Centro de Investigación en Matemáticas, A.C.

CIMAT

“Funtores Derivados”

Trabajo de tesis realizado para obtener el título de

Maestro en Ciencias con especialidad en Matemáticas Básicas

Presentado por: **Alejandra Sarina Córdova Martínez**
Sinodal: **Dr. Herbert Kanarek Blando**
Sinodal: **Dr. José María Cantarero López**
Director de tesis: **Dr. Pedro Luis del Ángel Rodríguez**

Guanajuato, Guanajuato, 28 de febrero de 2014

Agradecimientos

Por el apoyo económico que recibí para realizar mis estudios de maestría al Consejo Nacional de Ciencia y Tecnología (CONACyT). También agradezco al Centro de Investigación en Matemáticas, A.C. (CIMAT) por el apoyo económico brindado para terminar mi tesis de maestría, así como el proporcionar los recursos necesarios y un ambiente adecuado para el aprendizaje.

Por dedicarme el tiempo necesario para realizar esta tesis, por su paciencia, sus enseñanzas y apoyo, agradezco al Dr. Pedro Luis del Ángel Rodríguez. Por fungir como sinodales de esta tesis, por sus enseñanzas y paciencia, agradezco al Dr. José María Cantarero López y al Dr. Herbert Kanarek Blando.

A mis padres Julián Francisco Córdova Ruíz y Perla Norma Martínez Galindo por apoyarme durante mis estudios de maestría, por su amor y confianza. A mis hermanos Amaranta Perla y Julián Arturo por su apoyo y sus ánimos.

A mis compañeros y amigos por los consejos, pláticas y buenos momentos. También a todos los profesores que tuve el gusto de conocer, agradezco el apoyo y las enseñanzas que me brindaron con tanta amabilidad y paciencia.

Índice general

Introducción

Para estudiar objetos geométricos se desarrollaron técnicas algebraicas como la homología y asociado a esta tenemos su dual que es la cohomología. Las cuales nos dan propiedades de los objetos que estamos estudiando. El álgebra homológica es una herramienta usada para estudiar propiedades algebraicas y topológicas.

El objetivo de esta tesis es introducir las nociones de cohomología y ciertas categorías especiales llamadas categorías derivadas, para así definir funtores entre ellas. Además veremos resultados referentes a la cohomología que nos mostrarán algunas de las propiedades o características de los objetos a estudiar.

La teoría de categorías fue introducida por por Samuel Eilenberg y Saunders Mac Lane en 1942-1945. Se vió que con esta teoría era posible axiomatizar la parte algebraica de las construcciones de la topología algebraica. Esto se realizó con la ayuda de varios matemáticos a lo largo de la primera mitad de la década de los 1950. En 1957 Grothendieck introduce las categorías abelianas. La noción de categoría derivada fue introducida por Jean-Louis Verdier en sus notas de 1963 [9], quien trabajó bajo la dirección de Alexander Grothendieck.

Las categorías derivadas parten de una categoría abeliana $\mathcal{A}$, pasamos a la categoría abeliana $C(\mathcal{A})$ de complejos con elementos en $\mathcal{A}$. Luego tomamos la relación de equivalencia dada por la homotopía de morfismos y así resulta la categoría homotópica $K(\mathcal{A})$. Por último localizamos respecto del sistema multiplicativo formado por los casi isomorfismos para obtener la categoría derivada $D(\mathcal{A})$.

$$\mathcal{A} \to C(\mathcal{A}) \to K(\mathcal{A}) \to D(\mathcal{A}).$$

La construcción de las categorías derivadas nos permite calcular los funtores derivados mediante resoluciones, en particular inyectivas o proyectivas.
Las categorías derivadas “unifican” en cierta manera la información que nos dan los complejos mediante sus grupos de cohomología. Esto es, si tomamos dos complejos en una misma clase de equivalencia, sus grupos de cohomología son isomorfos.

En el Capítulo 1 introducimos definiciones y ejemplos de categorías y funtores.

En el Capítulo 2 presentamos las categorías abelianas $\mathcal{A}$ y usamos el teorema de Freyd-Mitchell, que esencialmente dice que podemos ver las categorías abelianas como categorías de módulos, para hacer cacería de diagramas en algunas demostraciones. Además introducimos la categoría de complejos $C(\mathcal{A})$, que es una categoría abeliana cuando $\mathcal{A}$ es abeliana,

en la que aparece la noción de grupos de cohomología, los cuales nos dan información de los objetos estudiados. Y vemos que los morfismos entre objetos de $C(\mathcal{A})$ inducen morfismos en los respectivos grupos de cohomología. Tendremos especial interés en el caso en el que dichos morfismos inducidos son isomorfismos. Cuando esto ocurre, a los morfismos originales les llamamos casi isomorfismos.
También definimos lo que es una homotopía entre morfismos de complejos y el cono de un morfismo. Dichas definiciones nos ayudarán a construir las categorías homótopas.

En el capítulo 3 se verá cómo la homotopía entre morfismos da paso a una relación de equivalencia en la clase de morfismos y de acuerdo a esta relación se construye la categoría homótopa $K(\mathcal{A})$, la cual es una categoría triangulada que es aditiva pero no abeliana. Aquí las sucesiones exactas cortas son reemplazadas por la noción más abstracta de triángulos distinguidos.

En el Capítulo 4 definimos la categoría derivada $D(\mathcal{A})$, la cual es en cierto sentido la categoría más cercana a la categoría homótopa $K(\mathcal{A})$ tal que todos los casi isomorfismos se convierten en isomorfismos. Para esto localizamos la categoría homótopa $K(\mathcal{A})$ respecto del sistema multiplicativo formado por los casi isomorfismos. Además introducimos las nociones de objetos inyectivos y proyectivos para después ver que si $\mathcal{A}$ tiene suficientes inyectivos (resp. proyectivos), entonces todo objeto en $D(\mathcal{A})$ tiene una resolución inyectiva (resp. proyectiva), la cual nos ayudará a definir los funtores derivados derechos (resp. izquierdos).

Definimos los funtores derivados y probamos el teorema de existencia. Además definimos los funtores de imagen superior directa que provienen de funtores derivados.

En el Capítulo 5 introducimos el funtor derivado Hom y con él su funtor de imagen superior directa, el Ext, y mostramos algunos resultados que nos ayudan a ver su utilidad, por ejemplo una caracterización de los módulos inyectivos y proyectivos.

En el Capítulo 6 vemos que si L y R son funtores adjuntos izquierdo y derecho respectivamente, entonces L y R son exactos derecho e izquierdo respectivamente. Además definimos el colímite y el límite de funtores y damos algunos resultados que relacionan a estos con la cohomología y con los funtores de imagen superior directa, en particular con Tor.

Capítulo 1

Categorías y funtores

Este capítulo consta de definiciones y ejemplos de conceptos básicos de teoría de categorías. La teoría de categorías fue introducida por Samuel Eilenberg y Saunders Mac Lane en 1942 y trata de axiomatizar de forma abstracta diversas estructuras matemáticas, como una sola, mediante el uso de objetos y morfismos. Las referencias de este capítulo pueden encontrarse en [3].

