



---

---

CENTRO DE INVESTIGACIÓN EN  
MATEMÁTICAS, A.C.

INFERENCIA MEJORADA DE LAS  
DISTRIBUCIONES WEIBULL Y  
GENERALIZADA DE VALORES EXTREMOS A  
PARTIR DE LA DISTRIBUCIÓN BOOTSTRAP  
DEL PIVOTAL DE RAZÓN DE VEROSIMILITUD

TESIS

PARA OBTENER EL TÍTULO DE:

**Maestro en Ciencias con Especialidad en  
Probabilidad y Estadística**

PRESENTA:

**EDGAR JULIÁN SUÁREZ CAÑÓN**

DIRECTORA DE TESIS:

**DRA. ELOÍSA DÍAZ-FRANCÉS MURGUÍA**

Guanajuato, octubre de 2016



## Acta de Examen de Grado

Acta No.: 108

Libro No.: 002

Foja No.: 108

En la Ciudad de Guanajuato, Gto., siendo las 11:30 horas del día 3 de octubre del año 2016, se reunieron los miembros del jurado integrado por los señores:

**DR. ENRIQUE RAÚL VILLA DIHARCE**  
**DR. JESÚS ARMANDO DOMÍNGUEZ MOLINA**  
**DRA. ELOÍSA DÍAZ-FRANCÉS MURGUÍA**

(CIMAT)  
(UAS)  
(CIMAT)

bajo la presidencia del primero y con carácter de secretario el segundo, para proceder a efectuar el examen que para obtener el grado de

**MAESTRO EN CIENCIAS**  
**CON ESPECIALIDAD EN PROBABILIDAD Y ESTADÍSTICA**

Sustenta

**EDGAR JULIÁN SUÁREZ CAÑÓN**

en cumplimiento con lo establecido en los reglamentos y lineamientos de estudios de posgrado del Centro de Investigación en Matemáticas, A.C., mediante la presentación de la tesis

**"INFERENCIA MEJORADA DE LAS DISTRIBUCIONES WEIBULL Y  
GENERALIZADA DE VALORES EXTREMOS A PARTIR DE LA  
DISTRIBUCIÓN BOOTSTRAP DEL PIVOTAL  
DE RAZÓN DE VEROSIMILITUD "**

Los miembros del jurado examinaron alternadamente al (la) sustentante y después de deliberar entre sí resolvieron declararlo (a):

APROBADO



**DR. ENRIQUE RAÚL VILLA DIHARCE**  
Presidente



**DR. JESÚS ARMANDO DOMÍNGUEZ MOLINA**  
Secretario



**DRA. ELOÍSA DÍAZ-FRANCÉS MURGUÍA**  
Vocal



**CIMAT**  
DIRECCIÓN  
GENERAL



**DR. JOSÉ ANTONIO STEPHAN DE LA PEÑA MENA**  
Director General



## Dedicatoria

Un agradecimiento a CONACyT por su apoyo económico durante toda la maestría y permitir el acceso a educación de calidad. Al Centro de Investigación en Matemáticas, a sus directivas, investigadores y personal administrativo por hacer del CIMAT un segundo hogar. A la Dra. Eloísa Díaz-Francés Murguía le agradezco la paciencia y dedicación en este proyecto, así como sus enseñanzas y recomendaciones en el ámbito académico y personal. A los doctores Enrique Villa, Armando Domínguez y José Montoya por la lectura detallada de la tesis, las observaciones y las propuestas para mejorarla. Al Dr. Miguel Nakamura por las enseñanzas, la dedicación y acompañamiento como tutor durante la maestría. A los profesores Dr. Joaquín Ortega, Dr. Victor Pérez, Dr. Rogelio Ramos, Dr. Juan Carlos Pardo por cada una de sus enseñanzas. Al Ingeniero David Nakamura por permitir la visita a las instalaciones de Aeromexico y compartir información valiosa para la propuesta realizada en esta tesis.

A mis padres por su apoyo, cariño, dedicación, sacrificio y enseñanzas que han permitido cumplir cada una de las metas que me he propuesto. A mis hermanos y a mi abuela por apoyarme en cada momento. Al Dr. Johan Bogoya por haber sido quien me orientó para emprender esta travesía enriquecedora. A la familia Jeangros por haber iniciado el camino del aprendizaje. A Beatriz, Lucía, Karla, Harold, Eduardo, Miguel, Samuel y Antonio por haber sido como una familia, siempre atentos en los momentos de alegría y aún más en los difíciles. A Adriana del Pilar por su amistad, paciencia, apoyo y consejos. A Camila y Juan David por tantos años de amistad. A mis compañeros, con quienes compartí tantas experiencias.



# Contenido

<b>Prefacio</b>	<b>ix</b>
<b>1. Distribuciones Exponencial, Weibull y Generalizada de Valores Extremos</b>	<b>1</b>
1.1. Distribución Exponencial . . . . .	1
1.2. Distribución Weibull . . . . .	2
1.3. Distribución Generalizada de Valores Extremos (DGVE) . . . . .	4
1.4. Problemas de estimación . . . . .	7
<b>2. Conceptos estadísticos relevantes, propuesta de estimación y revisión bibliográfica</b>	<b>11</b>
2.1. Conceptos asociados a la función de verosimilitud . . . . .	11
2.2. Verosimilitud discretizada con resolución de la DGVE . . . . .	23
2.3. Valores iniciales para maximizar la verosimilitud discretizada de la DGVE	26
2.4. Modelación del pivotal de razón de verosimilitud para muestras pequeñas .	30
2.5. El método Bootstrap . . . . .	32
2.6. Gráficas cuantil-cuantil para validar modelos estadísticos y propuestas recientes . . . . .	33
2.7. Resumen de la propuesta de estimación . . . . .	36
2.8. Verificación de la cobertura de los intervalos de estimación propuestos . . .	37
2.9. Revisión bibliográfica . . . . .	39

<b>3. Aplicaciones a ejemplos prácticos</b>	<b>43</b>
3.1. Tiempos de falla de un componente aeronáutico . . . . .	43
3.2. Prueba de esfuerzo a un transformador eléctrico . . . . .	59
3.3. Máximos anuales de eventos de lluvia en Chamela . . . . .	67
3.4. Tiempo de espera hasta la aparición de tejido cancerígeno . . . . .	74
<b>4. Conclusiones generales</b>	<b>79</b>
<b>A. Tablas de resultados de simulaciones</b>	<b>81</b>
A.1. Pruebas de esfuerzo a transformadores . . . . .	82
A.2. Ejemplo de eventos de lluvia en Chamela . . . . .	85
<b>B. Listado y descripción de las funciones principales programadas en R</b>	<b>89</b>
B.1. Distribución Generalizada de Valores Extremos . . . . .	89
B.1.1. Transformación parámetros . . . . .	89
B.1.2. Función de verosimilitud de los parámetros de la DGVE . . . . .	90
B.1.3. Funciones de verosimilitud perfil de un parámetro de interés de la DGVE . . . . .	90
B.2. Estimación de una distribución Gama por máxima verosimilitud usual . . .	91
B.3. Gráficas cuantil-cuantil . . . . .	91
B.4. Cálculo del nivel del intervalo de verosimilitud propuesto $IV(\bar{k}_\theta)$ para es- timar un parámetro $\theta$ de interés . . . . .	92
<b>C. Códigos en lenguaje de R</b>	<b>93</b>
C.1. Distribución Generalizada de Valores Extremos . . . . .	93
C.1.1. Transformar parámetros . . . . .	94
C.1.2. Funciones de verosimilitud . . . . .	95
C.2. Aplicación de la propuesta de estimación a datos de un transformador eléctrico (Ejemplo 3.2) . . . . .	105
<b>Bibliografía</b>	<b>111</b>



## Prefacio

La distribución Weibull se caracteriza por su versatilidad y por tener aplicaciones importantes sobre todo en la industria, ingeniería, medicina y en la Teoría de Valores Extremos. En particular la distribución Weibull de tres parámetros ha sido objeto de múltiples discusiones desde hace más de cincuenta años, debido a los problemas de estimación que presenta. Esto se debe a que la densidad tiene un parámetro umbral y presenta singularidades, que son heredadas a la función de verosimilitud dificultando la estimación de los parámetros de la distribución. Adicionalmente, cuando la función de verosimilitud es de forma plana, es un indicio de que otros modelos alternativos como las distribuciones Gumbel o Fréchet pudieran ser mejores modelos para los datos observados.

La distribución Generalizada de Valores Extremos (GVE) es una familia más grande y rica que agrupa a las distribuciones Weibull, Gumbel y Fréchet. Describe la distribución de mínimos o máximos de muestras de variables aleatorias continuas. En esta tesis se presenta una revisión bibliográfica sobre la estimación tanto en la distribución Weibull como en la GVE, de manera organizada y estructurada para comprender mejor los problemas de estimación que siguen aún abiertos. Se propondrá aquí una metodología estadística que integra de manera novedosa algunas ideas existentes junto con propuestas nuevas para resolver exitosamente los problemas mencionados. La propuesta considera un tipo de verosimilitud discretizada que toma en cuenta la resolución del instrumento de medición. A través de simulaciones se estudiará la distribución de la estadística de razón de verosimilitud para asignar un nivel de confianza adecuado a intervalos de verosimilitud perfil de los parámetros y cuantiles de interés. Se aplicarán las ideas propuestas a cuatro ejemplos de datos reales: el primero en aviación, el segundo en ingeniería eléctrica, el tercero en meteorología y el cuarto en medicina. Con ello se muestra que la metodología es simple, útil y eficiente.

En el Capítulo 1 se presentan las distribuciones Exponencial, Weibull y Generalizada de Valores Extremos (GVE), se dan las expresiones de estas familias y se comenta su relevancia.

En el Capítulo 2 se estructura la propuesta de estimación para la distribución GVE. Para esto se definen los conceptos relevantes de verosimilitud, se describe la verosimilitud discretizada que se usará, incorporando resolución del instrumento de medición para la distribución GVE y se presentan los valores iniciales propuestos que se usarán para la optimización de la verosimilitud. Posteriormente se presenta el método Bootstrap y la distribución de la estadística de razón de verosimilitud que se estimará paramétricamente con una distribución Gama. Esta estadística es también una cantidad pivotal asintótica puesto que vista como función del verdadero valor del parámetro y de la muestra observada, para muestras suficientemente grandes, su distribución está completamente especificada y es una Ji-cuadrada. Sin embargo para muestras pequeñas o moderadas antes de que se alcance este resultado asintótico, se mostrará aquí que una distribución Gama puede describir muy bien el comportamiento aleatorio de la estadística de razón de verosimilitud. Téngase en cuenta que la distribución Gama incluye como caso particular a la distribución Ji-cuadrada. El objetivo principal es encontrar el nivel de verosimilitud adecuado de los intervalos de verosimilitud perfil para estimar por separado los parámetros de interés y que posean el nivel de confianza deseado, aún cuando la muestra sea pequeña.

En la Sección 2.6, se presenta un tipo de gráficas cuantil-cuantil, inspiradas en algunas referencias recientes, con bandas de confianza basadas en simulaciones de muestras del modelo supuesto para la muestra observada, que resultan prácticas y útiles. En la Sección 2.8 se presenta un esquema de simulaciones para verificar la cobertura de los intervalos de verosimilitud con el método propuesto. Por último, se hace un breve resumen de las principales referencias bibliográficas existentes que abordan los temas tratados en este capítulo.

En el Capítulo 3 se aplica la propuesta de estimación presentada en la tesis a cuatro conjuntos de datos reales. El primer ejemplo consiste en tiempos de falla de un componente de la flota de aviones de Aeroméxico. El segundo proviene de pruebas de esfuerzo a transformadores eléctricos. El tercero corresponde a máximo de eventos de lluvias en la estación de Chamela, en la región de Jalisco. Finalmente, el cuarto ejemplo es de tiempos de espera hasta la aparición de tejido cancerígeno en ratas experimentales. En cada ejemplo se usa la verosimilitud discretizada con resolución para estimar el modelo GVE que describe a los datos. Luego se estima el modelo Gama para la distribución de la estadística de razón de verosimilitud y se calculan los niveles de verosimilitud correspondientes al 95 % de confianza con los que se construyen los intervalos de verosimilitud de los parámetros de interés.

En el Capítulo 4 se dan las conclusiones generales de la propuesta de estimación y las ventajas que esta conlleva, así como áreas interesantes para trabajos futuros.

En el Apéndice A se reportan las tablas obtenidas en las simulaciones del segundo y

tercer ejemplo. En el Apéndice B se presenta un resumen de las principales funciones que se programaron en *R* para aplicar la metodología estadística propuesta en la tesis. En el Apéndice C se dan los códigos completos de las funciones y de la propuesta de estimación para el ejemplo de tiempos de falla de un transformador eléctrico.



# Distribuciones Exponencial, Weibull y Generalizada de Valores Extremos

En confiabilidad han sido ampliamente usadas las distribuciones exponencial y Weibull. Para ambas distribuciones se dan las expresiones principales y se mencionan algunas aplicaciones relevantes. La estimación de los parámetros de la distribución Weibull por máxima verosimilitud se dificulta en algunos casos, o no es posible, por lo que se comentan los principales problemas de esta distribución. Con base en lo anterior se da un contexto bibliográfico de las investigaciones realizadas al respecto. Una familia más general que la distribución Weibull es la distribución Generalizada de Valores Extremos (GVE) que abarca las tres familias de extremos, Fréchet, Gumbel y Weibull. Luego de definir la distribución GVE se dará la relación con las familias que agrupa. Se analizan algunas de sus propiedades y se muestra la relación entre las distribuciones GVE y Weibull.

## 1.1. Distribución Exponencial

La distribución exponencial fue utilizada frecuentemente para describir tiempos de falla hasta la década de 1950, cuando se empezó a usar la distribución Weibull. Se sigue usando la distribución exponencial para modelar tiempos de atención, en filas de bancos o tiendas y para tiempos entre eventos aleatorios sucesivos e independientes, como fallas sucesivas de una máquina. Se dice que  $X$  tiene distribución exponencial con tiempo medio de vida  $\sigma$  si su función de densidad está dada por

$$f(x; \sigma) = \frac{1}{\sigma} e^{-x/\sigma}, \quad (1.1)$$

donde  $\sigma = \mathbb{E}(X)$ .

La distribución exponencial se caracteriza por la propiedad de pérdida de memoria. Esta propiedad se puede comprender suponiendo que  $X$  describe los tiempos de falla de una máquina, entonces la probabilidad de que la máquina funcione al menos hasta el tiempo  $s + t$  dado que estuvo funcionando al tiempo  $s$  es igual a la probabilidad de que la máquina funcione al menos por un tiempo  $s$ . Lo anterior se expresa como  $P(X > s + t | X > s) = P(X > t)$ , para todo  $s, t \geq 0$ .

La distribución exponencial es un caso particular de la distribución Weibull que se enunciará a continuación.

## 1.2. Distribución Weibull

La distribución Weibull se comenzó a usar sin llamarse todavía así durante la primera parte del Siglo XX. Sin embargo, fue hasta 1951 que se dio a conocer a nivel mundial por el físico sueco Waloddi Weibull. El artículo de Weibull (1951) presenta la distribución y realiza el ajuste de datos reales de distintas disciplinas. Algunas de las aplicaciones más comunes se han realizado en el área de confiabilidad. Ha sido usada frecuentemente para describir tiempos de falla o voltajes que soportan componentes eléctricos, fuerzas extremas que resiste un material antes de romperse, niveles de corrosión de cascos de barcos, entre otros. Los tiempos de falla son interpretados también como tiempos de vida, por esto ha sido de utilidad en medicina para el estudio de supervivencia en pruebas clínicas, Carroll (2003). En el análisis de fenómenos naturales se destacan las aplicaciones en la geología para modelar movimientos de la corteza terrestre, con el fin de predecir terremotos, Hagiwara (1974) y Hasumi et al. (2009). Además, esta distribución ha sido empleada para modelar velocidad de vientos e intensidad de lluvias.

La amplia variedad de aplicaciones que tiene la distribución Weibull y la flexibilidad de esta familia, al tomar diferentes formas, ha hecho que sea de interés en la comunidad científica. Desde su presentación la distribución Weibull ha provocado diversas investigaciones sobre sus propiedades. A continuación se presenta la distribución Weibull, se mencionan algunas de las propiedades más relevantes y se comentan algunos problemas de estimación. Finalmente se darán algunas referencias bibliográficas que analizan la distribución Weibull y sus problemas de estimación.

Se dice que  $X$  tiene distribución Weibull de mínimos si su función de densidad es de la forma,

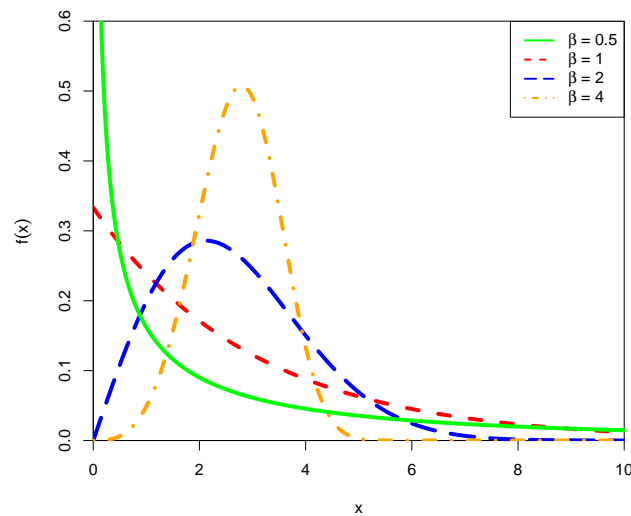
$$f(x; \mu, \sigma, \beta) = \frac{\beta}{\sigma} \left( \frac{x - \mu}{\sigma} \right)^{\beta-1} \exp \left[ - \left( \frac{x - \mu}{\sigma} \right)^{\beta} \right] \mathbb{1}_{[\mu, \infty)}(x), \quad (1.2)$$

con  $\mu \in \mathbb{R}$ ,  $\sigma, \beta \in \mathbb{R}^+$ . Nótese que esta densidad tiene una singularidad en  $x = \mu$  cuando  $\beta < 1$ . Además su soporte depende del parámetro umbral  $\mu$ . Por todo esto se considera que la distribución Weibull de tres parámetros, dada en (1.2), es una distribución no regular.

La función de distribución es

$$F(x; \mu, \sigma, \beta) = \left( 1 - \exp \left[ - \left( \frac{x - \mu}{\sigma} \right)^\beta \right] \right) \mathbb{1}_{[\mu, \infty)}(x), \quad (1.3)$$

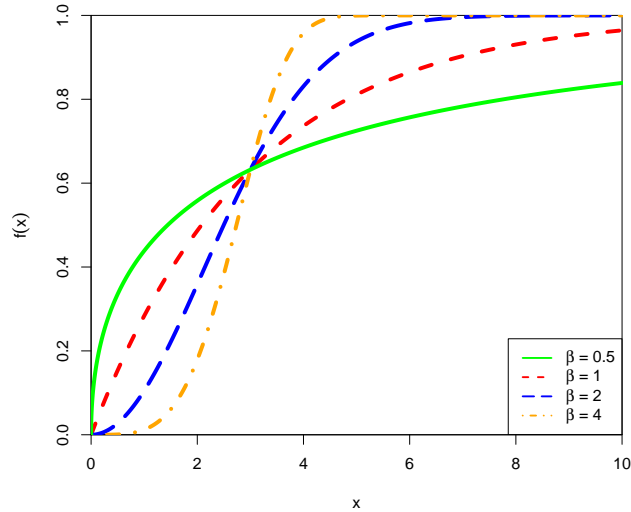
con  $\mu \in \mathbb{R}$ ,  $\sigma, \beta \in \mathbb{R}^+$ . En las Figuras 1.1 y 1.2 se pueden apreciar las diversas formas que presentan la densidad y la función de distribución con  $\mu = 0$ ,  $\sigma = 1$  y distintos valores del parámetro de forma  $\beta$ . Nótese que  $\mu$  es un parámetro umbral, que es una cota inferior para la variable aleatoria  $X$  la cual siempre cumple que  $\mu \leq X$ . Por ello se tiene que para cualquier  $x < \mu$ ,  $F_X(x) = 0$  y en particular  $F_X(\mu) = 0$ . Si  $X$  representa tiempos de falla de un componente, lo anterior indica que el componente fallará antes del tiempo  $\mu$  con probabilidad cero.



**Figura 1.1:** Funciones de densidad Weibull con parámetros  $\mu = 0$ ,  $\sigma = 1$  y  $\beta = 0.5, 1, 2, 4$ .

De la expresión (1.2) se puede ver que el soporte de la distribución Weibull depende del parámetro  $\mu$ , conocido como parámetro umbral. Por lo anterior la familia Weibull es un modelo no regular cuando  $\mu$  es desconocido. Si  $\mu$  es conocido la distribución de  $X - \mu$  corresponde a la Weibull de dos parámetros, usada frecuentemente en el área de confiabilidad. El uso de la distribución Weibull de dos parámetros es popular por ser un modelo regular y tener expresiones para los estimadores de máxima verosimilitud restringidos. Esto último facilita realizar la estimación de sus parámetros. Sin embargo, los estimadores de máxima verosimilitud para las distribuciones Weibull de dos y de tres parámetros no tienen expresiones simples, sino que se deben encontrar numéricamente.

La distribución Weibull abarca otras distribuciones, por ejemplo cuando tiene parámetros  $\beta = 1$  y  $\mu = 0$  se tiene la distribución exponencial con media  $\sigma$ . La transformación



**Figura 1.2:** Funciones de distribución Weibull con parámetros  $\mu = 0$ ,  $\sigma = 1$  y  $\beta = 0.5, 1, 2, 4$ .

logaritmo de la distribución Weibull corresponde a la distribución Gumbel. Una distribución menos conocida que es caso particular de la familia Weibull es la distribución Rayleigh cuando  $\beta = 2$ .

### 1.3. Distribución Generalizada de Valores Extremos (DGVE)

En 1928 Ronald Fisher y Leonard Caleb Tippett presentaron un resultado que es considerado como punto de partida en la Teoría de Valores Extremos. Este teorema identifica la distribución asintótica del máximo (o mínimo) normalizado de una muestra de variables aleatorias independientes e idénticamente distribuidas. Su prueba rigurosa fue realizada por Gnedenko en 1943.

**Teorema 1.1** (Teorema de Fisher-Tippett). *Sean  $X_1, \dots, X_n$  variables aleatorias independientes idénticamente distribuidas y  $M_n := \max\{X_1, \dots, X_n\}$ . Si existe un par de sucesiones  $\{a_n > 0\}$ ,  $\{b_n\}$  tales que*

$$P\left(\frac{M_n - b_n}{a_n} \leq y\right) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} G(y),$$

donde  $G$  es una función de distribución no degenerada, entonces  $G$  corresponde a alguna



de las siguientes familias

$$G(y) = \exp \left[ - \exp \left( - \left( \frac{y - \mu}{\sigma} \right) \right) \right], \quad -\infty < y < \infty, \quad (1.4)$$

$$G(y) = \begin{cases} 0, & \text{si } y \leq \mu, \\ \exp \left[ - \left( \frac{y - \mu}{\sigma} \right)^{-\beta} \right], & \text{si } y > \mu, \end{cases} \quad (1.5)$$

$$G(y) = \begin{cases} \exp \left[ - \left( \frac{y - \mu}{\sigma} \right)^\beta \right], & \text{si } y < \mu, \\ 1, & \text{si } y \geq \mu, \end{cases} \quad (1.6)$$

donde  $\sigma, \beta > 0$  y  $\mu \in \mathbb{R}$ .

El teorema anterior también es conocido como el Teorema de Valores Extremos. Las familias descritas por  $G$  se conocen en la literatura como las distribuciones de valores extremos de máximos tipo I, tipo II y tipo III, respectivamente. Estas familias corresponden a las distribuciones Gumbel (1.4), Fréchet (1.5) y Weibull (1.6) de máximos.

Para facilitar la interpretación se suele reparametrizar la DGVE en términos de los parámetros  $a$ ,  $b$  y  $c$  como sigue,

- en la distribución Gumbel (1.4) se toma  $a = \mu$ ,  $b = \sigma$ ;
- en la distribución Fréchet (1.5),  $a = \mu - \sigma$ ,  $b = \sigma/\beta$ ,  $c = -1/\beta$ ;
- en la distribución Weibull (1.6),  $a = \mu + \sigma$ ,  $b = \sigma/\beta$ ,  $c = 1/\beta$ .

De acuerdo a lo anterior se define la distribución **Generalizada de Valores Extremos de Máximos** como

$$G(y) = \begin{cases} \exp \left[ - \left( 1 + c \left( \frac{y-a}{b} \right) \right)^{-1/c} \right] \mathbb{1}_{(-\infty, a - \frac{b}{c}]}(y) + \mathbb{1}_{(a - \frac{b}{c}, \infty)}(y), & \text{si } c < 0, \\ \exp \left[ - \exp \left( - \left( \frac{y-a}{b} \right) \right) \right], & \text{si } c = 0, \\ \exp \left[ - \left( 1 + c \left( \frac{y-a}{b} \right) \right)^{-1/c} \right] \mathbb{1}_{[a - \frac{b}{c}, \infty)}(y), & \text{si } c > 0, \end{cases} \quad (1.7)$$

donde los casos  $c < 0$  y  $c > 0$  corresponden a las distribuciones Weibull y Fréchet, respectivamente.

En esta tesis los programas realizados en el software libre  $R$  tendrán en cuenta la distribución de mínimos. Para obtener las expresiones respectivas para mínimos basta considerar que

$$\text{máx}\{X_1, \dots, X_n\} = - \text{mín}\{-X_1, \dots, -X_n\}.$$

Esta relación permite dar la función de distribución de la Generalizada de Valores Extremos para mínimos como

$$F(x) = \begin{cases} \left(1 - \exp \left[ - \left(1 - c \left(\frac{x-a}{b}\right)\right)^{-1/c} \right]\right) \mathbb{1}_{[a+\frac{b}{c}, \infty)}(x), & \text{si } c < 0 \\ 1 - \exp \left[ - \exp \left(\frac{x-a}{b}\right) \right], & \text{si } c = 0 \\ \left(1 - \exp \left[ - \left(1 - c \left(\frac{x-a}{b}\right)\right)^{-1/c} \right]\right) \mathbb{1}_{(-\infty, a+\frac{b}{c})}(x) + \mathbb{1}_{[a+\frac{b}{c}, \infty)}(x), & \text{si } c > 0 \end{cases}$$

Usualmente las familias que conforman la DGVE se distinguen entre sí por el valor de  $c$ . Para la DGVE de mínimos cuando  $c = 0$  se dice que es de la familia Gumbel, si  $c < 0$  pertenece a la familia Weibull y cuando  $c > 0$  pertenece a la familia Fréchet. Por medio de simulación de muestras pequeñas se encontró que el modelo Gumbel es indistinguible del modelo Weibull y del Fréchet que corresponden a distribuciones GVE( $a, b, c$ ) con  $c$  en el intervalo alrededor del cero  $(-0.0001, 0.0001)$ . Es decir, las distribuciones de valores extremos entre los cuantiles de probabilidades  $\frac{1}{n+1}, \dots, \frac{n}{n+1}$  son bastante similares. Donde  $50 \leq n \leq 1000$ , pues son los tamaños de muestra que se dan en la mayoría de aplicaciones de valores extremos. Así la **Distribución Generalizada de Valores Extremos de Mínimos** (DGVE) que se considerará de aquí en adelante es

$$F(x) = \begin{cases} \left\{1 - \exp \left[ - \left(1 - c \left(\frac{x-a}{b}\right)\right)^{-\frac{1}{c}} \right]\right\} \mathbb{1}_{[a+\frac{b}{c}, \infty)}(x), & \text{si } c \leq -0.0001, \\ 1 - \exp \left[ - \exp \left(\frac{x-a}{b}\right) \right], & \text{si } |c| < 0.0001, \quad (1.8) \\ \left\{1 - \exp \left[ - \left(1 - c \left(\frac{x-a}{b}\right)\right)^{-\frac{1}{c}} \right]\right\} \mathbb{1}_{(-\infty, a+\frac{b}{c})}(x) + \mathbb{1}_{[a+\frac{b}{c}, \infty)}(x), & \text{si } c \geq 0.0001, \end{cases}$$

La función de densidad correspondiente será entonces,

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{b} \left(1 - c \left(\frac{x-a}{b}\right)\right)^{-(1+1/c)} \exp \left[ - \left(1 - c \left(\frac{x-a}{b}\right)\right)^{-1/c} \right], & \text{si } c \notin (-0.0001, 0.0001) \\ \frac{1}{b} \left[ \exp \left(\frac{x-a}{b}\right) \right] \exp \left[ - \exp \left(\frac{x-a}{b}\right) \right], & \text{si } c \in (-0.0001, 0.0001). \end{cases}$$

En las aplicaciones para considerar tiempos de garantía, por ejemplo, es de interés estimar el parámetro umbral de la distribución que describe los datos. Considerando que para una muestra de tamaño  $n$  el cuantil más pequeño que se puede estimar es el cuantil  $\frac{1}{n+1}$ , es más sensato estimar este cuantil pequeño que el parámetro umbral pues la estimación será mucho mejor y más precisa con base en los datos observados. La

estimación de los cuantiles de la DGVE se basa en tomar la expresión (1.8) y de ella obtener la siguiente relación entre los cuantiles con los parámetros de la DGVE,

$$Q_\alpha = \begin{cases} a + b \ln(-\ln(1 - \alpha)), & \text{si } c \in (-0.0001, 0.0001) \\ a + \frac{b}{c} (1 - (-\ln(1 - \alpha))^{-c}), & \text{si } c \notin (-0.0001, 0.0001). \end{cases} \quad (1.9)$$

Para encontrar los estimadores de máxima verosimilitud (emv) de los cuantiles, por la propiedad de invarianza de la verosimilitud, basta reemplazar los emv  $\hat{a}$ ,  $\hat{b}$  y  $\hat{c}$  en (1.9). Para realizar la interpretación de los parámetros en las familias Weibull, Gumbel y Fréchet de mínimos se tiene la siguiente relación con los parámetros de la DGVE:

$$\text{DGVE a Weibull } [c \leq -0.0001]: \quad \mu = a + \frac{b}{c}, \quad \sigma = \frac{-b}{c}, \quad \beta = \frac{-1}{c}.$$

$$\text{DGVE a Gumbel } [c \in (-0.0001, 0.0001)]: \quad \mu = a, \quad \sigma = b. \quad (1.10)$$

$$\text{DGVE a Fréchet } [c \geq 0.0001]: \quad \mu = a + \frac{b}{c}, \quad \sigma = \frac{b}{c}, \quad \beta = \frac{1}{c}.$$

## 1.4. Problemas de estimación

Las distribuciones Weibull y Fréchet de mínimos poseen un parámetro umbral  $\mu$ , que hace el papel de cota inferior para la distribución Weibull y de cota superior para la Fréchet. La densidad en  $x = \mu$  presenta una discontinuidad, en ambos casos. La densidad Weibull en  $x = \mu$  es no acotada, mientras que la densidad de la Fréchet tiene una discontinuidad removible. Lo anterior hace que estas distribuciones hagan parte de los modelos no regulares. La DGVE se define a partir de las distribuciones Weibull, Gumbel y Fréchet por esto hereda las características problemáticas mencionadas para las distribuciones Weibull y Fréchet, siendo a su vez una distribución no regular. Lo anterior genera problemas para la construcción de intervalos o regiones de estimación para los parámetros ya que las condiciones de regularidad que se requieren para la Teoría de Máxima Verosimilitud (Serfling, 1980, p.144-149) no se cumplen necesariamente.

Las verosimilitudes de Weibull y Fréchet usualmente presentan formas asimétricas e incluso pueden ser de forma muy plana para ciertas muestras que podrían ser bien modeladas también por un modelo Gumbel. Esto genera problemas al maximizar la verosimilitud numéricamente. La reparametrización de estas distribuciones a la DGVE hace que la verosimilitud sea más simétrica con respecto a su máximo. Como la DGVE también posee un umbral en el siguiente capítulo se presentará una metodología para facilitar la estimación.

La eficacia de la estimación numérica depende de tomar valores iniciales adecuados. Por esto en la Sección 2.3 se propone una idea práctica para resolver este problema que funcionó muy bien para todos ejemplos del Capítulo 3.

A continuación se darán algunas de las referencias bibliográficas más importantes sobre los problemas en la estimación de las distribuciones Weibull y la GVE. En la Sección 2.9 se dará un panorama de las propuestas que se han dado para resolver estos problemas.

## Estimación de parámetros de la distribución Weibull

Panchang y Gupta (1989) propusieron un método iterativo para resolver las ecuaciones de máxima verosimilitud para hallar los estimadores de la distribución Weibull con base en el método de Newton-Raphson. Rinne (2009) describe en su libro sobre la distribución Weibull, la gran importancia de este y algunos métodos similares, mostrando la vigencia que tienen aún este tipo de métodos.

Smith y Naylor (1987) realizaron una comparación entre la estimación por máxima verosimilitud y por estadística Bayesiana para la distribución Weibull de tres parámetros. En estadística Bayesiana comentan que la dificultad principal es la elección de la distribución a priori. Los resultados fueron similares por ambos métodos cuando se estimaron cuantiles u otras características usando la verosimilitud como el producto de densidades. Sin embargo, al estimar cuantiles extremos de la distribución, las estimaciones difieren y estos autores piensan que se tienen mejores resultados bajo el enfoque Bayesiano.

Bai et al. (1991) proponen realizar la estimación de los parámetros de las distribuciones Gama y Weibull de tres parámetros numéricamente usando la reparametrización en la distribución respectiva de dos parámetros. Para esto se toma la variable aleatoria Weibull o Gama de tres parámetros y se hace  $X' = X - \mu$ , donde  $\mu$  es el parámetro umbral, cota inferior. El modelo transformado se convierte así en uno regular. Del modelo transformado se obtienen las expresiones cerradas de los estimadores restringidos, lo cual hace que la estimación numérica sea más sencilla.

Por otra parte Lawless (2003, Sección 4.5) describe con gran detalle a los modelos con un parámetro umbral. En particular discute el problema que surge al considerarlos, de la verosimilitud no acotada de la distribución Weibull de tres parámetros. Para esto propone considerar los datos censurados por intervalo como una posible solución. Se mencionarán otras propuestas en esta dirección en la Sección 2.9.

## Uso de la DGVE para la estimación de los parámetros de las distribuciones de valores extremos

Para facilitar la estimación de los parámetros de la distribución Weibull se ha propuesto usar un modelo más general, la distribución Generalizada de Valores Extremos. Esta distribución permite considerar el modelo Gumbel que es límite del Weibull. Las siguientes referencias analizan la estimación en la DGVE y su relación con la distribución Weibull.

Lockhart y Stephens (1994) hacen referencia a la DGVE como modelo más general que la distribución Weibull. Identifican que los problemas de estimación de la distribución

Weibull se heredan a la GVE cuando se usa la definición de la verosimilitud como el producto de densidades. Usan la observación más pequeña como el estimador del parámetro umbral y a partir de un procedimiento iterativo calculan los estimadores de los parámetros de la DGVE. Por medio de simulaciones analizan la convergencia a los estimadores de máxima verosimilitud.

Cheng y Iles (1990) plantean dos problemas que se dan con distribuciones como la Gamma, Gaussiana Inversa, Log-normal y Weibull de tres parámetros. El primer inconveniente se da debido a la no regularidad de los modelos por poseer un parámetro umbral. Lo anterior hace que la verosimilitud cerca al parámetro umbral en algunos casos tenga una singularidad. El segundo problema planteado se enuncia como el problema de modelos empotrados, incrustados o límite (denotados en inglés como *embedded models*).

Estos modelos son distribuciones límite para la familia de distribución de interés que se obtienen cuando se hace tender a infinito algunos de los parámetros de la familia. Lo anterior sucede por ejemplo para las familias Weibull y Fréchet que tienen como modelo límite a la Gumbel. La distribución Normal es límite de las familias Ji-cuadrada y la Gama. Cuando en la distribución Weibull se obtienen estimadores de máxima verosimilitud muy grandes para los parámetros, esto indica que se está muy cerca del modelo límite Gumbel. Cuando esto ocurre, usualmente las verosimilitudes perfiles de cada parámetro son de forma plana. En estas situaciones ocurre que hay un modelo límite de dos parámetros más sencillo cuyos estimadores son finitos. Además de ser más sencillo, en ocasiones describe mejor a los datos.

Green et al. (1994) han criticado injustamente a las verosimilitudes perfil planas que surgen en estos casos como no informativas, sin reconocer que se trata de un problema de identificabilidad de modelos, al estar muy cerca del modelo límite cuando esto ocurre.

El modelo empotrado adecuado evita que la función de verosimilitud sea plana con lo que se reducen los problemas numéricos. Por ejemplo, Hirose y Lai (1997) consideraron la distribución Weibull como parte de una familia más amplia, la DGVE. Esta referencia resalta la vigencia de los problemas de estimación para los modelos Weibull y GVE para los que propone una versión de verosimilitud discretizada, se darán más detalles de esto en el siguiente capítulo.



## Conceptos estadísticos relevantes, propuesta de estimación y revisión bibliográfica

Para comprender mejor los problemas de estimación que se dan con las distribuciones Weibull y Generalizada de Valores Extremos con los métodos tradicionales, se hará una revisión de los conceptos de verosimilitud. Se dará la metodología para realizar la estimación por máxima verosimilitud, así como la propuesta para verificar la cobertura de los intervalos de verosimilitud obtenidos con la metodología de estimación dada. Además se presentan las gráficas cuantil-cuantil con una banda de confianza construida a partir de simulaciones. Estas gráficas se emplearán en los ejemplos del Capítulo 3.

### 2.1. Conceptos asociados a la función de verosimilitud

La función de verosimilitud permite cuantificar la plausibilidad de algún valor del parámetro con base en una muestra observada. La Función de Verosimilitud fue definida por Fisher en 1922 como una función del parámetro  $\theta$  que es proporcional a la probabilidad de la muestra observada  $X_1, X_2, \dots, X_n$  de variables aleatorias discretas.

$$L(\theta; \vec{x}) = C(x_1, x_2, \dots, x_n)P(X_1 = x_1, X_2 = x_2, \dots, X_n = x_n; \theta),$$

donde  $C(x_1, x_2, \dots, x_n)$  es una función positiva de los datos. Por tanto, Kalbfleisch (1985) la define para una muestra de variables aleatorias  $X_1, X_2, \dots, X_n$  independientes e idénticamente distribuidas como

$$L(\theta; \vec{x}) = C(x_1, x_2, \dots, x_n) \prod_{i=1}^n P(X_i = x_i; \theta).$$

Usualmente  $L(\theta; \vec{x})$  está conformada por producto de términos lo que hace conveniente usar su logaritmo. Se define la log-verosimilitud de  $\theta$  como

$$\ell(\theta; \vec{x}) = \ln L(\theta; \vec{x}).$$

Al valor que maximiza la verosimilitud se le llama el estimador de máxima verosimilitud (emv) y se denota por  $\hat{\theta}$ .

La verosimilitud relativa de  $\theta$  se define para medir qué tan plausible es un valor de los parámetros con respecto al más creíble, el emv. En el libro de Kalbfleisch se define la verosimilitud relativa del parámetro  $\theta$  como

$$R(\theta; \vec{x}) = \frac{L(\theta; \vec{x})}{\sup_{\theta} L(\theta; \vec{x})} = \frac{L(\theta; \vec{x})}{L(\hat{\theta}; \vec{x})}.$$

La verosimilitud relativa permite identificar conjuntos, regiones o intervalos de los parámetros que están sustentados por los datos y que hacen más probable a la muestra observada que los valores que están fuera de dichos conjuntos. Para interpretar la estimación del parámetro se define un intervalo o región de verosimilitud de nivel  $k \in [0, 1]$  como el conjunto de valores del parámetro  $\theta$  tales que su verosimilitud relativa es mayor o igual a  $k$ , es decir,

$$IV(k) = \{\theta: R(\theta; \vec{x}) \geq k\}. \tag{2.1}$$

Cuando la dimensión de  $\theta$  es uno, Kalbfleisch califica a los valores de  $\theta$  contenidos en los intervalos de verosimilitud de nivel  $k = 0.1$  como valores “plausibles” y a los de nivel  $k = 0.5$  como “muy plausibles”. Por otra parte, cuando  $k = 0.01$  considera los valores fuera del intervalo como prácticamente imposibles.

