-F_{X_i}^{-1}(F_{S^c}(d)))_+]. \tag{3.20}$$

Del teorema anterior, podemos concluir que cualquier prima stop-loss de una suma de variables aleatorias comonotónicas puede ser escrita como la suma de las primas stop-loss de variables aleatorias (no necesariamente comonotónicas) involucradas en la suma.

3.2.3 Cotas comonotónicas

En lo siguiente, encontraremos cotas para la suma $S=X_1+\ldots+X_n$, donde las marginales $F_{X_1},\ldots,F_{X_n}$ están dadas. Las cotas serán variables aleatorias que son más grandes (o más pequeñas) que S en el orden convexo. Estas cotas serán llamadas *cotas convexas*.

Teorema 3.2.24 *Para cualquier vector* $(X_1,\ldots,X_n)$ *tenemos*

$$X_1+\ldots+X_n\leq_{cx}X_1^c+\ldots+X_n^c.$$

Demostración. Se tiene que S y S^c tienen la misma media. De esta manera, es suficiente probar $S\leq_{sl}S^c$, es decir, tenemos que demostrar que para cualquier $d\in\mathbb{R}$,

$$E[(S-d)_+]\leq E[(S^c-d)_+].$$

Por (3.17) y (3.18) es suficiente probar el caso $d\in(F_{S^c}^{-1+}(0),F_{S^c}^{-1}(1))$. Tomemos d como en el caso a probar. Tenemos que para cualquier vector $\mathbf{x}=(x_1,\ldots,x_n)$, y $d=\sum_{i=1}^n d_i$

$$\begin{aligned}
(x_1+\ldots+x_n-d)_+ &= ((x_1-d_1)+\ldots+(x_n-d_n))_+\\
&\leq ((x_1-d_1)_++\ldots+(x_n-d_n)_+)_+\\
&= (x_1-d_1)_++\ldots+(x_n-d_n)_+.
\end{aligned}$$

Lo anterior implica

$$E[(X_1 + \ldots + X_n - d)_+] \leq \sum_{i=1}^{n} E[(X_i - d_i)_+], \tag{3.21}$$

para cualquier d que cumple $d = \sum_{i=1}^{n} d_i$. Escogiendo d_i como el Teorema 3.2.23, se sigue el resultado. ∎

Corolario 3.2.25 *Sean* $(X_1, \ldots, X_n)$*,* $(Y_1, \ldots, Y_n)$ *vectores aleatorios. Si* $X_i \leq_{sl} Y_i$ *para toda* i*, entonces*

$$X_1 + \ldots, +X_n \leq_{sl} Y_1^c + \cdots + Y_n^c.$$

Demostración. Para cualquier real d existen $d_1, \ldots, d_n$ tales que $\sum_{i=1}^{n} d_i = d$, y

$$E[(Y_1^c + \ldots + Y_n^c - d)_+] = \sum_{i=1}^{n} E[(Y_i - d_i)_+].$$

De aquí y por (3.21)

$$\begin{aligned} E[(X_1 + \ldots + X_n - d)_+] &\leq \sum_{i=1}^{n} E[(X_i - d_i)_+] \\ &\leq \sum_{i=1}^{n} E[(Y_i - d_i)_+] \\ &= E[(Y_1^c + \ldots + Y_n^c - d)_+] \end{aligned}$$

∎

Ejemplo 3.2.26 Sea $(\alpha_1 X_1, \ldots, \alpha_n X_n)$ un vector aleatorio tal que $\alpha_i \neq 0$, $i = 1, \ldots, n$, X_i tiene distribución lognormal; $\ln X_i \sim N(\mu_i, \sigma_i^2)$. Es bien conocido el hecho que

$$E[X_i] = e^{\mu_i + \sigma_i/2}, \;\; Var[X_i] = e^{-2\mu_i + \sigma_i}(e^{\sigma_i^2} - 1).$$

Sea Φ la función de distribución acumulada de una variable aleatoria normal estándar. Como $\Phi^{-1}(1-p) = -\Phi^{-1}(p)$, del Teorema 3.2.14 se sigue que

$$F^{-1}_{\alpha_i X_i}(p) = \alpha_i e^{\mu_i + sign(\alpha_i)\sigma_i \Phi^{-1}(p)}, \;\; 0 < p < 1.$$

donde $sign(x)$ es la función signo:

$$sign(x) = \begin{cases} 1, & x > 0 \\ -1, & x < 0. \end{cases}$$

En efecto, si $g(x) = \alpha_i e^{\sigma_i x+\mu_i}$, el Teorema 3.2.14 implica que para $\alpha_i < 0$,

$$\begin{aligned}
F^{-1}_{\alpha_i X_i}(p) &= F^{-1}_{g((\ln X_i-\mu_i)/\sigma_i)}(p) \\
&= g\left(F^{-1}_{(\ln X_i-\mu_i)/\sigma_i}(1-p)\right) \\
&= \alpha_i e^{\mu_i+\sigma_i\Phi^{-1}(1-p)} \\
&= \alpha_i e^{\mu_i-\sigma_i\Phi^{-1}(p)}.
\end{aligned}$$

En forma similar se muestra que si $\alpha_i > 0$, entonces

$$F^{-1}_{\alpha_i X_i}(p) = \alpha_i e^{\mu_i+\sigma_i\Phi^{-1}(p)}.$$

Tomando $\alpha_i = 1$, para toda i, en forma particular se obtiene

$$\prod_{i=1}^{n} F^{-1}_{X_i}(U) \stackrel{d}{=} e^{\sum_{i=1}^{n}\mu_i+\sum_{i=1}^{n}\sigma_i\Phi^{-1}(U)},$$

es decir, el producto de n variables comonotónicas lognormales resulta de nuevo una variable aleatoria lognormal.

Ahora calculemos las primas stop-loss comonotónicas de variables aleatorias lognormales. Veamos que para este caso se tiene

$$E[(X_i - d_i)_+] = e^{\mu_i+\sigma_i^2/2}\Phi(d_{i,1}) - d_i\Phi(d_{i,2}), \;\; d_i > 0, \tag{3.22}$$

donde

$$d_{i,1} = \frac{\mu_i + \sigma_i^2 - \ln d_i}{\sigma_i}, \;\; d_{i,2} = d_{i,1} - \sigma_i. \tag{3.23}$$

Para demostrar lo anterior sean $\pi(d) = E[(X-d)_+]$, $f(d) = e^{\mu+\sigma^2/2}\Phi(d_1) - d\Phi(d_2)$, donde

$$\ln X \sim N(\mu,\sigma), \;\; d_1 = \frac{\mu+\sigma^2-\ln d}{\sigma}, \;\; d_2 = d_1 - \sigma.$$

Calculando la derivada de f se obtiene

$$f'(d) = -\Phi(d_2) = \Phi(-d_2) - 1 = F_X(d) - 1.$$

De esta manera, f y π tienen la misma derivada, y debido a que $\pi(0) = e^{\mu+\sigma^2/2} = f(0)$, se concluye (3.22). Además, $\lim_{d\to\infty} f(d) = 0$.