Definición 1.1. Una **categoría** $\mathcal{A}$ consta de una clase de objetos $Ob(\mathcal{A})$ y para cada par de objetos A y B en $Ob(\mathcal{A})$ un conjunto $\mathcal{M}or_{\mathcal{A}}(A, B)$ de flechas o morfismos de A en B. Además para cada terna de objetos A, B y C en $\mathcal{A}$ hay una función $\circ : \mathcal{M}or_{\mathcal{A}}(A, B) \times \mathcal{M}or_{\mathcal{A}}(B, C) \to \mathcal{M}or_{\mathcal{A}}(A, C)$, donde $\circ(f, g)$ se denota por $g \circ f$. Además debe satisfacer los siguientes axiomas:

a) (Asociatividad) Para cualquier terna de morfismos f, g y h se cumple que $h \circ (g \circ f) = (h \circ g) \circ f$, si es que estas composiciones están definidas.

b) (Suficientes identidades) Para todo objeto A en $Ob(\mathcal{A})$ existe un morfismo en $\mathcal{M}or_{\mathcal{A}}(A, A)$ denotado por Id_A tal que para todo morfismo f en $\mathcal{M}or_{\mathcal{A}}(A, B)$ se tiene que $f = Id_B \circ f$ y $f = f \circ Id_A$.

Cuando no haya lugar a confusión denotamos a $\mathcal{M}or_{\mathcal{A}}(A, B)$ por $\mathcal{M}or(A, B)$.

Ejemplo 1.2. 1) $\mathcal{A} = \mathcal{S}et$ es la categoría de conjuntos, donde los morfismos son las funciones.

2) $\mathcal{A} = \mathcal{A}b$ es la categoría de grupos abelianos, donde los morfismos son los morfismos de grupos.

3) Sea R un anillo, $\mathcal{A} = \mathcal{M}od(R)$ es la categoría de R-módulos, donde los morfismos son los morfismos de R-módulos.

4) Sea $\mathbb{K}$ un campo. $\mathcal{A} = \mathcal{V}ect_{\mathbb{K}}$ es la categoría de espacios vectoriales sobre $\mathbb{K}$, donde los morfismos son las transformaciones lineales sobre $\mathbb{K}$.

5) Sea X un espacio topológico. $\mathcal{A} = \mathcal{T}op(X)$ es la categoría tal que
$Ob(\mathcal{A}) = \{U \subseteq X | U \text{ es abierto}\}$ y $\mathcal{M}or(\mathcal{A}) = \{U \xrightarrow{i} V | U \subseteq V\}$, donde i es la inclusión.

Cuando no se especifique cómo es la composición en la categoría, como en los ejemplos anteriores, asumiremos que es la usual.

Definición 1.3. Una categoría $\mathcal{A}$ se llama **pequeña** si $\mathcal{M}or(\mathcal{A})$ es un conjunto.

Ejemplo 1.4. Sea C un conjunto y $\mathcal{M}or(C)$ el conjunto formado por las identidades en cada elemento del conjunto. Así C junto con $\mathcal{M}or(C)$ es una categoría pequeña.

Definición 1.5. Sean $\mathcal{A}$ y $\mathcal{A}'$ dos categorías, decimos que $\mathcal{A}'$ es **subcategoría** de $\mathcal{A}$ si:

a) $Ob(\mathcal{A}')$ es una subclase de $Ob(\mathcal{A})$.

b) Para todo par A y B en $Ob(\mathcal{A}')$, $\mathcal{M}or_{\mathcal{A}'}(A,B) \subseteq \mathcal{M}or_{\mathcal{A}}(A,B)$.

c) Para todos A, B y C en $Ob(\mathcal{A}')$ y para todos f en $\mathcal{M}or_{\mathcal{A}'}(A,B)$ y g en $\mathcal{M}or_{\mathcal{A}'}(B,C)$, $g \circ_{\mathcal{A}'} f = g \circ_{\mathcal{A}} f$.

d) Para todo A en $Ob(\mathcal{A}')$, $Id_A^{\mathcal{A}'} = Id_A^{\mathcal{A}}$.

Cuando $\mathcal{M}or_{\mathcal{A}'}(A,B) = \mathcal{M}or_{\mathcal{A}}(A,B)$ para todo par A y B en $Ob(\mathcal{A}')$ diremos que la subcategoría es **plena**.

Ejemplo 1.6. Sea $\mathcal{A}'$ la categoría formada por la clase de conjuntos junto con $\mathcal{M}or(\mathcal{A}')$ que consta de las inclusiones, i.e. $A \overset{i}{\to} B \in \mathcal{M}or(\mathcal{A}')$, si $A \subseteq B$, para $A, B \in Ob(\mathcal{A}')$. Así $\mathcal{A}'$ es subcategoría de $\mathcal{S}et$.

Definición 1.7. Un **funtor** $F : \mathcal{A}_1 \to \mathcal{A}_2$ entre dos categorías $\mathcal{A}_1$ y $\mathcal{A}_2$ es una función que va de $Ob(\mathcal{A}_1)$ en $Ob(\mathcal{A}_2)$ y de $\mathcal{M}or(\mathcal{A}_1)$ en $\mathcal{M}or(\mathcal{A}_2)$ tal que satisface los siguientes axiomas:

a) Para A en $Ob(\mathcal{A}_1)$ tenemos que $F(Id_A) = Id_{F(A)}$.

b) Si $f \circ g$ está definido en $\mathcal{A}_1$, entonces $F(f)F(g)$ está definido en $\mathcal{A}_2$ y es igual a $F(f \circ g)$.

Ejemplo 1.8. 1) Para la categoría $\mathcal{A}$ tenemos el funtor identidad $1_{\mathcal{A}} : \mathcal{A} \to \mathcal{A}$.

2) El funtor olvido $F_o : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$, donde los objetos de $\mathcal{B}$ tienen "menor estructura"que los objetos de $\mathcal{A}$, se define como $F(A) = A$ y $F(f) = f$, para $A \in Ob(\mathcal{A})$ y $f \in \mathcal{M}or(\mathcal{A})$. Un caso particular de este funtor es $F_o : \mathcal{A}b \to \mathcal{S}et$.

3) Sean G un grupo abeliano y X un espacio topológico. Tenemos el funtor constante $\underline{G} : \mathcal{T}op(X) \to \mathcal{A}b$ tal que $\underline{G}(U) = G$ si $U \neq \varnothing$ y $\underline{G}(\varnothing) = \{e\}$, donde e es el neutro de G; $\underline{G}(U \overset{i}{\to} V) = G \overset{Id_G}{\to} G$ si $U \neq \varnothing$ y $\underline{G}(\varnothing \overset{i}{\to} V) = \{e\} \to G$ si $V \neq \varnothing$.

Un funtor $F : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ es un **isomorfismo** o una **equivalencia** de categorías cuando existe otro funtor $G : \mathcal{B} \to \mathcal{A}$ tal que $F \circ G$ es el funtor identidad en $\mathcal{B}$ y $G \circ F$ es el funtor identidad en $\mathcal{A}$.

Definición 1.9. Una **transformación natural** entre dos funtores F y G, ambos de $\mathcal{A}_1$ en $\mathcal{A}_2$ es una función $\eta : Ob(\mathcal{A}_1) \to \mathcal{M}or(\mathcal{A}_2)$, que también se denota $\eta : F \to G$ tal que cumple los siguientes axiomas:

a) Para $A \in Ob(\mathcal{A}_1)$, $\eta(\mathcal{A}) \in \mathcal{M}or_{\mathcal{A}_2}(F(A), G(A))$.

b) Para cualquier $f \in \mathcal{M}or_{\mathcal{A}_1}(A, B)$, el diagrama

$$\begin{tikzcd} F(A) \arrow[r, "F(f)"] \arrow[d, "\eta(A)"'] & F(B) \arrow[d, "\eta(B)"] \\ G(A) \arrow[r, "G(f)"'] & G(B) \end{tikzcd}$$

conmuta.

