CIMAT

Centro de Investigación en Matemáticas, A.C.

Juegos Cooperativos en la Repartición de los Beneficios dados por un Río

TESIS

Para obtener el grado de:

Maestro en Ciencias con orientación en Matemáticas Aplicadas

Presenta:

Laura Mariana Ramírez Pedraza

Director de Tesis:

Dr. Luis Hernández Lamoneda

Guanajuato, Gto. Marzo de 2016.

CIMAT

Centro de Investigación en Matemáticas, A.C.

Juegos Cooperativos en la Repartición de los Beneficios dados por un Río

TESIS

Para obtener el grado de:

Maestro en Ciencias con orientación en Matemáticas Aplicadas

Presenta:

Laura Mariana Ramírez Pedraza

Comité de Evaluación:

Dr. Francisco Sánchez Sánchez

Dr. William José Olvera López

Dr. Luis Hernández Lamoneda

Guanajuato, Gto. Marzo de 2016.

Agradecimientos

Quiero empezar agradeciendo al director de esta tesis, el Dr. Luis Hernández Lamoneda, por todo su apoyo, colaboración y compresión. De igual manera quiero agradecer al Dr. Francisco Sánchez Sánchez por su disponibilidad y todas sus valiosas aportaciones en este trabajo. Al Dr. William Olvera por su amabilidad y tiempo dedicado.

Agradezco también a Miguel Angel Vargas por estar siempre dispuesto a escuchar y a discutir ideas de este trabajo. A Oliver y Jony por toda su disposición y ayuda. A mis compañeros de la maestría David, José Manuel, Margarita, Mario, Ariel, Rafael y Viridiana por todas las veces que estudiamos juntos, también por nuestras tardes de esparcimiento llenas de risas y mucha diversión.

A todas las personas que hicieron parte del equipo de Ultimate Frisbee, fue bastante valioso contar con su participación, gracias a ustedes tuve la oportunidad de afrontar nuevas experiencias, tales como enseñar, liderar y organizar, que sin duda también ayudaron en mi formación académica.

Al CONACyT por el apoyo económico brindado a lo largo de la maestría.

Agradezco de igual manera a Jarod Alper por todos sus consejos, por sus palabras de apoyo, su compañía, su pasión por las matemáticas ha sido una gran inspiración para mi.

A mi familia, por estar siempre pendientes de mi. A mi mamá, por todo su amor, por ser una madre ejemplar, porque siempre puedo contar con ella cuando la necesito, todo lo que soy se lo debo a ella.

Índice General

Introducción

Como es bien sabido, el agua es un elemento básico para la vida. Conforma alrededor del 70 por ciento del cuerpo humano, es imprescindible para la ganadería, la agricultura, para realizar numerosas actividades cotidianas y entre otras cosas, se puede aprovechar para generar energía. Aunque tres cuartos de la superficie de la tierra son agua, la mayoría es salada y no tiene la misma utilidad para el consumo humano, agrícola o industrial que el agua dulce.

A medida que la cantidad de agua disponible tiene que satisfacer una demanda mayor, la competencia por este recurso se intensifica. En especial en las cuencas hidrográficas que cruzan fronteras municipales, estatales o internacionales. En el caso particular de los ríos, alrededor de 148 son compartidos por dos países, 30 por tres, 9 por cuatro y 13 por cinco o más [2]. A pesar de lo delicado que son los conflictos que involucran agua, se ha visto que pueden ser solucionados de manera diplomática. En los últimos 50 años han habido 37 disputas que trataron de resolverse recurriendo a la violencia, mientras que se han firmado 150 tratados. Los países valoran estos tratados, ya que hacen que las relaciones internacionales que involucran el agua sean más estables y predecibles.

Actuar de manera cooperativa respecto a los conflictos que se pueden presentar en los ríos que cruzan fronteras, ofrece varias ventajas. En primera instancia reduce tensiones y disputas entre países vecinos; puede promover técnicas eficientes para el almacenamiento, distribución del agua y expandir las zonas de riego; en ciertas circunstancias se pueden dividir gastos, como en la construcción de presas o al cubrir las externalidades negativas que se generan al sobre explotar un río. Por estas razones se ha usado teoría de juegos cooperativos para plantear soluciones.

La teoría de juegos cooperativos estudia situaciones en las que los involucrados actúan de manera cooperativa más que competitiva, permitiendo la formación de coaliciones. Formalmente, un juego cooperativo es definido por un conjunto de jugadores o agentes $N = \{1, 2, ..., n\}$ y por una función característica v, que asocia a cada subconjunto S de N un valor real $v(S)$, que es interpretado como el valor que se crea cuando los miembros de S acceden a cooperar. Una de las principales aplicaciones de los juegos cooperativos es brindar soluciones para la repartición de los beneficios que se crean por la cooperación. Una de las soluciones mas conocidas es el valor de Shapley, el cual puede ser aplicado cuando todas las coaliciones del conjunto de agentes se pueden formar, también satisface ciertas condiciones deseables, que son llamadas axiomas.

Ambec y Sprumont en el año 2002 [1], modelan y proponen una solución para el problema del río utilizando juegos cooperativos. Consideran que para que halla eficiencia en el uso total del río, los agentes que se encuentran río arriba deben limitar su consumo a beneficio de agentes que se encuentran río abajo, y estos retribuirán con dinero. Si los derechos sobre la propiedad del agua estuvieran bien definidos, por el teorema de Coase [5], se podría intercambiar dinero por agua eficientemente, pero este no es el caso. En cambio, existen dos doctrinas que son opuestas en cierto sentido, las cuales definen derechos sobre el agua que cruza fronteras internacionales. La primera de ellas es la doctrina de soberanía territorial absoluta (ATS por sus siglas en inglés), establece que cada país tiene soberanía absoluta sobre el río en su territorio. Por otra parte, la doctrina de integridad territorial ilimitada (UTI por sus siglas en inglés), prohíbe a cualquier país alterar las condiciones naturales del agua que pasa por su territorio.

Teniendo en cuenta estas doctrinas, Ambec y Sprumont buscan un compromiso entre ambas que maximice el beneficio total que se obtiene por el uso del río. La doctrina ATS implica que cada agente debe tener al menos el beneficio que le da el agua que él controla. Por otra parte, con la doctrina UTI los agentes esperarían poder consumir la cantidad de agua que hay desde el inicio del río hasta su territorio, como si no estuvieran los demás agentes. Esta doctrina no es realizable y es imposible garantizarle a cada agente este beneficio, entonces se considera que la doctrina UTI establece el beneficio al que cada quien aspira. Los autores demuestran que la solución que asigna la contribución marginal a los predecesores es la única que se encuentra entre las cotas dadas por las doctrinas ATS y UTI.

Posteriormente, en el año 2007 van den Brink et al. [13] consideran el problema del río desde la perspectiva de los juegos con estructura de cooperación, utilizando el grafo de la forma $L = \{\{i, i+1\} | i = 1, ..., n-1\}$. Caracterizan de manera diferente la solución encontrada por Ambec y Sprumont, para así concluir que esta solución no da incentivos para la cooperación, debido a que da más poder a los agentes que se encuentran río arriba, pero estos tienen el poder de dejar pasar o no el agua, lo que no da garantías a los agentes posteriores. Así que proponen la solución que a cada agente le asigna su contribución marginal a la coalición compuesta por sus sucesores.

En este trabajo nuestro objetivo es encontrar soluciones para el problema del río. Para esto, consideramos solamente coaliciones entre jugadores consecutivos; no tiene sentido considerar coaliciones de otro tipo dada la naturaleza del problema. Empezamos por definir una nueva clase de juegos cooperarivos a los cuales llamamos juegos de río, cuyo dominio son las coaliciones consecutivas del conjunto de agentes; damos nuevas definiciones de jugadores nulos y sustitutos para este caso y siguiendo los axiomas de nulidad, simetría, eficiencia y linealidad utilizados en el valor de Shapley, logramos caracterizar una solución única que satisface estos axiomas. Si denotamos por V a un juego de río, dicha solución esta dada por:

$$\varphi_k(V) = \sum_{[i,j]\ni k} \frac{V([i,j]) - V([i+1,j]) - V([i,j-1]) + V([i+1,j-1])}{j-i+1},$$

que es una solución diferente a las soluciones dadas por Ambec y Sprumont y van den Brink et al.

También buscamos caracterizar una solución siguiendo la idea del potencial (introducida por Hart y Mas-Collel [7]), en donde solo se necesita el axioma de eficiencia. Redefinimos para el caso del río el concepto de diferencia de potencial, probamos que existe un único potencial y que la solución que a cada agente le asigna su diferencia de potencial coincide con la solución anterior φ.

Posteriormente, dado un juego de río V, para el grafo lineal $L = \{\{1,2\},...,\{n-1,n\}\}$, consideramos el juego con estructura de comunicación $V/L : 2^n \to \mathbb{R}$, donde 2^n representa el conjunto potencia del conjunto de agentes N y

$$V/L\ (S) = \sum_{T\in S/L} V(T).$$

Logramos demostrar que el valor de Myerson para este juego coincide con nuestra solución φ, dando así una manera más de caracterizarla por los axiomas utilizados por Myerson.

Para encontrar la solución mencionada, quisimos usar ideas fundamentales de la teoría de juegos cooperativos tales como el valor de Shapley, el potencial y los juegos con estructura de cooperación. Dichas ideas han sido estudiadas a profundidad y han dado resultados bastantes deseables, por lo que nos inspiramos en este hecho para buscar una adaptación de ellas para el caso particular de los juegos de río, lo que da un fundamento teórico bastante interesante a nuestra solución.

En cuanto a la estructura de este trabajo, en el primer capítulo introducimos los conceptos relacionados de teoría de juegos cooperativos, que incluye: los juegos de unanimidad, axiomas y valor de Shapley, el potencial y juegos con estructura de cooperación. En el segundo capítulo, se resumen los artículos de Ambec y Sprumont, y van den Brink et al. mencionados anteriormente. En el tercer capítulo se encuentran los resultados principales de este trabajo, donde se definen los juegos de río y se logra caracterizar la solución ya mencionada, por medio de los axiomas del valor de Shapley, por medio del potencial y por medio de los juegos con estructura de comunicación dada por los grafos de línea. Para finalizar, en el cuarto capítulo encontramos las conclusiones de este trabajo.

Capítulo 1

Preliminares

1.1. Juegos Cooperativos

En muchos aspectos de la vida, la cooperación con otras personas resulta satisfactoria y provechosa. Como tomar un taxi con varios compañeros para llegar a la universidad, o hacer un pedido en una tienda virtual con algunos amigos para reducir los costos de envío. Los juegos cooperativos son aquellos en los que los jugadores no compiten, en cambio, se esfuerzan por lograr un objetivo común. El modelo más estudiado de juegos cooperativos son los juegos en forma de función característica, que se definen como:

Definición 1.1. *Un juego cooperativo n-personal en forma de función característica se denota por el par* (N, v)*, donde* $N = \{1, 2, ..., n\}$ *es el conjunto de jugadores o agentes y*

$$v : 2^n \to \mathbb{R}$$

es la función característica que satisface $v(\emptyset) = 0$.

El conjunto de subconjuntos de N se representa por 2^n y cada $S \subset N$ es llamado *coalición*. Usualmente se usa la expresión "la coalición $S \subset N$ es formada", esto se refiere a que los miembros de S accedieron a cooperar haciendo posible la formación de la coalición y $v(S)$ es lo que pueden obtener al estar juntos, que se conoce como *valía*. En particular a N se le llama *gran coalición*. En adelante, para denotar la cardinalidad de la coalición S, se escribirá s.

El conjunto de juegos cooperativos asociados a N se denotará por G^N. Si la suma y multiplicación de funciones por escalares son definidas como es usual: $(v_1 + v_2)(S) = v_1(S) + v_2(S)$ y $(\lambda v_1)(S) = \lambda v_1(S)$ para todo $\lambda \in \mathbb{R}$; G^N define un espacio vectorial. Todo juego cooperativo (N, v), está determinado por el valor que toma v en cada una de las coaliciones no vacías de N, $\{v(S)|S \subset N, S \neq \emptyset\}$. Entonces G^N es identificado con $\mathbb{R}^{2^n-1}$; se sigue que su dimensión es $2^n - 1$.

Ejemplos Juegos Cooperativos

Ejemplo 1.2. Consideremos el conjunto de jugadores $N = \{1, 2, 3\}$ y la función característica $v : 2^n \to \mathbb{R}$, dada de la siguiente manera:

$$\begin{array}{llll} v(\emptyset) = 0 & v(\{1\}) = 1 & v(\{1,2\}) = 3 & v(\{1,2,3\}) = 10 \\ & v(\{2\}) = 1 & v(\{1,3\}) = 6 & \\ & v(\{3\}) = 0 & v(\{2,3\}) = 5 & \end{array}$$

Ejemplo 1.3. Supóngase que hay un terrateniente el cual busca agricultores para que trabajen su tierra. Hay en total m agricultores en busca de empleo, los cuales se consideran iguales en cuanto al trabajo que pueden realizar. Si el terrateniente contrata a t agricultores, obtiene una ganancia $f(t) \in \mathbb{R}$, donde $f : \{0, 1, ..., m\} \to \mathbb{R}$ es la función de producción. Esta situación puede ser modelada por un juego cooperativo (N, v), con $N = \{1, 2, ..., m + 1\}$ el conjunto de jugadores, fijando por 1 al terrateniente. La función característica $v : 2^n \to \mathbb{R}$ esta dada por:

$$v(S) = \begin{cases} 0 & si \quad 1 \notin S \\ f(s-1) & si \quad 1 \in S. \end{cases}$$

Ejemplo 1.4. En Japón, los conjuntos de agentes que explotan los recursos hídricos se pueden considerar de dos clases: el subconjunto de asociaciones de agricultores A, quienes utilizan el agua para la irrigación y para los cuales la cantidad de agua es suficiente; y el subconjunto C de las autoridades encargadas del suministro de agua en su ciudad, las cuales necesitan o podrían necesitar a corto plazo más agua de la que poseen ahora.

Para suplir las necesidades de las ciudades existen tres opciones: i) Construir una presa, ii) llegar a algún acuerdo con las asociaciones de agricultores, iii) una combinación de i) y ii). En caso de querer construir una presa, para las ciudades es conveniente coaligarse y dividir los gastos.

Se puede modelar esta situación como un juego cooperativo, donde el conjunto de jugadores es $N = A \cup C$. Para cada $S \subset N$ se define la función característica $v(S)$, como el costo al que se incurre por cubrir las necesidades de agua de las ciudades en S, entendiendo que no hay cooperación por parte de los agentes fuera de S. En caso de que $S \cap C = \emptyset$ $v(S) = 0$, debido a que las asociaciones de agricultores no necesitan más agua de la que poseen. Para detalles adicionales sobre como se obtiene la función v se puede referir a [12].