Usando la relaciones

$$E[(X-d)_+] - E[(d-X)_+] = E[X] - d, \;\; 1 - \Phi(t) = \Phi(-t),$$

se obtiene,

$$E[(d_i - X_i)_+] = -e^{\mu_i+\sigma_i^2/2}\Phi(-d_{i,1}) + d_i\Phi(-d_{i,2}), \;\; d_i > 0, \tag{3.24}$$

donde $d_{i,1}$, $d_{i,2}$ son como en (3.23). En efecto, para $d_i > 0$ se tiene,

$$\begin{aligned} E[(d_i - X_i)_+] &= E[(X_i - d)_+] - E[X_i] + d_i \\ &= -e^{\mu_i + \sigma_i^2/2}(1 - \Phi(d_{i,1})) + d_i(1 - \Phi(d_{i,2})) \\ &= -e^{\mu_i + \sigma_i^2/2}\Phi(-d_{i,1}) + d_i\Phi(-d_{i,2}) \end{aligned}$$

Ahora nótese que si $\alpha_i < 0$, entonces $E[(\alpha_i(X_i - d_i))_+] = -\alpha_i E[(d_i - X_i)_+]$. De esta manera, de (3.23) y (3.24) se sigue

$$E[(\alpha_i(X_i - d_i))_+] = \alpha_i e^{\mu_i + \sigma_i^2/2}\Phi(sign(\alpha_i)d_{i,1}) - \alpha_i d_i \Phi(sign(\alpha_i)d_{i,2}), \;\; d_i > 0. \tag{3.25}$$

Ahora sea $S = \alpha_1 X_1 + \ldots + \alpha_n X_n$ y $S^c = F^{-1}_{\alpha_1 X_1}(U) + \ldots + F^{-1}_{\alpha_n X_n}(U)$. Como las distribuciones marginales son estrictamente crecientes y continuas, tenemos que $F_{S^c}(x)$ está implicitamente definido por $F^{-1}_{S^c}(F_{S^c}(x)) = x$, o equivalentemente

$$\sum_{i=1}^{n} \alpha_i e^{\mu_i + sign(\alpha_i)\sigma_i \Phi^{-1}(F_{S^c}(x))} = x, \;\; F^{-1+}_{S^c}(0) < x < F^{-1}_{S^c}(1). \tag{3.26}$$

Para $F^{-1+}_{S^c}(0) < d < F^{-1}_{S^c}(1)$, la prima stop-loss de S^c con retención d es:

$$\begin{aligned} E[(S^c - d)_+] &= \sum_{i=1}^{n} E[(\alpha_i X_i - F^{-1}_{\alpha_i X_i}(F_{S^c}(d)))_+] \\ &= \sum_{i=1}^{n} E[(\alpha_i(X_i - e^{\mu_i + sign(\alpha_i)\sigma_i\Phi^{-1}(F_{S^c}(d))}))_+]. \end{aligned}$$

Usando (3.25) y (3.26) encontramos la siguiente expresión para la prima stop-loss con retención d, $F^{-1+}_{S^c}(0) < d < F^{-1}_{S^c}(1)$:

$$E[(S^c - d)_+] = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i e^{\mu_i + \sigma_i^2/2}\Phi(sign(\alpha_i)\sigma_i - \Phi^{-1}(F_{S^c}(d))) - d(1 - F_{S^c}(d)). \tag{3.27}$$

Usando el mismo procedimiento para usar (3.24), se puede mostrar que las colas inferiores están dadas por

$$E[(d - S^c)_+] = -\sum_{i=1}^{n} \alpha_i e^{\mu_i + \sigma_i^2/2}\Phi(-sign(\alpha_i)\sigma_i + \Phi^{-1}(F_{S^c}(d))) + dF_{S^c}(d).$$

Con el objeto de encontrar mejores cotas para S, supondremos que tenemos información adicional con respecto a la naturaleza estocástica de $(X_1, \ldots, X_n)$. En forma precisa, suponemos que existe una variable aleatoria Λ con función de distribución dada, tal que conocemos la función condicional de las variables aleatorias X_i dado $\Lambda = \lambda$, para todos los posibles valores de λ.

En lo que sigue denotaremos con $F^{-1}_{X_i|\Lambda}(U)$ la función $f_i(U, \Lambda)$, donde $f_i(u, \lambda) = F^{-1}_{X_i|\Lambda=\lambda}(u)$.

Teorema 3.2.27 *Sea U variable aleatoria uniformemente distribuida en $(0,1)$ e independiente de Λ. Entonces se cumple*

$$X_1 + \ldots + X_n \leq_{cx} F^{-1}_{X_1|\Lambda}(U) + \ldots + F^{-1}_{X_n|\Lambda}(U).$$

Demostración. Por el Teorema 3.2.24, tenemos que para cualquier función convexa v

$$E[v(X_1^c + \ldots + X_n^c)] \geq E[v(X_1 + \ldots + X_n)].$$

Por otro lado

$$\begin{aligned} E[v(X_1^c + \ldots + X_n^c)] &= \int_{-\infty}^{\infty} E[v(X_1^c + \ldots + X_n^c) \mid \Lambda = \lambda] dF_\Lambda(\lambda) \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} E[v(f_1(U,\lambda) + \ldots + f_n(U,\lambda)) \mid \Lambda = \lambda] dF_\Lambda(\lambda) \\ &= E[v(f_1(U,\Lambda) + \ldots + f_n(U,\Lambda))]. \end{aligned}$$

Por lo tanto, para cualquier función convexa v

$$E[v(X_1 + \ldots + X_n)] \leq E[v(f_1(U,\Lambda) + \ldots + f_n(U,\Lambda))].$$

Y con lo cual obtenemos el resultado. ■

Nótese que el vector $(F^{-1}_{X_1|\Lambda}(U), \ldots, F^{-1}_{X_n|\Lambda}(U))$ tiene marginales $F_{X_1}, \ldots, F_{X_n}$, porque

$$\begin{aligned} F_{X_i}(x) &= \int_{-\infty}^{+\infty} P(X_i \leq x \mid \Lambda = \lambda) dF_\Lambda(\lambda) \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} P(F^{-1}_{X_i|\Lambda=\lambda}(U) \leq x) dF_\Lambda(\lambda) \\ &= P(F^{-1}_{X_i|\Lambda}(U) \leq x). \end{aligned}$$

Por lo tanto, por el Teorema 3.2.24

$$F^{-1}_{X_1|\Lambda}(U) + \ldots + F^{-1}_{X_n|\Lambda}(U) \leq_{cx} F^{-1}_{X_1}(U) + \ldots + F^{-1}_{X_n}(U).$$

Lo que significa que la cota superior encontrada es mejor que la del Teorema 3.2.24.

Si Λ es independiente del vector $(X_1, \ldots, X_n)$, entonces no tenemos información extra y la cota mejorada se reduce a la cota monotónica previamente encontrada en el Teorema 3.2.24.

En lo que sigue denotaremos por S^u a la suma:

$$S^u = F^{-1}_{X_1|\Lambda}(U) + \ldots + F^{-1}_{X_n|\Lambda}(U).$$

Si el vector aleatorio $\mathbf{X}$ es comonotónico, cualquier forma de escoger Λ es óptimo porque conduce a la función de distribución exacta de la suma. También notamos que si para cualquier valor posible de λ, condicionalmente sobre $\Lambda = \lambda$, el vector $\mathbf{X}$ es comonotónico, entonces S tiene la misma distribución que S^u.

En general, para "juzgar" la calidad de la cota superior estocástica S^u, deberíamos comparar su varianza con la varianza de S. Debido a que $Var[E(S^u \mid \Lambda)] = Var[E(S \mid \Lambda)]$, vemos que $Var(S^u) = Var(S)$ si y sólo si $E[Var(S^u \mid \Lambda)] = E[Var(S \mid \Lambda)]$. Esta condición se cumplirá si para cualquier valor λ de Λ, tenemos que $Var(S^u \mid \Lambda = \lambda) = Var(S \mid \Lambda = \lambda)$. De aquí, si encontramos una variable aleatoria condicionante Λ tal que para cualquier valor λ de Λ, tenemos que dado condicionalmente $\Lambda = \lambda$, el vector $\mathbf{X}$ es comonotónico, entonces la función de distribución de la cota mejorada coincide con la exacta.

Considere $S = X_1 + X_2$ como un caso especial. En este caso la forma óptima de escoger Λ es hacer $\Lambda = X_1$ (o $\Lambda = X_2$), ya que escogiendo Λ de esta forma las funciones de distribución de S^u y S coinciden. Este ejemplo, ilustra el hecho que la variable aleatoria óptima Λ en general no será S.