Si para cada $A \in Ob(\mathcal{A})$ existe $\eta^{-1}(A)$ tal que $\eta(A)\eta^{-1}(A)$ y $\eta^{-1}(A)\eta(A)$ son morfismos identidad, entonces η es un **isomorfismo natural**.

Ejemplo 1.10. Usando la notación del Ejemplo 1.8 3) tenemos la transformación natural $\eta : \underline{\mathbb{Z}} \to \underline{\mathbb{R}}$ definida por la inclusión. Así, para $U \subseteq V$ en $\mathcal{T}op(X)$ tenemos

$$\begin{tikzcd} \mathbb{Z} \arrow[r, "Id_{\mathbb{Z}}"] \arrow[d, "i"'] & \mathbb{Z} \arrow[d, "i"] \\ \mathbb{R} \arrow[r, "Id_{\mathbb{R}}"'] & \mathbb{R} \end{tikzcd}$$

si $U \neq \varnothing$ y

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r, "0"] \arrow[d, "0"'] & \mathbb{Z} \arrow[d, "i"] \\ 0 \arrow[r, "0"'] & \mathbb{R} \end{tikzcd}$$

si $U = \varnothing$.

Definición 1.11. Un **objeto cero** $0_{\mathcal{A}}$ en una categoría $\mathcal{A}$, es un objeto tal que tanto $\mathcal{M}or(0_{\mathcal{A}}, B)$, como $\mathcal{M}or(C, 0_{\mathcal{A}})$ constan de sólo un elemento, para todo B y C objetos de $\mathcal{A}$.

Si existe dicho objeto cero, definimos al **morfismo cero** $B \xrightarrow{0} C$ como el único morfismo $B \to 0_{\mathcal{A}} \to C$.

Dicho objeto cero no siempre existe y si existe no necesariamente es único. Para la definición del morfismo cero no importa cuál objeto cero utilicemos y si no hay lugar a confusión a qué categoría pertenece un objeto cero escribiremos 0 en vez de $0_{\mathcal{A}}$. Notemos también que de la definición de objeto cero se sigue que cualesquiera dos objetos cero en una categoría son isomorfos.

Ejemplo 1.12. 1) En $\mathcal{A} = \mathcal{S}et$ no existen objetos cero.

2) En $\mathcal{A} = \mathcal{A}b$ los objetos cero son los grupos formados por sólo un elemento.

Definición 1.13. El **núcleo** de un morfismo $A \xrightarrow{f} B$ es un morfismo $K \to A$ tal que $K \to A \xrightarrow{f} B$ es el morfismo cero $K \xrightarrow{0} B$ y tiene la siguiente propiedad universal: para todo $X \to A$ tal que

$$\begin{tikzcd} X \arrow[d] \arrow[dr, "0"] & \\ A \arrow[r, "f"] & B \end{tikzcd}$$

conmuta, existe un único morfismo $X \to K$ tal que

$$\begin{tikzcd} & X \arrow[dl] \arrow[d] \\ K \arrow[r] & A \end{tikzcd}$$

conmuta. El núcleo de f se denota como $\operatorname{Ker}(f)$.

Definición 1.14. El **conúcleo** de un morfismo $A \xrightarrow{f} B$ es un morfismo $B \to F$ tal que $A \xrightarrow{f} B \to F$ es el morfismo cero $A \xrightarrow{0} F$ y tiene la siguiente propiedad universal: para todo $B \to X$ tal que

$$\begin{tikzcd} A \arrow[d, "f"] \arrow[dr, "0"] & \\ B \arrow[r] & X \end{tikzcd}$$

conmuta, existe un único morfismo $F \to X$ tal que

$$\begin{tikzcd} & F \arrow[d] \\ B \arrow[ur] \arrow[r] & X \end{tikzcd}$$

conmuta. El conúcleo de f se denota como $\operatorname{Coker}(f)$.

Definición 1.15. Sea $\mathcal{A}$ una categoría y sea $\{x_j | j \in J\}$ una familia indexada de objetos en $\mathcal{A}$. El **coproducto** o **suma directa** de la familia $\{x_j\}$ es un objeto X junto con una colección de morfismos $i_j : x_j \to X$ que satisfacen la propiedad universal: para cualquier objeto Y y una colección de morfismos $f_j : x_j \to Y$, existe un único morfismo $f : X \to Y$ tal que $f_j = f \circ i_j$. Esto es, el siguiente diagrama conmuta para cada j:

$$\begin{tikzcd} X \arrow[dr] & \\ x_j \arrow[u, "i_j"] \arrow[r, "f_j"'] & Y \end{tikzcd}$$

El coproducto de la familia $\{x_j\}$ usualmente se denota por $\bigoplus_{j \in J} x_j$ y no siempre existe.

Ejemplo 1.16. En las categorías $\mathcal{A}b$ y $\mathcal{V}ect_{\mathbb{K}}$, donde $\mathbb{K}$ es un campo, los coproductos se pueden construir tomando productos cartesianos.

Definición 1.17. Un morfismo $A \to B$ es un **monomorfismo** si los únicos morfismos $C \xrightarrow{f} A$ y $C \xrightarrow{g} A$ tales que

$$C \xrightarrow{f} A \to B = C \xrightarrow{g} A \to B$$

son los obvios: $f = g$.

Un morfismo $A \to B$ es un **epimorfismo** si los únicos morfismos $B \xrightarrow{f} C$ y $B \xrightarrow{g} C$ tales que

$$A \to B \xrightarrow{f} C = A \to B \xrightarrow{g} C$$

son los obvios: $f = g$.

Definición 1.18. Dos monomorfismos $A_1 \to B$ y $A_2 \to B$ son equivalentes si existen morfismos $A_1 \to A_2$ y $A_2 \to A_1$ tales que
$$\begin{tikzcd} A_1 \arrow[r] \arrow[d] & B \\ A_2 \arrow[ur] & \end{tikzcd} \quad \text{y} \quad \begin{tikzcd} A_1 \arrow[r] & B \\ A_2 \arrow[u] \arrow[ur] & \end{tikzcd}$$
conmutan.

Un **subobjeto** de B es una clase de equivalencia de monomorfismos en B. Decimos que el subobjeto representado por $A_1 \to B$ está **contenido** en el representado por $A_2 \to B$ si existe un único morfismo $A_1 \to A_2$ tal que
$$\begin{tikzcd} A_1 \arrow[r] \arrow[d] & B \\ A_2 \arrow[ur] & \end{tikzcd}$$
conmuta.

Dos epimorfismos $B \to C_1$ y $B \to C_2$ son equivalentes si existen morfismos $C_1 \to C_2$ y $C_2 \to C_1$ tales que
$$\begin{tikzcd} B \arrow[r] \arrow[dr] & C_1 \arrow[d] \\ & C_2 \end{tikzcd} \quad \text{y} \quad \begin{tikzcd} B \arrow[r] \arrow[dr] & C_1 \\ & C_2 \arrow[u] \end{tikzcd}$$
conmutan.

Un **objeto cociente** es una clase de equivalencia de epimorfismos. Decimos que el objeto cociente representado por $B \to C_1$ es **más pequeño** que el representado por $B \to C_2$ si existe un morfismo $C_2 \to C_1$ tal que
$$\begin{tikzcd} B \arrow[r] \arrow[dr] & C_1 \\ & C_2 \arrow[u] \end{tikzcd}$$
conmuta.