Para asignar la probabilidad de que el intervalo de verosimilitud  $IV(k)$  contenga el parámetro verdadero usualmente se considera a la estadística de razón de verosimilitud,

$$W(\theta) := -2 \ln R(\theta; \vec{x}). \tag{2.2}$$

La probabilidad de que el intervalo contenga al valor verdadero de  $\theta$  que generó a la muestra se le llama probabilidad de cobertura. Wilks en 1938 demostró que la estadística de razón de verosimilitud converge en distribución al aumentar el tamaño de muestra a una distribución Ji-cuadrada con tantos grados de libertad como sea la dimensión de  $\theta$ , bajo condiciones de regularidad. Como asintóticamente ésta es una distribución completamente especificada entonces se puede concebir a  $W(\theta)$  como una cantidad pivotal. Recuérdese que una cantidad pivotal es una función de los parámetros y de la muestra observada con distribución completamente especificada.



El nivel de verosimilitud  $k$  y el cuantil de probabilidad  $\alpha$  de la Ji-cuadrada denotado por  $Q_\alpha$  se relacionan de la siguiente manera

$$\begin{aligned}\alpha &= P(W(\theta) \leq Q_\alpha) \\ &= P\left[\ln R(\theta; \vec{x}) \geq -\frac{Q_\alpha}{2}\right] \\ &= P\left[R(\theta; \vec{x}) \geq \exp\left(-\frac{Q_\alpha}{2}\right)\right].\end{aligned}$$

Por tanto, para una  $n$  suficientemente grande, la relación entre el nivel de verosimilitud y el cuantil de probabilidad  $\alpha$  de la distribución Ji-cuadrada es

$$k = \exp\left(-\frac{Q_\alpha}{2}\right).$$

Lo anterior indica que, para un parámetro unidimensional, el nivel asociado al cuantil de probabilidad 0.95 corresponde a  $k = 0.1465$ .

**Ejemplo 2.1.** Para ilustrar las definiciones anteriores se va a considerar como ejemplo el número de individuos de la mariposa *Mimoides thymbraeus aconophos* del grupo Papilionoidea registrados en la Sierra de Manantlán, en los estados de Jalisco y Colima en 1995. Los datos fueron analizados por Luna-Reyes y Llorente-Bousquets (2004), para obtener los conteos se visitaron seis sitios cada mes y se clasificaron por especie las mariposas recolectadas en las trampas. Para los conteos registrados en la Tabla 2.1 que se considerarán de la especie mencionada del grupo Papilionoidea es razonable suponer una distribución Poisson.

Enero	0	Julio	1
Febrero	1	Agosto	2
Marzo	1	Septiembre	2
Abril	3	Octubre	2
Mayo	0	Noviembre	0
Junio	3	Diciembre	0

**Tabla 2.1:** Número de individuos de la mariposa *Mimoides* observados en cada mes en seis sitios de la sierra de Manantlán.

La función de verosimilitud correspondiente a la distribución Poisson con parámetro  $\lambda$  está dada por

$$\begin{aligned}L(\lambda; \vec{x}) &= C(\vec{x}) \prod_{i=1}^{12} P(X = x_i; \lambda) = \prod_{j=1}^{12} x_j! \prod_{i=1}^{12} \frac{\lambda^{x_i} e^{-\lambda}}{x_i!} \\ &= \lambda^{\sum_{i=1}^{12} x_i} e^{-12\lambda} = \lambda^{15} e^{-12\lambda}.\end{aligned}$$

Tomando el logaritmo de la expresión anterior y teniendo en cuenta la muestra observada se obtiene la log-verosimilitud de  $\lambda$ ,

$$\ell(\lambda; \vec{x}) = 15 \ln \lambda - 12\lambda.$$

El valor que maximiza  $L(\lambda; \vec{x})$ , es decir el estimador de máxima verosimilitud se obtiene derivando la log-verosimilitud, igualando a cero y despejando  $\lambda$ . La derivada de la log-verosimilitud está dada por,

$$\frac{\partial \ell(\lambda; \vec{x})}{\partial \lambda} = \frac{15}{\lambda} - 12 = 0.$$

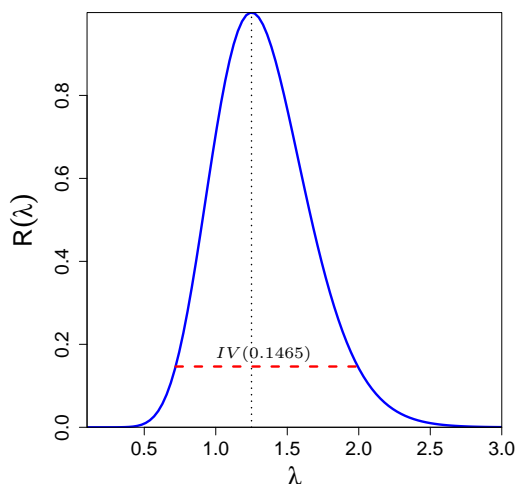
Simplificando se obtiene el emv como

$$\hat{\lambda} = \frac{15}{12} = 1.25.$$

Para este ejemplo la verosimilitud relativa de  $\lambda$  está dada por

$$R(\lambda; \vec{x}) = \frac{L(\lambda; \vec{x})}{L(\hat{\lambda}; \vec{x})} = \left(\frac{\lambda}{\hat{\lambda}}\right)^{15} \exp\left(-12(\lambda - \hat{\lambda})\right).$$

La gráfica de la verosimilitud relativa de  $\lambda$  se presenta en la Figura 2.1. Además el intervalo de verosimilitud del nivel 0.1465 asociado al 95 % de confianza es  $[0.719, 1.993]$ .



**Figura 2.1:** Verosimilitud relativa de  $\lambda$  e intervalo de verosimilitud de nivel 0.1465.

Para expresar la verosimilitud de variables aleatorias continuas Barnard (1967) y Kempthorne (1966) de manera independiente se percataron que toda variable aleatoria continua  $X$  se mide con instrumentos que tienen resolución finita. Por ello, cuando se dice que  $X_i = x_i$  en realidad puede interpretarse en muchos casos que  $X_i \in [x_i - \varepsilon, x_i + \varepsilon]$  donde  $\varepsilon_i$  es la resolución del instrumento con la que se obtuvo la observación  $x_i$ . Por el Teorema de Valor Medio para integrales la probabilidad asociada es

$$\begin{aligned} P(x_i - \varepsilon_i < X_i \leq x_i + \varepsilon_i; \theta) &= F(x_i + \varepsilon_i; \theta) - F(x_i - \varepsilon_i; \theta) \\ &= \int_{x_i - \varepsilon_i}^{x_i + \varepsilon_i} f(x) dx \approx 2\varepsilon_i f(x_i). \end{aligned} \quad (2.3)$$

La aproximación anterior es válida siempre que la función de densidad  $f$  no tenga singularidades y que no cambie mucho en el intervalo  $(x_i - \varepsilon_i, x_i + \varepsilon_i]$ . En tal caso para una muestra de variables aleatorias continuas independientes la función de verosimilitud y el producto de densidades son aproximadamente proporcionales, es decir

$$L^*(\theta; \vec{x}) = C(x_1, x_2, \dots, x_n) \prod_{i=1}^n f(x_i; \theta). \quad (2.4)$$

Aquí  $L^*$  se llamará la aproximación continua a la verosimilitud o verosimilitud continua. Por conveniencia matemática se prefiere trabajar con el logaritmo de la verosimilitud continua, sin embargo rara vez revisan si la aproximación (2.3) es adecuada. Las definiciones de log-verosimilitud, verosimilitud relativa e intervalo de verosimilitud son similares a las que se dieron para el caso de una variable aleatoria discreta.

**Ejemplo 2.2.** Considérese el número de días desde el 15 de mayo hasta que ocurre el primer huracán en el Pacífico mexicano registrados desde el año 2000 al 2015. Los datos recopilados para el trabajo final del curso de licenciatura de Métodos Estadísticos de DEMAT-CIMAT de Ruiz Bolaños, J. I y Vargas Barrera J.L.(2016) fueron

$$7, 10, 9, 4, 6, 2, 12, 11, 13, 33, 14, 22, 6, 1, 7, 13.$$

Una distribución exponencial resulta razonable para estos datos. Con base en lo anterior la verosimilitud continua está dada por

$$L^*(\lambda; \vec{x}) = C(\vec{x}) \prod_{i=1}^{16} \frac{1}{\lambda} e^{-\frac{x_i}{\lambda}} = \frac{1}{\lambda^{16}} \exp\left(-\sum_{i=1}^{16} \frac{x_i}{\lambda}\right). \quad (2.5)$$

Dado que la suma de los datos es  $\sum_{i=1}^{16} x_i = 170$ , la log-verosimilitud es,

$$\ell^*(\lambda; \vec{x}) = -16 \ln \lambda - \frac{170}{\lambda}.$$

Derivando e igualando a cero  $\ell(\lambda; \vec{x})$  se encuentra el emv así,

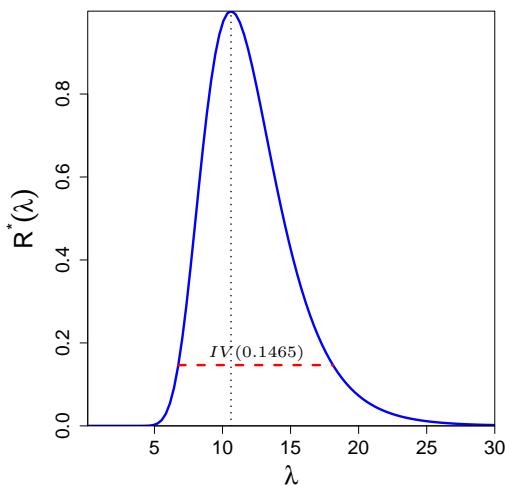
$$\frac{\partial \ell(\lambda; \vec{x})}{\partial \lambda} = -\frac{16}{\lambda} + \frac{170}{\lambda^2} = 0,$$

$$\hat{\lambda} = \frac{170}{16} = 10.625.$$

La verosimilitud relativa compara la verosimilitud de un valor  $\lambda$  del parámetro contra el que maximiza la probabilidad de los datos observados, el emv  $\hat{\lambda}$ . En este caso la verosimilitud relativa está dada por

$$R^*(\lambda; \vec{x}) = \frac{L^*(\lambda; \vec{x})}{L^*(\hat{\lambda}; \vec{x})} = \left(\frac{10.62}{\lambda}\right)^{16} \exp\left[-170\left(\frac{1}{\lambda} - \frac{1}{10.62}\right)\right]$$

y su gráfica se muestra en la Figura 2.2 junto con el intervalo de nivel de verosimilitud 0.1465.



**Figura 2.2:** Verosimilitud relativa de  $\lambda$  usando el producto de densidades e intervalo de verosimilitud de nivel 0.1465, [6.75, 18.11].

Sin embargo, para variables aleatorias continuas cuya densidad tiene singularidades, como la densidad Weibull de tres parámetros, la relación (2.3) no se cumple (véase Figueroa, 2012). Para resolver esto conviene usar la definición de verosimilitud correcta (dada por Cheng y Iles, 1987) como se hizo en Montoya et al. (2009) y Liu et al. (2015), usando la resolución del instrumento de medición. Aquí se llamará a esta verosimilitud la **verosimilitud discretizada con resolución**. Para definirla se considera que la observación

$x_i$  se obtiene con una resolución  $\varepsilon_i$  y por esto la probabilidad de que  $X_i$  tome el valor  $x_i$  es,

$$\begin{aligned} P(X_i = x_i; \theta) &= P(x_i - \varepsilon_i < X \leq x_i + \varepsilon_i; \theta) \\ &= F(x_i + \varepsilon_i; \theta) - F(x_i - \varepsilon_i; \theta). \end{aligned} \quad (2.6)$$

A partir de la expresión anterior, incorporando la precisión de las observaciones en la definición de verosimilitud para variables aleatorias continuas, dada por Barnard (1967) y Kempthorne (1966), se define aquí la **verosimilitud discretizada con resolución** como

$$L(\theta; \vec{x}) = C(x_1, x_2, \dots, x_n) \prod_{i=1}^n \left[ F(x_i + \varepsilon_i; \theta) - F(x_i - \varepsilon_i; \theta) \right]. \quad (2.7)$$

**Ejemplo 2.3.** Para comparar la verosimilitud discretizada con resolución  $L(\theta; \vec{x})$  y la aproximación continua  $L^*(\theta; \vec{x})$  dada en (2.5) se usarán los datos de días hasta el primer huracán del ejemplo anterior.

La función de distribución de una variable aleatoria con distribución exponencial está dada por

$$F(x; \lambda) = 1 - e^{-\frac{x}{\lambda}}.$$

Las observaciones fueron obtenidas con una resolución de un día, por lo que se tomará  $\varepsilon_i = 1$  para  $i = 1, \dots, 16$ . A partir de (2.7) la verosimilitud discretizada con resolución para la distribución exponencial será en este caso,

$$L(\theta; \vec{x}) = \prod_{i=1}^{16} \left[ \left( 1 - e^{-\frac{x_i+1}{\lambda}} \right) - \left( 1 - e^{-\frac{x_i-1}{\lambda}} \right) \right] = \prod_{i=1}^{16} \left[ e^{-\frac{x_i-1}{\lambda}} - e^{-\frac{x_i+1}{\lambda}} \right].$$

Al tomar logaritmo de la expresión anterior obtenemos la log-verosimilitud de  $\lambda$ ,

$$\ell(\lambda; \vec{x}) = \sum_{i=1}^{16} \ln \left[ e^{-\frac{x_i-1}{\lambda}} - e^{-\frac{x_i+1}{\lambda}} \right].$$

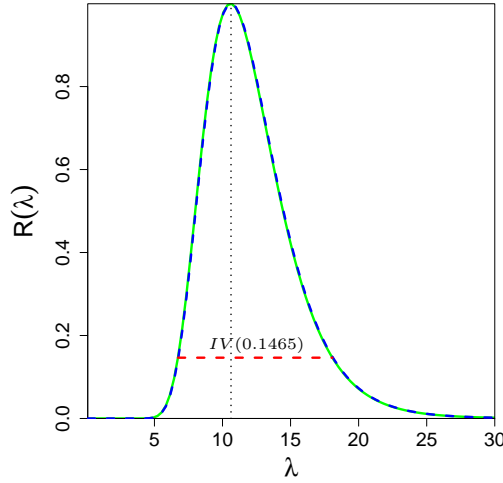
En este caso el emv se calcula numéricamente y resulta  $\hat{\lambda} = 10.5918$ . La verosimilitud relativa es

$$R(\lambda; \vec{x}) = \exp \left[ \ell(\lambda; \vec{x}) - \ell(\hat{\lambda}; \vec{x}) \right],$$

y el intervalo de verosimilitud de nivel 0.1465 fue [6.729, 18.072].

En la Figura 2.3 se presenta en línea continua la verosimilitud relativa obtenida con la verosimilitud discretizada  $R(\lambda; \vec{x})$ , en línea discontinua la verosimilitud relativa  $R^*(\lambda; \vec{x})$  y los intervalos de verosimilitud de nivel 0.1465, ambas curvas se traslapan completamente.

Por tanto, los estimadores y los intervalos obtenidos con las verosimilitudes relativas  $R(\lambda; \vec{x})$  y  $R^*(\lambda; \vec{x})$  son similares.



**Figura 2.3:** Verosimilitudes relativas de  $\lambda$  usando la verosimilitud discretizada y el producto de densidades (línea discontinua).

Cuando la distribución de interés tiene más de un parámetro  $\theta = (\theta_1, \dots, \theta_q)$ , a menudo interesa estimar sólo uno de ellos, por ejemplo  $\theta_1$ . Esto requiere eliminar los parámetros restantes  $\theta_2, \dots, \theta_q$  llamados de estorbo. Para ello se sustituyen en la función de verosimilitud por los llamados estimadores de máxima verosimilitud restringidos (emvr) de los parámetros de estorbo  $\hat{\theta}_2(\theta_1), \hat{\theta}_3(\theta_1), \dots, \hat{\theta}_q(\theta_1)$ . La función resultante se conoce como la verosimilitud perfil de  $\theta_1$ .

Se define la **verosimilitud perfil de  $\theta_1$**  como

$$L_p(\theta_1) = \max_{\theta_2, \dots, \theta_q | \theta_1} L(\theta_1, \dots, \theta_q; \vec{x}) = L(\theta_1, \hat{\theta}_2(\theta_1), \hat{\theta}_3(\theta_1), \dots, \hat{\theta}_q(\theta_1), \vec{x}).$$

Tomando logaritmo de la expresión anterior se obtiene la **log-verosimilitud perfil de  $\theta_1$**  como

$$\ell_p(\theta_1) = \max_{\theta_2, \dots, \theta_q | \theta_1} \ell(\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_q; \vec{x}) = \ell(\theta_1, \hat{\theta}_2(\theta_1), \hat{\theta}_3(\theta_1), \dots, \hat{\theta}_q(\theta_1); \vec{x}).$$

La verosimilitud relativa perfil de  $\theta_1$  es,

$$R_p(\theta_1; \vec{x}) = \frac{L_p(\theta_1; \vec{x})}{L(\hat{\theta}_1, \hat{\theta}_2, \hat{\theta}_3, \dots, \hat{\theta}_q; \vec{x})}.$$

Para estimar por intervalo al parámetro de interés  $\theta_1$  se obtienen los intervalos de verosimilitud de nivel  $k$  a partir de la verosimilitud relativa perfil. Análogamente a la definición (2.1) se define el intervalo de verosimilitud para  $\theta_1$  de nivel  $k \in (0, 1)$  como

$$IV(k) = \{\theta_1 : R_p(\theta_1; \vec{x}) \geq k\}.$$

**Ejemplo 2.4.** Considérese la distribución Weibull de dos parámetros la cual es un modelo regular. La densidad correspondiente es

$$f(x; \sigma, \beta) = \frac{\beta}{\sigma} \left(\frac{x}{\sigma}\right)^{\beta-1} \exp \left[ - \left(\frac{x}{\sigma}\right)^{\beta} \right] \mathbb{1}_{[0, \infty)}(x).$$

La aproximación continua a la verosimilitud es,

$$\begin{aligned} L^*(\sigma, \beta; \vec{x}) &= C(\vec{x}) \prod_{i=1}^n \frac{\beta}{\sigma} \left(\frac{x_i}{\sigma}\right)^{\beta-1} \exp \left[ - \left(\frac{x_i}{\sigma}\right)^{\beta} \right], \\ &= \frac{\beta^n}{\sigma^{n\beta}} \prod_{j=1}^n x_j^{\beta} \exp \left[ - \sum_{l=1}^n \left(\frac{x_l}{\sigma}\right)^{\beta} \right], \end{aligned}$$

donde  $C(\vec{x}) = \prod_{i=1}^n \frac{1}{x_i}$ .

La función de log-verosimilitud de  $\beta$  y  $\sigma$  es

$$\ell^*(\sigma, \beta; \vec{x}) = n \ln \beta - n\beta \ln \sigma + \beta \sum_{j=1}^n \ln(x_j) - \sum_{l=1}^n \left(\frac{x_l}{\sigma}\right)^{\beta}.$$

Para encontrar el emvr de  $\sigma$  dado  $\beta$ , se deriva la log-verosimilitud con respecto a  $\sigma$  y se iguala a cero,

$$\begin{aligned} \frac{\partial \ell^*(\sigma, \beta; \vec{x})}{\partial \sigma} &= -\frac{n\beta}{\sigma} + \frac{\beta}{\sigma^{(\beta+1)}} \sum_{i=1}^n x_i^{\beta} \\ &= -n + \frac{1}{\sigma^{\beta}} \sum_{i=1}^n x_i^{\beta}. \end{aligned}$$

Así el emvr es

$$\hat{\sigma}(\beta) = \left( \sum_{i=1}^n \frac{x_i^{\beta}}{n} \right)^{1/\beta}.$$

Este se usará para obtener la verosimilitud perfil de  $\beta$ . Sustituyendo la expresión anterior en  $\ell^*(\sigma, \beta; \vec{x})$  se obtiene la verosimilitud perfil de  $\beta$ , la cual está dada por

$$\ell_p^*(\beta; \vec{x}) = n \ln \beta - n \ln \left[ \sum_{i=1}^n \frac{x_i^{\beta}}{n} \right] + \beta \sum_{j=1}^n \ln(x_j) - \left( \sum_{i=1}^n \frac{x_i^{\beta}}{n} \right)^{-1} \sum_{l=1}^n x_l^{\beta}.$$

El estimador de máxima verosimilitud de  $\beta$  se debe encontrar numéricamente, maximizando  $\ell_p(\beta; \vec{x})$ . Nótese que el emv de  $\beta$  de la verosimilitud global  $L(\sigma, \beta; \vec{x})$  coincide con el emv de  $\beta$  que maximiza la verosimilitud perfil  $L_p(\beta; \vec{x})$ .

**Ejemplo 2.5.** La distribución Weibull se usó para modelar los tiempos hasta que aparece un carcinoma en ratas de laboratorio analizadas por Pike (1966). Este ejemplo lo presenta también Lawless en su libro (2003, p.188) pero los analiza con un modelo Weibull de tres parámetros como se considerará más adelante. Los tiempos hasta la aparición de tejido cancerígeno fueron registrados en días y los últimos dos están censurados

143, 164, 188, 188, 190, 192, 206, 209, 213, 216, 220, 227, 230, 234, 246, 265, 304, 216\*, 244\*.

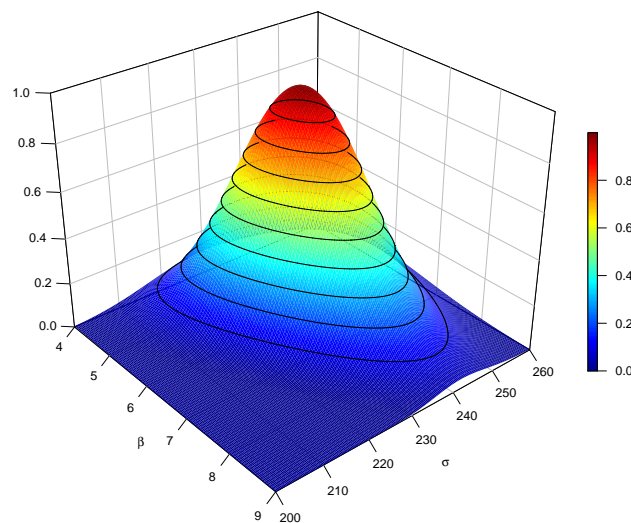
La función de distribución de la Weibull de dos parámetros está dada por,

$$F(x; \sigma, \beta) = 1 - \exp \left[ - \left( \frac{x}{\sigma} \right)^\beta \right].$$

La función de verosimilitud discretizada considerando que hay  $r$  datos censurados por la derecha está dada por

$$L(\sigma, \beta; \vec{x}) = \prod_{i=1}^{n-r} \left\{ \exp \left[ - \left( \frac{x_i - \varepsilon_i}{\sigma} \right)^\beta \right] - \exp \left[ - \left( \frac{x_i + \varepsilon_i}{\sigma} \right)^\beta \right] \right\} \prod_{j=1}^r \left\{ 1 - \exp \left[ - \left( \frac{x_j}{\sigma} \right)^\beta \right] \right\}.$$

La gráfica de la verosimilitud relativa conjunta de  $\sigma, \beta$  construida a partir de la expresión anterior se muestra en la Figura 2.4.

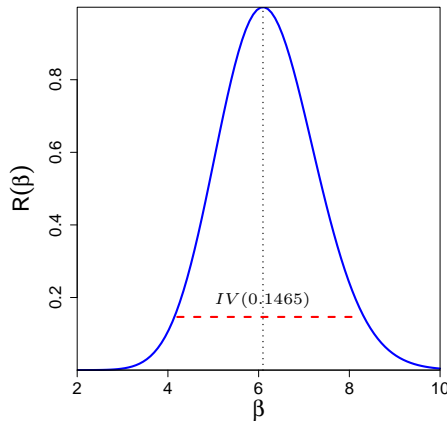


**Figura 2.4:** Datos de aparición de tejido cancerígeno. Verosimilitud relativa de  $\sigma, \beta$  para los tiempos de aparición de tejido cancerígeno.

Suponiendo que interesa estimar  $\beta$  cuando se desconoce  $\sigma$ , se usa la verosimilitud perfil de  $\beta$ . La verosimilitud relativa perfil de  $\beta$  se muestra en la Figura 2.5 junto con el

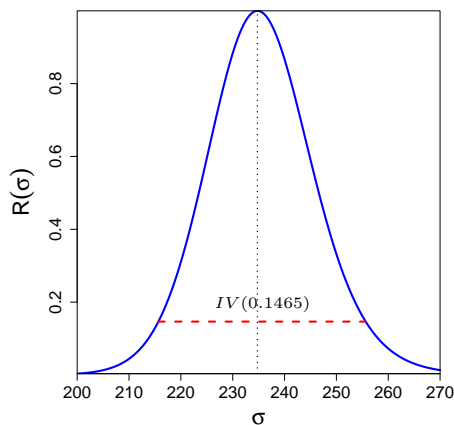


intervalo de nivel de verosimilitud 0.1465. El intervalo de nivel 0.1465 para  $\beta$  obtenido numéricamente es  $[4.21, 8.24]$  y el estimador de máxima verosimilitud  $\hat{\beta} = 6.096$ .



**Figura 2.5:** Datos de aparición de tejido cancerígeno. Verosimilitud relativa perfil de  $\beta$ .

De manera análoga se obtuvo la verosimilitud relativa perfil de  $\sigma$  de la Figura 2.6. El intervalo de verosimilitud obtenido es  $[215.66, 255.66]$  y el emv es  $\hat{\sigma} = 234.76$ .



**Figura 2.6:** Datos de aparición de tejido cancerígeno. Verosimilitud relativa perfil de  $\sigma$ .

**Ejemplo 2.6.** Considérense los tiempos hasta la aparición de tejido cancerígeno del ejemplo anterior. Supóngase que los datos siguen la distribución de Weibull de tres parámetros cuya función de distribución está dada por

$$F(x; \mu, \sigma, \beta) = \left(1 - \exp \left[ - \left( \frac{x - \mu}{\sigma} \right)^\beta \right]\right) \mathbb{1}_{[\mu, \infty)}(x),$$

y la verosimilitud discretizada con resolución correspondiente es

$$L(\mu, \sigma, \beta) = C(\vec{x}) \prod_{i=1}^n \left[ F(x_i + \varepsilon_i; \mu, \sigma, \beta) - F(x_i - \varepsilon_i; \mu, \sigma, \beta) \right] \\ = \prod_{i=1}^n \left( \exp \left[ - \left( \frac{x_i - \varepsilon_i - \mu}{\sigma} \right)^\beta \right] - \exp \left[ - \left( \frac{x_i + \varepsilon_i - \mu}{\sigma} \right)^\beta \right] \right).$$

Maximizando la expresión anterior para los datos de interés se obtienen como estimadores  $\hat{\mu} = 122.55$ ,  $\hat{\beta} = 2.71$  y  $\hat{\sigma} = 108.29$ . Lawless (2003, p.188) llega a valores prácticamente iguales usando la aproximación continua  $L^*(\mu, \sigma, \beta; \vec{x})$ , reportando su máximo local.

Calculando los emvr  $\hat{\sigma}(\mu)$  y  $\hat{\beta}(\mu)$  numéricamente se calculó la verosimilitud relativa perfil de  $\mu$ , su gráfica se presenta en la Figura 2.7. En esta gráfica se puede ver que la verosimilitud relativa perfil de  $\mu$  es muy asimétrica. Por ello conviene explorar una reparametrización como se verá más adelante. La construcción de la verosimilitud relativa perfil de  $\mu$ , para valores menores de  $\mu \leq -100$  por lo que el intervalo de nivel de verosimilitud para  $\mu$  es  $[\mu_1, 143]$ , donde  $\mu_1 < -100$ . Lo anterior indica que las ratas presentan tejido cancerígeno, a lo más, después de 143 días con un 95 % de confianza.

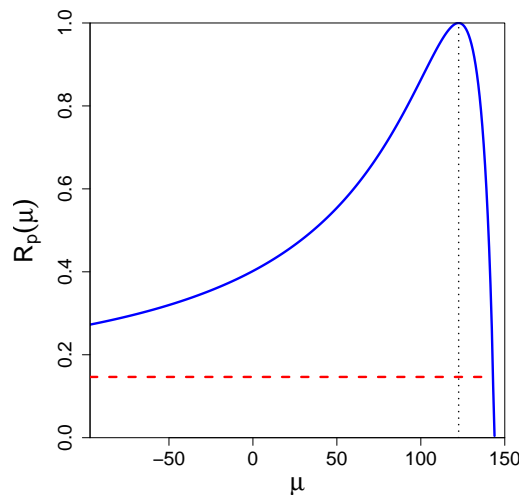


Figura 2.7: Verosimilitud relativa perfil de  $\mu$  usando verosimilitud discretizada.

## 2.2. Verosimilitud discretizada con resolución de la DGVE

Las distribuciones Weibull y Fréchet de tres parámetros son modelos no regulares. Para estimar los parámetros de ambas familias conviene usar la verosimilitud discretizada. Se definirá la verosimilitud discretizada de las familias Gumbel, Weibull, Fréchet y se reparametriza para obtener la verosimilitud discretizada con resolución de la DGVE.

En general, cuando no se tiene certeza sobre la distribución madre de la que se extrajeron los máximos o mínimos se suele usar la GVE para modelarlos. Esto porque los intervalos de verosimilitud perfil de los cuantiles son así más conservadores, pues resultan un poco más amplios a cuando se especifica una familia en particular, Gumbel, Weibull o Fréchet.

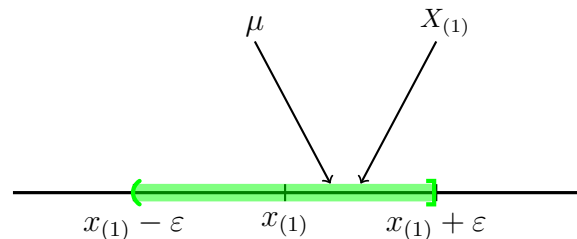
Considérese una muestra de  $n$  variables aleatorias  $X_{(1)}, \dots, X_{(n)}$  independientes e idénticamente distribuidas como  $F(x; \theta)$ . La muestra ordenada es  $X_{(1)}, \dots, X_{(n)}$ , donde  $X_{(1)}$  es el mínimo y  $X_{(n)}$  es el máximo de las variables de la muestra. Las resoluciones asociadas al instrumento de medición con las que se observa una realización de  $X_{(1)}, \dots, X_{(n)}$  serán denotadas por  $\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n$ .

Cuando la muestra proviene de la distribución Gumbel con parámetro de localización  $\mu$  y escala  $\sigma$ , se define la verosimilitud discretizada con resolución como

$$L_{\text{Gum}}(\mu, \sigma; \vec{x}) = \prod_{i=1}^n \left[ F_{\text{Gum}}(x_{(i)} + \varepsilon_i; \mu, \sigma) - F_{\text{Gum}}(x_{(i)} - \varepsilon_i; \mu, \sigma) \right],$$

donde  $F_{\text{Gum}}$  es la función de distribución Gumbel.

Nótese que la variable aleatoria más pequeña de una distribución Weibull,  $X_{(1)}$  puede caer en el intervalo  $(x_{(1)} - \varepsilon_1, x_{(1)} + \varepsilon_1]$ . En particular  $X_{(1)}$  puede estar a la derecha del valor registrado  $x_{(1)}$ . Así, podría ser que el parámetro umbral sea mayor incluso que el valor registrado  $x_{(1)}$ , siempre que se cumpla que  $\mu \leq X_{(1)}$ , como se muestra en el siguiente diagrama.



Lo anterior indica que es válido considerar que el parámetro umbral cuando es cota inferior puede cumplir  $x_{(1)} < \mu \leq X_{(1)}$ . Es decir, la verosimilitud debe considerar que el parámetro umbral  $\mu$  puede tomar valores desde  $-\infty$  hasta  $x_{(1)} + \varepsilon_1$ . La aportación a

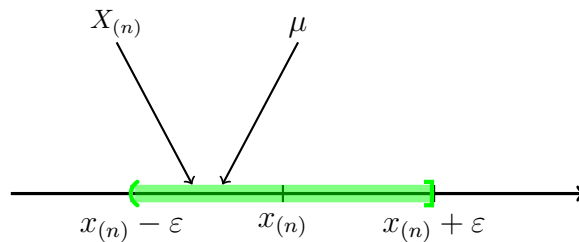
la verosimilitud de la observación más pequeña  $x_{(1)}$  dependerá del valor de  $\mu$  donde se esté evaluando a la verosimilitud. Denótese como  $P_1 = P(x_{(1)} - \varepsilon_1 < X_{(1)} \leq x_{(1)} + \varepsilon_1)$  a la aportación de la observación más pequeña en la muestra. Esta toma alguno de los siguientes valores,

$$P_1^{\text{Wei}} = \begin{cases} F_{\text{Wei}}(x_{(1)} + \varepsilon_1; \mu, \sigma, \beta) - F_{\text{Wei}}(x_{(1)} - \varepsilon_1; \mu, \sigma, \beta), & \text{si } \mu \leq x_{(1)} - \varepsilon_1, \\ F_{\text{Wei}}(x_{(1)} + \varepsilon_1; \mu, \sigma, \beta), & \text{si } x_{(1)} - \varepsilon_1 < \mu \leq x_{(1)} + \varepsilon_1, \\ 0, & \text{si } \mu > x_{(1)} + \varepsilon_1. \end{cases}$$

Si más de una variable aleatoria en la muestra, digamos  $m$ , cayó también en el intervalo  $(x_{(1)} - \varepsilon_1, x_{(1)} + \varepsilon_1]$  se tendrá que el valor registrado más pequeño  $x_{(1)}$  se repetirá  $m$  veces. En ese caso, la verosimilitud discretizada de la distribución Weibull de mínimos está dada por

$$L_{\text{Wei}}(\mu, \sigma, \beta; \vec{x}) = \left(P_1^{\text{Wei}}\right)^m \prod_{i=m+1}^n \left[F_{\text{Wei}}(x_{(i)} + \varepsilon_i) - F_{\text{Wei}}(x_{(i)} - \varepsilon_i)\right]$$

Ahora si la variable aleatoria proviene de la distribución Fréchet,  $X_{(n)}$  puede tomar valores en el intervalo  $(x_{(n)} - \varepsilon_n, x_{(n)} + \varepsilon_n]$  y puede estar a la izquierda de la observación más grande registrada  $x_{(n)}$  y del parámetro umbral  $\mu$ , como se muestra en el siguiente diagrama.



De esta manera es razonable considerar que el parámetro umbral cuando es cota superior puede cumplir  $X_{(n)} \leq \mu < x_{(n)}$ . Por lo anterior, la verosimilitud debe considerar que  $\mu$  puede tomar valores en  $[x_{(n)} - \varepsilon_n, \infty)$ . Por tanto, la aportación de la observación más grande  $P_n^{\text{Fré}} = P(x_{(n)} - \varepsilon_n < X_{(n)} \leq x_{(n)} + \varepsilon_n)$  puede tomar los siguientes valores,

$$P_n^{\text{Fré}} = \begin{cases} 0, & \text{si } \mu \leq x_{(n)} - \varepsilon_n, \\ 1 - F_{\text{Fré}}(x_{(n)} - \varepsilon_n; \mu, \sigma, \beta), & \text{si } x_{(n)} - \varepsilon_n < \mu \leq x_{(n)} + \varepsilon_n, \\ F_{\text{Fré}}(x_{(n)} + \varepsilon_n; \mu, \sigma, \beta) - F_{\text{Fré}}(x_{(n)} - \varepsilon_n; \mu, \sigma, \beta), & \text{si } \mu > x_{(n)} + \varepsilon_n. \end{cases}$$

## 2.2. VEROSIMILITUD DISCRETIZADA CON RESOLUCIÓN DE LA DGVE 25

Si  $x_{(n)}$  se repitió  $m$  veces la verosimilitud discretizada con resolución de la distribución Fréchet está dada por

$$L_{\text{Fré}}(\mu, \sigma, \beta; \vec{x}) = \left(P_n^{\text{Fré}}\right)^m \prod_{i=1}^{n-m} \left[ F_{\text{Fré}}(x_{(i)} + \varepsilon_i) - F_{\text{Fré}}(x_{(i)} - \varepsilon_i) \right].$$

A partir de la relación (1.10) de los parámetros de las familias Gumbel, Weibull y Fréchet con la DGVE se transforman las expresiones de  $L_{\text{Gum}}$ ,  $L_{\text{Wei}}$  y  $L_{\text{Fré}}$  se define a continuación la verosimilitud discretizada de la DGVE.

Para definir la verosimilitud discretizada con resolución de la DGVE se debe tener en cuenta al parámetro de forma  $c$ . Cuando  $c \in (-0.0001, 0.0001)$ , la variable aleatoria  $X$  corresponde a la distribución Gumbel por lo que  $X$  no está acotada y su verosimilitud discretizada con resolución se expresa como,

$$L_{\text{GVE}}(a, b; \vec{x}) = \prod_{i=1}^n \left[ F_{\text{GVE}}(x_{(i)} + \varepsilon_i; a, b) - F_{\text{GVE}}(x_{(i)} - \varepsilon_i; a, b) \right].$$

Cuando la DGVE tenga  $c < -0.0001$  será igual que una Weibull de mínimos. En este caso  $\mu = a + \frac{b}{c}$  es la cota inferior de la variable aleatoria o parámetro umbral. Análogo a como se construyó  $L_{\text{Wei}}(\mu, \sigma, \beta; \vec{x})$ , se debe considerar la aportación de la observación más pequeña

$$P_1^{\text{GVE}} = \begin{cases} F_{\text{GVE}}(x_{(1)} + \varepsilon_1; a, b, c) - F_{\text{GVE}}(x_{(1)} - \varepsilon_1; a, b, c), & \text{si } a + \frac{b}{c} \leq x_{(1)} - \varepsilon_1, \\ F_{\text{GVE}}(x_{(1)} + \varepsilon_1; a, b, c), & \text{si } x_{(1)} - \varepsilon_1 < a + \frac{b}{c} \leq x_{(1)} + \varepsilon_1, \\ 0, & \text{si } a + \frac{b}{c} > x_{(1)} + \varepsilon_1, \end{cases}$$

donde  $F_{\text{GVE}}$  denota a la función de distribución de la GVE.