Para obtener la función de distribución de S^u, observe que dado el evento $\Lambda = \lambda$, la variable aleatoria S^u es una suma de variables aleatorias comonotónicas. De aquí

$$F^{-1}_{S^u|\Lambda=\lambda}(p) = \sum_{i=1}^{n} F^{-1}_{X_i|\Lambda=\lambda}(p), \quad p \in (0,1).$$

De esta manera, dado $\Lambda = \lambda$, la función de distribución de S^u se sigue de (3.12):

$$F_{S^u|\Lambda=\lambda}(x) = \sup\left\{ p \in (0,1) : \sum_{i=1}^{n} F^{-1}_{X_i|\Lambda=\lambda}(p) \leq x \right\}.$$

Por lo tanto, la función de distribución de S^u es

$$F_{S^u}(x) = \int_{-\infty}^{\infty} F_{S^u|\Lambda=\lambda}(x)\, dF_\Lambda(\lambda).$$

Como antes, si las marginales $F_{X_i|\Lambda=\lambda}$ son estrictamente crecientes y continuas, entonces $F_{S^u|\Lambda=\lambda}(x)$ también lo es, de aquí tenemos

$$\sum_{i=1}^{n} F^{-1}_{X_i|\Lambda=\lambda}(F_{S^u|\Lambda=\lambda}(x)) = x, \quad F^{-1+}_{S^u|\Lambda=\lambda}(0) < x < F^{-1}_{S^u|\Lambda=\lambda}(1).$$

En este caso, se sigue de (3.20), que para cualquier $d \in (F^{-1+}_{S^u|\Lambda=\lambda}(0), F^{-1}_{S^u|\Lambda=\lambda}(1))$

$$E[(S^u - d)_+ \mid \Lambda = \lambda] = \sum_{i=1}^{n} E[(X_i - F^{-1}_{X_i|\Lambda=\lambda}(F_{S^u|\Lambda=\lambda}(d)))_+ \mid \Lambda = \lambda].$$

Ahora encontraremos una cota inferior para S. La idea es observar que la esperanza de una variable aleatoria siempre es más pequeña en orden convexo que la variable aleatoria misma, y también que el orden convexo se mantiene bajo mezclas.

Teorema 3.2.28 *Para cualquier vector* $\mathbf{X}$ *y cualquier variable aleatoria* Λ*, se cumple*

$$E[X_1 \mid \Lambda] + \ldots + E[X_n \mid \Lambda] \leq_{cx} X_1 + \ldots + X_n.$$

Demostración. Sea $E_\Lambda[Y]$ que denota

$$E_\Lambda[Y] = \int_{-\infty}^{\infty} y dF_\Lambda(\lambda).$$

Sea v función convexa, entonces por la desigualdad de Jensen se cumple

$$E_\Lambda[E[v(X_1 + \ldots + X_n) \mid \Lambda]] \geq E_\Lambda[v(E[X_1 + \ldots + X_n \mid \Lambda])].$$

Por lo tanto

$$\begin{aligned} E[v(X_1 + \ldots + X_n)] &= E_\Lambda[E[v(X_1 + \ldots + X_n) \mid \Lambda]] \\ &\geq E_\Lambda[v(E[X_1 \mid \Lambda] + \ldots + E[X_n \mid \Lambda])]. \end{aligned}$$

Esto prueba el resultado. ■

Sea S^l definido por

$$S^l := E[S \mid \Lambda].$$

Nótese que si Λ y S son mutuamente independientes, entonces

$$E[S] \leq_{cx} S.$$

Nótese también que $E[E(X_i \mid \Lambda)] = E[X_i]$, pero $Var[E(X_i \mid \Lambda)] < Var[X_i]$, a menos que $E[Var(X_i \mid \Lambda = \lambda)] = 0$, lo que significa que X_i dado $\Lambda = \lambda$ es degenerada para cada λ. Lo anterior muestra, que en general, el vector aleatorio $(E[X_i \mid \Lambda], \ldots, E[X_n \mid \Lambda])$ no tiene las mismas marginales que $\mathbf{X}$.

Si suponemos además que la variable aleatoria Λ es tal que $g_i(\lambda) = E[X_i \mid \Lambda = \lambda]$ son no crecientes y continuas, entonces por la observación hecha en el Teorema 3.2.19 S^l es una suma de variables aleatorias comonotónicas. De esta manera, por los Teoremas 3.2.14 y 3.2.22 los cuantiles de la cota inferior S^l están dados por

$$\begin{aligned} F_{S^l}^{-1}(p) &= \sum_{i=1}^{n} F_{E[X_i|\Lambda]}^{-1}(p) \\ &= \sum_{i=1}^{n} F_{g_i(\Lambda)}^{-1}(p) \\ &= \sum_{i=1}^{n} g_i(F_\Lambda^{-1+}(1-p)) \\ &= \sum_{i=1}^{n} E[X_i \mid \Lambda = F_\Lambda^{-1+}(1-p)], \;\; p \in (0,1). \end{aligned}$$

Además de (3.12) se sigue

$$F_{S^l}(x) = \sup\left\{p \in (0,1) : \sum_{i=1}^{n} E[X_i \mid \Lambda = F_\Lambda^{-1+}(1-p)] \leq x\right\}.$$

Si suponemos adicionalmente que las funciones de distribución de las variables aleatorias $E[X_i \mid \Lambda]$ son estrictamente crecientes y continuas, entonces la función de distribución de S^l también es estrictamente creciente y continua, de (3.13) se sigue que para cualquier $x \in (F^{-1+}_{E[S|\Lambda]}(0), F^{-1}_{E[S|\Lambda]}(1))$,

$$\sum_{i=1}^{n} F^{-1}_{E[X_i|\Lambda]}(F_{S^l}(x)) = x,$$

o equivalentemente,

$$\sum_{i=1}^{n} E[X_i \mid \Lambda = F_\Lambda^{-1+}(1 - F_{S^l}(x))] = x.$$

Bajo las misma suposiciones, las primas stop-loss de S^l pueden ser determinadas de (3.20):

$$E[(S^l - d)_+] = \sum_{i=1}^{n} E[(E[X_i \mid \Lambda] - E[X_i \mid \Lambda = F_\Lambda^{-1+}(1 - F_{S^l}(x))])_+],$$

para $d \in (F^{-1+}_{S^l}(0), F^{-1}_{S^l}(1))$.

El caso $g_i = E[X_i \mid \Lambda]$ no decrecientes y continuas es tratado en forma similar. En el caso general, la función de distribución y las primas stop-loss de S^l pueden ser determinadas como sigue

$$\begin{aligned} F_{S^l}(x) &= \int_{-\infty}^{\infty} P\left[\sum_{i=1}^{n} E[X_i \mid \Lambda] \leq x \middle| \Lambda = \lambda\right] dF_\Lambda(\lambda) \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} I_{\{\sum_{i=1}^{n} E[X_i|\Lambda=\lambda] \leq x\}} dF_\Lambda(\lambda), \end{aligned}$$

y

$$E[(S^l - d)_+] = \int_{-\infty}^{\infty} \left(\sum_{i=1}^{n} E[X_i \mid \Lambda = \lambda] - d\right)_+ dF_\Lambda(\lambda).$$

En el caso que F_Λ sea estrictamente continua y creciente, se cumple que $U = F_\Lambda(\Lambda)$ es distribuida uniformementte en $(0,1)$. Además $U = u$ si y sólo si $\Lambda = F_\Lambda^{-1}(u)$ para todo $u \in (0,1)$. De aquí

$$\begin{aligned} F_{S^l}(x) &= \int_{0}^{1} P\left[\sum_{i=1}^{n} E[X_i \mid \Lambda] \leq x \middle| U = u\right] du \\ &= \int_{0}^{1} I_{\{\sum_{i=1}^{n} E[X_i|\Lambda=F_\Lambda^{-1}(u)]\}} du, \end{aligned}$$

y

$$E[(S^l - d)_+] = \int_0^1 \left(\sum_{i=1}^{n} E[X_i \mid \Lambda = F_\Lambda^{-1}(u)] - d \right)_+ du.$$