Definición 1.19. La **imagen** de un morfismo $A \xrightarrow{f} B$ es el subobjeto más pequeño de B tal que $A \xrightarrow{f} B$ se factoriza a través de los monomorfismos representantes y se denota por $\mathrm{Im}(f)$. La **coimagen** de un morfismo $A \xrightarrow{g} B$ es el objeto cociente más pequeño de A a través del cual $A \xrightarrow{g} B$ se factoriza y se denota por $\mathrm{Coim}(g)$.

Capítulo 2

Categorías de complejos $C^*(\mathcal{A})$

En este capítulo introducimos las categorías de complejos en categorías abelianas para poder definir los grupos de cohomología de dichos complejos. Además de definir los casi isomorfismos que son un tipo especial de morfismo que servirá para construir las categorías derivadas. Las referencias de este capítulo pueden encontrarse en [2] y [10].

Definición 2.1. Una categoría $\mathcal{A}$ es **exacta** si tiene objetos cero, todos los morfismos en $\mathcal{A}$ tienen núcleo y conúcleo y para cualquier morfismo f, el morfismo inducido
$\text{Coim } f \to \text{Im } f$ es un isomorfismo.

Ejemplo 2.2. $\mathcal{A} = \mathcal{G}p$ la categoría de grupos, cuyos morfismos son los morfismos de grupos es exacta.

$\mathcal{A} = \mathcal{T}op(X)$ no es una categoría exacta pues no tiene objeto cero.

Definición 2.3. Una categoría $\mathcal{A}$ es **aditiva** si las siguientes condiciones se satisfacen:

a) Para cualesquiera dos objetos X, Y en $\mathcal{A}$ $\mathcal{M}or(X, Y)$ tiene estructura de grupo abeliano tal que todas las composiciones de morfismos son bilineales, esto es que para un diagrama en $\mathcal{A}$ de la forma $A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g',g} C \xrightarrow{h} D$ tenemos que
$h(g + g')f = hgf + hg'f$.

b) Existe un objeto cero;

c) Para cualesquiera dos objetos X, Y en $\mathcal{A}$, la suma directa $X \oplus Y$ existe en $\mathcal{A}$.

En una categoría aditiva denotaremos a $\mathcal{M}or(X, Y)$ por $\text{Hom}(X, Y)$, para X e Y objetos en la categoría.

Ejemplo 2.4. 1) $\mathcal{A} = \mathcal{V}ect_{\mathbb{K}}$ la categoría de espacios vectoriales sobre el campo $\mathbb{K}$ es aditiva.

2) $\mathcal{A} = \mathcal{A}b$ es aditiva.

3) $\mathcal{A} = \mathcal{G}p$ no es aditiva, pues no todas las composiciones son bilineales en $\mathrm{Hom}(X,Y)$ para todo X e Y en $\mathcal{A}$.

Definición 2.5. Un funtor $F : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ entre dos categorías aditivas es **aditivo** si para cualesquiera dos objetos X, Y en $\mathcal{A}$ el morfismo inducido por F

$$\mathrm{Hom}(X,Y) \longrightarrow \mathrm{Hom}(F(X), F(Y))$$

es un morfismo de grupos abelianos.

Notemos que un funtor aditivo F envía al morfismo cero en el morfismo cero. Pues F envía al neutro de $\mathrm{Hom}(X,Y)$ en el neutro de $\mathrm{Hom}(F(X), F(Y))$. Además $X \overset{0_{\mathcal{A}}}{\to} Y$ es el neutro de $\mathrm{Hom}(X,Y)$ y $F(X) \overset{0_{\mathcal{B}}}{\to} F(Y)$ es el neutro de $\mathrm{Hom}(F(X), F(Y))$.

Ejemplo 2.6. 1) El funtor $F = Id_{\mathcal{A}} : \mathcal{A} \to \mathcal{A}$, donde $\mathcal{A}$ es aditiva, es aditivo.

2) El funtor olvido $\mathcal{V}ect_{\mathbb{K}} \to \mathcal{A}b$ es aditivo.

Lema 2.7. Un objeto $X \cong 0$ si y sólo si $Id_X = 0_X$, donde 0 es un objeto cero y 0_X es el morfismo cero de X en X.

Demostración. Supongamos que existe un isomorfismo $f : X \to 0$, el cual es único por definición de objeto cero. Entonces $0_X = Id_X : X \overset{f}{\to} 0 \overset{f^{-1}}{\to} X$.

Ahora supongamos que $Id_X = 0_X : X \overset{f_1}{\to} 0 \overset{f_2}{\to} X$, donde f_1 y f_2 son únicos. Además $f_1 \circ f_2 = Id_0$ pues es el único morfismo en $\mathrm{Hom}(0,0)$ y así tenemos que tanto f_1 como f_2 son isomorfismos, luego $X \cong 0$. ■

Veamos que $F(0_{\mathcal{C}}) = 0_{\mathcal{D}}$ para cualquier funtor aditivo $F : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$, donde $0_{\mathcal{C}}$ y $0_{\mathcal{D}}$ son un objeto cero en $\mathcal{C}$ y un objeto cero en $\mathcal{D}$ respectivamente. Notemos que para cualquier objeto X en $\mathcal{C}$ tenemos dos morfismos distinguidos en $\mathrm{Hom}(X,X)$, la identidad Id_X y el morfismo cero 0_X. Ahora probemos que $Id_{F(0_{\mathcal{C}})} = 0_{F(0_{\mathcal{C}})}$. Se tiene $Id_{F(0_{\mathcal{C}})} = F(Id_{0_{\mathcal{C}}})$ por axiomas de funtores; $0_{F(0_{\mathcal{C}})} = F(0_{0_{\mathcal{C}}})$ pues F es funtor aditivo y $Id_{0_{\mathcal{C}}} = 0_{0_{\mathcal{C}}}$ por unicidad del morfismo $0_{\mathcal{C}} \to 0_{\mathcal{C}}$. Entonces tenemos que $Id_{F(0_{\mathcal{C}})} = 0_{F(0_{\mathcal{C}})}$ y aplicando el Lema anterior tenemos que $F(0_{\mathcal{C}}) \cong 0_{\mathcal{D}}$.

Definición 2.8. Un funtor $F : \mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{D}$ es **plenamente fiel** si para cualesquiera dos objetos X, Y en $\mathcal{C}$ el morfismo $\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X,Y) \to \mathrm{Hom}_{\mathcal{D}}(F(X), F(Y))$ inducido por F es una biyección.

Ejemplo 2.9. Sean $\mathcal{A}$ y $\mathcal{B}$ dos categorías tales que $\mathcal{M}or(\mathcal{A})$ y $\mathcal{M}or(\mathcal{B})$ están formados sólo por las identidades de cada objeto en $\mathcal{A}$ y en $\mathcal{B}$, respectivamente. Entonces cualquier funtor $F : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ es plenamente fiel.

Definición 2.10. Sea $\mathcal{A}$ una categoría. Definimos la **categoría opuesta** $\mathcal{A}^{op}$ de $\mathcal{A}$ como $Ob(\mathcal{A}^{op}) = Ob(\mathcal{A})$ y $\mathcal{M}or_{\mathcal{A}^{op}}(X,Y) = \mathcal{M}or_{\mathcal{A}}(Y,X)$. Donde si $f \in \mathcal{M}or_{\mathcal{A}^{op}}(X,Y)$ y $g \in \mathcal{M}or_{\mathcal{A}^{op}}(Y,Z)$, entonces $f \circ_{\mathcal{A}^{op}} g \in \mathcal{M}or_{\mathcal{A}^{op}}(X,Z)$ usando la composición existente en $\mathcal{A}$.

