



CIMAT

**FACTORES ANTI-SIMÉTRICOS
DE UN ÁLGEBRA**

TESIS

QUE PARA OBTENER EL GRADO DE

DOCTOR EN CIENCIAS

CON ORIENTACIÓN EN MATEMÁTICAS BÁSICAS

PRESENTA

**NAYELI DEL CARMEN
GONZÁLEZ NOVELO**

DIRECTOR DE TESIS

DR. JOSÉ ANTONIO DE LA PEÑA

GUANAJUATO, MÉXICO, SEPTIEMBRE DE 2016

AGRADECIMIENTOS

Agradezco el apoyo económico otorgado por el CONACYT, bajo el programa de becas para doctorado.

Gracias a mi asesor, Dr. José Antonio de la Peña por su paciencia.

Agradezco todas las personas que forman parte del CIMAT, por su amabilidad y asistencia durante mis estudios de doctorado.

Gracias a mis profesores por todas sus enseñanzas.

Gracias a mi Dios por darme vida para presenciar este momento.

A mis padres y mi esposo, por su apoyo y amor.

Resumen

Sea A un álgebra de dimensión finita y dimensión global finita sobre un campo algebraicamente cerrado K . En este trabajo proponemos, por primera vez en el estudio de álgebras asociativas, un sistema de números enteros $\mathfrak{a}_k(\tilde{C}_A)$, $1 \leq k \leq n$, asociados a A ; estos enteros, a los cuales hemos nombrado factores anti-simétricos de A , son definidos a partir de la forma normal anti-simétrica $\tilde{C}_A := C_A^t - C_A$, donde $C_A \in \mathbb{M}_n(\mathbb{Z})$ es la matriz de Cartan de A . Nuestro interés es investigar el impacto de los factores anti-simétricos sobre el álgebra A . Puesto que la matriz anti-simétrica \tilde{C}_A no ha sido explorada con anterioridad, los resultados aquí obtenidos aportan nuevos conocimientos en la teoría de representaciones de álgebras de dimensión finita.

Los factores anti-simétricos de A resultan ser un nuevo método para detectar ciertas características de su carcaj ordinario Q_A . En el caso de álgebras hereditarias, estos números tienen un significado especial; a saber, si el álgebra A posee un factor anti-simétrico mayor o igual que 2 entonces existe al menos un ciclo par sobre el grafo subyacente \bar{Q}_A de su carcaj ordinario. En el caso general (no hereditario), los factores anti-simétricos de A también aportan información importante; detecta la presencia de ciclos sobre Q_A . Al respecto, demostramos que si A es tipo árbol (\bar{Q}_A no tiene ciclos) entonces sólo presenta factores anti-simétricos menores o iguales que uno. Más aún, dada un álgebra canónica $\Lambda_{p,q}$ con parámetros $p \in \mathbb{N}^t$ y $\lambda \in \mathbb{C}^{t-2}$, los factores anti-simétricos distinguen cuándo alguna entrada del parámetro p es par. Siendo precisos, mostramos que si todas las entradas de p son impares entonces el factor anti-simétrico más grande es igual a dos; mientras que si presenta al menos una entrada par, es uno.

Cabe mencionar, que el producto de los factores anti-simétricos de A es igual a la evaluación del polinomio característico de la transformación de Coxeter Φ_A , denotado por χ_A , en el número -1 . Este es un punto importante, pues tanto el análisis espectral de χ_A como su evaluación en ciertos valores (por ejemplo, en uno) están ligados a algunas propiedades de la teoría de A -módulos. Ahora bien, siendo χ_A un invariante bajo categorías derivadas, el producto de los factores anti-simétricos también lo es; nosotros demostramos algo más fuerte, los factores anti-simétricos también son invariantes bajo categoría derivada. Dicho lo anterior, es patente la necesidad de comparar los factores anti-simétricos de A con otros invariantes bajo categoría derivada del álgebra. Por ello, presentamos algunas desigualdades que involucran los factores anti-simétricos, la energía del álgebra $e(A)$ y el radio espectral ρ_A de Φ_A .

Por otra parte, dada la relación entre la teoría de representaciones de un álgebra y la teoría de grafos producida por \bar{Q}_A , indagamos sobre la relación de los factores anti-

simétricos de A y aquellas álgebras obtenidas después de realizar alguna operación de grafos sobre \bar{Q}_A . En esta dirección, probamos que si A es la extensión por un punto de un álgebra B entonces $\mathfrak{a}_k(\tilde{C}_A) \mid \mathfrak{a}_k(\tilde{C}_B) \mid \mathfrak{a}_{k+1}(\tilde{C}_A)$. En el mismo sentido, exploramos la relación entre los factores antisi-métricos de un álgebra D obtenida al operar los carcajes ordinarios de dos álgebras A y B . En particular, construimos un álgebra conexa D , que contiene a A y B como subálgebras convexas, de manera tal que $\chi_A(-1)\chi_B(-1) = \chi_D(-1)$.

Índice general

<i>Introducción</i>	VI
0.1. Herramientas	VII
0.2. Organización del material	VII
<i>1.. Matrices sobre los enteros</i>	1
1.1. La forma normal de Smith	1
1.2. Propiedades de la forma normal de Smith	9
1.3. La forma normal anti-simétrica	15
1.4. Pfaffianos	18
<i>2.. Factores anti-simétricos de un álgebra.</i>	24
2.1. La matriz de Cartan y definición de factores anti-simétricos	26
2.2. Extensiones unipuntuales	29
2.3. Factores anti-simétricos y el polinomio de Coxeter.	30
2.4. Factores anti-simétricos de álgebras derivadamente equivalentes	34
2.5. Factores anti-simétricos del producto tensorial de dos álgebras	37
<i>3.. Factores anti-simétricos de álgebras de caminos</i>	40
<i>4.. Factores anti-simétricos de cocientes de álgebras de Carcaj.</i>	50
<i>5.. Conclusiones y trabajo futuro</i>	57
<i>Referencias</i>	B

Índice de figuras

2.1. Carcaj Δ	28
2.2. álgebra y un subálgebra convexa	30
2.3. Cuadrados conmutativos	32
2.4. Árboles cuyas álgebras de caminos no son derivadamente equivalentes	37
2.5. Factores: C_3 y \mathbb{E}_6	37
2.6. Producto tensorial de carcajes $Q_1 \square Q_2$	37
2.7. Q_1 y Q_2 son subcarcajes convexos de Q_D	38
3.1. n -corona	45
4.1. Carcaj del álgebra canónica $\Lambda(p, \lambda)$	52

Índice de cuadros

1.1. Operaciones elementales de matrices enteras.	4
2.1. Pfaffianos de $R_{2m'}$, $0 \leq m' \leq 3$	33
3.1. Grafos de tipo Dynkin	41
3.2. $\mathcal{S}(\tilde{C}_A)$, donde $A = K[Q]$ es hereditaria de tipo finito o manso.	42
3.3. Polinomio de coxeter de un álgebra hereditaria de tipo finito	43
3.4. Grafos tipo Dynkin extendidos.	44
3.5. Polinomios de Coxeter de álgebras hereditarias de tipo manso.	45

0. INTRODUCCIÓN

A lo largo de este trabajo, A es un álgebra de dimensión finita sobre un campo algebraicamente cerrado K . Además asumimos que A tiene dimensión global finita. De este modo, la categoría derivada acotada $D^b(A)$ de A cumple la dualidad de Serre en la forma $D\text{Hom}(X, Y[1]) = \text{Hom}(Y, \tau(X))$, donde τ es una auto equivalencia de $D^b(A)$. En particular $D^b(A)$ tiene triángulos que casi se dividen y la equivalencia τ funciona como la traslación de Auslander-Reiten de $D^b(A)$.

La traslación de Auslander-Reiten de $D^b(A)$ induce un isomorfismo sobre el grupo de Grothendieck $K_0(A)$ de A llamada la transformación de Coxeter Φ_A . Siendo $K_0(A)$ un grupo abeliano libre, Φ_A es representada por una matriz entera cuyo polinomio de Coxeter es χ_A . Como A tiene dimensión global finita, la transformación de Coxeter coincide con $-C_A^{-1}C_A^t$, donde C_A es la matriz de Cartan de A . Recordemos que C_A es la matriz de tamaño $n \times n$ tal que $(C_A)_{ji} = \dim_k \text{Hom}_A(P(j), P(i))$, $1 \leq i, j \leq n$, donde $\{P(i) \mid 1 \leq i \leq n\}$ es un sistema completo de módulos proyectivos inescindibles.

En esta disertación proponemos estudiar el entero $\chi_A(-1)$ a través de un sistema de números enteros, los factores anti-simétricos de A .

Justificación

El estudio del polinomio de Coxeter ha producido valiosos resultados en la teoría de representaciones de álgebras asociativas. Uno de los resultados más importantes aparece cuando A es un álgebra hereditaria; en este caso, el radio espectral ρ_A del polinomio de Coxeter determina el tipo de representación de A . A saber,

- A es de representación finita si $\rho_A = 1$ y uno no es una raíz de χ_A .
- A es mansa si $\rho_A = 1$ y uno es una raíz del polinomio de Coxeter.
- A es salvaje si $1 < \rho_A$. Más aún, si A es conexa entonces el radio espectral es una raíz simple.

También la evaluación de χ_A en valores especiales ha generado información interesante. Por ejemplo, si A es el álgebra de caminos de una estrella $[p_1, \dots, p_t]$. Esto es, la estrella tiene t brazos de tamaño p_i ; entonces el valor $\chi_A(1)$ determina las posibles formas de la estrella:

- $\chi_A(1) > 0$ si y sólo si $[p_1, \dots, p_t]$ es un grafo tipo Dynkin, correspondiente a un álgebra A de tipo finito.

- $\chi_A = 0$ si y sólo si $[p_1, \dots, p_t]$ es de tipo Dynkin extendido.
- $\chi_A(1) \leq 0$ si y sólo si $[p_1, \dots, p_t]$ no es ni de tipo Dynkin ni Dynkin extendido. Así, A es de tipo salvaje.

Por otra parte, el polinomio de Coxeter es palindrómico. De modo que, una pregunta natural es cuándo un polinomio palindrómico p es realizable como polinomio de Coxeter. Se sabe que no siempre, pero también sabemos que es necesario que $p(-1)$ sea el cuadrado de un número entero. De aquí deducimos que el número $\chi_A(-1)$ debe contener información importante de la estructura del álgebra.

0.1. Herramientas

Una situación que resalta desde un primer momento es que, si el carcaj ordinario Q_A de A tiene un número impar de vértices entonces $\chi_A(-1) = 0$. Esto es una restricción muy fuerte, ya que la cardinalidad del conjunto de vértices de Q_A no parece incidir directamente sobre el tipo de representación del álgebra o la estructura del mismo Q_A . Debido a esto, no estudiaremos de manera directa el entero $\chi_A(-1)$; sino que estudiaremos los factores invariantes de la matriz anti-simétrica $C_A^t - C_A$. Esto podría sonar bastante artificial, sin embargo veremos que $C_A^t - C_A$ y Φ_A son matrices equivalentes en $\mathbb{M}_n(\mathbb{Z})$.

Cabe mencionar que los factores invariantes de algunas matrices provenientes de la teoría de grafos (como la laplaciana y la de incidencia de un grafo) han sido estudiados y han producido resultados interesantes. Calcular factores invariantes no es, en general, un problema sencillo. Así que, calcular factores invariantes asociados a grafos especiales es interesante.

Para abordar el estudio de los factores anti-simétricos de un álgebra, nos apoyamos en teoremas clásicos de la teoría de matrices sobre ideales principales, técnicas de álgebra lineal, algunos conceptos y teoremas de la teoría de grafos, así como propiedades de matrices importantes que parecen en la teoría de representaciones.

0.2. Organización del material

La teoría de álgebras y de grafos utilizada en este trabajo será presentada a medida que la vamos utilizando. En la mayoría de los casos daremos las definiciones de los conceptos involucrados en cada sección y enunciaremos de manera única los resultados que necesitemos. En caso de duda, invitamos al lector a consultar la bibliografía presentada al final de este escrito. Advertimos que muchos de los teoremas de la teoría de representaciones y de grafos que aplicamos en este trabajo son bien conocidos. Algunos de ellos tienen nombre o son recordados por el nombre de su autor. Por ello, no los enunciaremos explícitamente cada vez que hagamos uso de ellos.

En el primer capítulo, desarrollamos la teoría de matrices enteras. Definimos los factores invariantes, el pfaffiano de una matriz y resumimos las propiedades conocidas de dichos objetos. Demostramos el teorema de la forma normal anti-simétrica y la forma

normal de Smith. Este capítulo provee a detalle las pruebas de la mayoría de los teoremas enunciados. Nuestro propósito es compilar material interesante, útil para esta disertación, que se encuentra disperso en distintas fuentes, pero que están estrechamente relacionados.

En el capítulo 2 formulamos la definición de factores anti-simétricos y pfaffiano de un álgebra A . Describimos algunas propiedades de estos y su relación con otras nociones propias del álgebra, como los son la extensión unipuntual y equivalencia derivada. En particular, veremos que existe una relación de divisibilidad entre los factores anti-simétricos del álgebra y los de alguna extensión unipuntual de ella. También veremos que, dos álgebras triangularmente equivalentes poseen la misma lista de factores anti-simétricos.

En el tercer capítulo, nos enfocamos en las álgebras de caminos. Usando las propiedades de los factores anti-simétricos y el pfaffiano, calcularemos los factores anti-simétricos de A cuando el carcaj Q , de A es un diagrama de Dynkin o Dynkin extendido correspondientes a álgebras de tipo finito y manso. Concretamente, notamos que, excepto el caso $\tilde{A}_{p,q}$, los factores antisimétricos no nulos valen 1.

A través de algunos ejemplos presentados en el capítulo 3, notaremos que existe una gran cantidad de álgebras, cuyos factores anti-simétricos no nulos sólo toman valor 1.

Como es natural, nos preguntamos cuál es la propiedad que define a las álgebra KQ cuyos factores anti-simétricos sólo valen 1. En una primera aproximación, conjeturamos que se trata de la ausencia de ciclos (no dirigidos). Sin embargo, exhibiremos álgebras de caminos KQ , donde Q tiene ciclos, pero A no cumple con lo deseado.

Gracias a algunos resultados de la teoría de grafos, podemos establecer condiciones necesarias para que KQ únicamente tenga factores anti-simétricos iguales a 1. A saber,

- $\tilde{C}_A \in \mathbb{M}_n(\mathbb{Z})$ tiene rango n .
- El grafo subyacente de Q no tiene ciclos pares.

En el último capítulo, calculamos los factores anti-simétricos de cocientes de álgebras de caminos kQ/\mathcal{I} . Concretamente, abordamos el caso de álgebras tipo árbol y álgebras canónicas. En el primer caso los factores anti-simétricos son 1 ó 0, mientras que en caso de las álgebras canónicas también es posible obtener el valor 2.

1. MATRICES SOBRE LOS ENTEROS

En este capítulo desarrollamos algunos aspectos relacionados con la equivalencia y congruencia de matrices sobre los números enteros. Nuestro objetivo es enunciar dos resultados importantes en la teoría de matrices: El teorema de la forma normal de Smith y el la forma normal antisimétrica.

1.1. La forma normal de Smith

Sean $k, n \in \mathbb{N}$ tales que $1 \leq k \leq n$, denotamos $Q_{k,n}$ al conjunto de las k -tuplas (i_1, i_2, \dots, i_k) , donde $1 \leq i_1 \leq i_2 \leq \dots \leq i_k$. La cardinalidad de $Q_{k,n}$ es $\binom{n}{k}$. Dados $M \in \mathbb{M}_n(\mathbb{Z})$ y $\omega, \tau \in Q_{k,n}$, denotamos por $M^k(\omega, \tau)$ el $k \times k$ -menor de la matriz M donde ω indica los índices de las filas y τ los de las columnas a considerar. Hay $\binom{n}{k}^2$ de estos $k \times k$ -menores.

El teorema de Cauchy-Binet establece la relación entre los $k \times k$ menores de dos matrices y su producto:

Teorema 1 (Cauchy-Binet): Sean $M, N \in \mathbb{M}_n(\mathbb{Z})$ y $W = MN$ entonces

$$W^k(\omega, \tau) = \sum_{\alpha \in Q_{k,n}} M^k(\omega, \alpha) N^k(\alpha, \tau). \quad (1.1)$$

Prueba. Sean ω y τ las k -tuplas (i_1, i_2, \dots, i_k) y (j_1, j_2, \dots, j_k) , respectivamente.

$$\begin{aligned} W^k(\omega, \tau) &= |(MN)_{i_s, j_t}|_{\substack{i_s \in \omega \\ j_t \in \tau}} \\ &= \begin{vmatrix} \sum_{\alpha_1=1}^n M_{i_1, \alpha_1} N_{\alpha_1, j_1} & \sum_{\alpha_2=1}^n M_{i_2, \alpha_2} N_{\alpha_2, j_1} & \cdots & \sum_{\alpha_k=1}^n M_{i_k, \alpha_k} N_{\alpha_k, j_1} \\ \sum_{\alpha_1=1}^n M_{i_1, \alpha_1} N_{\alpha_1, j_2} & \sum_{\alpha_2=1}^n M_{i_2, \alpha_2} N_{\alpha_2, j_2} & \cdots & \sum_{\alpha_k=1}^n M_{i_k, \alpha_k} N_{\alpha_k, j_2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \sum_{\alpha_1=1}^n M_{i_1, \alpha_1} N_{\alpha_1, j_k} & \sum_{\alpha_2=1}^n M_{i_2, \alpha_2} N_{\alpha_2, j_k} & \cdots & \sum_{\alpha_n=1}^n M_{i_n, \alpha_n} N_{\alpha_n, j_k} \end{vmatrix} \end{aligned}$$

Ya que el determinante es una función multilineal, expandimos el determinante sobre los índices α_r , $1 \leq r \leq n$.

$$W^k(\omega, \tau) = \sum_{\alpha_1, \dots, \alpha_k=1}^n \begin{vmatrix} M_{i_1, \alpha_1} N_{\alpha_1, j_1} & M_{i_2, \alpha_2} N_{\alpha_2, j_1} & \cdots & M_{i_k, \alpha_k} N_{\alpha_k, j_1} \\ M_{i_1, \alpha_1} N_{\alpha_1, j_2} & M_{i_2, \alpha_2} N_{\alpha_2, j_2} & \cdots & M_{i_n, \alpha_n} N_{\alpha_n, j_2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ M_{i_1, \alpha_1} N_{\alpha_1, j_n} & M_{i_2, \alpha_2} N_{\alpha_2, j_n} & \cdots & M_{i_n, \alpha_n} N_{\alpha_n, j_n} \end{vmatrix}$$

En la ecuación anterior, observamos que la i_s -ésima columna es un vector multiplicado por de M_{i_s, α_s} . Aplicamos nuevamente la propiedad multilineal del determinante hasta obtener la siguiente ecuación.

$$W^k(\omega, \tau) = \sum_{\alpha_1, \dots, \alpha_k=1}^n M_{i_1, \alpha_1} M_{i_2, \alpha_2} \cdots M_{i_k, \alpha_k} \begin{vmatrix} N_{\alpha_1, j_1} & N_{\alpha_2, j_1} & \cdots & N_{\alpha_k, j_1} \\ N_{\alpha_1, j_2} & N_{\alpha_2, j_2} & \cdots & N_{\alpha_k, j_2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ N_{\alpha_1, j_k} & N_{\alpha_2, j_k} & \cdots & N_{\alpha_k, j_k} \end{vmatrix} \quad (1.2)$$

$$= \sum_{\alpha_1, \dots, \alpha_n=1}^n M_{i_1, \alpha_1} M_{i_2, \alpha_2} \cdots M_{i_k, \alpha_k} N(\alpha_1, \dots, \alpha_k, \tau). \quad (1.3)$$

Observamos que los índices $\alpha_1, \dots, \alpha_k$ de cada sumando de la ecuación 1.2 pueden tomarse distintos entre sí, pues $N(\alpha_1, \dots, \alpha_n, \tau) = 0$ si alguno se repite.

Ahora bien, queremos reordenar la expresión 1.3 hasta conseguir la ecuación 1.1. Para ello, denotamos por ν_k^* el conjunto de las k -tuplas en $\{1, \dots, n\}^k$ tal que sus entradas son distintas entre sí. Definimos la función ρ_k^* , claramente suprayectiva, sobre ν_k^* del modo siguiente.

$$\begin{aligned} \rho_k^* : \nu_k^* &\rightarrow Q_{k,n} \\ (\alpha_1, \dots, \alpha_k) &\mapsto (\alpha_{r_1}, \dots, \alpha_{r_k}), \end{aligned} \quad (1.4)$$

donde $(\alpha_{r(1)}, \dots, \alpha_{r(k)})$ es un reordenamiento de $(\alpha_1, \dots, \alpha_k)$ tal que $\alpha_{r_1} < \alpha_{r_2} < \cdots < \alpha_{r_k}$. Vinculado a ρ_k^* , definimos un nuevo mapeo Σ_α para cada $\alpha = (\alpha_{r_1}, \dots, \alpha_{r_k}) \in Q_{k,n}$.

$$\begin{aligned} \Sigma_\alpha : \rho_k^{*-1}(\alpha) &\rightarrow S_k^\alpha \\ \beta = (\alpha_1, \dots, \alpha_k) &\mapsto \sigma_\beta = \begin{pmatrix} 1 & \cdots & k \\ r_1 & \cdots & r_k \end{pmatrix}. \end{aligned} \quad (1.5)$$

Esto es, Σ_α asigna a cada ordenada en $\rho_k^{*-1}(\alpha)$ la permutación que la lleva a α . Con los mapeos descritos, podemos expresar 1.3 como sigue.

$$W^k(\omega, \tau) = \sum_{\alpha \in Q_{k,n}} N(\alpha, \tau) \left(\sum_{\beta \in \rho_k^{*-1}(\alpha)} \text{signo}(\sigma_\beta) M_{i_1, \alpha_{\sigma_\beta^{-1}(r_1)}} M_{i_2, \alpha_{\sigma_\beta^{-1}(r_2)}} \cdots M_{i_k, \alpha_{\sigma_\beta^{-1}(r_k)}} \right)$$

Ya que Σ_α es biyectiva para toda α y el signo de una permutación y su inversa son iguales, reescribimos la igualdad anterior en términos de permutaciones de S_k^α .

$$W^k(\omega, \tau) = \sum_{\alpha \in Q_{k,n}} N(\alpha, \tau) \left(\sum_{\sigma_\beta^{-1} \in S_k^\alpha} \text{signo}(\sigma_\beta^{-1}) M_{i_1, \alpha_{\sigma_\beta^{-1}(r_1)}} M_{i_2, \alpha_{\sigma_\beta^{-1}(r_2)}} \cdots M_{i_k, \alpha_{\sigma_\beta^{-1}(r_k)}} \right)$$

Por definición de determinante, $W^k(\omega, \tau) = \sum_{\alpha \in Q_{k,n}} M(\omega, \alpha) N(\alpha, \tau)$. Con lo que concluimos la demostración. \square

Definición 1: Dada $M \in \mathbb{M}_n(\mathbb{Z})$ y $k \leq n$ definimos el k -ésimo **divisor determinantal**, o simplemente determinantal, de M como

$$d_k(M) = \text{mcd}\{M^k(\omega, \tau) : \omega, \tau \in Q_{k,n}\}$$

si $M^k(\omega, \tau) \neq 0$ para algunos $\omega, \tau \in Q_{k,n}$. En otro caso $d_k(M) = 0$.

Sean $M, N \in \mathbb{M}_n(\mathbb{Z})$, recordemos que M es **múltiplo** de N si existen $P, Q \in \mathbb{M}_n(\mathbb{Z})$ tales que $M = PNQ$. El siguiente lema muestra la relación entre los divisores determinantes de una matriz y sus múltiplos.

Lema 2: Sean $M, N \in \mathbb{M}_n(\mathbb{Z})$ tales que M es múltiplo de N , si $1 \leq k \leq n$ entonces

1. Si $d_k(N) = 0$ entonces $d_k(M) = 0$.
2. Si $d_k(N) \neq 0$ entonces $d_k(N) \mid d_k(M)$.

Prueba. Supongamos que $M = PNQ$ para algunos $P, Q \in \mathbb{M}_n(\mathbb{Z})$. Usando dos veces la igualdad 1.1, obtenemos la siguiente ecuación:

$$M^k(\omega, \tau) = \sum_{\alpha, \beta \in Q_{k,n}} P^k(\omega, \alpha) N^k(\alpha, \beta) Q^k(\beta, \tau). \quad (1.6)$$

1. Si $d_k(N) = 0$ entonces $N^k(\omega, \tau) = 0$ para todo α, β en $Q_{k,n}$. Sustituyendo $N^k(\omega, \tau)$ en 1.6 vemos que $M^k(\omega, \tau) = 0$ para todo $\omega, \tau \in Q_{k,n}$. Por definición de divisor determinantal, $d_k(M) = 0$.
2. Si $d_k(N) \neq 0$ entonces $N^k(\alpha, \beta) = n_{\alpha, \beta} d_k(N)$ para algún $n_{\alpha, \beta} \in \mathbb{Z}$. Sustituyendo en 1.1 obtenemos:

$$M^k(\omega, \tau) = \left(\sum_{\alpha, \beta \in Q_{k,n}} P^k(\omega, \alpha) n_{\alpha, \beta} Q^k(\beta, \tau) \right) d_k(N), \quad (1.7)$$

$\omega, \tau \in Q_{k,n}$. La ecuación 1.7 implica que $d_k(N) \mid M^k(\omega, \tau)$, $\omega, \tau \in Q_{k,n}$. Por propiedades de máximo común divisor, concluimos que $d_k(N) \mid d_k(M)$.

□

En el caso en que M es múltiplo de N , digamos $M = UNV$, y además $U, V \in \mathbb{G}l_n(\mathbb{Z})$ decimos que M es una **matriz equivalente** a N . Denotamos este hecho como $M \sim_e N$. Es fácil ver que, en efecto, " \sim_e " es una relación de equivalencia sobre $\mathbb{M}_n(\mathbb{Z})$.

Teorema 3: Sean $M, N \in \mathbb{M}_n(\mathbb{Z})$ tales que $M \sim_e N$ entonces $d_k(M) = d_k(N)$.