Así la verosimilitud discretizada con resolución de la DGVE cuando  $c < -0.0001$  se define como

$$L_{\text{GVE}}(a, b, c; \vec{x}) = \left(P_1^{\text{GVE}}\right)^m \prod_{i=m+1}^n \left[ F_{\text{GVE}}(x_i + \varepsilon_i) - F_{\text{GVE}}(x_i - \varepsilon_i) \right]$$

Cuando  $c > 0.0001$  se sabe que la DGVE corresponde a la distribución Fréchet de mínimos y  $\mu = a + \frac{b}{c}$  es la cota superior. Basado en la construcción de  $L_{\text{Fré}}(\mu, \sigma, \beta; \vec{x})$  se considera la aportación de la observación más grande como

$$P_n^{\text{GVE}} = \begin{cases} 0, & \text{si } a + \frac{b}{c} \leq x_{(n)} - \varepsilon_n, \\ 1 - F_{\text{GVE}}(x_{(n)} - \varepsilon_n; a, b, c), & \text{si } x_{(n)} - \varepsilon_n < a + \frac{b}{c} \leq x_{(n)} + \varepsilon_n, \\ F_{\text{GVE}}(x_{(n)} + \varepsilon_n; a, b, c) - F_{\text{GVE}}(x_{(n)} - \varepsilon_n; a, b, c), & \text{si } a + \frac{b}{c} > x_{(n)} + \varepsilon_n. \end{cases}$$

La verosimilitud discretizada de la DGVE para  $c > 0.0001$  se define como,

$$L_{\text{GVE}}(a, b, c; \vec{x}) = \left(P_n^{\text{GVE}}\right)^m \prod_{i=1}^{n-m} \left[F_{\text{GVE}}(x_{(i)} + \varepsilon_i) - F_{\text{GVE}}(x_{(i)} - \varepsilon_i)\right].$$

En resumen, la verosimilitud discretizada con resolución de la DVGE está dada por

$$L_{\text{GVE}}(a, b, c; \vec{x}) = \begin{cases} \left(P_1^{\text{GVE}}\right)^m \prod_{i=m+1}^n \left[F_{\text{GVE}}(x_i + \varepsilon_i) - F_{\text{GVE}}(x_i - \varepsilon_i)\right], & \text{si } c \leq -0.0001, \\ \prod_{i=1}^n \left[F_{\text{GVE}}(x_{(i)} + \varepsilon_i) - F_{\text{GVE}}(x_{(i)} - \varepsilon_i)\right], & \text{si } |c| < 0.0001, \\ \left(P_n^{\text{GVE}}\right)^m \prod_{i=1}^{n-m} \left[F_{\text{GVE}}(x_{(i)} + \varepsilon_i) - F_{\text{GVE}}(x_{(i)} - \varepsilon_i)\right], & \text{si } c \geq 0.0001. \end{cases}$$

Para facilitar la estimación analítica y numérica se suele trabajar con la log-verosimilitud ya que la escala logarítmica simplifica los cálculos numéricos. En esta tesis se consideró que si  $P_i := P(x_{(i)} - \varepsilon_i < X_{(i)} \leq x_{(i)} + \varepsilon_i)$  es menor a 0.000001 se fija  $P_i = 0.000001$  para facilitar el cálculo en la escala logarítmica. Se puede haber usado un valor más pequeño, pero este funcionó bien a lo largo de la tesis. Con ello se respeta que la aportación de una observación con esta condición casi no tenga efecto en la verosimilitud.

En las aplicaciones usualmente se desea encontrar un valor inferior o superior, tal que las fallas antes o después de éste ocurran con probabilidad conocida y controlada. Para conocer mejor el funcionamiento de los componentes es de interés estimar bien la distribución de los tiempos a los que falla. Para estimar un cuantil de interés conviene reparametrizar la verosimilitud en términos de él. Se propone aquí reparametrizar la verosimilitud en términos de los parámetros  $(a, Q_\alpha, c)$ , tomando en cuenta que a partir de la ecuación (1.9), al despejar  $b$  resulta

$$b = \begin{cases} (Q_\alpha - a) [\ln(-\ln(1 - \alpha))]^{-1}, & \text{si } c \in (-0.0001, 0.0001), \\ ((Q_\alpha - a)c) [1 - (-\ln(1 - \alpha))^{-c}]^{-1}, & \text{si } c \notin (-0.0001, 0.0001). \end{cases} \quad (2.8)$$

Sustituyendo el parámetro  $b$  de acuerdo a la igualdad anterior en la verosimilitud original de  $(a, b, c)$  se obtiene la expresión de la verosimilitud reparametrizada de  $(a, Q_\alpha, c)$ .

### 2.3. Valores iniciales para maximizar la verosimilitud discretizada de la DGVE

Interesa proponer valores iniciales que permitan realizar la estimación de los parámetros de la DGVE a partir de la muestra observada  $x_1, \dots, x_n$ . Los valores iniciales para la

distribución Gumbel son sencillos de proponer por pertenecer a la familia de localización-escala. Usualmente se proponen como valores iniciales para el parámetro de localización al primer momento empírico,  $\bar{X} = \sum_{i=1}^n x_i/n$ . Para el parámetro de escala, conviene dar la

raíz del segundo momento empírico centrado,  $S^2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2$ .

La propuesta que aquí se hace aprovecha la relación entre las distribuciones Weibull, Gumbel y Fréchet para proponer los valores iniciales. Lo anterior también fue considerado anteriormente de manera similar por Mann (1984) quien sugiere que los métodos de estimación en una distribución pueden aplicarse a las otras dos. Los valores iniciales propuestos para la Gumbel se transforman a la escala de Weibull y a la de la distribución Fréchet para después reparametrizar así a la DGVE.

De la expresión de la DGVE dada en el Capítulo 1 se obtiene la densidad de la distribución Fréchet de mínimos,

$$f(x) = \frac{\beta}{\sigma} \left( \frac{\mu - x}{\sigma} \right)^{-\beta-1} \exp \left[ - \left( \frac{\mu - x}{\sigma} \right)^{-\beta} \right] \mathbb{1}_{(-\infty, \mu]}(x).$$

Note que si  $X$  sigue la distribución Fréchet de tres parámetros  $(\mu, \sigma, \beta)$  entonces  $\mu - X$  sigue la distribución Fréchet de dos parámetros  $(\sigma, \beta)$ . De manera análoga si  $X$  tiene distribución Weibull de tres parámetros  $(\mu, \sigma, \beta)$  entonces  $X - \mu$  tiene distribución Weibull de dos parámetros. Las distribuciones Weibull y Fréchet de dos parámetros tienen la bondad de ser modelos regulares.

Un valor inicial para el parámetro umbral  $\mu$  cuando es cota inferior será  $\hat{\mu}_{\text{Wei}} = x_{(1)} - \varepsilon_1$ . De manera análoga cuando  $\mu$  sea cota superior es  $\hat{\mu}_{\text{Fré}} = x_{(n)} + \varepsilon_1$ . Como los datos se reportan con una resolución  $\varepsilon_i$  asociada al instrumento de medición, el valor  $x_{(1)}$  corresponde usualmente al punto medio del intervalo asociado a la observación más pequeña. De manera similar  $x_{(n)}$  corresponde al punto medio del intervalo alrededor de la observación más grande. De esta manera los valores iniciales para el parámetro umbral son

$$\mu_{\text{Wei}}^{(0)} := x_{(1)} - \varepsilon_1, \quad \mu_{\text{Fré}}^{(0)} := x_{(n)} + \varepsilon_n,$$

para las distribuciones Weibull y Fréchet de mínimos, respectivamente.

Los valores iniciales para los parámetros de forma y escala se darán a partir de la relación de las distribuciones Weibull de dos parámetros, Fréchet de dos parámetros y Gumbel. Usando el estimador del parámetro umbral la transformación de los datos con distribución Weibull de tres parámetros a la Weibull de dos parámetros se hace  $\vec{x} - \hat{\mu}_{\text{Wei}}$  y para pasar a la distribución Fréchet de dos parámetros  $\hat{\mu}_{\text{Fré}} - \vec{x}$ . Ahora si  $X$  sigue la distribución Weibull de mínimos con parámetro de forma  $\beta$  y de escala  $\sigma$  por el Teorema

de Cambio de Variable, la densidad de la variable aleatoria  $Y = \ln X$  es,

$$\begin{aligned} f(y; \sigma, \beta) &= \frac{\beta}{\sigma} \left( \frac{e^y}{\sigma} \right)^{\beta-1} \exp \left[ - \left( \frac{e^y}{\sigma} \right)^\beta \right] |e^y| \\ &= \beta \left( \frac{e^y}{\sigma} \right)^\beta \exp \left[ - \left( \frac{e^y}{\sigma} \right)^\beta \right] \\ &= \beta \exp(\beta y - \beta \ln \sigma) \exp \left[ - \exp(\beta y - \beta \ln \sigma) \right] \\ &= \frac{1}{1/\beta} \exp \left[ \frac{y - \ln \sigma}{1/\beta} \right] \exp \left[ - \exp \left( \frac{y - \ln \sigma}{1/\beta} \right) \right]. \end{aligned}$$

La expresión anterior corresponde a la distribución Gumbel de mínimos con parámetro de localización  $\ln \sigma$  y de escala  $1/\beta$ . Por lo cual el logaritmo de una variable aleatoria con distribución Weibull con parámetros de escala  $\sigma$  y forma  $\beta$  tiene distribución Gumbel con parámetro de localización  $\ln \sigma$  y de escala  $1/\beta$ .

Denótense  $\sigma_{\text{Wei}}$  y  $\beta_{\text{Wei}}$  a los parámetros de escala y forma de la distribución Weibull y  $\mu_{\text{Gum}}$ ,  $\sigma_{\text{Gum}}$  a los parámetros de localización y escala de la distribución Gumbel, respectivamente. Por lo que se acaba de mostrar resulta

$$\sigma_{\text{Gum}} = \beta_{\text{Wei}}^{-1}, \quad (2.9)$$

$$\mu_{\text{Gum}} = \ln(\sigma_{\text{Wei}}). \quad (2.10)$$

Para estimar el parámetro de localización de la distribución Gumbel  $\mu_{\text{Gum}}$  se propone usar como valor inicial  $\mu_{\text{Gum}}^{(0)}$  a la media muestral de los datos transformados  $y_1, \dots, y_n$  denotada por  $\bar{y}$ , donde  $y_i = \ln x_i$ . Por la relación (2.10) el valor inicial del parámetro de escala de la distribución Weibull propuesto es

$$\sigma_{\text{Wei}}^{(0)} := \exp(\mu_{\text{Gum}}^{(0)}) = \exp(\bar{y}).$$

Como valor inicial para el parámetro de escala de la distribución Gumbel se suele usar la desviación estándar, es decir  $\sigma_{\text{Gum}}^{(0)} = \sqrt{S_y^2} = \sqrt{\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (y_i - \bar{y})^2}$ . El valor inicial del parámetro de forma de la distribución Weibull obtenido a partir de la relación (2.9) es

$$\beta_{\text{Wei}}^{(0)} = \frac{1}{\sigma_{\text{Gum}}^{(0)}} = \sqrt{\frac{n}{\sum_{i=1}^n (y_i - \bar{y})^2}}.$$

Para obtener los valores iniciales de la distribución Fréchet se tendrá en cuenta que si  $X$  tiene distribución Weibull de dos parámetros entonces  $Z = 1/X$  se distribuye Fréchet,



como se verá a continuación. Supóngase la variable aleatoria  $X$  con distribución Weibull de dos parámetros, aplicando el Teorema de Cambio de Variable se obtiene la función de densidad de  $Z = \frac{1}{X}$  como sigue,

$$\begin{aligned} f(z; \sigma, \beta) &= \frac{\beta}{\sigma} \left( \frac{z^{-1}}{\sigma} \right)^{\beta-1} \exp \left[ - \left( \frac{z^{-1}}{\sigma} \right)^{\beta} \right] \left| - \frac{1}{z^2} \right| \\ &= \frac{\beta}{z^2 \sigma} \left( \frac{1}{z \sigma} \right)^{\beta-1} \exp \left[ - \left( \frac{1}{z \sigma} \right)^{\beta} \right] \\ &= \beta \sigma (z \sigma)^{-\beta-1} \exp \left[ - (z \sigma)^{-\beta} \right]. \end{aligned}$$

La expresión anterior muestra que la inversa de una variable aleatoria Weibull con parámetros de escala  $\sigma$  y de forma  $\beta$  corresponde a una variable aleatoria  $Z$  con distribución Fréchet con parámetros de escala  $1/\sigma$  y de forma  $\beta$ . Por lo que los parámetros de la densidad de  $X$  y los de  $Z$  tienen la siguiente relación,

$$\sigma_{\text{Fré}} = \frac{1}{\sigma_{\text{Wei}}}, \quad (2.11)$$

$$\beta_{\text{Fré}} = \beta_{\text{Wei}}. \quad (2.12)$$

El valor inicial para el parámetro de escala de la distribución Fréchet se propone a partir del valor inicial del parámetro de escala de la distribución Weibull  $\sigma_{\text{Wei}}^{(0)}$  por la igualdad (2.11).

$$\sigma_{\text{Fré}}^{(0)} = \frac{1}{\sigma_{\text{Wei}}^{(0)}} = \exp(-\bar{y}).$$

Por la igualdad (2.12), el valor inicial para el parámetro de forma de la distribución Fréchet es

$$\beta_{\text{Fré}}^{(0)} = \beta_{\text{Wei}}^{(0)} = \sqrt{\frac{n}{\sum_{i=1}^n (y_i - \bar{y})^2}}.$$

En resumen, los valores iniciales para la distribución Weibull que se proponen en esta tesis son,

$$\mu_{\text{Wei}}^{(0)} = x_{(1)} - \varepsilon_1,$$

$$\sigma_{\text{Wei}}^{(0)} = \exp(\bar{y}),$$

$$\beta_{\text{Wei}}^{(0)} = \sqrt{\frac{n}{\sum_{i=1}^n (y_i - \bar{y})^2}},$$

y los valores iniciales para la distribución Fréchet son

$$\begin{aligned}\mu_{\text{Fré}}^{(0)} &= x_{(n)} + \varepsilon_n, \\ \sigma_{\text{Fré}}^{(0)} &= \exp(-\bar{y}), \\ \beta_{\text{Fré}}^{(0)} &= \sqrt{\frac{n}{\sum_{i=1}^n (y_i - \bar{y})^2}}.\end{aligned}$$

Los valores iniciales  $(\mu_{\text{Wei}}^{(0)}, \sigma_{\text{Wei}}^{(0)}, \beta_{\text{Wei}}^{(0)})$  y  $(\mu_{\text{Fré}}^{(0)}, \sigma_{\text{Fré}}^{(0)}, \beta_{\text{Fré}}^{(0)})$  propuestos se transforman a la escala de la DGVE por medio de la relación (1.10) para maximizar la verosimilitud discretizada con resolución de la DGVE.

Para evaluar la verosimilitud perfil se deben encontrar los estimadores restringidos de los parámetros de estorbo. Dichos estimadores se calculan fijando un parámetro y se maximiza la verosimilitud tomando los estimadores de máxima verosimilitud como valores iniciales. Sin embargo la optimización frecuentemente generaba problemas numéricos. Para solventar estos problemas la verosimilitud perfil  $\theta$  debió construirse de tal manera que se evaluara desde el emv  $\hat{\theta}$  al punto de interés en pasos intermedios, actualizando los valores iniciales en cada paso.

Supóngase que interesa evaluar la verosimilitud perfil de  $a$  en el valor  $a_0$ . La propuesta sugiere dividir el intervalo  $[a_0, \hat{a}]$  en un número de pasos  $p$ . Por lo general usar de cinco a diez pasos dio buenos resultados en las aplicaciones. Para  $\delta = |\hat{a} - a_0|/p$ , la verosimilitud perfil de  $a$  se obtendrá primero en  $\hat{a} + \delta$  si  $a_0 > \hat{a}$  o en  $\hat{a} - \delta$  si  $a_0 < \hat{a}$ . En ese primer paso la optimización considera como valores iniciales a los emv de cada parámetro. Los valores iniciales se actualizan con los emvr obtenidos y se suma o resta  $\delta$  al valor evaluado anterior, según sea el caso. Maximizando la verosimilitud perfil en este valor se actualizan en cada paso los valores iniciales con los estimadores restringidos. Así, se calcula la verosimilitud perfil en cada valor  $\hat{a} \pm i\delta$  ( $i = 1, \dots, p$ ), actualizando los valores iniciales en cada paso, hasta llegar a  $a_0$ . De manera análoga se obtuvo la verosimilitud perfil para los parámetros  $b$ ,  $c$  y los cuantiles.

## 2.4. Modelación del pivotal de razón de verosimilitud para muestras pequeñas

Tradicionalmente se usa al pivotal de razón de verosimilitud  $W(\theta)$ , dado en (2.2). para asociarle una probabilidad a los intervalos o regiones de verosimilitud de contener al valor verdadero del parámetro. Para asignar esta probabilidad se considera para la muestra finita que se observó que  $W(\theta)$  sigue una distribución asintótica Ji-cuadrada con tantos grados de libertad como haya parámetros desconocidos en el modelo. Este resultado asintótico lo demostró Wilks en 1938 bajo condiciones de regularidad.

Cuando el tamaño de muestra no es grande, bien puede ocurrir que  $W(\theta)$  todavía no se distribuya como una Ji-cuadrada. Como esta distribución sirve para determinar el nivel de verosimilitud de un intervalo de verosimilitud que tenga un nivel de confianza deseado, tomar la distribución asintótica del pivotal de razón de verosimilitud podría generar inferencias engañosas cuando se tienen muestras pequeñas. Por lo anterior ha sido de interés corregir a  $W(\theta)$ . Bartlett (1937) propuso una mejora multiplicando  $W(\theta)$  por una constante para que siga más de cerca una distribución Ji-cuadrada para tamaños de muestra moderados. Esa constante la determina el tamaño de la muestra y la dimensión del espacio paramétrico. Posterior a la modificación propuesta por Bartlett (1937) cualquier modificación del pivotal de razón de verosimilitud al multiplicarlo por un escalar se le llama ‘corrección de Bartlett’.

En la literatura poco se ha discutido sobre considerar alguna otra distribución para el pivotal de razón de verosimilitud aparte de la asintótica, que es Ji-cuadrada. En esta dirección la única referencia que se identificó fue Boyles (2008), quien consideró para un ejemplo con muestras normales el pivotal de razón de verosimilitud seguía una distribución Ji-cuadrada escalada, es decir, definió la variable aleatoria  $W = \frac{\alpha}{\beta}B$ , donde  $B$  es una variable aleatoria con distribución Ji-cuadrada con  $\beta$  grados de libertad,  $\alpha$  es una constante positiva y  $W(\theta)$  es el pivotal de razón de verosimilitud. En la propuesta de Boyles tanto  $\alpha$  como  $\beta$  toman expresiones que dependen del tamaño de muestra y de los datos. No se estimaban estas constantes.

Inspirados en esta idea y notando que una Ji-cuadrada escalada es en realidad un caso particular de una distribución Gama, se propone acá suponer que para muestras pequeñas o moderadas  $W(\theta)$  sigue una distribución Gama  $(\eta, \kappa)$ . Los parámetros  $\eta, \kappa$  se estimarán a través del método Bootstrap calculando la estadística  $W(\theta)$  a partir de  $M$  muestras simuladas provenientes del modelo GVE estimado para la muestra observada. Las  $M$  muestras simuladas se considerarán discretizadas como la muestra observada.

**Propuesta.** Los parámetros desconocidos de la distribución Gama $(\eta, \kappa)$  se estimarán por máxima verosimilitud a partir de una muestra Bootstrap  $(W_1(\theta), \dots, W_M(\theta))$  de pivotaes de razón de verosimilitud que se obtienen para  $M$  muestras discretizadas simuladas como la original, de manera paramétrica con los emv de la muestra original y de igual tamaño  $n$ . Los parámetros de forma  $\eta$  y de escala  $\kappa$  se relacionan con los parámetros de la distribución Ji-cuadrada escalada como sigue,  $\eta = \beta/2$  y  $\kappa = 2\alpha/\beta$ .

Como la distribución Ji-cuadrada es un caso particular de la distribución Gama, resulta que la distribución Gama $\left(\frac{\beta}{2}, \frac{2\alpha}{\beta}\right)$  propuesta para  $W(\theta)$  converge a la Ji-cuadrada con  $\beta$  grados de libertad asintótica de  $W(\theta)$  cuando  $n$  es grande y  $\alpha \approx \beta$ .

La densidad de la distribución Gama de interés que se usará está dada por

$$g(w; \alpha, \beta) = \frac{1}{\Gamma(\beta/2)} \left(\frac{\beta}{2\alpha}\right)^{\beta/2} w^{\beta/2-1} \exp\left(-\frac{\beta w}{2\alpha}\right) \mathbf{1}_{(0,\infty)}(w). \quad (2.13)$$

Nótese que cuando  $\alpha = \beta$  en la expresión anterior corresponde a la densidad de la distribución Ji-cuadrada con  $\beta$  grados de libertad.

## 2.5. El método Bootstrap

El método Bootstrap es un tipo particular de los llamados métodos de remuestreo estadísticos. Fue propuesto por Bradley Efron en 1979 como una mejora al método Jackknife, el cual era computacionalmente ineficiente para muestras grandes. Generalmente se usa el método Bootstrap para estimar el error estándar de un estimador y por ende para el cálculo de intervalos de confianza, pruebas de hipótesis y análisis de residuos, entre otros.

A partir de una muestra  $X_1, X_2, \dots, X_n$  de variables aleatorias independientes con función de distribución  $F(x; \theta)$  con  $\theta$  desconocido se desea hacer inferencia sobre una característica  $\phi$  de  $F$  o de sus parámetros. La característica de interés de  $F$  puede ser su media, su varianza o un cuantil. Incluso la característica puede ser alguna función particular de la variable aleatoria con distribución  $F$  y de la distribución de dicha función. En esta tesis ejemplos de esto último serán el pivotal de razón de verosimilitud, su distribución y cuantiles de probabilidad alta de dicha distribución. La estimación de  $\phi$  se realiza con base en una estadística  $T$ , la cual se calcula para una cantidad grande de muestras simuladas, usando algún estimador de  $F$ . Si  $F$  es conocida se estiman los parámetros de esta distribución y se simula a partir de la distribución estimada  $\hat{F}$ . Cuando  $F$  es desconocida se puede usar la función de distribución empírica  $\tilde{F}$  como estimador de  $F$ . La función de distribución empírica se define como

$$\tilde{F}(t) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \mathbb{1}_{(-\infty, x_i]}(t).$$

La característica  $\phi$  puede definirse como un funcional de  $F$ , denotado aquí por  $\Psi(F)$ . Así para una muestra de tamaño  $n$  el estimador de la característica  $\phi = \Psi(F)$  está dado por  $\Psi(\tilde{F})$ . Cuando  $n$  aumenta, la distribución estimada  $\tilde{F}$  converge a  $F$  y consecuentemente  $\Psi(\tilde{F})$  convergerá a  $\Psi(F)$ . Aparte de la estimación de la característica interesa construir un intervalo de confianza para ella. Para esta construcción, puede ser útil la varianza de los valores de  $T = \Psi(\tilde{F})$  obtenidos para cada muestra simulada. Bajo el método Bootstrap más simple, se propone así el intervalo del  $(1 - \alpha) \times 100\%$  de confianza para  $\Psi(F)$  como

$$\bar{\Psi}(\tilde{F}) \pm z_{1-\alpha/2} \sqrt{\widehat{\text{Var}}(T)},$$

donde  $z_{1-\alpha/2}$  corresponde al cuantil  $1 - \alpha/2$  de la distribución normal estándar.

Para verificar la bondad de esta aplicación del Bootstrap en la propuesta hecha en esta tesis, se calcula la cobertura empírica de los intervalos de estimación de los parámetros de

interés a través de simulaciones. La aplicación del método Bootstrap que se hizo en esta tesis consistió en generar  $M = 1000$  muestras provenientes de la distribución Generalizada de Valores Extremos. Para cada una de ellas se estimaron los parámetros  $(a, b, c)$  y el cuantil de interés  $Q_\alpha$  de la GVE. Se calculó el pivotal de razón de verosimilitud a través de la verosimilitud relativa perfil de cada parámetro. Así se obtuvo una muestra de 1000 realizaciones del pivotal de razón de verosimilitud (para cada parámetro). Tomando cada muestra del pivotal se estimaron los parámetros  $\eta, \kappa$  de la distribución Gama propuesta en la sección anterior y también el cuantil 0.95 de esta distribución. El cuantil 0.95 de la distribución Gama permite calcular el nivel de verosimilitud asociado al 95 % de confianza como  $k = \exp(-Q_{0.95}/2)$ . Aquí se generaron 30 grupos de  $M$  muestras del pivotal de razón de verosimilitud para las cuales se estimaron los parámetros de la distribución Gama y los cuantiles 0.95 de cada una de ellas. Con lo anterior se calculan los niveles de verosimilitud y su promedio a partir del cual se calcula la cobertura empírica de los intervalos de verosimilitud. Finalmente se construyeron los intervalos de confianza para el promedio de niveles de verosimilitud.

## 2.6. Gráficas cuantil-cuantil para validar modelos estadísticos y propuestas recientes

Las gráficas cuantil-cuantil son un método gráfico frecuentemente usado para verificar el buen ajuste de una distribución considerada para la muestra observada. En estas gráficas de dispersión bidimensionales se comparan los cuantiles empíricos de una muestra observada contra los cuantiles de la distribución estimada.

Sean  $X_1, X_2, \dots, X_n$  una muestra de  $n$  variables aleatorias independientes idénticamente distribuidas como  $F(x; \theta)$ . Considérese  $x_{(1)}, x_{(2)}, \dots, x_{(n)}$  una realización ordenada de estas, donde  $x_{(1)}$  es el menor valor observado y  $x_{(n)}$  el mayor. La observación  $i$ -ésima  $x_{(i)}$  se considerará como el cuantil empírico de probabilidad  $i/(n+1)$ . Esto satisface la definición de cuantiles como la función inversa generalizada aplicada a la función de distribución empírica  $F_n(x)$ ,

$$x_{(i)} = Q_{i/(n+1)} = \inf \left\{ x : F_n(x) \geq \frac{i}{n+1} \right\}.$$

Para  $\hat{F}$  una función de distribución estimada, se define una gráfica cuantil-cuantil a partir del conjunto de puntos de la forma

$$\left\{ \hat{F}^{-1} \left( \frac{i}{n+1} \right), x_{(i)} \right\} \text{ para } i = 1, \dots, n,$$

donde  $\hat{F}^{-1}$  es la función inversa generalizada estimada.

Para una variable aleatoria continua, se sabe que dos distribuciones son equivalentes si todos sus cuantiles coinciden. Por ello, se busca que la gráfica cuantil-cuantil coincida con la recta identidad. Sin embargo, como ilustra Thas (2010), para muestras provenientes de la misma distribución es posible que los puntos de la gráfica cuantil-cuantil tengan estructura no lineal alrededor de la recta identidad. La propuesta aquí consiste en construir una nube de muestras simuladas como proponen Hernández-Campos et al. (2004). Además, se propone calcular intervalos de confianza para los cuantiles empíricos de las muestras simuladas usando el método Bootstrap como se sugiere en Gibbons y Chakraborti (2011).

Ghosh (1971) demuestra que los cuantiles empíricos de una función de distribución pueden representarse como una función del cuantil teórico correspondiente. A partir de lo anterior Ghosh construye la cantidad pivotal asintótica

$$G(X_{(i)}, Q_{\alpha_i}) = \frac{\sqrt{n}f_X(Q_{\alpha_i})(X_{(i)} - Q_{\alpha_i})}{\sqrt{\alpha_i(1 - \alpha_i)}},$$

que converge en distribución a una normal estándar como se muestra en Gibbons y Chakraborti (2011). La varianza de  $X_{(i)}$  se estima con

$$\widehat{\text{Var}}(X_{(i)}) = \frac{\alpha_i(1 - \alpha_i)}{n\widehat{f}(\widehat{F}^{-1}(p_i))^2},$$

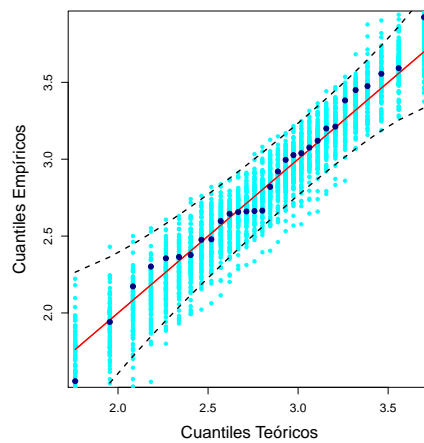
donde  $\alpha_i = \frac{i}{n+1}$ ,  $f$  y  $F$  son las funciones de densidad y de distribución de  $X$  estimadas, respectivamente.

Así, para cada cuantil  $Q_{\alpha_i}$  se puede dar un intervalo de  $(1 - p) \times 100\%$  de confianza,

$$X_{(i)} \pm Z_{(1-p/2)}\sqrt{\widehat{\text{Var}}(X_{(i)})}.$$

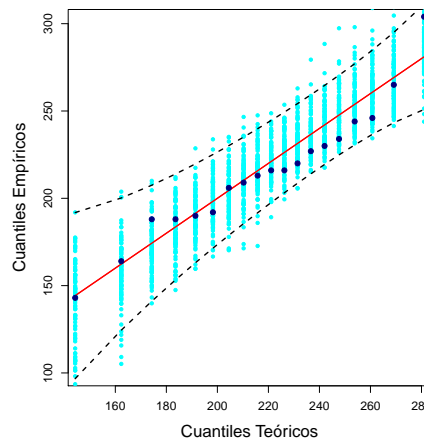
Al graficar estos intervalos de confianza para los  $n$  cuantiles teóricos de probabilidad  $\frac{1}{n+1}, \dots, \frac{n}{n+1}$ , se tendrá una banda de confianza para la gráfica cuantil-cuantil. Cuando el conjunto de datos  $\left\{ \widehat{F}^{-1}\left(\frac{i}{n+1}\right), x_{(i)} \right\}$  caen dentro de esta banda se dirá que el modelo estimado  $\widehat{F}$  es razonable para los datos observados  $\{x_{(1)}, \dots, x_{(n)}\}$ .

En la Figura 2.8 se puede ver un ejemplo de la gráfica cuantil-cuantil para una muestra simulada de tamaño 30 de la DGVE con parámetros  $a = 3$ ,  $b = 2$  y  $c = -0.2$ , en tono oscuro. Los cuantiles teóricos corresponden a los de la distribución GVE(3, 2, -0.2). La nube de muestras simuladas en tono claro consiste en 100 simulaciones de esta distribución GVE y en línea discontinua se presentan los límites de la banda de confianza propuesta anteriormente.



**Figura 2.8:** Ejemplo gráfica cuantil-cuantil con nube de simulaciones DGVE con parámetros  $a = 3$ ,  $b = 2$ ,  $c = -0.2$  y banda de confianza Bootstrap.

La gráfica cuantil-cuantil de la Figura 2.9 muestra los datos de Pike del Ejemplo 2.5 con la nube de simulaciones de una distribución Weibull de dos parámetros con  $\beta = 6.1$  y  $\sigma = 234.76$  (los emv para los datos observados). Se evidencia así que esta distribución es razonable para los datos de Pike pues los puntos en tono oscuro correspondientes a la muestra observada caen en el interior de la banda del 95 % confianza.



**Figura 2.9:** Gráfica cuantil-cuantil de los datos de Pike con nube de simulaciones de la distribución Weibull con parámetros  $\beta = 6.1$  y  $\sigma = 234.76$  y banda de confianza Bootstrap.

## 2.7. Resumen de la propuesta de estimación encontrando el nivel adecuado de un intervalo de verosimilitud asociado a un nivel de confianza deseado

1. Dada una muestra observada  $\vec{x} = (x_1, \dots, x_n)$  de  $n$  variables aleatorias  $X_1, \dots, X_n$  independientes e idénticamente distribuidas como  $F(x; \theta)$ , construir la matriz asociada de dimensión  $n \times 2$  que corresponde a los extremos izquierdo y derecho de los  $n$  intervalos donde se sabe que cayó cada una de las  $n$  variables en la muestra que fueron registradas como  $x_1, \dots, x_n$ . A menudo los valores observados son el punto medio de los intervalos.
2. Maximizar numéricamente la verosimilitud discretizada propuesta en la Sección 2.2 correspondiente a la DGVE. Para ello se sugiere dar los valores iniciales que se indicaron en la sección 2.3 para los parámetros  $a, b, c$ . De esta manera se encontrarán los emv  $\hat{\theta}_0 = (\hat{a}_0, \hat{b}_0, \hat{c}_0)$ .
3. Cuando se desee estimar un cuantil de la DGVE, primero se debe reparametrizar la verosimilitud discretizada de la DGVE en términos del cuantil de interés  $Q_\alpha$ . Se sugiere considerar la reparametrización uno a uno  $(a, b, c) \leftrightarrow (a, Q_\alpha, c)$  usando la relación (1.9) entre los cuantiles y los parámetros. A partir de esta verosimilitud reparametrizada, ahora se obtendrá la verosimilitud perfil del cuantil de interés de la manera usual. Para obtener un intervalo de estimación para este cuantil de interés se hará de la misma manera que para cualquier otro de los parámetros del modelo, como se indica en los siguientes incisos.
4. Simular  $M$  muestras discretizadas de  $n$  variables aleatorias independientes e idénticamente distribuidas como la DGVE estimada,  $F(x; \hat{\theta}_0)$ . Denótense a estas muestras como  $\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_M$ . Para cada una de estas muestras simuladas, calcular los valores iniciales sugeridos para maximizar numéricamente la verosimilitud discretizada de la DGVE y obtener  $M$  estimadores de máxima verosimilitud  $\hat{\theta}_1, \dots, \hat{\theta}_M$ .
5. Para cada una de estas muestras calcular con las verosimilitudes perfil de cada parámetro de interés, por ejemplo  $a$ , la estadística de razón de verosimilitud,  $W(\hat{a}_0; \vec{v}_i, \hat{\theta}_i)$ , para  $i = 1, \dots, M$ , evaluada en el valor teórico con el cual se simularon las  $M$  muestras simuladas. Con estos  $M$  valores de  $W(\hat{a}_0; \vec{v}_i, \hat{\theta}_i)$  estimar por máxima verosimilitud los parámetros de la distribución Gama( $\eta, \kappa$ ) sugerida. Calcular después el cuantil de probabilidad 0.95 de esta distribución, o el cuantil de probabilidad correspondiente al nivel de confianza que se desee para los intervalos de verosimilitud de los parámetros de interés. Denótese a este cuantil estimado como  $Q_{0.95}^G$ .



6. Con el cuantil estimado de la distribución Gama se calcula el nivel de verosimilitud sugerido para estimar al parámetro de interés  $a$

$$k_a = \exp\left(-\frac{Q_{0.95}^G}{2}\right).$$

7. Repetir los pasos del 4 al 6 un número  $T$  veces, de manera que se tenga al finalizar los valores  $(k_a)_1, \dots, (k_a)_T$ . Promediar dichos valores y

$$\bar{k}_a = \frac{1}{T} \sum_{i=1}^T (k_a)_i$$

será el nivel que se sugiere para obtener el intervalo de verosimilitud propuesto para estimar el parámetro de interés  $a$ . Dicho intervalo se denotará aquí como  $IV(\bar{k}_a)$ . Este intervalo tendrá asociado un nivel del 95% de confianza.

En cuanto a valores sugeridos para  $M$  y  $T$ , con base en lo explorado en la tesis se ha visto que funciona bien tomar  $M \geq 100$  y  $T \geq 30$ .

## 2.8. Verificación de la cobertura de los intervalos de estimación propuestos

Para ratificar que los intervalos propuestos tengan la cobertura deseada, se propone el siguiente esquema de simulaciones. Por sencillez supóngase que el parámetro  $\theta$  que se desea estimar es unidimensional. El mismo procedimiento puede replicarse cuando hay más parámetros.

Con la distribución  $F(x, \hat{\theta}_0)$  estimada para la muestra original  $\vec{x} = (x_1, \dots, x_n)$ , se propone simular  $H$  muestras de tamaño  $n$  que se denotan por  $\vec{z}_1, \dots, \vec{z}_H$ . Las muestras  $\vec{z}_j$ ,  $j = 1, \dots, H$ , tomarán el papel de réplicas de la muestra original observada  $\vec{x}$ . Con cada una de ellas se realiza el método de estimación descrito en la Sección 2.7 para así obtener un emv  $\hat{\theta}_j$  y un intervalo de estimación para el parámetro verdadero, siendo que en este caso ese rol lo desempeñará  $\hat{\theta}_0$ .

Es decir, para cada una de las muestras  $\vec{z}_j$  se calculará  $(\bar{k}_\theta)_j$  a partir de  $T$  tandas de  $M$  simulaciones, como se describió en la sección anterior. Con los niveles  $(\bar{k}_\theta)_1, \dots, (\bar{k}_\theta)_H$  correspondientes a  $\vec{z}_1, \dots, \vec{z}_H$ , se obtienen los  $H$  intervalos de verosimilitud. Se calcula la proporción de estos intervalos que contienen al ‘verdadero’ valor del parámetro  $\theta$ . El rol de parámetro ‘verdadero’ con el cual se verificará la cobertura de los  $H$  intervalos propuestos para estimarlo lo desempeñará  $\hat{\theta}_0$ , el emv de la muestra original observada  $\vec{x}$ . Recuérdese que con este valor y la distribución  $F$  se simularon las  $H$  muestras.

Nótese que el nivel de verosimilitud usualmente es diferente para cada uno de los  $H$  intervalos de verosimilitud obtenidos.

### Verificación de cobertura de intervalos de verosimilitud para el parámetro de escala de la distribución exponencial

Como ejemplo se supuso muestras de tamaño  $n = 5$  que siguen una distribución exponencial con media  $\theta = 2$ . Se realizó la verificación de las coberturas realizando  $H = 2000$  réplicas de la distribución exponencial con media  $\theta = 2$ . Para cada una de estas se aplicó el procedimiento de estimación explicado en la sección anterior con  $T = 100$  tandas de  $M = 100$  muestras simuladas. En este caso se tomó el producto de densidades como aproximación a la verosimilitud. Suponiendo que la estadística de razón de verosimilitud evaluada en el valor verdadero sigue una distribución Ji-cuadrada de un grado de libertad, la cobertura empírica de los intervalos fue 0.9510. Al estimar la distribución Gama que mejor describe a la estadística de razón de verosimilitud y tomando el nivel promedio para construir los intervalos de verosimilitud para  $\theta$  la cobertura empírica de los intervalos fue 0.9505.

La cobertura cercana al 95% deseado se debe a que la distribución exponencial es un modelo regular y la estadística de razón de verosimilitud converge rápidamente en distribución a la Ji-cuadrada con un grado de libertad.

### Verificación de cobertura de intervalos de verosimilitud para los parámetros de la distribución Gumbel

A manera de ejemplo, se consideró como  $F$  a la distribución Gumbel de parámetros  $a = 3.289$  y  $b = 0.294$ , de localización y escala, respectivamente. Para calcular la cobertura de los intervalos de verosimilitud asociados al 95% de confianza construidos con la propuesta dada en esta tesis, se tomarán  $M = 100$ ,  $T = 100$  y  $H = 200$ . Los resultados de las simulaciones fueron

Cobertura empírica	Parámetro			
	$a$	$b$	$Q_{0.05}$	$Q_{0.1}$
Nivel $k = 0.1465$	0.935	0.950	0.915	0.910
Nivel $\bar{k}_\theta$	0.945	0.950	0.940	0.950

**Tabla 2.2:** Coberturas empíricas calculadas para  $H = 200$  réplicas de la muestra original realizando  $T = 100$  tandas de  $M = 100$  simulaciones.

En la Tabla 2.2 se observa que los intervalos construidos con el nivel asintótico  $k = 0.1465$  tienen una cobertura inferior al 0.95 asociado. En particular los intervalos de nivel  $k = 0.1465$  de  $Q_{0.05}$  y  $Q_{0.1}$  tienen una cobertura menor que los de los parámetros  $a$  y  $b$ . Al aplicar la propuesta se observa que las coberturas de los intervalos de nivel  $\bar{k}_\theta$  se aproximan al 0.95 deseado por lo que las estimaciones tendrán la confianza que se quiere.