3.3 Opciones asiáticas

Supongamos que el tiempo actual es el tiempo 0. Considérese un activo con riesgo con los precios siendo descritos por un proceso estocástico $\{A(t), t \geq 0\}$ y un activo sin riesgo con tasa δ constante a través del tiempo. En esta sección todas las probabilidades y esperanzas que aparezcan serán consideradas condicionalmente sobre la información disponible al tiempo 0, es decir, los precios del activo con riesgo hasta el tiempo 0. Nótese que en general, la esperanza condicional de $e^{-\delta t}A(t)$, dada la información hasta el tiempo 0, será diferente del precio actual $A(0)$. No obstante, supondremos que existe una única medida equivalente de probabilidad tal que el proceso de precios descontados $\{e^{-\delta t}A(t), t \geq 0\}$ es una martingala bajo esta medida equivalente. Esto implica que para cualquier $t \geq 0$, la esperanza condicional (con respecto a esta medida equivalente) de $e^{-\delta t}A(t)$, dada la información hasta el tiempo 0, será igual al precio actual $A(0)$. Se denotará esta esperanza condicional bajo la medida martingala equivalente por $E^Q[e^{-\delta t}A(t)]$. De esta manera, tenemos

$$E^Q[e^{-\delta t}A(t)] = A(0), \quad t \geq 0.$$

La notación $F_{A(t)}(x)$ será usada para la probabilidad condicional que $A(t)$ sea menor o igual a x, bajo la medida martingala equivalente Q y dada la información hasta el tiempo 0. Su inversa será denotada por $F_{A(t)}^{-1}(p)$. Es un hecho bien conocido que la existencia de una medida martingala equivalente está relacionada con la ausencia de *arbitraje* en los mercados de seguros, mientras que la unicidad de esta medida está relacionada con la *completez* del mercado.

Una opción call europea sobre un activo con riesgo, con ejercicio K y día de expiración T genera una liquidez $(A(T) - K)_+$ al tiempo T, esto es, si el precio del activo con riesgo al tiempo T excede el precio del ejercicio, el pago es igual a la diferencia: si no, el pago es cero. Nótese la similitud entre el valor de la opción Europea call y el pago del contrato stop-loss de reaseguro. Al tiempo $t = 0$, ésta opción call tendrá un precio dado por

$$EC(K, T) = e^{-\delta T} E^Q[(A(T) - K)_+].$$

Una opción aritmética asiática call del estilo europeo con tiempo de ejercicio T, n promediado y ejercicio K, genera una liquidez de $((1/n)\sum_{i=0}^{n-1} A(T - i) - K)_+$ al tiempo T, esto es, si el promedio de los precios del activo con riesgo al final de las n-épocas antes de T es mayor que K, el valor de la opción es igual a la diferencia; si no, el valor es cero. Tales opciones protegen al poseedor contra manipulaciones del precio del activo cercano a la época de expiración. El precio de una opción al tiempo actual $t = 0$ está dado por

$$AC(n, K, T) = e^{-\delta T} E^Q \left[\left(\frac{1}{n} \sum_{i=0}^{n-1} A(T - i) - K \right)_+ \right].$$

Determinar el precio de una opción asiática no es una tarea fácil, porque en general no se tiene una expresión explícita para la distribución de $\sum_{i=0}^{n-1} A(T-i)$. No obstante, de la expresión del precio de una opción aritmética asiática se observa que el problema de cotizar tales opciones se transforma en calcular primas stop-loss de una suma de variables aleatorias dependientes. Esto significa que se pueden aplicar los resultados previos de Dhaene et al ([4]) para encontrar cotas superiores e inferiores para cotizar opciones asiáticas. En lo que sigue expondremos los resultados de Dhaene et al ([5]).

Supóngase que al tiempo 0, el promedio no se ha llevado a cabo. En este caso las n variables $A(T-n+1), \ldots, A(T)$ son aleatorias. Para este caso, sean K_i y K retenciones con $\sum_{i=0}^{n} K_i = K$, entonces

$$\begin{aligned} AC(n,K,T) &= \frac{e^{-\delta T}}{n} E^Q\left[\left(\sum_{i=0}^{n-1} A(T-i) - nK\right)_+\right] \\ &\leq \frac{e^{-\delta T}}{n} \sum_{i=0}^{n-1} E^Q[(A(T-i)-nK)_+] \\ &= \frac{1}{n}\sum_{i=0}^{n-1} e^{-\delta i} EC(K_i, T-i). \end{aligned}$$

El procedimiento anterior nos permite construir un número ilimitado de cotas superiores para el precio del activo de una opción aritmética asiática call como un promedio de precios de opciones europeas subyacentes. La teoría de comonotonicidad nos permitirá encontrar la mejor.

Sea $S^c = \sum_{i=0}^{n-1} F^{-1}_{A(T-i)}(U)$, donde U es una variable aleatoria uniformemente distribuida en $(0,1)$. Del Teorema 3.2.24 encontramos que para todo ejercicio K se cumple

$$AC(n,K,T) \leq \frac{e^{-\delta T}}{n} E^Q[(S^c - nK)_+]. \tag{3.28}$$

Del Teorema 3.2.23 se observa que para cualquier K con $F^{-1+}_{S^c}(0) < nK < F^{-1}_{S^c}(1)$

$$\begin{aligned} \frac{e^{-\delta T}}{n} E^Q[(S^c - nK)_+] &= \frac{e^{-\delta T}}{n} \sum_{i=0}^{n-1} E^Q[(A(T-i) - F^{-1(\alpha)}_{A(T-i)}(F_{S^c}(nK)))_+] \\ &= \frac{1}{n}\sum_{i=0}^{n-1} e^{-\delta i} EC(F^{-1(\alpha)}_{A(T-i)}(F_{S^c}(nK)), T-i), \end{aligned} \tag{3.29}$$

donde α se determina por

$$F^{-1(\alpha)}_{S^c}(F_{S^c}(nK)) = nK.$$

De aquí, una cota superior para el precio de opciones asiáticas $AC(n,K,T)$ con $F^{-1+}_{S^c}(0) < nK < F^{-1}_{S^c}(1)$ está dada por

$$AC(n,K,T) \leq \frac{1}{n}\sum_{i=0}^{n-1} e^{-\delta i} EC(F^{-1(\alpha)}_{A(T-i)}(F_{S^c}(nK)), T-i). \tag{3.30}$$

También se observa que para cualquier retención K_i y K con $K = \sum_{i=1}^{n} K_i$, se tiene

$$\frac{e^{-\delta T}}{n} E^Q[(S^c - nK)_+] \leq \frac{1}{n} \sum_{i=0}^{n-1} e^{-\delta i} EC(nK_i, T-i). \tag{3.31}$$

De (3.28), (3.29), (3.30) y (3.31) se obtiene que la estructura de dependencia comonotónica nos conduce a cotas superiores óptimas alcanzables para los precios de una opción asiática aritmética. Nótese que si $nK \leq F_{S^c}^{-1+}(0)$ o $nK \geq F_{S^c}^{-1}(1)$, el precio de las opciones asiáticas puede ser determinado en forma precisa, véase (3.17) y (3.18).

La cota superior en (3.30) puede ser escrita en términos de inversas $F_{A(T-i)}^{-1}$, esto es

$$\begin{aligned} AC(n, K, T) \quad \leq \quad & \frac{1}{n} \sum_{i=0}^{n-1} e^{-\delta i} EC(F_{A(T-i)}^{-1}(F_{S^c}(nK)), T-i) \\ & - e^{-\delta T}(nK - F_{S^c}^{-1}(F_{S^c}(nK)))(1 - F_{S^c}(nK)). \end{aligned}$$

En la parte anterior se supuso que $T - n + 1 > 0$. Ahora supondremos que $T - n + 1 \leq 0$. Entonces se conocen los precios $A(T - n + 1), \ldots, A(0)$ y los precios $A(1), \ldots, A(T)$ son aleatorios. Por lo tanto, obtenemos

$$\begin{aligned} AC(n, K, T) \quad &= \quad \frac{e^{-\delta T}}{n} E^Q \left[\left(\sum_{i=0}^{n-1} A(T-i) - nK \right)_+ \right] \\ &= \quad \frac{e^{-\delta}}{n} E^Q \left[\left(\sum_{i=0}^{T-1} A(T-i) - \left(nK - \sum_{i=T}^{n-1} A(T-i) \right) \right)_+ \right]. \end{aligned}$$

Sea $S^c = \sum_{i=0}^{T-1} F_{A(T-i)}^{-1}(U)$, procediendo como antes, para $F_{S^c}^{-1+}(0) < nK - \sum_{i=T}^{n-1} A(T-i) < F_{S^c}^{-1}(1)$, se obtiene

$$AC(n, K, T) \leq \frac{1}{n} \sum_{i=0}^{T-1} e^{-\delta i} EC \left[F_{A(T-i)}^{-1(\alpha)} \left(F_{S^c} \left(nK - \sum_{i=T}^{n-1} A(T-i) \right) \right), T-i \right],$$

donde α está determinada por

$$F_{S^c}^{-1(\alpha)} \left(F_{S^c} \left(nK - \sum_{i=T}^{n-1} A(T-i) \right) \right) = nK - \sum_{i=T}^{n-1} A(T-i).$$

3.3.1 Aplicación en un modelo Black-Scholes

En el modelo Black-Scholes (1973), el precio de un activo con riesgo es descrito por un proceso estocástico $\{A(t), t \geq 0\}$ siguiendo un movimiento Browniano geométrico con constante de deriva μ y constante de volatilidad σ:

$$\frac{dA(t)}{A(t)} = \mu dt + \sigma d\overline{B}(t), \quad t \geq 0,$$

con valor inicial $A(0) > 0$ y $\{\overline{B}(t), t \geq 0\}$ movimiento Browniano estándar.