Prueba. Supongamos que $M = UNV$, donde $U, V \in \mathbb{G}l_n(\mathbb{Z})$, entonces $N = U^{-1}MV^{-1}$. Esto es, M es múltiplo de N y N es múltiplo de M . Dicho esto, observamos lo siguiente:

1. Si $d_k(N) = 0$ entonces, por lema 2 inciso 1), $d_k(M) = d_k(N) = 0$.

2. Si $d_k(N) \neq 0$ entonces, usando lema 2 inciso 2), $d_k(N)|d_k(M)$ y $d_k(M)|d_k(N)$. Por lo tanto $d_k(M) = d_k(N)$.

□

Recordemos que $E \in \mathbb{M}_n(\mathbb{Z})$ es una **matriz elemental** si se puede obtener de $\mathbb{1}_n$ aplicando una sola operación elemental de filas o de columnas. En la siguiente tabla presentamos las matrices elementales y las operaciones de matrices asociadas:

Operaciones elementales	Matriz
Multiplicar el renglón i por ± 1	$F_i(\pm 1) = \mathbb{1}_i \oplus (\pm 1) \oplus \mathbb{1}_{n-i-1}$.
Multiplicar la columna i por ± 1	$[F_i(\pm 1)]^t$
Sumar μ veces el renglón j al renglón i , $\mu \in \mathbb{Z}$	$F_{i,j}(\mu) = \mathbb{1}_n + \mu E_{ji}$
Sumar μ veces la columna j al renglón i , $\mu \in \mathbb{Z}$	$[F_{i,j}(\mu)]^t$
Intercambiar los renglones i y j , $i < j$	$F_{i,j} = \begin{pmatrix} \mathbb{1}_{i-1} & * & * & * & * \\ * & * & * & 1 & * \\ * & * & \mathbb{1}_{i-j-2} & * & * \\ * & 1 & * & * & * \\ * & * & * & * & \mathbb{1}_{n-i-j} \end{pmatrix}$
Intercambiar las columnas i y j , $i < j$	$[F_{i,j}]^t$

Tab. 1.1: Operaciones elementales de matrices enteras.

Las operaciones de renglón (columna) sobre $M \in \mathbb{M}_n(\mathbb{Z})$ se obtienen a través de la multiplicación izquierda (derecha) por la matriz elemental correspondiente.

El siguiente resultado es de suma importancia, sobre él se sustenta la prueba del teorema de la forma normal de Smith.

Teorema 4: Sean $x_1, \dots, x_n \in \mathbb{Z}$ y $\delta_n = \text{mcd}\{x_1, \dots, x_n\}$. Consideremos la matriz renglón $v = [x_1, \dots, x_n]$, existe una matriz $D_n \in M_n(\mathbb{Z})$ cuyo primer renglón es v y tal que $\det(D_n) = \delta_n$.

Prueba. La prueba es por inducción. Sea $n = 2$, ya que δ_2 es la combinación lineal positiva mínima de x_1 y x_2 , existen $\rho, \sigma \in \mathbb{Z}$ tales que $\rho x_1 - \sigma x_2 = \delta_2$. Tomemos $D_2 = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 \\ \sigma & \rho \end{pmatrix}$, tenemos que $\det(D_2) = \delta_2$.

Dado $n \in \mathbb{N}$ supongamos que para todo renglón $[x_1, \dots, x_k]$ con $n > k \geq 2$ existe $D_k \in M_k(\mathbb{Z})$ con primer renglón es $[x_1, \dots, x_k]$ y determinante $\delta_k = \text{mcd}\{x_1, \dots, x_k\}$.

Demostremos que el enunciado es verdadero para n . Sea $\delta^* = \text{mcd}\{\delta_{n-1}, x_n\}$ tenemos que $\delta^* | x_n$ y $\delta_{n-1} | x_k$, $1 \leq k \leq n-1$. De aquí $\delta^* | x_k$, $1 \leq k \leq n-1$, de donde concluimos que $\delta^* | \delta_n$. Por otra parte, δ^* es una combinación lineal entera de x_1, \dots, x_n ,

así que $\delta_n \mid \delta^*$. Por lo tanto $\delta_n = \delta^*$.

Por la afirmación anterior, existen elementos ρ' y σ' tales que $\rho'\delta_{n-1} - \sigma'x_n = \delta_n$. Consideremos la matriz:

$$D_n = \left(\begin{array}{ccc|c} & & & x_n \\ & & & 0 \\ & & D_{n-1} & \vdots \\ & & & 0 \\ \hline \frac{x_1\sigma'}{\delta_{n-1}} & \dots & \frac{x_{n-1}\sigma'}{\delta_{n-1}} & \rho' \end{array} \right).$$

Ya que $\delta_{n-1} \mid x_k$, $1 \leq k \leq n-1$, entonces $D_n \in M_n(\mathbb{Z})$. Sea E_{n-1} la submatriz de D_n obtenida al eliminar su primera fila y su última columna. Expandiendo por menores el determinante de D_n notamos que

$$\det(D_n) = \rho' \det(D_{n-1}) + (-1)^{n-1} x_n \det(E_{n-1}). \quad (1.8)$$

Además,

$$\delta_{n-1} E_{n-1} = \begin{pmatrix} 0 & \delta_{n-1} \mathbb{1}_{n-2} \\ \sigma' & 0 \end{pmatrix} D_{n-1}.$$

Aplicando la función determinante a cada lado de la ecuación anterior tenemos:

$$\begin{aligned} (\delta_{n-1})^{n-1} \det(E_{n-1}) &= (-1)^{n-2} \sigma' (\delta_{n-1})^{n-2} \det(D_{n-1}) \\ &= (-1)^{n-2} \sigma' (\delta_{n-1})^{n-1}, \\ \det(E_{n-1}) &= (-1)^{n-2} \sigma'. \end{aligned} \quad (1.9)$$

Al sustituir 1.9 en 1.8 concluimos que $\det(D_n) = \rho'\delta_{n-1} - \sigma'x_n = \delta_n$. \square

El teorema anterior permanece válido si al enunciarlo sustituimos renglón por columna. La prueba es totalmente análoga. En lo sucesivo, usaremos también la "versión columna".

A continuación enunciamos el teorema de la forma normal de Smith para matrices enteras. El resultado es válido para todo dominio de ideales principales, como se puede ver en [10](págs. 26 -28).

Teorema 5 (La forma normal de Smith): Toda matriz M en $M_n(\mathbb{Z})$ es equivalente a una única matriz diagonal

$$\mathcal{S}(M) = \text{diag}_n(s_1(M), s_2(M), \dots, s_r(M)) \oplus \mathbb{O}_{n-r},$$

donde $\text{rango}(M) = r$, $s_k(M) > 0$ y $s_k(M) \mid s_{k+1}(M)$, $1 \leq k \leq r-1$.

Prueba. Si $M = \mathbb{O}_n$ entonces $\text{rango}(M) = 0$ y $M \sim_e \text{diag}_n(0, \dots, 0)$. Si $M \neq \mathbb{O}_n$ la prueba es por inducción sobre n :

Paso 0. Si $n = 1$ entonces $M = (m)$, $m \in \mathbb{Z}$. Es fácil ver que la matriz $\mathcal{S}(M) = (|m|)$ cumple con las características descritas en el enunciado.

Paso 1. Sean i y j , $1 \leq i, j \leq n$, índices tales que $(M)_{i,j} \neq 0$ y que, $(M)_{s,t} \neq 0$ implica $i \leq s$ y $j \leq t$. Entonces, llevamos $M_{i,j}$ a la posición 1, 1 con operaciones elementales. Así, obtenemos una nueva matriz $M' = F_{1,i}M[F_{1,j}]^t$ equivalente a M con $(M')_{11} \neq 0$.

Paso 2. En este paso obtendremos una matriz M'' , cuya entrada 1, 1 tiene menos factores primos que $M'_{1,1}$. Para esto, recordamos que existen enteros (primos relativos) ρ_i , $1 \leq i \leq n$, tales que $\text{mcd}((M')_{11}, (M')_{21}, \dots, (M')_{n1}) = \sum_{i=1}^n \rho_i (M')_{i1}$. Entonces, por el teorema 4, existe una matriz unimodular U con $[\rho_1, \rho_2, \dots, \rho_n]$ como primer renglón.

Ahora bien, consideramos la matriz UM' y aplicamos nuevamente el teorema 4. En esta ocasión, $\text{mcd}((UM')_{1,1}, (UM')_{1,2}, \dots, (UM')_{1n}) = \sum_{i=1}^n \rho'_i (UM')_{1,i}$ y V es una matriz unimodular, cuya primera columna es $[\rho'_1, \rho'_2, \dots, \rho'_n]$. La matriz $M'' = UM'V$ cumple lo deseado.

Paso 3. Repetimos el proceso descrito hasta obtener una matriz N , tal que $(N)_{1,1} \mid (N)_{1,j}$ y $(N)_{1,1} \mid (N)_{i,1}$, $1 \leq i, j \leq n$. Es decir, la entrada 1, 1 divide todas las entradas de la primera columna y primera fila.

Paso 4. Aplicamos operaciones elementales hasta conseguir una matriz N' cuyas entradas de la primera fila y la primera columna son cero, excepto $(N')_{1,1}$.

Sean $x_i, y_j \in \mathbb{Z}$, $2 \leq i, j \leq n$, tales que $(N)_{1,j} = (N)_{1,1}y_j$ y $(N)_{i,1} = (N)_{1,1}x_i$. Las matrices $F_{1,i}(x_i)$ y $F_{1,j}(y_j)^t$ llevan a cero el elemento i -ésimo de la primera fila de N y el j -ésimo elemento de la primera columna de N , respectivamente, al efectuar la siguiente multiplicación de matrices:

$$N' = F_{1,n}(x_n) \cdots F_{1,2}(x_2)N[F_{1,2}(y_2)]^t \cdots [F_{1,n}(y_n)]^t.$$

Paso 5. Si $(N')_{1,1} \mid (N')_{i,j}$, $2 \leq i, j \leq n$ entonces renombramos a N' por S .

Si existen s, t tales que $(N')_{1,1} \nmid (N')_{s,t}$ entonces sumamos el renglón s al primer renglón de N' . En términos de operaciones elementales, la matriz obtenida es $N'' = F_{1,s}(1)N'$. Aplicamos los pasos del 1 al 4 a la matriz N'' de modo que la entrada 1, 1 de la matriz resultante divide la entrada s, t .

Repetimos este proceso hasta conseguir una matriz $S \sim_e N'$ tal que $(S)_{1,1} \mid (S)_{i,j}$ y tomamos $s_1(M)$ igual a $(S)_{11}$. Esto es posible, pues el número de factores primos del elemento 1, 1 decrece cada vez que aplicamos el paso 2.

Hasta este punto, hemos obtenido una matriz S a través de multiplicaciones sucesivas de matrices unimodulares (elementales u obtenidas por el teorema 4). De aquí, existen matrices unimodulares U_1 y V_1 tales que $U_1MV_1 = S = (s_1) \oplus S'$, donde $S' \in \mathbb{M}_{n-1}(\mathbb{Z})$ y $s_1 \mid (S')_{i,j}$, $1 \leq i, j \leq n-1$.

Paso 6. Consideramos la submatriz $S' \in \mathbb{M}_{n-1}(\mathbb{Z})$ de S obtenida al remover su primer renglón y su primera columna. Por hipótesis de inducción, existen matrices unimodulares U_1 y V' tales que

$$U_2 S' V_2 = \text{diag}_{r-1}(s_2(M), s_3(M), \dots, s_r(M)) \oplus \mathbb{O}_{n-r-1} = D \oplus \mathbb{O}_{n-r-1},$$

donde $s_k(M) \mid s_{k+1}(M)$, $2 \leq i \leq r-1$.

Paso 7. Como se puede observar en los pasos 2 y 5, la primera entrada de la matriz D , $s_2(M)$, es combinación lineal de las entradas de la matriz S' . De aquí, el entero $s_1(M)$ divide $s_2(M)$.

Por otra parte, $\text{diag}_n(s_1(M), s_2(M), \dots, s_r(M)) \oplus \mathbb{O}_{n-r}$ es equivalente a M . En efecto,

$$\begin{aligned} U_1 M V_1 &= (s_1) \oplus S' \\ &= (s_1) \oplus U_2 D V_2 \\ &= [(1) \oplus U_2][(s_1) \oplus D][(1) \oplus V_2] \end{aligned}$$

Por lo que, $[(1) \oplus U_2]^{-1} U_1 M U_2 [(1) \oplus V_2]^{-1} = \text{diag}_n(s_1(M), s_2(M), \dots, s_r(M)) \oplus \mathbb{O}_{n-r}$.

Paso 7 En el paso anterior, sean $U_0 = (1) \oplus U_2]^{-1} U_1$ y $V_0 = U_2 [(1) \oplus V_2]^{-1}$ entonces $\mathcal{S}(M) := \text{diag}_n(s_1(M), s_2(M), \dots, s_r(M)) \oplus \mathbb{O}_{n-r} = U_0 M V_0$.

Es bien conocido que el rango de una matriz, con entradas en un dominio de ideales principales, es igual a $\max\{t \mid d_t(M) \neq 0, 1 \leq t \leq r\}$. Más aún, si $r = \text{rango}(M)$ y $r' = \text{rango}(\mathcal{S}(M))$, la fórmula de Cauchy-Binnet 1.1 da lugar a las siguientes ecuaciones.

$$M^{r+1}(\omega, \tau) = \sum_{\beta \in Q_{k,n}} \sum_{\alpha \in Q_{k,n}} [U_0^{-1}]^{r+1}(\omega, \alpha) \mathcal{S}(M)^{r+1}(\alpha, \beta) [V_0^{-1}]^{r+1}(\beta, \tau) = 0. \quad (1.10)$$

$$\mathcal{S}(M)^{r'+1}(\omega, \tau) = \sum_{\beta \in Q_{k,n}} \sum_{\alpha \in Q_{k,n}} U_0^{r'+1}(\omega, \alpha) M^{r'+1}(\alpha, \beta) V_0^{r'+1}(\beta, \tau) = 0. \quad (1.11)$$

De la igualdad 1.10 deducimos que $r' \geq r$ y de 1.11, que $r \geq r'$. Por lo que, $\text{rango}(M) = \text{rango}(\mathcal{S}(M))$.

Paso 8. La unicidad de la matriz $\mathcal{S}(M) = \text{diag}_n(s_1(M), \dots, s_r(M)) \oplus \mathbb{O}_{n-r}$ es consecuencia de la identidad $d_k(M) = s_1(M) \dots s_k(M)$, $1 \leq k \leq r$. Verifiquemos dicha identidad.

Por el teorema 3, el valor de los determinantes se mantiene bajo relación de equivalencia; es decir, $d_k(M) = d_k(\mathcal{S}(M))$, $1 \leq k \leq r$. En particular, $s_1(M)$ es igual a

$d_1(M) = \text{mcd}\{s_1(M), \dots, s_r(M), 0\} =$, pues $s_1(M) \mid s_k(M), 1 \leq k \leq n$.

Ahora bien, si $i_1, i_2, \dots, i_{t+1} \in \mathbb{N}$ son tales que $1 \leq i_1 < \dots < i_{t+1} \leq n$ entonces $t + 1 \leq i_{t+1}$; Luego, $s_{t+1}(M) \mid s_{i_{t+1}}(M)$. De donde notamos que, $s_1(M) \dots s_k(M) s_{k+1}(M) \mid s_{i_1}(M), \dots, s_{i_{k+1}}(M)$. En consecuencia, al usar la definición de determinantal, obtenemos lo siguiente.

$$\begin{aligned} d_{k+1}(M) &= \text{mcd}\{s_{i_1}(M) \dots s_{i_{k+1}}(M) \mid 1 \leq i_1 < \dots < i_{k+1} \leq n\} \\ &= s_1(M) \dots s_k(M) s_{k+1}(M). \end{aligned} \quad (1.12)$$

Haciendo $d_0(M) = 1$ y despejando $s_k(M)$ de 1.12, tenemos que $s_k(M) = \frac{d_k(M)}{d_{k-1}(M)}$, $1 \leq k \leq \text{rango}(M)$.

Así, los enteros $s_k(M)$ están determinados únicamente por los k -determinantes de M y, por lo tanto, la matriz $\mathcal{S}(M)$ es única. \square

Debido a la unicidad de la forma normal de Smith, no es necesario realizar todos los pasos presentados en la prueba de del teorema 5 para calcular la forma normal de Smith de una matriz X dada. Esto es, dependiendo de las características de la matriz, podemos realizar operaciones elementales de renglones y columnas de manera conveniente que acorten el procedimiento.

En general, calcular la forma normal de Smith puede tomar mucho tiempo. Afortunadamente, existe software que permite el cálculo de la forma normal de Smith de matrices enteras. En este trabajo hemos utilizado *GAP* 4,7 para verificar algunos cálculos.

Para dilucidar algunos pasos de la prueba del teorema 5, presentamos un ejemplo explícito donde aplicamos algunos pasos del procedimiento descrito.

Ejemplo 6: Consideremos la matriz entera $X = \begin{bmatrix} 6 & 2 & 4 \\ 12 & 9 & 18 \\ 3 & 6 & 8 \end{bmatrix}$. Todas las entradas de X son positivas, así que no es necesario aplicar el paso 1.

Con ayuda del algoritmo de Euclides, expresamos $\text{mcd}(6, 2, 4) = 2$ como $6(1) + 2(-4) + 4(1)$. Por el teorema 4, existe una matriz unimodular cuya primera columna es $[1, -4, 1]^t$. Siguiendo la prueba de dicho teorema, obtenemos $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -4 & -3 & -4 \\ 1 & 0 & 2 \end{bmatrix}$, que evidentemente satisface lo requerido. Al multiplicamos X por esa matriz vemos que

$$\begin{bmatrix} 6 & 2 & 4 \\ 12 & 9 & 18 \\ 3 & 6 & 8 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -4 & -3 & -4 \\ 1 & 0 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 6 \\ -6 & -15 & 12 \\ -13 & -15 & -5 \end{bmatrix}.$$

Tal como lo indica el paso 3, usamos la "la versión renglón" del teorema 4 para conseguir una nueva matriz unimodular, la cual multiplicamos por la izquierda del producto anterior.

$$\begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 1 & -2 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 0 & 6 \\ -6 & -15 & 12 \\ -13 & -15 & -5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 15 & -23 \\ 8 & 15 & -6 \\ -12 & 0 & -28 \end{bmatrix} =: N.$$

La primera entrada de la matriz producto es 1 y, trivialmente, divide todas las entradas de la primera fila y la primera columna de N . Entonces, llevamos a cabo el paso 4 hasta conseguir

$$N' := \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -105 & 178 \\ 0 & 180 & -304 \end{bmatrix}$$

Ya que 1 divide todas las entradas de N' , por el paso 5, tomamos $s_1 = 1$. Como lo describe el paso 6, removemos la primera fila y columna de N' . La matriz resultante es $S' := \begin{bmatrix} -105 & 178 \\ 180 & -304 \end{bmatrix}$, la cual tomamos como nuevo punto de inicio.

Realizando el paso 2, notamos matriz unimodular es $\begin{bmatrix} -39 & 17 \\ -23 & 10 \end{bmatrix}$, efectuando una multiplicación de matrices tenemos que

$$\begin{bmatrix} -105 & 178 \\ 180 & -304 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -39 & 17 \\ -23 & 10 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -5 \\ -28 & 20 \end{bmatrix} := S''.$$

La primera entrada de S'' divide todos los elementos de la primera fila y columna de S' . Efectuamos el paso 5 y llegamos a $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -120 \end{bmatrix}$.

Hemos pedido que los enteros de la forma normal de Smith sean positivos así que cambiamos los signos a través de la multiplicación $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -120 \end{bmatrix}$. Con esto, llegamos a la forma normal de Smith de S' , $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 120 \end{bmatrix}$.

Luego, $\mathcal{S}(X) = \text{diag}_3(1, 1, 120)$.

Nota 7: Dentro de la prueba del teorema anterior, demostramos que

$$s_k(M) = \frac{d_k(M)}{d_{k-1}(M)}. \quad (1.13)$$

Entonces, además de la relación de divisibilidad $s_k(M) \mid s_{k+1}(M)$, se cumple $d_k \mid d_{k+1}$, $1 \leq k \leq \text{rango}(M)$.

La matriz $\mathcal{S}(M) = \text{diag}_n(s_1(M), s_2(M), \dots, s_r(M)) \oplus \mathbb{D}_{n-r}$ en el teorema 5 es conocida como la **forma normal de Smith** de M . El número $s_k(M)$, $1 \leq k \leq \text{rango}(M)$, es el k -ésimo **factor invariante** de M .

Con el fin de simplificar algunas pruebas en las siguientes secciones, decimos que M posee $n - \text{rango}(M)$ **factores invariantes nulos**.

1.2. Propiedades de la forma normal de Smith

A continuación establecemos algunas propiedades de la forma normal de Smith, con excepción del primer teorema, todas fueron demostradas por R.C. Thompson en [15], [17] y [16]; sin embargo usaremos un resultado de J.F. Queiró para demostrarlas, tal como él lo hizo en [12].

Sea $x \in \mathbb{Z}^n$, $x = [x_1, x_2, \dots, x_n]^t$. Definimos la función $\nu : \mathbb{Z}^n \rightarrow \mathbb{Z}$ como $\nu(x) = \text{mcd}\{x_1, x_2, \dots, x_n\}$. Esta función ν satisface las siguientes propiedades:

$$x \neq 0 \Rightarrow \nu(x) \neq 0 \quad (\text{a})$$

$$\nu(nx) = n\nu(x) \text{ para cada } n \in \mathbb{Z} \quad (\text{b})$$

$$\text{mcd}\{\nu(x), \nu(y)\} \mid \nu(x + y) \quad (\text{c})$$

$$\nu(x) \mid \nu(Mx) \text{ para toda matriz } M \in \mathbb{M}_n(\mathbb{Z}) \quad (\text{d})$$

$$\nu(Ux) = \nu(x) \text{ para toda } U \in \text{Gl}_n(\mathbb{Z}). \quad (\text{e})$$

Llamaremos $\nu : \mathbb{Z}^n \rightarrow \mathbb{Z}$ la \mathbb{Z} -norma de x . Ahora, sea $M \in \mathbb{M}_n(\mathbb{Z})$. Definamos $\mu : \mathbb{M}_n(\mathbb{Z}) \rightarrow \mathbb{Z}$ como $\mu(M) = \text{mcd}\{\nu(Mx) \mid \nu(x) = 1 \text{ tal que } x \in \mathbb{Z}^n\}$. Usando las propiedades de ν , deducimos las siguiente relaciones:

$$M \neq 0 \Rightarrow \mu(M) \neq 0 \quad (\text{f})$$

$$\mu(nM) = n\mu(M) \text{ para todo } n \in \mathbb{Z} \quad (\text{g})$$

$$\text{mcd}\{\mu(M), \mu(N)\} \mid \mu(M + N) \quad (\text{h})$$

$$\mu(M)\mu(N) \mid \mu(MN) \quad (\text{i})$$

$$\mu(UMV) = \mu(M) \text{ para cualesquiera } U, V \in \text{Gl}_n(\mathbb{Z}) \quad (\text{j})$$

El siguiente teorema nos permite entender los factores invariantes de una matriz en términos de μ .

Teorema 8: Sea $M \in \mathbb{M}_n(\mathbb{Z})$. Entonces para cada k tal que $1 \leq k \leq n$,

$$s_k(M) = \text{mcm}\{\mu(M - Y) \mid \text{rango}(Y) < k\}. \quad (1.14)$$

Prueba. Sean $Y, M \in \mathbb{M}_n(\mathbb{Z})$ y supongamos que $\text{rango}(Y) < 1$. Entonces $Y = 0$ y $\mu(M - Y) = \mu(M)$. La propiedad (j) de μ implica que

$$\begin{aligned} \mu(M) &= \text{mcd}\{\nu(Mx) \mid \nu(x) = 1\} \\ &= \text{mcd}\{\nu(\mathcal{S}(M)x) \mid \nu(x) = 1\} \\ &= \text{mcd}(\{\mathcal{S}(M)e_1 \mid e_1 = [1, 0, \dots, 0]^t\} \cup \{\mathcal{S}(M)x \mid \nu(x) = 1\}) \\ &= \text{mcd}(\{s_1(M)\} \cup \{\sum_{k=1}^n s_k(M)x_k \mid x = [x_1, \dots, x_n]^t \text{ y } \nu(x) = 1\}). \end{aligned}$$

De lo anterior, deducimos que $\mu(M) = s_1(M)$ y, por lo tanto, $s_1(M) = \text{mcm}\{\mu(M - Y) \mid \text{rango}(Y) < 1\}$.

Ahora supongamos que $1 < k \leq n$ y que $\mathcal{S}(M) = M$ -lo cual es posible por la propiedad (j)-. Sea $Y \in \mathbb{M}_n(\mathbb{Z})$ tal que $\text{rango}(Y) < k$.

Existe $w \in \mathbb{Z}^n$ tal que $Yw = 0$, donde $w = \sum_{i=1}^k z_i e_i$, $z_i \in \mathbb{Z}$ y $e_i = [0, \dots, 1, \dots, 0]^t$. Por definición de ν , existe $u \in \mathbb{Z}^n$ tal que $w = \nu(w)u$. Entonces $Yw = \nu(w)(Yu) = 0$, y de aquí $Yu = 0$ con $\nu(u) = 1$. Luego,

$$\begin{aligned}
\mu(M - Y) &= \text{mcd}\{\nu([M - Y]x) \mid \nu(x) = 1\} \\
&\quad \mid \nu([M - Y]u) \\
&= \nu(Mu).
\end{aligned}$$

Ahora bien, u tiene la forma $u = [u_1, u_2, \dots, u_k, 0, \dots, 0]^t$, por lo que

$$\nu(Mu) = \text{mcd}\{s_1(M)u_1, \dots, s_k(M)u_k\} \mid [s_k(M)]\text{mcd}\{u_1, \dots, u_k\} = s_k(M).$$

De aquí, $\mu(M - Y) \mid s_k(M)$. Así, hemos demostrado que $s_k(M)$ es múltiplo de $\mu(M - Y)$, para toda $Y \in \mathbb{M}_n(\mathbb{Z})$ tal que $\text{rango}(Y) < k$; por lo tanto,

$$\text{mcm}\{\mu(M - Y) \mid \text{rango}(Y) < k\} \mid s_k(M). \quad (1.15)$$

Por otra parte, sea $Y_0 = \text{diag}_n(s_1(M), s_2(M), \dots, s_{k-1}(M), 0, \dots, 0) \in \mathbb{M}_n(\mathbb{Z})$. Para esta matriz, $M - Y_0 = \text{diag}_n(0, \dots, 0, s_k(M), 0, \dots, 0)$ así que $\mu(M - Y_0) = s_k(M)$. Por propiedades de mínimo común múltiplo tenemos que

$$s_k(M) \mid \text{mcm}\{\mu(M - Y) \mid \text{rango}(Y) < k\}. \quad (1.16)$$

Haciendo uso de (1.15) y (1.16) concluimos que (1.14) se cumple para toda k tal que $1 < k \leq n$. \square

Corolario 9: Sean $M, N \in \mathbb{M}_n(\mathbb{Z})$ y $k \in \mathbb{N}$ tal que $k + l - 1 \leq n$. Entonces

$$\text{mcd}\{s_k(M), s_l(N)\} \mid s_{k+l-1}(M + N) \quad (1.17)$$

Prueba. Dadas $M, N \in \mathbb{M}_n(\mathbb{Z})$ y $1 \leq k \leq n$, podemos encontrar matrices M_k y $N_k \in \mathbb{M}_n(\mathbb{Z})$ tales que $\text{rango}(M_k) < k$, $\text{rango}(N_k) < k$, $\mu(M - M_k) = s_k(M)$ y $\mu(N - N_k) = s_k(N)$.