1.2. Soluciones

Después de que se han formado las coaliciones y se conocen los respectivos valores que toma la función característica v, surge la pregunta de cuanto (ganancia, costo, ...) le debe corresponder a cada agente; de aquí viene el concepto de solución,

Definición 1.5. *Una* ***solución*** *sobre G^N es un operador*

$$\varphi : G^N \to \mathbb{R}^n,$$

donde $\varphi(v) = (\varphi_1(v), \varphi_2(v), ..., \varphi_n(v))$. Cada coordenada φ_i es el pago que le corresponde al jugador i por jugar el juego v.

En el ejemplo 1.2, una posible solución es $\varphi(v) = (9/2, 9/2, 1)$, esta solución se puede argumentar diciendo que el jugador 3 por su cuenta no puede conseguir nada y por eso su pago debe ser inferior. Por otra parte, se puede justificar la solución $\varphi(v) = (3/2, 3/2, 7)$ diciendo que el jugador 3 contribuye demasiado al unirse con cualquiera de los otros jugadores y por eso su pago debe ser mayor. En el primer posible pago el jugador 3 va a estar inconforme, mientras que con el segundo los jugadores 1 y 2 van a considerarlo injusto. Surge entonces la pregunta sobre que condiciones debe satisfacer el pago para asegurar que los jugadores estén conformes.

1.3. Axiomas del Valor de Shapley

En el año de 1953 el ganador del Nobel en economía Lloyd Shapley, encuentra una solución que satisface ciertas condiciones deseables llamadas axiomas, y logra demostrar que esta solución es única [11].

Definición 1.6. *Se dice que $i, j \in N$ son* ***jugadores sustitutos*** *en el juego (N, v), si se satisface que:*

$$v(S \cup \{i\}) = v(S \cup \{j\}) \qquad \textit{para todo} \quad S \subset N \backslash \{i, j\}.$$

Definición 1.7. *El jugador $i \in N$ es* ***nulo*** *en el juego (N, v) si:*

$$v(S \cup \{i\}) = v(S) \qquad \textit{para todo} \quad S \subset N \backslash \{i\}.$$

Teniendo en cuenta las definiciones anteriores y algunas condiciones deseables para una solución φ sobre G^N, se definen los siguientes axiomas:

- **Axioma de Nulidad:** Si el jugador i es nulo en (N, v) entonces su pago debe ser 0:
$$\varphi_i(v) = 0.$$

- **Axioma de Simetría:** Si los jugadores i, j son sustitutos en (N, v), entonces su pago debe ser igual:
$$\varphi_i(v) = \varphi_j(v).$$

- **Axioma de Eficiencia:** La solución φ es eficiente:
$$\sum_{i \in N} \varphi_i(v) = v(N).$$

- **Axioma de Linealidad:** El operador φ es lineal.

El primer axioma nos dice que si un jugador al unirse a cualquier coalición no aporta nada, entonces su pago es 0. El segundo axioma pide que si dos jugadores son sustitutos respecto a la función característica, su pago debe ser el mismo. El tercer axioma requiere que la cantidad conseguida por todos, sea repartida en su totalidad. Y el axioma de linealidad es bastante deseable matemáticamente.

Se definirán a continuación los juegos de unanimidad, los cuales forman una base para el espacio vectorial G^N. Posteriormente se demostrará la existencia y unicidad de la solución que satisface los axiomas del valor de Shapley.

Definición 1.8. *Sea $S \subset N$ con $S \neq \emptyset$. El* ***juego de unanimidad*** *asociado a la coalición S se define por:*

$$U_S(T) = \begin{cases} 1 & \textit{si} \quad S \subset T \\ 0 & \textit{en otro caso} \end{cases}$$

para todo $T \subset N$.

Lema 1.9. *El conjunto de juegos de unanimidad $\{(N, U_S) | \emptyset \neq S \subset N\}$, forma una base para el espacio vectorial G^N.*

Dem: Para cada coalición $S \subset N$ no vacía hay un juego de unanimidad, es decir hay $2^n - 1$ juegos de unanimidad, lo cual coincide con la dimensión de G^N. Entonces sólo hace falta probar que los juegos de unanimidad U_S son linealmente independientes, o equivalentemente, queremos ver que si

$$v(T) = \sum_{\{S|\emptyset \neq S \subset N\}} \delta_S U_S(T) = 0 \qquad \delta_S \in \mathbb{R}, \ \forall T \subset N$$

debe suceder que $\delta_S = 0$ para todo $\emptyset \neq S \subset N$. Probaremos este resultado por inducción sobre la cardinalidad de T.

Por la definición de U_S se tiene que:

$$v(T) = \sum_{\{S|\emptyset \neq S \subset N\}} \delta_S U_S(T) = \sum_{\{S|\emptyset \neq S \subset T\}} \delta_S.$$

Si $T = \{i\} \subset N$, se cumple que:

$$\begin{aligned} 0 &= v(\{i\}) \\ &= \sum_{\{S \mid \emptyset \neq S \subset \{i\}\}} \delta_S \\ &= \delta_{\{i\}}. \end{aligned}$$

Supongamos que para todo $\emptyset \neq T \subset N$ con $t < k$, se satisface que $\delta_T = 0$. Sea $\emptyset \neq T \subset N$ con $t = k$, se tiene que:

$$\begin{aligned} 0 &= v(T) \\ &= \sum_{\{S \mid \emptyset \neq S \subset T\}} \delta_S \\ &= \sum_{\{S \mid \emptyset \neq S \subsetneq T\}} \delta_S + \delta_T \qquad \textit{por la hipótesis de inducción} \\ &= \delta_T, \end{aligned}$$

por lo tanto los juegos de unanimidad son linealmente independientes. □

1.4. Valor de Shapley

Con ayuda del anterior lema procederemos a demostrar el teorema de Shapley.

Teorema 1.10 (Valor de Shapley)**.** *Existe una única solución $\varphi : G^N \to \mathbb{R}^n$, que satisface los axiomas de nulidad, simetría, eficiencia y linealidad.*

Dem: Sea $S \subset N$, veamos que los jugadores nulos en el juego de unanimidad U_S, son aquellos $i \notin S$. Debemos probar que:

$$U_S(T) = U_S(T \cup \{i\}) \qquad \textit{para todo} \quad T \subset N \backslash \{i\}.$$

- Si $S \subset T$ también $S \subset T \cup \{i\}$, entonces

$$U_S(T) = U_S(T \cup \{i\}).$$

- Si $S \nsubseteq T$, como $i \notin S$, $S \nsubseteq T \cup \{i\}$ por lo tanto

$$U_S(T) = U_S(T \cup \{i\}) \qquad \textit{para todo} \quad T \subset N \backslash \{i\}.$$

Por otra parte, si $i \in S$,

$$0 = U_S(S \backslash \{i\}) \neq U_S(S) = 1,$$

podemos concluir que los únicos jugadores nulos en U_S son los $i \notin S$. Por el axioma de nulidad se debe satisfacer que $\varphi_i(U_S) = 0$ para todo $i \notin S$.

Veamos ahora cuales son los jugadores sustitutos en U_S. Sean $i, j \in N$ y $T \subset N \backslash \{i, j\}$:

- Si $i, j \in S$.

  $$U_S(T \cup \{i\}) = 0 \quad \textit{porque} \quad j \notin T \cup \{i\}$$
  $$U_S(T \cup \{j\}) = 0 \quad \textit{porque} \quad i \notin T \cup \{j\},$$

  i, j son sustitutos en U_S.

- Si $i, j \notin S$.
  En caso de que $S \subset T$, se cumple que $S \subset T \cup \{i\}$ y $S \subset T \cup \{j\}$. Si $S \nsubseteq T$, $S \nsubseteq T \cup \{i\}$ y $S \nsubseteq T \cup \{j\}$, porque $i, j \notin S$. Se tiene que:

  $$U_S(T) = U_S(T \cup \{i\}) = U_S(T \cup \{j\}),$$

  entonces i, j son sustitutos en U_S.

- Si $i \in S$, $j \notin S$. Tomando $T = S \backslash \{i\}$,

  $$U_S(T \cup \{i\}) = U_S(S) = 1$$

  y

  $$U_S(T \cup \{j\}) = 0 \quad \textit{por que} \quad i \notin T \cup \{j\},$$

  concluimos que i, j no son sustitutos en U_S.

Por el axioma de simetría se debe cumplir que $\varphi_i(U_S) = \varphi_j(U_S)$ si $i, j \in S$ o si $i, j \notin S$.
Por eficiencia,

$$1 = U_S(N) = \sum_{i \in N} \varphi_i(U_S),$$

por el axioma de nulidad

$$\sum_{i \in N} \varphi_i(U_S) = \sum_{i \in S} \varphi_i(U_S),$$

y por simetría

$$\sum_{i \in S} \varphi_i(U_S) = s\varphi_i(U_S),$$

por lo tanto:

$$\varphi_i(U_S) = \begin{cases} \frac{1}{s} \quad si \quad i \in S \\ \\ 0 \qquad\quad en\ otro\ caso. \end{cases} \tag{1.1}$$

Dado que los juegos de unanimidad forman una base para el espacio de juegos cooperativos,

$$\varphi_i(v) = \varphi_i\left(\sum_{\{S|\emptyset \neq S \subset N\}} \delta_S U_S\right)$$

por linealidad y (1.1):

$$\begin{aligned} \varphi_i(v) &= \varphi_i\left(\sum_{\{S|\emptyset \neq S \subset N\}} \delta_S U_S\right) \\ &= \sum_{\{S|\emptyset \neq S \subset N\}} \delta_S \varphi_i(U_S) \\ &= \sum_{S \ni i} \frac{\delta_S}{s}. \end{aligned}$$

Por lo tanto se ha demostrado que φ existe y es única, y está dada por

$$\varphi_i(v) = \sum_{S \ni i} \frac{\delta_S}{s}. \tag{1.2}$$

□

Con ayuda del Lema 1.9 y del Teorema 1.10 se puede calcular el valor de Shapley, encontrando primero los valores de las constantes en la base δ y posteriormente utilizando la ecuación (1.2).

Ejemplo 1.11. Encontrar el valor de Shapley para el juego v dado en el ejemplo 1.2.
De la demostración del Lema 1.9 sabemos que

$$v(\{i\}) = \delta_{\{i\}}.$$

Para $S = \{i, j\}$,

$$v(\{i,j\}) = \sum_{\{T | \emptyset \neq T \subset \{i,j\}\}} \delta_T = \delta_{\{i\}} + \delta_{\{j\}} + \delta_{\{i,j\}}$$

despejando,

$$\delta_{\{i,j\}} = v(\{i,j\}) - \delta_{\{i\}} - \delta_{\{j\}}.$$

En general, se puede proceder de esta manera hasta obtener δ_N.
Encontramos,

$$v(\{1\}) = v(\{2\}) = \delta_1 = \delta_2 = 1 \qquad v(\{3\}) = \delta_3 = 0$$

$$\begin{aligned}
\delta_{\{1,2\}} = v(\{1,2\}) - \delta_{\{1\}} - \delta_{\{2\}} &= 1\\
\delta_{\{1,3\}} = v(\{1,3\}) - \delta_{\{1\}} - \delta_{\{3\}} &= 5\\
\delta_{\{2,3\}} = v(\{2,3\}) - \delta_{\{2\}} - \delta_{\{3\}} &= 4
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\delta_{\{1,2,3\}} &= v(\{1,2,3\}) - \delta_{\{1,2\}} - \delta_{\{1,3\}} - \delta_{\{2,3\}} - \delta_{\{1\}} - \delta_{\{2\}} - \delta_{\{3\}}\\
&= -2.
\end{aligned}$$

Entonces el juego v puede ser escrito así:

$$v = U_{\{1\}} + U_{\{2\}} + U_{\{1,2\}} + 5U_{\{1,3\}} + 4U_{\{2,3\}} - 2U_N,$$

y ahora podemos calcular el valor de Shapley,

$$\begin{aligned}
\varphi_1(v) = \delta_{\{1\}} + \frac{\delta_{\{1,2\}}}{2} + \frac{\delta_{\{1,3\}}}{2} + \frac{\delta_N}{3} &= \frac{20}{6}\\
\varphi_2(v) = \delta_{\{2\}} + \frac{\delta_{\{1,2\}}}{2} + \frac{\delta_{\{2,3\}}}{2} + \frac{\delta_N}{3} &= \frac{17}{6}\\
\varphi_3(v) = \delta_{\{3\}} + \frac{\delta_{\{1,3\}}}{2} + \frac{\delta_{\{2,3\}}}{2} + \frac{\delta_N}{3} &= \frac{23}{6}
\end{aligned}$$

$$\varphi(v) = \left(\frac{20}{6}, \frac{17}{6}, \frac{23}{6}\right).$$

El valor de Shapley se puede calcular de otra manera: se escoge un orden para todos los jugadores entre los posibles $n!$ órdenes y se va formando la gran coalición, introduciendo a los jugadores uno por uno de acuerdo a este orden. Cuando el jugador i entra, se forma la coalición $S \cup \{i\}$ donde S son los jugadores que le preceden de acuerdo a este orden. La contribución marginal del jugador i a sus predecesores es: $v(S \cup \{i\}) - v(S)$. La probabilidad de que al entrar i sus predecesores sean exactamente la coalición S es:
$s!(n-s-1)!/n!$. Entonces $\varphi_i(v)$ es el promedio de las contribuciones marginales del jugador i a cualquier coalición S que no lo contiene. Este resultado se demuestra en el siguiente teorema,

Teorema 1.12. *Sea* $\varphi = (\varphi_1, ..., \varphi_n)$*, el valor de Shapley. Para* $i = 1, ..., n$,

$$\varphi_i(v) = \sum_{S \subset N \setminus \{i\}} \frac{s!(n-s-1)!}{n!}[v(S \cup \{i\}) - v(S)] \tag{1.3}$$

Dem: De la demostración del Teorema 1.10 sabemos que el valor de Shapley es único, así que se procederá a demostrar que (1.3) satisface los axiomas de nulidad, simetría, eficiencia y linealidad.