## 2.9. Revisión bibliográfica

### Modificaciones de la verosimilitud y resolución del instrumento de medición

En la mayoría de los libros de texto de estadística se define a la función de verosimilitud como el producto de densidades,  $L^*(\theta; \vec{x})$  como en (2.4). Sin embargo, esta es solamente una aproximación a la definición original dada por Sir Ronald Fisher (1922). Cuando la densidad tiene singularidades la verosimilitud las hereda si se le define como  $L^*(\theta; \vec{x})$ . Los artículos siguientes hablan de alternativas para evitar las singularidades de la verosimilitud así definida, métodos para realizar la maximización de la verosimilitud y de la distribución del pivotal de razón de verosimilitud.

Barnard (1967) y Kempthorne (1966) fueron los primeros en identificar el problema de verosimilitudes no acotadas de manera independiente, notando que la definición usual de verosimilitud para variables continuas como el producto de densidades marginales es incorrecta. Como se mencionó anteriormente, la verosimilitud hereda las singularidades de la función de densidad. Los valores de parámetros donde se alcanza la singularidad no son los que están más sustentados por los datos. La razón de este error es que cuando la densidad  $f(x; \theta)$  tiene singularidades deja de ser proporcional a la probabilidad de la muestra observada en  $x$ , como debería serlo una verosimilitud de acuerdo a la definición original de Sir Ronald Fisher (1922). La verosimilitud usual,  $L^*(\theta; \vec{x})$ , como el producto de densidades marginales de la muestra observada, es en realidad una mera aproximación a la verosimilitud correcta en el caso continuo. Se adoptó como la definición tradicional de verosimilitud porque usualmente funciona bien para la mayoría de los modelos estadísticos que tienen funciones de densidad regulares. Sin embargo, no debe usarse cuando la función de densidad tenga singularidades porque no se cumplen entonces los supuestos requeridos (por el Teorema del Valor Medio de Integrales) para que una densidad aproxime bien la probabilidad de que una variable continua caiga en un intervalo.

Barnard (1967), Kempthorne (1966), Giesbrecht y Kempthorne (1976) fueron los primeros también en proponer una solución al problema aprovechando el hecho que dado que toda variable continua  $X$  se mide forzosamente con un instrumento de medición con resolución finita. Entonces, cuando se afirma que  $X = x$ , en realidad se está afirmando que  $X$  cayó en un intervalo alrededor del valor registrado  $x$ , el cual depende de la resolución del instrumento de medición. Esto da pie así a la definición de la verosimilitud para el caso de variables continuas como una verosimilitud que contempla censura por intervalos. En esta tesis se le llamará verosimilitud discretizada y se definió en la Sección 2.2 al estilo que se hizo en Figueroa (2012) para las distribuciones Weibull y GVE.

Barnard (1967) sugirió evitar la singularidad de la verosimilitud usual  $L^*(\theta; \vec{x})$ , ya sea restringiendo la función de verosimilitud definida como producto de densidades, evitando evaluarla cerca de la singularidad, o calculándola tomando en cuenta la censura por intervalos que ocasiona la resolución finita del instrumento de medición. La primera idea se

explora con mayor detalle en Montoya et al. (2009) y se propone la llamada verosimilitud restringida que resuelve bien el problema de verosimilitudes no acotadas. En Figueroa (2012) se comparan la verosimilitud restringida con la propuesta de verosimilitud discretizada que se define allí y que se retoma en esta tesis.

Kempthorne (1966) y Giesbrecht y Kempthorne (1976) consideran de manera más explícita presenta la idea de la verosimilitud discretizada. En su libro, Kalbfleisch (1985, Sección 9.5) define la verosimilitud discretizada, llamándola correcta o exacta para el caso de variables continuas, cuando sí se toma en cuenta la resolución del instrumento de medición y la censura por intervalos que ésta induce. Sin embargo, no la propone él como una solución al caso cuando la densidad tiene singularidades, en cuyo caso la verosimilitud habitual vista como el producto de densidades marginales será no acotada. Lindsey (1999) menciona que la verosimilitud discretizada era la extensión natural al caso de variables continuas de la definición original de Fisher de la verosimilitud y que hoy en día con los avances computacionales es muy simple de calcular. Meeker y Escobar(1998, p.169) también reconocen en su libro que la verosimilitud discretizada, que ellos llaman la correcta, resuelve satisfactoriamente el problema de verosimilitudes no acotadas.

Adicionalmente, la verosimilitud discretizada como se propone en esta tesis explica fácilmente el hecho común de contar con observaciones repetidas de una variable continua. Como en realidad se tiene censura por intervalos inducida por el instrumento de medición, lo que ocurre es que las observaciones supuestamente repetidas son en realidad distintas, pero cayeron todas ellas en un mismo intervalo. Un ejemplo de ello y del uso de la verosimilitud discretizada Weibull para lluvias de la Estación de Biología Chamela se da en la tesis de maestría de Gerardo Ortega Ulloa (2015).

Muchos autores han mencionado que la estimación por máxima verosimilitud con la distribución Weibull es problemática (Smith (1985), Green et al. (1994)). Smith (1985) critica la verosimilitud usual por ser no acotada. Menciona que es posible que no exista un estimador de máxima verosimilitud y también que para ciertos valores de los parámetros cuando existen los emv, no son necesariamente consistentes. Green et al. (1994) aplicaron la distribución Weibull de tres parámetros para modelar diámetros de árboles, criticaron injustamente a la verosimilitud usual por ser no acotada, plana y asimétrica. Propusieron una solución Bayesiana que supuestamente resuelve estos problemas, pero ahora se tiene la complicación de dar con distribuciones previas adecuadas. No se percatan que el origen del problema radica en la definición de verosimilitud.

Sin embargo, todos ellos han considerado una definición incorrecta de verosimilitud para variables continuas, el producto de densidades marginales  $L^*(\theta; \vec{x})$ . Esta es solamente una aproximación a la función de verosimilitud correcta y es adecuado usarla en la mayoría de los modelos estadísticos regulares. Sin embargo, no debe usarse cuando la densidad sea no regular y tenga singularidades.

Por ejemplo, Smith (1985) critica la verosimilitud usual por ser no acotada por lo que es posible que no existan los estimadores de máxima verosimilitud. En caso de que existan

los estimadores pueden no ser consistentes. Coles (2001) resume estas ideas y propone el uso de intervalos de verosimilitud perfil simétricos para los parámetros de la distribución Weibull y de la DGVE obtenidos a partir de resultados asintóticos de normalidad. Lo anterior hace que se pase por alto la forma asimétrica que puede tomar la verosimilitud cuando la muestra es pequeña.

Una variante de la verosimilitud discretizada distinta de la que se propone en esta tesis fue propuesta por Cheng y Amin (1983) pensada para corregir las singularidades de la función de verosimilitud para modelos con parámetro umbral. En esta verosimilitud se ordenan las observaciones y los extremos de los intervalos corresponden a observaciones consecutivas. Usando esta verosimilitud demuestran las propiedades de los estimadores.

Cheng y Iles (1987) rescatan la verosimilitud discretizada a partir de las propuestas de Barnard, de Giesbrecht y Kempthorne, Cheng y Amin mencionadas. Además proponen el uso de la verosimilitud modificada, en la que se considera que la variable aleatoria más pequeña  $X_{(1)}$  puede tomar valores en el intervalo  $(x_{(1)} - \varepsilon, x_{(1)}]$ . En tal caso la probabilidad asociada a este evento que debe contribuir a la función de verosimilitud es  $P(x_{(1)} - \varepsilon < X_{(1)} \leq x_{(1)} + \varepsilon; \theta) = F(x_{(1)} - \varepsilon; \theta) - F(x_{(1)}; \theta)$ , es la aportación de la observación más pequeña a la verosimilitud. Esta consideración evita que la verosimilitud tenga singularidades. A partir del uso de la verosimilitud modificada se prueba que los estimadores existen, son consistentes y son asintóticamente normales, lo que destaca las bondades de esta manera correcta de definir la verosimilitud.

Cheng y Traylor (1995) hacen una revisión de los problemas de estimación debido a singularidades de la verosimilitud usual  $L^*(\theta; \vec{x})$  para modelos no regulares como la distribución Weibull. Analizan la verosimilitud modificada propuesta por Cheng y Iles y la verosimilitud como producto de probabilidades de intervalos propuesta por Cheng y Amin. Se propone en este artículo el uso de modelos más generales que abarquen los modelos no regulares. Esto permite que sea posible la estimación pues los modelos empotrados estimados en algunos casos son casos límite del modelo no regular.

Coles y Dixon (1999) proponen el uso de una verosimilitud penalizada por el valor que toma el parámetro de forma de la DGVE. Este método para muestras grandes no presenta inconvenientes, pero para muestras pequeñas dicen que no es eficiente. Además proponen el uso de estimadores de momentos ponderados que aportan mayor información sobre las colas de la distribución. Por medio de simulaciones verifican la eficiencia del método con muestras pequeñas. También muestran que la estimación con la verosimilitud penalizada arroja estimadores que poseen mejores propiedades estadísticas que las de los momentos ponderados.

## Métodos alternativos y valores iniciales

Como la estimación de los parámetros de la distribución Weibull en general se realiza numéricamente, Zanakis y Mann (1982) dan expresiones convenientes para los valores

iniciales para distintos valores del parámetro de forma. Comentan además que en ocasiones la estimación está restringida al método de optimización que se implemente. Esto requiere de algoritmos que sean eficientes y confiables.

El artículo de Zanakis y Kyparisis (1986) da una descripción de métodos de optimización usados cuando hay muestras sin censura. Los métodos recopilados rescatan los métodos de Posición Falsa, de Newton-Raphson, el Modificado de Cuasi-linealización y el método adaptativo de búsqueda de patrones. Los autores mencionan que los métodos existentes son rápidos y poco confiables, o confiables pero demasiado lentos. Por ello queda claro que un área de oportunidad es desarrollar métodos que faciliten la estimación con la distribución Weibull.

Cousineau (2009) realiza una revisión de los problemas de estimación de la distribución Weibull y propone usar estimación por máxima verosimilitud incorporando la verosimilitud con censura por intervalos como propusieron Cheng y Amin (1983). Además propone el uso del método de momentos y por medio de simulaciones Monte Carlo verifica la eficiencia de la mezcla de máxima verosimilitud con el método de momentos. En su análisis recomienda el uso de la verosimilitud con censura por intervalos dada por Cheng y Amin (1983) o la mezcla de métodos, pero descarta el uso del método de máxima verosimilitud usual.

## **Uso del pivotal de razón de verosimilitud para asignar probabilidad a intervalos de confianza y calibración**

Para asignar la probabilidad a intervalos de verosimilitud Wilks (1938) demostró que bajo condiciones de regularidad el pivotal de razón de verosimilitud converge en distribución a una Ji-cuadrada cuyos grados de libertad correspondan a los parámetros desconocidos. Cuando el tamaño de muestra es pequeño se han propuesto modificaciones del pivotal de razón de verosimilitud para que se aproxime a la distribución asintótica Ji-cuadrada. Estas modificaciones se han llamado correcciones de Bartlett. Los principales trabajos al respecto han sido realizados por Chernoff (1954), Feder (1968), Barndorff-Nielsen y Cox (1984) y Bickel y Ghosh (1990). Sin embargo Boyles (2008) propuso modificar la distribución del pivotal de razón de verosimilitud y considerar mejor una distribución Ji-cuadrada escalada.

En esta tesis se propuso considerar que para muestras pequeñas o moderadas que el pivotal de razón de verosimilitud sigue una distribución Gama, cuyos parámetros se pueden estimar a través de muestras simuladas vía un Bootstrap paramétrico. La distribución Gama propuesta incluye a la Ji-cuadrada asintótica propuesta por Wilks (1938) y se acerca a esta al considerar tamaños de muestra más grandes. Esta propuesta es general y flexible. En el capítulo siguiente se mostrará lo poderosa que puede ser al aplicarla a varios ejemplos prácticos.

## Aplicaciones a ejemplos prácticos

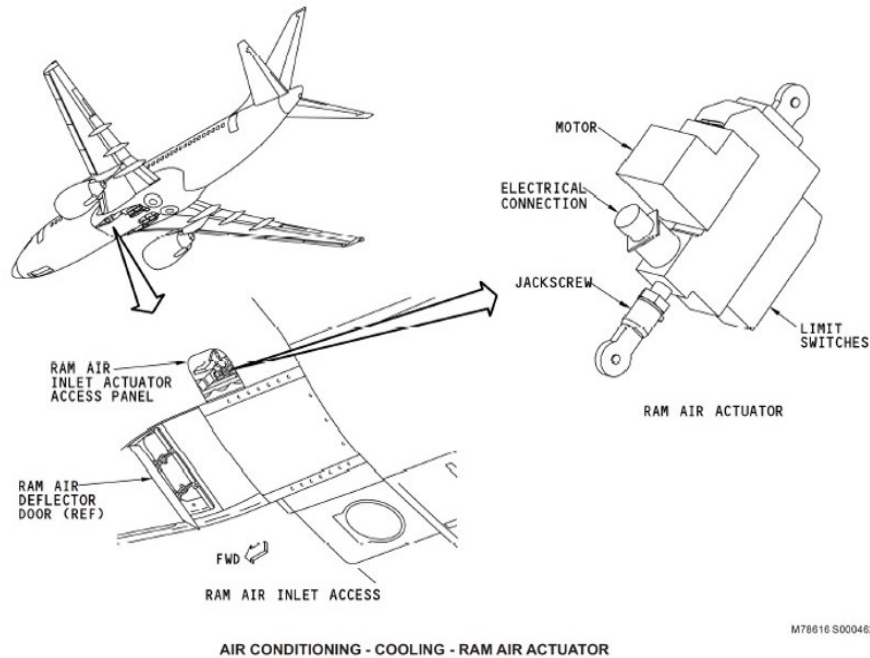
La propuesta de estimación consolidada en el capítulo anterior se aplicará a cuatro conjuntos de datos reales. El primero describe tiempos de falla de un componente aeronáutico. En el segundo se estudia una prueba de esfuerzo practicada a un transformador eléctrico. El tercero consiste de los máximos anuales de eventos de lluvia en Chamela en la costa de Jalisco. El cuarto ejemplo contempla tiempos hasta la aparición de tejido cancerígeno en ratas.

En los primeros dos casos todas las observaciones fueron medidas con la misma resolución. En el tercero, los datos fueron medidos con cuatro resoluciones distintas. En el último ejemplo, un par de datos presentaron censura por la derecha. Por medio de la propuesta descrita en el capítulo anterior se realizará la estimación con intervalos de verosimilitud que tengan la cobertura deseada.

### 3.1. Tiempos de falla de un componente aeronáutico

Se plantea estudiar los tiempos de falla de un componente aeronáutico llamado actuador. El aire acondicionado de un avión Boeing 737 se alimenta con aire caliente de los motores y de aire frío del entorno que compensa la diferencia térmica. Esta mezcla de aire se realiza por medio de un conducto por el cual fluye el aire frío para mezclarlo con el aire caliente. Para permitir la entrada del aire exterior, se levanta una lámina en el costado del avión y se abre un compartimiento por el que fluye el aire hacia el interior (ver Figuras 3.1 y 3.2). Dicho mecanismo es operado por un dispositivo llamado actuador, que al encogerse hace que la lámina se repliegue y que el compartimiento se abra.

La falla consiste en que el actuador no se extiende por lo que no permite la apertura del mecanismo, generando diversos inconvenientes. Entre ellos, el principal es el aumento en la resistencia del aire, lo que provoca aumento en el consumo de combustible. En caso de falla, el actuador se cambia antes que el avión vuelva a estar en servicio.



**Figura 3.1:** Actuador y localización en el avión.

El personal encargado del mantenimiento y servicio de los aviones realiza un procedimiento de limpieza, periódicamente, del sector por el cual ingresa el aire frío. Por la complejidad de dicho procedimiento, cuando se registra una falla se decide cambiar la pieza y realizar la limpieza del conducto. Estimar el tiempo en el que falla la mayoría de los actuadores permite que la programación de las jornadas de mantenimiento sea más eficiente.

La muestra que se analizará aquí consiste de 25 tiempos de falla de actuadores registrados automáticamente por los instrumentos de los aviones. Estos datos corresponden a la flota de aviones Boeing 737 de Aeroméxico y fueron facilitados por el Ing. David Nakamura Savoy, quien supervisa y está a cargo de un área de mantenimiento de la aerolínea. Las unidades en las que se registran las fallas son usualmente en ciclos, horas y días de vuelo. Un ciclo de vuelo inicia en el momento del despegue del avión y finaliza al aterrizar. Por ello, resulta ser una unidad natural y homogénea para describir las fallas. Una hora o día podría representar solamente una fracción del tiempo en vuelo y de un ciclo. Se eligió así usar los ciclos de vuelo por la facilitar la interpretación.

Para la implementación de la propuesta de estimación, se tuvo en cuenta que cuando el actuador falla se registra el último ciclo de vuelo completo en el que funcionó con normalidad. De acuerdo a esto los tiempos se reportan como el menor entero más cercano

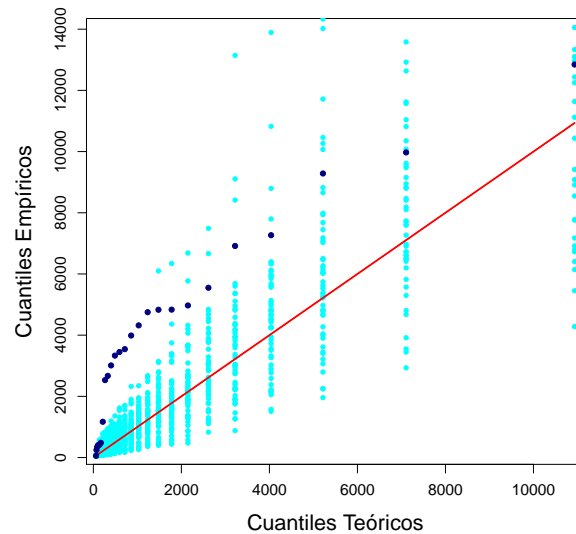




**Figura 3.2:** Lámina que permite ingreso al conducto de aire (izq.) y parte inicial del conducto de aire (der.).

a la falla real. Lo anterior permite considerar a la resolución de los datos como un ciclo de vuelo. Así, los datos observados serán entonces los extremos izquierdos de los intervalos y los extremos derechos se obtendrán sumando un ciclo de vuelo.

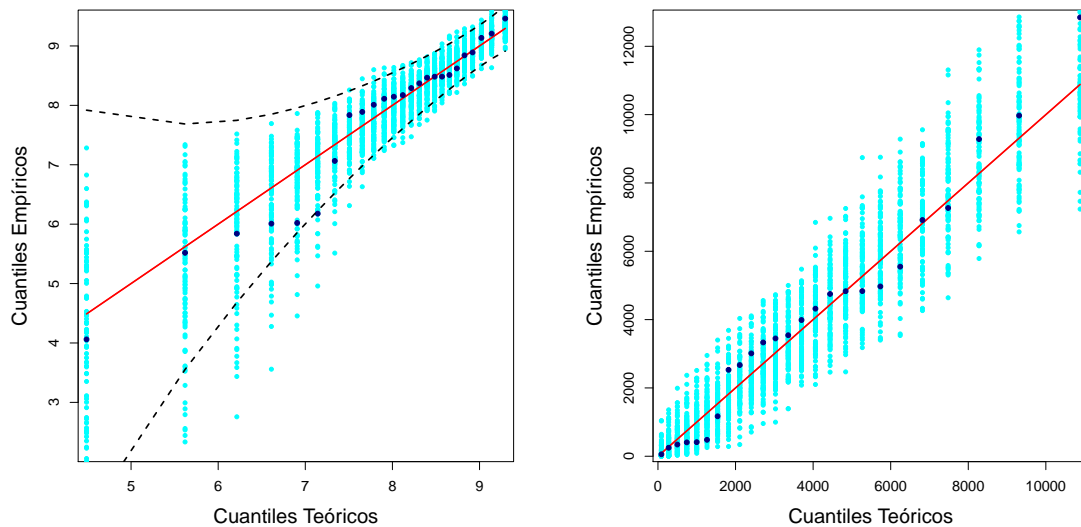
El actuador fallará cuando la parte más débil del conjunto de piezas que lo constituye falle. El tiempo de falla es en realidad el tiempo mínimo de falla de todos los componentes del dispositivo. Por ello es sensato considerar la DGVE para describir el comportamiento aleatorio de las fallas. Considerando la propuesta presentada en el capítulo anterior se estimaron los parámetros  $a$ ,  $b$  y  $c$  de la DGVE con los datos mencionados. Sin embargo se puede ver en la Figura 3.3 que los datos no parecen seguir una DGVE. Reconociendo por el Teorema de Fisher y Tippett que se trata de un resultado asintótico, se decidió explorar si acaso una transformación tipo potencia que preserve el orden de los datos pudiera seguir la DGVE.



**Figura 3.3:** Datos de actuador. Gráfica cuantil-cuantil de los datos con el modelo GVE estimado ( $\hat{a} = 1334.765$ ,  $\hat{b} = 2315.646$  y  $\hat{c} = -1.814$ ).

Como los tiempos de falla reportados abarcan órdenes de magnitud de  $10^1$  a  $10^5$ , es razonable considerar una transformación potencia o logarítmica tipo la familia de transformaciones de Box-Cox. Se eligió la transformación logaritmo por ser usada frecuentemente cuando los datos abarcan ordenes de magnitud diferentes y por conservar el orden al ser monótona. La estimación se realizó por medio de la propuesta dada en el capítulo anterior, tomando el logaritmo de los intervalos observados.

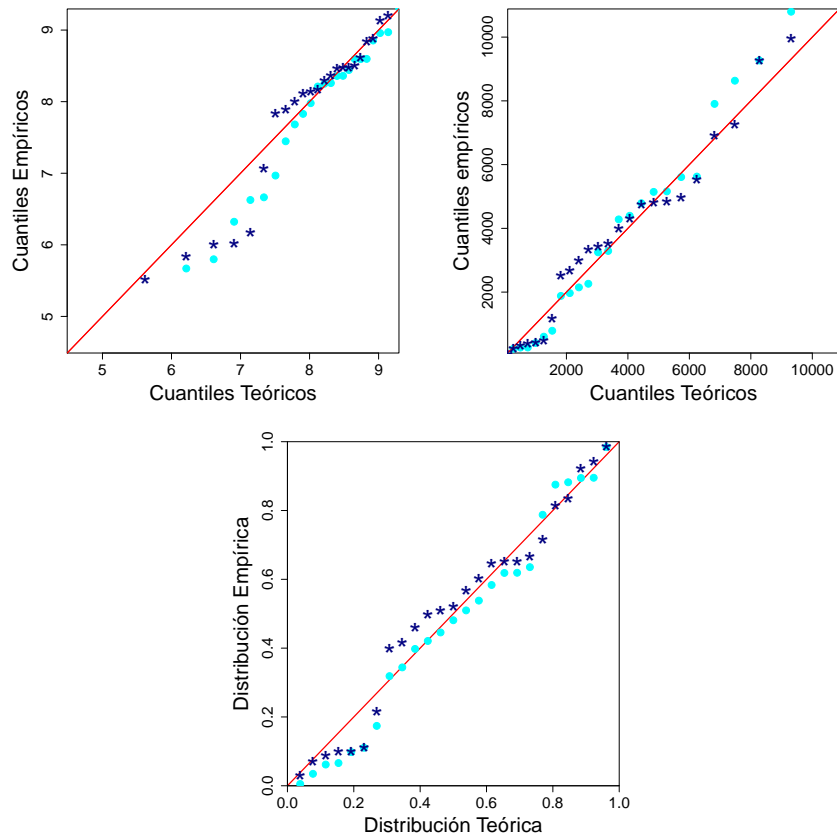
Maximizando la verosimilitud discretizada se obtuvieron los estimadores de la DGVE:  $\hat{a} = 8.436$ ,  $\hat{b} = 0.828$  y  $\hat{c} = 0.225$ . El estimador puntual de máxima verosimilitud de  $c$  indica que el modelo que mejor ajusta al logaritmo de los ciclos es de la familia Fréchet. La gráfica de la verosimilitud relativa perfil de este parámetro dada en la Figura 3.6, también sustenta esta afirmación, si bien  $c = 0$  está incluido en el intervalo. Por ello un modelo Gumbel también podría describir a estos datos. En la Figura 3.4 se muestran las gráficas cuantil-cuantil del logaritmo de los datos y de la muestra original con respecto a la DGVE estimada y transformada respectivamente. Los puntos de la muestra original están marcados en azul oscuro y caen dentro de la nube de puntos de 50 simulaciones. Para verificar que la distribución estimada es adecuada, se tomó la recomendación de Thas (2010) en la que se verifica si hay una muestra simulada que tenga estructura similar a los datos observados. En la Figura 3.5 se exhibe una muestra simulada con el modelo GVE estimado propuesto que resulta ser muy similar a los datos observados.



**Figura 3.4:** Datos de actuador. Gráficas cuantil-cuantil para la DGVE estimada considerando una transformación logarítmica. A la izquierda está el logaritmo de los datos y a la derecha los datos en la escala original.

La aerolínea desconoce la proporción de aviones que presentan la falla en un tiempo determinado. En particular desean conocer el tiempo en el que habrá fallado la mayoría de los aviones. Por ello se sugirió estimar el tiempo en el que habrán fallado el 50%, el 75% y el 90% de los aviones. Lo anterior es equivalente a estimar los cuantiles  $Q_{0.5}$ ,  $Q_{0.75}$  y  $Q_{0.9}$  de probabilidades 0.5, 0.75 y 0.9. Sustituyendo los estimadores de  $a$ ,  $b$  y  $c$  en la reparametrización en cuantiles (1.9) se obtienen los estimadores  $\hat{Q}_{0.5} = 8.119$ ,  $\hat{Q}_{0.75} = 8.697$  y  $\hat{Q}_{0.9} = 9.066$ . En la Figura 3.6 se pueden ver las verosimilitudes relativas perfil de cada parámetro y cuantil.

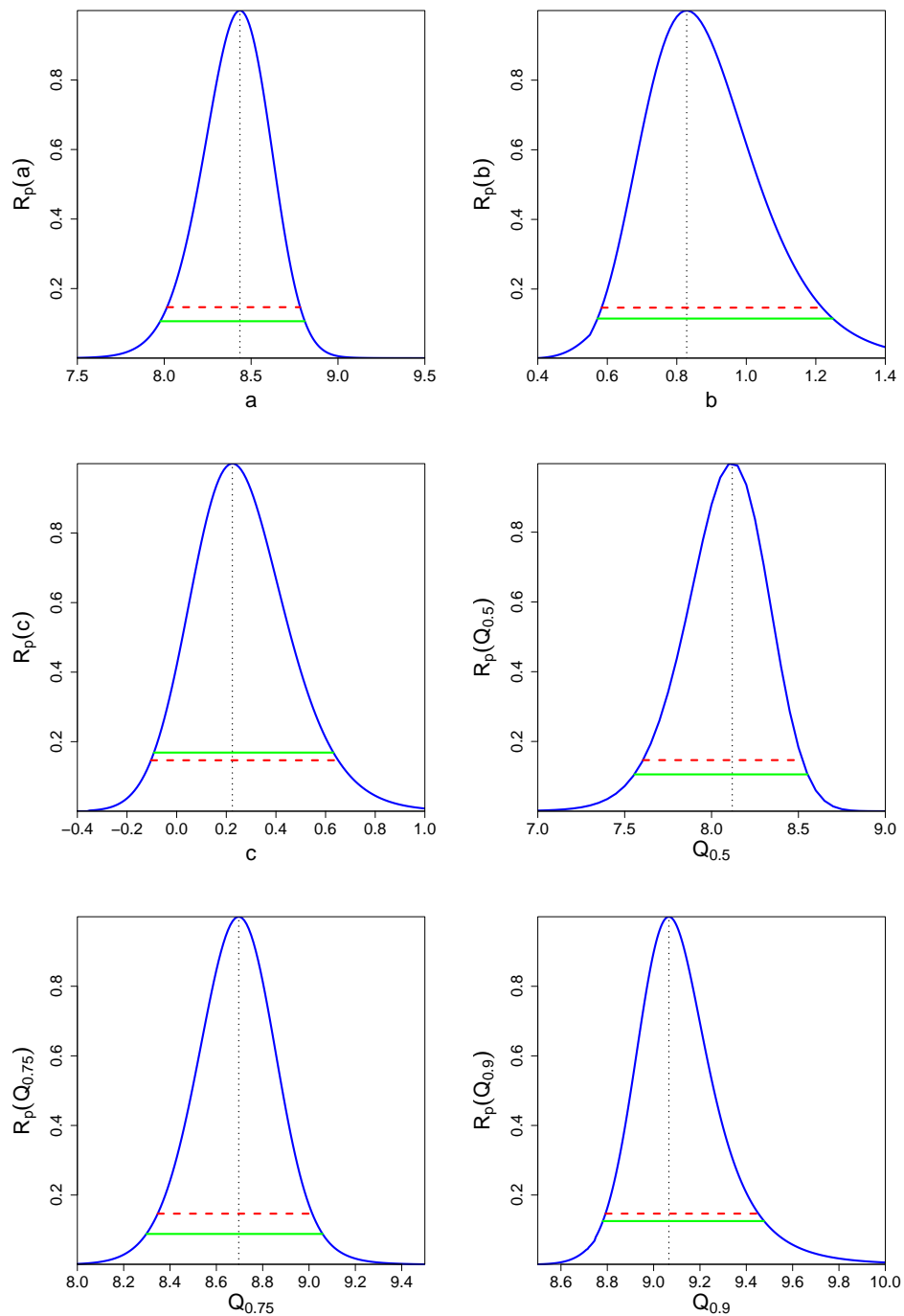
Para analizar la simetría de las verosimilitudes relativas se calcularon las distancias del estimador de máxima verosimilitud a los extremos del intervalo de verosimilitud de nivel 0.1465. En la Tabla 3.1 se muestran las distancias al extremo izquierdo y al extremo derecho del intervalo de verosimilitud. Las distancias se dividieron entre la longitud total del intervalo ( $d$ ) para poder comparar las verosimilitudes de cada parámetro. Se denotará por  $d_1/d$  a la medida correspondiente al lado izquierdo y  $d_2/d$  a la del lado derecho. Se espera que si la verosimilitud relativa es simétrica  $d_2/d_1$  esté cerca de 1, si tiene cola pesada a la derecha entonces  $d_2/d_1 > 1$ , y si la cola es más pesada a la izquierda  $d_2/d_1 < 1$ . La Tabla 3.1 junto a las gráficas de la Figura 3.6 permiten ver que la verosimilitud relativa es más simétrica para los parámetros  $a$  y  $Q_{0.75}$ .



**Figura 3.5:** Datos de actuador. Gráficas cuantil-cuantil de datos transformados con una muestra GVE simulada (izquierda-arriba) y de datos a escala real (derecha-arriba) y gráfica de probabilidad de los datos transformados (Abajo). La muestra observada está representada por los asteriscos y la GVE simulada en puntos.

	$d_1/d$	$d_2/d$	$d_2/d_1$
$R_p(a)$	0.548	0.452	0.826
$R_p(b)$	0.386	0.614	1.593
$R_p(c)$	0.435	0.565	1.301
$R_p(Q_{0.5})$	0.560	0.440	0.785
$R_p(Q_{0.75})$	0.524	0.476	0.908
$R_p(Q_{0.9})$	0.414	0.586	1.414

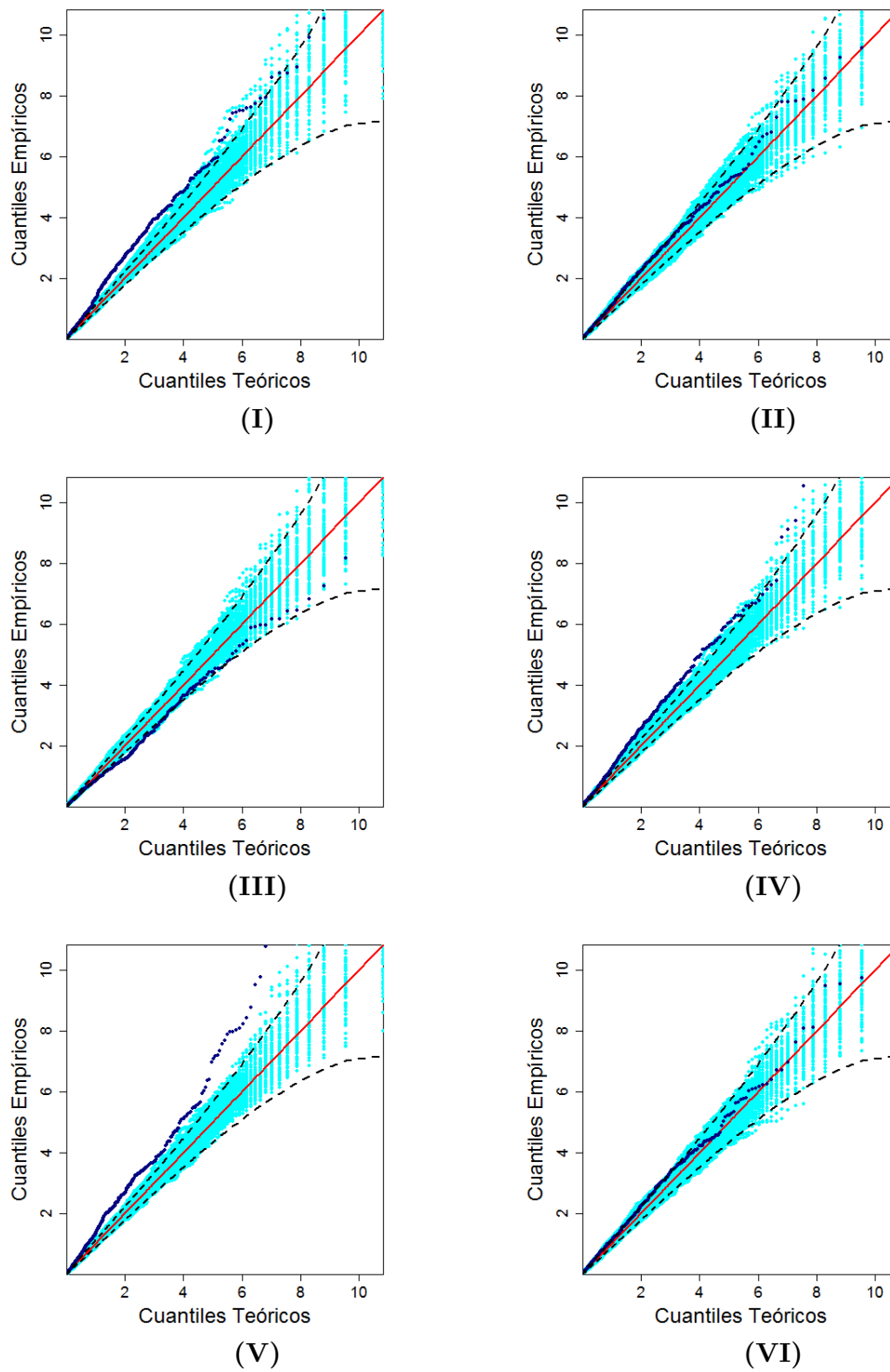
**Tabla 3.1:** Distancia del estimador de máxima verosimilitud al extremo izquierdo ( $d_1$ ) y al extremo derecho ( $d_2$ ) del intervalo de nivel de verosimilitud 0.1465.



**Figura 3.6:** Datos de actuador. Para el logaritmo de los datos de fallas de actuadores, se muestran las verosimilitudes relativas de los parámetros  $a$ ,  $b$ ,  $c$  y de los cuantiles  $Q_{0.5}$ ,  $Q_{0.75}$  y  $Q_{0.9}$ . La línea vertical indica el estimador de máxima verosimilitud de cada parámetro. Con guiones (rojo) se muestra el intervalo de nivel asintótico  $k = 0.1465$  y con línea continua (verde) el intervalo de nivel  $k_\theta$ , asociados al 95% de confianza.

Para identificar el nivel de verosimilitud asociado a una confianza del 95 %, se consideró a la estadística de razón de verosimilitud  $W(\theta)$ , como se describió en el capítulo anterior.

Se usaron las gráficas cuantil-cuantil, como se presentaron en la Sección 2.6, para la muestra  $W_1(\theta), \dots, W_M(\theta)$  de la estadística de razón de verosimilitud obtenida de  $M = 1000$  muestras simuladas como la original para ratificar que la distribución Ji-cuadrada no es adecuada para describir a la estadística. Estas gráficas se realizaron contrastando muestras simuladas de la distribución Ji-cuadrada con un grado de libertad contra la muestra Bootstrap de la estadística  $\{W_1(\theta), \dots, W_M(\theta)\}$ , con  $\theta = a, b, c, Q_{0.5}, Q_{0.75}$  y  $Q_{0.9}$ . En las gráficas cuantil-cuantil de la Figura 3.7 se ve que la muestra Bootstrap de la estadística para la mayoría de parámetros no se comporta siguiendo la distribución Ji-cuadrada. Por ejemplo las muestras de la estadística de razón de verosimilitud de los parámetros  $a$  y  $Q_{0.75}$  no caen dentro de las nubes de simulaciones. Lo anterior hace razonable el uso de una distribución un poco más flexible, como la Gama que se propone usar aquí, que se adapte a las características de la estadística para cada parámetro como se sugirió en la Sección 2.4.



**Figura 3.7:** Datos de actuador. Gráficas cuantil-cuantil de la estadística de razón de verosimilitud de los parámetros: I)  $a$ , II)  $b$ , III)  $c$ , IV)  $Q_{0.5}$ , V)  $Q_{0.75}$  y VI)  $Q_{0.9}$  suponiendo distribución Ji-cuadrada en una tanda de 1000 simulaciones de muestras de tamaño 25.

Con cada grupo o tanda de muestras Bootstrap de la estadística  $\{W_1(\theta), \dots, W_M(\theta)\}$ , de los  $T = 30$  simulados, se estimaron los parámetros de forma y escala de la distribución Gama por máxima verosimilitud. Los parámetros estimados se reportan en las Tablas 3.3 y 3.4. Para una de las tandas de simulaciones en la Figura 3.8 se presentan las gráficas cuantil-cuantil de  $\{W_1(\theta), \dots, W_M(\theta)\}$  contra muestras simuladas que provienen de la distribución Gama estimada, para  $\theta = a, b, c, Q_{0.5}, Q_{0.75}, Q_{0.9}$ . En estas gráficas se evidencia que la distribución  $\text{Gama}(\hat{\beta}/2, 2\hat{\alpha}/\hat{\beta})$  propuesta describe bien la distribución de  $\{W_1(\theta), \dots, W_M(\theta)\}$ .