Ahora bien, por la caracterización (1.14) tenemos que

$$\begin{aligned}
s_{k+l-1}(M + N) &= \text{mcm}\{\mu(M + N - Y) \mid Y \in \mathbb{M}_n(\mathbb{Z}) \text{ y } \text{rango}(Y) < k + l - 1\} \\
&=: \mu_{k+l-1}^{M+N}.
\end{aligned}$$

Ya que $\text{rango}(M_k + N_l) < k + l - 1$ tenemos lo siguiente:

$$\mu(M + N - [M_k + N_l]) = \mu([M + M_k] + [N - N_l]) \mid \mu_{k+l-1}^{M+N}$$

Aplicando la propiedad (h) de μ , tenemos

$$\text{mcd}\{\mu(M - M_k), \mu(N - N_l)\} \mid \mu([M + M_k] + [N - N_l]).$$

Por lo tanto $\text{mcd}\{s_k(M), s_l(N)\} \mid s_{k+l-1}(M + N)$. \square

En las pruebas de los corolarios siguientes se usarán notaciones análogas a M_k y μ_{k+l-1}^∞ , introducidas en la demostración de (1.17).

Corolario 10: Sean $M, N \in \mathbb{M}_n(\mathbb{Z})$ y sea k tal que $k + l - 1 \leq n$. Entonces

$$s_k(M)s_l(N) \mid s_{k+l-1}(MN) \quad (1.18)$$

Prueba. La ecuación (1.14) nos dice que $s_{k+l-1}(MN) = \mu_{k+l-1}^{MN}$.

Sea $Y_0 = MN_l - M_k[N - N_l]$, tenemos que $\text{rango}(Y_0) < k + l - 1$ y $\mu([MN - Y_0]) = \mu([M - M_k][N - N_l])$.

La propiedad (i) de μ y la definición de M_k y N_k implican que

$$\mu([M - M_k])\mu([N - N_l]) \mid \mu([M - M_k][N - N_l]) = s_k(M)s_k(M).$$

□

Corolario 11: Sean $M, N \in \mathbb{M}_n(\mathbb{Z})$ y $k > 0$. Si $\text{rango}(M - N) \leq k$ entonces, para todo $l \in \mathbb{N}$ tal que $k + l \leq n$, se cumple

$$s_k(M) \mid s_{k+l}(N) \quad \text{y} \quad s_k(N) \mid s_{k+l}(M). \quad (1.19)$$

Prueba. Notamos que $s_{k+l}(M) = s_{[k+1]+[l-1]}([M - N] + N)$. Usando el corolario (1.17) tenemos

$$\text{mcm}\{s_{k+1}(M - N), s_l(N)\} \mid s_{k+l}(M) \quad (1.20)$$

Ya que $\text{rango}(M - N) \leq k$, tenemos que $s_{k+1}(M - N) = 0$, sustituyendo esto en 1.20 concluimos que $s_k(M) \mid s_{k+l}(N)$.

La relación $s_k(N) \mid s_{k+l}(M)$ se obtiene al intercambiar M y N en el argumento anterior, pues $\text{rango}(M - N) = \text{rango}(N - M)$. □

Lema 12: Sea $M \in \mathbb{M}_n(\mathbb{Z})$ y supongamos que $N' \in \mathbb{M}_{n-1 \times n}(\mathbb{Z})$ es una submatriz de M . Entonces

$$\mu(M) \mid \mu(N), \quad (1.21)$$

donde $N = \begin{bmatrix} N' \\ 0 \end{bmatrix} \in \mathbb{M}_n(\mathbb{Z})$.

Prueba. $M \sim_e \begin{bmatrix} N' \\ v \end{bmatrix}$ para algún $v \in \mathbb{Z}^n$, y por (j) $\mu(M) = \mu\left(\begin{bmatrix} N' \\ v \end{bmatrix}\right)$.

Si $x = [x_1, x_2, \dots, x_n] \in \mathbb{Z}^n$, tal que $\nu(x) = 1$ entonces $Mx = [N'x, v \cdot x]^t$ y $Nx = [N'x, 0]^t$. Por propiedades de máximo común divisor se cumple que $\nu(Mx) \mid \nu(Nx)$.

Ahora bien, por definición de μ tenemos que $\mu(M) \mid \nu(Mx)$ y, por tanto, $\mu(M) \mid \nu(Nx)$. Ya que x fue tomado arbitrario, la definición de $\mu(N)$ nos dice que $\mu(M) \mid \mu(N)$. □

Corolario 13: Sea $M \in \mathbb{M}_n(\mathbb{Z})$ y $N' \in \mathbb{M}_{n-p, n-q}(\mathbb{Z})$ una submatriz de M . Sea $N = \begin{bmatrix} N' & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \in \mathbb{M}_n(\mathbb{Z})$. Entonces, si $1 \leq k \leq \min\{n-p, n-q\}$

$$s_k(M) \mid s_k(N) \mid s_{k+[p+q]}(M), \quad (1.22)$$

donde $s_j(M) = 0$ para toda $j > n$.

Prueba. Supongamos que $p+q=1$. Si $k=1$ sabemos que $s_1(M) = d_k(M) \mid d_k(N) = s_1(N)$.

Supongamos que $k > 1$. Sea $X \in \mathbb{M}_n(\mathbb{Z})$ y Y' la submatriz de X obtenida al suprimir su último renglón, y sea $Y = \begin{bmatrix} Y' & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$. Por (1.21) y (1.14)

$$\mu(M-X) \mid \mu(N-Y) \text{ y } \mu(N-Y) \mid s_k(N).$$

Esto implica que $s_k(N)$ es un múltiplo de $\mu(M-X)$ y por lo tanto $s_k(M) \mid s_k(N)$.

Por otra parte, $\text{rango}(M-N) \leq 1$. Por (1.19) $s_k(N) \mid s_{k+1}(M)$.

Para el caso en que $p+q > 1$, suponemos que para toda $N' \in \mathbb{M}_{n-p, n-q}(\mathbb{Z})$ submatriz de M , tal que $p+q = s-1 < n$, se satisface:

$$s_k(M) \mid s_k(N),$$

donde $N = \begin{bmatrix} N' & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \in \mathbb{M}_n(\mathbb{Z})$ y $1 \leq k \leq \min\{n-p, n-q\}$.

Sea N'_s una submatriz de $M \in \mathbb{M}_{n-p, n-q}(\mathbb{Z})$ tal que $p+q = s$. N'_s es submatriz de alguna matriz $N'_{s-1} \in \mathbb{M}(\mathbb{Z})_{n-p', n-q'}$ tal que $p'+q' = s-1$ y, que a su vez, es submatriz de M . Por hipótesis de inducción

$$s_k(M) \mid s_k(N_{s-1}) \quad \text{y} \quad s_k(N_{s-1}) \mid s_k(N_s),$$

donde N_s , y N_{s-1} se definen análogamente a N . Por transitividad $s_k(M) \mid s_k(N_s)$.

Ya que $\text{rango}(M-N_s) \leq s$, (1.19) implica $s_k(N_{s-1}) \mid s_{k+s}(M)$. Por lo tanto $s_k(M) \mid s_k(N_{s-1}) \mid s_{k+s}(M)$. \square

Teorema 14: Supongamos que para cada matriz $M \in \mathbb{M}_n(\mathbb{Z})$ asociamos una sucesión de números enteros no negativos $h_1(M), \dots, h_n(M)$ tal que las siguientes propiedades se cumplen:

- (0) $h_i(M) \mid h_{i+1}(M)$
- (1) $h_1(cM) = ch_1(M)$
- (2) $\text{mcd}\{h_k(M), h_1(N)\} \mid h_k(M+N)$ para todo k , cuando $M+N$ existe.
- (3) $h_k(M) \mid h_k(PMQ)$, siempre que PMQ existe.

- (4) Si $k > \text{rango}(M)$ entonces $h_k(M) = 0$
 (5) Si $k \leq n$ entonces $h_k(cI_n) \mid c$ para todo $c \in \mathbb{Z}$.

Entonces $h_k(M) = s_k(M)$, $k = 1, \dots, n$.

Prueba. Paso 1. Si N es una submatriz de M entonces $h_k(M) \mid h_k(N)$ para todo k . En efecto, sin pérdida de generalidad supongamos que $M = \begin{bmatrix} N & X_1 \\ X_2 & X_3 \end{bmatrix}$, donde $N \in \mathbb{M}_{n \times m}$, entonces

$$N = \begin{bmatrix} I_n & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} N & X_1 \\ X_2 & X_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_m & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

El axioma (3) implica que $h_k(M) \mid h_k(N)$.

Paso 2. Si M y N son matrices equivalentes entonces $h_k(M) = h_k(N)$, $k = 1, \dots, n$.

Supongamos que $N = UMV$ con U, V matrices invertibles, entonces por el axioma (3) $h_k(M) \mid h_k(N)$. También tenemos que $M = U^{-1}NV^{-1}$ y, en consecuencia $h_k(N) \mid h_k(M)$. Por lo tanto $h_k(M) = h_k(N)$.

Paso 3. $h_1(M) = s_1(M)$.

Como sabemos, M es equivalente $\mathcal{S}(M) = \text{diag}_r(s_1(M), \dots, s_r(M)) \oplus \mathbb{O}_{n-r}$. Y, por la relación de divisibilidad entre los factores invariantes de M , $\mathcal{S}(M) = s_1(M)D$ con

$$D = \text{diag}_n\left(1, \frac{s_2(M)}{s_1(M)}, \dots, \frac{s_r(M)}{s_1(M)}, 0, \dots, 0\right) \in \mathbb{M}_n(\mathbb{Z}).$$

Ahora bien, 1 es submatriz de D , entonces por el paso 1 tenemos que $h_1(D) = 1$.

Del paso 2 y el axioma 5, se sigue que $h_1(M) = h_1(\mathcal{S}(M)) = h_1(s_1\mathcal{S}(M)) = s_1h_1(D) = s_1(M)$.

Paso 4. $s_k(M) \mid h_k(M)$, $k = 1, \dots, n$:

Por el paso 2 podemos asumir que M está en su forma normal de Smith. Sea $X_k = \text{diag}_n(s_1(M), \dots, s_{k-1}(M), 0, \dots, 0) \in \mathbb{M}_n(\mathbb{Z})$, entonces $\text{rango}(M) < k$ y por el axioma 4 $h_k(X_k) = 0$. También tenemos,

$$s_1(M - X_k) = h_1(M - X_k) = \text{mcd}\{0, h_1(M - X_k)\} = \text{mcd}\{h_k(X_k), h_1(M - X_k)\}$$

Por el axioma 2 $\text{mcd}\{h_k(X_k), h_1(M - X_k)\} \mid h_1(X_k + M - X_k) = h_k(M)$. Entonces $h_1(M - X_k) \mid h_k(M)$, pero por definición $h_1(M - X_k) = s_k(M)$, de donde se sigue la afirmación.

Paso 5. $h_k(M) \mid s_k(M)$, $k = 1, \dots, n$:

Es suficiente considerar el caso en el que $k < \text{rango}(M)$. Para toda k existen matrices P_k, Q_k invertibles tales que $P_k M Q_k = \text{diag}(s_1(M), \dots, s_k(M))$.

Sea $Y_k = \text{diag}(\frac{s_k(M)}{s_1(M)}, \dots, \frac{s_k(M)}{s_{k-1}(M)}, 1)$. Sea $Z_k = Q_k Y_k$. Entonces $P_k M Z_k = s_k(M) I_k$ de 3 y 5 se sigue que $h_k(M) \mid h_k(P_k M Z_k) = h_k(s_k(M) I_k) \mid s_k(M)$.

Por el paso 4 y 5, concluimos que $h_k(M) = s_k(M)$. \square

1.3. La forma normal anti-simétrica

El último concepto que introducimos en este capítulo es el de congruencia de matrices.

Una matriz M es congruente a una matriz N si existe alguna matriz $P \in \mathbb{G}l_n(\mathbb{Z})$ tal que $M = P N P^t$. La congruencia de matrices es una relación de equivalencia.

Como en el caso del teorema de la forma normal de Smith, el siguiente teorema es válido para matrices sobre ideales principales ([10], págs. 57-59), pero para nuestros fines es suficiente enunciarlo para matrices enteras.

Teorema 15 (Forma normal anti-simétrica): Sea $M \in \mathbb{M}_n(\mathbb{Z})$ una matriz anti-simétrica. Entonces $\text{rango}(M) = 2r$, $r \in \mathbb{Z}^+$ y M es congruente a

$$\begin{bmatrix} 0 & \mathfrak{a}_1(M) \\ -\mathfrak{a}_1(M) & 0 \end{bmatrix} \oplus \begin{bmatrix} 0 & \mathfrak{a}_2(M) \\ -\mathfrak{a}_2(M) & 0 \end{bmatrix} \oplus \dots \oplus \begin{bmatrix} 0 & \mathfrak{a}_r(M) \\ -\mathfrak{a}_r(M) & 0 \end{bmatrix} \oplus \mathbb{O}_{2n-2r}$$

y $\mathfrak{a}_k(M) \mid \mathfrak{a}_{k+1}(M)$, $1 \leq k \leq r$.

Prueba. La prueba la haremos en 3 pasos:

Paso 1. Como un primer paso, demostremos que toda matriz anti-simétrica es congruente a una matriz de la forma

$$\begin{bmatrix} 0 & c_{12} & 0 & \dots & 0 & 0 \\ -c_{12} & 0 & c_{23} & \dots & 0 & 0 \\ 0 & -c_{23} & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & c_{n-1n} \\ 0 & 0 & 0 & \dots & -c_{n-1n} & 0 \end{bmatrix}.$$

Cuando $n = 1$ la afirmación es trivial. Supongamos que toda matriz anti-simétrica $M \in M_{n-1}(\mathbb{Z})$ se puede llevar a la forma deseada y demostremos que el resultado es válido si $M \in M_n(\mathbb{Z})$.

Supongamos que $M \neq 0$ y que el primer renglón $v = [0, a_{1,2}, \dots, a_{1,n}]$ de M tiene alguna entrada no cero. Entonces el máximo común divisor δ de los enteros $a_{1,2}, \dots, a_{1,n}$ es distinto de cero, y existen números enteros primos relativos entre sí, x_2, \dots, x_n , tales que $a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = \delta$.

Por el teorema anterior, existe una matriz $U \in M_{n-1}(\mathbb{Z})$ con $\det(U) = 1$, y por tanto invertible, cuya primera columna es $[x_2, \dots, x_n]^t$.

Sea $V = \begin{bmatrix} 1 & 0_{1 \times n-1} \\ 0_{n-1,1} & U \end{bmatrix}$ y consideremos el producto $B = V^t M V$. La matriz $B = (b_{i,j})_{n \times n}$ posee dos características importantes:

a) La entrada b_{12} es igual a δ :

$$\begin{aligned} b_{12} &= [1 \ 0 \ \dots \ 0] M [0 \ x_2 \ \dots \ x_n]^t \\ &= [0 \ a_{12} \ \dots \ a_{1n}] [0 \ x_2 \ \dots \ x_n]^t \\ &= a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n \\ &= \delta \end{aligned}$$

b) El elemento b_{12} divide b_{1j} : En efecto, si $C_j(V)$ es la j -ésima columna de V tenemos lo siguiente.

$$\begin{aligned} b_{1j} &= [1 \ 0 \ \dots \ 0] M C_j(V) \\ &= [0 \ a_{12} \ \dots \ a_{1n}] C_j(V). \end{aligned}$$

Por lo tanto b_{1j} es una combinación lineal entera de a_{12}, \dots, a_{1n} . Así, $b_{12} \mid b_{1j}$.

Habiendo enfatizado las características de la matriz B , realizamos una serie de operaciones elementales sobre ésta. Dicho en el lenguaje de álgebra de matrices efectuamos el siguiente producto

$$B' = F_{2,n} \left(-\frac{b_{1n}}{b_{12}} \right) \cdots F_{2,3} \left(-\frac{b_{13}}{b_{12}} \right) B \left(F_{2,n} \left(-\frac{b_{1n}}{b_{12}} \right) \cdots F_{2,3} \left(-\frac{b_{13}}{b_{12}} \right) \right)^t.$$

Notemos que la matriz B tiene la siguiente forma:

$$\left(\begin{array}{c|ccc} 0 & b_{12} & 0 & \dots & 0 \\ -b_{12} & & & & \\ 0 & & & & \\ \vdots & & & & \\ 0 & & & & \\ 0 & & & & \end{array} \right),$$

donde B'' es una matriz anti-simétrica en $M_{n-1}(\mathbb{Z})$. Aplicando la hipótesis de inducción, obtenemos una matriz tridiagonal anti-simétrica $C = (c_{ij})_{n \times n}$.

Paso 2. Ahora, lo deseable es que el elemento c_{12} divida a cada elemento de la matriz C . Si no es el caso, consideramos la matriz $C' = F_{n1}(1) \cdots F_{21}(1) C (F_{21}(1))^t \cdots (F_{n1}(1))^t$.

El primer renglón C' es $[0 \ c_{12} - c_{23} \ \dots \ c_{n-2,n-1} - c_{n-1,n} \ c_{n-1,n}]$, y su máximo común divisor $\gamma = \text{mcd}\{c_{12}, c_{23}, \dots, c_{n-1,n}\}$. De este modo γ tiene menos divisores

primos que c_{12} . Así, repitiendo el paso 1 un número finito de veces habremos de conseguir una matriz tridiagonal anti-simétrica G , cuya entrada $(1, 2)$ divide cada elemento de la matriz.

Paso 3. Sea $G = (g_{ij})_{n \times n}$ la matriz obtenida en el paso 2. Como mencionamos $g_{12} \mid g_{ij}$, así que existe $d \in \mathbb{Z}$ tal que $F_{13}(d)F_{13}(d)^t$ es una matriz congruente a G (y de hecho a M), cuya forma es:

$$\left(\begin{array}{cc|c} 0 & g_{12} & \mathbb{O}_{2 \times n-2} \\ -g_{12} & 0 & \\ \hline & \mathbb{O}_{n-2 \times 2} & G' \end{array} \right).$$

El proceso se repite hasta obtener una matriz con la forma

$$\begin{bmatrix} 0 & \mathfrak{a}_1(M) \\ -\mathfrak{a}_1(M) & 0 \end{bmatrix} \oplus \begin{bmatrix} 0 & \mathfrak{a}_2(M) \\ -\mathfrak{a}_2(M) & 0 \end{bmatrix} \oplus \cdots \oplus \begin{bmatrix} 0 & \mathfrak{a}_r(M) \\ -\mathfrak{a}_r(M) & 0 \end{bmatrix} \oplus \mathbb{O}_{2n-2r}$$

y $\mathfrak{a}_k(M) \mid \mathfrak{a}_{k+1}(M)$. □

La matriz obtenida en la prueba del teorema 15 es conocida como la **forma normal anti-simétrica** de M . La forma normal anti-simétrica y la forma normal de Smith de una matriz anti-simétrica están estrechamente relacionadas, tal como establece el siguiente teorema.

Teorema 16: Sean $\mathfrak{a}_1(M), \mathfrak{a}_2(M), \dots, \mathfrak{a}_r(M), 0, \dots, 0$ como en el enunciado del teorema 15. Estos números enteros constituyen una lista completa de los factores invariantes de M . En consecuencia, la forma normal anti-simétrica es única.

Prueba. Si $\mathcal{J}_2 = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ entonces

$$\underbrace{\left[\mathcal{J}_2 \oplus \cdots \oplus \mathcal{J}_2 \right]}_{r\text{-veces}} \oplus \mathbb{I}_{n-2r} \begin{bmatrix} 0 & \mathfrak{a}_1(M) \\ -\mathfrak{a}_1(M) & 0 \end{bmatrix} \oplus \cdots \oplus \begin{bmatrix} 0 & \mathfrak{a}_r(M) \\ -\mathfrak{a}_r(M) & 0 \end{bmatrix} \oplus \mathbb{O}_{n-2r},$$

donde $\mathfrak{a}_k(M) \mid \mathfrak{a}_{k+1}(M)$, es igual a $\text{diag}_{2r}(\mathfrak{a}_1(M), \mathfrak{a}_1(M), \dots, \mathfrak{a}_r(M), \mathfrak{a}_r(M)) \oplus \mathbb{O}_{n-2r} = \mathcal{S}(M)$.

De aquí los $\mathfrak{a}_k(M)$ están completamente determinados y por tanto la forma normal anti-simétrica es única. □

Algunas consecuencias de los teoremas de la forma normal de Smith y el teorema de la forma normal anti-simétrica son listados en el siguiente corolario.

Corolario 17: Para cualesquiera matrices anti-simétricas $M, N \in \mathbb{M}_n(\mathbb{Z})$ los siguientes enunciados son verdaderos.

1. $M \sim_c N$ si y solo si M y N tienen los mismos factores invariantes.
2. Si $M \sim_e N$, entonces $M \sim_c N$.

3. Los factores invariantes $s_{2k-1}(M)$ y $s_{2k}(M)$ de la matriz M son iguales.

Nota 18: Dadas dos matrices enteras cualesquiera (anti-simétricas) \tilde{S}_1 y \tilde{S}_2 con formas normales de Smith (anti-simétricas) S_1, S_2 no siempre es verdad que la forma normal de Smith (anti-simétrica) de $\begin{pmatrix} \tilde{S}_1 & \mathbb{O}_{n \times m} \\ \mathbb{O}_{m \times n} & \tilde{S}_2 \end{pmatrix}$ es la matriz $\begin{pmatrix} S_1 & \mathbb{O}_{n \times m} \\ \mathbb{O}_{m \times n} & S_2 \end{pmatrix}$.

Sin embargo si todos los factores invariantes no nulos de \tilde{S}_1 y \tilde{S}_2 son iguales a 1 la igualdad anterior se cumple trivialmente (salvo acomodo de bloques cero).

1.4. Pfaffianos

Un hecho bien conocido en teoría de matrices enteras es que el determinante de una matriz anti-simétrica $C \in \mathbb{M}_n(\mathbb{Z})$ es el cuadrado de un número entero $\mathfrak{P}(C)$. Este número entero recibe el nombre de **pfaffiano**.

De hecho, esto es verdad aun para matrices con entradas en un anillo conmutativo R . En esta sección demostraremos la afirmación hecha anteriormente. Para ello, introducimos algunas transformaciones y conceptos de álgebra multilineal sobre las cuales se sustenta la prueba. Para complementar esta información, recomendamos el libro [11].

Sea R un anillo conmutativo con unidad, M un R -módulo y $E(M)$ el álgebra exterior de M . Para cada forma bilineal anti-simétrica $\gamma : M \times M \rightarrow R$ y $m \in M$ consideremos la siguiente forma lineal

$$\begin{aligned} M &\rightarrow R \\ \mu &\mapsto \gamma(m, \mu). \end{aligned}$$

Para esta forma lineal (y en general para toda forma lineal sobre el R -módulo M) existe una única antiderivación Δ_m que la extiende a $E(M)$. Dicha antiderivación está dada por

$$\begin{aligned} \Delta_m(\mu) &= \gamma(m, \mu) \\ \Delta_m(m_1 \wedge \dots \wedge m_q) &= \sum_{i=1}^q (-1)^{i+1} \gamma(m, m_i) m_1 \wedge \dots \wedge \hat{m}_i \wedge \dots \wedge m_q \end{aligned}$$

para $\mu, m, m_1, \dots, m_q \in M$. Para cada $m \in M$ definimos el siguiente mapeo.

$$\begin{aligned} L_m : E(M) &\rightarrow E(M) \\ x &\mapsto m \wedge x. \end{aligned}$$

Los mapeos anteriores resultan ser endomorfismos y tienen las siguientes propiedades:

1. Δ_m tiene grado -1 , mientras que L_m , grado 1.
2. $\Delta_{m_1+m_2} = \Delta_{m_1} + \Delta_{m_2}$, $\Delta_{rm} = r\Delta_m$.
3. $L_{m_1+m_2} = L_{m_1} + L_{m_2}$ y $L_{rm} = rL_m$.

Usando los endomorfismos anteriores definimos:

$$\begin{aligned}\Lambda_m : E(M) &\rightarrow E(M) \\ x &\mapsto (L_m + \Delta_m)(x)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\Omega : E(M) &\rightarrow E(M) \\ x &\mapsto \Lambda_x(1_{E(M)}).\end{aligned}$$

Λ y Ω también son endomorfismos de $E(M)$ y cumplen lo siguiente:

1. El mapeo

$$\begin{aligned}M &\rightarrow \text{End}_R(E(M)) \\ m &\mapsto \Lambda_m\end{aligned}$$

es R -lineal y $\Lambda_m \circ \Lambda_m = 0$ para todo $m \in M$.

2. El mapeo anterior se extiende a un homomorfismo $E(M) \rightarrow \text{End}_R(E(M))$ de R -álgebras:

$$\Lambda_{m_1 \wedge \dots \wedge m_p} = (L_{m_1} + \Delta_{m_1}) \circ (L_{m_2} + \Delta_{m_2}) \circ \dots \circ (L_{m_p} + \Delta_{m_p})$$

para $m_1, \dots, m_p \in M$.