Se sabe que bajo la medida martingala equivalente Q, el proceso $\{A(t), t \geq 0\}$ sigue siendo un movimiento Browniano geométrico con la misma volatilidad, pero con deriva δ, la tasa libre de riesgo:

$$\frac{dA(t)}{A(t)} = \delta dt + \sigma dB(t), \;\; t \geq 0,$$

con valor inicial $A(0)$ y $\{B(t), t \geq 0\}$ movimiento Browniano estándar bajo Q. De aquí, bajo la medida equivalente Q se tiene,

$$A(t) = A(0)e^{\left(\delta - \frac{\sigma^2}{2}\right)t + \sigma B(t)}, \;\; t \geq 0. \tag{3.32}$$

Esto implica que bajo la medida equivalente, la variable aleatoria $A(t)/A(0)$ tiene distribución lognormal con parámetros $(\delta - \sigma^2/2)t$ y $\sigma^2 t$:

$$F_{A(t)}(x) = P\left[A(0)e^{\left(\delta - \frac{\sigma^2}{2}\right)t + \sqrt{t}\sigma\Phi^{-1}(U)} \leq x\right],$$

donde U se distribuye uniformemente sobre el intervalo $(0, 1)$.

Del ejemplo 3.2.26, se sigue

$$\begin{aligned}
EC(K,T) &= e^{-\delta T}E^Q[(A(T) - K)_+] \\
&= e^{-\delta T}E^Q\left[A(0)\left(\frac{A(T)}{A(0)} - \frac{K}{A(0)}\right)_+\right] \\
&= e^{-\delta T}(A(0)e^{\delta T}\Phi(d_1) - K\Phi(d_2)) \\
&= A(0)\Phi(d_1) - Ke^{-\delta T}\Phi(d_2),
\end{aligned}$$

donde

$$d_1 = \frac{(\delta + \frac{\sigma^2}{2})T - \ln{(K/A(0))}}{\sigma\sqrt{T}}, \;\; d_2 = d_1 - \sigma\sqrt{T}.$$

Ésta ecuación es conocida como la fórmula de cotización Black-Scholes para opciones call Europeas.

Dentro del modelo Black-Scholes, no existen formas cerradas para el precio de una opción call aritmética asiática del tipo europeo. De esta forma, derivaremos cotas superiores e inferiores para el precio de tales opciones. Consideremos el caso donde el promedio aún no ha iniciado. El otro caso puede tratarse en forma similar. De (3.27) y (3.28) se sigue

$$\begin{aligned}
AC(n,K,T) &\leq \frac{e^{-\delta T}}{n}E^Q[(S^c - nK)_+] \\
&= \frac{A(0)}{n}\sum_{i=0}^{n-1} e^{-\delta i}\Phi(\sigma\sqrt{T-i} - \Phi^{-1}(F_{S^c}(nK))) \\
&\quad -e^{-\delta T}K(1 - F_{S^c}(nK)),
\end{aligned} \tag{3.33}$$

lo anterior se cumple para cualquier $K > 0$. Nótese que ésta cota superior corresponde a la combinación lineal óptima de precios de opciones call Europeas como se mencionó anteriormente.

El resto del problema es como calcular $F_{S^c}(nK)$. La última cantidad se sigue de

$$\sum_{i=0}^{n-1} F_{A(T-i)}^{-1}(F_{S^c}(nK)) = nK,$$

o equivalentemente de (3.32) y del Teorema 3.2.14 se obtiene que $F_{S^c}(nK)$ satisface

$$A(0)\sum_{i=0}^{n-1} \exp\left[\left(\delta - \frac{\sigma^2}{2}\right)(T-i) + \sigma\sqrt{T-i}\,\Phi^{-1}(F_{S^c}(nK))\right] = nK. \tag{3.34}$$

Ahora daremos cotas inferiores para $AC(n, K, T)$. El siguiente teorema será de ulitidad para encontrar tales cotas. No se demostrará porque queda fuera del propósito de esta tesis, se puede consultar en [10].

Teorema 3.3.1 *Sea A una matriz de $m \times n$ y sea $\mathbf{y}^t = (\mathbf{y}_1^t, \mathbf{y_2}^t)$, donde $\mathbf{y}^t$ denota la transpuesta del vector $\mathbf{y}$, los vectores $\mathbf{y}$, $\mathbf{y}_1$, $\mathbf{y}_2$ son de dimensión $n \times 1$, $r \times 1$ y $(n-r) \times 1$ respectivamente. Supóngase que $\mathbf{y} \sim N_n(\mu, \Sigma)$, donde*

$$\mu = \begin{pmatrix} \mu_{\mathbf{1}} \\ \\ \mu_{\mathbf{2}} \end{pmatrix}, \quad \Sigma = \begin{pmatrix} \Sigma_{11} & \Sigma_{12} \\ \\ \Sigma_{21} & \Sigma_{22} \end{pmatrix},$$

con Σ_{22} no singular. Entonces, el vector $\mathbf{x} = A\mathbf{y} \sim N_m(A\mu, A\Sigma A^t)$. Y también se tiene que $\mathbf{y}_1 \mid \mathbf{y}_2 \sim N_r(\mu_{\mathbf{1}} + \Sigma_{12}\Sigma_{22}^{-1}(\mathbf{y}_2 - \mu_2), \Sigma_{11} - \Sigma_{12}\Sigma_{22}^{-1}\Sigma_{21})$.

Con el propósito de usar la teoría desarrollada para hallar cotas inferiores de sumas de variables aleatorias dependientes, introduciremos una variable aleatoria Λ que condicionado a ella nos permita encontrar tales cotas. Sea Λ dada por

$$\Lambda = \sum_{i=0}^{n-1} e^{\left(\delta - \frac{\sigma^2}{2}\right)(T-i)} B(T-i).$$

Tenemos que $\mathbf{y}^t = (B(T-n+1), \ldots, B(T)) \sim N_n(\mathbf{0}, \Sigma_{\mathbf{y}})$, donde

$$\Sigma_{\mathbf{y}} = [\min\{T-n+i, T-n+j\}]_{i,j}.$$

Ahora bien, si $A = (e^{\left(\delta - \frac{\sigma^2}{2}\right)(T-n+1)}, \ldots, e^{\left(\delta - \frac{\sigma^2}{2}\right)T})$, entonces $\Lambda = A\mathbf{y}$ y por el Teorema 3.3.1 $\Lambda \sim N(0, \sigma_\Lambda^2)$ con σ_Λ^2 dado por

$$\sigma_\Lambda^2 = A\Sigma_{\mathbf{y}}A^t = \sum_{j=0}^{n-1}\sum_{k=0}^{n-1} e^{\left(\delta - \frac{\sigma^2}{2}\right)(2T-j-k)} \min\{T-j, T-k\}.$$

Estamos interesados en la distribución de $\sum_{i=0}^{n-1} A(T-i)$ condicionado a Λ bajo Q. Nótese que bajo Q

$$\sum_{i=0}^{n-1} A(T-i) = A(0)\sum_{i=0}^{n-1} e^{\left(\delta-\frac{\sigma^2}{2}\right)(T-i)+\sigma B(T-i)}. \tag{3.35}$$