Notemos que $\mathcal{A}^{op}$ es exacta si y sólo si $\mathcal{A}$ es exacta y $\mathcal{A}^{op}$ es aditiva si y sólo si $\mathcal{A}$ es aditiva.

Ejemplo 2.11. Sea $\mathcal{A}$ una categoría tal que $\mathcal{M}or(\mathcal{A})$ está formada sólo por las identidades de cada objeto en $\mathcal{A}$. Entonces $\mathcal{A} = \mathcal{A}^{op}$.

Definición 2.12. Una categoría $\mathcal{A}$ es **abeliana** si es exacta y aditiva.

Ejemplo 2.13. 1) $\mathcal{A}b$, la categoría de grupos abelianos;

2) $\mathcal{M}od(A)$, la categoría de A-módulos sobre un anillo A (izquierdo o derecho).

Teorema 2.14. (Freyd-Mitchell Embedding)
Si $\mathcal{A}$ es una categoría abeliana pequeña, entonces existe un anillo R y un funtor exacto (i.e. transforma sucesiones exactas en sucesiones exactas) y plenamente fiel de $\mathcal{A}$ en $\mathcal{M}od(R)$, que encaja $\mathcal{A}$ como una subcategoría plena de $\mathcal{M}od(R)$.

Este Teorema en esencia establece que las categorías abelianas son de hecho categorías concretas de módulos. Esto nos permite usar elementos y hacer cacería de diagramas para hacer pruebas en estas categorías. Además de usar las definiciones de $\mathrm{Ker}(f)$, $\mathrm{Coker}(f)$, morfismo inyectivo, suprayectivo, entre otras, como las conocemos de módulos.

Sea $\mathcal{A}$ una categoría. Denotamos por $C(\mathcal{A})$ a la categoría cuyos objetos son los complejos de objetos en $\mathcal{A}$ de la forma

$$A^{\bullet} : \cdots \longrightarrow A^{-1} \xrightarrow{d^{-1}} A^{0} \xrightarrow{d^{0}} A^{1} \xrightarrow{d^{1}} \cdots$$

donde al morfismo d se le llama la diferencial y satisface $d^{k+1} \circ d^{k} = 0$ para todo $k \in \mathbb{Z}$. Y los morfismos $A^{\bullet} \xrightarrow{u} B^{\bullet}$ son colecciones $\{u^n : A^n \to B^n\}_{n\in\mathbb{Z}}$ tales que hacen conmutar el siguiente diagrama:

$$\begin{tikzcd}
\cdots \arrow[r] & A^{-1} \arrow[r, "d_A^{-1}"] \arrow[d, "u^{-1}"] & A^{0} \arrow[r, "d_A^{0}"] \arrow[d, "u^{0}"] & A^{1} \arrow[r] \arrow[d, "u^{1}"] & \cdots \\
\cdots \arrow[r] & B^{-1} \arrow[r, "d_B^{-1}"] & B^{0} \arrow[r, "d_B^{0}"] & B^{1} \arrow[r] & \cdots
\end{tikzcd}$$

El conjunto de estos morfismos $A^{\bullet} \xrightarrow{u} B^{\bullet}$ se denota por $\mathrm{Hom}(A^{\bullet}, B^{\bullet})$.
Tenemos un encaje de categorías dado por el siguiente funtor
$C_0 : A \longrightarrow C(A)$
$A \mapsto \cdots \to 0 \to \underline{A} \to 0 \to \cdots$
donde el guión debajo del objeto indica que dicho objeto está en la posición 0.
Si $\mathcal{A}$ es una categoría aditiva (resp. abeliana), entonces $C(\mathcal{A})$ es aditiva (resp. abeliana).

Definición 2.15. Si $\mathcal{A}$ es exacta, entonces podemos definir el **n-ésimo grupo de cohomología** de un complejo $C^{\bullet}$ en $C(\mathcal{A})$ como

$$H^n(C^{\bullet}) = \mathrm{Ker}(d^n)/\mathrm{Im}(d^{n-1}).$$

Y el n-**ésimo grupo de homología** de un complejo de la forma
$B_{\bullet} : \cdots B_{i+1} \overset{d_{i+1}}{\to} B_i \overset{d_i}{\to} B_{i-1} \to \cdots$ en $C(\mathcal{A})$ como

$$H_n(B_{\bullet}) := \mathrm{Ker}(d_n)/\mathrm{Im}(d_{n+1}).$$

Esta definición tiene sentido pues la existencia de conúcleos en $\mathcal{A}$ implica la existencia de cocientes, además la condición $d^{n+1} \circ d^n = 0$ implica que $\mathrm{Im}(d^{n-1}) \subseteq \mathrm{Ker}(d^n)$ para todo $n \in \mathbb{Z}$. Ahora veamos un ejemplo de un complejo donde calculamos los grupos de cohomología.

Ejemplo 2.16. Consideremos la categoría abeliana $C(\mathcal{M}od(\mathbb{Z}/8))$.
Sean $A^n = \mathbb{Z}/8$ para $n \leq 0$ y $A^n = 0$, para $n > 0$. Sea $\overline{x} := x(mod8)$.
Para $n < 0$ definimos $d^n(\overline{x}) = \overline{4x}$. Veamos que $A^\bullet$ es un complejo de $\mathbb{Z}/8$-módulos y calculemos su cohomología.

$$\cdots \longrightarrow \mathbb{Z}/8 \xrightarrow{d^{-1}} \mathbb{Z}/8 \xrightarrow{d^0=0} 0 \xrightarrow{d^1=0} 0 \longrightarrow \cdots$$

$d^n \circ d^{n-1}(\overline{x}) = d^n(\overline{4x}) = \overline{16x} = \overline{0}$, para $n \leq -1$, $d^0 \circ d^{-1}(\overline{x}) = d^0(\overline{4x}) = 0$ y $d^n \circ d^{n-1}(\overline{x}) = 0$ para $n \geq 1$, por lo que $A^\bullet$ es un complejo de $\mathbb{Z}/8$- módulos.

$$\mathrm{Im}(d^n) = \begin{cases} \{\overline{0}, \overline{4}\} & \text{si } n \leq -1 \\ \{0\} & \text{si } n > -1 \end{cases}$$

$$\mathrm{Ker}(d^n) = \begin{cases} \{\overline{0}, \overline{2}, \overline{4}, \overline{6}\} & \text{si } n \leq -1 \\ \mathbb{Z}/8 & \text{si } n = 0 \\ \{0\} & \text{si } n \geq 1 \end{cases}$$

$$H^n(A^\bullet) = \begin{cases} \{\overline{0}, \overline{2}, \overline{4}, \overline{6}\}/\{\overline{0}, \overline{4}\} & \text{si } n \leq -1 \\ (\mathbb{Z}/8)/\{\overline{0}, \overline{4}\} & \text{si } n = 0 \\ 0 & \text{si } n \geq 1 \end{cases}$$

Lema 2.17. Para un morfismo $u : A^\bullet \to B^\bullet$ de complejos tenemos que
$u^n(\mathrm{Ker}(d_A^n)) \subseteq \mathrm{Ker}(d_B^n)$ y $u^n(\mathrm{Im}(d_A^{n-1})) \subseteq \mathrm{Im}(d_B^{n-1})$.