3. $\Omega(1_{E(M)}) = 1_{E(M)}$ por lo que induce el mapeo identidad sobre $E_0(M)$. Más aún, si $m \in M$ y $u \in E(M)$, se tiene

$$\Omega(m \wedge u) = (\Lambda_m \circ \Lambda_u)(1_{E(M)}) = \Lambda_m(\Omega(u)) \quad (1.23)$$

y de aquí,

$$\Omega(m \wedge u) = m \wedge \Omega(u) + \Delta_m(\Omega(u)).$$

4. Para cada antiderivación Δ sobre $E(M)$ tenemos $\Omega \circ \Delta = \Delta \circ \Omega$.

Ahora bien, usando la notación anterior introducimos una segunda forma bilineal

$$\begin{aligned}\bar{\gamma} : M &\rightarrow R \\ (m_1, m_2) &\mapsto -\gamma(m_1, m_2).\end{aligned}$$

Definimos $\bar{\Delta}_m, \bar{\Lambda}_x$ y $\bar{\Omega}$ de manera análoga a Δ_m, Λ_x y Ω , de modo que:

1. $\bar{\Delta}_m = -\Delta_m$
2. $\bar{\Omega}(m \wedge u) = m \wedge \bar{\Omega}(u) - \Delta_m(\bar{\Omega}(u))$
3. $\bar{\Lambda}_{m_1 \wedge \dots \wedge m_p} = (L_{m_1} - \Delta_{m_1}) \circ (L_{m_2} - \Delta_{m_2}) \circ \dots \circ (L_{m_p} - \Delta_{m_p})$
4. Ω y $\bar{\Omega}$ son automorfismos inversos.

5.

$$\Delta_{u_1} \circ \Delta_{u_2} \cdots \circ \Delta_{u_p}(m_1 \wedge m_2 \wedge \cdots \wedge m_p) = (-1)^{\frac{p(p+3)}{2}} \det(\gamma(u_i, m_j)). \quad (1.24)$$

Teorema 19: Sea M un R -módulo, $m_1, \dots, m_n \in M$ ($n \geq 1$). Entonces

$$\det(\gamma(m_i, m_j)) = \omega^2,$$

donde ω es la componente de grado cero de

$$(L_{m_1} + \Delta_{m_1}) \circ (L_{m_2} + \Delta_{m_2}) \circ \cdots \circ (L_{m_n} + \Delta_{m_n})(1_{E(M)}). \quad (1.25)$$

Prueba. Sean $u, x \in E(M)$, denotemos por $\pi_0(u)$ la componente homogénea de grado cero de u y sea $x = m_1 \wedge m_2 \wedge \cdots \wedge m_n$.

El elemento x es de grado p . Para llevarlo a un elemento de grado cero, es necesario aplicarle a una transformación de grado $-p$; el único sumando de 1.25 con este grado es $\Delta_{m_1} \circ \Delta_{m_2} \circ \cdots \circ \Delta_{m_p}$. De aquí,

$$\pi_0(\Lambda_x(x)) = \Delta_{m_1} \circ \Delta_{m_2} \circ \cdots \circ \Delta_{m_p}(x) \quad (1.26)$$

Luego, por las ecuaciones 1.24 y 1.26 tenemos que

$$\det(\gamma(m_i, m_j)_{n \times n}) = (-1)^{\frac{p(p+3)}{2}} \pi_0(\Lambda_x(x)). \quad (1.27)$$

Por otra parte, siendo Ω y $\bar{\Omega}(x)$ inversas, tenemos que si $\bar{x} = \bar{\Omega}(x)$ entonces $\Omega(\bar{x}) = x$. Este hecho y la ecuación 1.23 implican,

$$\begin{aligned} \Lambda_x(x) &= \Lambda_x(\Omega(\bar{x})) \\ &= \Lambda_x \circ \Lambda_{\bar{x}}(1_{E(M)}) \\ &= \Lambda_{x \wedge \bar{x}}(1_{E(M)}) \\ &= \Omega(x \wedge \bar{x}). \end{aligned}$$

Recordemos que, $\bar{x} = \bar{\Omega}(x) = (L_{m_1} - \Delta_{m_1}) \circ (L_{m_2} - \Delta_{m_2}) \circ \cdots \circ (L_{m_p} - \Delta_{m_p})(1_{E(M)})$. Esto implica que \bar{x} es una R -combinación de los elementos $m_{i_1} \wedge m_{i_2} \wedge \cdots \wedge m_{i_h}$. Además, $x \wedge m_{i_1} \wedge m_{i_2} \wedge \cdots \wedge m_{i_h} = 0$ para todo $h > 0$. Así que,

$$x \wedge \bar{x} = \pi_0(\bar{x})x. \quad (1.28)$$

De la ecuación 1.28 tenemos que $\Lambda_x(x) = \Omega(\pi_0(\bar{x})x) = \pi_0(\bar{x})\Omega(x)$, pues $\pi_0(\bar{x}) \in R$.

Ahora nuestro propósito es mostrar $\pi_0(\Omega(x)) = (-1)^{\frac{p(p+3)}{2}} \pi_0(\bar{x})$. Para que, usando 1.27, concluyamos que $\det((\gamma(m_i, m_j)_{n \times n})) = \pi_0(\bar{x})^2$.

Con este fin, reescribimos Λ_x como $\sum_{s=0}^p \Lambda_{p-2s,x}$, donde $\Lambda_{p-2s,x}$ es un endomorfismo de $E(M)$ de grado $p-2s$. En consecuencia, $\Lambda_x = (-1)^s \sum_{s=0}^p \Lambda_{p-2s,x}$. De esta manera,

$$\Omega(x) = \sum_{s=0}^p \Lambda_{p-2s,x}(1_{E(M)}) \quad y \quad \bar{x} = \sum_{s=0}^p (-1)^s \Lambda_{p-2s,x}(1_{E(M)}).$$

Entonces, $\pi_0(\Omega(x)) = \Lambda_{0,x}(1_{E(M)})$ y $\pi_0(\Omega(\bar{x})) = \Lambda_{p-2s,x}(1_{E(M)})$. De lo anterior,

1. Si p es impar $\pi_0(\bar{x}) = 0 = \pi_0(\Omega(x))$. Ya que una matriz cuadrada de tamaño impar siempre es cero. La ecuación deseada se cumple.
2. Si p es par $p = 2k$ entonces $\pi_0(\Omega(x)) = \Lambda_{0,x}(1_{E(M)}) = (-1)^{k(p+3)} \pi_0(\bar{x})$.

Pues, si k es par $(-1)^{\frac{p(p+3)}{2}} = (-1)^{k(p+3)} = 1 = (-1)^k$. Mientras que, si k es impar $(-1)^{k(p+3)} = (-1)^{k(2(k+1)+1)} = -1 = (-1)^k$.

Por lo tanto, $\omega = \pi_0(\Omega(x)) = (-1)^{\frac{p(p+3)}{2}} \pi_0(\bar{x})$ y concluye la demostración. \square

Nuestro interés al enunciar el teorema 19 es probar que el pfaffiano de una matriz anti-simétrica entera siempre existe.

En efecto, tomamos $m = e_i$, $1 \leq i \leq n$, donde $\{e_1, \dots, e_n\}$ es la base canónica de \mathbb{Z}^n ; dada una matriz anti-simétrica $X \in \mathbb{M}_n(\mathbb{Z})$ elegimos la forma bilineal anti-simétrica γ tal que $\gamma(e_i, e_j) = e_i^t X e_j = (X)_{ij}$. De este modo, $\det(\gamma(e_i, e_j)) = \det(X)$.

Aunque la prueba del teorema 19 también indica que el pfaffiano es la componente cero de $(L_{m_1} + \Delta_{m_1}) \circ (L_{m_2} + \Delta_{m_2}) \circ \dots \circ (L_{m_n} + \Delta_{m_n})(1_{E(M)})$, resulta poco práctico aplicar esta fórmula cada vez que necesitamos conocer el pfaffiano de una matriz. Sin embargo, plasmamos la técnica propuesta en el teorema 19 con el ejemplo 20.

Antes de presentar el ejemplo, notemos que, en el caso que nos interesa, $\Lambda_{e_i}(x) = e_1 \wedge x$, $x \in E(\mathbb{Z})$ y $\Delta_{e_i}(x_1 \wedge \dots \wedge x_p) = \sum_{j=1}^n (-1)^{j+1} (e_i^t X x_j) x_1 \wedge \dots \wedge \hat{x}_j \wedge \dots \wedge x_p$, $x_i \in \mathbb{Z}^n$, $1 \leq i \leq n$. En particular, notamos que L_{e_i} aumenta un grado al elemento evaluado, mientras que Δ_{e_i} disminuye un grado.

Ejemplo 20: Sea $X = \begin{bmatrix} 0 & -3 & -3 & -9 \\ 3 & 0 & -1 & -3 \\ 3 & 1 & 0 & -3 \\ 9 & 3 & 3 & 0 \end{bmatrix}$, para calcular el pfaffiano de X debemos calcular $(L_{e_1} + \Delta_{e_1}) \circ (L_{e_2} + \Delta_{e_2}) \circ (\Lambda_{e_3} + \Delta_{e_3}) \circ (L_{e_4} + \Delta_{e_4})(1_{E(\mathbb{Z})})$ y tomar la componente cero.

Por las propiedades de linealidad de los endomorfismos Λ_{e_i} y Δ_{e_i} , podemos distribuir las composiciones indicadas, de tal suerte que los sumandos obtenidos son composiciones de la forma $G_1 G_2 G_3 G_4$, donde $G_i = \Lambda_i$ ó $G_i = \Delta_i$.

Por otra parte, estamos interesados solamente en la componente cero de $(L_{e_1} + \Delta_{e_1}) \circ (L_{e_2} + \Delta_{e_2}) \circ (\Lambda_{e_3} + \Delta_{e_3}) \circ (L_{e_4} + \Delta_{e_4})(1_{E(\mathbb{Z})})$, así que analizamos los posibles grados de

$G_1G_2G_3G_4(1_{E(\mathbb{Z})})$; ya que $1_{E(\mathbb{Z})}$ es de grado cero y queremos obtener este grado después de evaluar, necesitamos que para dos valores de i $G_i = \Lambda_{e_i}$ y para los dos restantes $G_i = \Delta_{e_i}$. Además, si $G_4 = \Delta_{e_4}$ entonces $G_4(1_{E(\mathbb{Z})})$ tiene grado -1 y $G_4(1_{E(\mathbb{Z})}) = 0$; por la linealidad de los G_i , también $G_1G_2G_3G_4(1_{E(\mathbb{Z})}) = 0$.

Por lo anterior, descartamos la mayoría de los sumandos $G_1G_2G_3G_4(1_{E(\mathbb{Z})})$ y sólo nos resta analizar los siguientes sumandos:

- $\Delta_{e_1} \circ \Delta_{e_2} \circ \Lambda_{e_3} \circ \Lambda_{e_4}(1_{E(\mathbb{Z})})$
- $\Delta_{e_1} \circ \Lambda_{e_2} \circ \Delta_{e_3} \circ \Lambda_{e_4}(1_{E(\mathbb{Z})})$
- $\Lambda_{e_1} \circ \Delta_{e_2} \circ \Delta_{e_3} \circ \Lambda_{e_4}(1_{E(\mathbb{Z})})$

Usando las propiedades de los endomorfismos Λ_{e_i} y Δ_{e_i} , calculamos el valor de los sumandos listados.

$$\begin{aligned} \Delta_{e_1} \circ \Delta_{e_2} \circ \Lambda_{e_3} \circ \Lambda_{e_4}(1_{E(\mathbb{Z})}) &= \Delta_{e_1} \circ \Delta_{e_2} \circ \Lambda_{e_3}(e_4) \\ &= \Delta_{e_1} \circ \Delta_{e_2}(e_4 \wedge e_3) \\ &= \Delta_{e_1}(-3e_3 - (-1)e_4) \\ &= -3\Delta_{e_1}(e_3) + \Delta_{e_1}(e_4) \\ &= -3(-3) - 9 = 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Delta_{e_1} \circ \Lambda_{e_2} \circ \Delta_{e_3} \circ \Lambda_{e_4}(1_{E(\mathbb{Z})}) &= \Delta_{e_1} \circ \Lambda_{e_2} \circ \Delta_{e_3}(e_4) \\ &= \Delta_{e_1} \circ \Lambda_{e_2}(-3 \cdot 1_{E(\mathbb{Z})}) \\ &= -3\Delta_{e_1}(e_2) \\ &= -3(-3) = 9. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Lambda_{e_1} \circ \Delta_{e_2} \circ \Delta_{e_3} \circ \Lambda_{e_4}(1_{E(\mathbb{Z})}) &= \Lambda_{e_1} \circ \Delta_{e_2} \circ \Delta_{e_3}(e_4) \\ &= \Lambda_{e_1} \circ \Delta_{e_2}(-3 \cdot 1_{E(\mathbb{Z})}) \\ &= -3\Lambda_{e_1} \circ \Delta_{e_2}(1_{E(\mathbb{Z})}) \\ &= -3\Lambda_{e_1}(0) = 0 \end{aligned}$$

Por los los cálculos anteriores, obtenemos que el pfaffiano de la matriz X es 9.

Como podemos observar en el ejemplo anterior, calcular el pfaffiano de una matriz antisimétrica es un poco tedioso. No obstante, el pfaffiano tiene propiedades que permiten calcularlo con, tal vez, menor esfuerzo. Entre las propiedades más útiles, tenemos la fórmula de recursión del pfaffiano.

Proposición 21: Sea $C \in \mathbb{M}_n(\mathbb{Z})$ una matriz antisimétrica entonces

$$\mathfrak{P}(C) = \sum_{j=1}^n (-1)^n (C)_{ij} \mathfrak{P}(\tilde{C}[\widehat{i}, \widehat{j}]). \quad (1.29)$$

Aquí, $\tilde{C}[\widehat{i}, \widehat{j}]$ denota la matriz \tilde{C} , después de remover las filas i, j y columnas i, j .

Además de la fórmula de recursividad, el pfaffiano cumple otras propiedades. Más aún, dichas propiedades lo caracterizan.

Proposición 22: Sean $C, C_1, C_2 \in \mathbb{M}_n(\mathbb{Z})$ matrices antisimétricas, $\mathcal{J}_n = \begin{bmatrix} 0 & \mathbb{1}_n \\ -\mathbb{1}_n & 0 \end{bmatrix}$ y $P \in \mathbb{M}_n(\mathbb{Z})$ una matriz arbitraria. El pfaffiano satisface las siguientes propiedades:

$$\mathfrak{P}(\mathcal{J}_n) = (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}} \quad (1.30)$$

$$\mathfrak{P}(P^t C P) = \det(P) \mathfrak{P}(C) \quad (1.31)$$

$$\mathfrak{P}(C_1 \oplus C_2) = \mathfrak{P}(C_1) \mathfrak{P}(C_2) \quad (1.32)$$

El texto [11] presenta la demostración de las proposiciones 21 y 22 como ejercicios resueltos (págs.108 – 120). Omitimos la prueba de estas proposiciones y, en cambio, demostramos que las propiedades enlistadas en 22 caracterizan al pfaffiano.

Proposición 23: Sean $C, C_1, C_2 \in \mathbb{M}_n(\mathbb{Z})$ matrices antisimétricas, $\mathcal{J}_n = \begin{bmatrix} 0 & \mathbb{1}_n \\ -\mathbb{1}_n & 0 \end{bmatrix}$ y $P \in \mathbb{M}_n(\mathbb{Z})$ una matriz arbitraria. Si \mathcal{P} una función que asigna a cada matriz un número entero, de modo que las siguientes igualdades son válidas:

$$\mathcal{P}(\mathcal{J}_n) = (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}} \quad (1.33)$$

$$\mathcal{P}(P^t C P) = \det(P) \mathcal{P}(C) \quad (1.34)$$

$$\mathcal{P}(C_1 \oplus C_2) = \mathcal{P}(C_1) \mathcal{P}(C_2), \quad (1.35)$$

entonces, para toda matriz anti-simétrica C , $\mathcal{P}(C) = \mathfrak{P}(C)$.

Prueba. Si $C \in \mathbb{M}_n(\mathbb{Z})$ es una matriz-antisimétrica entonces, por el teorema 15, existe una matriz unimodular P tal que $P^t C P = N_C$, donde $N_C = \begin{bmatrix} 0 & \mathbf{a}_1 \\ -\mathbf{a}_1 & 0 \end{bmatrix} \oplus \cdots \oplus \begin{bmatrix} 0 & \mathbf{a}_r \\ -\mathbf{a}_r & 0 \end{bmatrix} \oplus \mathbb{O}_{n-2r}$.

Ya que P es unimodular, la ecuación 1.34 implica que $\mathcal{P}(C) = \mathcal{P}(P^t C P) = \mathcal{P}(N_C)$. Usando la propiedad 1.35 de \mathcal{P} , vemos que $\mathcal{P}(C) = \left[\prod_{i=1}^r \mathcal{P} \left(\begin{bmatrix} 0 & \mathbf{a}_i \\ -\mathbf{a}_i & 0 \end{bmatrix} \right) \right] \mathcal{P}(\mathbb{O}_{n-2r})$. Ahora bien,

$$\begin{aligned} \mathcal{P} \left(\begin{bmatrix} 0 & \mathbf{a}_i \\ -\mathbf{a}_i & 0 \end{bmatrix} \right) &= \mathcal{P} \left(\begin{bmatrix} 0 & -\mathbf{a}_i \\ \mathbf{1} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & \mathbf{1} \\ -\mathbf{1} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & -\mathbf{a}_i \\ \mathbf{1} & 0 \end{bmatrix}^t \right) \\ &= \det \left(\begin{bmatrix} 0 & -\mathbf{a}_i \\ \mathbf{1} & 0 \end{bmatrix} \right) \mathcal{P}(\mathcal{J}_1). \end{aligned}$$

Entonces, por 1.33, $\mathcal{P} \left(\begin{bmatrix} 0 & \mathbf{a}_i \\ -\mathbf{a}_i & 0 \end{bmatrix} \right) = \mathbf{a}_i$. Por otra parte, $\mathcal{P}(\mathbb{O}_{n-2r}) = \mathcal{P}(\mathbb{O}_{n-2r} \mathbb{O}_{n-2r} \mathbb{O}_{n-2r}^t) = 0$. En consecuencia, $\mathcal{P}(C) = \varepsilon \prod_{i=1}^r \mathbf{a}_i = \mathfrak{P}(C)$ donde $\varepsilon = 0$, si $n \geq 2r$, ó $\varepsilon = 1$ si $n = 2r$.

□

2. FACTORES ANTI-SIMÉTRICOS DE UN ÁLGBRA.

Un **álgebra** sobre un campo K es un espacio vectorial A junto con una multiplicación bilineal asociativa. Para nosotros K es un campo algebraicamente cerrado, A tiene dimensión finita como K espacio vectorial y posee elemento neutro multiplicativo.

A continuación, presentamos algunos conceptos de teoría de módulos y álgebras de caminos. El propósito es establecer parte de la terminología y notación que usaremos en las siguientes secciones. Para profundizar al respecto, recomendamos [1] y [2].

Denotemos por $A\text{-mod}$ la categoría de A -módulos derechos finitamente generados. Recordemos que un A -módulo X no cero es inescindible si cada vez que $X = X_1 \oplus X_2$, $X_1, X_2 \in A\text{-mod}$, entonces $X_1 = 0$ ó $X_2 = 0$.

El **teorema de Krull-Schmidt** establece que, dada un K -álgebra de dimensión finita A :

1. Cada módulo $X \in A\text{-mod}$ tiene una descomposición $X \cong X_1 \oplus X_2 \cdots \oplus X_m$, donde X_1, \dots, X_m son módulos inescindibles y el K -álgebra de isomorfismos $End_A X_j$ es local para cada $1 \leq j \leq m$.
2. Si $X \cong \bigoplus_{i=1}^m X_i \cong \bigoplus_{j=1}^n Y_j$, donde X_j es inescindible, $1 \leq j \leq n$, entonces $m = n$ y existe una permutación σ de $\{1, \dots, n\}$ tal que $X_i \cong Y_{\sigma(j)}$.

En particular, el A -módulo regular A_A tiene una descomposición en módulos inescindibles $A_A = P(1) \oplus P(2) \oplus \cdots \oplus P(n)$. Los sumandos $P(i)$, además de ser inescindibles, son proyectivos. Más aún, cualquier módulo proyectivo inescindible $P \in \text{mod}A$ es isomorfo a algún $P(i)$, $1 \leq i \leq n$.

Supongamos que $1 = e_1 + e_2 + \dots + e_n$ con $e_i \in P(i)$, $1 \leq i \leq n$, entonces $\{e_1, e_2, \dots, e_n\}$ es un sistema completo de idempotentes ortogonales primitivos de A . Recíprocamente, dado un sistema completo de idempotentes ortogonales primitivos $\{e_1, e_2, \dots, e_n\}$ de A tenemos que $A_A = Ae_1 \oplus Ae_2 \oplus \dots \oplus Ae_n$ es una descomposición de A en inescindibles proyectivos $P(i) = Ae_i$, $1 \leq i \leq n$.

Un álgebra A es llamada **básica** si $P(i) \not\cong P(j)$ siempre que $i \neq j$, $1 \leq i, j \leq n$. El teorema de Morita establece que para toda álgebra A de dimensión finita existe un álgebra básica B tal que $A\text{-mod}$ es equivalente a $B\text{-mod}$.

En otro orden de ideas, cualquier A -módulo X tiene una cadena de submódulos - llamada serie de composición- como la siguiente:

$$0 = X_0 \subset X_1 \subset \cdots \subset X_m = X$$

tal que X_j/X_{j-1} es un A -módulo simple para todo j ; supongamos que

$$0 = Y_0 \subset Y_1 \subset \cdots \subset Y_{m'} = X$$

es otra serie de composición del módulo $X \in \text{mód } A$. Entonces $m = m'$, y existe una permutación σ de $\{1, \dots, n\}$ tal que $X_{j+1}/X_j \cong Y_{\sigma(j+1)}/Y_{\sigma(j)}$, $1 \leq j \leq m$.

Llamamos a m la longitud del módulo X . Ahora bien, si $S(i) = X_{i+1}/X_i$, $1 \leq i \leq m$, y $P(1) \oplus P(2) \oplus \cdots \oplus P(n)$ la descomposición de A_A en proyectivos inescindibles entonces el número de veces que aparece $S(i)$ como factor de composición en una serie de composición dada es igual a $\dim_K \text{Hom}_A(P(i), X)$.

Dado un módulo X , denotamos por $[X]$ la clase de isomorfía de $X \in A\text{-mod}$. Consideremos el grupo abeliano libre \mathcal{F} generado por las clases de isomorfía de los objetos de $A\text{-mod}$. A cada sucesión exacta $0 \rightarrow X \rightarrow Y \rightarrow Z \rightarrow 0$ in $A\text{-mod}$ le asociamos un elemento $[X] - [Y] + [Z]$. Sea \mathcal{F}_0 el subgrupo de \mathcal{F} generado por los elementos $[X] - [Y] + [Z]$. El **grupo de Grothendieck** $K_0(A)$ de $A\text{-mod}$ es el grupo cociente $\mathcal{F}/\mathcal{F}_0$.

Sean A un K -álgebra básica de dimensión finita y $S(1), S(2), \dots, S(n)$ un sistema completo de clases de isomorfismos de A -módulos simples. Entonces el grupo de Grothendieck $K_0(A)$ es un grupo abeliano libre con base $\{[S(1)], [S(2)], \dots, [S(n)]\}$ y existe un único homomorfismo de grupos **dim** : $K_0(A) \rightarrow \mathbb{Z}^n$. Este isomorfismo manda cada clase $[X] \in K_0(A)$ a su **vector dimensión** $\text{dim}X = [\dim_K X e_1, \dots, \dim_K X e_n] = [\dim_K \text{Hom}_A(P(1), M), \dots, \dim_K \text{Hom}_A(P(n), M)]$.

Un **carcaj** $Q = (Q_0, Q_1, p, f)$ consiste de un conjunto de vértices Q_0 , un conjunto de flechas Q_1 y dos mapeos $p, f : Q_1 \rightarrow Q_0$. El mapeo p asocia a cada flecha el vértice al principio de la flecha y f , el vértice al final.

Sean $a, b \in Q_0$. Un camino de longitud $\ell > 1$ con vértice inicial $a \in Q_0$ y vértice final $b \in Q_0$ es una sucesión $(a|\alpha_1, \dots, \alpha_\ell|b)$, donde $\alpha_k \in Q_1$ y $p(\alpha_1) = a$, $f(\alpha_k) = p(\alpha_{k+1})$, $1 \leq k < \ell$. A cada $a \in Q_0$ le asociamos un camino de longitud 0 y lo denotamos por $\varepsilon_a = (\varepsilon|\varepsilon)$. El caso 0 es muy importante, pues, como veremos, $\varepsilon_a = (\varepsilon|\varepsilon)$ corresponde a un elemento idempotente del álgebra de caminos.

El **álgebra de caminos** KQ de Q es el espacio vectorial generado por los caminos de longitud $\ell > 0$ dotado con el producto

$$(a|\alpha_1, \dots, \alpha_\ell|b)(c|\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_k|d) = \delta_{bc}(a|\alpha_1, \dots, \alpha_\ell, \beta_1, \beta_2, \dots, \beta_k|d),$$

donde δ_{bc} es la delta de Kronecker.

Si $Q = (Q_0, Q_1)$ es un carcaj finito, conexo y acíclico KQ es asociativa de dimensión finita, básica y conexa. El radical de KQ , denotado \mathcal{R}_Q , es el ideal generado por Q_1 . Un sistema completo de idempotentes ortogonales primitivos de KQ está dado por $\{\varepsilon_a = (a||a) | a \in Q_0\}$.

Un ideal bilateral \mathcal{I} de KQ es **admisibile** si existe $m \in \mathbb{N}$ tal que $\mathcal{R}_Q^m \subseteq \mathcal{I} \subseteq \mathcal{R}_Q^2$. Sea Q un carcaj finito y conexo, sea \mathcal{I} un ideal admisibile de KQ . El álgebra cociente KQ/\mathcal{I} es un álgebra asociativa de dimensión finita, es conexa y básica. El radical de Jacobson de KQ/\mathcal{I} está dado por $\mathcal{R}_Q/\mathcal{I}$. El conjunto $\{e_a = \varepsilon_a + \mathcal{I} \mid a \in Q_0\}$ es un sistema completo de idempotentes ortogonales primitivos de dicha álgebra.