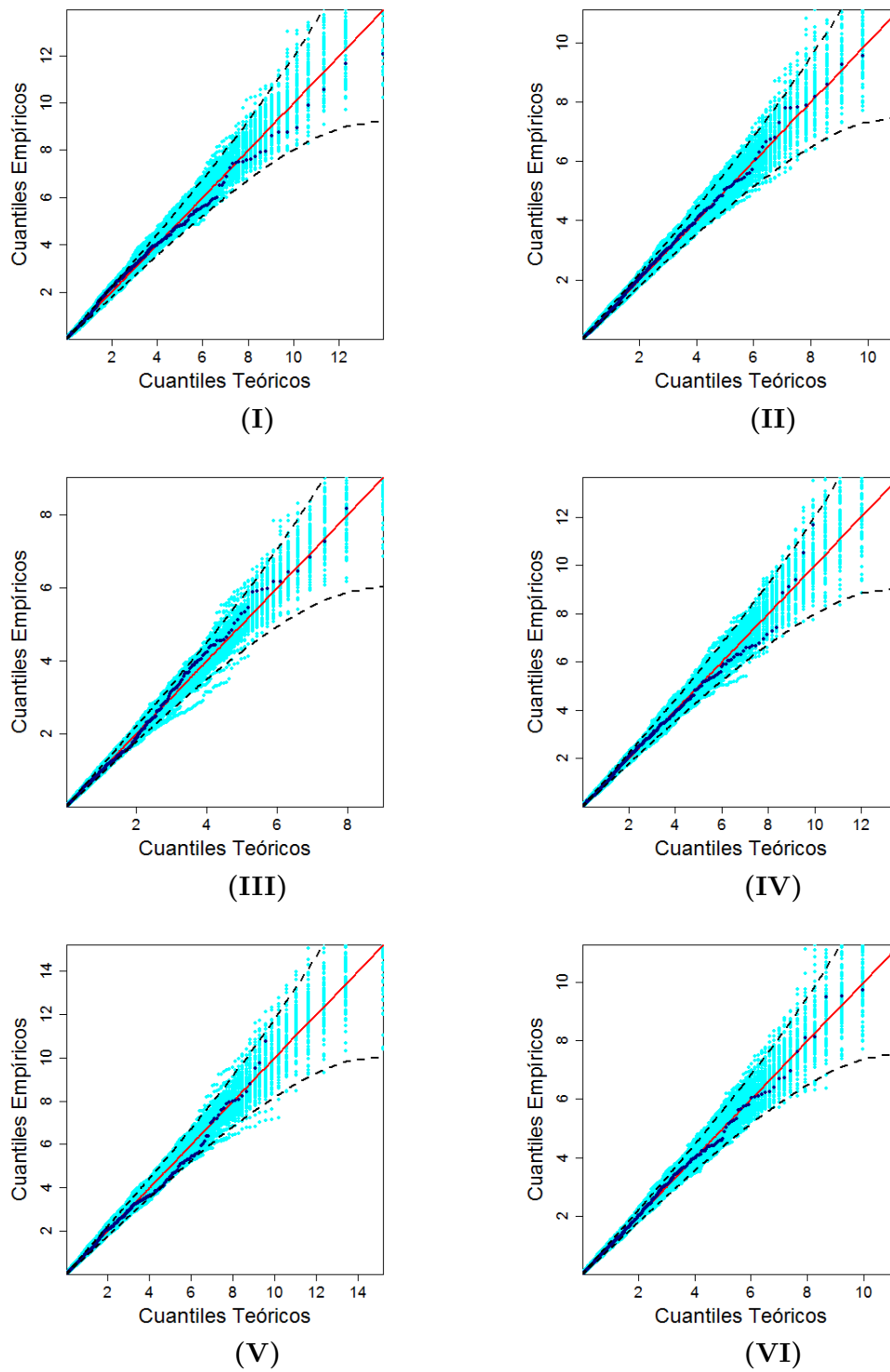
De cada distribución Gama se calculó el cuantil 0.95, a partir de sus parámetros estimados, para calcular el nivel de verosimilitud correspondiente. En la Tabla 3.5 se reportan los niveles obtenidos, el promedio  $\bar{k}_\theta$  y los intervalos Bootstrap para  $k_\theta$ . Se observa para todos los parámetros que el nivel de verosimilitud asociado al 95 % de confianza fue menor al 0.1465 asintótico, excepto para el parámetro  $c$ .

Se tomó el nivel promedio de verosimilitud para cada parámetro ( $\theta$ ), denotados por  $\bar{k}_\theta$ , para construir los intervalos de verosimilitud del 95 % de confianza para la muestra original observada. En la Figura 3.6 se contrastan los intervalos obtenidos para el nivel 0.1465 y para el nivel promedio  $\bar{k}_\theta$ . Como se esperaba, el intervalo de verosimilitud propuesto para el parámetro  $c$  es más estrecho que el intervalo usual asintótico pues el nivel  $\bar{k}_c$  es mayor al 0.1465. Los demás parámetros tienen intervalos más amplios ya que el nivel de verosimilitud  $\bar{k}_\theta$  es menor al 0.1465. Los intervalos obtenidos en cada caso se resumen en la Tabla 3.2.

Parámetro / Cuantil	Intervalos con nivel $k = 0.1465$	Intervalos con nivel $\bar{k}_\theta$
$a$	(8.016, 8.782)	(7.977, 8.809)
$b$	(0.584, 1.218)	(0.572, 1.249)
$c$	(-0.103, 0.651)	(-0.091, 0.632)
$Q_{0.5}$	(7.606, 8.522)	(7.556, 8.553)
$Q_{0.75}$	(8.347, 9.014)	(8.298, 9.058)
$Q_{0.9}$	(8.792, 9.452)	(8.781, 9.477)

**Tabla 3.2:** Datos de actuador. Intervalos de verosimilitud con el nivel de verosimilitud asintótica 0.1465 y con el nivel Bootstrap  $\bar{k}_\theta$  para los parámetros de la DGVE para el logaritmo de los ciclos de vuelo en que falla el actuador.





**Figura 3.8:** Datos de actuador. Gráficas cuantil-cuantil de la estadística de razón de verosimilitud de los parámetros: I)  $a$ , II)  $b$ , III)  $c$ , IV)  $Q_{0.5}$ , V)  $Q_{0.75}$  y VI)  $Q_{0.9}$  suponiendo distribución Gama en una tanda de 1000 simulaciones de muestras de tamaño 25.

Tanda	Parámetro					
	<i>a</i>		<i>b</i>		<i>c</i>	
	$\alpha$	$\beta$	$\alpha$	$\beta$	$\alpha$	$\beta$
1	1.1070	0.9733	1.1578	1.1039	0.9301	0.9734
2	1.2113	1.0290	1.0619	1.0412	0.8752	0.9918
3	1.1615	1.1046	1.1309	0.9984	0.9169	0.9624
4	1.2201	1.0528	1.1880	1.1086	0.9828	0.9748
5	1.1672	0.9993	1.0736	1.0331	0.9373	1.0320
6	1.2852	0.9828	1.2292	1.0184	0.9548	1.0552
7	1.1611	1.0036	1.2391	1.0592	0.9270	1.0243
8	1.1526	0.9937	1.1910	0.9559	0.8973	0.9507
9	1.2007	1.0456	1.1078	1.0414	0.9095	1.0206
10	1.0864	1.0252	1.1213	1.0951	0.8672	0.9967
11	1.1906	1.0007	1.0977	1.0320	1.0025	1.0094
12	1.2143	0.9901	1.1652	0.9661	0.8813	0.9910
13	1.1338	1.0010	1.2138	1.0164	0.9860	1.0114
14	1.0898	0.9799	1.1454	1.1099	0.9567	1.0499
15	1.1925	1.0982	1.2025	1.0381	0.9667	1.0627
16	1.1724	1.0209	1.1618	1.0382	0.8782	0.9964
17	1.1705	1.0152	1.1182	1.0140	0.9447	1.0390
18	1.1840	1.0380	1.1638	1.0337	0.9289	1.0206
19	1.0998	1.0268	1.1359	1.0266	0.9658	0.9741
20	1.1957	1.1292	1.1511	1.0008	0.9091	0.9672
21	1.1391	1.0538	0.9777	1.0818	1.0147	1.0548
22	1.1374	0.9361	1.1418	1.0470	0.9459	1.0044
23	1.1353	1.0123	1.1141	1.0011	0.9413	1.0252
24	1.1526	0.9194	1.1007	1.0076	0.9342	1.0526
25	1.2079	0.9913	1.1919	0.9822	0.8534	1.0745
26	1.2242	1.0099	1.1840	1.0397	0.9816	1.0257
27	1.1452	0.9579	1.1424	1.0811	0.9412	0.9836
28	1.3148	0.9849	1.1090	1.1036	0.9523	0.9984
29	1.1298	0.9903	1.2204	1.1025	0.9377	1.0423
30	1.2781	0.9881	1.1072	1.1201	0.8647	1.0558

**Tabla 3.3:** Datos de actuador. Parámetros  $\alpha$ ,  $\beta$  estimados de la distribución Gama para 30 tandas de 1000 simulaciones de tamaño 25 para los parámetros  $a$ ,  $b$  y  $c$ .

Tanda	Parámetro					
	$Q_{0.5}$		$Q_{0.75}$		$Q_{0.9}$	
	$\alpha$	$\beta$	$\alpha$	$\beta$	$\alpha$	$\beta$
1	1.1128	0.9986	1.3215	0.9278	1.1412	1.0538
2	1.2524	0.9636	1.2369	1.0000	1.0451	1.0278
3	1.1350	1.0621	1.2342	1.0563	1.0943	0.9414
4	1.2341	0.9884	1.3173	0.9863	1.1156	1.0572
5	1.2213	0.9903	1.2119	1.0146	1.0810	1.0542
6	1.2609	0.9624	1.3605	0.9690	1.0756	1.0240
7	1.1549	1.0546	1.3533	0.9457	1.1766	0.9555
8	1.2095	1.0041	1.1705	1.0091	1.0176	0.9916
9	1.2013	1.0239	1.2852	0.9974	1.1421	1.0020
10	1.0839	0.9880	1.1014	1.0840	1.0205	1.0284
11	1.1472	1.0034	1.2481	0.9918	1.0802	1.0023
12	1.2035	1.0241	1.3561	1.0214	1.1680	1.0220
13	1.1124	1.0440	1.2531	0.9777	1.1628	1.0363
14	1.1206	0.9461	1.1746	1.0181	1.0346	0.9963
15	1.2203	1.0452	1.3128	0.9748	1.1443	0.9786
16	1.1664	1.0458	1.2711	0.9602	1.1338	1.0172
17	1.1540	1.0181	1.2287	0.9912	1.0794	1.0092
18	1.2088	0.9992	1.2188	0.9765	1.0083	1.0453
19	1.0905	1.0594	1.2053	0.9757	1.0312	1.0174
20	1.1845	1.0820	1.2748	1.0160	1.0894	1.0226
21	1.0931	1.0115	1.2510	1.0035	1.0441	0.9719
22	1.1346	0.9835	1.2552	0.9310	1.0824	1.0409
23	1.1307	1.0211	1.2322	0.9952	1.0659	1.0231
24	1.1406	0.9214	1.2407	0.9641	1.1069	0.9886
25	1.2136	1.0051	1.3621	1.0050	1.1183	1.0679
26	1.2119	1.0508	1.3296	0.9702	1.1118	1.0423
27	1.1417	0.9931	1.1270	0.9746	1.0413	1.0703
28	1.3582	0.9969	1.4077	0.9818	1.1662	1.0228
29	1.1769	0.9927	1.2179	0.9802	1.0936	1.0389
30	1.2681	1.0080	1.3821	0.9748	1.1038	1.0887

**Tabla 3.4:** Datos de actuador. Parámetros  $\alpha$ ,  $\beta$  estimados de la distribución Gama para 30 tandas de 1000 simulaciones de tamaño 25 para los parámetros  $Q_{0.5}$ ,  $Q_{0.75}$  y  $Q_{0.9}$ .

Tanda	Parámetros					
	$a$	$b$	$c$	$Q_{0.5}$	$Q_{0.75}$	$Q_{0.9}$
1	0.1169	0.1169	0.1647	0.1178	0.0738	0.1163
2	0.1000	0.1339	0.1853	0.0874	0.0929	0.1370
3	0.1161	0.1138	0.1678	0.1184	0.0978	0.1168
4	0.1002	0.1109	0.1488	0.0925	0.0787	0.1224
5	0.1062	0.1302	0.1686	0.0950	0.0987	0.1304
6	0.0834	0.0958	0.1654	0.0859	0.0712	0.1289
7	0.1078	0.0971	0.1711	0.1134	0.0705	0.1006
8	0.1087	0.0978	0.1730	0.0983	0.1064	0.1408
9	0.1033	0.1228	0.1766	0.1015	0.0845	0.1117
10	0.1264	0.1243	0.1887	0.1236	0.1281	0.1436
11	0.1016	0.1243	0.1467	0.1107	0.0903	0.1258
12	0.0963	0.1038	0.1830	0.1011	0.0754	0.1079
13	0.1134	0.0985	0.1517	0.1220	0.0884	0.1102
14	0.1214	0.1201	0.1643	0.1113	0.1063	0.1367
15	0.1091	0.1024	0.1625	0.0995	0.0785	0.1092
16	0.1070	0.1106	0.1847	0.1103	0.0840	0.1148
17	0.1069	0.1180	0.1670	0.1105	0.0937	0.1266
18	0.1060	0.1098	0.1701	0.0980	0.0943	0.1486
19	0.1234	0.1152	0.1538	0.1285	0.0968	0.1397
20	0.1109	0.1097	0.1709	0.1095	0.0876	0.1254
21	0.1168	0.1611	0.1477	0.1236	0.0907	0.1319
22	0.1068	0.1156	0.1630	0.1117	0.0843	0.1288
23	0.1140	0.1178	0.1666	0.1158	0.0934	0.1313
24	0.1022	0.1214	0.1717	0.1048	0.0894	0.1183
25	0.0976	0.0999	0.2024	0.0976	0.0734	0.1227
26	0.0960	0.1062	0.1544	0.1016	0.0757	0.1220
27	0.1072	0.1184	0.1623	0.1110	0.1125	0.1420
28	0.0789	0.1279	0.1604	0.0734	0.0658	0.1084
29	0.1133	0.1040	0.1695	0.1037	0.0948	0.1259
30	0.0850	0.1297	0.1961	0.0882	0.0686	0.1279
Promedio= $\bar{k}_\theta$	0.1061	0.1153	0.1686	0.1056	0.0882	0.1251
Intervalo	(0.084, 0.128)	(0.088, 0.142)	(0.142, 0.195)	(0.081, 0.131)	(0.061, 0.116)	(0.101, 0.149)

**Tabla 3.5:** Datos de actuador. Niveles de verosimilitud  $k$  asociados al cuantil de probabilidad 0.95 de las distribuciones Gama estimadas, promedio de niveles e intervalo Bootstrap para los niveles de cada parámetro en 30 tandas de 1000 simulaciones.

El promedio de los niveles y el promedio de los cuantiles 0.95 de la distribución Gama estimada, junto con los intervalos Bootstrap se resumen en la Tabla 3.6. Se define el nivel de verosimilitud  $k_\theta^*$  a partir del promedio de los cuantiles del 95 % de las distribuciones Gama estimadas como

$$k_\theta^* := \exp\left(-\frac{\overline{Q}_{0.95,\theta}^G}{2}\right),$$

donde  $\overline{Q}_{0.95,\theta}^G$  denota al promedio de los cuantiles 0.95 de las distribuciones Gama estimadas para el parámetro  $\theta$ . En la última columna de la Tabla 3.6 se reporta la transformación anterior, de la cual se observa que es un valor cercano al nivel  $\bar{k}_\theta$  propuesto.

Parámetro / Cuantil	Promedio de niveles $\bar{k}_\theta$	Intervalo Bootstrap de $\bar{k}_\theta$	Promedio de cuantiles 0.95 Gama estimada	Intervalo Bootstrap de promedio de cuantiles	Nivel $k_\theta^*$
$a$	0.1061	(0.084, 0.128)	4.4980	(4.069, 4.927)	0.1055
$b$	0.1153	(0.088, 0.142)	4.3341	(3.885, 4.784)	0.1145
$c$	0.1686	(0.142, 0.195)	3.5663	(3.254, 3.879)	0.1681
$Q_{0.5}$	0.1056	(0.081, 0.131)	4.5120	(4.019, 5.005)	0.1048
$Q_{0.75}$	0.0882	(0.061, 0.116)	4.8797	(4.267, 5.492)	0.0872
$Q_{0.9}$	0.1251	(0.101, 0.149)	4.1667	(3.785, 4.548)	0.1245

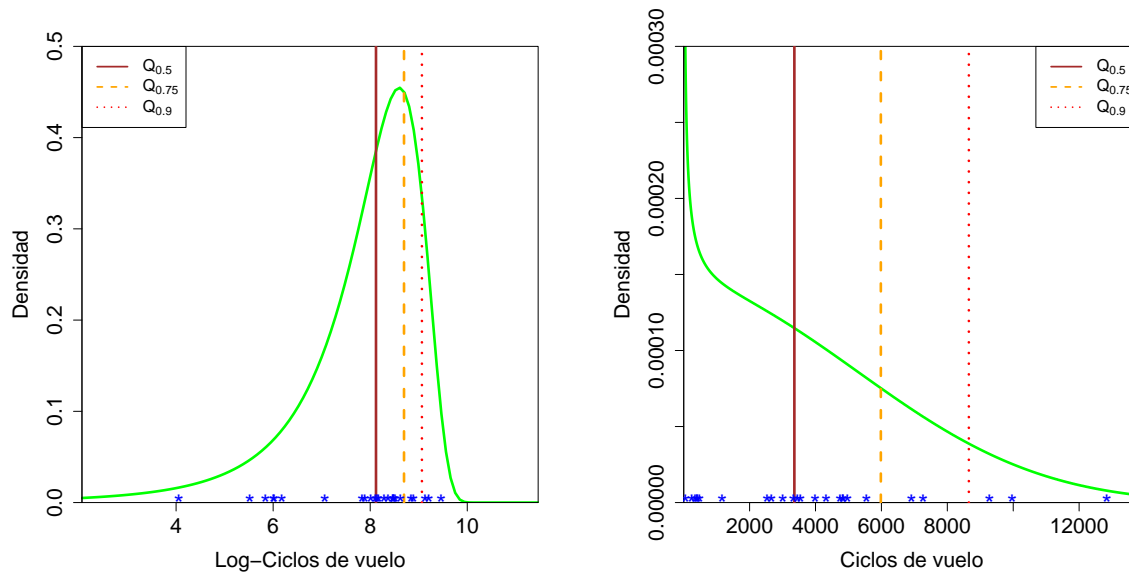
**Tabla 3.6:** Datos de actuador. Promedio de niveles y cuantiles del 0.95 de la Gama estimada para cada parámetro y sus intervalos Bootstrap respectivos.

## Recomendaciones

En la Figura 3.9 se pueden ver los datos en ciclos de vuelo, la densidad GVE transformada estimada y los cuantiles de interés estimados.

El nivel de verosimilitud  $\bar{k}_\theta$ , correspondiente al 95 % de confianza, de los intervalos de verosimilitud perfil de cada cuantil de interés es siempre menor que el nivel asintótico usual de  $k = 0.1465$ . Por esto los intervalos de verosimilitud de nivel  $\bar{k}_\theta$  que se propone usar, son más amplios que los de nivel asintótico  $k = 0.1465$ .

Para interpretar los cuantiles en la escala original basta tomar la exponencial de cada uno de ellos (que corresponde a la transformación inversa del logaritmo) y de sus intervalos. En la Tabla 3.7 aparecen los intervalos de verosimilitud en ciclos de vuelo. El intervalo [1911, 5180] de verosimilitud perfil con nivel  $\bar{k}_{Q_{0.5}} = 0.1056$  tiene una probabilidad de 0.95 de incluir a la mediana verdadera. Esto quiere decir que con alta probabilidad el 50 % de los actuadores puede fallar entre 1911 y 5180 ciclos de vuelo. Así mismo el intervalo de verosimilitud perfil de  $Q_{0.75}$  de nivel  $\bar{k}_\theta = 0.0882$  indica que el 75 % de los actuadores tendrá falla entre los ciclos 4015 y 8591. El intervalo de verosimilitud perfil de nivel



**Figura 3.9:** Datos de actuador. Densidad GVE estimada para el logaritmo de los ciclos de vuelo hasta la falla del actuador (izq.) y densidad GVE transformada a la escala original de los ciclos de vuelo (der.).

$\bar{k}_\theta = 0.1251$  del cuantil de 0.9 indica que con alta probabilidad el 90 % de los actuadores puede fallar entre 6509 y 13053 ciclos. Como se ve en la Tabla 3.7 los intervalos de nivel  $\bar{k}_\theta$  y  $k_\theta^*$  difieren en un par de unidades por lo que se espera que las coberturas sean similares. Se considerará de aquí en adelante solamente el nivel  $\bar{k}_\theta$ .

Parámetro / Cuantil	Intervalos con nivel $k = 0.1465$	Intervalos con nivel $\bar{k}_\theta$	Intervalos con nivel $k_\theta^*$
$a$	(3029.3, 6518.2)	(2913.3, 6693.3)	(2911.4, 6696.3)
$b$	(1.8, 3.4)	(1.8, 3.5)	(1.8, 3.5)
$c$	(0.9, 1.9)	(0.9, 1.9)	(0.9, 1.9)
$Q_{0.5}$	(2009.3, 5025.7)	(1911.6, 5179.8)	(1909.5, 5183.2)
$Q_{0.75}$	(4217.4, 8217.9)	(4015.1, 8590.5)	(4010.6, 8599.3)
$Q_{0.9}$	(6583.7, 12739.7)	(6509.7, 13052.6)	(6507.6, 13061.7)

**Tabla 3.7:** Datos de actuador. Intervalos con los niveles de verosimilitud 0.1465,  $\bar{k}_\theta$  y  $k_\theta^*$  para la falla de actuadores en la escala original.

Suponiendo la distribución Gama para la estadística de razón de verosimilitud de cada parámetro se obtuvieron niveles de verosimilitud más bajos e intervalos más amplios.

## 3.2. Prueba de esfuerzo a un transformador eléctrico

En Hirose y Lai (1997) se presenta un conjunto de datos surgidos de una prueba de esfuerzo realizada a transformadores eléctricos de aceite en el laboratorio de investigación de Hitachi (Hitachi Research Laboratory). La prueba consiste en someter un transformador a incrementos periódicos de voltaje hasta que el aceite se desajusta perdiendo sus propiedades aislantes. Cuando esto sucede se deja un tiempo de pausa para que el aceite recupere sus propiedades y se inicia de nuevo el incremento de voltajes. El interés de la compañía radica en conocer el voltaje mínimo bajo el cual el aceite pierde sus propiedades, ocasionando la falla del transformador. Además, conocer estos voltajes es relevante para establecer medidas de seguridad en subestaciones eléctricas.

La prueba inicia aplicando 140 kV e incrementando cada minuto 10 kV. En el momento del fallo se reporta el extremo derecho del intervalo en el que se observó la falla, en escala de 100 kV. Por ejemplo, si un componente falla en el intervalo (360 kV, 370 kV] se reporta el valor 3.7. La prueba se repitió 20 veces en las que se obtuvieron los siguientes voltajes hasta la falla,

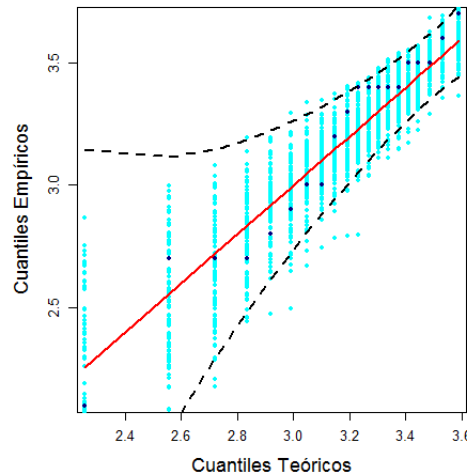
$$\begin{aligned} &2.1, 3.4, 3.7, 2.7, 3.2, 3.5, 2.7, 2.7, 3.4, 3.3, \\ &3.0, 2.9, 3.0, 3.4, 2.8, 3.5, 3.5, 3.4, 3.4, 3.6. \end{aligned} \quad (3.1)$$

El modelo usual para este tipo de datos es la distribución Weibull de mínimos de tres parámetros. Con esta distribución se suele interpretar al parámetro umbral como el voltaje mínimo que causa la falla en el transformador. El análisis del conjunto de datos (3.1) permitirá contrastar la propuesta aquí esbozada con lo realizado por Hirose y Lai (1997).

Como se propuso en el capítulo anterior lo correcto es usar la verosimilitud discretizada considerando una partición de la recta real construida con base en la resolución del instrumento de medición. En este caso la resolución corresponde al incremento del voltaje (10 kV) en escala 100 kV. Es decir, el ancho de los intervalos observados es de 0.1. Los intervalos se construyen tomando los datos reportados como extremo derecho y a estos valores se les resta 0.1 y se obtiene así el extremo izquierdo. A partir de estos intervalos se realiza la estimación del mejor modelo GVE usando la verosimilitud discretizada.

Los estimadores de máxima verosimilitud obtenidos fueron  $\hat{a} = 3.364$ ,  $\hat{b} = 0.271$  y  $\hat{c} = 0.163$ . De acuerdo al valor de  $\hat{c}$  el modelo que mejor parece ajustar a los datos es la distribución Fréchet, a diferencia de la Weibull que se suele usar para estos casos. En la Figura 3.10 se puede ver la gráfica cuantil-cuantil para el modelo Fréchet estimado. Se grafican la muestra observada y los puntos asociados a cincuenta simulaciones de muestras Fréchet  $(\hat{a}, \hat{b}, \hat{c})$  del mismo tamaño. Con base en esta gráfica el ajuste del modelo los datos es razonable.

En ciertos contextos es de interés estimar el parámetro umbral de la distribución Weibull por su interpretación. El parámetro umbral en este caso indicaría el voltaje bajo el



**Figura 3.10:** Datos de transformador eléctrico. Gráfica cuantil-cuantil de la DGVE estimada.

cual la probabilidad que un transformador falle en un voltaje menor a  $\mu$  es 0. La estimación del parámetro  $\mu$  se dificulta por tener una muestra pequeña, como se mencionó anteriormente. Sin embargo, es razonable y mucho más fácil estimar el voltaje bajo el cual habrá fallado una cantidad pequeña de transformadores. En este caso se consideró estimar el voltaje al que habrán fallado el 5%, 10% y 50% de los transformadores. Para realizar esta estimación se toman los estimadores de  $a$ ,  $b$  y  $c$  y se transforman a los cuantiles como se vio en la relación (1.9). Realizando la transformación de los parámetros a los cuantiles de interés se obtuvieron los emv  $\hat{Q}_{0.05} = 2.277$ ,  $\hat{Q}_{0.1} = 2.576$  y la mediana  $\hat{Q}_{0.5} = 3.211$ . Las verosimilitudes relativas perfil de cada parámetro se muestran en la Figura 3.11 junto con los intervalos de verosimilitud, los cuales se analizarán más adelante. En la Tabla 3.8 se reportan las medidas de proporción de las distancias del estimador de máxima verosimilitud a los extremos del intervalo de verosimilitud de nivel 0.1465. De acuerdo a la Tabla 3.8 y la Figura 3.11 se puede ver que la verosimilitud relativa perfil de los parámetros  $a$ ,  $c$  y  $Q_{0.5}$  son las más simétricas con respecto al estimador de máxima verosimilitud.

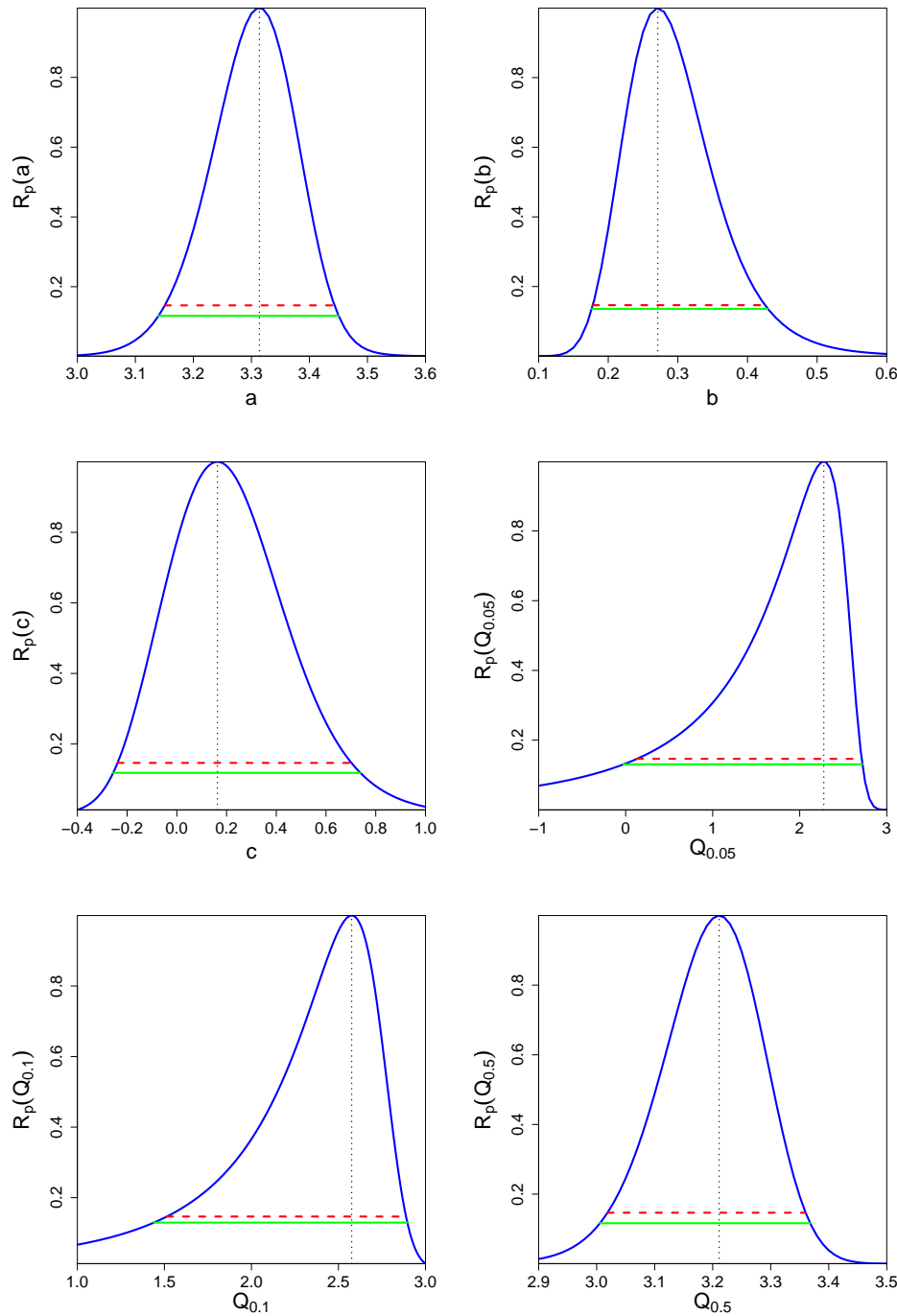
Se esperaría que la cobertura de los intervalos de verosimilitud de nivel 0.1465 sea menor de lo deseado del 95% por tener una muestra pequeña. Como se describió en la Sección 2.7, se simularon 30 grupos o tandas de  $M = 1000$  muestras de tamaño  $n = 20$  parecidas a las observaciones originales, suponiendo una DGVE con parámetros  $\hat{a}$ ,  $\hat{b}$ ,  $\hat{c}$  (que en este caso correspondió con una distribución Fréchet). Así se obtuvieron 30 muestras de estadísticas de razón de verosimilitud perfil  $\{W_1(\theta), \dots, W_M(\theta)\}$  para  $\theta = a, b, c, Q_{0.05}, Q_{0.1}, Q_{0.5}$ . Para cada parámetro de interés se estimó una distribución Gama y su cuantil de 0.95 de probabilidad,  $Q_{0.95}^G$ . Los niveles asociados a los cuantiles  $Q_{0.95}^G$  y el promedio de estos  $\bar{k}_\theta$  se muestran en la Tabla A.3 del apéndice.



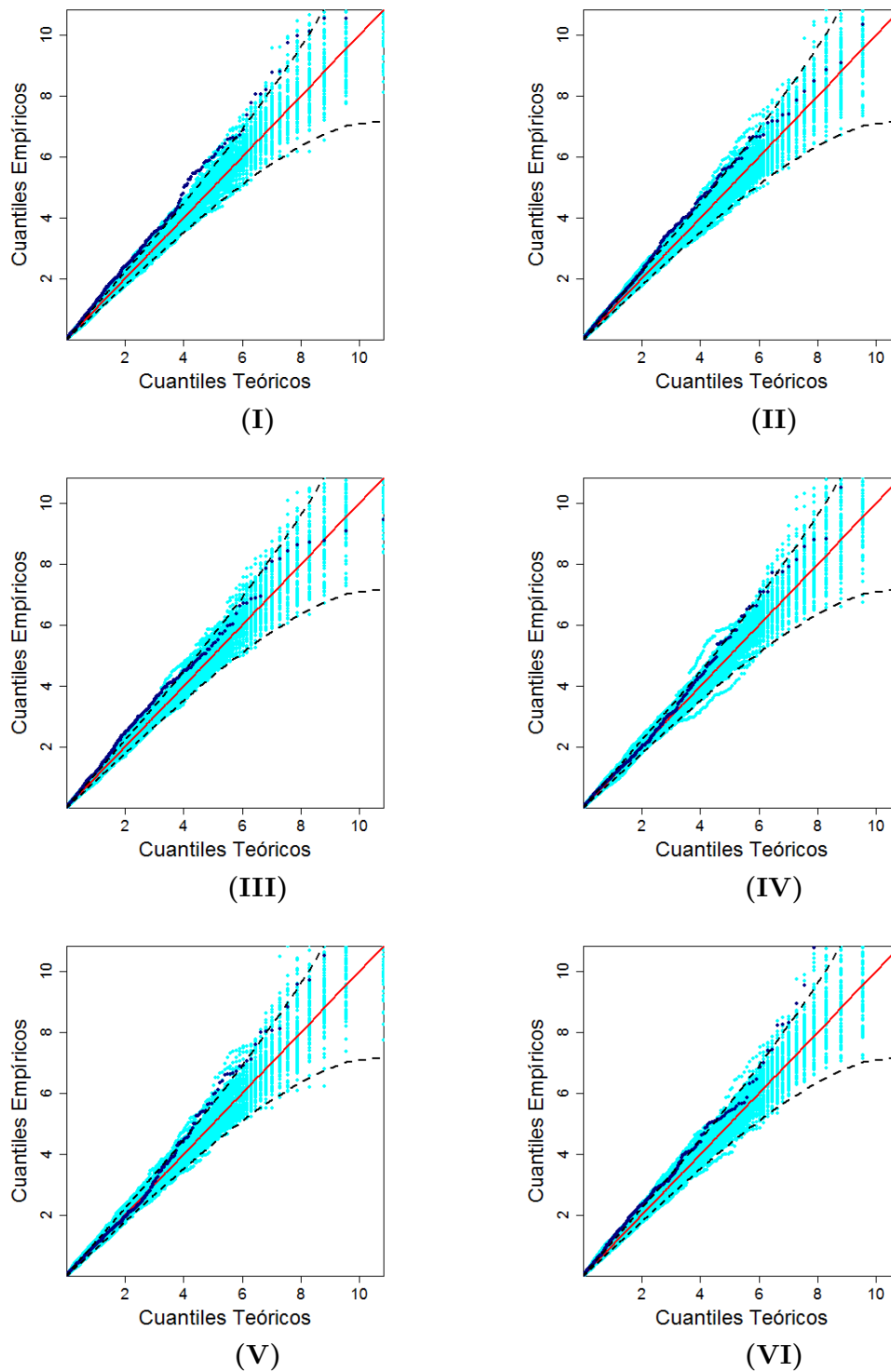
	$d_1/d$	$d_2/d$	$d_2/d_1$
$R_p(a)$	0.557	0.443	0.796
$R_p(b)$	0.377	0.623	1.651
$R_p(c)$	0.427	0.573	1.341
$R_p(Q_{0.05})$	0.832	0.168	0.202
$R_p(Q_{0.1})$	0.773	0.227	0.294
$R_p(Q_{0.5})$	0.564	0.436	0.774

**Tabla 3.8:** Distancia del estimador de máxima verosimilitud al extremo izquierdo ( $d_1$ ) y al extremo derecho ( $d_2$ ) del intervalo de nivel de verosimilitud 0.1465.

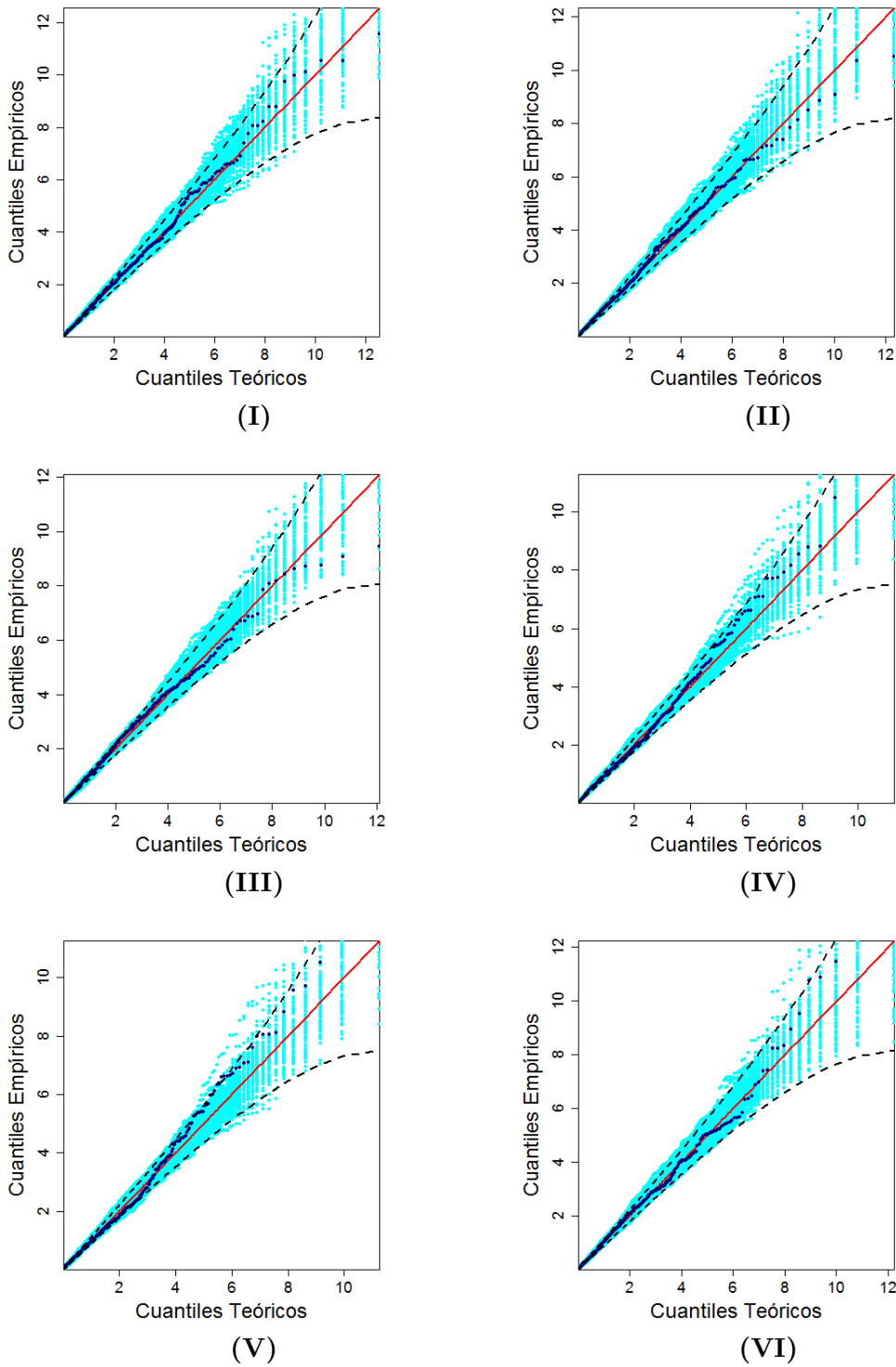
Para corregir las coberturas se estimaron los parámetros de la distribución Gama a partir de las muestras Bootstrap de la estadística de razón de verosimilitud para 30 tandas de simulaciones. En la Figura 3.13 se presentan las gráficas cuantil-cuantil Gama mostrando que, para una tanda, las estadísticas siguen razonablemente bien una distribución Gama. Además se da en esta gráfica una nube de 100 muestras simuladas de la distribución Gama estimada.