Demostración. Sea $x \in \mathrm{Ker}(d_A^n)$, entonces $d_A^n(x) = 0$, luego $d_B^n \circ u^n(x) = u^{n+1} \circ d_A^n(x) = 0$, por lo tanto $u^n(x) \in \mathrm{Ker}(d_B^n)$.
Sea $x \in I\,\mathrm{Im}(d_A^{n-1})$, entonces existe $y \in A^{n-1}$ tal que $x = d_A^{n-1}(y)$, luego
$u^n(x) = u^n \circ d_A^{n-1}(y) = d_B^{n-1} \circ u^{n-1}(y)$, por lo tanto $u^n(x) \in \mathrm{Im}(d_B^{n-1})$. ∎

Así u induce un morfismo de $H^n(A^\bullet)$ en $H^n(B^\bullet)$ que denotaremos por u^*. Gracias a esto, para una categoría exacta $\mathcal{A}$ tenemos el funtor $H^n : C(\mathcal{A}) \to \mathcal{A}$, que envía a un complejo $A^\bullet$ en su n-ésimo grupo de cohomología $H^n(A^\bullet)$ y a un morfismo $u : A^\bullet \to B^\bullet$ en el morfismo $u^* : H^n(A^\bullet) \to H^n(B^\bullet)$ inducido por u.
Notemos que una sucesión $0 \to A^\bullet \to B^\bullet \to C^\bullet \to 0$ de complejos es exacta sólo en caso de que $0 \to A^n \to B^n \to C^n \to 0$ es exacta para toda $n \in \mathbb{Z}$. Tenemos a continuación algunos resultados sobre sucesiones exactas.

Lema 2.18. Sea $0 \to A^\bullet \xrightarrow{f} B^\bullet \xrightarrow{g} C^\bullet \to 0$ una sucesión exacta corta de complejos. Si dos de los tres complejos $A^\bullet$, $B^\bullet$ y $C^\bullet$ son exactos, entonces también lo es el restante.

Demostración. Tenemos el siguiente diagrama

$$\begin{tikzcd}
 & 0 \arrow[d] & 0 \arrow[d] & 0 \arrow[d] & 0 \arrow[d] & \\
\cdots \arrow[r] & A^{n-1} \arrow[r, "d_A^{n-1}"] \arrow[d, "f^{n-1}"] & A^n \arrow[r, "d_A^n"] \arrow[d, "f^n"] & A^{n+1} \arrow[r, "d_A^{n+1}"] \arrow[d, "f^{n+1}"] & A^{n+2} \arrow[r, "d_A^{n+2}"] \arrow[d, "f^{n+2}"] & \cdots \\
\cdots \arrow[r] & B^{n-1} \arrow[r, "d_B^{n-1}"] \arrow[d, "g^{n-1}"] & B^n \arrow[r, "d_B^n"] \arrow[d, "g^n"] & B^{n+1} \arrow[r, "d_B^{n+1}"] \arrow[d, "g^{n+1}"] & B^{n+2} \arrow[r, "d_B^{n+2}"] \arrow[d, "g^{n+2}"] & \cdots \\
\cdots \arrow[r] & C^{n-1} \arrow[r, "d_C^{n-1}"] \arrow[d] & C^n \arrow[r, "d_C^n"] \arrow[d] & C^{n+1} \arrow[r, "d_C^{n+1}"] \arrow[d] & C^{n+2} \arrow[r, "d_C^{n+2}"] \arrow[d] & \cdots \\
 & 0 & 0 & 0 & 0 &
\end{tikzcd}$$

Supongamos que $A^\bullet$ y $B^\bullet$ son complejos exactos y probemos que $C^\bullet$ lo es también.
Tenemos $\mathrm{Im}(d_C^{n-1}) \subseteq \mathrm{Ker}(d_C^n)$ porque $C^\bullet$ es complejo, sólo falta probar que $\mathrm{Im}(d_C^{n-1}) \supseteq \mathrm{Ker}(d_C^n)$ para todo $n \in \mathbb{Z}$. Sea $x \in \mathrm{Ker}(d_C^n)$, entonces $d_C^n(x) = 0$. Luego, usando que g^n es sobreyectivo, existe $y \in B^n$ tal que $g^n(y) = x$. Por la conmutatividad del diagrama $g^{n+1} \circ d_B^n(y) = d_C^n \circ g^n(y) = 0$, así que $d_B^n(y) \in \mathrm{Ker}(g^{n+1}) = \mathrm{Im}(f^{n+1})$, por lo que existe $w \in A^{n+1}$ tal que $f^{n+1}(w) = d_B^n(y)$. Luego, $f^{n+2} \circ d_A^{n+1}(w) = d_B^{n+1} \circ f^{n+1}(w) = d_B^{n+1} \circ d_B^n(y) = 0$, entonces $d_A^{n+1}(w) \in \mathrm{Ker}(f^{n+2}) = \{0\}$, pues f^{n+2} es inyectiva, así que $w \in \mathrm{Ker}(d_A^{n+1}) = \mathrm{Im}(d_A^n)$, por lo que existe $a \in A^n$ tal que $d_A^n(a) = w$.
Tomamos $y - f^n(a) \in B^n$, aplicando d_B^n obtenemos $d_B^n(y - f^n(a)) = d_B^n(y) - d_B^n \circ f^n(a) = d_B^n(y) - f^{n+1} \circ d_A^n(a) = d_B^n(y) - f^{n+1}(w) = d_B^n(y) - d_B^n(y) = 0$, entonces $y - f^n(a) \in \mathrm{Ker}(d_B^n) = \mathrm{Im}(d_B^{n-1})$, por lo que existe $b \in B^{n-1}$ tal que $d_B^{n-1}(b) = y - f^n(a)$. Luego, $d_C^{n-1} \circ g^{n-1}(b) = g^n \circ d_B^{n-1}(b) = g^n(y - f^n(a)) = g^n(y) - g^n \circ f^n(a) = x$, así $d_C^{n-1} \circ g^{n-1}(b) = x$, por lo que $x \in \mathrm{Im}(d_C^{n-1})$. En los casos restantes la prueba es análoga. ■

Lema 2.19. (Lema 3x3)
Supongamos que tenemos un diagrama conmutativo

$$\begin{tikzcd}
 & 0 \arrow[d] & 0 \arrow[d] & 0 \arrow[d] & \\
0 \arrow[r] & A' \arrow[r, "f'"] \arrow[d, "\alpha'"] & B' \arrow[r, "g'"] \arrow[d, "\beta'"] & C' \arrow[r] \arrow[d, "\gamma'"] & 0 \\
0 \arrow[r] & A \arrow[r, "f"] \arrow[d, "\alpha"] & B \arrow[r, "g"] \arrow[d, "\beta"] & C \arrow[r] \arrow[d, "\gamma"] & 0 \\
0 \arrow[r] & A'' \arrow[r, "f''"] \arrow[d] & B'' \arrow[r, "g''"] \arrow[d] & C'' \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
 & 0 & 0 & 0 &
\end{tikzcd}$$

en una categoría abeliana tal que cada columna es exacta.
1. Si las dos últimas filas son exactas, entonces también lo es la primera.

2. Si las dos primeras filas son exactas, entonces también lo es la última.
3. Si la primera y última filas son exactas y la composición $A \to C$ es cero, entonces la fila de en medio es exacta.