En resumen, a cada carcaj Q se le puede dotar con una estructura de álgebra KQ . Recíprocamente, a cada álgebra A , con características convenientes, se le puede asociar un carcaj. En efecto, sea A un álgebra básica sobre un campo algebraicamente cerrado y sea $\{e_1, \dots, e_n\}$ un sistema completo de idempotentes ortogonales y primitivos. El **carcaj ordinario** de A , denotado por Q_A es tal que,

1. El conjunto de vértices $(Q_A)_0$ está en biyección con los idempotentes e_1, \dots, e_n .
2. Dadas dos vértices $a, b \in (Q_A)_0$, las flechas $\alpha : a \rightarrow b$ de $(Q_A)_1$ están en correspondencia biyectiva con los vectores en una base del espacio vectorial $e_a(\text{rad}A/\text{rad}^2A)e_b$.

El carcaj Q_A es finito, conexo y no depende de la elección del sistema $\{e_1, \dots, e_n\}$.

En 1972, el matemático Peter Gabriel demostró que toda K -álgebra básica sobre un campo algebraicamente cerrado es isomorfa al cociente de un álgebra de caminos. Para ser precisos enunciamos el siguiente teorema:

Teorema 24: Sea A una álgebra básica de dimensión finita sobre un campo algebraicamente cerrado K . Sea Q_A el carcaj ordinario de A . Existe un ideal admisibile \mathcal{I} de KQ , tal que $A \cong KQ/\mathcal{I}$.

En el caso en que el álgebra A es de la forma KQ/\mathcal{I} , con \mathcal{I} admisibile, tenemos que $Q_A = Q_{KQ/\mathcal{I}} = Q$.

Teniendo en cuenta el teorema de Gabriel y el teorema de Morita, en este texto A siempre denotará un K -álgebra básica de dimensión finita sobre un campo algebraicamente cerrado. De modo que, trabajamos con cocientes de álgebras de caminos $A \cong KQ/\mathcal{I}$.

2.1. La matriz de Cartan y definición de factores anti-simétricos

Sea $\{P(1), \dots, P(n)\}$ un conjunto completo de representantes de clases de isomorfismos de A -módulos proyectivos inescindibles. La **matriz de Cartan** de A es la matriz $n \times n$

$$C_A = \begin{pmatrix} c_{11} & \cdots & c_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ c_{n1} & \cdots & c_{nn} \end{pmatrix} \in \mathbb{M}_n(\mathbb{Z}).$$

donde $c_{ij} = \dim_K \text{Hom}_A(P(i), P(j))$, $1 \leq i, j = 1 \leq n$.

Como se puede leer en [1], C_A es una matriz con características importantes. Entre ellas, la siguiente es relevante para definir los factores anti-simétricos de A .

Lema 25: Sea A un álgebra de dimensión global finita. Entonces C_A es invertible sobre \mathbb{Z} .

Prueba. Siendo A de dimensión global finita, cada A -módulo X posee una resolución proyectiva finita

$$0 \longrightarrow P^{-r} \longrightarrow \dots \longrightarrow P^{-1} \longrightarrow P^0 \longrightarrow X \longrightarrow 0 \quad ,$$

Así, $\mathbf{dim}X = \sum_{j=0}^r (-1)^j \mathbf{dim}P^{-j}$; en particular $\mathbf{dim}X$ es una combinación lineal de los vectores dimensión $p(i) = \mathbf{dim}P(i)$, $1 \leq i \leq n$. En particular, los vectores $s(i) = \mathbf{dim}S(i)$ de $K_o(A)$ son combinaciones lineales enteras de los $p(i)$, $1 \leq i \leq n$. Es decir, existe una matriz $B \in \mathbb{M}_n(\mathbb{Z})$ tal que

$$\mathbb{1}_n = (\mathbf{dim}S(1) \mid \dots \mid \mathbf{dim}S(n)) = (\mathbf{dim}P(1) \mid \dots \mid \mathbf{dim}P(n))B = C_A B.$$

Por lo tanto la matriz C_A es invertible. \square

Si C'_A es la matriz de Cartan con respecto a otro conjunto completo de representantes entonces C'_A se obtiene de C_A por medio de permutaciones de columnas y renglones. Es decir, $C'_A = P^t A P$ donde P es una matriz permutación; en particular, $P \in O(2n)$.

Sea A un álgebra de dimensión finita y dimensión global finita sobre un campo algebraicamente cerrado K . Considera la matriz anti-simétrica $\tilde{C}_A = C_A^t - C_A$ y sea N_A su forma normal anti-simétrica. A saber,

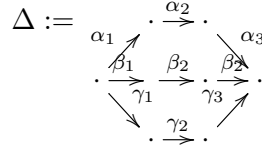
$$N_A = \begin{bmatrix} 0 & \mathfrak{a}_1(\tilde{C}_A) \\ -\mathfrak{a}_1(\tilde{C}_A) & 0 \end{bmatrix} \oplus \begin{bmatrix} 0 & \mathfrak{a}_2(\tilde{C}_A) \\ -\mathfrak{a}_2(\tilde{C}_A) & 0 \end{bmatrix} \oplus \dots \oplus \begin{bmatrix} 0 & \mathfrak{a}_r(\tilde{C}_A) \\ -\mathfrak{a}_r(\tilde{C}_A) & 0 \end{bmatrix} \oplus \mathbb{O}_{n-2r}.$$

El entero $\mathfrak{a}_k(\tilde{C}_A)$ en el k -ésimo bloque de N_A es el k -ésimo **factor anti-simétrico** de A . El rango de N_A es $2r$ y será llamado el rango anti-simétrico de A .

Recordemos que en la prueba del teorema 16 vimos que la forma normal de Smith y la forma normal anti-simétrica de una matriz anti-simétrica son equivalentes en $\mathbb{M}_n(\mathbb{Z})$. Así, si $\mathcal{S}(\tilde{C}_A) = \text{diag}_{2r}(s_1(A), \dots, s_{2r}(A)) \oplus \mathbb{O}_{n-2r}$ entonces $\mathfrak{a}_k(\tilde{C}_A) = s_{2k}(\tilde{C}_A)$, $1 \leq k \leq r$. Usaremos la notación $\mathfrak{a}_k, \mathfrak{s}_k$ cuando sea claro a qué matriz hacemos referencia.

Para evitar una notación más engorrosa, recogemos los factores anti-simétricos de A en un vector $\Upsilon_A = [\mathfrak{a}_1(\tilde{C}_A), \dots, \mathfrak{a}_r(\tilde{C}_A)] \in \mathbb{Z}^r$.

Ejemplo 26: Para hacer claros los conceptos definidos hasta ahora, presentamos un ejemplo sencillo. Considera el álgebra canónica A . Este álgebra está dado por el cociente de $K[\Delta]$ por $\mathcal{I} = \langle \gamma_1 \gamma_2 \gamma_3 - \beta_1 \beta_2 \beta_3 - \alpha_1 \alpha_2 \alpha_3 \rangle$, ver 2.1.

Fig. 2.1: Carcaj Δ .

En este caso, la matriz de Cartan C_A y la matriz anti-simétrica \tilde{C}_A son:

$$y \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \quad y \quad \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ -1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 1 \\ -2 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & 0 \end{bmatrix}.$$

En primer lugar, sumamos el último renglón y la última columna al primer renglón y columna, respectivamente:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ -1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 1 \\ -2 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Ahora, llevamos a cero todas las entradas 1 en el último renglón a través de la siguiente operación de matrices:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 1 & -1 & 1 & 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 1 \\ -2 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ -2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Finalmente, intercambiamos la primera columna con la última y el primer renglón con el último. De este modo, obtenemos la forma normal anti-simétrica de \tilde{C}_A .

$$N_A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \oplus \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \oplus \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \oplus \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ -2 & 0 \end{bmatrix}.$$

- La forma normal de Smith de \tilde{C}_A es $\text{diags}(1, 1, 1, 1, 1, 1, 2, 2)$.
- El rango de \tilde{C}_A es 8.
- El vector de factores anti-simétricos es $\Upsilon_A = [1, 1, 1, 2]$.
- El paffiano es 2 y $\chi_A(-1) = 4$.

2.2. Extensiones unipuntuales

Sea B un álgebra cuyo carcaj Q_B tiene un vértice fuente 0 y sea e_0 el idempotente correspondiente al vértice 0 . Considera el álgebra cuyo carcaj Q es obtenido de Q_B al remover el vértice 0 y todas las flechas α cuyo origen es el vértice 0 .

Por otra parte, considera el álgebra $A = (1 - e_0)B(1 - e_0)$, la cual es isomorfa a $B/(Be_0B)$. Entonces el álgebra B puede verse como el álgebra de matrices $B = \begin{bmatrix} A & 0 \\ {}_K X_A & K \end{bmatrix}$, donde $X = (1 - e_0)Be_0$. El carcaj ordinario de ésta álgebra es precisamente Q .

Ésta situación da lugar al concepto de extensión unipuntual de un álgebra por un módulo: sean A un K -álgebra de dimensión finita y X un A -módulo derecho. La **extensión unipuntual** de A por X , es el álgebra de matrices

$$A[X] = \begin{bmatrix} A & 0 \\ X & K \end{bmatrix}$$

dotado con la suma usual de matrices y la multiplicación inducida por la estructura de $K - A$ -bimódulo de ${}_A X_K$. Esto es

$$\begin{bmatrix} a_1 & 0 \\ x_1 & K_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_2 & 0 \\ x_2 & K_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_1 a_2 & 0 \\ x_2 a_1 + K_2 x_1 & K_1 K_2 \end{bmatrix},$$

$$\begin{bmatrix} a_1 & 0 \\ x_1 & K_1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} a_2 & 0 \\ x_2 & K_2 \end{bmatrix} \in A[X].$$

Proposición 27: Considera la extensión por un punto $B = A[M]$ y sea $\Upsilon_B = [\mathfrak{b}_1, \dots, \mathfrak{b}_{r_B}]$ y $\Upsilon_A = [\mathfrak{a}_1, \dots, \mathfrak{a}_{r_A}]$. Entonces $\mathfrak{b}_k \mid \mathfrak{a}_k \mid \mathfrak{b}_{k+1}$.

Prueba. Las matrices de Cartan de A y B están relacionadas por $C_{A[M]} = \begin{bmatrix} C_A & 0 \\ m & 1 \end{bmatrix}$.

Entonces $\widetilde{C}_{A[M]} = \widetilde{\begin{bmatrix} C_A & 0 \\ m & 1 \end{bmatrix}} = \begin{bmatrix} \widetilde{C}_A & -m^t \\ m & 0 \end{bmatrix}$. De aquí $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \widetilde{C}_A & -m^t \\ m & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \widetilde{C}_A & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} := \widetilde{C}'_B$. Así, la forma normal de Smith de \widetilde{C}'_B es $\mathcal{S}(\widetilde{C}'_B) = \mathcal{S}(C_A) \oplus (0)$.

Por el corolario 12, tenemos $\mathfrak{s}_k(\widetilde{C}_B) \mid \mathfrak{s}_k(\widetilde{C}_A) \mid \mathfrak{s}_{k+2}(\widetilde{C}_A)$. Como hemos hecho notar antes, $\mathfrak{a}_k = s_{2k-1}^A = s_{2k}^A$ y $\mathfrak{b}_k = \mathfrak{s}_{2k-1}(\widetilde{C}_B) = \mathfrak{s}_{2k}(\widetilde{C}_B)$. Por lo tanto, $\mathfrak{b}_k \mid \mathfrak{a}_k \mid \mathfrak{b}_{k+1}$. \square

El siguiente ejemplo es una sencilla ilustración de 27 y muestra que la igualdad de los factores anti-simétricos en el teorema anterior no se cumple.

Ejemplo 28: Consideremos la figura 2.2, sea B el álgebra de caminos $K[\Delta]$ y A la subcategoría convexa $K[\Delta']$.

En este caso las matrices \widetilde{C}_B y \widetilde{C}_A son $\begin{bmatrix} 0 & -3 & -1 & -3 & -6 & -18 \\ 3 & 0 & 0 & 0 & -1 & -3 \\ 1 & 0 & 0 & -3 & -3 & -9 \\ 3 & 0 & 3 & 0 & -1 & -3 \\ 6 & 1 & 3 & 1 & 0 & -3 \\ 18 & 3 & 9 & 3 & 3 & 0 \end{bmatrix}$ y $\begin{bmatrix} 0 & -3 & -3 & -9 \\ 3 & 0 & -1 & -3 \\ 3 & 1 & 0 & -3 \\ 9 & 3 & 3 & 0 \end{bmatrix}$, respectivamente.

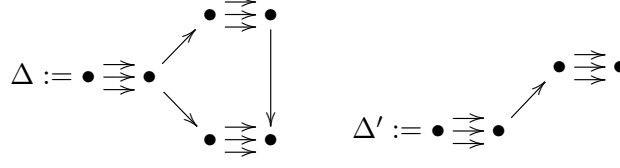


Fig. 2.2: álgebra y un subálgebra convexa

Después de realizar algunas operaciones elementales sobre estas matrices vemos que \tilde{C}_B es congruente a $\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \oplus \begin{bmatrix} 0 & 3 \\ -3 & 0 \end{bmatrix} \oplus \begin{bmatrix} 0 & 36 \\ -36 & 0 \end{bmatrix}$, mientras que \tilde{C}_A lo es a $\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \oplus \begin{bmatrix} 0 & 9 \\ -9 & 0 \end{bmatrix}$.

Así, como la proposición anterior establece, tenemos que $1 \mid 1$, $1 \mid 3$, $3 \mid 9$ y $9 \mid 36$.

2.3. Factores anti-simétricos y el polinomio de Coxeter.

Sea A un álgebra de dimensión global finita. La **matriz de Coxeter** de A se define como $\Phi_A = -C_A^t C_A^{-1}$. La transformación $\mathbb{Z}^n \rightarrow \mathbb{Z}^n$ dada por $x\Phi_A$ es llamada la transformación de Coxeter, la denotamos igual que la matriz que la induce. El polinomio característico de Φ es el **polinomio de Coxeter** y lo denotamos por χ_A .

El polinomio χ_A es de gran importancia en el estudio espectral de álgebras. Para conocer más al respecto, recomendamos consultar [7] y [1]. La matriz de Coxeter posee, entre otras, las siguientes propiedades:

Lema 29: Supongamos que $\chi_A = \sum_{k=0}^n a_k x^k$, entonces

1. χ_A es palíndromo ($a_{n-i} = a_i, 0 \leq i \leq n$).
2. $a_n = \det(\Phi_A) = 1$, $a_0 = 1$, $a_1 = -\text{tr}\Phi_A$.
3. $\Phi_A p(k) = -q(k)$, $1 \leq k \leq n$.
4. Para todo $x, y \in \mathbb{Z}^n$, $\langle x, y \rangle_A = x^t C^{-1} y$ cumple $-\langle y, \Phi_A x \rangle_A = \langle \Phi_A x, \Phi_A y \rangle$

Prueba.

1. Veamos que χ_A es igual a su polinomio recíproco $\chi_A^* = x^n \det(\frac{1}{x} \mathbb{1}_n + C_A^{-t} C_A)$. Por una parte,

$$\chi_A^* = \det\left(\frac{1}{x} \mathbb{1}_n + x C_A^t C_A^{-1}\right) = \det(\mathbb{1}_n + x C_A^t C_A^{-1}).$$

Por otra, la matriz de Cartan es invertible sobre los enteros entonces

$$\begin{aligned} \det(x \mathbb{1}_n - \Phi_A) &= \det(C_A^{-t}) \det(x \mathbb{1}_n + C_A^t C_A^{-1}) \det(C_A) \\ &= \det(x C_A^{-t} C_A + \mathbb{1}_n) \\ &= \det([x C_A^{-t} C_A + \mathbb{1}_n]^t) \\ &= \det(x C_A^t C_A^{-1} + \mathbb{1}_n). \end{aligned}$$

2. Para cualquier polinomio característico se cumple que $a_0 = 1$, $a_1 = -tr\Phi_A$. Ya que el polinomio es palíndromo tenemos que $a_{n-1} = -tr\Phi_A$.

Para 3 y 4, ver [1] página 93.

□

En esta sección, comparamos los factores anti-simétricos de un álgebra con conceptos propios del polinomio de Coxeter. A saber, estudiaremos cómo se relaciona con el **espectro** de la transformación de Coxeter $Spec(\Phi_A)$, conjunto de la raíces de χ_A ; el máximo valor absoluto de los elementos de $Spec(\Phi_A)$, llamado el **radio espectral** ρ_A ; y la **energía del álgebra** $e(A)$, definida como la suma de los valores absolutos de las raíces de χ_A .

Proposición 30: Sea A un álgebra de dimensión global finita. Entonces

1. $\chi_A(-1) = [\varepsilon \prod_{k=1}^r \mathbf{a}_k]^2$, donde $\varepsilon = 1$ si \widetilde{C}_A tiene rango total y $\varepsilon = 0$ en otro caso.
2. $\rho(\Phi_A + \mathbb{1}_n) \leq \rho(\widetilde{C}_A)$. En particular, si $A = KQ$ y \bar{Q} no es de tipo Dynkin $\rho(\Phi_A) + 1 \leq \rho(\widetilde{C}_A)$; más aún, $2 \leq \rho(\widetilde{C}_A)$.
3. $\mathfrak{P}_A \leq (1 + \frac{e(A)}{n})^{\frac{n}{2}} \leq (1 + \rho_A)^{\frac{n}{2}}$.

Prueba.

1. Como antes, $N_A = \begin{bmatrix} 0 & \mathbf{a}_1 \\ -\mathbf{a}_1 & 0 \end{bmatrix} \oplus \begin{bmatrix} 0 & \mathbf{a}_2 \\ -\mathbf{a}_2 & 0 \end{bmatrix} \oplus \cdots \oplus \begin{bmatrix} 0 & \mathbf{a}_r \\ -\mathbf{a}_r & 0 \end{bmatrix} \oplus \mathbb{O}_{n-2r}$ es la forma normal anti-simétrica $\widetilde{C}_A \in \mathbb{M}_n(\mathbb{Z})$.

Para cualquier matriz unimodular U , $\det(U^t \widetilde{C}_A U) = \det(N_A) = \mathbf{a}_1^2 \mathbf{a}_2^2 \cdots \mathbf{a}_r^2 \varepsilon$, donde $\varepsilon = 1$ si $\text{rango}(\widetilde{C}_A) = n$ o $\varepsilon = 0$ de otro modo. De aquí

$$\begin{aligned} \det(\widetilde{C}_A) &= \mathbf{a}_1^2 \mathbf{a}_2^2 \cdots \mathbf{a}_r^2 \quad \text{Si } r = \text{rank}(\widetilde{C}_A) = n \\ \det(\widetilde{C}_A) &= 0. \quad \text{en otro caso.} \end{aligned} \tag{2.1}$$

Por otra parte,

$$\begin{aligned} \chi_A(-1) &= \det(\Phi_A - (-1)\mathbb{1}_n) \\ &= \det(-C_A^t C_A^{-1} + \mathbb{1}_n) \\ &= \det(C_A^t - C_A) \det(C_A^{-1}) \\ &= \det(\widetilde{C}_A). \end{aligned} \tag{2.2}$$

El resultado se sigue de 2.1 y 2.2 .

2. Denotemos por $\sigma_j(M)$, $1 \leq j \leq n$ los valores singulares de la matriz M , de modo que $\sigma_1(M) \geq \sigma_2(M) \geq \cdots \geq \sigma_n(M) \geq 0$. Usando propiedades de los valores singulares de un producto de matrices (ver [9]) tenemos:

$$\sigma_1(\Phi_A + \mathbb{1}_n) = \sigma_1(-C_A^t C_A^{-1} + \mathbb{1}_n) = \sigma_1((-C_A + C_A^t) C_A^{-t}) \leq \sigma_1(\widetilde{C}_A) \sigma_1(C_A^{-1})$$

Por una parte, $\sigma_1(C_A^{-1}) \leq 1$, pues los eigenvalores de la matriz de Cartan son todos 1 y $1 \leq \sigma_1(C_A)$. Por otra, \tilde{C}_A es anti-simétrica así que $\sigma_1(\tilde{C}_A) = \rho(\tilde{C}_A)$. De este modo,

$$\sigma_1(\Phi_A + \mathbb{1}_n) \leq \rho(\tilde{C}_A).$$

Ahora bien, el radio espectral de $\Phi_A + \mathbb{1}_n$, es menor que su máximo valor singular $\sigma_1(\Phi_A + \mathbb{1}_n)$ (esta afirmación es válida para cualquier matriz). Por lo tanto, $\rho(\Phi_A + \mathbb{1}_n) \leq \rho(\tilde{C}_A)$.

En el caso en que $A = KQ$ y \bar{Q} no es de tipo Dynkin, $\rho(\Phi_A) \in \text{Spec}(A)$ (consultar [7], página 9) entonces $\rho(\Phi_A) + 1$ es el radio espectral de $\Phi_A + \mathbb{1}_n$.

Más aún $\rho(\Phi_A) \geq 1$ (=1 si y solo si \bar{Q} es euclidiano) así que $2 \leq \rho(\tilde{C}_A)$.

3. Notemos que $\Phi_A v = \lambda v$ si y solo si $(\Phi_A + \mathbb{1}_n)v = (\lambda + 1)v$. Sean $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ las raíces de χ_A . Entonces

$$(\mathfrak{P}_A)^2 = \chi_A(-1) = \det(\Phi_A + \mathbb{1}_n) = \prod_{k=1}^n (1 + \lambda_k)$$

Usando la relación entre la media aritmética y la media geométrica de números $|1 + \lambda_k|$, tenemos

$$\left[\prod_{k=1}^n |1 + \lambda_k| \right]^{\frac{1}{n}} \leq \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n |1 + \lambda_k| \leq \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n (|1| + |\lambda_k|) = 1 + \frac{e(A)}{n} \leq (1 + \rho_A).$$

□

La raíz cuadrada positiva de $\det(\tilde{C}_A)$, denotada por $\mathfrak{P}(\tilde{C}_A)$, es el **pfaffiano del álgebra** A y lo denotamos por \mathfrak{P}_A .

En el caso en que, $\mathfrak{P}_A = 1$ todos los invariantes anti-simétricos de A son iguales a 1. Sin embargo, cuando $\mathfrak{P}_A = 0$ no tenemos información alguna de los invariantes anti-simétricos; a pesar de ello, si existe un subálgebra B para el cual se conoce información de \mathfrak{P}_B y $\mathfrak{P}_B \neq 0$ entonces podríamos decir algo de los factores anti-simétricos de A . Ejemplificamos esto a continuación.

Ejemplo 31: Consideremos el álgebra $R_n := KQ/\mathcal{I}$, donde $sn = 2m' \in \mathbb{N}$ y Q está dado por

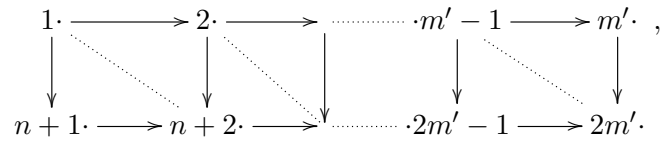


Fig. 2.3: Cuadrados conmutativos

El ideal \mathcal{I} está generado por las expresiones que dan lugar a todas las relaciones conmutativas de los cuadrados del Q .

En la siguiente tabla, observamos los valores que toma el pfaffiano de R_{2m} cuando $1 \leq m' \leq 3$.

n	χ_{R_n}	\mathfrak{P}_{R_n}
0	0	0
2	$t^2 + t + 1$	1
4	$t^4 + t^3 + t + 1$	0
6	$t^6 + t^5 - t^3 + t + 1$	1

Tab. 2.1: Pfaffianos de $R_{2m'}$, $0 \leq m' \leq 3$

La sucesión de álgebras R_m forma una torre de álgebras accesibles (estudiadas en [6] a profundidad). Si $m \geq 6$ el polinomio de Coxeter de las álgebras R_m , χ_{R_m} , refleja la estructura de torre a través de la siguiente relación:

$$\chi_{R_m}(t) = t^m + t^{m-1} - t^3 \chi_{R_{m-6}} + t + 1. \quad (2.3)$$

Usando un razonamiento inductivo, demostraremos que 1 y 0 son los únicos factores anti-simétricos de las álgebras $R_{2m'}$.

Analizamos dos casos, cada uno correspondiente a la paridad de m' .

1. $m' = 2m + 1$. Si $m = 1$ entonces 2.1 nos muestra que $\mathfrak{P}_{R_6} = 1$. Supongamos que para todo $k < m$ se cumple que $\mathfrak{P}_{R_{2k+1}} = 1$.

Ahora, aplicamos la fórmula de recursión 2.3 demostrada en [6]:

$$\begin{aligned} \chi_{R_{4m+2}}(t) &= t^{4m+2} + t^{4m+1} - t^3 \chi_{R_{4m-4}} + t + 1 \\ &= t^{4m+2} + t^{4m+1} - t^3(t^{4m-4} + t^{4m-5} - t^3 \chi_{R_{4m-4}} + t + 1) + t + 1 \\ &= t^{4m+2} + t^{4m+1} - t^{4m-1} - t^{4m-2} + t^6 \chi_{R_{4(m-3)+2}} - t^4 - t^3 + t + 1 \end{aligned} \quad (2.4)$$

Evaluando -1 en la expresión 2.4 vemos que, por la hipótesis de inducción, $\mathfrak{P}_{R_{4m+2}} = 1$ y, en consecuencia, $\Upsilon_{R_{2m'}} = [1, \dots, 1]$.

2. $m' = 2m$. Si $m = 1$ en el cuadro 2.1 vemos que $\mathfrak{P}_{R_4} = 0$. Supongamos que $\mathfrak{P}_{R_{4k}} = 0$ para todo $k < m$.

Ahora bien, por la fórmula de recursión 2.5, tenemos las siguientes igualdades:

$$\begin{aligned} \chi_{R_{4m}}(t) &= t^{4m} + t^{4m-1} - t^3 \chi_{R_{4m-6}} + t + 1 \\ &= t^{4m} + t^{4m-1} - t^3(t^{4m-6} - t^{4m-7} - t^3 \chi_{R_{4m-12}} + t + 1) + t + 1. \\ &= t^{4m} + t^{4m-1} - t^{4m-3} - t^{4m-4} + t^6 \chi_{R_{4(m-3)}} - t^4 - t^3 + t + 1. \end{aligned} \quad (2.5)$$

De la hipótesis de inducción, y evaluando -1 en 2.5 se sigue que $\chi_{R_{2n}}(-1) = 0$.

Para obtener información de los factores anti-simétricos no nulos, observamos que si $B = A/(e_{m'}Ae_{m'})$, donde $A = R_{2m'}/(e_{2m'}Re_{2m'})$, entonces B es un subálgebra convexa de $R_{2m'}$ y $B = R_{2(m'-1)}$.