Claramente (1.3) es lineal; si i es un jugador nulo en v, $v(S \cup \{i\}) = v(S)$ para todo S que no contenga a i, por lo tanto $\varphi_i(v) = 0$.
Supongamos que i, j son jugadores sustitutos en v, entonces:

$$v(S \cup \{i\}) = v(S \cup \{j\}) \quad \forall S \subset N \setminus \{i, j\}.$$

Teniendo esto en cuenta,

$$
\begin{aligned}
\varphi_i(v) - \varphi_j(v) = & \sum_{S \subset N \setminus \{i\}} \frac{s!(n-s-1)!}{n!}[v(S \cup \{i\}) - v(S)] \\
& - \sum_{S \subset N \setminus \{j\}} \frac{s!(n-s-1)!}{n!}[v(S \cup \{j\}) - v(S)] \\
= & \sum_{S \subset N \setminus \{i,j\}} \frac{s!(n-s-1)!}{n!}\cancelto{0}{[v(S \cup \{i\}) - v(S \cup \{j\})]} \\
& + \sum_{\substack{S \subset N \setminus \{i\} \\ j \in S}} \frac{s!(n-s-1)!}{n!}[v(S \cup \{i\}) - v(S)] \\
& - \sum_{\substack{S \subset N \setminus \{j\} \\ i \in S}} \frac{s!(n-s-1)!}{n!}[v(S \cup \{j\}) - v(S)] \\
= & \sum_{S \subset N \setminus \{i,j\}} \frac{(s-1)!(n-s)!}{n!}[v(S \cup \{i,j\}) - v(S \cup \{j\})] \\
& - \sum_{S \subset N \setminus \{i,j\}} \frac{(s-1)!(n-s)!}{n!}[v(S \cup \{i,j\}) - v(S \cup \{i\})] \\
= & \sum_{S \subset N \setminus \{i,j\}} \frac{(s-1)!(n-s)!}{n!}\cancelto{0}{[v(S \cup \{i\}) - v(S \cup \{j\})]} \\
= & \, 0.
\end{aligned}
$$

Para ver que φ satisface eficiencia,

$$
\begin{aligned}
\sum_i \varphi_i(v) &= \sum_{i \in N} \sum_{S \subset N \setminus \{i\}} \frac{s!(n-s-1)!}{n!}[v(S \cup \{i\}) - v(S)] \\
&= \frac{1}{n}\left[\sum_{i \in N} v(\{i\})\right] + \frac{1}{n(n-1)}\left[\sum_{i \neq j} v(\{i,j\}) - v(\{j\})\right] \\
&\quad + \frac{2}{n(n-1)(n-2)}\left[\sum_{i \neq j \neq k} v(\{i,j,k\}) - v(\{j,k\})\right] \\
&\quad + ... + \frac{1}{n}\left[\sum_{i_1 \neq i_2 \neq ... \neq i_n} v(\{i_1, ..., i_n\}) - v(\{i_2, ..., i_n\})\right]
\end{aligned}
$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{n}\left[\sum_{i\in N} v(\{i\})\right] + \frac{2}{n(n-1)}\left[\sum_{\{i,j\}\subset N} v(\{i,j\})\right] \\
&\quad -\frac{n-1}{n(n-1)}\left[\sum_{i\in N} v(\{j\})\right] + \frac{3!}{n(n-1)(n-2)}\left[\sum_{\{i,j,k\}\subset N} v(\{i,j,k\})\right] \\
&\quad -\frac{2(n-2)}{n(n-1)(n-2)}\left[\sum_{\{i,j\}\subset N} v(\{i,j\})\right] + ... \\
&\quad +v(N) - \frac{1}{n}\sum_{\{S|s=n-1\}} v(S) \\
&= v(N).
\end{aligned}$$

Por lo tanto la ecuación (1.3) es lineal, satisface los axiomas de eficiencia, simetría y nulidad, y por unicidad esta ecuación coincide con el valor de Shapley. □

Ejemplo 1.13. Calculemos ahora el valor de Shapley para el Ejemplo 1 utilizando (1.3)

		$v(S\cup\{i\})-v(S)$		
S	$\frac{s!(n-s-1)!}{n!}$	$i=1$	$i=2$	$i=3$
$\emptyset$	1/3	1	1	0
$\{1\}$	1/6	-	2	5
$\{2\}$	1/6	2	-	4
$\{3\}$	1/6	6	5	-
$\{1,2\}$	1/3	-	-	7
$\{1,3\}$	1/3	-	4	-
$\{2,3\}$	1/3	5	-	-

Se tiene que,

$$\begin{aligned}
\varphi_1(v) &= 1/3+2/6+6/6+5/3 = 20/6 \\
\varphi_2(v) &= 1/3+2/6+5/6+4/3 = 17/6 \\
\varphi_3(v) &= 5/6+4/6+7/3 = 23/6.
\end{aligned}$$

1.5. Potencial

Al buscar una solución para un juego en forma de función característica (N, v), una idea que se puede ocurrir es que el pago de cada jugador sea la diferencia entre la valía de la gran coalición y la valía de la gran coalición cuando él jugador en cuestión se va, es decir si m representa la solución mencionada $m_i(v) = v(N) - v(N\backslash\{i\})$, a esta solución se le conoce como *contribución marginal* a la gran coalición.

El inconveniente que puede suceder al implementar esta solución, es que los recursos disponibles $v(N)$ no sean suficientes para realizar el pago a todos los jugadores; o que por el contrario, después de pagarle a todos los jugadores sobre alguna cantidad, lo que implica que no sea eficiente.

Sergiu Hart y Andreu Mas-Colell [7], introducen una forma de encontrar una solución siguiendo la idea de las contribuciones marginales. Proponen una función llamada potencial, que a cada juego (N, v) le asigna un real y satisface que el pago dado por las contribuciones marginales a la gran coalición respecto al potencial es eficiente, además encuentran que se puede determinar esta función de manera única y que coincide con el valor de Shapley.

Dado un juego (N, v) y $S \subset N$, (S, v) denotará el *subjuego* que se obtiene al restringir v a los subconjuntos de S.

Supongamos que para cada $S \subset N$ hay dada una función $P^S : G^S \to \mathbb{R}$. Definimos la *contribución marginal* del jugador i en el juego (N, v), como:

$$D^i P(N, v) = P^N(N, v) - P^{N\backslash\{i\}}(N \setminus \{i\}, v).$$

En adelante se obviará el superíndice en la función P, pero se entenderá que al colocar $P(S, v)$, G^S es el domino de P.

Definición 1.14. *La familia de funciones $P : G^S \to \mathbb{R}$, con $P(\emptyset, v) = 0$ es llamada* ***potencial*** *si satisface:*

$$\sum_{i \in S} D^i P(S, v) = v(S), \tag{1.4}$$

para todo juego (S, v) con $S \subset N$.

Esto quiere decir que una familia de funciones es potencial, si satisface que la solución dada por las contribuciones marginales es eficiente.

Teorema 1.15. *El potencial P existe y es único. Además para todo juego (N, v), el vector de pagos dado por $(D^i P(N, v))_{i \in N}$ coincide con el valor de Shapley.*

Dem: Sea (N, v) un juego cooperativo. Se define $P(\emptyset, v) = 0$; si $S = \{i\}$ la diferencia de potencial es:

$$D^i P(\{i\}, v) = P(\{i\}, v) - P(\emptyset, v)$$

y por la condición de eficiencia

$$\sum_{k \in \{i\}} D^k(\{i\}, v) = P(\{i\}, v) = v(\{i\}).$$

Si $S = \{i, j\}$, se tiene que $D^i P(\{i, j\}, v) = P(\{i, j\}, v) - P(\{j\}, v)$ y por eficiencia

$$\sum_{k=i,j} D^k P(\{i, j\}, v) = 2P(\{i, j\}, v) - P(\{i\}, v) - P(\{j\}, v) = v(\{i.j\}),$$

despejando se obtiene que:

$$P(\{i, j\}, v) = \frac{P(\{i\}, v) + P(\{j\}, v) + v(\{i, j\})}{2}.$$

Supóngase que para cada $S \subset N$ con $s < k$, existe y esta definido de manera única el potencial $P(S, v)$. Sea $S \subset N$ de cardinalidad $s = k$, de la ecuación (1.4) $P(S, v)$ se puede escribir como:

$$P(S, v) = \frac{1}{s}[v(S) + \sum_{i \in S} P(S \backslash \{i\}, v)], \tag{1.5}$$

dado que para cada $i \in S$, $P(S \backslash \{i\}, v)$ es único, entonces $P(S, v)$ está unicamente determinado por (1.5). Con esto se ha probado la existencia y unicidad del potencial.

Del Lema 1.9 sabemos que el juego (N, v) puede ser escrito como,

$$v = \sum_{\{T | \emptyset \neq T \subset N\}} \delta_T U_T$$

en particular

$$v(N) = \sum_{\{T|\emptyset \neq T \subset N\}} \delta_T.$$

Se denotará por $\beta_T = \frac{\delta_T}{t}$ y se define la siguiente función,

$$P^*(N,v) = \sum_{T \subset N} \beta_T,$$

se busca comprobar que es potencial, entonces debe satisfacer la ecuación (1.4),

$$\begin{aligned}
\sum_{i \in N} P^*(N,v) - P^*(N \backslash \{i\}, v) &= \sum_{i \in N} \left[\sum_{T \subset N} \beta_T - \sum_{T \subset N \backslash \{i\}} \beta_T \right] \\
&= \sum_{i \in N} \sum_{T \ni i} \beta_T \\
&= \sum_{\emptyset \neq T \subset N} \sum_{i \in T} \beta_T \\
&= \sum_{\emptyset \neq T \subset N} t \beta_T \\
&= \sum_{\emptyset \neq T \subset N} \delta_T = v(N),
\end{aligned}$$

dada la unicidad de P, se debe satisfacer que $P = P^*$.

Falta demostrar que el potencial coincide con el valor de Shapley. Sea $i \in N$, se cumple:

$$\begin{aligned}
D^i P(N,v) &= \sum_{T \subset N} \frac{\delta_T}{t} - \sum_{T \subset N \backslash \{i\}} \frac{\delta_T}{t} \\
&= \sum_{T \ni i} \frac{\delta_T}{t} \\
\text{por la ecuación (1.2)} \qquad &= \varphi_i(v),
\end{aligned}$$

es decir coincide con el valor de Shapley. $\Box$

Ejemplo 1.16. Hallar la función de potencial para el juego definido en el ejemplo 1.2.
Por la demostración del teorema anterior sabemos que:

$$\begin{aligned}
P(\{1\}, v) &= v(\{1\}) = 1 \\
P(\{2\}, v) &= v(\{2\}) = 1 \\
P(\{3\}, v) &= v(\{3\}) = 0 \\
P(\{1,2\}, v) &= \frac{v(\{1\}) + v(\{2\}) + v(\{1,2\})}{2} = \frac{5}{2} \\
P(\{1,3\}, v) &= \frac{v(\{1\}) + v(\{3\}) + v(\{1,3\})}{2} = \frac{7}{2} \\
P(\{2,3\}, v) &= \frac{v(\{2\}) + v(\{3\}) + v(\{2,3\})}{2} = 3.
\end{aligned}$$

Para $N = \{1, 2, 3\}$, el potencial es

$$\begin{aligned}
P(\{1,2,3\}, v) &= \frac{v(\{1,2,3\}) + P(\{1,2\}, v) + P(\{1,3\}, v) + P(\{2,3\}, v)}{3} \\
&= \frac{2v(\{1,2,3\}) + v(\{1,2\}) + v(\{1,3\})}{6} \\
&+ \frac{v(\{2,3\}) + 2(v(\{1\})v(\{2\})v(\{3\}))}{6} \\
&= \frac{19}{3}.
\end{aligned}$$

Y los respectivos pagos dados por la diferencia de potencial son,

$$\begin{aligned}
D^1P(N, v) &= \frac{19}{3} - 3 = \frac{20}{6} \\
D^2P(N, v) &= \frac{19}{3} - \frac{7}{2} = \frac{17}{6} \\
D^3P(N, v) &= \frac{19}{3} - \frac{5}{2} = \frac{23}{6},
\end{aligned}$$

que coincide con el valor de Shapley, tal y como se esperaba.

1.6. Juegos con Estructura de Cooperación

Los juegos que se han estudiado hasta ahora, son juegos que suponen la formación de todas las coaliciones del conjunto de jugadores. En muchas situaciones esta suposición puede ser irreal, bien sea por motivos geográficos, económicos u otros. Para encontrar soluciones a juegos cuyo dominio no es todo 2^n, se deben buscar herramientas diferentes al valor de Shapley, ya que este supone la formación de todas las coaliciones posibles.

Una *estructura de cooperación* se refiere a las coaliciones de N que acceden a cooperar, estas pueden ser representadas por medio de un grafo donde los nodos son los jugadores y en caso de que un jugador decida cooperar con otro se pondrá una arista entre ellos. El grafo completo se representará por,

$$g^N = \{\{i,j\}|i,j \in N, i \neq j\}$$

donde $\{i,j\}$ es la arista entre i y j. Por GR se denota la familia de subgrafos de g^N,

$$GR = \{g|g \subset g^N\},$$

y por $(v,g) \in G^N \times GR$ a un juego con estructura de cooperación para el conjunto N de jugadores.

Definición 1.17. *Sean $g \in GR$, $S \subset N$ e $i,j \in S$. Diremos que i está **conectado** con j en S por g si: $i = j$, o si existe un subconjunto de aristas de g cuyos nodos están en S, el cual une a i con j. Se dice que la coalición S es **conexa** si todo $i,j \in S$ está conectado en S por g.*

Se define por g/S al grafo g restringido a S, es decir al grafo que se obtiene al considerar sólo los nodos de g que están en S y sus respectivas aristas.

Definición 1.18. *Sean $g \in GR$ y $S \subset N$. Diremos que S es una **componente** si y sólo si S es conexa y para todo $k \notin S$, $S \cup \{k\}$ no es conexa.*

Para cada S, el conjunto de componentes en g/S forma una partición en S que se denota por:

$$S/g = \{\{i| \textit{ i está conectado a j en S por g}\}|j \in S\}.$$

Ejemplo 1.19. Consideremos el conjunto de jugadores $N = \{1,2,3,4,5\}$ y la estructura de cooperación dada por el grafo $g = \{\{1,2\},\{3,4\},\{4,5\}\}$, la cual se puede representar por la figura 1.1. En este caso el jugador 3 está conectado con el jugador 5 aunque no haya una arista entre los dos. Las componentes de N son: $N/g = \{\{1,2\},\{3,4,5\}\}$. Si se considera $S = \{2,3,4\}$, la partición dada por el grafo restringido a S es: $S/g = \{\{2\},\{3,4\}\}$.

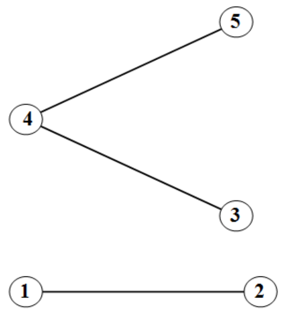


Figura 1.1: Estructura de Cooperación $N = \{1, 2, 3, 4, 5\}$.