De esta forma es suficiente encontrar la distribución de $B(T-i)$ condicionado a Λ. Sea $C^t = (\mathbf{e}_{n-i}^t, A^t)$, donde $\mathbf{e}_{n-i}$ es el vector canónico. Entonces por el Teorema 3.3.1 el vector $\mathbf{x} = (B(T-i), \Lambda)^t = C\mathbf{y} \sim N_2(\mathbf{0}, \Sigma_{\mathbf{x}})$, donde $\Sigma_{\mathbf{x}}$ está dado por

$$\Sigma_{\mathbf{x}} = \begin{pmatrix} T-i & \sum_{j=0}^{n-1} e^{\left(\delta-\frac{\sigma^2}{2}\right)(T-j)}\min\{T-j, T-i\} \\ \sum_{j=0}^{n-1} e^{\left(\delta-\frac{\sigma^2}{2}\right)(T-j)\min\{T-j,T-i\}} & \sigma_\Lambda^2 \end{pmatrix}$$

Aplicando de nuevo el Teorema 3.3.1 se obtiene que $B(T-i)$ condicionado a $\Lambda = \lambda$ tiene distribución normal con media $r_{T-i}\frac{\sqrt{T-i}}{\sigma_\Lambda}\lambda$ y varianza $(T-i)(1-r_{T-i}^2)$, donde

$$r_{T-i} = \frac{\sum_{j=0}^{n-1} e^{\left(\delta-\frac{\sigma^2}{2}\right)(T-j)}\min\{T-i, T-j\}}{\sigma_\Lambda\sqrt{T-i}}.$$

Por lo tanto,

$$\begin{aligned} S^l &= E^Q\left[\sum_{i=0}^{n-1} A(T-i)\middle|\Lambda\right] \\ &= A(0)\sum_{i=0}^{n-1} e^{\left(\delta-\frac{\sigma^2}{2}r_{T-i}^2\right)(T-i)+\sigma r_{T-i}\sqrt{T-i}\Phi^{-1}(U)}, \end{aligned}$$

donde U se distribuye uniformemente en el intervalo $(0,1)$. En efecto, haciendo

$$Z_\Lambda = \frac{B(T-i) - r_{T-i}\frac{\sqrt{T-i}}{\sigma_\Lambda}\Lambda}{\sqrt{(T-i)(1-r_{T-i}^2)}},$$

resulta $Z_\Lambda \mid \Lambda \sim N(0,1)$ y

$$\begin{aligned} S^l &= E^Q\left[\sum_{i=0}^{n-1} A(T-i)\middle|\Lambda\right] \\ &= A(0)\sum_{i=0}^{n-1} E^Q\left[e^{\left(\delta-\frac{\sigma^2}{2}\right)(T-i)+\sigma(\sqrt{(T-i)(1-r_{T-i}^2)}Z_\Lambda + r_{T-i}\sqrt{T-i}\frac{\Lambda}{\sigma_\Lambda})}\middle|\Lambda\right] \\ &= A(0)\sum_{i=0}^{n-1} e^{\left(\delta-\frac{\sigma^2}{2}r_{T-i}^2\right)(T-i)+\sigma r_{T-i}\sqrt{T-i}\Phi^{-1}(U)}, \end{aligned}$$

con U distribuida uniformemente en $(0,1)$. Nótese que de la expresión anterior se sigue S^l es suma comonotónica de lognormales. De esta forma, usando (3.27) se sigue la siguiente cota inferior para $AC(n,K,T)$:

$$\begin{aligned} AC(n,K,T) &\geq \frac{e^{-\delta T}}{n} E^Q[(S^l - nK)_+] \\ &= \frac{A(0)}{n} \sum_{i=0}^{n-1} e^{-\delta i} \Phi\left(\sigma r_{T-i}\sqrt{T-i} - \Phi^{-1}(F_{S^l}(nK))\right) \\ &\quad -e^{-\delta T} K(1 - F_{S^l}(nK)), \end{aligned} \tag{3.36}$$

lo anterior sea cumple para cualquier $K > 0$. En este caso, $F_{S^l}(nK)$ se sigue de

$$A(0) \sum_{i=0}^{n-1} \exp\left[\left(\delta - \frac{\sigma^2}{2} r_{T-i}^2\right)(T-i) + \sigma r_{T-i}\sqrt{T-i}\Phi^{-1}(F_{S^l}(nK))\right] = nK. \tag{3.37}$$

Las siguientes tablas fueron obtenidas mediante la elaboración de un programa en S-PLUS de la siguiente manera

1. Se asignó valores a n, $A(0)$, δ, σ, T, K.

2. Se obtuvo $F_{S^c}(nK)$ y $F_{S^l}(nK)$ mediante la solución por métodos numéricos de las ecuaciones (3.34) y (3.37).

3. Los valores $F_{S^c}(nK)$, $F_{S^l}(nK)$ obtenidos en *2* fueron sustituidos en las fórmulas (3.33), (3.36) respectivamente. Se usa la notación CI para la cota inferior y CS para la cota superior.

Como se puede observar los intervalos obtenidos son de longitud pequeña, dando una buena aproximación al precio de una opción asiática.

n	A_0	δ	σ	T	K	CI	CS
30	100	0.0002361	0.010468	60	80	20.784074	20.784455
30	100	0.0002361	0.010468	60	90	11.027216	11.059909
30	100	0.0002361	0.010468	60	100	3.200995	3.344290
30	100	0.0002361	0.010468	60	110	0.337135	0.407976
30	100	0.0002361	0.010468	60	120	0.011569	0.018476
30	100	0.0002361	0.015703	60	80	20.812234	20.826756
30	100	0.0002361	0.015703	60	90	11.492786	11.601663
30	100	0.0002361	0.015703	60	100	4.506063	4.722050
30	100	0.0002361	0.015703	60	110	1.151476	1.313446
30	100	0.0002361	0.015703	60	120	0.191448	0.250293
30	100	0.0002361	0.020937	60	80	20.970735	21.030947
30	100	0.0002361	0.020937	60	90	12.246648	12.438446
30	100	0.0002361	0.020937	60	100	5.815576	6.103832
30	100	0.0002361	0.020937	60	110	2.208066	2.458174
30	100	0.0002361	0.020937	60	120	0.678206	0.822287

n	A_0	δ	σ	T	K	CI	CS
30	100	0.0002361	0.010468	90	80	21.347599	21.350308
30	100	0.0002361	0.010468	90	90	11.851310	11.893450
30	100	0.0002361	0.010468	90	100	4.414199	4.526756
30	100	0.0002361	0.010468	90	110	0.945939	1.028562
30	100	0.0002361	0.010468	90	120	0.113384	0.136483
30	100	0.0002361	0.015702	90	80	21.494921	21.525476
30	100	0.0002361	0.015702	90	90	12.713351	12.820262
30	100	0.0002361	0.015702	90	100	6.120076	6.290351
30	100	0.0002361	0.015702	90	110	2.348878	2.501202
30	100	0.0002361	0.015702	90	120	0.725359	0.813877
30	100	0.0002361	0.020936	90	80	21.945095	22.027564
30	100	0.0002361	0.020936	90	90	13.895563	14.066678
30	100	0.0002361	0.020936	90	100	7.835090	8.062505
30	100	0.0002361	0.020936	90	110	3.940741	4.158761
30	100	0.0002361	0.020936	90	120	1.786393	1.950076