Demostración. El caso 3 se sigue inmediatamente del Lema 2.18 Haremos la prueba de 1. Supongamos que las dos últimas filas son exactas. Probemos que $g' \circ f' \equiv 0$.
Sea $x \in A'$, luego $g' \circ f'(x) = 0$ si y sólo si $\gamma' \circ g' \circ f'(x) = 0$, pues γ' es inyectiva. Usando la conmutatividad del diagrama tenemos $\gamma' \circ g' \circ f'(x) = g \circ \beta' \circ f'(x) = g \circ f \circ \alpha'(x) = 0$ para todo $x \in A'$. Por lo tanto $g' \circ f'(x) = 0$ para todo $x \in A'$ y así $g' \circ f' \equiv 0$.
Por lo tanto podemos considerar la primera fila como un complejo y aplicando el Lema anterior tenemos que la primera fila es exacta. Para el caso 2 la prueba es análoga. ■

Lema 2.20. (Lema de la Serpiente)
Consideremos un diagrama conmutativo de elementos en A, de la forma

$$\begin{tikzcd} & A' \arrow[r] \arrow[d, "f"] & B' \arrow[r] \arrow[d, "g"] & C' \arrow[r] \arrow[d, "h"] & 0 \\ 0 \arrow[r] & A \arrow[r] & B \arrow[r] & C & \end{tikzcd}$$

Si las filas con exactas, entonces existe una sucesión exacta

$$\mathrm{Ker}(f) \longrightarrow \mathrm{Ker}(g) \longrightarrow \mathrm{Ker}(h) \xrightarrow{\delta} \mathrm{Coker}(f) \longrightarrow \mathrm{Coker}(g) \longrightarrow \mathrm{Coker}(h)$$

Además si $A' \to B'$ es inyectiva, entonces $\mathrm{Ker}(f) \to \mathrm{Ker}(g)$ también lo es y si $B \to C$ es sobreyectiva, entonces $\mathrm{Coker}(f) \to \mathrm{Coker}(g)$ también lo es.

Demostración. Completemos el diagrama con los respectivos núcleos y conúcleos.

$$\begin{tikzcd} & \mathrm{Ker}(f) \arrow[d, "i"] & \mathrm{Ker}(g) \arrow[d, "i"] & \mathrm{Ker}(h) \arrow[d, "i"] & \\ & A' \arrow[r, "j'"] \arrow[d, "f"] & B' \arrow[r, "k'"] \arrow[d, "g"] & C' \arrow[r] \arrow[d, "h"] & 0 \\ 0 \arrow[r] & A \arrow[r, "j"] \arrow[d, "p"] & B \arrow[r, "k"] \arrow[d, "p"] & C \arrow[d, "p"] & \\ & \mathrm{Coker}(f) & \mathrm{Coker}(g) & \mathrm{Coker}(h) & \end{tikzcd}$$

Donde i y p son las inclusiones y proyecciones respectivamente. Definimos los morfismos $\overline{j'} : \mathrm{Ker}(f) \to \mathrm{Ker}(g)$ y $\overline{k'} : \mathrm{Ker}(g) \to \mathrm{Ker}(h)$ como sigue, $\overline{j'}(x) = j'(x)$ para toda $x \in \mathrm{Ker}(f)$ y $\overline{k'}(x) = k'(x)$ para toda $x \in \mathrm{Ker}(g)$. Y definimos $\overline{j} : \mathrm{Coker}(f) \to \mathrm{Coker}(g)$ y $\overline{k} : \mathrm{Coker}(g) \to \mathrm{Coker}(h)$ como los morfismos inducidos por j y k respectivamente.

Ahora probaré que $\overline{j'}$ y $\overline{k'}$ están bien definidas y $\mathrm{Ker}(f) \xrightarrow{\overline{j'}} \mathrm{Ker}(g) \xrightarrow{\overline{k'}} \mathrm{Ker}(h)$ es exacta. Sea $x \in \mathrm{Ker}(f)$, luego $g \circ j'(x) = j \circ f(x) = 0$, así que $j'(x) \in \mathrm{Ker}(g)$. Sea $y \in \mathrm{Ker}(g)$, luego $h \circ k'(y) = k \circ g(y) = 0$, así que $k'(y) \in \mathrm{Ker}(h)$. Por lo tanto $\overline{j'}$ y $\overline{k'}$ están bien definidas.

Sea $x \in \mathrm{Ker}(f)$, luego $\overline{k'} \circ \overline{j'}(x) = k' \circ j'(x) = 0$ y así $\mathrm{Im}(\overline{j'}) \subseteq \mathrm{Ker}(\overline{k'})$.
Sea $y \in \mathrm{Ker}(\overline{k'}) \subseteq \mathrm{Ker}(g)$, luego $k' \circ i(y) = i \circ \overline{k'}(y) = 0$. Entonces $i(y) = y \in \mathrm{Ker}(k') = \mathrm{Im}(j')$, por lo que existe $a \in A'$ tal que $j'(a) = y$. Además $j \circ f(a) = g \circ j'(a) = g(y) = 0$, entonces $f(a) \in \mathrm{Ker}(j) = \{0\}$, luego $a \in \mathrm{Ker}(f)$. $\overline{j'}(a) = j' \circ i(a) = j'(a) = y$ y por lo tanto $y \in \mathrm{Im}(\overline{j'})$. Y así $\mathrm{Im}(\overline{j'}) \supseteq \mathrm{Ker}(\overline{k'})$.

Ahora probaré que $\overline{j}$ y $\overline{k}$ están bien definidas y $\mathrm{Coker}(f) \xrightarrow{\overline{j}} \mathrm{Coker}(g) \xrightarrow{\overline{k}} \mathrm{Coker}(h)$ es exacta. Sea $x \in \mathrm{Im}(f)$, entonces existe $y \in A'$ tal que $f(y) = x$. luego $j(x) = j \circ f(y) = g \circ j'(y)$ y así $j(x) \in \mathrm{Im}(g)$. Sea $x \in \mathrm{Im}(g)$, entonces existe $y \in B'$ tal que $g(y) = x$. Luego $k(x) = k \circ g(y) = h \circ k'(y)$ y así $k(x) \in \mathrm{Im}(h)$. Por lo tanto $\overline{j}$ y $\overline{k}$ están bien definidas.
Sea $\overline{x} = x + \mathrm{Im}(f) \in \mathrm{Coker}(f)$, entonces $\overline{k} \circ \overline{j}(\overline{x}) = k \circ j(x) + \mathrm{Im}(h) = 0 + \mathrm{Im}(h) = \overline{0}$. Por lo tanto $\mathrm{Im}(\overline{j}) \subseteq \mathrm{Ker}(\overline{k})$.
Sea $x \in \mathrm{Ker}(\overline{k})$, como p es sobreyectiva, existe $y \in B$ tal que $p(y) = x$. Luego, $p \circ k(y) = \overline{k} \circ p(y) = 0$. Entonces $k(y) \in \mathrm{Ker}(p) = \mathrm{Im}(h)$, por lo que existe $z \in C'$ tal que $h(z) = k(y)$ y existe $w \in B'$ tal que $k'(w) = z$. Luego por la conmutatividad del diagrama tenemos $k \circ g(w) = h \circ k'(w) = h(z) = k(y)$ y así $g(w) - y \in \mathrm{Ker}(k) = \mathrm{Im}(j)$, por lo que existe $a \in A$ tal que $j(a) = g(w) - y$. Entonces $\overline{j} \circ p(a) = p \circ j(a) = p(g(w) - y) = p \circ g(w) - p(y) = p(y) = x$. Por lo tanto $x \in \mathrm{Im}(\overline{j})$ y así $\mathrm{Im}(\overline{j}) \supseteq \mathrm{Ker}(\overline{k})$.
Así tenemos el siguiente diagrama