Se define ahora la valía de una coalición S dada la estructura de cooperación g, como la suma de las valías de las componentes en S,

Definición 1.20. *Sea $(v, g) \in G^N \times GR$, se define el* ***juego con estructura de cooperación*** *$v/g \in G$ por:*

$$(v/g)(S) = \sum_{T \in S/g} v(T).$$

De esta manera queda definido un juego cooperativo usual $(N, v/g)$, donde todas las coaliciones son consideradas.

Hay condiciones deseables respecto a las soluciones para un juego $(v, g) \in G^N \times GR$. A continuación se dan tres de estas condiciones:

Definición 1.21. *La función $\psi : GR \to \mathbb{R}^n$ es una* ***regla de asignación*** *si y sólo si para todo grafo $g \in GR$ y $S \in N/g$ se tiene que:*

$$\sum_{i \in S} \psi_i(g) = v(S).$$

En otras palabra, ψ es una regla de asignación si la suma de lo que le corresponde a los jugadores en una componente, es la valía de la componente. Si ψ es una regla de asignación también se dice que ψ es *eficiente por componentes.*

La segunda condición deseable es:

Definición 1.22. *La regla de asignación ψ es **estable** si y sólo si para todo grafo $g \in GR$ y toda arista $\{i,j\} \in g$ se satisface:*

$$\begin{aligned} \psi_i(g) &\geq \psi_i(g \backslash \{i,j\}) \\ \psi_j(g) &\geq \psi_j(g \backslash \{i,j\}), \end{aligned}$$

donde $g\backslash\{i,j\}$ es el grafo que resulta al quitar la arista $\{i,j\}$ de g.

Que una regla de asignación sea estable, significa que los jugadores i, j al cooperar no se perjudican.

Definición 1.23. *La regla de asignación ψ es **justa** si y sólo si para todo $g \in GR$ e $\{i,j\} \in g$ se satisface*

$$\psi_i(g) - \psi_i(g\backslash\{i,j\}) = \psi_j(g) - \psi_j(g\backslash\{i,j\}).$$

Una regla de asignación es justa si al romperse el acuerdo de cooperación entre dos jugadores, ambos se ven afectados de la misma manera.

Con la definición dada del juego v/g es posible aplicar el valor de Shapley, pues este juego está definido para todo $S \subset N$. Roger Myerson, ganador del premio Nobel de economía, demostró que existe una única regla de asignación justa y además esta regla es el valor de Shapley del juego v/g [8].

Teorema 1.24 (Myerson)**.** *Dado un juego v existe una única regla de asignación justa $\psi : GR \to \mathbb{R}^n$. Esta regla de asignación está dada por:*

$$\psi(v,g) = \varphi(v/g) \quad \textit{para todo} \quad g \in GR$$

donde φ es el valor de Shapley.

Capítulo 2

Antecedentes

En este capitulo se abordarán dos propuestas de solución para compartir el agua de un río, la primera de ellas se debe a Ambec et al. en el año 2002 y la segunda es propuesta por R. van den Brink et al. en el año 2007.

2.1. Modelo Ambec y Sprumont

Ambec y Sprumont en su artículo Sharing a River [1], consideran el problema de compartir el agua de un río que pasa a lo largo de varios agentes, los cuales pueden ser países, estados, ciudades, entre otros. Consideran que tales agentes están ordenados a lo largo del río y se representan por el conjunto $N = \{1, 2, ..., n\}$, su numeración depende de la ubicación a lo largo del río, que va del más cercano a su nacimiento al más alejado. Suponen que cada $i \in N$ representa a un agente diferente.

En el territorio del agente i el río aumenta su volumen en una cantidad $e_i \geq 0$, en particular $e_1 > 0$ es la cantidad de agua que tiene el río en el territorio donde nace. Para cada agente hay una función de beneficio $b_i : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$, donde $b_i(x_i)$ representa el beneficio que trae para el agente i el consumo de la cantidad de agua x_i. Esta función se supone diferenciable en cada $x_i > 0$, estrictamente creciente, estrictamente cóncava y además

$$\lim_{x_i \to 0} b'(x_i) = \infty.$$

Dado que la función de beneficio se supone creciente, los agentes siempre aspiran a consumir la mayor cantidad de agua posible, aunque por lo general existe una cantidad de agua óptima y a partir de ese nivel el agente tendrá más agua de la que puede consumir, haciendo que su función de beneficio no aumente y en ocasiones hasta podría disminuir; esta situación no es considerada en el artículo en cuestión.

Si cada agente consume el total del agua que hay en su territorio, los primeros agentes podrían obtener beneficios altos ya que están consumiendo la totalidad del agua de la que tienen soberanía, sin considerar a los demás. Estas acciones posiblemente perjudican a agentes posteriores, haciendo que obtengan un beneficio pequeño, es decir, con esta manera de consumir sólo algunos agentes estarán satisfechos. El objetivo es aprovechar de la mejor manera posible el río en su totalidad, buscando que la suma de los beneficios para todos los agentes sea máxima, para lograrlo algunos tendrán que dejar pasar agua que podrían usar, esto en beneficio de otros agentes, quienes deberán retribuir con dinero.

La utilidad del agente i por consumir la cantidad de agua x_i y recibir o dar la cantidad de dinero t_i, viene dada por la función de *utilidad*, $u_i : \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida como:

$$u_i(x_i, t_i) = b_i(x_i) + t_i,$$

se supone que hay cantidades ilimitadas de dinero para cubrir dichos pagos.

Una *asignación* es un vector $(x, t) = (x_1, ..., x_n, t_1, ..., t_n) \in \mathbb{R}^n_+ \times \mathbb{R}^n$ que representa una distribución de agua entre los agentes y los respectivos pagos. Satisface las condiciones:

$$\sum_{i \in N} t_i \leq 0 \tag{2.1}$$

$$\sum_{i \leq j} (x_i - e_i) \leq 0 \quad \text{para todo } j \in N. \tag{2.2}$$

La ecuación (2.1) es una condición de presupuesto que pide que el total de las compensaciones sea no positivo, y la ecuación (2.2) representa las cotas en la cantidad de agua que cada agente puede consumir, por ejemplo el agente 1 puede consumir a lo más e_1, el jugador 2 puede consumir a lo más e_2 y lo que no consuma el jugador 1, que es $x_1 - e_1$ y así sucesivamente para los demás agentes.

Una *distribución de bienestar* es un vector $z = (z_1, z_2, ..., z_n) \in \mathbb{R}^n$, el cual es la imagen de la función utilidad para alguna asignación (x, t): $z_i = b_i(x_i) + t_i$.

Una asignación $(x^*, t^*) = (x_1^*, ..., x_n^*, t_1^*, ..., t_n^*)$ es *pareto eficiente*, si es imposible mejorar las utilidades de alguno sin empeorar las de otro, es decir, si con la asignación $(\tilde{x}, \tilde{t}) \neq (x^*, t^*)$, $u_i(\tilde{x_i}, \tilde{t_i}) > u_i(x_i^*, t_i^*)$, entonces existe j tal que $u_j(\tilde{x_j}, \tilde{t_j}) < u_j(x_j^*, t_j^*)$. Ambec y Sprumont en el siguiente teorema encuentran condiciones necesarias y suficientes para que una asignación sea pareto eficiente.

Teorema 2.1. *Una asignación $(x^*(N), t^*(N))$ es pareto eficiente si y sólo si maximiza la suma de los beneficios y no desperdicia dinero.*

A $x^*(N)$ se le llama *plan de consumo óptimo*. El teorema pide que $\sum_{i \in N} b_i(x_i^*)$ sea máxima y para $t^*(N)$ se debe cumplir que $\sum_{i \in N} t_i^* = 0$.

Ahora la pregunta a resolver es como dividir el beneficio máximo $\sum_{i \in N} b_i(x_i^*)$ entre los agentes. Ambec y Sprumont proponen una solución la cual se presenta en la siguiente sección.

2.2. Solución Propuesta por Ambec y Sprumont

En cuanto a la soberanía y propiedad del agua de un río existen dos doctrinas bien conocidas, la primera de ellas es la teoría de soberanía absoluta (ATS) la cual establece que cada agente tiene control absoluto sobre el agua que pasa por su territorio, mientras que la teoría de integridad ilimitada (UTI) establece que cada país no tiene derecho a alterar las condiciones naturales del agua si esto perjudica a los territorios siguientes, es decir se extienden los derechos sobre el río para todos los agentes. El objetivo es encontrar una asignación que se encuentre entre las dos doctrinas, que a su vez sea pareto eficiente.

Supongamos que los agentes actúan bajo la doctrina ATS, cada quien consumirá el agua como le parezca, sin llegar a acuerdos con los demás. Entonces la cantidad de agua que llega al territorio de un agente será la mínima cantidad que pueda llegar, por lo tanto la doctrina ATS establece una cota inferior sobre lo que cada agente aspira a consumir.

Una coalición T es *consecutiva*, si para cualesquiera $i, j \in T$ con $i \leq j$, se cumple que $k \in T$ con $i \leq k \leq j$. Toda coalición $S \subset N$, admite una única partición más gruesa ρ, en componentes consecutivas. Se denotará por $[1, j]$ a la coalición de predecesores de j: $\{1, 2, ..., j\}$.

Supóngase que los agentes actúan bajo la doctrina ATS. Si la coalición S decide cooperar, se busca el plan de consumo $x^*(S) = (x_i)_{i \in S}$ que maximiza $\sum_{i \in S} b_i(x_i)$ sujeto a las restricciones

$$\sum_{i \in [1,j] \cap T} (x_i - e_i) \leq 0 \quad \text{para todo} \quad j \in T \quad \text{y} \quad T \in \rho. \tag{2.3}$$

Estas restricciones implican que si el agente k pertenece a $T \in \rho$, puede asegurar e_k y lo que dejen de consumir sus predecesores en T. En el caso en que $T = \{k\}$, sólo puede garantizar e_k puesto que no sabe como actuarán los demás.

Se define el *beneficio seguro* de S por:

$$v(S) = \sum_{i \in S} b_i(x_i^*(S)),$$

se satisface que

$$v(S) = \sum_{T \in \rho} v(T).$$

El agua que deja cualquiera de las componentes consecutivas de S, no se puede garantizar para el consumo de otra componente, sólo coaliciones consecutivas generan excedentes.

Se dirá que la distribución de bienestar z satisface la cota dada por el beneficio seguro si:

$$v(S) \leq \sum_{i \in S} z_i, \quad \textit{para todo} \quad S \subset N.$$

Supongamos ahora que los agentes siguen la doctrina UTI, cada uno esperará que a su territorio llegue el flujo total de agua que hay desde el nacimiento del río, como si los demás agentes no estuvieran. Esto define el beneficio máximo que puede obtener el agente k, que es:

$$w(k) = b_k \left(\sum_{j \in [1,k]} e_j \right),$$

este beneficio no es realizable con más de un agente.

De manera similar se puede encontrar la cota máxima o *aspiración de bienestar* para una coalición $S \subset N$, que es lo máximo que puede conseguir S en ausencia de $N \backslash S$. Esto se obtiene con un plan de consumo que maximice $\sum_{i \in S} b_i(x_i)$ sujeto a:

$$\sum_{i \in [1,j] \cap S} x_i \leq \sum_{i \in [1,j]} e_i \qquad \text{para todo } j \in S. \tag{2.4}$$

La solución a este problema se denotará por $x^{**}(S)$ y se define

$$w(S) = \sum_{i \in S} b_i(x_i^{**}(S))$$

que es *la aspiración de bienestar*.

Se dirá que una distribución de bienestar z satisface la cota dada por la aspiración de bienestar si:

$$\sum_{i \in S} z_i \leq w(S) \quad \textit{para todo} \quad S \subset N.$$

En caso de que $S = [1, i]$, las ecuaciones (2.3) y (2.4) coinciden, por lo que

$$w([1, i]) = v([1, i]).$$

Utilizando este hecho, se caracteriza una solución que satisface las cotas dadas por el beneficio seguro y la aspiración de bienestar.

Teorema 2.2. *La contribución marginal a los predecesores z^*, donde cada z_i^* es de la forma*

$$z_i^* = v\left([1,i]\right) - v([1,i-1]) = w([1,i]) - w([1,i-1])$$

es la única distribución de bienestar que satisface las cotas dadas por w y v.

2.3. Juegos y Grafos Lineales

En 2006 René van den Brink, Gerard van der Laan y Valeri Vasil'ev [13], consideran de igual manera el problema del compartir el agua de un río, ellos se basan en el modelo de Ambec et al., proponiendo una solución diferente.

Supongamos que el conjunto de jugadores N, está ordenado del 1 al n. Y consideremos el grafo $L^C = \{\{i, i+1\}|i = 1, ..., n-1\}$, donde cada par de jugadores consecutivos está conectado. Los *grafos lineales* (N, L) son aquellos donde $L \subset L^C$, las coaliciones conectadas en este grafo son de la forma $\{i, i+1, ..., j-1, j\}$, estas coaliciones se denotarán por la pareja $[i, j]$. A los juegos v cuya estructura de cooperación está dada por el grafo lineal (N, L), se les denotará por $(v, L) \in G^N \times \lambda$, donde $\lambda = \{L|L \subset L^C\}$ es el conjunto de todos los grafos lineales en N.

Recordemos que el juego con estructura de cooperación (en este caso dada por grafos lineales (v, L)) está definido por:

$$v/L\ (S) = \sum_{T \in S/L} v(T),$$

donde S/L es la colección de componentes de L restringidas a S. Sea $L \in \lambda$ denotaremos por (N, L_i) con $i \in \{1, 2, ..., n-1\}$, al grafo en N donde $L_i = L \backslash \{i, i+1\}$ es decir, es el grafo que resulta al eliminar la arista que une a i con $i+1$, nótese que si $L \in \lambda$ también $L_i \in \lambda$.

A continuación se darán cuatro propiedades para las soluciones de los juegos en $G^N \times \lambda$. Estas propiedades dan condiciones en los pagos cuando dos jugadores consecutivos cambian de opinión y deciden no cooperar.

Definición 2.3. *1. Una solución f en $G^N \times \lambda$ es llamada **justa**, si para cualesquiera $i \in \{1, 2, ..., n-1\}$, $(N, v) \in G^N$ y $L \in \lambda$ se cumple que:*

$$f_i(v, L) - f_i(v, L_i) = f_{i+1}(v, L) - f_{i+1}(v, L_i).$$

*2. Una solución f en $G \times \lambda$ es llamada **equivalente superior** si para cualesquiera $i \in \{1, 2, ..., n-1\}$, $(N, v) \in G^N$ y $L \in \lambda$ se satisface:*

$$f_j(v, L) = f_j(v, L_i),$$

para $j \in \{1, 2, ..., i\}$.