**Figura 3.11:** Datos de transformador eléctrico. Verosimilitudes relativas perfil de los parámetros  $a$ ,  $b$ ,  $c$  y de los cuantiles  $Q_{0.05}$ ,  $Q_{0.1}$  y  $Q_{0.5}$ . La línea vertical indica el estimador de máxima verosimilitud de cada parámetro. Con guiones (rojo) se muestra el intervalo de nivel asintótico  $k = 0.1465$  y con línea continua (verde) el intervalo de nivel  $\bar{k}_\theta$ , asociados al 95% de confianza.



**Figura 3.12:** Datos de transformador eléctrico. Gráficas cuantil-cuantil de la estadística de razón de verosimilitud de los parámetros: I)  $a$ , II)  $b$ , III)  $c$ , IV)  $Q_{0.05}$ , V)  $Q_{0.1}$  y VI)  $Q_{0.5}$  suponiendo distribución Ji-cuadrada en una tanda de 1000 simulaciones de muestras de tamaño 20.



**Figura 3.13:** Datos de transformador eléctrico. Gráficas cuantil-cuantil de la estadística de razón de verosimilitud de los parámetros: I)  $a$ , II)  $b$ , III)  $c$ , IV)  $Q_{0.05}$ , V)  $Q_{0.1}$  y VI)  $Q_{0.5}$  suponiendo distribución  $\text{Gama}(\hat{\eta}, \hat{\kappa})$  en una tanda de 1000 simulaciones de muestras de tamaño 20.

Habiendo verificado que la distribución Gama es razonable para describir a la estadística de razón de verosimilitud, se toman los parámetros estimados de la distribución Gama para calcular los niveles de verosimilitud correspondientes al 95 % de confianza. En la Tablas A.1 y A.2 se reportan los parámetros estimados de la distribución Gama en las 30 tandas de simulaciones. Usando los parámetros estimados se calculó el cuantil 0.95 de la distribución Gama, necesario para calcular el nivel de verosimilitud. En la Tabla A.3 se pueden ver los niveles de verosimilitud calculados para obtener los intervalos. Tomando el promedio de los niveles de verosimilitud  $\bar{k}_\theta$  se calcularon los intervalos de verosimilitud. Como los niveles  $\bar{k}_\theta$  en su mayoría son inferiores al 0.1465 asintótico, se tienen intervalos sean más amplios como se observa en la Tabla 3.9.

Parámetro / Cuantil	Intervalos con nivel $k = 0.1465$	Intervalos con nivel $\bar{k}_\theta$
$a$	(3.151, 3.443)	(3.140, 3.450)
$b$	(0.178, 0.425)	(0.176, 0.429)
$c$	(-0.238, 0.702)	(-0.256, 0.738)
$Q_{0.05}$	(0.131, 2.711)	(-0.023, 2.719)
$Q_{0.1}$	(1.514, 2.888)	(1.440, 2.896)
$Q_{0.5}$	(3.019, 3.360)	(3.006, 3.368)

**Tabla 3.9:** Datos de transformador eléctrico. Intervalos con el nivel de verosimilitud asintótica 0.1465 y con el nivel  $\bar{k}_\theta$  para los voltajes en los que falla el aislante del transformador.

Con los parámetros de la distribución Gama (ver Tablas A.1 y A.2) se calcularon los cuantiles del 95 %, en la Tabla 3.10 se reporta su promedio. Los niveles obtenidos con el promedio de los cuantiles son similares a los niveles de verosimilitud  $\bar{k}_\theta$ .

Parámetro / Cuantil	Promedio de niveles $\bar{k}_\theta$	Intervalo Bootstrap de $\bar{k}_\theta$	Promedio de cuantiles 0.95 Gama estimada	Intervalo Bootstrap de promedio de cuantiles
$a$	0.1164	(0.092, 0.14)	4.334	(3.922, 4.747)
$b$	0.1359	(0.107, 0.165)	4.002	(3.610, 4.393)
$c$	0.1182	(0.091, 0.146)	4.0047	(3.657, 4.352)
$Q_{0.05}$	0.1307	(0.109, 0.152)	3.8976	(3.538, 4.257)
$Q_{0.1}$	0.1292	(0.107, 0.152)	3.9857	(3.643, 4.329)
$Q_{0.5}$	0.1164	(0.093, 0.14)	4.3120	(3.955, 4.669)

**Tabla 3.10:** Datos de transformador eléctrico. Promedio de niveles y cuantiles del 0.95 de la Gama estimada para cada parámetro y sus intervalos Bootstrap respectivos.

## Recomendaciones y comparación con análisis previos

Para los datos del transformador eléctrico, el intervalo de verosimilitud perfil de nivel  $\bar{k}_\theta = 0.1307$  para el cuantil  $Q_{0.05}$  es  $[-0.023, 2.719]$ . Como el extremo izquierdo es negativo, se suele truncar el intervalo y darlo para valores posibles del voltaje como  $[0, 2.719]$ . Este intervalo aleatorio tiene probabilidad 0.95 de incluir al verdadero cuantil. Esto quiere decir que el 5 % de las fallas del transformador se van a dar para un voltaje entre 0 kV y 2.71 kV con una confianza del 95 %. De manera análoga, el intervalo de verosimilitud perfil para el cuantil  $Q_{0.1}$  de nivel  $\bar{k}_\theta = 0.1292$  indica que el 10 % de los transformadores va a fallar entre 1.5 kV y 2.8 kV con una probabilidad de 0.95. Por último, el intervalo del cuantil  $Q_{0.5}$  de nivel  $\bar{k}_\theta = 0.1164$  indica que la mitad de las fallas se van a dar para voltajes entre 3 kV y 3.3 kV.

En Hirose y Lai (1997) se considera la verosimilitud discretizada realizando una partición arbitraria de la recta real. En este caso los autores decidieron sumar 0.1 a cada observación para construir la partición. Sin embargo, como se mencionó anteriormente, cada observación es reportada como el extremo derecho del intervalo en el que se obtuvo. Por lo que lo más natural es considerar para la observación  $x_i$  el intervalo  $(x_i - 0.1, x_i]$ . Lo anterior va en concordancia con la propuesta de Liu et al. (2015), donde la manera natural de generar la partición es a partir de la precisión con la que fueron obtenidas las observaciones o del error de redondeo de los datos.

En el transcurso del análisis realizado por Hirose y Lai (1997) usando la DGVE obtienen que es posible que el modelo que mejor describe los datos no necesariamente sea el Weibull. Posiblemente el modelo Gumbel sería una mejor opción. Sin embargo este último lo descartan por asignar una probabilidad positiva a voltajes negativos. Aquí se considera que esta decisión es cuestionable ya que puede arreglarse adicionando la condición de que el modelo elegido otorgue una probabilidad despreciable para valores negativos. El modelo Fréchet obtenido en esta sección asigna 0.0012 de probabilidad a los voltajes negativos, que es bastante bajo.

El motivo principal de querer estimar un modelo Weibull es la interpretación que se puede dar al parámetro umbral, que en este caso indicaría el mínimo voltaje que soportan el aceite antes de perder sus propiedades. La estimación de cuantiles permite estimar la proporción de veces que falla un transformador a cierto voltaje. Esto permite dar noción de la garantía que se puede dar sobre su funcionamiento. Una ventaja de la reparametrización en cuantiles es la posibilidad de obtener intervalos de verosimilitud para estimarlos. A través de la distribución Gama de la estadística de razón de verosimilitud propuesta, se puede asociarles un nivel de confianza.

En la literatura científica, para corregir la probabilidad de los intervalos de confianza es común el uso de las correcciones tipo Bartlett, por tener un mejor ajuste a la distribución Ji-cuadrada. Hirose y Lai (1997) usan las correcciones de Bartlett, sin embargo este método requiere el cálculo de un valor esperado el cual debe ser calculado por un método Bootstrap.

En contraste, aquí al usar la distribución Gama propuesta se tiene la ventaja de no tener que hacer cálculos exhaustivos. La propuesta presentada permite obtener de manera sencilla los estimadores de la distribución Gama que mejor describe la distribución de la estadística  $W(\theta)$  en muestras pequeñas. Esto permitirá fácilmente obtener el valor deseado para las coberturas de intervalos de verosimilitud perfil de parámetros de interés.

### 3.3. Máximos anuales de eventos de lluvia en Chamela

En esta sección se analizan los promedios en eventos de lluvia (PEL) tomados en la Estación de Biología Chamela de la UNAM tomados de 1983 a 2013 y analizados en la tesis de Ortega Ulloa (2015). Las mediciones se obtienen de un pluviógrafo el cual registra la cantidad de lluvia en un periodo de tiempo. Para obtener eventos independientes se consideraron los periodos de días consecutivos de lluvia como eventos de lluvia (EL). La cantidad de lluvia obtenida en cada evento se divide entre el número de días que duró el evento. A esta cantidad se le llama promedio en eventos de lluvia (PEL). Cada evento de lluvia tiene asociado una resolución que puede depender de la persona que tomó la medición. Se reporta el PEL máximo de cada año junto con su resolución. En Ortega Ulloa (2015) se estimó una DGVE de máximos a los PEL. Se reportó que los estimadores de la GVE correspondían a una distribución Fréchet de máximos con parámetro umbral  $\hat{\mu} = -63.79$ , de escala  $\hat{\sigma} = 127.02$  y de forma  $\hat{\beta} = 4.11$ . Los parámetros anteriores corresponden a los parámetros de la DGVE de mínimos  $\hat{a} = -63.23$ ,  $\hat{b} = 30.91$  y  $\hat{c} = 0.24$ . Los programas realizados para este documento fueron estructurados para la DGVE de mínimos, basta tomar el negativo de los datos para realizar la estimación.

Usando la verosimilitud discretizada con intervalos dados por  $(x_i - \varepsilon_i, x_i + \varepsilon_i]$ , donde  $\varepsilon_i$  es la resolución correspondiente a la observación  $x_i$ , se obtuvo un modelo Fréchet con parámetros  $\hat{a} = -125.02$ ,  $\hat{b} = 51.07$  y  $\hat{c} = 0.21$ . Para el modelo estimado en la Figura 3.14 se presenta la gráfica cuantil-cuantil con la distribución Fréchet (o equivalentemente la DGVE correspondiente), evidenciando que este modelo es razonable para el negativo del máximo de los PEL. En la Figura 3.15 se presenta la densidad GVE estimada.

En este caso es de interés estimar cuantiles grandes de la distribución de los máximos de lluvias en la región. En este caso como se consideró el negativo de los datos lo sensato sería estimar cuantiles pequeños, por lo que se propuso estimar los cuantiles del 10 %, 25 % y 50 %. A partir de la transformación de los parámetros a cuantiles 1.9, se obtiene de los estimadores obtenidos que los estimadores de los cuantiles deseados son,  $\hat{Q}_{0.1} = -271.662$ ,  $\hat{Q}_{0.25} = -197.686$  y  $\hat{Q}_{0.5} = -144.485$ , dados en milímetros de lluvia. En la Figura 3.16 se ven las gráficas de las verosimilitudes relativas perfil de cada parámetro. Como se muestra en la Tabla 3.11 la verosimilitud relativa más simétrica es la del parámetro  $c$ .

En la Figura 3.17 se muestran las gráficas cuantil-cuantil de una tanda de la estadística

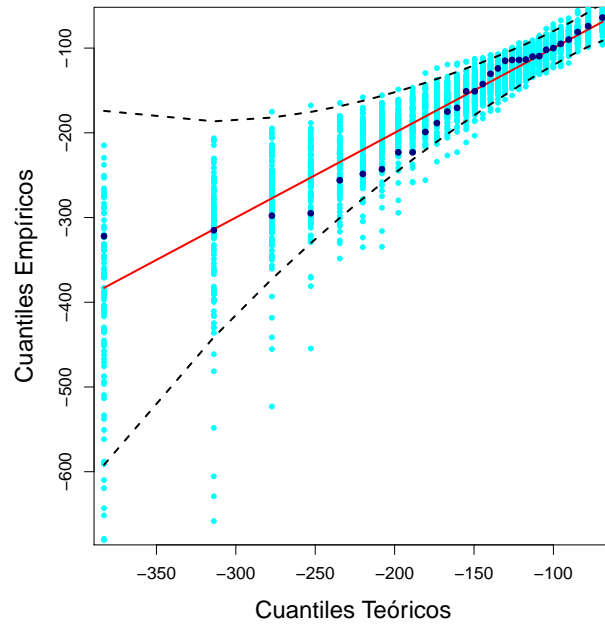


Figura 3.14: Máximos de lluvias. Gráfica cuantil-cuantil con modelo GVE estimado a datos de lluvias.

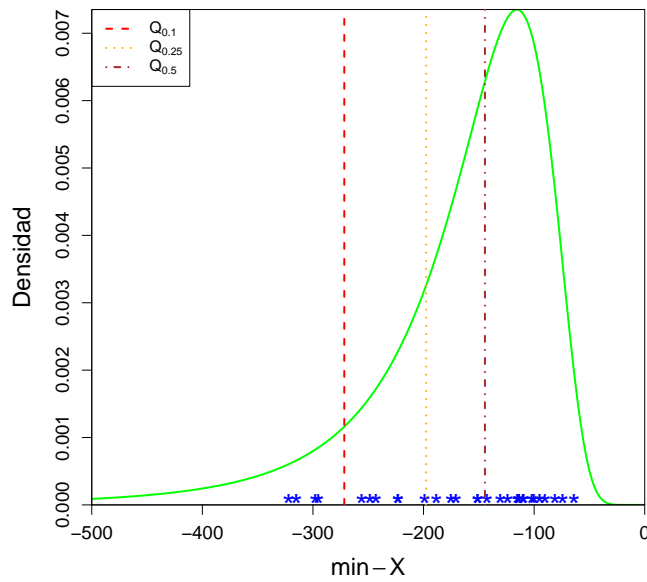


Figura 3.15: Máximos de lluvias. Densidad GVE ajustada al negativo de los PEL y cuantiles de interés.

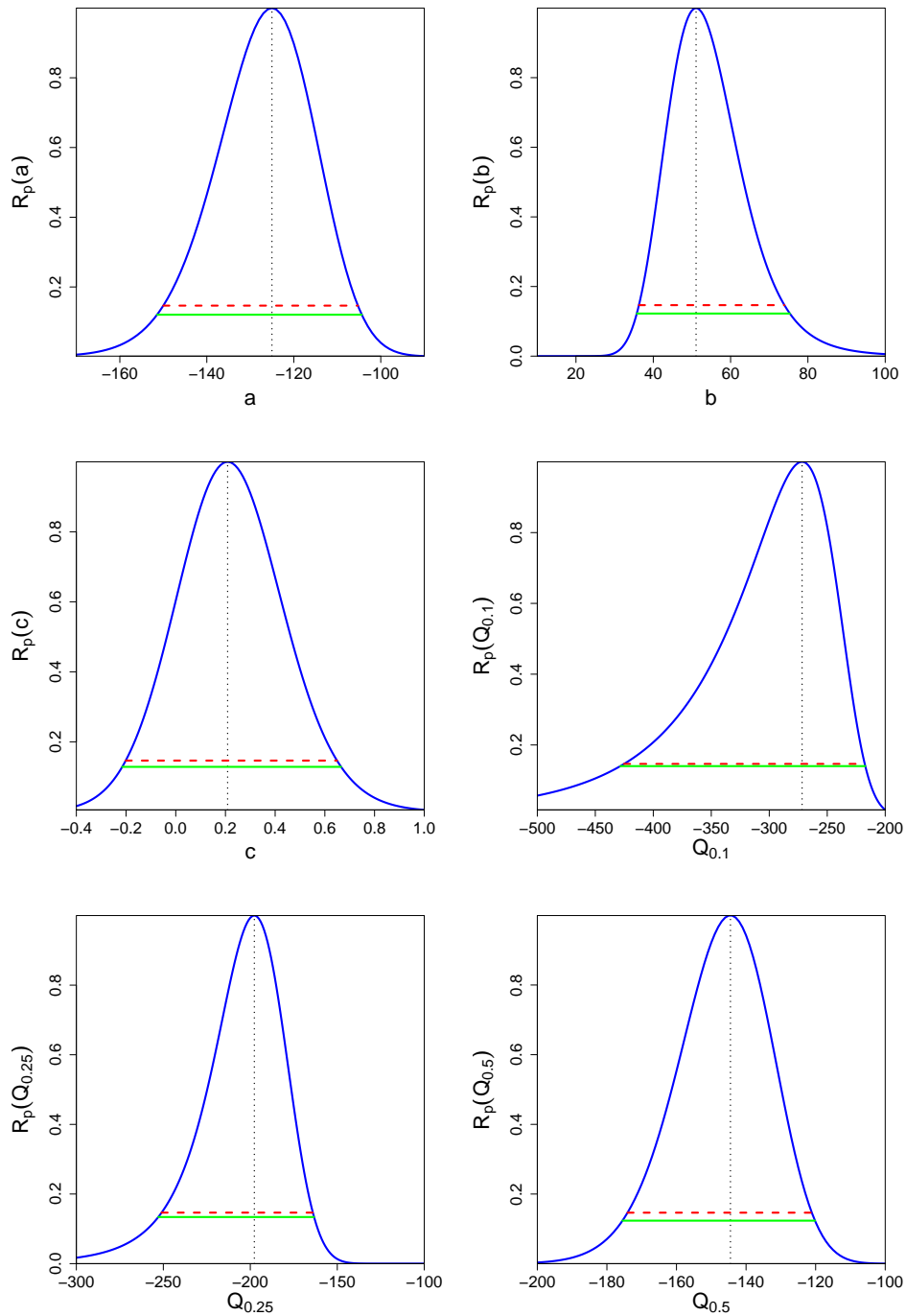


	$d_1/d$	$d_2/d$	$d_2/d_1$
$R_p(a)$	0.558	0.442	0.791
$R_p(b)$	0.393	0.607	1.546
$R_p(c)$	0.482	0.518	1.074
$R_p(Q_{0.1})$	0.740	0.260	0.352
$R_p(Q_{0.25})$	0.613	0.387	0.6315
$R_p(Q_{0.5})$	0.558	0.442	0.791

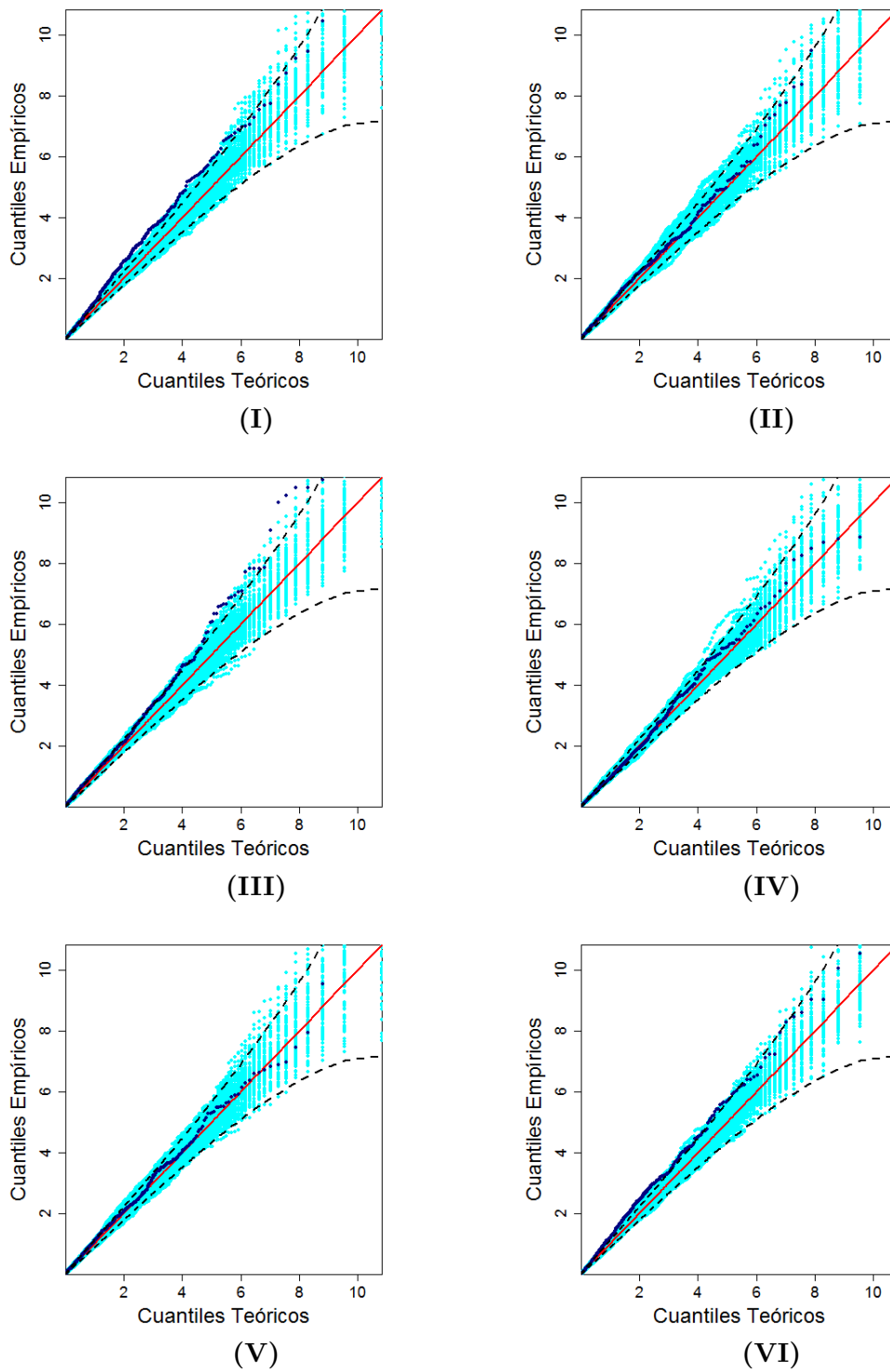
**Tabla 3.11:** Distancia del estimador de máxima verosimilitud al extremo izquierdo ( $d_1$ ) y al extremo derecho ( $d_2$ ) del intervalo de nivel de verosimilitud 0.1465.

de razón de verosimilitud perfil para cada parámetro. Para el parámetro  $a$  la muestra de la estadística cae fuera de la nube de simulaciones de la distribución Ji-cuadrada asintótica de un grado de libertad. Esto sugiere que no es la distribución que mejor lo describe. Para los parámetros  $c$  y  $Q_{0.5}$  los puntos de la muestra de  $W(\theta)$  no se acercan a la línea de 45 grados, pero está dentro de los límites de la nube. Lo anterior hace suponer que las coberturas de los intervalos de verosimilitud de nivel 0.1465 van a ser menores a 95 %.

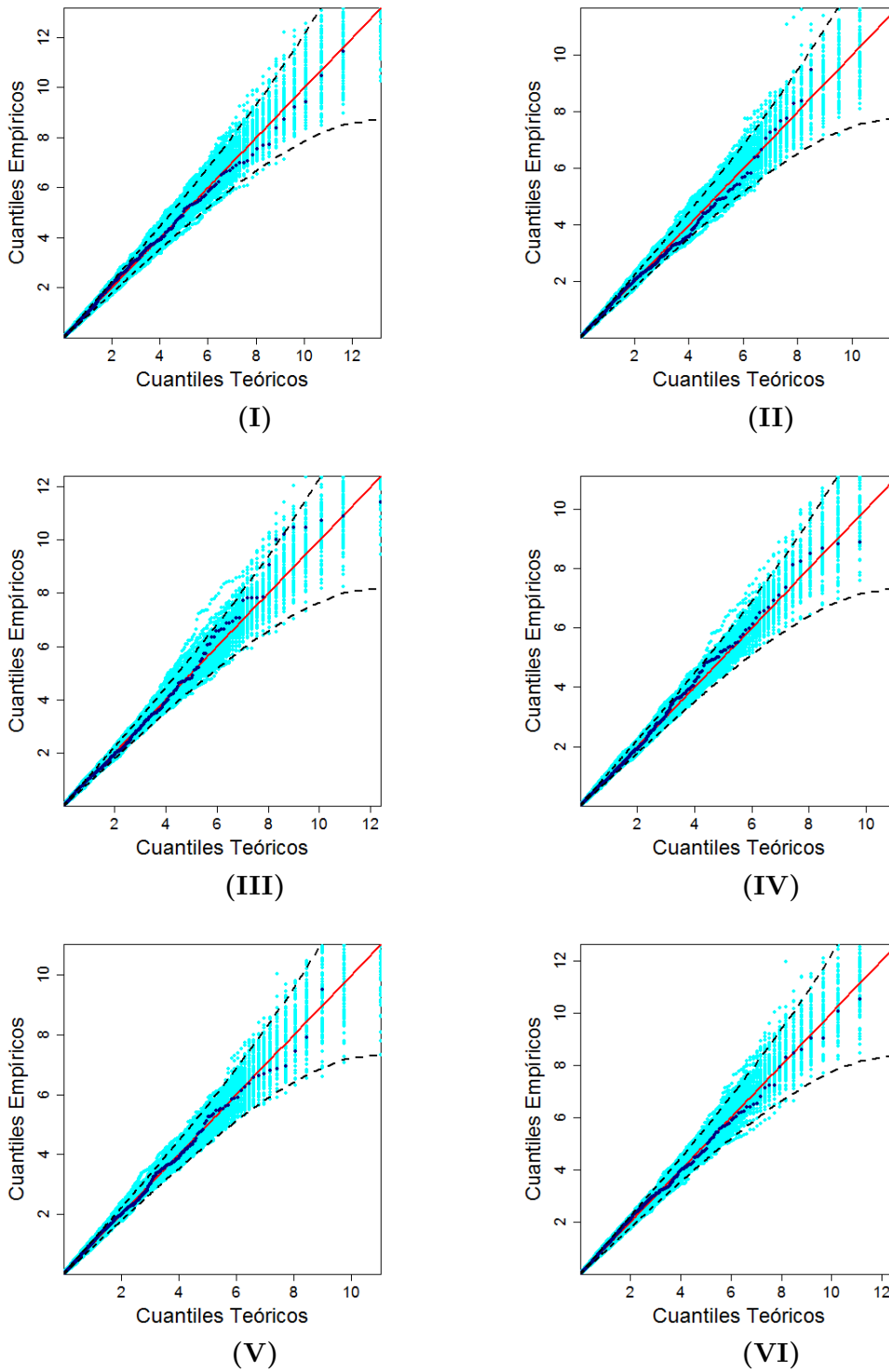
De manera similar a los ejemplos anteriores, se estimaron los parámetros de la distribución Gama para cada tanda de simulaciones y de muestras Bootstrap de la estadística de cada parámetro de la DGVE. Los estimadores de la distribución Gama obtenidos se reportan en las Tablas A.4 y A.5. Para una de las tandas de simulaciones se presentan las gráficas cuantil-cuantil en la Figura 3.18 para la estadística de cada parámetro con la distribución Gama estimada. Considerando la distribución Gama, se puede ver que la muestra de cada estadística se acerca a la recta de 45 grados por lo que se espera que las coberturas de los intervalos de verosimilitud sea la deseada. Los parámetros estimados se usaron para calcular el cuantil 95 %, con el que se calcula el nivel de verosimilitud correspondiente al 95 % de confianza.



**Figura 3.16:** Máximos de lluvias. Verosimilitudes relativas de los parámetros  $a$ ,  $b$ ,  $c$  y de los cuantiles  $Q_{0.1}$ ,  $Q_{0.25}$  y  $Q_{0.5}$ . La línea vertical indica el estimador de máxima verosimilitud de cada parámetro. Con guiones (rojo) se muestra el intervalo de nivel asintótico  $k = 0.1465$  y con línea continua (verde) el intervalo de nivel  $\hat{k}_\theta$ , asociados al 95% de confianza.



**Figura 3.17:** Máximos de lluvias. Gráficas cuantil-cuantil de la estadística de razón de verosimilitud de los parámetros de la DGVE: I)  $a$ , II)  $b$ , III)  $c$ , IV)  $Q_{0.1}$ , V)  $Q_{0.25}$  y VI)  $Q_{0.5}$  suponiendo distribución Ji-cuadrada en una tanda de 1000 simulaciones de muestras de tamaño 25.



**Figura 3.18:** Máximos de lluvias. Gráficas cuantil-cuantil de la estadística de razón de verosimilitud de los parámetros: I)  $a$ , II)  $b$ , III)  $c$ , IV)  $Q_{0.1}$ , V)  $Q_{0.25}$  y VI)  $Q_{0.5}$  suponiendo distribución Gama en una tanda de 1000 simulaciones de muestras de tamaño 25.

Con el promedio de los niveles  $\bar{k}_\theta$  y el nivel asintótico 0.1465 se calcularon los intervalos de verosimilitud. En la Tabla 3.12 se reportan los intervalos que se obtienen al considerar que la muestra proviene de la GVE de mínimos. Como se mencionó anteriormente, hace falta multiplicar por  $-1$  los intervalos de los cuantiles  $Q_{0.1}$ ,  $Q_{0.25}$  y  $Q_{0.5}$  para interpretarlos como  $Q_{0.9}$ ,  $Q_{0.75}$  y  $Q_{0.5}$ , respectivamente, en la distribución de máximos.

Parámetro / Cuantil	Intervalos con nivel $k = 0.1465$	Intervalos con nivel $\bar{k}_\theta$
$a$	(-150.000 , -105.263)	(-151.436 , -104.362)
$b$	(36.286 , 73.926)	(35.733 , 75.336)
$c$	(-0.201, 0.649 )	(-0.215 , 0.665)
$Q_{0.1}$	(-425.197, -217.645)	(-428.428 , -217.181)
$Q_{0.25}$	(-250.990, -164.026)	(-252.877 , -163.342)
$Q_{0.5}$	(-174.067, -121.097)	(-175.519 , -120.187)

**Tabla 3.12:** Máximos de lluvias. Intervalos con el nivel de verosimilitud asintótica 0.1465 y con el nivel  $\bar{k}_\theta$  para las lluvias en la estación de Chamela obtenidos con la GVE de mínimos.

Se desea interpretar los cuantiles por lo que en la Tabla 3.13 se realiza la transformación a la escala de máximos.

Parámetro / Cuantil	Intervalos con nivel $k = 0.1465$	Intervalos con nivel $\bar{k}_\theta$
$Q_{0.9}$	(217.645,425.197)	(217.181,428.428)
$Q_{0.75}$	(164.026,250.990)	(163.342,252.877 )
$Q_{0.5}$	(121.097,174.067)	(120.187,175.519)

**Tabla 3.13:** Máximos de lluvias. Intervalos con el nivel de verosimilitud asintótica 0.1465 y con el nivel  $\bar{k}_\theta$  para máximos de lluvias en la estación de Chamela.

## Interpretación de resultados

En la Tabla 3.13 se muestran los intervalos correspondientes para cada parámetro. En particular, el intervalo de verosimilitud perfil de la mediana de nivel  $\bar{k}_\theta = 0.1236$  sugiere que el 50% de los eventos de lluvias anuales se espera que tengan un PEL entre 120.2 y 175.5 con una probabilidad de 0.95. El intervalo de verosimilitud de nivel  $\bar{k}_\theta = 0.1339$  del cuantil  $Q_{0.75}$  indica que tres cuartas partes de los eventos de lluvia pueden tener un PEL entre 163.3 y 252.9. Mientras el intervalo de verosimilitud de nivel  $\bar{k}_\theta = 0.1402$  del cuantil 0.9 sugiere que el 90% de los eventos de lluvia pueden tener un PEL entre 217.1 y 428.4 con una probabilidad de 0.95. Para cada cuantil se obtuvieron intervalos más amplios usando

el promedio de los niveles  $\bar{k}_\theta$  que con el nivel asintótico 0.1465. Considerar intervalos más angostos en este caso podría conllevar a omitir eventos extremos que puedan generar desastres naturales.

En la Tabla 3.14 se reportan los niveles usados para analizar la cobertura de los intervalos de verosimilitud, así como sus intervalos Bootstrap. Los niveles promedio  $\bar{k}_\theta$  obtenidos son inferiores al  $k = 0.1465$ , por lo que los intervalos de verosimilitud perfil para cada parámetro fueron más amplios.

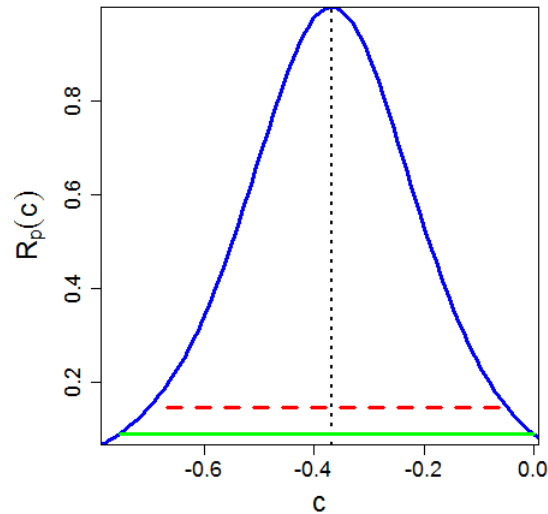
Parámetro / Cuantil	Promedio de niveles $\bar{k}_\theta$	Intervalo Bootstrap de $\bar{k}_\theta$	Promedio de cuantiles 0.95 Gama estimada	Intervalo Bootstrap de promedio de cuantiles
$a$	0.1204	(0.094, 0.147)	4.2464	(3.797, 4.696)
$b$	0.1223	(0.095, 0.150)	4.2149	(3.766, 4.664)
$c$	0.1285	(0.108, 0.149)	4.1098	(3.780, 4.440)
$Q_{0.1}$	0.1402	(0.121, 0.159)	3.9334	(3.663, 4.204)
$Q_{0.25}$	0.1339	(0.109, 0.159)	4.031	(3.655, 4.406)
$Q_{0.5}$	0.1236	(0.096, 0.151)	4.1943	(3.732, 4.657)

**Tabla 3.14:** Máximos de lluvias. Promedio de niveles y cuantiles del 0.95 de la Gama estimada para cada parámetro y sus intervalos Bootstrap respectivos.

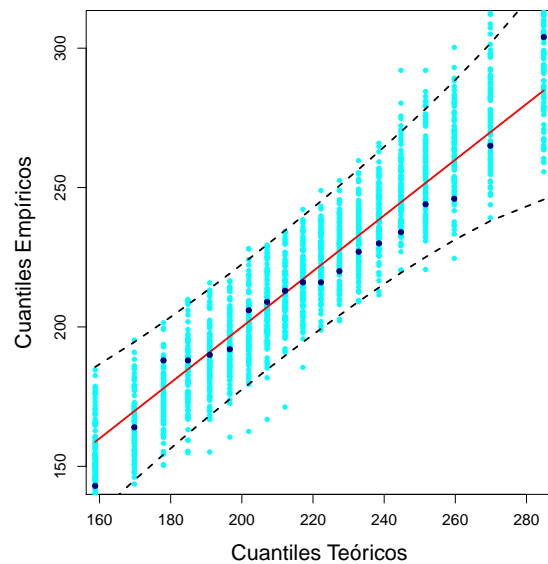
### 3.4. Tiempo de espera hasta la aparición de tejido cancerígeno

Considérense nuevamente los datos presentados en el Ejemplo 2.5 de la Sección 2.1. Los parámetros estimados con la verosimilitud discretizada de la DGVE para estos datos fueron  $\hat{a} = 230.86$ ,  $\hat{b} = 39.93$  y  $\hat{c} = -0.37$ .

Para el parámetro de forma  $c$  de la DGVE, el intervalo de verosimilitud de nivel  $\bar{k}_\theta = 0.091$  asociado al 95 % de confianza es  $[-0.75, -7.65 \times 10^{-5}]$ , como se ve en la Figura 3.19. El intervalo no contiene el valor  $c = 0$  y sustenta sólo valores negativos para  $c$ . Esto ratifica que entre las distribuciones que componen la DGVE la que mejor describe los datos es la distribución Weibull de tres parámetros. En la Figura 3.20 se presenta la gráfica cuantil-cuantil de la DGVE estimada que muestra que este modelo es razonable para los datos.



**Figura 3.19:** Datos de aparición de tejido cancerígeno. Verosimilitud relativa perfil de  $c$ . La línea vertical punteada indica el estimador de máxima verosimilitud. Con guiones (rojo) se muestra el intervalo de nivel asintótico  $k = 0.1465$  y con línea continua (verde) el intervalo de nivel  $\bar{k}_\theta$ , asociados al 95 % de confianza.

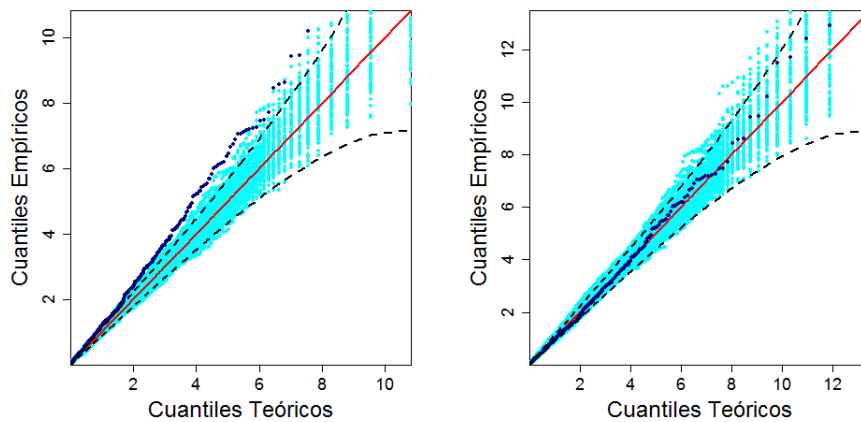


**Figura 3.20:** Datos de aparición de tejido cancerígeno. Gráfica cuantil-cuantil de los tiempos hasta la aparición de tejido cancerígeno con nube de simulaciones de la DGVE estimada.

De acuerdo al tamaño de muestra  $n = 19$  se sabe que el cuantil más pequeño que se puede estimar razonablemente bien con esta muestra es el de probabilidad  $\frac{1}{n+1} = 0.05$ .

Por ello, este cuantil  $Q_{0.05}$  puede ser un parámetro de interés que será más fácil de estimar que el umbral  $\mu$ .

En la Figura 3.21 se presentan las gráficas cuantil-cuantil con la muestra Bootstrap de la estadística de razón de verosimilitud perfil de  $Q_{0.05}$ . A la izquierda se muestra una nube de simulaciones de la distribución Ji-cuadrada con un grado de libertad. Esta gráfica evidencia que esta distribución no es razonable para la muestra de la estadística  $W(Q_{0.05})$ . A la derecha se muestra una nube de simulaciones de la distribución Gama estimada en la que se puede ver, en contraste, que esta distribución sí es razonable para la estadística de razón de verosimilitud de  $Q_{0.05}$ .

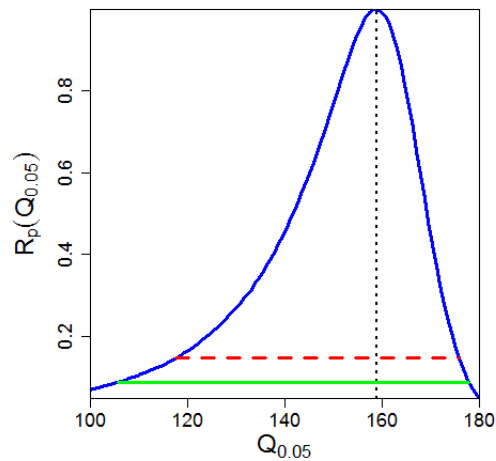


**Figura 3.21:** Datos de aparición de tejido cancerígeno. Gráficas cuantil-cuantil de la estadística de razón de verosimilitud de  $Q_{0.05}$ . A la izquierda con nube de 1000 simulaciones de la distribución Ji-cuadrada asintótica y a la derecha con 1000 simulaciones de la distribución Gama estimada propuesta.