n	A_0	δ	σ	T	K	CI	CS
30	100	0.0002361	0.010468	120	80	21.92118	21.9269
30	100	0.0002361	0.010468	120	90	12.67673	12.7204
30	100	0.0002361	0.010468	120	100	5.46069	5.5557
30	100	0.0002361	0.010468	120	110	1.62501	1.7072
30	100	0.0002361	0.010468	120	120	0.33165	0.3673
30	100	0.0002361	0.015703	120	80	22.23314	22.2720
30	100	0.0002361	0.015703	120	90	13.85199	13.9512
30	100	0.0002361	0.015703	120	100	7.47858	7.6229
30	100	0.0002361	0.015703	120	110	3.48249	3.6214
30	100	0.0002361	0.015703	120	120	1.41242	1.5105
30	100	0.0002361	0.020937	120	80	22.96455	23.0525
30	100	0.0002361	0.020937	120	90	15.35878	15.5115
30	100	0.0002361	0.020937	120	100	9.51120	9.7041
30	100	0.0002361	0.020937	120	110	5.47932	5.6720
30	100	0.0002361	0.020937	120	120	2.96074	3.1222

n	A_0	δ	σ	T	K	CI	CS
30	100	0.0002361	0.010468	150	80	22.50380	22.51207
30	100	0.0002361	0.010468	150	90	13.48217	13.52503
30	100	0.0002361	0.010468	150	100	6.41221	6.49556
30	100	0.0002361	0.010468	150	110	2.32142	2.40029
30	100	0.0002361	0.010468	150	120	0.63997	0.68348
30	100	0.0002361	0.015703	150	80	22.98956	23.03233
30	100	0.0002361	0.015703	150	90	14.91541	15.00722
30	100	0.0002361	0.015703	150	100	8.69038	8.81740
30	100	0.0002361	0.015703	150	110	4.55082	4.67806
30	100	0.0002361	0.015703	150	120	2.16101	2.26106
30	100	0.0002361	0.020937	150	80	23.97155	24.05929
30	100	0.0002361	0.020937	150	90	16.68814	16.82648
30	100	0.0002361	0.020937	150	100	10.98961	11.15950
30	100	0.0002361	0.020937	150	110	6.88002	7.05364
30	100	0.0002361	0.020937	150	120	4.12191	4.27647

n	A_0	δ	σ	T	K	CI	CS
30	100	0.0002361	0.010468	180	80	23.0915	23.1017
30	100	0.0002361	0.010468	180	90	14.2640	14.3053
30	100	0.0002361	0.010468	180	100	7.3001	7.3749
30	100	0.0002361	0.010468	180	110	3.0186	3.0935
30	100	0.0002361	0.010468	180	120	1.0121	1.0602
30	100	0.0002361	0.015703	180	80	23.7460	23.7904
30	100	0.0002361	0.015703	180	90	15.9170	16.0024
30	100	0.0002361	0.015703	180	100	9.8033	9.9177
30	100	0.0002361	0.015703	180	110	5.5641	5.6817
30	100	0.0002361	0.015703	180	120	2.9334	3.0323
30	100	0.0002361	0.020937	180	80	24.9499	25.0356
30	100	0.0002361	0.020937	180	90	17.9172	18.0441
30	100	0.0002361	0.020937	180	100	12.3344	12.4876
30	100	0.0002361	0.020937	180	110	8.1781	8.3369
30	100	0.0002361	0.020937	180	120	5.2508	5.3977

Capítulo 4

Apéndice

4.1 Procesos de Renovación

Aquí daremos las definiciones y resultados básicos que vamos a usar sobre procesos de renovación. Para más información referimos al lector a [16]. En esta sección usaremos la notación: $\mathbb{N}_0 = \mathbb{N} \cup \{0\}$, $\overline{\mathbb{R}} = \mathbb{R}_+ \cup +\infty$, $||F|| := \lim_{t\to\infty} F(t)$.

Definición 4.1.1 *Sean $Y_0, Y_1, \ldots$ variables aleatorias con valores en $\overline{\mathbb{R}}$, independientes, con $Y_1, Y_2, \ldots$ identicamente distribuidas. Sea $\{S_n\} = \{S_n, n \in \mathbb{N}_0\}$ definido por*

$$Y_0 = S_0, \;\; S_n = Y_0 + Y_1 + \ldots Y_n, \;\; n \geq 1.$$

Entonces $\{S_n\}$ es llamado proceso de Renovación.

La distribución común F de $Y_1, Y_2, \ldots$ es llamada distribución del tiempo de espera o entre llegadas. Se supone $F(0) = 0$ para evitar más de una renovación al mismo tiempo. Si $Y_0 = S_0 = 0$ c.s., el proceso de renovación se llama puro o cero retardado. De otra forma, es retardado y la distribución del retardo es la distribución de Y_0. Si la distribución F es defectuosa, es decir, $||F|| < 1$, entonces el proceso de renovación es transitorio o terminante. Si F es no defectuosa, el proceso es llamado puro.

Sea $\{N_t, t \geq 0\}$ definido por

$$N_t = \#\{n \geq 0, S_n \leq t\} = \inf\{n : S_n > t\}.$$

N_t es el número de renovaciones hasta el tiempo t. Nótese que

$$N_t \leq n \Longleftrightarrow S_n > t, \;\; S_{N_t-1} \leq t < S_{N_t},$$

y

$$\{N_t = n\} = \{S_{n-1} \leq t < S_n\}.$$

El proceso $\{N_t, t \geq 0\}$ cumple el siguiente teorema.

Teorema 4.1.2 *Sea $\mu = E[Y_1]$. Entonces, cuando $t \to \infty$*

$$\begin{aligned} \frac{N_t}{t} &\longrightarrow \frac{1}{\mu}, \;\; c.s., \\ \frac{E[N_t]}{t} &\longrightarrow \frac{1}{\mu}. \end{aligned}$$

Definición 4.1.3 *Sean Z, z funciones definidas sobre $[0, \infty)$ y F una medida sobre $[0, \infty)$. Una ecuación de renovación se define por medio de*

$$Z(t) = z(t) + \int_0^t Z(t-u)dF(u), \;\; t \geq 0, \tag{4.1}$$

y se denota por $Z = z + F * Z$.

En la ecuación (4.1) se supone $F(0) = 0$. En el caso donde F es una medida de probabilidad, (4.1) es llamada propia; si $||F|| < 1$, es llamada defectuosa y si $||F|| > 1$ es llamada excesiva.

Definición 4.1.4 *Sea F medida sobre $[0, \infty)$. Defínase*

$$\begin{aligned} U(dx) &= \sum_{n=0}^{\infty} F^{*n}(dx), \\ U(t) &= \sum_{n=0}^{\infty} F^{*n}(t), \;\; t \geq 0, \end{aligned}$$

las cuales son llamadas medida de renovación y función de renovación respectivamente.

Las funciones definidas anteriormente satisfacen el siguiente teorema

Teorema 4.1.5

1. *La función de renovación $U(t)$ es finita para todo $t < \infty$.*
2. *Si la función z en la ecuación de renovación (4.1) es acotada sobre intervalos finitos, entonces $Z = z * U$ está bien definida, es una solución de (4.1) y es la única solución acotada en intervalos finitos.*
3. *Si $||F|| = 1$ y $\{S_n\}$ es un proceso puro de renovación, entonces $U(t) = E[N_t]$, el número esperado de renovaciones hasta el tiempo t.*
4. *Si $\widehat{U}(\theta)$ es la transformada de Laplace-Stieltjes de la medida de renovación U, es decir,*

   $$\widehat{U}(\theta) := \int_0^{\infty} e^{-\theta t} dU(t),$$

   entonces, para $\theta > 0$ se cumple

   $$\widehat{U}(\theta) = \frac{1}{1 - \widehat{F}(\theta)}, \tag{4.2}$$

donde

$$\widehat{F}(\theta) = \int_0^\infty e^{-\theta t} dF(t).$$

Ahora supongamos que z es no negativa. Para $h > 0$, sea $I_n^h = (nh, (n+1)h]$, $n = 0, 1, \ldots$, y sean

$$\overline{z}_h(x) = \sum_{n=0}^\infty \sup_{y \in I_n^h} z(y) \mathbf{1}_{I_n^h}(x), \quad \underline{z}_h(x) = \sum_{n=0}^\infty \inf_{y \in I_n^h} z(y) \mathbf{1}_{I_n^h}(x).$$

Definición 4.1.6 *Decimos que z es directamente Riemann integrable (d.R.i.) si $\int \overline{z}_h dx = \int_0^\infty \overline{z}_h(x) dx$ es finita para algún (y entonces para todo) h, y $\int \overline{z}_h dx - \int \underline{z}_h dx \to 0$, cuando $h \to 0$.*

La definición anterior se puede extender para funciones definidas sobre $\mathbb{R}$.