*3. Una solución f en $G \times \lambda$ es llamada **equivalente inferior** si para cualesquiera $i \in \{1, 2, ..., n-1\}$, $(N, v) \in G^N$ y $L \in \lambda$ se cumple que:*

$$f_j(v, L) = f_j(v, L_i),$$

para $j \in \{i+1, ..., n\}$.

*4. Una solución f en $G \times \lambda$ se dice que satisface la propiedad de **igual pérdida** si para cualesquiera $i \in \{1, 2, ..., n-1\}$, $(N, v) \in G^N$ y $L \in \lambda$ se tiene que:*

$$\sum_{j=1}^{i} f_j(v, L) - f_j(v, L_i) = \sum_{j=i+1}^{n} f_j(v, L) - f_j(v, L_i).$$

La primera definición es la propiedad de justicia que se vio en en capítulo 1 en los juegos con estructura de cooperación, dice que si la arista entre dos jugadores desaparece, los dos se ven afectados de la misma manera. La propiedad de equivalencia superior significa que el pago de un jugador no depende de la cooperación entre los agentes que van después de él; de manera similar la propiedad de equivalencia inferior significa que el pago de un jugador no depende de la presencia de las aristas entre los jugadores que lo preceden. Por último, la propiedad de igual pérdida es una alternativa de la propiedad de justicia, pero ahora al borrar la arista entre el jugador i e $i+1$, el cambio en el pago total de los jugadores antes de i debe ser igual al de los jugadores después de $i+1$.

2.4. Soluciones para Juegos en Grafos Lineales

Se denotará por f^s a la regla de asignación dada por Myerson:
$f^s(v,L) = \psi(L)$. Tomando el orden usual $\{1,2,...,n\}$, se denota por f^u a la contribución marginal a los predecesores:

$$f_i^u(v,L) = v/L\ ([1,i]) - v/L\ ([1,i-1]),$$

y por f^l a la contribución marginal a los sucesores:

$$f_i^l(v,L) = v/L\ ([i,n]) - v/L\ ([i+1,n]),$$

f^e representará el promedio entre f^u y f^l,

$$f_i^e(v,L) = \frac{1}{2}\left(f_i^u(v,L) + f_i^l(v,L)\right).$$

Teorema 2.4. *Sea $f : G^N \times \lambda \to \mathbb{R}^n$ una regla de asignación:*

1. *f es justa si y sólo si $f = f^s$.*

2. *f es equivalente superior si y sólo si $f = f^u$.*

3. *f es equivalente inferior si y sólo si $f = f^l$.*

4. *f satisface la propiedad de igual pérdida si y sólo si $f = f^e$.*

Dem:

1. Dado que f^s coincide con el valor de Myerson ψ, se sabe que es regla de asignación y que además es justa.

2. Primero se demostrará que f^u es regla de asignación. Supongamos que S es una componente en L, entonces $S = [k,l]$ para algunos k,l que satisfacen $1 \leq k \leq l \leq n$. Sea $i \in S$, por la definición de juegos con estructura de cooperación cumple que

$$v/L\ ([1,i]) = v/L\ ([1,k-1]) + v([k,i]),$$

debido a que $[k.i]$ es una componente en $\{1,...,i\}$. Por lo tanto:

$$\begin{aligned} f_i^u(v,L) &= v/L\ ([1,i]) - v/L\ ([1,i-1]) \\ &= v/L\ ([1,k-1]) + v([k,i]) - v/L\ ([1,k-1]) - v([k,i-1]) \\ &= v([k,i]) - v([k,i-1]). \end{aligned}$$

Entonces,

$$\begin{aligned}\sum_{i=k}^{l} f_i^u(v,L) &= v([k,k]) + \sum_{i=k+1}^{l} v([k,i]) - v([k,i-1]) \\ &= v([k,l]) = v(S),\end{aligned}$$

por lo tanto f^u es una regla de asignación. De manera similar se puede probar que f^l y f^e son reglas de asignación.

Veamos que f^u es equivalente superior. Si $j \leq i$,

$$v/L\ ([1,j]) = v/L_i\ ([1,j]),$$

por lo tanto,

$$\begin{aligned}f_j^u(v,L) &= v/L\ ([1,j]) - v/L\ ([1,j-1]) \\ &= v/L_i\ ([1,j]) - v/L_i\ ([1,j-1]) \\ &= f_j^u(v,L_i).\end{aligned}$$

Ahora, supóngase que f es una regla de asignación equivalente superior. Sean K una componente en N/L, $\{i, i+1\}$ una arista en K y K^i la componente en N/L_i que contiene a i. Dado que f es regla de asignación, para cada componente se satisface

$$\sum_{h \in K} f_h(v,L) = v(K) \tag{2.5}$$

y para K^i se tiene que $\sum_{h \in K^i} f_h(v,L_i) = v(K^i)$.

Por la propiedad de equivalencia superior:

$$\sum_{h \in K^i} f_h(v,L) = \sum_{h \in K^i} f_h(v,L_i) = v(K^i). \tag{2.6}$$

Buscamos determinar f_h para cada $h \in N$, por lo que tenemos n incógnitas. Por cada componente hay una ecuación de la forma (2.5) y por cada arista hay una ecuación de la forma (2.6), es decir hay en total n ecuaciones, entonces la solución es única. De acá que $f = f^u$.

3. La prueba es análoga a la del caso anterior.

4. Veamos que f^e satisface la propiedad de igual pérdida. Se cumple que

$$v/L\ ([1,j]) = v/L_i\ ([1,j]) \quad si \quad j \leq i,$$

de acá que

$$\begin{aligned}\sum_{j=1}^{i} f_j^u(v,L) - f_j^u(v,L_i) &= \sum_{j=1}^{i} v/L\ ([1,j]) - v/L\ ([1,j-1]) \\ &\quad -v/L_i\ ([1,j]) + v/L_i\ ([1,j-1]) \\ &= 0.\end{aligned}$$

Debido a que f^l es la contribución marginal a la gran coalición cuando el orden en el conjunto de jugadores es $\{n, n-1, ..., 1\}$, se satisface:

$$\sum_{j=i+1}^{n} f_j^l(v,L) - f_j^l(v,L_i) = 0$$

y

$$\begin{aligned}\sum_{j=i+1}^{n} f_j^u(v,L) - f_j^u(v,L_i) &= \sum_{j=i+1}^{n} v/L\ ([1,j]) - v/L\ ([1,j-1]) \\ &\quad -v/L_i\ ([1,j]) + v/L_i\ ([1,j-1]) \\ &= v/L\ ([1,n]) - v/L\ ([1,i]) \\ &\quad -v/L_i\ ([1,n]) + v/L_i\ ([1,i]) \\ &= v/L\ (N) - v/L_i\ (N),\end{aligned}$$

similarmente se cumple que

$$\sum_{j=1}^{i} f_j^l(v,L) - f_j^l(v,L_i) = v/L\ (N) - v/L_i\ (N).$$

Por lo tanto se satisface,

$$\sum_{j=1}^{i} f_j^e(v,L) - f_j^e(v,L_i) = \sum_{j=i+1}^{n} f_j^e(v,L) - f_j^e(v,L_i).$$

Supongamos ahora que f es una regla de asignación que satisface la propiedad de igual perdida. Sea $\{i, i+1\}$ una arista, K la componente de N/L que la contiene y sean K^i, K^{i+1} las componentes en N/L_i que contienen a i, $i+1$ respectivamente. Dado que f es regla de asignación se satisface que:

$$\sum_{h\in K^s} f_h(v,L_i) = v(K^s) \qquad para \quad s=i,i+1.$$

Y para K' componente de N/L con $K' \neq K$, debido a que la arista $\{i,i+1\}$ no está en K' se cumple que:

$$\sum_{h\in K'} f_h(v,L_i) = \sum_{h\in K'} f_h(v,L) = v(K').$$

De la propiedad de igual perdida, se tiene:

$$\begin{aligned} \sum_{h=1}^{i} f_h(v,L) - f_h(v,L_i) &= \sum_{h=i+1}^{n} f_h(v,L) - f_h(v,L_i) \\ \sum_{h\in K^i} f_h(v,L) - v(K^i) &= \sum_{h\in K^{i+1}} f_h(v,L) - v(K^{i+1}) \qquad (2.7) \end{aligned}$$

y ya que la arista que se consideró fue arbitraria, hay una ecuación de la forma (2.7) por cada arista. Dado que f se supuso regla de asignación, para cada componente se satisface, $\sum_{h\in K} f_h(v,L) = v(K)$. Por lo tanto hay n ecuaciones y n incógnitas, lo que determina de manera única f. $\square$

2.5. Solución al Problema del Río por medio de Grafos Lineales

El problema de encontrar una distribución de bienestar apropiada para los beneficios dados por un río, van den Brink, et al. lo modelan por un juego con estructura de cooperación (v,L) donde $L = L^C = \{\{i,i+1\}|i=1,...,n-1\}$.

Sean $i<j$ dos jugadores que deciden cooperar, si parte del agua que entra en el territorio del agente i es asignada al agente j, esta sólo puede llegar a j si todos los agentes intermedios cooperan, de lo contrario la podrían usar. Por lo que sólo coaliciones de jugadores consecutivos son admitidas. La función característica que definen, es la misma que definió Ambec et al.

cuando se consideraba que los jugadores se regían por la doctrina ATS, que es:

$$v(S) = \sum_{i \in S} b_i(x_i^*(S))$$

donde $x^*(S) = (x_i)_{i \in S}$ es el plan de consumo que maximiza $\sum_{i \in S} b_i(x_i)$, sujeto a las restricciones:

$$\sum_{i \in [1,j] \cap T} (x_i - e_i) \leq 0 \quad \text{para todo} \quad j \in T \quad \text{y} \quad T \in \rho,$$

donde e_i es el flujo de agua en el territorio del agente i y ρ es la partición más gruesa en coaliciones consecutivas de S.

En caso de que $S \subset N$ no sea conexa:

$$v(S) = \sum_{T \in (S/L)} v(T),$$

en este caso v/L y v coinciden.

La distribución propuesta por Ambec et al. es igual que f^u:

$$f_j^u = v([1, j]) - v([1, j-1]).$$

Recordando que f^u satisface la propiedad de equivalencia superior, se cumple:

$$f_j^u(v, L) = f_j^u(v, L_i) \quad j \leq i,$$

si el jugador i no quiere cooperar él no se ve afectado y tampoco lo hacen los agentes anteriores a él. Además la coalición $[1, i]$ puede hacer que la coalición $[i+1, n]$ tenga a lo más $v([i+1, n])$, al consumir el flujo total de agua desde el origen hasta el jugador i y su pago no se verá afectado por estas acciones, entonces la distribución de bienestar dada por f^u no da incentivos para la cooperación.

Se dice que el jugador $i < n$ está en control de la arista $\{i, i+1\}$, debido a que él tiene el poder de consumir o dejar pasar agua al jugador $i+1$, por lo tanto los jugadores en $\{i+1, ..., n\}$ necesitan alguna garantía para que se lleve a cabo la cooperación, por lo que f^l es una mejor alternativa como solución.

Capítulo 3

Juegos de Río

3.1. Introducción

Plantearemos ahora otra manera de solucionar el problema de repartir los beneficios dados por un río. Al igual que se hizo anteriormente, consideraremos un río que pasa por el territorio de los agentes $N = \{1, 2, ..., n\}$, su numeración depende de la ubicación a lo largo del río.

Figura 3.1: Río Danubio

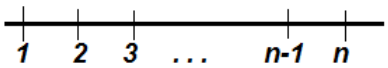


Figura 3.2: Representación grafo

En la figura 3.1 vemos el río Danubio con un ejemplo de la numeración que se le da a cada país y la figura 3.2 es el grafo que representa el caso general de un río que pasa por el territorio de n agentes.

Queremos ver qué coaliciones entre agentes se podrán formar. Supongamos que los agentes no consecutivos i, j con $i < j$, acceden a cooperar, en caso de que el agente i acuerde dejar pasar agua para el consumo del agente j, no se podrá asegurar que llegue, ya que no se tiene ningún acuerdo con los agentes intermedios.

Teniendo esto en cuenta, buscamos definir una nueva clase de juegos cooperativos, donde el dominio sean las coaliciones consecutivas del conjunto de agentes, en lugar del conjunto de partes. Posteriormente procederemos a encontrar soluciones para esta nueva clase de juegos.

3.2. Definiciones y Propiedades de Juegos de Río

Definición 3.1. *La coalición S es **consecutiva**, si para cualesquiera $a, b \in S$ con $a \leq b$, se cumple que $k \in S$ para $a \leq k \leq b$. La coalición consecutiva cuyo primer elemento es i y último elemento es j se denotará por $[i, j]$. Denotaremos por $\mathfrak{C}_N$ al conjunto de coaliciones consecutivas de N:*

$$\mathfrak{C}_N = \{S \subset N |\ S \textit{ es consecutiva}\}.$$

Definición 3.2. *Un **juego de río** es el par $(\mathfrak{C}_N, V)$, donde $V : \mathfrak{C}_N \longrightarrow \mathbb{R}$ es una función tal que $V(\emptyset) = 0$. Denotaremos por $G_{\mathfrak{C}}$ al conjunto de juegos de río:*

$$G_{\mathfrak{C}} = \{V |\ V : \mathfrak{C}_N \longrightarrow \mathbb{R}, \textit{con } V(\emptyset) = 0\}.$$

Definición 3.3. *Una **solución** para juegos de río $(\mathfrak{C}_N, V)$, es un operador*

$$\varphi : G_{\mathfrak{C}} \to \mathbb{R}^n.$$

El conjunto de coaliciones consecutivas de N, $\mathfrak{C}_N$ puede ser representado por una matriz triangular superior de tamaño $n \times n$, que tiene la siguiente forma:

$$\begin{pmatrix} [1,1] & [1,2] & \cdots & [1,n] \\ 0 & [2,2] & \cdots & [2,n] \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & [n,n] \end{pmatrix}$$

Las entradas de la diagonal son los subconjuntos de N de cardinalidad 1: $\{i\} = [i,i]$. La pareja $[1,n]$ representa la gran coalición N. Y las entradas debajo de la diagonal son 0, ya que las coaliciones consecutivas deben ser de la forma $[i,j]$ con $i \leq j$.