Así, aplicando dos veces 27, $\mathfrak{a}_k(\tilde{C}_{R_{2m'}}) \mid \mathfrak{a}_k(\tilde{C}_{R_{2(m'-1)}})$, $1 \leq k \leq 2m' - 2$. Por lo tanto, en este caso, $\Upsilon_{R_{2m'}} = [1, \dots, 1, \mathfrak{P}_{R_{2m'}}, \mathfrak{P}_{R_{2m'}}] = [1, \dots, 1, 0, 0]$.

2.4. Factores anti-simétricos de álgebras derivadamente equivalentes

Sea A un álgebra de dimensión global finita. La matriz C^{-t} define una forma bilineal sobre $K_0(A) = \mathbb{Z}^n$ por $\langle x, y \rangle_A = xC^{-t}y^t$. La correspondiente forma cuadrática $q_A(x) = \langle x, x \rangle_A$ es llamada la *característica de Euler* de A . La forma bilineal $\langle -, - \rangle_A$ tiene la siguiente interpretación homológica.

Lema 32: Supongamos que A tiene dimensión global finita. Sean X, Y A -módulos. Entonces

$$\langle X, Y \rangle_A = \sum_{i \geq 0} (-1)^i \dim_K(\text{Ext}_A^i(X, Y)).$$

Prueba. La prueba es por inducción sobre la dimensión proyectiva del A -módulo X . A tiene dimensión global finita, por lo que $pd X = d \in \mathbb{N}_0$.

Sea $(y_1, \dots, y_n) = y = \dim Y$. Por otra parte, ya que tratamos con una forma bilineal, supongamos que X es inescindible. Supongamos que $pd X = 0$, entonces X es un módulo proyectivo inescindible, digamos $X = P(j)$ para algún $1 \leq j \leq n$.

$$\begin{aligned} \langle \mathbf{dim} X, \mathbf{dim} Y \rangle &= \langle p(y), y \rangle \\ &= p(j)C_A^{-t}y^t \\ &= s(y)y^t \\ &= y_j = \dim_K \text{Hom}_A(P(j), Y). \end{aligned}$$

Ya que $\text{Ext}^i(P(j), Y) = 0$ para $i > 0$ el resultado se obtiene.

Supongamos que la afirmación es válida para todo X con $\mathbf{dim} X < d$. Sea X un A -módulo tal que $pd X = d$. Consideramos una sucesión exacta

$$0 \rightarrow X' \rightarrow P \rightarrow X \rightarrow 0$$

con P proyectivo entonces $pd X' < pd X$. Aplicando $\text{Hom}(-, Y)$ a esta sucesión exacta corta, obtenemos la sucesión exacta larga

$$\cdots \rightarrow \text{Ext}^i(X, Y) \rightarrow \text{Ext}^i(P, Y) \rightarrow \text{Ext}^i(X', Y) \rightarrow \cdots$$

Dando lugar a las siguientes ecuaciones:

$$\begin{aligned}
\langle \mathbf{dim}X, \mathbf{dim}Y \rangle_A &= \langle \mathbf{dim}P - \mathbf{dim}X', \mathbf{dim}Y \rangle_A \\
&= \langle \mathbf{dim}P, \mathbf{dim}Y \rangle_A - \langle \mathbf{dim}X', \mathbf{dim}Y \rangle_A \\
&= \sum (-i)^j \dim_K \text{Ext}^j(P, Y) - \sum (-i)^j \dim_K \text{Ext}^j(X', Y) \\
&= \sum (-i)^j \dim_K \text{Ext}^j(X, Y).
\end{aligned}$$

□

Ahora consideremos la categoría derivada triangulada y acotada $D^b(A)$ de un K -álgebra de dimensión finita A ([8] es un libro especializado en el tema).

El grupo de Grothendieck $K_0(D^b(A))$ es el grupo cociente $\mathcal{G}/\mathcal{G}_0$, donde \mathcal{G} es el grupo abeliano generado por los representantes de las clases de isomorfismos de objetos de $K_0(D^b(A))$; un tal representante es denotado por $[X]$. El subgrupo \mathcal{G}_0 es aquel generado por $[X] - [Y] + [Z]$, para todos los triángulos en $D^b(A)$

$$X \rightarrow Y \rightarrow Z \rightarrow TZ.$$

Si $X^\bullet = (X^i, d^i) \in D^b(A)$ entonces $\underline{\dim}X^i = \sum_{i \in \mathbb{Z}} \underline{\dim}X^i$, siendo X^\bullet acotado, la suma es finita. Además, si A es de dimensión global finita se cumple $\langle \underline{\dim}X^\bullet, \underline{\dim}Y^\bullet \rangle_A = \sum_{i \in \mathbb{Z}} \dim_K \text{Hom}_{D^b(A)}(X^\bullet, T^i(Y^\bullet))$.

Hay una inyección plena de $\text{mod } A$ en $D^b(A)$ que asocia cada objeto X de $\text{mod } A$ con el complejo 'stalk' X^\bullet ; esto es, el único módulo no zero es $X^0 = X$ y todos los $d^i = 0$. Este complejo también es identificado como X . Usando esta inyección también se obtiene un mapeo de grupos abelianos $K_0(A)$ en $K_0(D^b(A))$ que mapea X en X . De este modo, $\text{mod } A$ es una subcategoría de $D^b(A)$ y dicho mapeo es suprayectivo.

Lema 33 ([8], pág. 96): La inyección canónica de $\text{mod } A$ en $D^b(A)$ induce un isomorfismo entre $K_0(A)$ y $K_0(D^b(A))$.

Es claro que el pfaffiano de un álgebra es un derivado equivalente, ya que es la raíz cuadrada de la evaluación del polinomio de Coxeter en -1 . Veamos que los factores anti-simétricos también son derivados equivalentes. Para ello, recordamos que dadas K -álgebras básicas de dimensión finita, decimos que $K_0(A)$ y $K_0(B)$ son isométricos si existe una biyección lineal $f : K_0(A) \rightarrow K_0(B)$ tal que para todo $x, y \in K_0(A)$ se cumple

$$\langle x, y \rangle_A = \langle f(x), f(y) \rangle_B$$

Proposición 34: Sean A y B K -álgebras básicas de dimensión finita. Asume que A tiene dimensión global finita. Si $F : D^b(A) \rightarrow D^b(B)$ es una equivalencia triangular entonces existe una isometría $f : K_0(A) \rightarrow K_0(B)$.

Prueba. Sean $P(1), \dots, P(n)$ un sistema completo de representantes de clases de isomorfismos de A -módulos proyectivos inescindibles. Sean $X_i^\bullet = F(P(i))$ para $1 \leq i \leq n$ y $x = \sum_{i=1}^n \mu_i \underline{\dim} P(i) \in K_0(A)$. Definimos el mapeo f de la siguiente manera:

$$\begin{aligned} f : K_0(A) &\rightarrow K_0(B) \\ x &\mapsto \sum_{i=1}^n \mu_i \underline{\dim} X_i^\bullet. \end{aligned}$$

Entonces B tiene dimensión global finita, pues existe una equivalencia triangular entre $D^b(A)$ y $D^b(B)$. Por lo que $\langle -, - \rangle_B$ está definido y, en consecuencia

$$\begin{aligned} \langle \underline{\dim} X_i^\bullet, \underline{\dim} X_j^\bullet \rangle_B &= \langle \underline{\dim} F(P(i))_i, \underline{\dim} F(P(j)) \rangle_B \\ &= \sum_{t \geq 0} (-1)^t \dim_K \text{Hom}_{D^b(B)}(F(P(i)), T^t F(P(j))) \\ &= \sum_{t \geq 0} (-1)^t \dim_K \text{Hom}_{D^b(A)}(P(i), T^t P(j)) \\ &= \sum_{t \geq 0} (-1)^t \dim_K \text{Hom}_A(P(i), P(j)) \\ &= \langle P(i), P(j) \rangle_A. \end{aligned}$$

Por lo tanto $\langle f(x), f(y) \rangle_B = \langle fx, fy \rangle_A$. Siendo C^{-t} invertible, $\langle -, - \rangle_A$ es no degenerada y, en consecuencia, f es un mapeo inyectivo. aplicando la cuasi-inversa de F obtenemos que f es suprayectiva. \square

Proposición 35: Supongamos que A y B son álgebras de dimensión global finita tales que existe una equivalencia triangulada entre $D^b(\text{mod}A)$ y $D^b(\text{mod}B)$. Entonces $\Upsilon_A = \Upsilon_B$.

Prueba. Ya que $D^b(\text{mod}A)$ es equivalente a $D^b(\text{mod}B)$ existe una isometría de $K_0(A)$ a $K_0(B)$. Entonces existe una matriz unimodular $P \in \mathbb{M}_n(\mathbb{Z})$ tal que $C_A = P^t C_B P$. Por otra parte,

$$\begin{aligned} \tilde{C}_A &= \widetilde{P^t C_B P} = (P^t C_B P)^t - P^t C_B P = P^t C_B^t (P^t)^t - P^t C_B P \\ &= P^t C_B^t P - P^t C_B P = P^t (C_B^t - C_B) P = P^t \tilde{C}_B P. \end{aligned} \quad (2.6)$$

La forma normal anti-simétrica de una matriz anti-simétrica se preserva bajo congruencia en $\mathbb{M}_n(\mathbb{Z})$. Entonces, por 2.7, a \tilde{C}_A y \tilde{C}_B les corresponde la misma forma normal anti-simétrica. \square

Es fácil ver que los invariantes anti-simétricos no caracterizan la categoría derivada de un álgebra.

Ejemplo 36: No importa de que orientación se dote a los grafos 2.4, sus álgebras de caminos $A = K[\vec{T}]$ y $B = K[\vec{C}]$ no son derivadamente equivalentes. Sin embargo, $\Upsilon_A = \Upsilon_B = [1, 1, 1, 1]$.

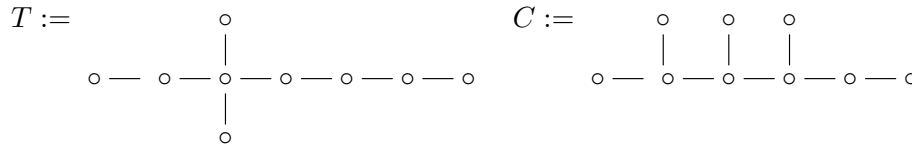


Fig. 2.4: Árboles cuyas álgebras de caminos no son derivadamente equivalentes

2.5. Factores anti-simétricos del producto tensorial de dos álgebras

Habiendo efectuado una operación entre dos álgebras A y B , es natural preguntarnos si siempre es posible obtener el pfaffiano del álgebra resultante a partir de los pfaffianos de las álgebras iniciales.

Entre las operaciones de álgebras más importantes se encuentra el producto tensorial $A \otimes B$. Un hecho interesante es que el carcaj ordinario de $A \otimes B$ corresponde al producto cartesiano $Q_A \square Q_B$. Así, nos preguntamos si vale $\mathfrak{P}_{KQ_1 \otimes KQ_2} = \mathfrak{P}_{KQ_1} \mathfrak{P}_{KQ_2}$.

Consideremos los álgebras de caminos $A = KQ_1$ y $B = KQ_2$, donde Q_1 y Q_2 se muestran en la figura 2.5. Como veremos más adelante en 40 y 43, $\mathfrak{P}_A = 2$ y $\mathfrak{P}_B = 1$.

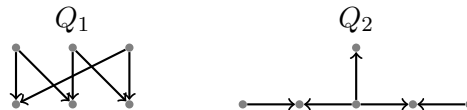


Fig. 2.5: Factores: C_3 y E_6

Ya que A y B son álgebras de caminos, $K(Q_1 \square Q_2) = KQ_1 \otimes KQ_2$. Recordemos que el producto cartesiano de dos carcajes $Q_1 \square Q_2$ es tal que $(Q_1 \square Q_2)_0 = Q_1 \times Q_2$ y $(Q_1 \square Q_2)_1 : \{(u, u') \rightarrow (v, v') | u = v \text{ y } u' \rightarrow v' \in (Q_2)_1, \text{ o } u' = v' \text{ y } u \rightarrow v \in (Q_1)_1\}$.

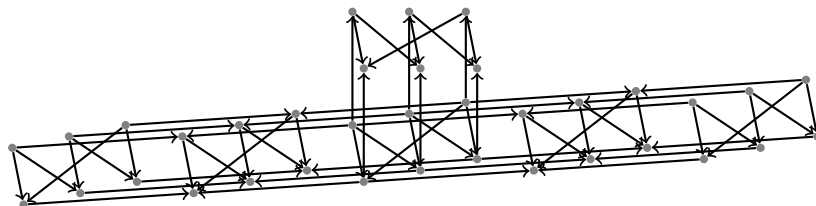


Fig. 2.6: Producto tensorial de carcajes $Q_1 \square Q_2$

Sea D el álgebra de caminos de $Q_1 \square Q_2$, usando GAP 4,8,3 se obtiene que $\mathfrak{P}_D = 0$. De modo que $\mathfrak{P}_{K(Q_1 \square Q_2)} \neq \mathfrak{P}_{KQ_1} \mathfrak{P}_{KQ_2}$.

La suma directa de dos álgebras es el álgebra más pequeña conteniendo a A y B . La matriz de Cartan de $A \oplus B$ es $C_A \oplus C_B$, en consecuencia, $\tilde{C}_{A \oplus B} = \tilde{C}_A \oplus \tilde{C}_B$. Por la propiedad 1.32 del pfaffiano de una matriz, $\mathfrak{P}_{A \oplus B} = \mathfrak{P}(\tilde{C}_{A \oplus B}) = \mathfrak{P}(\tilde{C}_A) \mathfrak{P}(\tilde{C}_B) = \mathfrak{P}_A \mathfrak{P}_B$.

Sin embargo, la suma directa no es un álgebra conexa. En la prueba del siguiente teorema, construimos un álgebra conexa D tal que $\mathfrak{P}_D = \mathfrak{P}_A \mathfrak{P}_B$. Esta álgebra tiene dos vértices extras y tres flechas más en comparación con la suma directa.

Teorema 37: Sean $A_1 = KQ/\mathcal{I}$ y $B_1 = KQ_2/\mathcal{I}_2$ álgebras con pfaffianos $\mathfrak{P}_{A_1}, \mathfrak{P}_{B_1} \neq 0$. Existe un álgebra D con pfaffiano $\mathfrak{P}_{A_1} \mathfrak{P}_{B_1}$ conteniendo a A_1 y B_1 como subálgebras convexas.

Prueba. El carcaj de B es acíclico y finito, entonces B tiene al menos un módulo proyectivo simple $P(y)$ que no es inyectivo. Así, el vértice correspondiente y en Q_B es un pozo y existe, al menos, una flecha que termina en y . Entonces B es la extensión $B_1[\text{rad} P(y)]$ de un álgebra B_1 por el radical de la envolvente proyectiva $P(y)$ de y . Análogamente, Q_A posee un vértice fuente x y A se puede ver como la coextensión $[\text{rad } I(x)]A$ de un álgebra A_1 por el módulo $\text{rad } I(x)$, donde $I(x)$ es la envolvente inyectiva de y .

Ahora bien, tomemos $Q = (Q_0, Q_1)$, donde $Q_0 = (Q_A)_0 \cup (Q_B)_0$, $Q_1 = (Q_A)_1 \cup (Q_B)_1 \cup \{\alpha : x \rightarrow y\}$ y $J = \langle \mathcal{I}_1, \mathcal{I}_2 \rangle$.

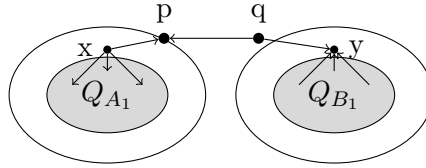


Fig. 2.7: Q_1 y Q_2 son subcarcajes convexos de Q_D .

Sea $D = KQ/\mathcal{J}$, ordenemos los vértices de Q como $a_1, \dots, a_{n-1}x, y, b_1, \dots, b_m$, de modo que a_1, \dots, a_{n-1} corresponden a los primeros $n - 1$ vértices en un orden admisible de $(Q_A)_0$, mientras que b_1, \dots, b_{m-1} , son los últimos $m - 1$ vértices de un orden admisible de Q_B . Este orden admisible de vértices da lugar la matriz de Cartan de $D \begin{bmatrix} C_A & E \\ 0 & C_B \end{bmatrix}$, donde $E_{y,x}$ es la matriz canónica, cuya única entrada no nula es (y, x) .

Entonces $\tilde{C}_D = \begin{bmatrix} \tilde{C}_A & E \\ -E^t & \tilde{C}_B \end{bmatrix}$ y, como un cálculo sencillo muestra, es congruente a

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & v & 0 \\ -1 & 0 & 0 & -w \\ -v^t & 0 & \tilde{C}_{A_1} & 0 \\ 0 & w^t & 0 & \tilde{C}_{B_1} \end{bmatrix}.$$

Por la fórmula de recursividad del pfaffiano 1.29,

$$\mathfrak{P}_D = \mathfrak{P} \begin{bmatrix} \tilde{C}_{A_1} & \mathbb{O}_n \\ \mathbb{O}_n & \tilde{C}_{B_1} \end{bmatrix} + \sum_{j=3}^n (-1)^j v_j \mathfrak{P} \begin{bmatrix} 0 & 0 & -w \\ 0 & \tilde{C}_{A_1}[j,j] & 0 \\ w^t & 0 & \tilde{C}_{B_1} \end{bmatrix}.$$

Usando la propiedad 1.32 del pfaffiano, tenemos

$$\begin{aligned}
\mathfrak{P}_D &= \mathfrak{P}(\tilde{C}_{A_1})\mathfrak{P}(\tilde{C}_{B_1}) + \left[\sum_{j=1}^n (-1)^j v_j \mathfrak{P}(\tilde{C}_{A_1}[j, j]) \right] \mathfrak{P} \left(\begin{bmatrix} 0 & -w \\ w^t & \tilde{C}_{B_1} \end{bmatrix} \right) \\
&= \mathfrak{P}_{A_1} \mathfrak{P}_{B_1} + \mathfrak{P}(\tilde{C}_A) \mathfrak{P} \left(\begin{bmatrix} 0 & -w \\ w^t & \tilde{C}_{B_1} \end{bmatrix} \right) \\
&= \mathfrak{P}_{A_1} \mathfrak{P}_{B_1} + \mathfrak{P}_A \mathfrak{P}_B.
\end{aligned}$$

Ya que \tilde{C}_A es una matriz de orden impar tiene pfaffiano cero, así que $\mathfrak{P}_D = \mathfrak{P}_A \mathfrak{P}_B$. \square

3. FACTORES ANTI-SIMÉTRICOS DE ÁLGEBRAS DE CAMINOS

Las álgebras hereditarias son de las más estudiadas y mejor comprendidas en teoría de representaciones. Han servido de modelo para el estudio de otras álgebras; es decir, muchas técnicas usadas para el estudio de éstas han sido imitadas para abordar otra clase de álgebras. Con esta idea en mente, resulta natural encarar el estudio de los factores anti-simétricos de álgebras hereditarias antes que el de otras.

Un álgebra A es llamada **hereditaria** si y sólo si cualquier ideal derecho de A es proyectivo como A -módulo. Existen diversos modos de caracterizar a las álgebras hereditarias, una lista apropiada de caracterizaciones se puede consultar en el teorema 1,4 del libro [1].

Tal como sucede en matemáticas, la teoría de representaciones tiene el propósito de clasificar sus objetos de estudio. Una clasificación de álgebras asociativas, considerando sus representaciones, consiste en agruparlas de acuerdo a la "complejidad" de la descripción de sus módulos inescindibles. En este sentido, son agrupadas en álgebras de **tipo finito**, si tienen un número finito de inescindibles; las álgebras de **tipo manso**, cuyos módulos se estructuran en familias uniparamétricas; y las álgebras de **tipo salvaje**, que contienen a todas las que no son ni de tipo finito ni manso.

Es bien conocido (ver [1]) que un álgebra hereditaria conexa es de tipo finito si y solo si el grafo subyacente de su carcaj ordinario es de tipo Dynkin: \mathbb{A}_m , $m \in \mathbb{N}$, \mathbb{D}_n , $n \geq 4$, $\mathbb{E}_6, \mathbb{E}_7, \mathbb{E}_8$. Mientras que $A \cong KQ$ es de tipo manso si y solo si \bar{Q} es alguno de los grafos euclidianos $\tilde{\mathbb{A}}_n, \tilde{\mathbb{D}}_n, n \geq 4, \tilde{\mathbb{E}}_6, \tilde{\mathbb{E}}_7, \tilde{\mathbb{E}}_8$. Por otra parte, A es hereditaria salvaje si posee un subálgebra propia, convexa y mansa.

En otro orden de ideas, existe una estrecha relación entre la matriz de Cartan de KQ y la matriz de adyacencia del **grafo subyacente** \bar{Q} (producido al ignorar las orientaciones de las flechas de Q). Por ello, el grafo \bar{Q} contiene información interesante del álgebra de caminos KQ ; para profundizar en el tema, sugerimos consultar [5] y [4]. A continuación, introducimos algunos conceptos de la teoría de grafos que nos permitirán estudiar el espectro de $C_A^{-t} - C_A^{-1} \sim_e \tilde{C}_A$.

Sea $\Delta = (V_0, E)$ un grafo sin lazos y sin flechas múltiples y supongamos que $V_0 = \{1, \dots, n\}$. Para cada $i \in \Delta$ definimos la reflexión R_i que envía el j -ésimo vector canónico e_j a $e_j - \mathcal{A}_{ji}e_i$, donde \mathcal{A}_{ji} es el número de lados uniendo los vértices i y j . Si $\pi : V_0 \rightarrow V_0$ es una permutación, se dice que el producto $C(\pi, \Delta) = R_{\pi(1)} \cdots R_{\pi(n)}$ es una transformación de Coxeter del grafo Δ ; en general la transformación de Coxeter

depende de la permutación π .

Cada permutación π define un carcaj $Q = \Delta(\pi)$ cuyo carcaj subyacente es Δ : hay una flecha $i \rightarrow j$ para cada lado $i - j \in E$, si $\pi^{-1}(i) \leq \pi^{-1}(j)$ y $\mathcal{A}_{ij} \neq 0$. De hecho el elemento de Coxeter depende únicamente de Q .

Asociado a un carcaj Q , también definimos la matriz $\mathcal{M} = (M_{ij})$ asociada al carcaj Q de la siguiente manera: $M_{ii} = 1$; $M_{ij} = -\mathcal{A}_{ij}$ si $i \rightarrow j \in Q$; $M_{ij} = 0$, de otro modo.

En otro orden de ideas, dados dos carcajes Q y Q' con el mismo grafo subyacente Δ , decimos que tienen orientaciones equivalentes si existe una sucesión de carcajes $Q = Q_1, Q_2, \dots, Q_s = Q'$ tales que, $\bar{Q}_k = \Delta$, $k = 1, \dots, s$ y Q_{k+1} se obtiene de Q_k al transformar una fuente en un pozo.

Nota 38: A continuación, listamos algunos hechos interesantes relacionados con los conceptos que hemos introducido. El artículo [5] presenta un estudio bastante completo al respecto.

1. Si Q y Q' son dos carcajes con orientaciones equivalentes entonces las matrices que representan a sus elementos de Coxeter cox_Q y $cox_{Q'}$ son \mathbb{Z} conjugadas.
2. Todos los árboles dirigidos con el mismo grafo subyacente tienen orientaciones equivalentes.
3. El elemento de Coxeter es igual a la matriz $-\mathcal{M}\mathcal{M}^{-t}$.
4. La matriz del elemento de Coxeter cox_Q coincide con la matriz de Coxeter del álgebra de caminos KQ (ver [1],pág. 472, 4.7.)

Tipo	Grafo
\mathbb{A}_n $n \geq 1$	
\mathbb{D}_n $n \geq 4$	
\mathbb{E}_6	
\mathbb{E}_7	
\mathbb{E}_8	

Tab. 3.1: Grafos de tipo Dynkin

Lema 39: Los invariantes anti-simétricos de un álgebra de caminos de un grafo tipo árbol $A = KQ$ sólo depende de $\Delta = \bar{Q}$.

Prueba. Supongamos que a Δ se le han dado dos orientaciones distintas de tal suerte que obtenemos Q y Q' . Por 38 2), las orientaciones de Q y Q' son equivalentes. Así, tal como lo mencionamos en 38 1), las matrices cox_Q y $cox_{Q'}$ son \mathbb{Z} conjugadas. Entonces, para alguna matriz $U \in \mathbb{G}l_n(\mathbb{Z})$,

$$\begin{aligned} cox_Q + \mathbb{1}_n &= U^{-1}(cox_{Q'})U + \mathbb{1}_n \\ &= U^{-1}(cox_{Q'} + \mathbb{1}_n)U. \end{aligned} \tag{3.1}$$

Por otra parte, la matriz $\tilde{C}_A = C_A^t - C_A$ es equivalente a la matriz $\Phi_{KQ} + \mathbb{1}_n = (C_A^t - C_A)(-C_A^{-1}) = \tilde{C}_A C_A^{-1}$, pues la matriz de Cartan es unimodular (ver lema 25).

Ya hemos enfatizado, en 38, que las matrices de los elementos de Coxeter cox_Q y $cox_{Q'}$ coinciden con la transformaciones de Coxeter Φ_{KQ} y $\Phi_{KQ'}$, respectivamente.

Del hecho de que \tilde{C}_A y $\Phi_{KQ} + \mathbb{1}_n$ son equivalentes y 3.1, $\tilde{C}_{KQ} = V^{-1}(\tilde{C}_{KQ'})V$, para alguna matrix $V \in \mathbb{G}l_n(\mathbb{Z})$.

Por tanto, el conjunto de factores anti-simétricos de KQ es igual al de KQ' . □

En las siguientes dos proposiciones, demostramos que todos factores anti-simétricos no nulos de álgebras hereditarias de tipo manso y tipo finito tienen valor 1. En la prueba, calculamos estos números explícitamente. Con ello, podemos reconstruir las formas normales de Smith asociada a cada álgebra. Resumimos dicha información en la tabla 3.2.