Teorema 4.1.7 *Sean z_1, z_2 funciones no negativas definidas sobre $[0, \infty)$ tales que z_1 es creciente, z_2 es decreciente y cumplen.*

$$\int_0^\infty z_1(x) z_2(x) dx < \infty,$$

y

$$\lim_{h \to 0} \sup \left\{ \frac{z_1(x+y)}{z_1(x)} : x \geq 0, 0 \leq y \leq h \right\} = 1.$$

Entonces $z(x) = z_1(x) z_2(x)$ es d.R.i.

Recordemos que F es *lattice* si F está concentrada en $\{n\delta, n = 1, 2 \ldots\}$ para algún $\delta \in \mathbb{R}$. Para F no lattice tenemos los siguientes tres teoremas. Se demostrará el tercero.

Teorema 4.1.8 *(Teorema de Renovación de Blackwell). Sea F no lattice y propia ($||F|| = 1$). Sean $\mu = \int_0^\infty x dF(x) < \infty$, $U(dx) = \sum_{n=o}^\infty F^{*n}(dx)$. Entonces para todo a, cuando $t \to \infty$,*

$$U(t+a) - U(t) \longrightarrow \frac{a}{\mu}.$$

Teorema 4.1.9 *Sea F no lattice y propia ($||F|| = 1$). Supóngase que la función z en la ecuación de renovación (4.1) es d.R.i., entonces, cuando $t \to \infty$,*

$$Z(t) = (U * z)(t) \longrightarrow \frac{1}{\mu} \int_0^\infty z(x) dx.$$

Teorema 4.1.10 *Sea F no lattice y propia ($||F|| = 1$). Sean $\mu = \int_0^\infty x dF(x) < \infty$, $U(dx) = \sum_{n=o}^{\infty} F^{*n}(dx)$, $z : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}_+$ d.R.i.. Entonces*

$$\int_{-\infty}^{\infty} z(t-y)U(dy) \longrightarrow \frac{1}{\mu}\int_{-\infty}^{\infty} z(s)ds, \text{ cuando } t \to \infty. \tag{4.3}$$

Demostración. Sea $h > 0$ fijo. Sean $z_*, z^* : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}_+$ definidas por

$$z_*(x) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} a_n \delta_x([(n-1)h, nh)), \quad z^*(x) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} b_n \delta_x([(n-1)h, nh)),$$

donde, $a_n = \inf\{z(x) : (n-1)h \leq x \leq nh\}$, $b_n = \sup\{z(x) : (n-1)h \leq x \leq nh\}$,

$$\delta_x([(n-1)h, nh)) = \begin{cases} 1, & (n-1)h \leq x \leq nh, \\ \\ 0, & \text{otro caso.} \end{cases}$$

Tenemos $z_*(x) \leq z(x) \leq z^*(x)$, para todo $x \in \mathbb{R}$. Debido a que z es no negativa y U es monótona resulta

$$\int_{-\infty}^{\infty} z_*(t-y)U(dy) \leq \int_{-\infty}^{\infty} z(t-y)U(dy) \leq \int_{-\infty}^{\infty} z^*(t-y)U(dy).$$

Ahora bien

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} z_*(t-y)U(dy) &= \sum_{n\in\mathbb{Z}} a_n \int_{-\infty}^{\infty} \delta_{t-y}([(n-1)h, nh))U(dy) \\ &= \sum_{n\in\mathbb{Z}} a_n \left[U(t-(n-1)h) - U(t-nh)\right], \end{aligned}$$

donde $U(t) = 0$, para $t < 0$. Se sabe que $U(t-(n-1)h) - U(t-nh))$ son uniformemente acotados para $t \geq 0$, $n \in \mathbb{N}$ (Teorema de Renovación). Además, debido a que z es d.R.i. se obtiene $\sum_{n\in\mathbb{Z}} a_n < \infty$. De aquí, aplicando el Teorema de convergencia dominada y el Teorema de Renovación se sigue

$$\liminf_{t\to\infty} \int_{-\infty}^{\infty} z(t-y)U(dy) \geq \liminf_{t\to\infty} \int_{-\infty}^{\infty} z_*(t-y)U(dy) = \frac{h}{\widetilde{\mu}} \sum_{n\in\mathbb{Z}} a_n.$$

En forma similar,

$$\limsup_{t\to\infty} \int_{-\infty}^{\infty} z(t-y)U(dy) \leq \limsup_{t\to\infty} \int_{-\infty}^{\infty} z^*(t-y)U(dy) = \frac{h}{\widetilde{\mu}} \sum_{n\in\mathbb{Z}} b_n.$$

Por último haciendo $h \downarrow 0$ y recordando que

$$\lim_{h\downarrow 0} h \sum_{n\in\mathbb{Z}} a_n = \lim_{h\downarrow 0} h \sum_{n\in\mathbb{Z}} b_n = \int_{-\infty}^{\infty} z(s)ds,$$

se obtiene (4.3). ∎

Referencias

[1] Albrecher, H, Teugels, J. "Exponential behavior in the presence of dependence in risk theory.", Journal of Applied Probability 43 (2006), 257-273.

[2] Asmussen, S., "Ruin probabilities", World Scientific, 2000.

[3] Deheulves, P., "A non-parametric test for independence". Publications de l'Institut de Statistique de l'Université de Paris 26 (1981), 29-50.

[4] Dhaene, J., Denuit, M., Goovaerts, M. J., Vyncke, D., "The concept of comonotonicity in actuarial science and finance: theory". Insurance: Mathematics Economics 31 (2002), no 1, 3-33.

[5] Dhaene, J., Denuit, M., Goovaerts, M. J., Vyncke, D., "The concept of comonotonicity in actuarial science and finance: applications". Insurance: Mathematics Economics 31 (2002), no 2, 133-161.

[6] Feller, W., "An introduction to probability theory and its aplications", Vol. 2., Wiley & Sons, New York, 1967

[7] Fermanian, J., Scaillet, O., "Nonparametric estimation of copulas for time series". Journal of Risk 5 (2003), 25-54.

[8] Genest, C., Rives, L., "A semiparametric estimation procedure of dependence parameters in multivariate families of distributions". Biometrika 82 (1993), 543-552.

[9] Grandell, J., "Aspect of risk theory". Springer-Verlag, New York, 1991.

[10] Graybill, F., "Theory and application of the linear model". Wadsworh & Brooks, Pacific Groye, California, 1976.

[11] Joe, H., "Multivariate models and mependence concepts". Chapman & Hall, London, 1997.

[12] Kotz, S., "Continuous multivariate distribution: Volume 1: models and applications", Jhon Wiley & Sons, USA, 2000.

[13] Lamberton, D., "Stochastic calculus applied to finance". Chapman & Hall, 1996.

[14] Nelsen, Roger B., "An introduction to copulas". Springer-Verlag, New York, 1999.

[15] Purcaru, O., Goegebeur, Y. "Modelling dependence through copulas", First Brazilian Conference on Statistical Modelling in Insurance and Finance, Ubatuba, Brazil, 2003.

[16] Rolski, T., "Stochastic processes for insurance and finance". Jhon Wiley & Sons, England, 1999.

[17] Ross, S., "An elementary introduction to mathematical finance: options and other topics". Cambridge University Press, 2003.

[18] Royden, H. L., "Real analysis". Prentice Hall, New Jersey, 1988.

[19] Scarsini, M., "On measure of concordance", Stochastica 8 (1984), 201-208.

[20] Veraverbeke, N. and Teugels, J.L., "The exponential rate of convergence of the distribution of the maximum of a random walk", Journal of Applied Probability 12 (1975), 279-288.

[21] Veraverbeke, N. and Teugels, J.L., "The exponential rate of convergence of the distribution of the maximum of a random walk, Part II", Journal of Applied Probability 13 (1976), 733-740.

[22] Whittaker, E., "A course of modern analysis". Cambridge University Press, 1978.

[23] Widder, D. V., "The Laplace transform", Princeton University Press, 1972.