Definiremos los juegos de unanimidad sobre las coaliciones consecutivas y queremos ver que forman una base para $G_{\mathfrak{C}}$,

Definición 3.4. *Para $[i,j] \in \mathfrak{C}_N$, definimos el juego de* ***unanimidad*** *$U_{ij} : \mathfrak{C}_N \longrightarrow \mathbb{R}$ como:*

$$U_{ij}([k,l]) = \begin{cases} 1 \quad si \quad [i,j] \subset [k,l] \\ & [k,l] \in \mathfrak{C}_N. \\ 0 \qquad en\ otro\ caso \end{cases}$$

Proposición 3.5. *El conjunto de los juegos de unanimidad $\{(\mathfrak{C}_N, U_{ij}) | \, [i,j] \in \mathfrak{C}_N\}$, forma una base para $G_{\mathfrak{C}}$.*

Dem: La cantidad de subconjuntos consecutivos de N es: $|\mathfrak{C}_N| = \frac{n(n+1)}{2}$. Por cada $[i,j] \in \mathfrak{C}_N$ hay un juego de unanimidad U_{ij}, en total hay $\frac{n(n+1)}{2}$ de estos juegos. Para ver que forman una base solo resta ver que son linealmente independientes.

Si los juegos de unanimidad forman una base, se debe satisfacer:

$$\begin{aligned} V([k,l]) &= \sum_{[i,j] \in \mathfrak{C}_N} \delta_{ij} U_{ij}([k,l]) \qquad \delta_{ij} \in \mathbb{R} \\ &= \sum_{[i,j] \subset [k,l]} \delta_{ij} \qquad \delta_{ij} \in \mathbb{R}. \end{aligned} \tag{3.1}$$

Supongamos que para todo $[k,l] \in \mathfrak{C}_N$,

$$V([k,l]) = \sum_{[i,j]\subset[k,l]} \delta_{ij} = 0.$$

Si $|[k,l]| = 1$, es decir $k = l$, se satisface que:

$$0 = V([k,l]) = \sum_{[i,j]\subset[k,l]} \delta_{ij} = \delta_{kl}.$$

Si $|[k,l]| = 2$,

$$0 = V([k,l]) = \sum_{[i,j]\subset[k,l]} \delta_{ij} = \delta_{kk} + \delta_{ll} + \delta_{kl} = \delta_{kl}.$$

Si $|(k,l)| = m$, vamos a suponer que $\delta_{ij} = 0$ para todo $[i,j] \subset [k,l]$.

Queremos ver que para $[k,l] \in \mathfrak{C}_N$, con $|[k,l]| = m+1$ se cumple que $\delta_{kl} = 0$,

$$0 = V([k,l]) = \sum_{[i,j]\subset[k,l]} \delta_{ij} = \delta_{kl} + \sum_{\substack{[i,j]\subset[k,l]\\ [i,j]\neq[k,l]}} \delta_{ij},$$

por hipótesis,

$$\sum_{\substack{[i,j]\subset[k,l]\\ [i,j]\neq[k,l]}} \delta_{ij} = 0,$$

por lo que $\delta_{kl} = 0$. Entonces los juegos de unanimidad son linealmente independientes. $\square$

Recordemos que $\mathfrak{C}_N$ puede ser representado por una matriz triangular superior de tamaño $n \times n$. Si colocamos de igual manera los δ_{ij}, en una matriz triangular superior, dado que

$$V([k,l]) = \sum_{[i,j]\subset[k,l]} \delta_{ij} \qquad\qquad \delta_{ij} \in \mathbb{R},$$

$V([k,l])$ se puede ver como la suma de las entradas de la submatriz D_{kl}, que tiene la forma:

$$D_{kl} = \begin{pmatrix} \delta_{kk} & \delta_{kk+1} & \cdots & \delta_{kl} \\ 0 & \delta_{k+1k+1} & \cdots & \delta_{k+1l} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \delta_{ll} \end{pmatrix}$$

Teorema 3.6. *Dado un juego de río $(\mathfrak{C}_N, V)$. Las constantes de la base δ_{ij} pueden escribirse en términos de V como:*

- *Si* $|[i,j]| = 1$,

$$\delta_{ij} = V([i,j]).$$

- *Si* $|[i,j]| = 2$

$$\delta_{ij} = V([i,j]) - V([i,i]) - V([j,j]).$$

- *Si* $|[i,j]| \geq 3$,

$$\delta_{ij} = V([i,j]) - V([i+1,j]) - V([i,j-1]) + V([i+1,j+1]).$$

Dem: Cuando $|[i,j]| = 1$ o $|[i,j]| = 2$, ya se ha probado el resultado en la demostración de la proposición anterior.

Supongamos que $|[i,j]| \geq 3$, despejando en la ecuación (3.1), tenemos que:

$$\delta_{ij} = V([i,j]) - \sum_{\substack{i \leq k \leq l \leq j \\ [k,l] \neq [i,j]}} \delta_{kl}.$$

El indice de la suma se puede expresar como:

$$\{[k,l] | i \leq k \leq l \leq j, [i,j] \neq [k,l]\} = \{[k,l] | i+1 \leq k \leq l \leq j\} \cup \{[k,l] | i \leq k \leq l \leq j-1\},$$

además

$$\{[k,l] | i+1 \leq k \leq l \leq j\} \cap \{[k,l] | i \leq k \leq l \leq j-1\} = \{[k,l] | i+1 \leq k \leq l \leq j+1\}.$$

Por lo tanto,

$$\begin{aligned}
\delta_{ij} &= V([i,j]) - \sum_{\substack{i\leq k\leq l\leq j\\ [k,l]\neq[i,j]}} \delta_{kl} \\
&= V([i,j]) - \sum_{[k,l]\subset[i+1,j]} \delta_{kl} - \sum_{[k,l]\subset[i,j-1]} \delta_{kl} + \sum_{[k,l]\subset[i+1,j-1]} \delta_{kl},
\end{aligned}$$

por (3.1), tenemos que

$$\delta_{ij} = V([i,j]) - V([i+1,j]) - V([i,j-1]) + V([i+1,j-1]), \tag{3.2}$$

como se quería demostrar. $\square$

Ejemplo 3.7. Supongamos que $N = \{1,2,3,4,5\}$ y consideremos la coalición $[2,5]$. $V([2,5])$, $V([2,4])$, $V([3,5])$ y $V([3,4])$ están dados por la suma de las entradas de las submatrices encerradas por el recuadro rojo, azul, verde y morado respectivamente. Al hacer $V([2,5]) - V([2,4]) - V([3,5]) + V([3,4])$, claramente se obtiene δ_{25}.

$$\begin{pmatrix}
\delta_{11} & \delta_{12} & \delta_{13} & \delta_{14} & \delta_{15} \\
0 & \delta_{22} & \delta_{23} & \delta_{24} & \delta_{25} \\
0 & 0 & \delta_{33} & \delta_{34} & \delta_{35} \\
0 & 0 & 0 & \delta_{44} & \delta_{45} \\
0 & 0 & 0 & 0 & \delta_{55}
\end{pmatrix}$$

Figura 3.3: Representación, $\delta_{25} = V([2,5]) - V([2,4]) - V([3,5]) + V([3,4])$

La importancia del resultado anterior se debe a que los valores de V ya son conocidos, y poder conocer de manera sencilla y explicita los valores de cada una de las constantes δ puede ser útil a la hora de calcular soluciones.

3.3. Jugadores Nulos y Sustitutos en los Juegos de Río

Buscamos redefinir los conceptos de jugadores nulos y sustitutos en el contexto de los juegos de río, para posteriormente encontrar soluciones que satisfagan los axiomas de simetría, nulidad, eficiencia y linealidad.

Recordemos que en un juego cooperativo usual (N, v), el jugador i es nulo si $v(S \cup \{i\}) = v(S)$ para todo $S \subset N \backslash \{i\}$. En los juegos de río, si $S \in \mathfrak{C}_N$, $V(S \cup \{i\})$ sólo tiene sentido si $S \cup \{i\}$ es consecutivo, teniendo en cuenta esto podríamos redefinir el axioma de nulidad para juegos de río de la siguiente manera: el jugador i es nulo en el juego de río $(\mathfrak{C}_N, V)$, si para todo $j, k \in N$ tal que $k < i < j$ se satisface que:

$$\begin{aligned} V([i,j]) &= V([i+1,j]) \\ V([k,i]) &= V([k,i-1]). \end{aligned}$$

En el juego (N, v), los jugadores i, j son sustitutos si: $v(S \cup \{i\}) = v(S \cup \{j\})$ para todo $S \subset N \backslash \{i, j\}$. Tomemos ahora el juego de río $(\mathfrak{C}_N, V)$ y $S \in \mathfrak{C}_N$, en este caso $V(S \cup \{i\}), V(S \cup \{j\})$ sólo tienen sentido si $S \cup \{i\}, S \cup \{j\} \in \mathfrak{C}_N$, entonces suponiendo que $i < j$, S debe ser la coalición $[i+1, j-1]$. Por lo tanto podríamos decir que los jugadores i, j son sustitutos en el juego de río V si se satisface:

$$V([i, j-1]) = V([i+1, j]).$$

Estas definiciones naturales de jugadores nulos y sustitutos resultan ser no compatibles con el axioma de eficiencia. Por ejemplo tomemos $N = \{1, 2, 3\}$ y consideremos el juego de unanimidad U_{23}, para los jugadores $1, 2$ se cumple que:

$$\begin{aligned} U_{23}([1, 2-1]) &= U_{23}([1,1]) = 0 \\ U_{23}([1+1, 2]) &= U_{23}([2,2]) = 0, \end{aligned}$$

entonces $1, 2$ son sustitutos en U_{23}. De manera similar consideremos a los jugadores $2, 3$, tenemos que:

$$\begin{aligned} U_{23}([2,3-1]) &= U_{23}([2,2]) = 0 \\ U_{23}([2+1,3]) &= U_{23}([3,3]) = 0, \end{aligned}$$

es decir $2,3$ son sustitutos en U_{23}. Si φ es una solución para los juegos de río que satisface el axioma de simetría se debe cumplir:

$$\varphi_1(U_{23}) = \varphi_2(U_{23}) = \varphi_3(U_{23}).$$

Por otra parte para el jugador 1,

$$\begin{aligned} U_{23}([1,2]) &= U_{23}([2,2]) = 0 \\ U_{23}([1,3]) &= U_{23}([2,3]) = 1, \end{aligned}$$

por lo que 1 es nulo en U_{23}. Entonces si φ también satisface el axioma de nulidad:

$$\varphi_1(U_{23}) = \varphi_2(U_{23}) = \varphi_3(U_{23}) = 0.$$

Si φ además es eficiente se debería tener que:

$$\sum_{i \in N} \varphi_i(U_{23}) = U_{23}(N) = 1,$$

pero teníamos que

$$\sum_{i \in N} \varphi_i(U_{23}) = 0.$$

Esto quiere decir que si se implementan las definiciones de jugadores nulos y sustitutos que se dieron anteriormente, no existen soluciones que satisfagan los axiomas de nulidad, simetría y eficiencia. Además en este ejemplo los jugadores 1 y 3 no son sustitutos, aunque 1 es sustituto con 2 y 2 es sustituto con 3, lo que implica que ser sustituto como pretendíamos definir arriba no es una propiedad transitiva. Procederemos ahora a buscar definiciones distintas de jugadores nulos y sustitutos para los juegos de río.

Hemos considerado que un jugador es nulo en los juegos de río, si al entrar como extremo de cualquier coalición la valía de esta no cambia. Podemos considerar en cambio, que un jugador es nulo si se satisface la condición anterior, y además pedir que cuando este jugador una coaliciones consecutivas, lo que obtengan al estar unidos sea igual a la suma de lo que consiguen por separado. Siguiendo esta idea proponemos una definición de nulidad en juegos de río diferente.

Definición 3.8 (Nulidad Juegos de Río)**.** *Sea $k \in N$, k es **nulo en el juego de río** $(\mathfrak{C}_N, V)$, si para toda coalición $[a,b] \in \mathfrak{C}_N$ con $k \in [a,b]$ y $[a,k-1],[k+1,b] \in \mathfrak{C}_N$ se cumple:*

$$\begin{aligned} V([a,b]) &= V([a,k-1]) + V([k+1,b]) \quad \text{si } k \neq a \text{ y } k \neq b \\ V([k,b]) &= V([k+1,b]) \quad \text{si } k = a \\ V([a,k]) &= V([a,k-1]) \quad \text{si } k = b. \end{aligned}$$

Nota: En lo que sigue, si en el juego de río $(\mathfrak{C}_N, V)$ aparece la expresión $V([j,i])$ con $j > i$, no se tomará en cuenta. Esto con el fin de facilitar la escritura.

Proposición 3.9. *Sea $[i,j] \in \mathfrak{C}_N$, k es nulo en el juego de unanimidad $(\mathfrak{C}_N, U_{ij})$ si y sólo si $k \notin [i,j]$.*

Dem: $\Leftarrow$) Sean $[i,j] \in \mathfrak{C}_N$ y $k \notin [i,j]$, debemos ver que

$$U_{ij}([a,b]) = U_{ij}([a,k-1]) + U_{ij}([k+1,b]) \tag{3.3}$$

para todo a,b con $a < k < b$, y que,

$$U_{ij}([k,b]) = U_{ij}([k+1,b]) \quad \text{si } k = a \tag{3.4}$$

$$U_{ij}([a,k]) = U_{ij}([a,k-1]) \quad \text{si } k = b. \tag{3.5}$$

Para $k \neq a,b$:

- Si $[i,j] \nsubseteq [a,b]$, dado que $k \in [a,b]$, $[i,j] \nsubseteq [a,k-1]$ e $[i,j] \nsubseteq [k+1,b]$ entonces todos los términos en (3.3) son cero.

- Si $[i,j] \subset [a,b]$, por hipótesis $k < i$ o $k > j$. En el primer caso, $U_{ij}([a,k-1]) = 0$ y $U_{ij}([k+1,b]) = 1$; en el segundo caso, $U_{ij}([a,k-1]) = 1$ y $U_{ij}([k+1,b]) = 0$. Dado que $U_{ij}([a,b]) = 1$, se tiene que (3.3) es uno.

Para $k = a$,

- Si $[i,j] \not\subseteq [k,b]$, entonces $[i,j] \not\subseteq [k+1,b]$, por lo que los términos en (3.4) son cero.

- Si $[i,j] \subset [k,b]$, dado que $k \notin [i,j]$, $[i,j] \subset [k+1,b]$, entonces los términos en (3.4) son uno.

De manera similar se puede probar que si $k = b$ se satisface (3.5). Por lo tanto si $k \notin [i,j]$, k es nulo en U_{ij}.