La gráfica de la verosimilitud relativa perfil del cuantil  $Q_{0.05}$  se muestra en la Figura 3.22 con los intervalos de nivel  $k = 0.1465$  y  $\bar{k}_\theta = 0.087$ . El intervalo de verosimilitud correspondiente al nivel  $k = 0.1465$  es  $[117.57, 175.72]$  y el de nivel  $\bar{k}_\theta = 0.087$  es  $[105.80, 177.77]$ .

Nótese que la verosimilitud perfil de  $Q_{0.05}$  es mucho menos asimétrica que la del umbral  $\mu$  que se mostró en la Figura 2.7. Esto facilita la estimación por intervalo del parámetro de interés y su interpretación.





**Figura 3.22:** Datos de aparición de tejido cancerígeno. Verosimilitud relativa perfil de  $Q_{0.05}$ . La línea vertical indica el estimador de máxima verosimilitud. Con guiones (rojo) se muestra el intervalo de nivel asintótico  $k = 0.1465$  y con línea continua (verde) el intervalo de nivel  $\bar{k}_{\theta}$ , asociados al 95 % de confianza.

### Interpretación de resultados y discusión

Como el nivel  $\bar{k}_{\theta}$  para el cuantil  $Q_{0.05}$  es menor que el teórico 0.1465, el intervalo de verosimilitud perfil de  $Q_{0.05}$  es más amplio que el intervalo asintótico. Una posible interpretación de este intervalo para el cuantil  $Q_{0.05}$  de probabilidad 0.05 es que a lo más el 5% de las ratas presentarán cáncer antes de 115 días.

Si se usa el intervalo asintótico se podría cometer el error de sobre-estimar el tiempo hasta la aparición de cáncer para el  $Q_{0.05}$  de las ratas, siendo que podrían presentarlo desde el día 105.



## Conclusiones generales

La mayoría de los problemas que surgen en la estimación por máxima verosimilitud para variables aleatorias continuas cuya densidad tiene un parámetro umbral y singularidades se dan por haber usado la función de verosimilitud definida como el producto de las densidades marginales correspondientes a la muestra observada, que para este tipo de variables aleatorias es incorrecta. En contraste, la verosimilitud discretizada se apega más de cerca a la definición original de la verosimilitud dada por Sir. Ronald Fisher como proporcional a la probabilidad conjunta de la muestra observada. Además la verosimilitud discretizada propuesta considera naturalmente a la resolución con la que se midieron los datos.

Para ser eficientes, los métodos de estimación numéricos por máxima verosimilitud dependen principalmente del método de optimización y de los valores iniciales. Los valores iniciales aquí propuestos a partir de la relación entre las familias que componen la GVE y el uso de la verosimilitud discretizada con resolución son prácticos y permiten estimar fácilmente los parámetros de la DGVE.

La distribución Gama que se propone considerar aquí para la distribución Bootstrap de la estadística de razón de verosimilitud en muestras simuladas como la observada constituye un método flexible, útil y poderoso. Con ella se puede identificar el nivel de verosimilitud que está asociado al nivel de confianza deseado para el intervalo de estimación del parámetro de interés de la DGVE cuando la muestra es pequeña y los resultados asintóticos de máxima verosimilitud no son aplicables. Cuando la muestra es grande, la propuesta coincide con los resultados asintóticos de la Teoría de Máxima Verosimilitud. Por ello, la metodología propuesta aquí resulta práctica y útil.

Como trabajo futuro queda explorar la propuesta de estimación dada para el caso de muestras pequeñas de otras distribuciones regulares y no regulares. También resta, evaluar la sensibilidad de la propuesta y de  $\bar{k}_\theta$  frente a pequeños cambios en el estimador de máxima verosimilitud  $\hat{\theta}$  usado para simular las  $H$  muestras provenientes de la distribución estimada  $F(x; \hat{\theta})$  para la muestra observada. Con base en lo explorado en esta tesis,

seguramente, la metodología estadística propuesta seguirá siendo práctica, eficiente y recomendable en otras situaciones con muestras pequeñas.



## Tablas de resultados de simulaciones

A continuación se reportan los resultados de 30 grupos o tandas de simulaciones para los ejemplos del transformador eléctrico y de eventos de lluvia de Chamela, presentados en la Sección 3. Se dan las tablas de los parámetros de la distribución Gama estimada propuesta para describir la estadística de razón de verosimilitud y los niveles de verosimilitud asociados al 95 % de confianza estimados a partir de la distribución Gama estimada.

## A.1. Pruebas de esfuerzo a transformadores

Tanda	Parámetro					
	<i>a</i>		<i>b</i>		<i>c</i>	
	$\alpha$	$\beta$	$\alpha$	$\beta$	$\alpha$	$\beta$
1	1.1077	1.0030	1.0562	1.0582	1.2096	0.9869
2	1.1678	1.0150	1.1545	1.0324	1.1427	0.9880
3	1.1454	1.0771	1.0381	1.0221	1.0791	1.0070
4	1.1498	1.0064	1.0787	1.0162	1.0883	1.0289
5	1.0898	1.0647	1.0973	0.9966	1.1453	1.0038
6	1.0529	0.9848	1.0261	0.9873	1.1102	1.0907
7	1.1590	0.9410	1.0677	0.9902	1.0454	0.9578
8	1.0985	0.9955	0.9864	0.9320	0.9650	1.0109
9	1.1506	1.0284	1.0670	0.9943	1.1220	1.0208
10	1.0751	1.0065	1.1243	1.0376	1.1565	0.9431
11	1.2114	0.9912	1.1067	1.0440	1.1887	0.9559
12	1.2746	0.9785	1.1239	1.0772	1.1163	0.9161
13	1.0856	1.0342	1.0058	1.0378	1.1053	0.9962
14	1.0526	1.1088	1.0947	1.0061	1.0909	0.9857
15	1.1565	1.0021	1.0435	1.1158	1.1624	1.0109
16	1.0603	0.9672	1.0434	1.0533	1.0632	1.0145
17	1.0925	0.9799	1.0369	1.0137	1.1531	0.9238
18	1.0588	0.9935	1.0153	1.0069	1.0597	1.0019
19	1.0840	1.0008	0.9727	1.0422	1.0957	0.9779
20	1.0931	0.9366	1.0114	1.0018	1.1234	1.0107
21	1.1089	0.9535	1.0167	1.0689	1.1786	1.0447
22	1.1082	1.0107	0.9909	1.0267	1.2473	0.9952
23	1.1936	1.0391	1.0366	0.9302	1.0850	1.0556
24	1.1454	1.0420	1.0171	1.0466	1.1567	0.9979
25	1.2091	1.0618	1.1456	0.9683	1.0390	1.0218
26	1.1317	0.9721	0.9286	1.0229	1.0853	1.0126
27	1.1070	1.0124	0.9624	0.9805	1.1329	1.0191
28	1.0494	1.0058	1.0591	0.9870	1.0604	1.0572
29	1.1780	1.0484	0.9890	0.9839	1.1125	1.0085
30	1.1831	1.0287	1.1256	0.9813	1.1472	1.0382

**Tabla A.1:** Datos de transformador eléctrico. Parámetros  $\alpha$ ,  $\beta$  estimados de la distribución Gama para 30 tandas de 1000 simulaciones de muestras de tamaño 20 para los parámetros  $a$ ,  $b$  y  $c$ .

Tanda	Parámetro					
	$Q_{0.05}$		$Q_{0.1}$		$Q_{0.5}$	
	$\alpha$	$\beta$	$\alpha$	$\beta$	$\alpha$	$\beta$
1	1.1235	1.0074	1.1059	1.0359	1.1056	1.0016
2	1.1608	1.0291	1.1629	1.0240	1.2368	1.0094
3	1.0490	0.9258	1.0601	0.9582	1.1446	0.9952
4	1.0610	0.9846	1.0988	0.9964	1.1652	1.0502
5	1.0718	0.9430	1.0966	0.9771	1.1227	1.0090
6	1.0793	1.0250	1.0778	1.0124	1.0602	1.0066
7	1.0210	0.9356	1.0480	0.9367	1.1559	0.9890
8	0.9686	1.0142	0.9829	0.9887	1.0824	0.9980
9	1.0473	1.0109	1.0500	0.9522	1.1373	1.0001
10	1.1241	1.0824	1.1227	1.0209	1.0963	0.9971
11	1.0912	0.9997	1.1027	1.0191	1.2249	1.0155
12	1.0694	1.0041	1.0921	0.9475	1.2170	1.0105
13	1.1022	1.0008	1.0841	0.9874	1.0615	1.0118
14	1.0069	0.9920	1.0133	1.0209	1.0812	1.0566
15	1.1081	0.9653	1.1041	0.9947	1.1829	1.0016
16	1.0321	0.9833	1.0312	0.9884	1.0711	0.9855
17	1.0558	0.9990	1.0494	0.9950	1.0880	0.9554
18	0.9970	0.9784	1.0043	0.9819	1.0393	1.0046
19	1.0293	0.9614	1.0148	0.9658	1.0608	0.9715
20	1.0466	1.0005	1.0526	0.9755	1.0834	0.9641
21	1.0642	1.0594	1.0380	0.9673	1.0897	0.9643
22	1.0928	0.9937	1.0875	0.9752	1.1133	0.9905
23	1.0311	1.0066	1.0255	1.0087	1.1942	1.0281
24	1.1120	1.0018	1.1115	1.0403	1.1208	1.0253
25	1.0311	0.9110	1.0797	0.9082	1.2298	0.9972
26	0.9636	0.9967	0.9532	1.0145	1.0845	1.0249
27	1.0304	1.0416	1.0273	1.0352	1.0661	0.9867
28	1.0708	0.9787	1.0990	1.0168	1.0786	0.9773
29	1.0736	0.9922	1.0817	0.9677	1.1543	1.0201
30	1.0552	1.0169	1.0490	1.0128	1.1545	1.0315

**Tabla A.2:** Datos de transformador eléctrico. Parámetros  $\alpha$ ,  $\beta$  estimados de la distribución Gama para 30 tandas de 1000 simulaciones de tamaño 20 para los parámetros  $Q_{0.05}$ ,  $Q_{0.1}$  y  $Q_{0.5}$ .

Tanda	Parámetros					
	$a$	$b$	$c$	$Q_{0.05}$	$Q_{0.1}$	$Q_{0.5}$
1	0.1194	0.1369	0.0969	0.1162	0.1228	0.1198
2	0.1074	0.1116	0.1103	0.1100	0.1092	0.0937
3	0.1174	0.1383	0.1265	0.1261	0.1265	0.1106
4	0.1104	0.1275	0.1263	0.1288	0.1209	0.1109
5	0.1291	0.1212	0.1112	0.1222	0.1196	0.1165
6	0.1309	0.1381	0.1266	0.1281	0.1273	0.1311
7	0.1028	0.1277	0.1302	0.1343	0.1274	0.1077
8	0.1208	0.1433	0.1578	0.1571	0.1502	0.1249
9	0.1121	0.1283	0.1177	0.1348	0.1285	0.1126
10	0.1274	0.1187	0.1035	0.1226	0.1176	0.1215
11	0.0969	0.1233	0.0983	0.1229	0.1220	0.0963
12	0.0848	0.1222	0.1095	0.1286	0.1179	0.0974
13	0.1274	0.1486	0.1193	0.1204	0.1235	0.1313
14	0.1425	0.1227	0.1217	0.1438	0.1449	0.1305
15	0.1087	0.1455	0.1082	0.1159	0.1195	0.1032
16	0.1274	0.1398	0.1311	0.1361	0.1368	0.1264
17	0.1208	0.1378	0.1025	0.1315	0.1328	0.1196
18	0.1302	0.1429	0.1308	0.1452	0.1435	0.1363
19	0.1247	0.1587	0.1199	0.1347	0.1390	0.1276
20	0.1166	0.1435	0.1165	0.1340	0.1301	0.1215
21	0.1146	0.1485	0.1077	0.1350	0.1330	0.1200
22	0.1200	0.1518	0.0907	0.1220	0.1215	0.1170
23	0.1042	0.1297	0.1295	0.1386	0.1404	0.1032
24	0.1144	0.1463	0.1082	0.1183	0.1219	0.1184
25	0.1030	0.1080	0.1380	0.1291	0.1170	0.0940
26	0.1113	0.1705	0.1255	0.1568	0.1618	0.1268
27	0.1204	0.1554	0.1152	0.1422	0.1424	0.1278
28	0.1338	0.1295	0.1358	0.1259	0.1227	0.1239
29	0.1081	0.1480	0.1188	0.1265	0.1222	0.1106
30	0.1054	0.1134	0.1137	0.1334	0.1346	0.1116
Promedio	0.1164	0.1359	0.1183	0.1307	0.1292	0.1164
Intervalos	(0.092, 0.14)	(0.107, 0.165)	(0.091, 0.146)	(0.109, 0.152)	(0.107, 0.152)	(0.093, 0.14)

**Tabla A.3:** Datos de transformador eléctrico. Niveles de verosimilitud asociados al cuantil de probabilidad 0.95 de las distribuciones Gama estimadas, promedio de niveles e intervalo Bootstrap para los niveles de cada parámetro en 30 tandas de 1000 simulaciones.



## A.2. Ejemplo de eventos de lluvia en Chamela

Tanda	Parámetro					
	<i>a</i>		<i>b</i>		<i>c</i>	
	$\alpha$	$\beta$	$\alpha$	$\beta$	$\alpha$	$\beta$
1	1.0558	1.0267	1.1162	1.0051	1.1079	1.0665
2	1.0446	1.0383	1.0755	0.9929	1.1344	1.0589
3	1.1103	1.0206	0.9855	1.0419	1.0776	1.0224
4	1.0806	1.0130	1.1213	0.9754	1.0958	0.9942
5	1.0280	1.0328	1.0688	0.9942	1.0403	1.0299
6	1.0602	1.0097	1.1048	1.0563	1.0568	0.9886
7	1.1397	1.0488	1.1033	1.0205	1.0903	1.0207
8	1.0412	0.9484	1.1166	0.9281	1.0628	1.0146
9	1.1118	0.9533	1.1544	0.9720	1.0105	1.0143
10	1.1433	0.9688	1.1506	0.9520	1.0651	1.0228
11	1.1020	0.9917	1.0626	1.0142	1.0868	1.0492
12	1.0253	0.9917	1.0956	1.0370	1.1197	0.9913
13	1.1609	0.9238	1.1394	1.0332	1.1232	1.0515
14	1.0768	0.9801	1.1338	1.0182	1.0541	1.0497
15	1.0802	1.0028	1.0197	1.0768	1.1679	1.0400
16	1.1573	0.9912	1.0687	1.0094	1.0514	1.0324
17	1.0573	0.9752	1.0551	1.0251	1.0474	0.9960
18	1.0574	0.9811	1.0438	0.9934	1.0819	1.0546
19	1.1169	1.1095	1.0971	0.9681	1.0699	1.0482
20	1.1451	0.9635	1.1857	0.9801	1.0482	1.0157
21	1.1732	1.0080	1.1671	1.0353	1.1244	0.9579
22	1.1623	1.0262	1.2073	1.0248	1.1217	0.9904
23	1.1766	0.9736	1.0759	0.9981	1.0541	1.0440
24	1.2367	0.9850	1.1757	0.9644	1.0379	0.9895
25	1.0781	1.0746	0.9834	0.9814	1.0265	1.0200
26	1.1079	0.9421	1.1424	0.9856	1.0122	1.0211
27	1.1381	1.0953	1.0690	0.9667	1.1652	1.0244
28	1.0570	1.0421	1.0375	1.0296	1.0030	0.9620
29	1.0632	1.0099	1.0837	0.9790	1.0553	1.0505
30	1.1990	0.9773	1.0955	1.0237	1.1236	0.9710

**Tabla A.4:** Máximos de lluvias. Parámetros  $\alpha$ ,  $\beta$  estimados de la distribución Gama para 30 tandas de 1000 simulaciones de muestras de tamaño 31 para los parámetros  $a$ ,  $b$  y  $c$ .

Tanda	Parámetro					
	$Q_{0.1}$		$Q_{0.25}$		$Q_{0.5}$	
	$\alpha$	$\beta$	$\alpha$	$\beta$	$\alpha$	$\beta$
1	1.1028	1.0545	1.1134	1.0028	1.0695	0.9907
2	1.0430	1.0244	1.0249	0.9947	1.0383	1.0078
3	0.9617	0.9617	0.9639	1.0049	1.0359	1.0469
4	1.0244	0.9994	1.0303	0.9850	1.0711	1.0376
5	1.0942	1.0262	1.0943	1.0276	1.0364	1.0210
6	1.0197	1.0482	1.0292	1.0834	1.0498	1.0708
7	0.9969	1.0082	1.0403	1.0394	1.1221	1.0382
8	1.0669	0.9538	1.0713	1.0218	1.0519	0.9593
9	1.0126	1.0079	1.1113	1.0226	1.1425	1.0110
10	1.0285	0.9908	1.1133	0.9968	1.1515	0.9427
11	1.0149	1.0325	1.0159	1.0548	1.0688	0.9878
12	1.0120	1.0260	1.0122	0.9596	1.0270	0.9380
13	1.0738	0.9854	1.0952	1.0137	1.1294	0.9761
14	1.0631	1.0440	1.0991	1.0202	1.0886	0.9240
15	1.0424	0.9902	1.0365	1.0595	1.0537	1.0412
16	1.0264	1.0160	1.0615	1.0760	1.1150	1.0037
17	0.9497	1.0764	0.9697	1.0991	1.0367	1.0544
18	1.0369	0.9580	1.0163	1.0185	1.0257	0.9431
19	1.0575	1.0502	1.0790	0.9614	1.0803	1.0391
20	1.0255	0.9633	1.1101	1.1015	1.1644	0.9978
21	1.0407	1.0158	1.0777	1.0016	1.1501	0.9986
22	1.0555	0.9862	1.1078	1.1140	1.1541	0.9913
23	1.0053	1.0534	1.0768	0.9909	1.1614	1.0519
24	1.0362	1.0599	1.1597	0.9681	1.2423	0.9427
25	0.9801	0.9890	0.9920	1.0391	1.0396	1.0839
26	1.0159	1.0625	1.0662	1.1088	1.0948	0.9741
27	1.0490	1.0242	1.0780	1.0521	1.1301	1.0462
28	1.0196	1.0515	1.0330	1.0086	1.0465	1.0293
29	0.9977	0.9713	1.0607	1.0030	1.0675	1.0423
30	1.0011	0.9644	1.0440	1.0364	1.1655	0.9991

**Tabla A.5:** Máximos de lluvias. Parámetros  $\alpha$ ,  $\beta$  estimados de la distribución Gama para 30 tandas de 1000 simulaciones de tamaño 31 para los parámetros  $Q_{0.1}$ ,  $Q_{0.25}$  y  $Q_{0.5}$ .

Tanda	Parámetros					
	$a$	$b$	$c$	$Q_{0.1}$	$Q_{0.25}$	$Q_{0.5}$
1	0.1341	0.1176	0.1250	0.1251	0.1181	0.1273
2	0.1381	0.1261	0.1183	0.1372	0.1391	0.1369
3	0.1204	0.1548	0.1283	0.1537	0.1575	0.1412
4	0.1267	0.1138	0.1213	0.1397	0.1368	0.1313
5	0.1420	0.1278	0.1385	0.1246	0.1247	0.1386
6	0.1314	0.1248	0.1303	0.1457	0.1465	0.1398
7	0.1162	0.1220	0.1251	0.1482	0.1394	0.1192
8	0.1303	0.1105	0.1312	0.1244	0.1298	0.1287
9	0.1140	0.1065	0.1450	0.1438	0.1203	0.1124
10	0.1085	0.1055	0.1314	0.1378	0.1176	0.1045
11	0.1197	0.1312	0.1285	0.1455	0.1474	0.1272
12	0.1387	0.1253	0.1156	0.1457	0.1391	0.1329
13	0.1009	0.1150	0.1202	0.1258	0.1233	0.1121
14	0.1245	0.1149	0.1367	0.1339	0.1230	0.1164
15	0.1258	0.1484	0.1095	0.1341	0.1422	0.1360
16	0.1075	0.1293	0.1358	0.1408	0.1372	0.1178
17	0.1289	0.1342	0.1334	0.1692	0.1652	0.1417
18	0.1294	0.1341	0.1302	0.1324	0.1438	0.1338
19	0.1266	0.1186	0.1325	0.1359	0.1223	0.1292
20	0.1077	0.1009	0.1350	0.1359	0.1275	0.1066
21	0.1057	0.1093	0.1116	0.1370	0.1263	0.1097
22	0.1095	0.1004	0.1151	0.1304	0.1291	0.1082
23	0.1021	0.1264	0.1362	0.1502	0.1256	0.1118
24	0.0918	0.1015	0.1352	0.1424	0.1051	0.0874
25	0.1329	0.1493	0.1412	0.1511	0.1527	0.1437
26	0.1138	0.1102	0.1452	0.1482	0.1389	0.1197
27	0.1205	0.1252	0.1087	0.1357	0.1309	0.1181
28	0.1353	0.1392	0.1418	0.1461	0.1383	0.1368
29	0.1307	0.1228	0.1365	0.1443	0.1307	0.1326
30	0.0981	0.1241	0.1130	0.1426	0.1381	0.1065
Promedio	0.1204	0.1223	0.1285	0.1402	0.1339	0.1236
Intervalo	(0.094, 0.147)	(0.095, 0.150)	(0.108, 0.149)	(0.121, 0.159)	(0.109, 0.159)	(0.096, 0.151)

**Tabla A.6:** Máximos de lluvias. Niveles de verosimilitud asociados al cuantil de probabilidad 0.95 de las distribuciones Gama estimadas, promedio de niveles e intervalo Bootstrap para los niveles de cada parámetro en 30 tandas de 1000 simulaciones.





## Listado y descripción de las funciones principales programadas en R

Se dará el nombre de las funciones seguido de los argumentos que esta recibe. Después se indican las variables de salida de cada función.

### B.1. Distribución Generalizada de Valores Extremos

- **dgve**(*x,a,b,c*) Retorna el valor de la función de densidad de la GVE con parámetros *a*, *b*, *c* evaluada en *x*.
- **pgve**(*x,a,b,c*) Devuelve el valor de la función de distribución de la GVE con parámetros *a*, *b*, *c* evaluada en *x*.
- **qgve**(*p,a,b,c*) Calcula el cuantil de probabilidad *p* de la GVE con parámetros *a*, *b*, *c*.
- **rgve**(*n,a,b,c*) Retorna una muestra aleatoria de tamaño *n* de la DGVE con parámetros *a*, *b*, *c*.

#### B.1.1. Transformación parámetros

- **gve**(*par*) Esta función transforma un vector de parámetros **par** de la DGVE a la escala Weibull, Fréchet o Gumbel.
- **weibgve**(*mu,sigma,beta*) Transforma los parámetros de la distribución Weibull de tres parámetros a la GVE. Retorna el vector de parámetros en la escala de la DGVE

- **frecagve(mu,sigma,beta)** Transforma parámetros de la distribución Fréchet a la GVE. Retorna el vector de parámetros en la escala de la DGVE.

### B.1.2. Función de verosimilitud de los parámetros de la DGVE

- **lvgvemd(par3,intervalos)** La función recibe un vector de tres parámetros **par3** y una matriz de  $n \times 2$ , **intervalos** que contiene los extremos de los intervalos en los que caen las  $n$  observaciones de acuerdo con la resolución del instrumento de medición. Devuelve el negativo de la log-verosimilitud discretizada con resolución de la GVE evaluada en el vector de parámetros **par3**.
- **lvgvemdqa(parqa3,intervalos,alpha)** La función recibe un vector de tres parámetros **parqa3** y una matriz de  $n \times 2$ , **intervalos** que contiene los extremos de los intervalos en los que caen las  $n$  observaciones de acuerdo con la resolución del instrumento de medición. El vector **parqa3** corresponde al vector de parámetros  $(a, Q_\alpha, c)$ , donde  $Q_\alpha$  es el cuantil de probabilidad  $\alpha$ , que se obtiene sustituyendo  $b$  como en la relación (2.8). Devuelve el negativo de la log-verosimilitud discretizada con resolución de la GVE evaluada en el vector de parámetros **parqa3**.

### B.1.3. Funciones de verosimilitud perfil de un parámetro de interés de la DGVE

- **lvperfa(emvs,intervalos,pasos,a0)** La función recibe el vector de estimadores de máxima verosimilitud globales (**emvs**), los extremos de los intervalos en los que caen las observaciones (**intervalos**) y el valor **a0** del parámetro de interés donde se desea evaluar la log-verosimilitud perfil de  $a$ . Devuelve el valor de la log-verosimilitud discretizada perfil evaluada en **a0**.
- **lvperfb(emvs,intervalos,pasos,b0)** La función recibe el vector de estimadores de máxima verosimilitud (**emvs**), los extremos de los intervalos en los que caen las observaciones (**intervalos**) y el valor **b0** del parámetro de interés donde se desea evaluar la log-verosimilitud perfil de  $b$ . Devuelve el valor de la log-verosimilitud discretizada perfil del parámetro  $b$  evaluada en **b0**.
- **lvperfc(emvs,intervalos,pasos,c0)** La función recibe el vector de estimadores de máxima verosimilitud (**emvs**), los extremos de los intervalos en los que caen las observaciones (**intervalos**) y el valor **c0** del parámetro de interés donde se desea evaluar la log-verosimilitud perfil de  $c$ . Devuelve el valor de la log-verosimilitud discretizada perfil del parámetro  $c$  evaluada en **c0**.
- **lvperfqqa(emvs,intervalos,pasos,alpha,qa0)** La función recibe el vector de estimadores de máxima verosimilitud (**emvs**), los extremos de los intervalos en los

que caen las observaciones (**intervalos**), la probabilidad (**alpha**) del cuantil que se desea estimar y el valor  $qa0$  del cuantil de interés donde se desea evaluar la log-verosimilitud perfil de  $Q_\alpha$ . Devuelve el valor de la log-verosimilitud discretizada perfil del cuantil de probabilidad  $\alpha$  evaluada en **qa0**.

Las verosimilitudes perfil fueron programadas con pasos como se describe en la Sección 2.3. El parámetro **pasos** indica el número de evaluaciones intermedias desde el emv hasta el valor donde se desea evaluar la verosimilitud. Esto se hace para reducir los errores numéricos que ocurren al evaluar las verosimilitudes perfil de la DGVE.

## B.2. Estimación de una distribución Gama por máxima verosimilitud usual

- **lvgammaacen(par,datos)** La función recibe el vector **par** que contiene los parámetros de escala y forma de la distribución Gama y el vector que contiene la muestra observada **datos** ( $z_1, \dots, z_M$ ). Regresa el negativo del valor de la log-verosimilitud calculada como la suma de las log-densidades marginales.

**Observación B.1.** *Teniendo en cuenta que en el cálculo numérico de las estadísticas de razón de verosimilitud propuestas en la tesis se obtienen algunos errores numéricos se propone además censurar aquellas observaciones que sean mayores a 15, que corresponde al cuantil 0.9999 de la distribución Ji-cuadrada con un grado de libertad, la cual corresponde al resultado asintótico. Suponiendo que hay  $k$  valores censurados provenientes de errores numéricos resulta la siguiente expresión de la log-verosimilitud*

$$-(M - k) \ln \left[ \Gamma \left( \frac{\beta}{2} \right) \right] + \frac{(M - k)\beta}{2} \ln \left( \frac{\beta}{2\alpha} \right) + \frac{\beta}{2} \sum_{i=1}^k \ln(z_i) - \frac{\beta}{2\alpha} \sum_{i=1}^k z_i + k \ln [1 - F_Z(15)].$$

- **estim.gammacen(datos)** Esta función recibe una muestra y retorna los estimadores de los parámetros de la distribución Gama.

## B.3. Gráficas cuantil-cuantil

- **qqgvemin(par1,par2,par3,datos)** Esta función realiza la gráfica cuantil-cuantil para la muestra **datos** suponiendo que esta tiene distribución GVE con parámetros  $(a, b, c) = (\mathbf{par1}, \mathbf{par2}, \mathbf{par3})$ . En el eje vertical se grafica la muestra observada ordenada y en el eje horizontal los cuantiles estimados de la distribución GVE correspondiente. Se grafican los datos, una nube de gráficas cuantil-cuantil de 100 muestras simuladas de la distribución GVE y las bandas del 95 % de confianza.

- **qqchisq(datos,df)** Esta función realiza la gráfica cuantil-cuantil para la muestra **datos** suponiendo que esta tiene distribución Ji-cuadrada con **df** grados de libertad. En el eje vertical se grafica la muestra observada ordenada y en el eje horizontal los cuantiles estimados de la Ji-cuadrada correspondiente. Se grafican los datos, una nube de gráficas cuantil-cuantil de 100 muestras simuladas de la distribución Ji-cuadrada y las bandas del 95 % de confianza.
- **qqgamma(datos,alp,bet)** Esta función realiza la gráfica cuantil-cuantil para la muestra **datos** suponiendo que esta tiene distribución Gama con parámetro de forma **alp** y escala **bet**. En el eje vertical se grafica la muestra ordenada y en el eje horizontal los cuantiles estimados de la distribución Gama correspondiente. Se grafican la muestra, una nube de gráficas cuantil-cuantil de 100 muestras simuladas de la distribución Gama y las bandas del 95 % de confianza.

#### B.4. Cálculo del nivel del intervalo de verosimilitud propuesto $IV(\bar{k}_\theta)$ para estimar un parámetro $\theta$ de interés

Se utilizan las funciones descritas anteriormente y en el Apéndice C se ejemplifica con el código de R en la aplicación a los datos del Ejemplo 3.2.





## Códigos en lenguaje de R

### C.1. Distribución Generalizada de Valores Extremos

```
1 #####
2 ##### Funciones GVE #####
3 #####
4
5 dgvein<-function(x,a,b,c){
6 #####Densidad DGVE de mínimos considerando una ventana para c
7 ventc=0.0001#Valor para ventana de c
8 dens=rep(0,length(x))
9 for(i in 1:length(x)){
10 ##Densidad Weibull
11 if(c<=(-ventc)){
12 if(x[i]>=(a+(b/c))){
13 tx=(1+c*((a-x[i])/b))^-1/c
14 dens[i]=(1/b)*(tx^(c+1))*exp(-tx)}
15 ##Densidad Gumbel
16 if(abs(c)<ventc){
17 tx=exp((x[i]-a)/b)
18 dens[i]=(1/b)*tx*exp(-tx)}
19 ##Densidad Fréchet
20 if(c>=ventc){
21 if(x[i]<=(a+(b/c))){
22 tx=(1+c*((a-x[i])/b))^-1/c
23 dens[i]=(1/b)*(tx^(c+1))*exp(-tx)}}
24 ##Retorna como vector la densidad evaluada en el vector x
25 return(dens)}
26
27 pgvein<-function(x,a,b,c){
28 #####Función de distribución DGVE de mínimos
29 ventc=0.0001#Valor para ventana de c
30 ##Función de distribución Weibull
31 if(c<=-ventc){pr=(1-exp(-((1+c*(-(x-a)/b))^-1/c)))*(x>=(a+(b/c))))}
32 ##Función de distribución Gumbel
33 if(abs(c)<ventc){pr=(1-exp(-exp((x-a)/b)))}
34 ##Función de distribución Fréchet
35 if(c>=ventc){pr=((1-exp(-((1+c*(-(x-a)/b))^-1/c)))*(x<(a+(b/c))))+((a+(b/c))<=x)}
36 ##Retorna como vector la función de distribución evaluada en el vector x
37 return(pr)}
38
```

```

39 qgvemin<-function(p,a,b,c){
40 #####Cuantiles DGVE de mínimos
41   ventc=0.0001#Valor para ventana de c
42   ##Cuantiles Gumbel
43   if(abs(c)<ventc){quan=a+b*log(-log(1-p))} else {
44     ##Cuantiles Weibull o Fréchet
45     quan=a+(b/c)*(1-(-log(1-p))^-c)}
46 ##Retorna el vector de cuantiles de las probabilidades dadas en el vector p
47 return(quan)}
48
49 rgvemin<-function(n,a,b,c){
50 #####Muestra aleatoria de tamaño n DGVE de mínimos
51   ventc=0.0001#Valor para ventana de c
52   y=runif(n,0,1)
53   ##Muestra de tamaño n Gumbel
54   if(abs(c)<ventc){
55     muestra=a+b*log(-log(1-y))} else {
56     ##Muestra de tamaño n, Weibull o Fréchet
57     muestra=a+(b/c)*(1-((-log(1-y))^-c))}
58 ##Retorna como vector a una muestra de tamaño n de la DGVE(a,b,c)
59 return(muestra)}

```

### C.1.1. Transformar parámetros

```

1 #####
2 ##      Transformación de parámetros      ##
3 #####
4
5 gveotro<-function(param){
6 #####Convertir parámetros de DGVE a distribuciones Weibull, Gumbel o Fréchet
7   ventc=0.0001#Valor para ventana de c
8   a=param[1]
9   b=param[2]
10  c=param[3]
11  ##Parametrización Weibull
12  if(c<=(-ventc)){
13    mu=a+(b/c)
14    sigma=(-b/c)
15    beta=(-1/c)
16    par=c(mu,sigma,beta)}
17  ##Parametrización Gumbel
18  if(abs(c)<ventc){
19    mu=a
20    sigma=b
21    par=c(mu,sigma)}
22  ##Parametrización Fréchet
23  if(c>=ventc){
24    mu=a+(b/c)
25    sigma=b/c
26    beta=1/c
27    par=c(mu,sigma,beta)}
28  ##Retorna el vector de parámetros en la parametrización (Weibull, Gumbel, Fréchet) que
29  ##indique el valor de c
30  return(par)}
31
32 weibagve<-function(mu,sigma,beta){
33 #####Transformar parámetros de distribución Weibull a DGVE
34   ventc=0.0001#Valor para ventana de c
35   ##Cuando los parámetros dados son de un modelo Weibull que es indistinguible del Gumbel
36   if(abs(-1/beta)<ventc){
37     a=mu

```



```

31  if((c<(-ventc)) && (b>0) && ((x1[1])<(a+(b/c))) && ((a+(b/c))<=(x1[2])) ){
32    ##Cantidad de veces que se repite el mínimo de la muestra
33    m=sum(Inferior==x1[1])
34    ##Muestra sin el(los) valor(es) mínimo(s)
35    xsinmin=cbind(Inferior[-which(Inferior==x1[1])], Superior[-which(Superior==x1[2])])
36    ##Probabilidad de la observación más pequeña
37    P1=pgvemin(x1[2], a, b, c)
38    ##Cota de la probabilidad de la observación más pequeña
39    if(P1<cotproba){P1=cotproba}
40    ##Probabilidades de las observaciones excepto de la más pequeña
41    Psin=pgvemin(xsinmin[,2], a, b, c)-pgvemin(xsinmin[,1], a, b, c)
42    ##Cota de las probabilidades
43    Psin[which(Psin<cotproba)]=cotproba
44    ##Log-verosimilitud discretizada
45    lv=(m*log(P1))+sum(log(Psin))}
46    ###2.Gumbel  ##Si no está acotada la distribución
47    if((abs(c)<=ventc) && b>0){
48      ##Probabilidades de las observaciones
49      Ps=pgvemin(Superior, a, b, c)-pgvemin(Inferior, a, b, c)
50      ##Cota de las probabilidades
51      Ps[which(Ps<cotproba)]=cotproba
52      ##Log-verosimilitud discretizada
53      lv=sum(log(Ps))}
54    ###3.Fréchet  ##Si hay una cota superior
55    ##Intervalo en el que se encuentra la observación más grande
56    xn=c(max(Inferior), max(Superior))
57    ##Si el umbral es mayor al extremo superior del intervalo de la observación más
58    grande
59    if((c>ventc) && (b>0) && ((a+(b/c))>=xn[2])){
60      Ps=pgvemin(Superior, a, b, c)-pgvemin(Inferior, a, b, c)
61      ##Si alguna de las probabilidades es muy pequeña se acota por la constante "cotproba
62      "
63      Ps[which(Ps<cotproba)]=cotproba
64      ##Log-verosimilitud discretizada
65      lv=sum(log(Ps))}
66    ##Si el umbral está en el intervalo de la observación más grande
67    if((c>ventc) && (b>0) && ((xn[1])<=(a+(b/c))) && ((a+(b/c))<(xn[2])) ){
68      ##Cantidad de veces que se repite el máximo de la muestra
69      m=sum(Superior==xn[2])
70      ##Muestra sin el(los) valor(es) máximo(s)
71      xsinmax=cbind(Inferior[-which(Inferior==xn[1])], Superior[-which(Superior==xn[2])])
72      ##Probabilidad de la observación más grande
73      Pn=1-pgvemin(xn[1], a, b, c)
74      ##Cota de la probabilidad de la observación más grande
75      if(Pn<cotproba){Pn=cotproba}
76      ##Probabilidades de las observaciones excepto de la más grande
77      Psin=pgvemin(xsinmax[,2], a, b, c)-pgvemin(xsinmax[,1], a, b, c)
78      ##Cota de las aportaciones
79      Psin[which(Psin<cotproba)]=cotproba
80      ##Log-verosimilitud discretizada
81      lv=(m*log(Pn))+sum(log(Psin))}
82    ##Retorna el negativo de la log-verosimilitud discretizada evaluada en a,b,c
83    return(-lv)}
84
85  lvgvemdqa<-function(parqa3, intervalos, alpha){
86    #####Log-verosimilitud discretizada DGVE de mínimos reparametrizada en el cuantil
87    ##Parámetros de la DGVE reparametrizando en cuantiles
88    a=parqa3[1]
89    qa=parqa3[2]
90    c=parqa3[3]
91    ##Ventana de c y cota de probabilidades
92    ventc=0.0001

```





```

64 Superior=intervalos [,2]
65 lv=(-999999999999999999999999)
66 ##1.Weibull
67 x1=c(min(Inferior),min(Superior))
68 ##Si el umbral es menor al extremo izquierdo del intervalo de la observación más
    pequeña
69 if((c<=(-ventc)) && (b>0) && ((a+(b/c))<=x1[1])){
70   Ps=pgvemin(Superior,a,b,c)-pgvemin(Inferior,a,b,c)
71   Ps[which(Ps<cotproba)]=cotproba
72   lv=sum(log(Ps))}
73 ##Si el umbral está en el intervalo de la observación más pequeña
74 if((c<=(-ventc)) && (b>0) && ((x1[1])<(a+(b/c))) && ((a+(b/c))<=(x1[2])))){
75   ##Cantidad de repeticiones del mínimo
76   m=sum(Inferior==x1[1])
77   ##Muestra sin el(los) valor(es) mínimo(s)
78   xsinmin=cbind(Inferior[-which(Inferior==x1[1])],Superior[-which(Superior==x1[2])])
79   P1=pgvemin(x1[2],a,b,c)
80   if(P1<cotproba){P1=cotproba}
81   Psin=pgvemin(xsinmin[,2],a,b,c)-pgvemin(xsinmin[,1],a,b,c)
82   Psin[which(Psin<cotproba)]=cotproba
83   lv=(m*log(P1))+sum(log(Psin))}
84 ##2.Gumbel
85 if((abs(c)<ventc) && b>0){
86   Ps=pgvemin(Superior,a,b,c)-pgvemin(Inferior,a,b,c)
87   Ps[which(Ps<cotproba)]=cotproba
88   lv=sum(log(Ps))}
89 ##3.Fréchet
90 xn=c(max(Inferior),max(Superior))
91 ##Si el umbral es mayor al extremo superior del intervalo de la observación más
    grande
92 if((c>=ventc) && (b>0) && ((a+(b/c))>=xn[2])){
93   Ps=pgvemin(Superior,a,b,c)-pgvemin(Inferior,a,b,c)
94   Ps[which(Ps<cotproba)]=cotproba
95   lv=sum(log(Ps))}
96 ##Si el umbral está en el intervalo de la observación más grande
97 if((c>=ventc) && (b>0) && ((xn[1])<=(a+(b/c))) && ((a+(b/c))<(xn[2])))){
98   ##Cantidad de repeticiones del máximo
99   m=sum(Superior==xn[2])
100  ##Muestra sin el(los) máximo(s)
101  xsinmax=cbind(Inferior[-which(Inferior==xn[1])],Superior[-which(Superior==xn[2])])
102  Pn=1-pgvemin(xn[1],a,b,c)
103  if(Pn<cotproba){Pn=cotproba}
104  Psin=pgvemin(xsinmax[,2],a,b,c)-pgvemin(xsinmax[,1],a,b,c)
105  Psin[which(Psin<cotproba)]=cotproba
106  lv=(m*log(Pn))+sum(log(Psin))}
107 return(-lv)}
108
109 lpcDgvemin<-function(estimadores,intervalos,c){
110 ###Log-verosimilitud discretizada DGVE de mínimos para la log-verosimilitud perfil de c
111 a=estimadores[1]
112 b=estimadores[2]
113 ventc=0.0001
114 cotproba=0.000001
115 Inferior=intervalos[,1]
116 Superior=intervalos[,2]
117 lv=(-999999999999999999999999)
118 ##1.Weibull
119 x1=c(min(Inferior),min(Superior))
120 ##Si el umbral es menor al extremo izquierdo del intervalo de la observación más
    pequeña
121 if((c<=(-ventc)) && (b>0) && ((a+(b/c))<=x1[1])){
122   Ps=pgvemin(Superior,a,b,c)-pgvemin(Inferior,a,b,c)