\bar{Q}	$\mathcal{S}(\tilde{C}_A)$	\bar{Q}	$\mathcal{S}(\tilde{C}_A)$
\mathbb{A}_n n par	$\mathbb{1}_n$	$\tilde{\mathbb{D}}_n$ n par	$\mathbb{1}_{n-2} \oplus \mathbb{O}_3$
\mathbb{A}_n n impar	$\mathbb{1}_{n-1} \oplus (0)$	$\tilde{\mathbb{D}}_n$ n impar	$\mathbb{1}_{n-1} \oplus \mathbb{O}_2$
\mathbb{D}_n n par	$\mathbb{1}_{n-2} \oplus \mathbb{O}_2$	$\tilde{\mathbb{E}}_6$	$\mathbb{1}_6 \oplus (0)$
\mathbb{D}_n n impar	$\mathbb{1}_{n-1} \oplus (0)$	$\tilde{\mathbb{E}}_7$	$\mathbb{1}_7$
\mathbb{E}_6	$\mathbb{1}_6$	$\tilde{\mathbb{E}}_8$	$\mathbb{1}_8 \oplus (0)$
\mathbb{E}_7	$\mathbb{1}_6 \oplus (0)$		
\mathbb{E}_8	$\mathbb{1}_8$		

Tab. 3.2: $\mathcal{S}(\tilde{C}_A)$, donde $A = K[Q]$ es hereditaria de tipo finito o manso.

Proposición 40: Los factores anti-simétricos no nulos de un álgebra hereditaria de tipo finito valen 1.

Prueba. Si A es hereditario de tipo finito entonces $A = KQ$, donde el grafo subyacente Δ de Q algún grafo de tipo Dynkin en la tabla 3.1. Por el lema 39, los factores anti-simétricos son independientes de la orientación de Δ . Entonces, si es necesario considerar alguna orientación la podemos tomar a conveniencia.

Supongamos que $A = KQ$ y que $\bar{Q} = \mathbb{A}_n$. De acuerdo a la paridad de n , distinguimos dos casos.

\bar{Q}	$\chi_{K\bar{Q}}$
$\mathbb{A}_n \ n \geq 1$	v_{n+1}
$\mathbb{D}_n \ n \geq 4$	$\Phi_2 \prod_{\substack{d 2(n-1) \\ d \neq 1, d \neq n-1}} \Phi_d$
\mathbb{E}_6	$\Phi_3 \Phi_{12}$
\mathbb{E}_7	$\Phi_2 \Phi_{18}$
\mathbb{E}_8	Φ_{30}
v_{n+1}	$1 + x + \cdots + x^n$
Φ_n	n -ésimo polinomio ciclotómico

Tab. 3.3: Polinomio de coxeter de un álgebra hereditaria de tipo finito

Si n es par entonces $\chi_A(-1) = \sum_{i=0}^{n+1} (-1)^i = 1$ y $\mathfrak{P}_A = 1$. Ya que $\mathfrak{a}_A(\tilde{C}_k) \mid \mathfrak{P}_A$ entonces $\mathfrak{a}_A(\tilde{C}_k) = 1$, $1 \leq k \leq n$.

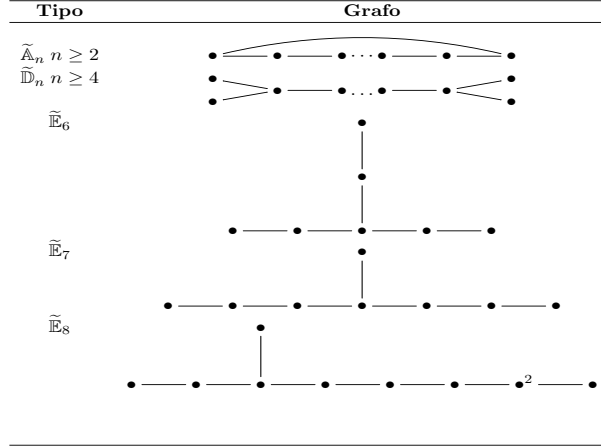
Si n es impar $\chi_A(-1) = \sum_{i=0}^n (-1)^i = 0$ y $\mathfrak{P}_A = 0$. Para calcular los factores anti-simétricos restantes, tomemos una fuente b de \bar{Q} y consideremos el proyectivo inescindible $P(b)$ correspondiente. El álgebra $B = A/(P(b))$ es un álgebra convexa de A tal que $\bar{Q}_B = \mathbb{A}_{n-1}$ entonces $\mathfrak{a}_A(\tilde{C}_k) \mid \mathfrak{a}_B(\tilde{C}_k) = 1$, $1 \leq k \leq n$.

Sea $A = K\mathbb{D}_n$ con $n \geq 4$ y par. Ya que uno de los factores de χ_A es $\Phi_2 = t + 1$, $\mathfrak{P}_A = 0$. Para los otros factores anti-simétricos, sean $P(y), P(x)$ los módulos proyectivos y tomemos $B = A/(P(x), P(y))$. B es un subálgebra convexa de tipo \mathbb{A}_{n-2} por lo que $\mathfrak{a}_A(\tilde{C}_k) \mid \mathfrak{a}_B(\tilde{C}_k)$, $1 \leq k \leq n - 2$. Por lo tanto $\mathfrak{a}_A(\tilde{C}_k) = 1$, $1 \leq k \leq n - 2$.

Si n es impar el subálgebra $B = A/(P(n))$ es de tipo \mathbb{A}_{n-1} . Análogamente al caso en que n es par, concluimos que $\mathfrak{a}_A(\tilde{C}_k) = 1$, $1 \leq k \leq n - 1$ y $\mathfrak{a}_n(\tilde{C}_A) = \mathfrak{a}_{n+1}(\tilde{C}_A) = \mathfrak{P}_A = 0$.

Sean $A = K\vec{\mathbb{E}}_6$ y $B = K\vec{\mathbb{E}}_8$, entonces $\chi_A = \Phi_3 \Phi_{12} = (t^2 + t + 1)(t^4 - t^2 + 1)$ y $\chi_B = \Phi_{30} = t^8 + t^7 - t^5 - t^4 - t^3 + t + 1$. Así que, $\mathfrak{P}_A = \mathfrak{P}_B = 1$ y todos los factores anti-simétricos no nulos de A y B valen 1.

Finalmente, consideremos $A = K\vec{\mathbb{E}}_7$ con la orientación dada en 3.1. $\mathfrak{P}_A = 0$ ya que $\Phi_2 = x + 1$. Para calcular los factores anti-simétricos restantes, consideremos $B = A/Ae_x A$; B es un subálgebra convexa hereditaria y $\bar{Q}_B = \mathbb{A}_6$ entonces $\mathfrak{a}_B(\tilde{C}_k) = 1$ y $\mathfrak{a}_A(\tilde{C}_k) \mid \mathfrak{a}_B(\tilde{C}_k) = 1$, $1 \leq k \leq 6$. \square



Tab. 3.4: Grafos tipo Dynkin extendidos.

Proposición 41: Sea $A = KQ$ un álgebra mansa hereditaria tal que \bar{Q} no tiene ciclos. Los factores anti-simétricos no nulos de A son iguales a 1.

Prueba. Sea $A = KQ$ entonces el grafo subyacente \bar{Q} es de tipo euclidiano sin ciclos. Por el lema 39, la orientación del carcaj Q no afecta los valores de los factores anti-simétricos.

Supongamos que $B \cong K[\widetilde{\mathbb{D}}_n]$, entonces Q_B tiene $n + 1$ vértices y, por ende, $n + 1$ factores anti-simétricos. Ahora bien, observamos que la matriz \widetilde{C}_B tiene la forma:

$$\left(\begin{array}{cc|c|cc} 0 & 0 & u & 1 & 1 \\ 0 & 0 & u & 1 & 1 \\ \hline -u^t & -u^t & \widetilde{C}_{n-2} & u^t & u^t \\ \hline -1 & -1 & -u & 0 & 0 \\ -1 & -1 & -u & 0 & 0 \end{array} \right),$$

donde \widetilde{C}_{n-2} es la matriz anti-simétrica asociada a la matriz de Cartan. Esta matriz es congruente a

$$\left(\begin{array}{cc|c|cc} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & u & 1 & 0 \\ \hline 0 & -u^t & \widetilde{C}_{n-2} & u^t & 0 \\ \hline 0 & -1 & -u & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right) \sim_c \widetilde{C}_{\mathbb{D}_{n-1}} \oplus \mathbb{O}_2.$$

De modo que, la forma normal de Smith de \widetilde{C}_B está dada por $\mathcal{S}(\widetilde{C}_A) \oplus \mathbb{O}_2$, donde $A = KD_{n-1}$. Por la proposición 40, tenemos que $\mathcal{S}(\widetilde{C}_A) = \mathbb{1}_{n-2} \oplus \mathbb{O}_2 \oplus \mathbb{O}_2$, si n es par, o $\mathcal{S}(A) = \mathbb{1}_{n-2} \oplus (0) \oplus \mathbb{O}_2$, si n es impar.

Si $\bar{Q} = \widetilde{E}_6$ entonces A es la extensión por un punto de $B = K\widetilde{E}_6$. Por 27, $\alpha_A(\widetilde{C}_k) | \alpha_B(\widetilde{C}_k) = 1, 1 \leq k \leq 6$. Por otro lado, Q tiene un número impar de vértices así que, $\mathfrak{P}_A = 0$.

\bar{Q}	$\chi_{K\bar{Q}}$
$\tilde{\mathbb{A}}_n \ n \geq 2$	$(t-1)^2 v_p v_q$
$\tilde{\mathbb{D}}_n \ n \geq 4$	$(t-1)^2 v_2 v_{n-2}$
$\tilde{\mathbb{E}}_6$	$(t-1)^2 v_2 v_3^2$
$\tilde{\mathbb{E}}_7$	$(t-1)^2 v_2 v_3 v_4$
$\tilde{\mathbb{E}}_8$	$(t-1)^2 v_2 v_3 v_5$
v_{n+1}	$1 + x + \dots + x^n$

Tab. 3.5: Polinomios de Coxeter de álgebras hereditarias de tipo manso.

Si $\bar{Q} = \tilde{\mathbb{E}}_7$ entonces $\mathfrak{P}_A = \mathfrak{a}_8(\tilde{C}_A) = \mathfrak{a}_7(\tilde{C}_A) = 0$, pues $v_2 = t + 1$ es factor de χ_A (ver tabla 3.4). Además, A es una extensión unipuntual de $B = K\tilde{\mathbb{E}}_7$ de A entonces, por 27 y 40, $\mathfrak{a}_A(\tilde{C}_k) \mid \mathfrak{a}_B(\tilde{C}_k) = 1$, $1 \leq k \leq 6$.

Sea $\bar{Q} = \tilde{E}_8$, análogamente al caso anterior, deducimos que $\mathfrak{P}_A = 0$. En la tabla 3.4, podemos notar que \mathbb{A}_8 es subálgebra convexa de A . De aquí que $\mathfrak{a}_A(\tilde{C}_k) = 1$, $1 \leq k \leq 8$. \square

No todas las álgebras hereditarias cuyos factores anti-simétricos no nulos son 1 son tipo árbol. Antes de proveer el ejemplo, citamos un bonito teorema de A’Campo que establece una interacción importante entre la teoría de representaciones de álgebras y la teoría espectral de grafos (para más detalles sugerimos consultar [5] y [7]). Una de las consecuencias de dicho teorema es que, $Spec(\Phi_A) \subset \mathbb{S}^1 \cup \mathbb{R}$, cuando A es un álgebra hereditaria KQ y Q es un **grafo bipartito**; esto es, cada vértice de Q es un pozo o una fuente.

Teorema 42 (A’Campo): Sea $A = KQ$ un álgebra hereditaria con Q un carcaj bipartito. Entonces $\chi_A(t^2) = t^n \kappa_\Delta(t + t^{-1})$, donde n es el número de vértices de Q , y κ_Δ es el polinomio característico del grafo subyacente Δ de Q .

Ejemplo 43: Considera la n -corona $C_n = K[\mathbf{C}_n]$ y supongamos que $\Upsilon = [\mathfrak{c}_1, \dots, \mathfrak{c}_n]$ entonces, $\mathfrak{c}_k = 1$, $1 \leq k \leq n - 1$. Y $\mathfrak{c}_n = 2$ si n es impar o $\mathfrak{c}_n = 0$ si n es par.

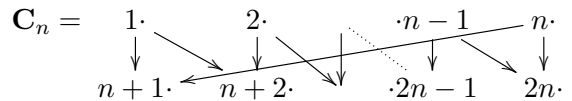


Fig. 3.1: n -corona

Prueba. Removiendo los vértices n y $2n$ de la n -corona, notamos que C_n tiene una subcategoría convexa con grafo subyacente de tipo Dynkin \mathbb{A}_{2n-2} . De acuerdo a la proposición 27 y 40, $\mathfrak{c}_k \mid \mathfrak{a}_k = 1$ entonces $\mathfrak{c}_k = 1$, $1 \leq k \leq n - 1$.

Por otra parte, la proposición 30 1) establece que $\chi_{C_n}(-1) = [\prod_{k=1}^n \mathfrak{c}_k]^2 = \mathfrak{c}_n^2$. Y, por un teorema de A'Campo (42), sabemos que si $A = K[\vec{\Delta}]$, donde $\vec{\Delta}$ es un carcaj bipartito, χ_A y el polinomio característico de Δ κ_Δ se relacionan de la siguiente manera: $\chi_A(x^2) = x^n \kappa_\Delta(x + x^{-1})$.

De teoría de grafos (ver [4]), sabemos que el polinomio característico de un $2n$ circuito está dado por $\kappa_{2n}(x) = 2\cos(2n \cdot \arccos(\frac{x}{2})) - 2$. Notamos que $\chi_A(-1) = \chi(i^2) = (i)^{2n} \kappa_\Delta(i + i^{-1}) = (-1)^n \kappa_\Delta(0)$, entonces

$$\begin{aligned} \chi_A(-1) &= (-1)^n [2\cos(2n \cdot \arccos(0)) - 2] \\ &= (-1)^n [2\cos(2n \cdot \frac{\pi}{2}) - 2] \\ &= (-1)^n [2\cos(n\pi) - 2]. \end{aligned}$$

De aquí si n es impar $\chi_A(-1) = -[2\cos(n\pi) - 2] = 4$ y si n es par $\chi_A(-1) = [2\cos(n\pi) - 2] = 2 - 2 = 0$. Ya que elegimos los factores anti-simétricos como enteros no negativos tenemos que, $\mathfrak{c}_n = 2$ si n es impar y $\mathfrak{c}_n = 0$ si n es par. \square

Como se muestra en el ejemplo 43, todos los factores anti-simétricos no nulos del álgebra de caminos de la corona \mathbf{C}_{2m} , cuando m es un número par, son iguales a 1. Así que, ésta no es una característica particular de los árboles.

En otro orden de ideas, una **orientación** sobre Δ es una función $\sigma : \{(i, j), (j, i) \mid ij \in E\} \rightarrow \{1, -1\}$. Es decir, la función σ dota los lados de Δ con una dirección. Denotamos el carcaj resultante por Δ^σ . La **matriz de adyacencia sesgada** $S^\sigma = S$ de Δ^σ es la matriz cuya entrada $(S^\sigma)_{ij} = \sigma((ij))$ si $i - j \in E$ o $(S^\sigma)_{ij} = 0$ en otro caso. Las matrices S^σ son estudiadas en el artículo [3]; en particular, se prueba el teorema siguiente.

Teorema 44: Sea Δ un grafo simple entonces las siguiente condiciones son equivalentes:

1. Δ no tiene ciclos pares
2. $\det S[R] = 1$ o para toda matriz de adyacencia sesgada S^σ de Δ . o $\det S[R] = 0$ para toda matriz de adyacencia sesgada S^σ de Δ .
3. Todas las matrices de adyacencia S^σ de Δ son coespectrales.

En el artículo [3], el enunciado contiene más incisos, nosotros sólo escribimos los que usaremos.

Ahora bien, veamos cómo el teorema nos permite avanzar en nuestro estudio de factores anti-simétricos.

Teorema 45: Sea Δ un grafo sin ciclos pares y $A = K\Delta^\sigma$. Supongamos que σ no genera ciclos orientados. Entonces todos los factores anti-simétricos no nulos de A valen 1.

Prueba. Tal como lo enunciamos en 38, 3), la matriz de Cartan del álgebra KQ y cox_Q se relacionan por la ecuación $C_{KQ}^t cox = -C_{KQ}$, Entonces

$$\begin{aligned}\tilde{C}_{KQ} &= C_{KQ}^t - C_{KQ} \\ &= C_{KQ}^t + C_{KQ}^t cox_Q \\ &= C_{KQ}^t(\mathbb{1}_n + cox_Q)\end{aligned}$$

Sea $Q = \Delta^\sigma$ con carcaj subyacente Δ y consideramos su matriz \mathcal{M} (definida al inicio del capítulo 3) entonces, por 38:

$$\begin{aligned}\tilde{C}_{KQ} &= C_{KQ}^t(\mathbb{1}_n + cox_Q) \\ &= C_{KQ}^t(\mathbb{1}_n + \mathcal{M}^{-t}\mathcal{M}) \\ &= C_{KQ}^t(\mathcal{M}^t - \mathcal{M})\mathcal{M}^{-t}\end{aligned}\tag{3.2}$$

Por otro lado, la matriz de adyacencia sesgada $S^\sigma = S$ de Δ^σ es la matriz cuya entrada $(S^\sigma)_{ij} = \sigma((ij))$ si $ij \in E$ o $(S^\sigma)_{ij} = 0$ en otro caso. Así observamos que

$$S^\sigma = M^t - M\tag{3.3}$$

Por 3.2 y 3.3, concluimos que \tilde{C}_{KQ} es equivalente a la matriz S^σ . Por lo tanto, el valor absoluto de los factores anti-simétricos de KQ coinciden con los factores invariantes de Smith de la matriz S^σ .

Recordemos que una de las caracterizaciones de los factores anti-simétricos obtenida en 1.13 es $s_k(S^\sigma) = \frac{d_k(S^\sigma)}{d_{k-1}(S^\sigma)}$ y a su vez, por la definición 1, $d_k(S^\sigma)$ es el máximo común divisor de sus menores.

Ya que, el teorema 3 muestra que todos los menores de S^σ valen 1 o 0 concluimos que $s_k(S^\sigma) = 1$, $1 \leq k \leq rango(S^\sigma)$.

De donde $|\mathfrak{a}_k(\tilde{C}_A)| = 1$, $1 \leq k \leq rango(S^\sigma)$. □

Regresando al teorema de A'campo 42, notamos que la prueba de éste puede imitarse con el fin establecer una relación entre la matriz sesgada y la transformación de Coxeter de un grafo bipartito Δ . La prueba de 42 se puede consultar en [7].

El siguiente resultado es una ‘versión anti-simétrica’ del teorema 42.

Lema 46: 1. Si $A = KQ$ entonces $\chi_C((iT)^2) = T^n \chi_{S^\sigma}(T^{-1} - T)$.

2. Si \bar{Q} no es de tipo Dynkin existe un $\mu \leq 1$ tal que $\rho(S^\sigma) = \mu^{-1} + \mu$ y $\rho(\Phi) = \mu^2$.

Prueba.

1. Consideramos la \mathcal{M} -matriz de Q . Ya que el grafo es bipartito, $S^\sigma = N - N^t$ y $\mathcal{M} = \mathbb{1}_n - N$, donde $N = \begin{bmatrix} 0 & D \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$.

Más aún, $N^2 = \begin{bmatrix} 0 & D \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & D \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = 0$ y $M(\mathbb{1}_n + N) = (\mathbb{1}_n - N)(\mathbb{1}_n + N) = \mathbb{1}_n^2 - N^2 = \mathbb{1}_n$.
En atención a lo cual,

$$\mathcal{M}^{-1} = \mathbb{1}_n + N. \quad (3.4)$$

De las observaciones anteriores, y recordando que $\det(\mathcal{M}) = 1$, subsigue:

$$\begin{aligned} \chi_{KQ}((it)^2) &= \det((it)^2 \mathbb{1}_n - \text{cox}_Q) \\ &= \det((it)^2 \mathbb{1}_n + \mathcal{M}\mathcal{M}^{-t}) \\ &= \det(\mathcal{M}) \det((it)^2 \mathbb{1}_n + \mathcal{M}\mathcal{M}^{-t}) \\ &= \det(\mathbb{1}_n + N) \det(-t^2 \mathbb{1}_n + (\mathbb{1}_n - N)(\mathbb{1}_n + N^t)). \end{aligned} \quad (3.5)$$

Habiendo efectuado el producto indicado en 3.5, usamos 3.4 para obtener

$$\begin{aligned} \chi_{KQ}((it)^2) &= \det(-t^2 \mathbb{1}_n - t^2 N + (\mathbb{1}_n + N^t)) \\ &= t^n \det(-t \mathbb{1}_n - tN + t^{-1}(\mathbb{1}_n + N^t)) \\ &= t^n \det((t^{-1} - t) \mathbb{1}_n + (t^{-1} N^t - tN)). \end{aligned}$$

Para finalizar, expresamos $\det((t^{-1} - t) \mathbb{1}_n + (t^{-1} N^t - tN))$ de manera conveniente hasta conseguir $\det((t^{-1} - t) \mathbb{1}_n - S^\sigma)$:

$$\begin{aligned} \det((t^{-1} - t) \mathbb{1}_n + (t^{-1} N^t - tN)) &= \det \left(\begin{bmatrix} \mathbb{1}_n & 0 \\ 0 & t \mathbb{1}_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} (t^{-1}-t) \mathbb{1}_n & -tD \\ t^{-1} D^t & (t^{-1}-t) \mathbb{1}_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbb{1}_n & 0 \\ 0 & t^{-1} \mathbb{1}_n \end{bmatrix} \right) \\ &= \det \left(\begin{bmatrix} (t^{-1}-t) \mathbb{1}_n & -tD \\ D^t & (1-t^2) \mathbb{1}_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbb{1}_n & 0 \\ 0 & t^{-1} \mathbb{1}_n \end{bmatrix} \right) \\ &= \det \left(\begin{bmatrix} (t^{-1}-t) \mathbb{1}_n & -D \\ D^t & (t^{-1}-t) \mathbb{1}_n \end{bmatrix} \right) \\ &= \det \left((t^{-1} - t) \mathbb{1}_n - \begin{bmatrix} 0 & D \\ -D^t & 0 \end{bmatrix} \right) \\ &= \det((t^{-1} - t) \mathbb{1}_n - S^\sigma) \end{aligned}$$

Por lo tanto, $\chi_{KQ}((it)^2) = t^n \chi_{S^\sigma}(t^{-1} - t)$.

2. Recordemos que, siendo S^σ una matriz anti-simétrica, todos sus eigenvalores son imaginarios puros o cero. En particular, $i\rho(S^\sigma)$ y $-i\rho(S^\sigma)$ son eigenvalores de esta matriz.

Por el inciso anterior, $(i\mu')^2 \in \text{Spec}(\Phi_{KQ})$ si y sólo si $\mu'^{-1} - \mu' \in \text{Spec}(S^\sigma)$. Entonces, existe μ' tal que $i\rho(S^\sigma) = \mu'^{-1} - \mu'$ si y sólo si $\rho(S^\sigma) = -i\mu'^{-1} + i\mu' = (i\mu')^{-1} + (i\mu') = \mu^{-1} + \mu$, donde $\mu = i\mu'$.

Ya que $\rho(S^\sigma)$ es un número positivo, $\mu = i\mu' \in \mathbb{R}^+$; de otro modo, $\mu = \pm i$. Más aún, podemos suponer que $\mu \geq 1$.

De nuevo, por el inciso anterior, $-\mu^2 \in \text{Spec}(\Phi_{KQ})$. Luego,

$$1 \leq \mu \leq \rho(\Phi)^{\frac{1}{2}}. \quad (3.6)$$

Ahora bien, supongamos que Q no es de tipo Dynkin entonces $1 \leq \rho(\Phi_{KQ}) \in \text{Spec}(KQ)$. Por ??, $(i\rho(\Phi_{KQ})^{\frac{1}{2}})^{-1} - i\rho(\Phi_{KQ})^{\frac{1}{2}} \in \text{Spec}(S^\sigma)$. Por lo que, $\rho(\Phi_{KQ})^{\frac{-1}{2}} + \rho(\Phi_{KQ})^{\frac{1}{2}} \leq \rho(S^\sigma)$.

En la desigualdad 3.6, supongamos que $\rho(\Phi)^{\frac{1}{2}} \neq \mu$. Entonces $\rho(\Phi)^{\frac{1}{2}} + \rho^{\frac{-1}{2}} \leq \rho(S^\sigma) = \mu^{-1} + \mu$ si y sólo si

$$\begin{aligned} \rho(\Phi)^{\frac{1}{2}} - \mu &\leq \mu^{-1} - \rho(\Phi)^{\frac{-1}{2}} \\ &= \frac{\rho(\Phi)^{\frac{1}{2}} - \mu}{\rho(\Phi)^{\frac{1}{2}}\mu}. \end{aligned} \quad (3.7)$$

Entonces $\rho(\Phi)^{\frac{1}{2}} = 1$ y $\rho(\Phi)^{\frac{1}{2}} = \mu$ pero, por hipótesis, $\rho(\Phi)^{\frac{1}{2}} \neq \mu$. Lo cual es una contradicción.

□

4. FACTORES ANTI-SIMÉTRICOS DE COCIENTES DE ÁLGEBRAS DE CARCAJ

Para finalizar, consideramos álgebras de caminos con relaciones o, siendo precisos. Cocientes de álgebras de caminos por un carcaj admisible. Contemplamos dos tipos concretos de estas álgebras: árbol y canónicas.

En el capítulo 3, vimos que si un álgebra KQ posee factores anti-simétricos no nulos entonces \bar{Q} tiene ciclos pares. Notamos también que los ciclos pares no garantizan la existencia de factores anti-simétricos mayores que 1.

Esta situación parece mantenerse al considerar álgebras cociente KQ/\mathcal{I} ; sin embargo no podemos usar todas las herramientas del capítulo anterior, pues usamos fuertemente la relación entre la inversa de la matriz de Cartan y la matriz de adyacencia. Esta relación no se preserva al considerar relaciones sobre el carcaj.

Comenzamos por considerar **álgebras árbol**. Un álgebra $A = \frac{KQ_A}{I}$ es árbol si el carcaj subyacente de Q_A no tiene ciclos; esto es, \bar{Q}_A es un árbol.

La definición de estas álgebras es clara, pero no existe caracterización homológica o geométrica de tales. Además de la clasificación del tipo de representación (finita-mansa-salvaje) y sus categorías derivadas existen pocos resultados sobre álgebras árbol en general.

Proposición 47: Si A un álgebra tipo árbol entonces todos los factores anti-simétricos no nulos de A valen 1.

Prueba. Procedemos por inducción. Ya que A es triangular, podemos enumerar los vértices de Q_A de modo que C_A es una matriz triangular.