$\Rightarrow$) Supongamos ahora que $i \leq k \leq j$. Tomando $[a,b] = [i,j]$, se satisface que $U_{ij}([i,j]) = 1$. Pero $U_{ij}([i,k-1]) = U_{ij}([k+1,j]) = 0$, es decir k no es nulo en U_{ij}. $\square$

Proponemos la siguiente definición de jugadores sustitutos en los juegos de río,

Definición 3.10 (Jugadores Sustitutos en Juegos de Río)**.** *Sean $l,k \in N$ con $1 < k < l < n$, diremos que k,l son jugadores* ***sustitutos en el juego de río*** *$(\mathfrak{C}_N, V)$, si se cumple una de las siguientes dos condiciones:*

1.

$$\begin{aligned} V([1,k-1]) &= V([l+1,n]) \\ V([k+1,n]) &= V([1,l-1]) \end{aligned}$$

2.

$$\begin{aligned} V([1,k-1]) &= V([1,l-1]) \\ V([k+1,n]) &= V([l+1,n]). \end{aligned}$$

El jugador 1 es sustituto con l si:

$$V([2,n]) = V([1,l-1]) \quad o \quad V([2,n]) = V([l+1,n]),$$

y n es sustituto con l si:

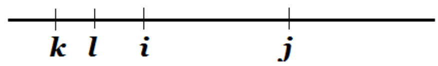
$$V([l+1,n]) = V([1,n-1]) \quad o \quad V([1,l-1]) = V([1,n-1]).$$

Ahora buscamos cuales son los jugadores sustitutos en los juegos de unanimidad,

Proposición 3.11. *Para $[i,j] \in \mathfrak{C}_N$, k,l son jugadores sustitutos en el juego de unanimidad $(\mathfrak{C}_N, U_{ij})$ si y sólo si $k,l \notin [i,j]$ o $k,l \in [i,j]$.*

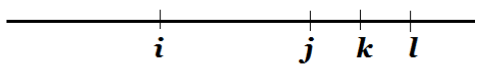
Dem: Sean $k,l \notin [i,j]$ con $k < l$,

- Si $k < l < i$



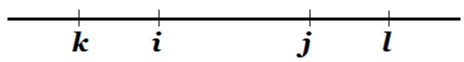
$$\begin{aligned} U_{ij}([1,k-1]) &= U_{ij}([1,l-1]) = 0 \\ U_{ij}([k+1,n]) &= U_{ij}([l+1,n]) = 1 \end{aligned}$$

- Si $j < k < l$



$$\begin{aligned} U_{ij}([1,k-1]) &= U_{ij}([1,l-1]) = 1 \\ U_{ij}([k+1,n]) &= U_{ij}([l+1,n]) = 0 \end{aligned}$$

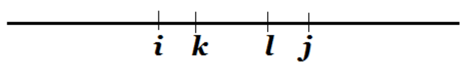
- Si $k < i$, $j < l$



$$\begin{aligned} U_{ij}([1,k-1]) &= U_{ij}([l+1,n]) = 0 \\ U_{ij}([k+1,n]) &= U_{ij}([1,l-1]) = 1 \end{aligned}$$

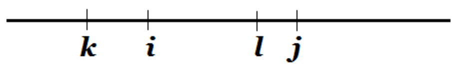
Concluimos que si $k,l \notin [i,j]$, entonces son sustitutos.

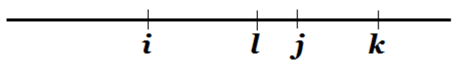
Sean $k,l \in [i,j]$,



$$U_{ij}([1,k-1]) = U_{ij}([1,l-1]) = U_{ij}([l+1,n]) = U_{ij}([k+1,n]) = 0,$$

entonces k,l son sustitutos en U_{ij}.
Si $k \notin [i,j]$ y $l \in [i,j]$





$$U_{ij}([l+1,n]) = U_{ij}([1,l-1]) = 0,$$

mientras que si $k < i$:

$$U_{ij}([1,k-1]) = 0 \quad y \quad U_{ij}([k+1,n]) = 1,$$

o, si $k > j$:

$$U_{ij}([1,k-1]) = 1 \quad y \quad U_{ij}([k+1,n]) = 0,$$

por lo tanto k,l no son sustitutos. $\square$

3.4. Solución Juegos de Río

Con las definiciones anteriores de jugadores sustitutos y nulos, hemos logrado caracterizar una única solución que satisface los axiomas de nulidad, eficiencia, simetría y linealidad.

Teorema 3.12. *Existe una única solución lineal $\varphi : G_{\mathfrak{C}} \to \mathbb{R}^n$, que satisface los axiomas de eficiencia, simetría y nulidad para los juegos de río. Para cada $k \in N$, está dada por:*

$$\varphi_k(V) = \sum_{[i,j]\ni k} \frac{V([i,j]) - V([i+1,j]) - V([i,j-1]) + V([i+1,j-1])}{j-i+1} \tag{3.6}$$

Dem: Supongamos que $\varphi : G_{\mathfrak{C}} \to \mathbb{R}^n$ es una solución lineal que satisface los axiomas de eficiencia, simetría y nulidad. Dado que los jugadores nulos en el juego de unanimidad $(\mathfrak{C}_N, U_{ij})$, son los que no pertenecen a la coalición $[i,j]$, se debe satisfacer:

$$\varphi_k(U_{ij}) = 0 \qquad\qquad si \quad k \notin [i,j],$$

por el axioma de simetría,

$$\varphi_k(U_{ij}) = \varphi_l(U_{ij}) \qquad si \quad k,l \in [i,j],$$

y además por el axioma de eficiencia,

$$1 = U_{ij}(N) = \sum_{k\in N} \varphi_k(U_{ij}) = \sum_{k\in[i,j]} \varphi_k(U_{ij}).$$

De acá que,

$$\varphi_k(U_{ij}) = \frac{1}{j-i+1} \qquad si\ k \in [i,j].$$

Teniendo en cuenta que la solución φ es lineal y que los juegos de unanimidad forman una base para los juegos de río,

$$\begin{aligned}
\varphi_k(V) &= \varphi_k\left(\sum_{[i,j]\in\mathfrak{C}_N} \delta_{ij} U_{ij}\right)\\
&= \sum_{[i,j]\in\mathfrak{C}_N} \delta_{ij}\varphi_k(U_{ij})\\
&= \sum_{\{[i,j]\in\mathfrak{C}_N|\ k\in[i,j]\}} \delta_{ij}\varphi_k(U_{ij})\\
&= \sum_{\{[i,j]\in\mathfrak{C}_N|\ k\in[i,j]\}} \frac{\delta_{ij}}{j-i+1}.
\end{aligned}$$

Por la expresión hallada anteriormente para δ_{ij} (3.2), tenemos que:

$$\varphi_k(V) = \sum_{[i,j]\ni k} \frac{V([i,j]) - V([i+1,j]) - V([i,j-1]) + V([i+1,j-1])}{j-i+1}$$

□

Ejemplo 3.13. Sea $N = \{1,2,3,4\}$ el conjunto de jugadores y $(\mathfrak{C}_N, V)$ el juego de río donde $V : \mathfrak{C}_N \to \mathbb{R}$, que está dado por:

$$\begin{array}{lll}
V([1,1]) = 1 & V([1,2]) = 4 & V([1,2,3]) = 15\\
V([2,2]) = 2 & V([2,3]) = 7 & V([2,3,4]) = 16\\
V([3,3]) = 3 & V([3,4]) = 8 & V(N) = 20\\
V([4,4]) = 3 & &
\end{array}$$

Utilizando (3.6) encontramos que:

$$\varphi(V) = \left(\frac{5}{2}, \frac{35}{6}, \frac{22}{3}, \frac{13}{3}\right).$$

Supongamos que extendemos el anterior juego $(\mathfrak{C}_N, V)$ a 2^n haciendo $V(S) = 0$ si $S \notin \mathfrak{C}_N$, la solución dada por el valor de Shapley aplicada a este juego, que se denotará por $Sh(V)$ es:

$$Sh(V) = \left(\frac{11}{12}, \frac{31}{4}, \frac{35}{4}, \frac{31}{12}\right).$$

Recordemos las soluciones que se vieron en el capitulo 2: tomando el orden usual $\{1, 2, ..., n\}$, f^u denota la contribución marginal a los predecesores, f^l denota la contribución marginal a los sucesores y f^e es el promedio entre f^u y f^l. Calculando estas soluciones:

$$\begin{aligned} f^u(V) &= (1, 3, 11, 5) \\ f^l(V) &= (4, 8, 5, 3) \\ f^e(V) &= \left(\frac{5}{2}, \frac{11}{2}, 8, 4\right), \end{aligned}$$

que no coincide con $\varphi(V)$.

3.5. Potencial en Juegos de Río

Una solución que resulta deseable, es pagar a cada jugador su contribución marginal a la gran coalición $v(N) - v(N\backslash\{i\})$, tal y como se vio en el primer capítulo. El inconveniente que puede ocurrir al implementar esta solución, es que los recursos disponibles $v(N)$ no sean suficientes, o que después de realizar el pago no se haya repartido $v(N)$ en su totalidad.

Sergiu Hart y Andreu Mas-Colell [7] proponen la idea del potencial, definido como una familia de funciones $P : G^S \to \mathbb{R}$ con $P(\emptyset, v) = 0$, que satisface $\sum_{i \in S} D^i P(S, v) = v(S)$ para todo juego (S, v) con $S \subset N$, donde $D^i P(S, v) = P(S, v) - P(S\backslash\{i\}, v)$.

Para el caso de los juegos de río queremos proponer la idea de potencial. Dado un juego de río $(\mathfrak{C}_N, V)$ y $[a, b] \in \mathfrak{C}_N$, definimos el *subjuego de río* $([a, b], V)$, como el juego de río que resulta al restringir $(\mathfrak{C}_N, V)$ a los subconjuntos consecutivos de $[a, b]$.

Definición 3.14. *Sea $P : G_{\mathfrak{C}} \to \mathbb{R}$, para cada $i \in N$ definimos la* ***diferencia de potencial*** *como:*

- *Si $i = 1$ o $i = n$:*

$$\begin{aligned} D^1P([1,n],V) &= P([1,n],V) - P([2,n],V) && (3.7) \\ D^nP([1,n],V) &= P([1,n],V) - P([1,n-1]),V). && (3.8) \end{aligned}$$

- *Para $i \neq 1, n$:*

$$D^iP([1,n],V) = P([1,n],V) - P([1,i-1],V) - P([i+1,n],V). \quad (3.9)$$

Si el jugador i con $1 < i < n$, deja de hacer parte de la gran coalición, esta quedará dividida en dos coaliciones consecutivas: $[1, i-1]$ e $[i+1, n]$, por lo que es razonable que la diferencia de potencial en este caso se exprese de la forma (3.9). También se puede usar esta definición de diferencia de potencial para subjuegos $([a,b],V)$, intercambiando $[1,n]$ por $[a,b]$.

Definición 3.15. *La familia de funciones $P : G_{\mathfrak{C}} \to \mathbb{R}$ con $P(\emptyset, V) = 0$ es llamada* ***potencial en juegos de río*** *si se satisface,*

$$\sum_{i \in [a,b]} D^iP([a,b],V) = V([a,b]) \quad (3.10)$$

para todo $[a,b] \in \mathfrak{C}_N$ y todo juego de río $(\mathfrak{C}_N, V)$.

Nota: Nos referiremos en lo que sigue al potencial de juegos de río como potencial, también en lugar de escribir $P([i,j],V)$ o $D^iP([i,j],V)$, solamente escribiremos $P([i,j])$ o $D^iP([i,j])$ respectivamente, a menos que sea necesario hacer referencia explicita al juego V.

Si queremos construir un potencial $P : G_{\mathfrak{C}} \to \mathbb{R}$ dado un juego $(\mathfrak{C}_N, V)$, debemos comenzar por definir $P(\emptyset) = 0$. Luego el potencial puede ser definido en todos los subconjuntos de cardinalidad 1, para ello usamos (3.10) aplicado a $[a,b] = [i,i]$:

$$V([i,i]) = D^iP([i,i]) = P([i,i]) - P(\emptyset),$$

necesariamente tenemos que definir:

$$P([i,i]) = V([i,i]).$$

Posteriormente queremos definir P en conjuntos de cardinalidad 2, que son de la forma $[i, i+1]$:

$$\begin{aligned} V([i,i+1]) &= D^i P([i,i+1]) + D^{i+1} P([i,i+1]) \\ &= P([i,i+1]) - P([i+1,i+1]) + P([i,i+1]) - P([i,i]) \\ &= 2P([i,i+1]) - P([i,i]) - P([i+1,i+1]). \end{aligned}$$

Así que necesariamente debemos definir,

$$P([i,i+1]) = \frac{V([i,i+1]) + P([i,i]) + P([i+1,i+1])}{2}.$$

Supongamos que P ha sido definido de manera única en subconjuntos de cardinalidad m, sea $[i,j]$ de cardinalidad $m+1$. Se debe cumplir que,

$$V([i,j]) = \sum_{k \in [i,j]} D^k P([i,j]), \tag{3.11}$$

donde

$$D^k([i,j]) = \begin{cases} P([i,j]) - P([i+1,j]) & si \quad k = i \\ P([i,j]) - P([i,k-1]) - P([k+1,j]) & si \quad i < k < j \\ P([i,j]) - P([i,j-1]) & si \quad k = j \end{cases}$$

Despejamos $P([i,j])$ de la ecuación (3.11), obteniendo:

$$P([i,j]) = \frac{V([i,j]) + \sum_{k=i}^{j-1} P([i,k]) + \sum_{k=i+1}^{j} P([k,j])}{j-i+1}. \tag{3.12}$$

Así queda determinado de manera única el potencial para todo $[i,j] \in \mathfrak{C}_N$.

Teorema 3.16. *Para el juego de río $(\mathfrak{C}_N, V)$ existe una única función de potencial P. Además, la solución dada por la diferencia de potencial coincide con:*

$$\varphi_k(V) = \sum_{[i,j] \ni k} \frac{V([i,j]) - V([i+1,j]) - V([i,j-1]) + V([i+1,j-1])}{j-i+1}.$$

Dem: Sea $(\mathfrak{C}_N, V)$ un juego de río y definiendo $P(\emptyset) = 0$. Para ver que el potencial existe y es único, se puede hallar como se explicó anteriormente, de forma recursiva con ayuda de la ecuación (3.12) variando la cardinalidad de $[i, j]$.