```





```

182 Ps[which(Ps<cotproba)]=cotproba
183 lv=sum(log(Ps))
184 ##Si el umbral está en el intervalo de la observación más pequeña
185 if((c<=-ventc) && (b>0) && ((x1[1])<(a+(b/c))) && ((a+(b/c))<=(x1[2])) ){
186   ##Cantidad de repeticiones del mínimo
187   m=sum(Inferior==x1[1])
188   ##Muestra sin el(los) valor(es) mínimo(s)
189   xsinmin=cbind(Inferior[-which(Inferior==x1[1])], Superior[-which(Superior==x1[2])])
190   P1=pgvemin(x1[2], a, b, c)
191   if(P1<cotproba){P1=cotproba}
192   Psin=pgvemin(xsinmin[,2], a, b, c)-pgvemin(xsinmin[,1], a, b, c)
193   Psin[which(Psin<cotproba)]=cotproba
194   lv=(m*log(P1))+sum(log(Psin))}
195   ###2.Gumbel
196   if((abs(c)<ventc) && b>0){
197     Ps=pgvemin(Superior, a, b, c)-pgvemin(Inferior, a, b, c)
198     Ps[which(Ps<cotproba)]=cotproba
199     lv=sum(log(Ps))}
200   ###3.Fréchet
201   xn=c(max(Inferior), max(Superior))
202   ##Si el umbral es mayor al extremo superior del intervalo de la obsservación más
203   grande
204   if((c>=ventc) && (b>0) && ((a+(b/c))>=xn[2])) {
205     Ps=pgvemin(Superior, a, b, c)-pgvemin(Inferior, a, b, c)
206     Ps[which(Ps<cotproba)]=cotproba
207     lv=sum(log(Ps))}
208   ##Si el umbral está en el intervalo de la observación más grande
209   if((c>=ventc) && (b>0) && ((xn[1])<=(a+(b/c))) && ((a+(b/c))<(xn[2])) ){
210     ##Cantidad de repeticiones del máximo
211     m=sum(Superior==xn[2])
212     ##Muestra sin el(los) máximo(s)
213     xsinmax=cbind(Inferior[-which(Inferior==xn[1])], Superior[-which(Superior==xn[2])])
214     Pn=1-pgvemin(xn[1], a, b, c)
215     if(Pn<cotproba){Pn=cotproba}
216     Psin=pgvemin(xsinmax[,2], a, b, c)-pgvemin(xsinmax[,1], a, b, c)
217     Psin[which(Psin<cotproba)]=cotproba
218     lv=(m*log(Pn))+sum(log(Psin))}
219   return(-lv)}
220 #####
221 ## Log-verosimilitudes perfil con pasos intermedios ##
222 #####
223
224 lvperfa<-function(est, interv, pasos=10, a0){
225   #####Log-verosimilitud perfil de a
226   #Valor inicial de estimadores (EMV de b y c)
227   EMVbcrest=c(est[2], est[3])
228   #Evaluar a la derecha del EMV
229   if(a0>=est[1]){
230     ##Vector desde el EMV de a al valor a0
231     as=seq(est[1], a0, length=pasos+1)
232     as=as[-1]
233     lvp=rep(0, length(as))
234     #Evaluar por pasos
235     for(i in 1:length(as)){
236       #Log-verosimilitud perfil de a
237       lvp[i]=-optim(EMVbcrest, lpaDgvemin, intervalos=interv, a=as[i], method="Nelder-Mead")$value
238       #EMV restringido de b y c
239       EMVbcrest=optim(EMVbcrest, lpaDgvemin, intervalos=interv, a=as[i], method="Nelder-Mead")$par}
240     ##Retorna la log-verosimilitud perfil evaluada en el último valor vector "as", es

```

```

    decir , a0
241 return(lvpa[length(as)])}
242 #Evaluar a la izquierda del EMV
243 if(a0<est[1]){
244   ##Vector desde a0 hasta el EMV
245   as=seq(a0,est[1],length=pasos+1)
246   as=as[-(length(as))]
247   lvpa=rep(0,length(as))
248   ##Evaluar por pasos
249   for(i in 1:length(as)){
250     #Log-verosimilitud perfil de a, evaluada en "as" en orden inverso
251     lvpa[length(as)-(i-1)]=-optim(EMVbcrest, lpaDgvemin,intervalos=interv, a=as[length(
as)-(i-1)],method ="Nelder-Mead")$value
252     ##EMV restringido de b y c
253     EMVbcrest=optim(EMVbcrest, lpaDgvemin,intervalos=interv, a=as[length(as)-(i-1)],
method ="Nelder-Mead")$par}
254 return(lvpa[1])}
255 }
256
257
258 lvperfb<-function(est,interv,pasos=10,b0){
259   #####Log-verosimilitud perfil de b
260   #Valor inicial de estimadores (EMV de a y c)
261   EMVarest=c(est[1],est[3])
262   if(b0>=est[2]){
263     #Evaluar a la derecha del EMV
264     bs=seq(est[2],b0,length=pasos+1)
265     bs=bs[-1]
266     lvpb=rep(0,length(bs))
267     for(i in 1:length(bs)){
268       #Log-verosimilitud perfil de b evaluada en "bs"
269       lvpb[i]=-optim(EMVarest, lpbDgvemin, b=bs[i],intervalos=interv,method ="Nelder-
Mead")$value
270       ##EMV restringido de a y c
271       EMVarest=optim(EMVarest, lpbDgvemin, b=bs[i],intervalos=interv,method ="Nelder-
Mead")$par}
272   ##Retorna la log-verosimilitud perfil de b evaluada en b0
273   return(lvpb[length(bs)])}
274   if(b0<est[2]){
275     #Evaluar a la izquierda del EMV
276     bs=seq(b0,est[2],length=pasos+1)
277     bs=bs[-length(bs)]
278     lvpb=rep(0,length(bs))
279     for(i in 1:length(bs)){
280       #Log-verosimilitud perfil de b
281       lvpb[length(bs)-(i-1)]=-optim(EMVarest, lpbDgvemin, b=bs[length(bs)-(i-1)],
intervalos=interv,method ="Nelder-Mead")$valu
282       ##EMV restringido de a y c
283       EMVarest=optim(EMVarest, lpbDgvemin, b=bs[length(bs)-(i-1)],intervalos=interv,
method ="Nelder-Mead")$par}
284   ##Retorna la log-verosimilitud perfil de b evaluada en b0
285   return(lvpb[1])}
286 }
287
288 lvperfc<-function(est,interv,pasos=10,c0){
289   #####Log-verosimilitud perfil de c
290   #Valor inicial de estimadores (EMV de a y b)
291   EMVarest=c(est[1],est[2])
292   if(c0>=est[3]){
293     #Evaluar a la derecha del EMV
294     cs=seq(est[3],c0,length=pasos+1)
295     cs=cs[-1]

```

```

296   lvpc=rep(0,length(cs))
297   for(i in 1:length(cs)){
298     #Log-verosimilitud perfil de c
299     lvpc[i]=-optim(EMVabrest, lpcDgvemin, intervalos=interv, c=cs[i], method ="Nelder-
Meade")$value
300     #EMV restringido de a y b
301     EMVabrest=optim(EMVabrest, lpcDgvemin, intervalos=interv, c=cs[i], method ="Nelder-
Meade")$par}
302   return(lvpc[length(cs)])}
303   if(c0<est[3]){
304     #Evaluar a la izquierda del EMV
305     cs=seq(c0, est[3], length=pasos+1)
306     cs=cs[-length(cs)]
307     lvpc=rep(0,length(cs))
308     for(i in 1:length(cs)){
309       #Log-verosimilitud perfil de c
310       lvpc[length(cs)-(i-1)]=-optim(EMVabrest, lpcDgvemin, c=cs[length(cs)-(i-1)],
intervalos=interv, method ="Nelder-Mead")$value
311       #EMV restringido de a y b
312       EMVabrest=optim(EMVabrest, lpcDgvemin, c=cs[length(cs)-(i-1)], intervalos=interv,
method ="Nelder-Mead")$par}
313     return(lvpc[1])}
314 }
315
316 lvperfqa<-function(estqa, interv, pasos=10, alph, qa0){
317   ###Log-verosimilitud perfil de qa
318   #Valor inicial de estimadores (EMV de a y c con parametrización de cuantil)
319   EMVacrest=c(estqa[1], estqa[3])
320   if(qa0>=estqa[2]){
321     #Evaluar a la derecha del EMV
322     qas=seq(estqa[2], qa0, length=pasos+1)
323     qas=qas[-1]
324     lvpqa=rep(0,length(qas))
325     for(i in 1:length(qas)){
326       #Log-verosimilitud perfil de Qa
327       lvpqa[i]=-optim(EMVacrest, lpqaDgvemin, intervalos=interv, alpha=alph, qa=qas[i],
method ="Nelder-Mead")$value
328       #EMV restringido de a y c con parametrización de cuantil
329       EMVacrest=optim(EMVacrest, lpqaDgvemin, intervalos=interv, alpha=alph, qa=qas[i],
method ="Nelder-Mead")$par}
330     return(lvpqa[length(qas)])}
331   if(qa0<estqa[2]){
332     #Evaluar a la izquierda del EMV
333     qas=seq(qa0, estqa[2], length=pasos+1)
334     qas=qas[-length(qas)]
335     lvpqa=rep(0,length(qas))
336     for(i in 1:length(qas)){
337       #Log-verosimilitud perfil de Qa
338       lvpqa[length(qas)-(i-1)]=-optim(EMVacrest, lpqaDgvemin, intervalos=interv, alpha=
alph, qa=qas[length(qas)-(i-1)], method ="Nelder-Mead")$value
339       #EMV restringido de a y c con parametrización de cuantil
340       EMVacrest=optim(EMVacrest, lpqaDgvemin, intervalos=interv, alpha=alph, qa=qas[length
(qas)-(i-1)], method ="Nelder-Mead")$par}
341     return(lvpqa[1])}
342 }

```

## Estimación de una distribución Gama por máxima verosimilitud usual

```

1 #####
2 ## Estimación distribución Gamma ##
3 #####
4
5 ###Gama con censura
6 lvgammacen<-function(parsgam, datos){
7 #####Log-verosimilitud Gamma
8   n=length(datos)
9   T=15
10  k=length(datos[which(datos>T)])
11  datos1=datos[which(datos<=T)]
12  datos2=datos[which(datos>T)]
13  a=parsgam[1]
14  b=parsgam[2]
15  alpha=a
16  beta=b
17  if(a>0 && b>0){
18    lv=(-(n-k)*lgamma(b/2) + ((n-k)*(b/2))*log(b/(2*a)) + ((b/2)*sum(log(datos1))) - ((
19    b/(2*a))*sum(datos1))+k*log(1-pgamma(T,b/2, scale=(2*a/b))))}
20    else{
21    lv=-9999999999999999}
22  ##Retorna el negativo de la log-verosimilitud
23  return(-lv)}
24
25 estim.gammacen<-function(dat){
26 #####Estimadores de los parámetros de la distribución gamma
27   T=15
28   datos1=dat[which(dat<=T)]
29   aini=mean(datos1)
30   bini=2*(mean(datos1))^2/(sum((datos1-mean(datos1))^2)/length(datos1))
31   est=optim(c(aini, bini),lvgammacen, datos=dat, method="Nelder-Mead")$par
32  ##Retorna los EMV de los parámetros de la distribución Gama
33  return(est)}

```

## Gráficas cuantil-cuantil

```

1 #####
2 ## Gráficas cuantil-cuantil ##
3 #####
4
5 qqgvemin<-function(par1, par2, par3, datos){
6 #####Función para generar la gráfica cuantil-cuantil para la DGVE
7   n=length(datos)
8   alphas=1:n/(n+1)
9   ##Cuantiles teóricos
10  xs=qqgvemin(alphas, par1, par2, par3)
11  ##Cuantiles empíricos
12  sim=sort(rgvemin(n, par1, par2, par3))
13  par(mar=c(4, 5, 3, 3))
14  rango=max(xs)-min(xs)
15  rangoy=max(xs, sim)-min(xs, sim)
16  plot(xs, xs, type="l", col="red", xlab="Cuantiles Teóricos", ylab="Cuantiles Empíricos", xlim
17  =c(min(xs)-rango/50, max(xs)+rango/50), ylim=c(min(datos, sim)-rangoy/50, max(datos, sim)+
18  rangoy/50), xaxs="i", yaxs="i", cex.lab=1.5, cex.axis=1.1)
19  ##Nube de muestras simuladas de la GVE

```

```

18   for(i in 1:50){
19     sim=sort(rgvemin(n,par1,par2,par3))
20     points(xs,sim,pch=20,col="cyan1")
21     lines(xs,xs,col="red",lwd=2)
22 points(xs,sort(datos),col="navy",pch=20,cex=1.2)}
23
24 qqchisq<-function(datos,grados){
25 #####Función para generar la gráfica cuantil-cuantil con la distribución Ji-cuadrada
26 n=length(datos)
27 alphas=1:n/(n+1)
28 ##Cuantiles teóricos
29 xs=qchisq(alphas,df=grados)
30 ##Cuantiles empíricos
31 sim=sort(rchisq(n,df=grados))
32 par(mar=c(4,5,3,3))
33 plot(xs,xs,type="l",xlab="Cuantiles Teóricos",ylab="Cuantiles Empíricos",xaxs="i",yaxs="i",cex.lab=2,cex.axis=1.5)
34 ##Nube
35 for(i in 1:50){
36   sim=sort(rchisq(n,df=grados))
37   points(xs,sim,pch=20,col="cyan1")
38   lines(xs,xs,col="red",lwd=2)
39   points(xs,sort(datos),col="navy",pch=20,cex=0.8)}
40
41 qqgamma<-function(datos,alp,bet){
42 #####Función para generar la gráfica cuantil-cuantil para la distribución gamma
43 n=length(datos)
44 alphas=1:n/(n+1)
45 ##Cuantiles teóricos
46 xs=qgamma(alphas,alp,scale=bet)
47 ##Cuantiles empíricos
48 sim=sort(rgamma(n,alp,scale=bet))
49 par(mar=c(4,5,3,3))
50 plot(xs,xs,type="l",xlab="Cuantiles Teóricos",ylab="Cuantiles Empíricos",xaxs="i",yaxs="i",cex.lab=2,cex.axis=1.5)
51 ##Nube
52 for(i in 1:50){
53   sim=sort(rgamma(n,alp,scale=bet))
54   points(xs,sim,pch=20,col="cyan1")
55   lines(xs,xs,col="red",lwd=2)
56   points(xs,sort(datos),col="navy",pch=20,cex=0.8)}

```

## C.2. Aplicación de la propuesta de estimación a datos de un transformador eléctrico (Ejemplo 3.2)

```

1 ##Estimar a,b,c y cuantiles 0.05,0.1,0.5
2 library(matrixStats)
3 #Número de muestras simuladas (M)
4 Nsim=1000
5 #Tandas de simulaciones (T)
6 tandasim=30
7
8 #####
9 ## DATOS TRANSFORMADOR ELÉCTRICO ##
10 #####
11
12 ##Muestra original
13 observada=c(2.1, 3.4, 3.7, 2.7, 3.2, 3.5, 2.7,2.7, 3.4, 3.3,3, 2.9, 3, 3.4, 2.8, 3.5,
14             3.5, 3.4, 3.4, 3.6)

```

```

14 ##Resolución del instrumento de medición
15 epsilon=0.1
16 ##Extremos izquierdos de intervalos
17 iinth=observada-epsilon
18 ##Extremos derechos de intervalos
19 sinth=observada
20 ##Matriz de intervalos (nx2) para la muestra observada
21 intervalosh=cbind(iinth, sinth)
22
23 ##Valores iniciales para maximizar la log-verosimilitud
24 #Valores Iniciales de Weibull en GVE
25 muweib=min(iinth)
26 yordw=observada-muweib
27 lnx=log(yordw)
28 agumb=mean(lnx)
29 sigweib=exp(agumb)
30 betaweib=1/(sd(lnx)*sqrt((length(lnx)-1)/length(lnx)))
31 weibini=weibagve(muweib, sigweib, betaweib)
32
33 #Valores Iniciales de Fréchet en GVE
34 mufre=max(sinth)+0.0001
35 yordf=mufre-observada
36 lnxf=log(yordf)
37 agumf=mean(lnxf)
38 bgumf=sd(lnxf)*sqrt((length(lnxf)-1)/(length(lnxf)))
39 betafre=1/bgumf
40 sigfre=exp(-agumf)
41 frecini=frecagve(mufre, sigfre, betafre)
42
43 #Comparación de verosimilitudes
44 lvweib=optim(weibini, lvgvemd, intervalos=intervalosh, method="Nelder-Mead")$value
45 lvfrec=optim(frecini, lvgvemd, intervalos=intervalosh, method="Nelder-Mead")$value
46 if(lvweib<=lvfrec){
47   aini=weibini[1]
48   bini=weibini[2]
49   cini=weibini[3]
50   lvmaximo=lvweib} else {
51   aini=frecini[1]
52   bini=frecini[2]
53   cini=frecini[3]
54   lvmaximo=lvfrec}
55
56 #Estimadores de máxima verosimilitud de la muestra observada y su transformación a
   parametrización con cuantiles
57 EMVS=optim(c(aini, bini, cini), lvgvemd, intervalos=intervalosh, method="Nelder-Mead")$par
58 #Reparametrización en cuantiles 5%, 10% y 50%
59 EMVSqa005=reparqa(EMVS[1], EMVS[2], EMVS[3], 0.05) [2:4]
60 EMVSqa01=reparqa(EMVS[1], EMVS[2], EMVS[3], 0.1) [2:4]
61 EMVSqa05=reparqa(EMVS[1], EMVS[2], EMVS[3], 0.5) [2:4]
62
63 ##Matrices para almacenar los estimadores de la distribución Gama estimada para la
   estadística de razón de verosimilitud de cada parámetro de la DGVE
64 pargamaest=matrix(0, ncol=12, nrow=tandasim)
65 colnames(pargamaest)=c("aWA", "bWA", "aWB", "bWB", "aWC", "bWC", "aWQa0.05", "bWQa0.05", "aWQa0.1",
   "bWQa0.1", "aWQa0.5", "bWQa0.5")
66 rownames(pargamaest)=rownames(pargamaest, do.NULL = FALSE, prefix = "Tanda")
67 gamaest=matrix(0, ncol=12, nrow=tandasim)
68 colnames(gamaest)=c("aphWA", "betWA", "aphWB", "betWB", "aphWC", "betWC", "aphWQa0.05", "betWQa0.05",
   "aphWQa0.1", "betWQa0.1", "aphWQa0.5", "betWQa0.5")
69 rownames(gamaest)=rownames(gamaest, do.NULL = FALSE, prefix = "Tanda")
70
71 ##Matriz para almacenar los niveles propuestos

```

```

72 niveles=matrix(0,ncol=6,nrow=tandasim)
73 colnames(niveles)=c("RpaGa","RpbGa","RpcGa","Rpqa0.05Ga","Rpqa0.1Ga","Rpqa0.5Ga")
74 rownames(niveles)=rownames(niveles, do.NULL = FALSE, prefix = "Tanda")
75
76 #####Tandas de simulaciones
77 k=1
78 ##Inicio tandas
79 while(k<=tandasim){
80
81 ##MxT Muestras simuladas discretizadas redondeadas al extremo derecho del intervalo
82 simulada=ceiling(rgvemin(Nsim*length(observada),EMVS[1],EMVS[2],EMVS[3])/epsilon)*
      epsilon
83 ##Almacenar cada muestra de las M en una fila de la matriz
84 simuladas=matrix(simulada,ncol=length(observada),byrow=TRUE)
85
86 ##Matriz para almacenar EMVs de las muestras
87 emvsmuestras=emvsqa005muestras=emvsqa01muestras=emvsqa05muestras=matrix(0,ncol=3,nrow=
      Nsim)
88 ##Vectores para almacenar valores de la logverosimilitud perfil evaluada en el EMV de la
      muestra original
89 lpa=lpb=lpc=lpqa005=lpqa01=lpqa05=rep(0,Nsim)
90 ##Vector para almacenar la log-verosimilitud evaluada en el EMV
91 labc=rep(0,Nsim)
92
93 ##Extremos intervalos vacíos
94 infer=NULL
95 super=NULL
96
97 for(i in 1:Nsim){
98   ##Extremos izquierdos de los intervalos para cada muestra
99   infer=simuladas[i,]-epsilon
100   ##Extremos derechos de los intervalos para cada muestra
101   super=simuladas[i,]
102   ##Matriz de nx2 con los extremos de los intervalos
103   intervalosim=cbind(infer,super)
104
105   ##Valores iniciales para maximizar la verosimilitud
106   #Propuesta de Valores Iniciales de Weibull en GVE
107   muweib=min(infer)
108   yordw=simuladas[i,]-muweib
109   lnx=log(yordw)
110   agumb=mean(lnx)
111   sigweib=exp(agumb)
112   betaweib=1/(sd(lnx)*sqrt((length(lnx)-1)/length(lnx)))
113   weibini=round(weibagve(muweib,sigweib,betaweib),8)
114   #Propuesta de Valores Iniciales de Fréchet en GVE
115   mufre=max(super)+0.0001
116   yordf=mufre-simuladas[i,]
117   lnxf=log(yordf)
118   agumf=mean(lnxf)
119   bgumf=sd(lnxf)*sqrt((length(lnxf)-1)/(length(lnxf)))
120   betafre=1/bgumf
121   sigfre=exp(-agumf)
122   frecini=round(frecagve(mufre,sigfre,betafre),8)
123
124   #Comparación de verosimilitudes
125   lvweib=optim(weibini,lvgvemd,intervalos=intervalosim,method="Nelder-Mead")$value
126   lvfrec=optim(frecini,lvgvemd,intervalos=intervalosim,method="Nelder-Mead")$value
127   if(lvweib<=lvfrec){
128     aini=weibini[1]
129     bini=weibini[2]
130     cini=weibini[3]

```

```

131   lvmaxi=lvweib
132   }else{
133     aini=frecini [1]
134     bini=frecini [2]
135     cini=frecini [3]
136   lvmaxi=lvfrec}
137   #Valor de la verosimilitud en el EMV
138   labc [i]=-lvmaxi
139
140   ##EMVs para cada muestra
141   emvsmuestras [i,]=optim(c(aini,bini,cini), lvgvemd,intervalos=intervalosim, method ="
142     Nelder-Mead")$par
143   ##EMVs reparametrizados a cuantiles 5%, 10% y 50%
144   emvsqa005muestras [i,]=reparqa (emvsmuestras [i,1], emvsmuestras [i,2], emvsmuestras [i
145     ,3],0.05) [2:4]
146   emvsqa01muestras [i,]=reparqa (emvsmuestras [i,1], emvsmuestras [i,2], emvsmuestras [i
147     ,3],0.1) [2:4]
148   emvsqa05muestras [i,]=reparqa (emvsmuestras [i,1], emvsmuestras [i,2], emvsmuestras [i
149     ,3],0.5) [2:4]
150
151   ###Log-verosimilitudes perfil de cada parámetro de interés evaluadas en el parámetro
152   verdadero que se usó para simular las muestras (EMV de la muestra original)
153   lpa [i]=lvperfa (emvsmuestras [i,], intervalosim,10,EMVS[1])
154   lpb [i]=lvperfb (emvsmuestras [i,], intervalosim,10,EMVS[2])
155   lpc [i]=lvperfc (emvsmuestras [i,], intervalosim,10,EMVS[3])
156   lpqa005 [i]=lvperfq (emvsqa005muestras [i,], intervalosim, pasos=10,0.05,EMVSqa005 [2])
157   lpqa01 [i]=lvperfq (emvsqa01muestras [i,], intervalosim, pasos=10,0.1,EMVSqa01 [2])
158   lpqa05 [i]=lvperfq (emvsqa05muestras [i,], intervalosim, pasos=10,0.5,EMVSqa05 [2])
159 }
160
161 ##Resultados para cada tanda de simulaciones. Se tienen M valores de la estadística de
162 razón de verosimilitud para estimar con ellos la distribución Gama
163 ##Log-verosimilitudes relativas perfil de parámetros de interés
164 rpa=lpa-labc
165 rpb=lpb-labc
166 rpc=lpc-labc
167 rpqa005=lpqa005-labc
168 rpqa01=lpqa01-labc
169 rpqa05=lpqa05-labc
170
171 ##Resultados de Relativas perfil, pivotal de razón de verosimilitud y log-
172 verosimilitudes de cada parámetro
173 results=cbind(rpa,rpb,rpc,rpqa005,rpqa01,rpqa05,-2*rpa,-2*rpb,-2*rpc,-2*rpqa005,-2*
174   rpqa01,-2*rpqa05,lpa,lpb,lpc,lpqa005,lpqa01,lpqa05,labc)
175
176 ##Estadística de razón de verosimilitud para cada parámetro y cuantiles
177 wilksa=results [,7]
178 wilksb=results [,8]
179 wilksc=results [,9]
180 wilksqa005=results [,10]
181 wilksqa01=results [,11]
182 wilksqa05=results [,12]
183
184 ##En ocasiones surgen valores negativos por errores numéricos por lo que se conservan
185 los valores positivos de la estadística de razón de verosimilitud para estimar la
186 distribución Gama
187 wa=wilksa [which(wilksa >0)]
188 wb=wilksb [which(wilksb >0)]
189 wc=wilksc [which(wilksc >0)]
190 wqa005=wilksqa005 [which(wilksqa005 >0)]
191 wqa01=wilksqa01 [which(wilksqa01 >0)]
192 wqa05=wilksqa05 [which(wilksqa05 >0)]

```



```

183 #####Estimación de los parámetros de la distribución Gama
184 ##Parámetros para la estadística de razón de verosimilitud (ERV) del parámetro a
185 agamwa=estim.gammacen(wa)[1]
186 bgamwa=estim.gammacen(wa)[2]
187 alphagamwa=bgamwa/2
188 betagamwa=2*agamwa/bgamwa
189 ##Parámetros para la ERV del parámetro b
190 agamwb=estim.gammacen(wb)[1]
191 bgamwb=estim.gammacen(wb)[2]
192 alphagamwb=bgamwb/2
193 betagamwb=2*agamwb/bgamwb
194 ##Parámetros para la ERV del parámetro c
195 agamwc=estim.gammacen(wc)[1]
196 bgamwc=estim.gammacen(wc)[2]
197 alphagamwc=bgamwc/2
198 betagamwc=2*agamwc/bgamwc
199 ##Parámetros para la ERV del parámetro Qa 0.05
200 agamwqa005=estim.gammacen(wqa005)[1]
201 bgamwqa005=estim.gammacen(wqa005)[2]
202 alphagamwqa005=bgamwqa005/2
203 betagamwqa005=2*agamwqa005/bgamwqa005
204 ##Parámetros para la ERV del parámetro Qa 0.1
205 agamwqa01=estim.gammacen(wqa01)[1]
206 bgamwqa01=estim.gammacen(wqa01)[2]
207 alphagamwqa01=bgamwqa01/2
208 betagamwqa01=2*agamwqa01/bgamwqa01
209 ##Parámetros para la ERV del parámetro Qa 0.5
210 agamwqa05=estim.gammacen(wqa05)[1]
211 bgamwqa05=estim.gammacen(wqa05)[2]
212 alphagamwqa05=bgamwqa05/2
213 betagamwqa05=2*agamwqa05/bgamwqa05
214
215 ##Parámetros estimados de la distribución Gama
216 pargamaest[k,]=c(agamwa, bgamwa, agamwb, bgamwb, agamwc, bgamwc, agamwqa005, bgamwqa005,
    agamwqa01, bgamwqa01, agamwqa05, bgamwqa05)
217 ##Parámetros de forma y escala estimados de la distribución Gama
218 gamaest[k,]=c(alphagamwa, betagamwa, alphagamwb, betagamwb, alphagamwc, betagamwb,
    alphagamwqa005, betagamwqa005, alphagamwqa01, betagamwqa01, alphagamwqa05, betagamwqa05)
219
220 ##Niveles de verosimilitud con calculados con la distribución Gama
221 nivela=exp(-qgamma(0.95, alphagamwa, scale=betagamwa)/2)
222 nivelb=exp(-qgamma(0.95, alphagamwb, scale=betagamwb)/2)
223 nivelc=exp(-qgamma(0.95, alphagamwc, scale=betagamwc)/2)
224 nivelqa005=exp(-qgamma(0.95, alphagamwqa005, scale=betagamwqa005)/2)
225 nivelqa01=exp(-qgamma(0.95, alphagamwqa01, scale=betagamwqa01)/2)
226 nivelqa05=exp(-qgamma(0.95, alphagamwqa05, scale=betagamwqa05)/2)
227 ##Niveles para cada tanda de simulaciones
228 niveles[k,]=c(nivela, nivelb, nivelc, nivelqa005, nivelqa01, nivelqa05)
229 k=k+1
230 }
231
232 ##Promedio de niveles para cada parámetro
233 colMeans(niveles)
234
235 ##Estos son los niveles de verosimilitud con los cuales hay que calcular los intervalos
    de verosimilitud perfil de cada parámetro de interés

```



## Bibliografía

- Bai, J., Jakeman, A. J., y McAleer, M. (1991), “A New Approach to Maximum Likelihood Estimation of the Three-Parameter Gamma and Weibull Distributions,” *Australian Journal of Statistics*, 33(3), 397–410.
- Barnard, G. A. (1967), “The Use of the Likelihood Function in Statistical Practice,” in *Proceedings of the Fifth Berkeley Symposium*, Vol. 1, University of California Press, pp. 27–40.
- Barndorff-Nielsen, O. E., y Cox, D. R. (1984), “Bartlett Adjustments to the Likelihood Ratio Statistic and the Distribution of the Maximum Likelihood Estimator,” *Journal of the Royal Statistical Society. Series B (Methodological)*, 46(3), 483–495.
- Bartlett, M. S. (1937), “Properties of Sufficiency and Statistical Tests,” *Proceedings of the Royal Society of London. Series A, Mathematical and Physical Sciences*, 160(901), 268–282.
- Bickel, P. J., y Ghosh, J. K. (1990), “A Decomposition for the Likelihood Ratio Statistic and the Bartlett Correction—A Bayesian Argument,” *The Annals of Statistics*, 18(3), 1070–1090.
- Boyles, R. A. (2008), “The Role of Likelihood in Interval Estimation,” *The American Statistician*, 62(1), 22–26.
- Carroll, K. J. (2003), “On the Use and Utility of the Weibull Model in the Analysis of Survival Data,” *Controlled Clinical Trials*, 24(6), 682 – 701.
- Cheng, R. C. H., y Amin, N. A. K. (1983), “Estimating Parameters in Continuous Univariate Distributions with a Shifted Origin,” *Journal of the Royal Statistical Society. Series B (Methodological)*, 45(3), 394–403.

- Cheng, R. C. H., y Iles, T. C. (1987), “Corrected Maximum Likelihood in Non-Regular Problems,” *Journal of the Royal Statistical Society. Series B (Methodological)*, 49(1), 95–101.
- Cheng, R. C. H., y Iles, T. C. (1990), “Embedded Models in Three-Parameter Distributions and Their Estimation,” *Journal of the Royal Statistical Society. Series B (Methodological)*, 52(1), 135–149.
- Cheng, R. C. H., y Traylor, L. (1995), “Non-regular Maximum Likelihood Problems,” *Journal of the Royal Statistical Society. Series B (Methodological)*, 57(1), 3–44.
- Chernoff, H. (1954), “On the Distribution of the Likelihood Ratio,” *The Annals of Mathematical Statistics*, 25(3), 573–578.
- Coles, S. (2001), *An Introduction to Statistical Modeling of Extreme Value*, Springer Series in Statistics, Springer-Verlag London.
- Coles, S. G., y Dixon, M. J. (1999), “Likelihood-Based Inference for Extreme Value Models,” *Extremes*, 2(1), 5–23.
- Cousineau, D. (2009), “Fitting the Three-Parameter Weibull Distribution: Review and Evaluation of Existing and New Methods,” *IEEE Transactions on Dielectrics and Electrical Insulation*, 16(1), 281–288.
- Feder, P. I. (1968), “On the Distribution of the Log Likelihood Ratio Test Statistic when the True Parameter is “Near” the Boundaries of the Hypothesis Regions,” *The Annals of Mathematical Statistics*, 39(6), 2044–2055.
- Figuroa, G. (2012), *Las Funciones de Verosimilitud Discretizada y Restringida Perfil en la Inferencia Científica*, PhD thesis, Universidad de Sonora, Dept. of Mathematics.
- Fisher, R. A. (1922), “On the Mathematical Foundations of Theoretical Statistics,” *Philosophical Transactions of the Royal Society of London. Series A, Containing Papers of a Mathematical or Physical Character*, 222, 309–368.
- Ghosh, J. K. (1971), “A New Proof of the Bahadur Representation of Quantiles and an Application,” *The Annals of Mathematical Statistics*, 42(6), 1957–1961.
- Gibbons, J. D., y Chakraborti, S. (2011), *Nonparametric Statistical Inference*, Springer Berlin Heidelberg.
- Giesbrecht, F., y Kempthorne, O. (1976), “Maximum Likelihood Estimation in the Three-Parameter Lognormal Distribution,” *Journal of the Royal Statistical Society. Series B (Methodological)*, 38(3), 257–264.

- Green, E. J., Roesch, F. A., Smith, A. F. M., y Strawderman, W. E. (1994), “Bayesian Estimation for the Three-Parameter Weibull Distribution with Tree Diameter Data,” *Biometrics*, 50(1), 254–269.
- Hagiwara, Y. (1974), “Probability of Earthquake Occurrence as Obtained from a Weibull Distribution Analysis of Crustal Strain,” *Tectonophysics*, 23(3), 313 – 318.
- Hasumi, T., Akimoto, T., y Aizawa, Y. (2009), “The Weibull-log Weibull Distribution for Interoccurrence Times of Earthquakes,” *Physica A: Statistical Mechanics and its Applications*, 388(4), 491 – 498.
- Hernández-Campos, F., Marron, J. S., Samorodnitsky, G., y Smith, F. D. (2004), “Variable Heavy Tails in Internet Traffic,” *Performance Evaluation*, 58(2), 261–284.
- Hirose, H., y Lai, T. L. (1997), “Inference from Grouped Data in Three-Parameter Weibull Models with Applications to Breakdown-Voltage Experiments,” *Technometrics*, 39(2), 199–210.
- Kalbfleisch, J. G. (1985), *Probability and Statistical Inference (Vol 2.)*, Springer Texts in Statistics, Springer.
- Kempthorne, O. (1966), “Some Aspects of Experimental Inference,” *Journal of the American Statistical Association*, 61(313), 11–34.
- Lawless, J. F. (2003), *Statistical Models and Methods for Lifetime Data*, Wiley Series in Probability and Statistics, John Wiley & Sons.
- Lindsey, J. K. (1999), “Some Statistical Heresies,” *Journal of the Royal Statistical Society. Series D (The Statistician)*, 48(1), 1–40.
- Liu, S., Wu, H., y Meeker, W. Q. (2015), “Understanding and Addressing the Unbounded “Likelihood” Problem,” *The American Statistician*, 69(3), 191–200.
- Lockhart, R. A., y Stephens, M. A. (1994), “Estimation and Tests of Fit for the Three-Parameter Weibull Distribution,” *Journal of the Royal Statistical Society. Series B (Methodological)*, 56(3), 491–500.
- Luna-Reyes, M., y Llorente-Bousquets, J. (2004), “Papilionoidea (Lepidoptera: Rhopalocera) de la Sierra Nevada, México,” *Acta zoológica mexicana*, 20(2), 79–102.
- Mann, N. R. (1984), “Statistical Estimation of Parameters of the Weibull and Frechet Distributions,” in *Statistical Extremes and Applications*, ed. J. T. de Oliveira, Dordrecht: Springer Netherlands, pp. 81–89.

- Meeker, W. Q., y Escobar, L. A. (1998), *Statistical Methods for Reliability Data (Wiley Series in Probability and Statistics)*, Wiley Series in Probability and Statistics, , 1 edn Wiley-Interscience.
- Montoya, J. A., Díaz-Francés, E., y Sprott, D. A. (2009), “On a Criticism of the Profile Likelihood Function,” *Statistical Papers*, 50(1), 195–202.
- Ortega Ulloa, G. (2015), La Importancia de la Resolución del Instrumento de Medición en el Análisis Estadístico de Eventos de Lluvia, tesis de Maestría, Centro de Investigación en Matemáticas, A.C. (CIMAT).
- Panchang, V. G., y Gupta, R. C. (1989), “On the Determination of Three-Parameter Weibull MLE’s,” *Communications in Statistics - Simulation and Computation*, 18(3), 1037–1057.
- Rinne, H. (2009), *The Weibull Distribution: A Handbook*, Chapman and Hall/CRC.
- Serfling, R. (1980), *Approximation Theorems of Mathematical Statistics*, Wiley Series in Probability and Statistics, Wiley.
- Smith, R. L. (1985), “Maximum Likelihood Estimation in a Class of Nonregular Cases,” *Biometrika*, 72(1), 67–90.
- Smith, R. L., y Naylor, J. C. (1987), “A Comparison of Maximum Likelihood and Bayesian Estimators for the Three-Parameter Weibull Distribution,” *Journal of the Royal Statistical Society. Series C (Applied Statistics)*, 36(3), 358–369.
- Thas, O. (2010), *Comparing Distributions*, Springer Series in Statistics, Springer New York.
- Weibull, W. (1951), “A Statistical Distribution Function of Wide Applicability,” *Journal of Applied Mechanics*, 13, 293–297.
- Wilks, S. S. (1938), “The Large-Sample Distribution of the Likelihood Ratio for Testing Composite Hypotheses,” *The Annals of Mathematical Statistics*, 9(1), 60–62.
- Zanakis, S. H., y Kyparisis, J. (1986), “A Review of Maximum Likelihood Estimation Methods for the Three-Parameter Weibull Distribution,” *Journal of Statistical Computation and Simulation*, 25(1-2), 53–73.
- Zanakis, S. H., y Mann, N. R. (1982), “A Good Simple Percentile Estimator of the Weibull Shape Parameter for Use when all Three Parameters are Unknown,” *Naval Research Logistics Quarterly*, 29(3), 419–428.