Supongamos que Q_A tiene dos vértices. Puesto que, Q_A es un árbol $e_j A e_i = (C_A)_{ij} = 1$; entonces $s_1(A) = s_2(A) = \text{mcd} \left\{ (\tilde{C}_A)_{ij} : 1 \leq i, j \leq 2 \right\} = \text{mcd} \{1, 0, -1\}$. De aquí $s_1(A) = s_2(A) = 1$.

Asume que cada álgebra árbol cuyo carcaj tiene $k < n$ vértices cumple que todos sus factores anti-simétricos no nulos valen 1.

Sea Q_A un carcaj con n vértices y elijamos una flecha $a \rightarrow b$ tal que b es el único vecino de a y no hay otra flecha entrando a b ; entonces podemos escribir $A = B[M]$ para

un árbol conexo B y un módulo M . En este caso, $M = P_b$ es un módulo proyectivo inescindible. Entonces $\chi_A(x) = (1+x)\chi_B(x) - x\chi_C(x)$, donde C es el álgebra árbol obtenida de B al remover el vértice b . Así, $\chi_A(-1) = \chi_C(-1)$ con valor 0 o 1, por hipótesis de inducción.

Para el caso general, ordenamos los vértices de A del siguiente modo: $a, b, c_1, \dots, c_p, d_1, \dots, d_r, e_1, \dots, e_s$ de modo que c_i son aquellos vértices diferentes de a, b tales que $\dim_K c_i A a \neq 0$; los vértices d_j son distintos de los vértices a, b, c_i tales que $\dim_K d_j A b \neq 0$; y los e_i son los vértices restantes.

En el caso en que $r = 0$, M es el módulo simple asociado al vértice b y de aquí, el álgebra A_0 obtenida como la reflexión de A en a es la extensión $A_0 = [M]B$ por el B -módulo inyectivo inescindible M . La situación es dual a la considerada anteriormente y $\chi_A(-1) = \chi_{A_0}(-1) = 0$ o 1, ya que A y A_0 son derivadas equivalentes. En el caso en que $r > 0$; el módulo M coincide con P_b , situación que ya hemos considerada.

Supongamos que $p > 0$ y $r > 0$ entonces la matriz \tilde{C}_A tiene la siguiente forma:

$$\begin{bmatrix} 0 & -1 & -1 & \dots & -1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots \\ 1 & 0 & -1 & \dots & -1 & -1 & -1 & \dots & -1 & 0 & \dots \\ 1 & 1 & 0 & & & & & & & & \\ \vdots & \vdots & & & & & & & & & \\ \vdots & \vdots & & & * & & & & * & & * \\ 1 & 1 & & & & & & & & & \\ 0 & 1 & & & & & & & & & \\ \vdots & \vdots & & & & & & & & & \\ \vdots & \vdots & & & * & & & & * & & * \\ 0 & 1 & & & & & & & & & \\ 0 & 1 & & & & & & & & & \\ \vdots & \vdots & & & & & & & * & & * \end{bmatrix}$$

Procedemos a reducir la matriz \tilde{C}_A aplicando transformaciones elementales de la forma $(\mathbb{1}_n + E_{ij})(\mathbb{1}_n + E_{ji})X(\mathbb{1}_n - E_{ji})(\mathbb{1}_n - E_{ij})$, para algún $i \neq j$, donde E_{ij} es la matriz canónica con un 1 en la entrada (i, j) y 0 en cualquier otra entrada.

$$\begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots \\ 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots \\ 0 & 0 & 0 & & & & & & & & \\ \vdots & \vdots & & & & & & & & & \\ \vdots & \vdots & & & * & & *+1 & & * & & \\ 0 & 0 & & & & & & & & & \\ 0 & 0 & & & & & & & & & \\ \vdots & \vdots & & & & & & & & & \\ \vdots & \vdots & & & * -1 & & * & & * & & \\ 0 & 0 & & & & & & & & & \\ 0 & 0 & & & & & & & & & \\ \vdots & \vdots & & & & & & & * & & * \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 & \dots & -1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots \\ 1 & 0 & -1 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots \\ 0 & 1 & 0 & & & & & & & & \\ \vdots & \vdots & & & & & & & & & \\ \vdots & \vdots & & & * & & & & * & & * \\ 1 & 0 & & & & & & & & & \\ 0 & 0 & & & & & & & & & \\ 0 & 0 & & & & & & & & & \\ \vdots & \vdots & & & & & & & & & \\ \vdots & \vdots & & & * & & & & * & & * \\ 0 & 0 & & & & & & & & & \\ 0 & 0 & & & & & & & & & \\ \vdots & \vdots & & & & & & & * & & * \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots \\ 1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots \\ 0 & 1 & 0 & -y & * & & * & & * & & * \\ 1 & 0 & y & 0 & * & & * & & * & & * \\ 0 & 0 & * & * & & & & & & & \\ 0 & 0 & & & & & & & & & \\ \vdots & \vdots & & & & & & & & & \\ \vdots & \vdots & & & * & & * & & * & & * \\ 0 & 0 & & & & & & & & & \\ 0 & 0 & & & & & & & & & \\ \vdots & \vdots & & & & & & & * & & * \end{bmatrix},$$

donde el símbolo $*$ denota la entrada genérica de S_A , mientras que $* + \epsilon$ denota la entrada de la matriz mas ϵ la última matriz es obtenida al renumerar los vértices de Q_A , en particular $y = \dim_K e_4 A e_3$.

Distinguimos dos casos dependiendo si $y = 0$ o 1. Si $y = 1$, la última matriz de arriba es equivalente a $\begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \oplus \tilde{C}_{C'}$ es el álgebra árbol obtenida como la matriz anti-simétrica asociada a $C = A/(1, 2)$ al hacer $\dim_K C'(3, 4) = 0$, de aquí, $\det(\tilde{C}_A) = \det(\tilde{C}_{C'})$. Si

$y = 0$ \tilde{C}_A es equivalente a $S = \begin{bmatrix} 0 & 1 & -a_{3i} \\ 1 & 0 & -a_{4i} \\ a_{3i} & a_{4i} & 0 \end{bmatrix}$. Por la estructura de árbol $a_{3i}a_{4i} = 0$, $i \geq 5$, de aquí la matriz $S = \tilde{C}_E$, donde E es el álgebra árbol obtenida de A al remover los vértices 1, 2. Por lo que en este caso $\det(\tilde{C}_A) = \det(\tilde{C}_E)$. Hasta ahora hemos encontrado un álgebra árbol D con una cantidad de vértices A tan que $\det(\tilde{C}_A) = \det(\tilde{C}_D)$. Por hipótesis de inducción,

$$\chi_A(-1) = \det(\tilde{C}_A) = \det(\tilde{C}_D) = \chi_D(-1) = 0, 1.$$

La prueba está completa. \square

El álgebra canónica $\Lambda(p, \lambda) = \Lambda$, con $\mathbf{p} = (p_1, \dots, p_t)$ y $\lambda = (\lambda_3, \dots, \lambda_t)$ es el cociente de álgebra de caminos $\Lambda = \frac{KQ}{\mathcal{I}}$, donde Q es el carcaj de la figura 4 e \mathcal{I} es el ideal generado por las relaciones entre los caminos $\alpha^i := 0\alpha_{i,1} \cdots \alpha_{i,p_i}\omega$

$$\alpha^i = \alpha^1 - \lambda_i \alpha^2, \quad 3 \leq i \leq t.$$

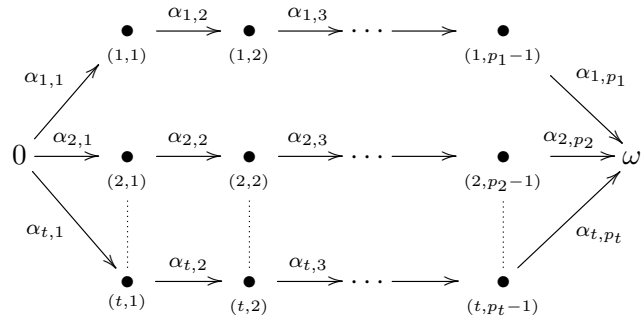


Fig. 4.1: Carcaj del álgebra canónica $\Lambda(p, \lambda)$.

El polinomio de Coxeter del **álgebra canónica** está dado por

$$\chi_\Lambda = (x-1)^2 \prod_{i=1}^t v_{p_i}. \quad (4.1)$$

Consideremos el carcaj $A_i = 1 \xrightarrow{\alpha_1} 2 \xrightarrow{\alpha_2} \cdots \xrightarrow{\alpha_{i-1}} i$ y denotemos por C_i , su matriz de Cartan. La matriz de Cartan de Λ es:

$$C_\Lambda = \left(\begin{array}{c|ccc|c} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 & 2 \\ \hline 0 & & & & & 1 \\ 0 & & M & & & 1 \\ \vdots & & & & & \vdots \\ 0 & & & & & 1 \\ \hline 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \end{array} \right), \quad (4.2)$$

donde $M = C_{p_1-1} \oplus C_{p_2-1} \cdots \oplus C_{p_t-1}$.

Resaltamos el hecho de que C_i es precisamente la matriz de Cartan de $\vec{\mathbb{A}}_n$, con una

orientación particular. Con dicha orientación, $\tilde{C}_i = \tilde{C}_{\tilde{\Lambda}_i}$ es

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 & \cdots & 1 & 1 \\ -1 & -1 & 0 & \cdots & 1 & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ -1 & -1 & -1 & \cdots & 0 & 1 \\ -1 & -1 & -1 & \cdots & -1 & 0 \end{bmatrix}. \quad (4.3)$$

Nota 48: Cuando $t = 2$ el vector λ es cero. En este caso, el álgebra canónica coincide con el álgebra de caminos $K\vec{\mathbb{A}}_{p_1, p_2} \cdot \mathbb{A}_{p_1, p_2}$ es uno de los grafos de tipo Dynkin extendido en la tabla 3.4. Con la proposición 49, la tabla de factores anti-simétricos de álgebras hereditarias de tipo mansa 3.2 estará completa.

Para el lector interesado en saber más de las álgebras canónicas, los textos [13] y [14] estudian con detalle algunos aspectos relacionados con la categoría de módulos de las álgebras canónicas.

Proposición 49: El vector Υ_Λ de factores anti-simétricos del álgebra canónica Λ está dado por $[1, \dots, 1, 2, 2]$ ó $[1, \dots, 1] \in \mathbb{Z}^r$.

Prueba. Por la ecuación 4.2 la matriz \tilde{C}_Λ .

$$\left(\begin{array}{c|cccc|c} 0 & 1 & 1 & \dots & 1 & 2 \\ \hline -1 & & & & & 1 \\ -1 & & \tilde{M} & & & 1 \\ \vdots & & & & & \vdots \\ -1 & & & & & 1 \\ \hline -2 & -1 & -1 & \dots & -1 & 0 \end{array} \right)$$

Denotamos por $s = -t + \sum_{k=1}^t p_k$. El tamaño de la matrix \tilde{C}_Λ es $s + 2 \times s + 2$, mientras que el de M es $s \times s$.

Todas las entradas de \mathbf{p} son impares. La submatriz $\tilde{M} := \tilde{C}_{p_1-1} \oplus \tilde{C}_{p_2-1} \cdots \oplus \tilde{C}_{p_t-1}$ de \tilde{C}_Λ tiene forma normal de Smith $diag_s(1, \dots, 1)$. Por 27, $\mathfrak{a}_k(\tilde{C}_\Lambda) \mid \mathfrak{a}_k(\tilde{M}) = 1$, $1 \leq k \leq \frac{s}{2}$.

Por otra parte, evaluando 4.1 en -1 obtenemos $\chi_\Lambda(-1) = 4$. De este modo, $\mathfrak{P}_\Lambda = 2$ y $\Upsilon_\Lambda = [1, \dots, 1, 2, 2]$.

\mathbf{p} tiene $\tau \geq 1$ entradas pares. En este caso, la submatriz $\tilde{M} = \tilde{C}_{p_1} \oplus \tilde{C}_{p_2} \cdots \oplus \tilde{C}_{p_t}$ de \tilde{C}_Λ tiene forma normal de Smith

$$diag_{s-\tau}(1, \dots, 1) \oplus \mathbb{O}_{n-s+\tau}.$$

En consecuencia, $\mathfrak{a}_k(\tilde{C}_\Lambda) \mid \mathfrak{a}_k(\tilde{M}) = 1$, $1 \leq k \leq s - \tau$.

Recordemos que, el rango de una matriz entera es igual al tamaño del subdeterminante no nulo más grande que posee. Ya que, \tilde{C}_Λ tiene 2 filas y 2 columnas más que \tilde{M} y, $\text{rango}(M) = s - \tau$ entonces $s - \tau \leq \text{rango}(\tilde{C}_\Lambda) \leq s - \tau + 2$. Más aún, las matrices \tilde{M} y \tilde{C}_Λ tienen rango par; así que solo tenemos dos opciones: $\text{rango}(\tilde{C}_\Lambda) = s - \tau + 2$ ó $\text{rango}(\tilde{C}_\Lambda) = s - \tau$.

Exhibiremos un menor principal no nulo de \tilde{C}_Λ de tamaño $s - \tau + 2 \times s - \tau + 2$ para demostrar que $\text{rango}(\tilde{C}_\Lambda) = s - \tau + 2$. Para esto, es necesario realizar primero una serie de operaciones elementales sobre la matriz \tilde{C}_Λ .

En primer lugar, notamos que \tilde{C}_Λ es congruente a la matriz $F_{1,s+2}\tilde{C}_\Lambda F_{1,s+2}^t$ dada por

$$C'_\Lambda := \left(\begin{array}{c|cccc} 0 & 1 & 1 & \dots & 1 & 2 \\ \hline -1 & & & & & 0 \\ -1 & & \tilde{M} & & & 0 \\ \vdots & & & & & \vdots \\ -1 & & & & & 0 \\ \hline -2 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \end{array} \right),$$

Sin pérdida de generalidad, supongamos que los entradas pares del vector p son las primeras τ . Consideremos la matriz $C'_\Lambda = \tilde{C}_\Lambda[\ell_1, \dots, \ell_\tau, s+2]$ donde $\ell_k = \sum_{j=1}^{k-1} [p_j - 1] + 2$, $1 \leq k \leq \tau$. Con esta reducción de columnas y renglones, hemos obtenido una matriz C'_Λ con la siguiente forma

$$C'_\Lambda := \left(\begin{array}{c|cccc} 0 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ \hline -1 & & & & \\ -1 & & M' & & \\ \vdots & & & & \\ -1 & & & & \end{array} \right), \quad (4.4)$$

donde $M' = \tilde{C}_{p_1-1} \oplus \tilde{C}_{p_2-2} \cdots \tilde{C}_{p_\tau-2} \oplus \tilde{C}_{p_{\tau+1}-2} \cdots \tilde{C}_{p_t-2}$. De modo que, todos los bloques de M' , excepto el primero, tiene un número par $p_i - 2$ de renglones y columnas.

Como podemos observar en 4.3 la primera fila y columna de las matrices \tilde{C}_i tienen la forma $[01 \cdots 1]$ y $[0 - 1 \cdots - 1]^t$, respectivamente. Sumamos la primera fila (columna) de cada matriz \tilde{C}_i a la primera fila (columna) de la matriz 4.4 C'_Λ , y obtenemos la matriz C''_Λ :

$$\begin{pmatrix} 0 & | & 10 \cdots 0 & | & 10 \cdots 0 & | & \cdots & | & 10 \cdots 0 & | & 10 \cdots 0 & | & \cdots & | & 10 \cdots 0 \\ -1 & & & & & & & & & & & & & & \\ 0 & & \tilde{C}_{p_1-1} & & \mathbb{O} & & \cdots & & \mathbb{O} & & \mathbb{O} & & \cdots & & \mathbb{O} \\ \vdots & & & & & & & & & & & & & & \\ -1 & & & & & & & & & & & & & & \\ 0 & & \mathbb{O} & & \tilde{C}_{p_2-2} & & \cdots & & \mathbb{O} & & \mathbb{O} & & \cdots & & \mathbb{O} \\ \vdots & & & & & & & & & & & & & & \\ 0 & & \vdots & & \vdots & & \ddots & & \vdots & & \vdots & & \ddots & & \vdots \\ -1 & & & & & & & & & & & & & & \\ 0 & & \mathbb{O} & & \mathbb{O} & & \cdots & & \tilde{C}_{p_{\tau-2}} & & \mathbb{O} & & \cdots & & \mathbb{O} \\ \vdots & & & & & & & & & & & & & & \\ -1 & & & & & & & & & & & & & & \\ 0 & & \mathbb{O} & & \mathbb{O} & & \cdots & & \mathbb{O} & & \tilde{C}_{p_{\tau+1}-1} & & \cdots & & \mathbb{O} \\ \vdots & & & & & & & & & & & & & & \\ 0 & & \vdots & & \vdots & & \ddots & & \vdots & & \vdots & & \ddots & & \vdots \\ -1 & & & & & & & & & & & & & & \\ 0 & & \mathbb{O} & & \mathbb{O} & & \cdots & & \mathbb{O} & & \mathbb{O} & & \cdots & & \tilde{C}_{p_t-1} \\ \vdots & & & & & & & & & & & & & & \\ 0 & & & & & & & & & & & & & & \end{pmatrix}.$$

Explícitamente, la matriz C''_{Λ} es igual a $F_{l_t,1}(-1) \cdots F_{l_1,1}(-1) C'_{\Lambda} F_{l_t,1}(-1) \cdots F_{l_1,1}(-1)^t$, donde $l_k = \sum_{j=1}^{k-1} [p_j - 2] + 2$ si $1 \leq k \leq \tau + 1$ y $l_k = l_{\tau} + \sum_{j=\tau+1}^{k-1} [p_j - 1] + 2$ si $\tau + 2 \leq k \leq t$.

Finalmente, demostraremos que la submatriz C'_{Λ} de \tilde{C}_{Λ} origina el menor principal no nulo que buscamos. Para esto, calculamos el pfaffiano de dicha matriz.

Observamos que los pfaffianos, en consecuencia los determinantes, de las matrices C'_{Λ} y C''_{Λ} coincide. En efecto, la propiedad 1.31 del pfaffiano de una matriz implica

$$\begin{aligned} \mathfrak{P}(C'_{\Lambda}) &= \det(F_{l_t,1}(-1) \cdots F_{l_1,1}(-1))^2 \mathfrak{P}(C''_{\Lambda}) \\ &= \mathfrak{P}(C''_{\Lambda}) \end{aligned} \quad (4.5)$$

Ahora bien, de la ecuación 4.5 y la propiedad recursiva del pfaffiano 1.29 tenemos

$$\begin{aligned} \mathfrak{P}(C'_{\Lambda}) &= \sum_{k=2}^{s-\tau+2} (-1)^k (C''_{\Lambda})_{1j} \mathfrak{P}(C''_{\Lambda}[\widehat{1, k}]) \\ &= \sum_{k=1}^t (-1)^{l_k} \mathfrak{P}(C''_{\Lambda}[\widehat{1, l_k}]) \end{aligned} \quad (4.6)$$

De la definición de pfaffiano de una matriz y la ecuación 4.6, se derivan la siguientes

igualdades

$$\begin{aligned}
\mathfrak{P}(C'_\Lambda) &= \left[\det(\tilde{C}_{p_1-2}) \prod_{i=3}^{\tau} \det(\tilde{C}_{p_i-2}) \prod_{i=\tau+1}^t \det(\tilde{C}_{p_i-1}) \right]^{\frac{1}{2}} \\
&+ \sum_{k=3}^{\tau} (-1)^k \left[\det(\tilde{C}_{p_k-3}) \prod_{\substack{1 \leq i \leq \tau \\ i \neq k}}^{\tau} \det(\tilde{C}_{p_i-2}) \prod_{i=\tau+1}^t \det(\tilde{C}_{p_i-1}) \right]^{\frac{1}{2}} \\
&+ \sum_{k=\tau+1}^t (-1)^k \left[\det(\tilde{C}_{p_k-2}) \prod_{i=1}^{\tau} \det(\tilde{C}_{p_i-2}) \prod_{\substack{\tau+1 \leq i \leq t \\ i \neq k}}^t \det(\tilde{C}_{p_i-1}) \right]^{\frac{1}{2}} \quad (4.7)
\end{aligned}$$

Ahora bien, las primeras τ entradas de \mathbf{p} son pares, mientras que las restantes son impares. Por 40, $\det(\tilde{C}_i) = 0$ si i es impar o $\det(\tilde{C}_i) = 1$ si i es par. Por tanto, el único sumando del lado derecho de la ecuación 4.7 que es distinto de cero es

$$\left[\det(\tilde{C}_{p_1-2}) \prod_{i=3}^{\tau} \det(\tilde{C}_{p_i-2}) \prod_{i=\tau+1}^t \det(\tilde{C}_{p_i-1}) \right]^{\frac{1}{2}}.$$

De lo anterior, concluimos que $\mathfrak{P}(C'_\Lambda) = 1$. Más aún, por la definición de factores anti-simétricos y 17 $\mathbf{a}_{s-\tau+2}(\tilde{C}_\Lambda) = 1$ y, $\mathcal{S}(\tilde{C}_\Lambda) = \mathbb{1}_{s-\tau+2} \oplus \mathbb{O}_\tau$.

□

5. CONCLUSIONES Y TRABAJO FUTURO

En el caso en que A es el cociente de un álgebra de caminos KQ , parece existir alguna relación entre los factores anti-simétricos no nulos mayores que 1 y la presencia de ciclos pares (no orientados) en el carcaj Q ; no obstante, las técnicas usadas para estudiar KQ en el capítulo 3 no pueden ser aplicadas.

En efecto, estas técnicas se basan en la relación que hay entre la matriz de adyacencia del grafo subyacente de Q y C_A ; sin embargo, debido a las relaciones dictadas por \mathcal{I} , las matrices C_{KQ} y C_A son notablemente distintas.

Un trabajo futuro consistiría en el desarrollo de técnicas para estudiar la situación anterior. Esto da lugar a la siguiente conjetura:

Conjetura 1. Sea $A = KQ/\mathcal{I}$ un álgebra de dimensión global finita, donde \mathcal{I} es un ideal admisible. Si $\tilde{C}_A \in \mathbb{M}_n(\mathbb{Z})$ tiene rango n y el grafo subyacente de Q no tiene ciclos pares, entonces todos los factores anti-simétricos no nulos de A valen 1.

En otro orden de ideas, no tenemos ejemplos de álgebras con carcaj simple (sin flechas múltiples) y factores anti-simétricos mayores que 2. Esto da lugar a una segunda conjetura:

Conjetura 2. Sea A un álgebra de dimensión finita y dimensión global finita, si el carcaj ordinario de A es simple entonces los factores anti-simétricos de A son menores o iguales que 2.

Bibliografía

- [1] I. Assem, A. Skowroński, and D. Simson. *Elements of the Representation Theory of Associative Algebras*, volume 1, Representation-Infinite Tilted Algebras. Cambridge University Press, 2006.
- [2] M. Auslander, I. Reiten, and S. Smalø. *Representation Theory of Artin Algebras*. Cambridge University Press, 1997.
- [3] M. Cavers, S.M. Cioab, S. Fallatc, D.A. Gregory, Kirklandf S.J. Haemerse, W.H., J.J . McDonaldg, and M. Tsatsomeross. Skew-adjacency matrices of graphs. *Linear Algebra and its Applications*, 2012.
- [4] D.M. Cvetkôvic, M. Doob, and H. Sachs. *Spectra of Graphs. Theory and application*. Academic Press, New York, 1979.
- [5] J.A. de la Peña. Coxeter transformations and the representation theory of algebras. V. Dlab and L.L. Scott (eds.) *Finite Dimensional Algebras and Related Topics*, pages 223–253, 1994.
- [6] J.A. de la Peña. On the mahler measure of the coxeter polynomial of an algebra. *Advances in Mathematics*, 270:375–399, 2014.
- [7] J.A. De la Peña and H. Lenzing. Spectral analysis of finite dimensional algebras and singularities. In *Trends in Representation Theory of algebras, Series Congress Reports European Math. Soc.*, pages 541–588, 2008.
- [8] M. Happel. *Triangulated Categories en the Representation Theory of Finite Dimensional Algebras*. Cambridge University Press, 1988.
- [9] R. Horn and C. Johnson. *Topics in Matrix Analysis*. Cambridge University Press, 1991.
- [10] M. Newman. *Integral Matrices*. Academic Press, 1972.
- [11] D.G. Northcott. *Multilinear Algebra*. Cambridge University Press, 1984.
- [12] J.F. Queiró. Invarian factors as approximation numbers. *Linear algebra and its Applications*, 49:131–136, 1983.
- [13] C.M. Ringel. *Tame algebras and integral quadratic forms. Lecture Notes in Mathematics 1099*. Springer-Verlag, 1984.

-
- [14] A. Skowroński and D. Simson. *Elements of the Representation Theory of Associative Algebras*, volume 1, Techniques of Representation Theory. Cambridge University Press, 2006.
- [15] R.C. Thompson. Interlacing inequalities for invariant factors. *Linear Algebra and Applications*, 24:1–32, 1979.
- [16] R.C. Thompson. The smith invariants of a matrix sum. *Proceedings AMS*, 78:162–164, 1980.
- [17] R.C. Thompson. An inequality for invariant factors. *Proceedings AMS*, 86:1, 1982.

Índice alfabético

- álgebra, 24
- álgebra básica, 24
- álgebra canónica, 52
- álgebra de caminos, 25
- álgebra de tipo salvaje, 40
- álgebra hereditaria, 40
- álgebras árbol, 50
- álgebras de tipo finito, 40
- álgebras de tipo manso, 40

- característica de Euler, 34
- carcaj, 25
- carcaj ordinario, 26

- divisor determinantal, 3

- energía del álgebra, 31
- equivalencia de matrices, 3
- espectro, 31
- extensión unipuntual, 29

- factor anti-simétrico de un álgebra, 27
- factor invariante, 9
- factores invariantes nulos, 9
- forma normal anti-simétrica, 17
- forma normal de Smith, 9

- grafo bipartito, 45
- grafo subyacente, 40
- Grupo de Grothendieck, 25

- ideal admisible, 26

- múltiplo de una matriz, 3
- matriz de adyacencia sesgada, 46
- matriz de Cartan, 26
- matriz de Coxeter, 30
- matriz elemental, 4

- orientación sobre un grafo, 46

- pfaffiano, 18
- pfaffiano del álgebra, 32
- polinomio de Coxeter, 30

- radio espectral, 31

- teorema de Krull-Schmidt, 24

- vector dimensión, 25