Proponemos la función $Q : G_{\mathfrak{C}} \to \mathbb{R}$, dada por:

$$Q([a,b]) = \sum_{[i,j]\subset[a,b]} l_{ij},$$

para todo $[a, b] \in \mathfrak{C}_N$, donde $l_{ij} = \frac{\delta_{ij}}{j-i+1}$ y δ_{ij} son las constantes de la base dadas en el teorema 3.6.
Veremos que Q es potencial: definimos $Q([1, 0]) = Q([n+1, n]) = 0$, entonces:

$$\begin{aligned}
\sum_{k\in N} D^k Q([1,n]) &= \sum_{k\in N} Q([1,n]) - Q([1,k-1]) - Q([k+1,n]) \\
&= \sum_{k\in N} \left[\sum_{[i,j]\subset[1,n]} l_{ij} - \sum_{[i,j]\subset[1,k-1]} l_{ij} - \sum_{[i,j]\subset[k+1,n]} l_{ij} \right] \\
&= \sum_{k\in N} \sum_{\{[i,j]\subset N|\ k\in[i,j]\}} l_{ij} \\
&= \sum_{k\in N} \sum_{\{[i,j]\subset N|\ k\in[i,j]\}} \frac{\delta_{ij}}{j-i+1} \qquad \text{por (3.6)} \\
&= \sum_{k\in N} \varphi_k(V) \qquad \text{por la eficiencia de } \varphi \\
&= V(N).
\end{aligned}$$

Por lo tanto Q es potencial para el juego $(\mathfrak{C}_N, V)$ y dada la unicidad, Q coincide con P.

Veamos ahora que el potencial es igual a la solución φ:

$$\begin{aligned}
D^k P([1,n]) &= P([1,n]) - P([1,k-1]) - P([k+1,n]) \\
&= \sum_{[i,j]\subset[1,n]} l_{ij} - \sum_{[i,j]\subset[1,k-1]} l_{ij} - \sum_{[i,j]\subset[k+1,n]} l_{ij} \\
&= \sum_{\{[i,j]\subset[1,n] |\ k\in[i,j]\}} l_{ij} \\
&= \sum_{\{[i,j]\subset[1,n] |\ k\in[i,j]\}} \frac{\delta_{ij}}{j-i+1} \\
&= \varphi_k(V). \quad \square
\end{aligned}$$

3.6. Grafos Lineales y Juegos de Río

A continuación mostraremos una conexión entre los juegos de río y los juegos en forma de grafos lineales.

Sean $N = \{1,2,...,n\}$ el conjunto de agentes, $(\mathfrak{C}_N, V)$ un juego de río y $L = \{\{1,2\},\{2,3\},...,\{n-1,n\}\}$ el grafo lineal. Consideremos el juego con estructura de cooperación $V/L : 2^n \to \mathbb{R}$, donde:

$$V/L\ (S) = \sum_{T\in S/L} V(T)$$

y

$$S/L = \{\{i|i \textit{ está conectado a } j \textit{ en } S \textit{ por } L\}|j\in S\},$$

equivalentemente S/L es el conjunto de subconjuntos consecutivos en S. Por ejemplo si $N = \{1,2,...,15\}$ y $S = \{1,2,5,6,7,9\}$, entonces

$$V/L\ (S) = V([1,2]) + V([5,7]) + V([9,9]).$$

Dado que V/L es un juego cooperativo usual, es posible aplicar el valor de Shapley a este juego.

Teorema 3.17. *La solución dada por el valor de Shapley para el juego $(N, V/L)$ coincide con la solución dada por φ:*

$$\varphi_k(V) = \sum_{[i,j]\ni k} \frac{V([i,j]) - V([i+1,j]) - V([i,j-1]) + V([i+1,j-1])}{j-i+1}$$

.

Dem: Recordemos que si $v \in G^N$, puede ser escrito de la forma:

$$v = \sum_{\{T|\ \emptyset \neq T \subset N\}} \gamma_T W_T \quad \gamma_T \in \mathbb{R},$$

y si $V \in G_{\mathfrak{C}}$

$$V = \sum_{\{T|\ \emptyset \neq T \in \mathfrak{C}_N\}} \delta_T U_T \quad \delta_T \in \mathbb{R},$$

donde W_T, U_T son los juegos de unanimidad definidos para los juegos cooperativos usuales y para los juegos de río respectivamente.

Veamos que si $S \notin \mathfrak{C}_N$, para el juego V/L, $\gamma_S = 0$. Sea $i \in N$, por la definición de V/L,

$$V/L\ (\{i\}) = V(\{i\}),$$

ahora escribiendo $V/L\ (\{i\})$ en términos de los juegos de unanimidad W_T,

$$V/L\ (\{i\}) = \sum_{\{T|\ \emptyset \neq T \subset \{i\}\}} \gamma_T W_T = \gamma_{\{i\}}.$$

Sea $\{i, j\} \notin \mathfrak{C}_N$,

$$V/L(\{i, j\}) = V(\{i\}) + V(\{j\}) = \gamma_{\{i\}} + \gamma_{\{j\}}$$

y escribiendo el juego en términos de los juegos de unanimidad,

$$V/L\ (\{i, j\}) = \sum_{\{S|\ \emptyset \neq S \subset \{i,j\}\}} \gamma_S = \gamma_{\{i\}} + \gamma_{\{j\}} + \gamma_{\{i,j\}},$$

de acá que $\gamma_{\{i,j\}} = 0$.

Supongamos que para todo $S \notin \mathfrak{C}_N$ de cardinalidad $s < k$ se satisface que $\gamma_S = 0$. Sea $T \notin \mathfrak{C}_N$ con $t = k$, y sean $T_1, T_2 \subset T$ tales que $T_1 \cap T_2 = \emptyset$ y $T_1 \cup T_2 = T$, entonces:

$$V/L\ (T) = V/L\ (T_1) + V/L\ (T_2),$$

expresando $V/L\ (T)$ en términos de los juegos de unanimidad tenemos que:

$$V/L\ (T) = \sum_{\{R|\ \emptyset \neq R \subset T\}} \gamma_R,$$

despejando para γ_T,

$$\begin{aligned}
\gamma_T &= V/L\ (T) - \sum_{\{R|\ \emptyset \neq R \subsetneq T\}} \gamma_R \\
&= V/L\ (T_1) + V/L\ (T_2) - \sum_{\{R|\ \emptyset \neq R \subsetneq T\}} \gamma_R \\
&= \sum_{\{R|\ \emptyset \neq R \subset T_1\}} \gamma_R + \sum_{\{R|\ \emptyset \neq R \subset T_2\}} \gamma_R - \sum_{\{R|\ \emptyset \neq R \subsetneq T\}} \gamma_R \\
&= \sum_{\{R|\ \emptyset \neq R \subset T_1,\ R \in \mathfrak{C}_N\}} \gamma_R + \sum_{\{R|\ \emptyset \neq R \subset T_2,\ R \in \mathfrak{C}_N\}} \gamma_R - \sum_{\{R|\ \emptyset \neq R \subsetneq T,\ R \in \mathfrak{C}_N\}} \gamma_R \\
&= 0.
\end{aligned}$$

Sea $S \in \mathfrak{C}_N$, es decir $S = [i, j]$ con $i < j$, tenemos entonces que

$$V/L\ ([i, j]) = \sum_{\{T|\ \emptyset \neq T \subset [i,j],\ T \in \mathfrak{C}_N\}} \gamma_T,$$

por la demostración del teorema 3.6 se cumple que

$$\delta_S = \gamma_S \quad si \qquad \emptyset \neq S \in \mathfrak{C}_N.$$

Denotando por Sh al valor de Shapley y por φ a la solución encontrada para los juegos de río, sabemos que

$$\begin{aligned}
Sh_i(v) &= \sum_{S \ni i} \frac{\gamma_S}{s} \\
\varphi_i(V) &= \sum_{\{S|\ i \in S \in \mathfrak{C}_N\}} \frac{\delta_S}{s}
\end{aligned}$$

Pero si $v = V/L$, se cumple que

$$Sh_i(V/L) = \sum_{\{S|\ i \in S \in \mathfrak{C}_N\}} \frac{\delta_S}{s} = \varphi_i(V),$$

como se quería demostrar. $\square$

Dado que el valor de Shapley para el juego $(N, V/L)$ es el valor de Myerson, podemos decir ahora que la solución $\varphi(V)$ satisface que es una regla de asignación estable, dando una manera más de caracterizarla.

Capítulo 4

Conclusiones

En este trabajo nos inspiramos en la idea de juegos cooperativos en forma de función característica, para dar una solución al problema de compartir los beneficios dados por un río. Comenzamos por definir una nueva clase de juegos, llamados los juegos de río, que denotamos por $(\mathfrak{C}_N, V)$. La diferencia de estos juegos respecto a los juegos usuales es que su dominio son solamente coaliciones consecutivas del conjunto de agentes.

Buscamos una solución tipo Shapley adaptada a los juegos de río, para ello redefinimos los conceptos de jugadores nulos y sustitutos. Nuestro primer acercamiento fue bastante similar a las definiciones usuales, pero resultaron no ser coherentes con los axiomas de simetría, nulidad, eficiencia y linealidad. Después de varios intentos, logramos encontrar definiciones de jugadores nulos y sustitutos que son coherentes con los axiomas del valor de Shapley. La definición de jugador nulo que se implementa, dice que un jugador es nulo en los juegos de río, si al entrar como extremo de cualquier coalición la valía de esta no cambia, y además pide que cuando este jugador une coaliciones consecutivas, lo que obtengan al estar unidos sea igual a la suma de lo que consiguen por separado. En cuanto a los jugadores sustitutos, decimos que k, l con $k < l$ son jugadores sustitutos si se cumple una de las siguientes dos condiciones: i) La valía de la coalición de predecesores de k, es igual a la valía de la coalición de sucesores de l y la valía de la coalición de sucesores de k es igual a la valía de la coalición de predecesores de l; ii) La valía de la coalición de predecesores de k es igual a la valía de predecesores de l y la valía de la coalición de sucesores de k es igual a la valía de la coalición de sucesores de l. Con esta definición de jugadores sustitutos, no hay una interpretación clara en el problema del río, aunque teóricamente estas definiciones son interesantes, ya que hacen posible encontrar una solución tipo Shapley que satisface los axiomas de eficiencia, nulidad, simetría y linealidad, que está dada por:

$$\varphi_k(V) = \sum_{[i,j]\ni k} \frac{\delta_{ij}}{|[i,j]|},$$

equivalentemente, usando la expresión explicita que encontramos para δ_{ij}, obtenemos:

$$\varphi_k(V) = \sum_{[i,j]\ni k} \frac{V([i,j]) - V([i+1,j]) - V([i,j-1]) + V([i+1,j-1])}{j-i+1}. \tag{4.1}$$

Posteriormente, quisimos implementar una versión del potencial adaptada a los juegos de río, principalmente porque con el potencial solo es necesario el axioma de eficiencia y esta es una condición bastante deseable para el caso del río.

Definimos la diferencia de potencial como:

- Si $i = 1$ o $i = n$

$$D^1P([1,n],V) = P([1,n],V) - P([2,n],V) \tag{4.2}$$
$$D^nP([1,n],V) = P([1,n],V) - P([1,n-1],V) \tag{4.3}$$

- Para $i \neq 1, n$

$$D^iP([1,n],V) = P([1,n],V) - P([1,i-1],V) - P([i+1,n],V) \tag{4.4}$$

Esta definición aún sigue la idea de contribuciones marginales que inspiran el potencial; por ejemplo, consideremos al agente $i \neq 1, n$, si deja de hacer parte de la gran coalición, esta queda dividida en dos coaliciones consecutivas, las cuales son $[1, i-1]$ e $[i+1, n]$, por lo que la ecuación (4.4) es la contribución marginal a la gran coalición del agente i, respecto a P. Logramos demostrar que el potencial es único y además que la solución dada por la diferencia de potencial coincide con nuestra solución φ. Recordemos que para hallar la solución dada por la diferencia de potencial, primero es necesario hallar el potencial de todas las coaliciones consecutivas y posteriormente calcular la diferencia de potencial de cada jugador. Pero con la expresión (4.1), solo son necesarias las valías de las coaliciones para hallar los pagos de cada jugador.

Posteriormente, dado un juego de río $(\mathfrak{C}_N, V)$ y el grafo lineal $L = \{\{1,2\},\{2,3\},...,\{n-1,n\}\}$, consideramos el juego $V/L : 2^n \to \mathbb{R}$ donde:

$$V/L\ (S) = \sum_{T \in S/L} V(T).$$

Pudimos concluir que el valor de Myerson para el juego V/L coincide con nuestra solución φ. Este resultado es interesante, ya que el dominio de los dos juegos es diferente, y podemos ahora decir que φ satisface que es una regla de asignación justa.

Tanto el valor de Shapley, como el potencial o el valor de Myerson, son conceptos esenciales en la teoría de juegos cooperativos, los cuales han sido usado en diferentes clases de problemas, dando buenos resultados. Decidimos adaptar estas soluciones para el caso de los juegos de río, donde solo se consideran las coaliciones consecutivas del conjunto de agentes. Como resultado logramos caracterizar la solución φ de tres maneras diferentes, dándole un trasfondo teórico interesante.

Como trabajo futuro, se podrían usar ideas similares a las expuestas anteriormente, para el caso de un río con múltiples manantiales o con varias desembocaduras.

Bibliografía

[1] S. Ambec and Y. Sprumont. Sharing a river. *Journal of Economic Theory*, 107(2):453–462, 2002.

[2] S. Barrett. Self-enforcing international environmental agreements. *Oxford Economic Papers*, pages 878–894, 1994.

[3] S. Béal, A. Ghintran, É. Rémila, and P. Solal. The river sharing problem: A survey. *International Game Theory Review*, 15(03):1340016, 2013.

[4] R. Beard et al. The river sharing problem: A review of the technical literature for policy economists. *MPRA Paper*, 34382, 2011.

[5] R. H. Coase. *The problem of social cost.* Springer, 1960.

[6] T. S. Driessen. *Cooperative games, solutions and applications*, volume 3. Springer Science & Business Media, 2013.

[7] S. Hart and A. Mas-Colell. Potential, value, and consistency. *Econometrica: Journal of the Econometric Society*, pages 589–614, 1989.

[8] R. B. Myerson. Graphs and cooperation in games. *Mathematics of operations research*, 2(3):225–229, 1977.

[9] I. Parrachino, A. Dinar, and F. Patrone. Cooperative game theory and its application to natural, environmental, and water resource issues: 3. application to water resources. *Application to Water Resources (November 2006). World Bank Policy Research Working Paper*, (4074), 2006.

[10] F. S. Sánchez. *Introducción a la matemática de los juegos.* Siglo XXI, 1993.

[11] L. S. Shapley. A value for n-person games. *Annals of Mathematics Study*, 2:307–317, 1953.

[12] M. Suzuki and M. Nakayama. The cost assignment of the cooperative water resource development: a game theoretical approach. *Management Science*, 22(10):1081–1086, 1976.

[13] R. van den Brink, G. van der Laan, and V. Vasil'ev. Component efficient solutions in line-graph games with applications. *Economic Theory*, 33(2):349–364, 2007.