$$\begin{tikzcd}
 & \mathrm{Ker}(f) \arrow[r, "\overline{j'}"] \arrow[d, "i"] & \mathrm{Ker}(g) \arrow[r, "\overline{k'}"] \arrow[d, "i"] & \mathrm{Ker}(h) \arrow[d, "i"] & \\
 & A' \arrow[r, "j'"] \arrow[d, "f"] & B' \arrow[r, "k'"] \arrow[d, "g"] & C' \arrow[r] \arrow[d, "h"] & 0 \\
0 \arrow[r] & A \arrow[r, "j"] \arrow[d, "p"] & B \arrow[r, "k"] \arrow[d, "p"] & C \arrow[d, "p"] & \\
 & \mathrm{Coker}(f) \arrow[r, "\overline{j}"] & \mathrm{Coker}(g) \arrow[r, "\overline{k}"] & \mathrm{Coker}(h) &
\end{tikzcd}$$

Sea $c' \in \mathrm{Ker}(h)$, $i(c') = c' \in C'$ y como k' es sobreyectiva existe $b \in B'$ tal que $k'(b) = c'$. Luego $k \circ g(b) = h \circ k'(b) = h(c') = 0$, por lo que $g(b) \in \mathrm{Ker}(k) = \mathrm{Im}(j)$. Entonces existe $a \in A$ tal que $j(a) = g(b)$ y $p(a) \in \mathrm{Coker}(f)$. Así definimos el morfismo $\delta : \mathrm{Ker}(h) \to \mathrm{Coker}(f)$, que envía $c' \in \mathrm{Ker}(h)$ en $p(a)$.
Veamos que δ está bien definida. Sea $c' \in \mathrm{Ker}(h)$, supongamos que existen b y b' en B' tales que $k'(b) = k'(b') = x$, entonces $b = b' + r$, con $r \in \mathrm{Ker}(k')$. Luego existen a y a' en A tales que $j(a) = g(b)$ y $j(a') = g(b')$. Debemos probar que $p(a) = p(a')$. Tenemos que $\overline{j} \circ p(a - a') = p \circ j(a - a') = p(j(a) - j(a')) = p(g(b) - g(b')) = p \circ g(b - b') = 0$, por lo que $p(a - a') = p(a) - p(a') \in \mathrm{Ker}(\overline{j}) = \{0\}$, entonces $p(a) = p(a')$. Por lo que δ está bien definida.
Ahora probaremos que $\mathrm{Im}(\overline{k'}) = \mathrm{Ker}(\delta)$. Sea $a \in \mathrm{Ker}(g)$, entonces $\delta \circ \overline{k'}(a) = 0$, por lo tanto $\mathrm{Im}(\overline{k'}) \subseteq \mathrm{Ker}(\delta)$.
Sea $a \in \mathrm{Ker}(\delta)$, entonces $\delta(a) = 0$ y por conmutatividad del diagrama y la exactitud tenemos que $a \in \mathrm{Im}(\overline{k'})$. Por lo tanto $\mathrm{Ker}(\delta) \subseteq \mathrm{Im}(\overline{k'})$.

Probemos por último que $\mathrm{Im}(\delta) = \mathrm{Ker}(\overline{j})$. Sea $c' \in \mathrm{Ker}(h)$, luego $\overline{j} \circ \delta(c') = 0$, por lo tanto $\mathrm{Im}(\delta) \subseteq \mathrm{Ker}(\overline{j})$.
Sea $x \in \mathrm{Ker}(\overline{j})$, entonces $\overline{j}(x) = 0$. Como p es sobreyectiva, existe $y \in A$ tal que $p(y) = x$ y usando conmutatividad del diagrama tenemos $p \circ j(y) = \overline{j} \circ p(y) = \overline{j}(x) = 0$. Así que $j(y) \in \mathrm{Ker}(p) = \mathrm{Im}(g)$, entonces existe $b \in B'$ tal que $g(b) = j(y)$ y $k'(b) \in \mathrm{Ker}(h)$, pues $h \circ k'(b) = k \circ g(b) = k \circ j(y) = 0$. Así tenemos que $\delta(k'(b)) = p(y) = x$. Por lo tanto $x \in \mathrm{Im}(\delta)$ y así $\mathrm{Ker}(\overline{j}) \subseteq \mathrm{Im}(\delta)$.

Es claro que si $A' \xrightarrow{j'} B'$ es inyectiva, entonces $\mathrm{Ker}(f) \xrightarrow{\overline{j'}} \mathrm{Ker}(g)$ también lo es, pues es la restricción. Y si $B \xrightarrow{k} C$ es sobreyectiva, entonces $\overline{k}$ también lo es, pues es inducida por una aplicación sobreyectiva. ■

Lema 2.21. (5-Lema)
Sea

$$\begin{tikzcd}
A \arrow[r, "f"] \arrow[d, "a", "\cong"'] & B \arrow[r, "g"] \arrow[d, "b", "\cong"'] & C \arrow[r, "h"] \arrow[d, "c"] & D \arrow[r, "i"] \arrow[d, "d", "\cong"'] & E' \arrow[d, "e", "\cong"'] \\
A' \arrow[r, "f'"] & B' \arrow[r, "g'"] & C' \arrow[r, "h'"] & D' \arrow[r, "i'"] & E'
\end{tikzcd}$$

un diagrama conmutativo con filas exactas en cualquier categoría abeliana. Si a, b, d y e son isomorfismos, entonces c es también un isomorfismo.

Demostración. Sea $x \in \mathrm{Ker}(c)$, entonces $d \circ h(x) = h' \circ c(x) = 0$, por lo que $h(x) \in \mathrm{Ker}(d) = 0$. Así $x \in \mathrm{Ker}(h) = \mathrm{Im}(g)$, luego existe $y \in B$ tal que $g(y) = x$. Luego $g' \circ b(y) = c \circ g(y) = c(x) = 0$, así que $b(y) \in \mathrm{Ker}(g') = \mathrm{Im}(f')$. Por lo que existe $r \in A'$ tal que $f'(r) = b(y)$. Y usando que a es sobreyectiva existe $s \in A$ tal que $a(s) = r$. Además $b \circ f(s) = f' \circ a(s) = f'(r) = b(y)$ y así como b es inyectiva tenemos que $f(s) = y$. Luego $x = g(y) = g \circ f(s) = 0$. Por lo tanto c es inyectiva.
Sean $x \in C'$ y $h'(x) \in D'$. Usando que d es sobreyectiva existe $\beta \in D$ tal que $d(\beta) = h'(x)$. Luego $e \circ i(\beta) = i' \circ d(\beta) = i'(h'(x)) = 0$, entonces $i(\beta) \in \mathrm{Ker}(e) = 0$. Así $\beta \in \mathrm{Ker}(i) = \mathrm{Im}(h)$. Por lo que existe $y \in C$ tal que $h(y) = \beta$. Tenemos $h' \circ c(y) = d \circ h(y) = d(\beta) = h'(x)$ y así $c(y) - x \in \mathrm{Ker}(h') = \mathrm{Im}(g')$. Entonces existe $w \in B'$ tal que $g'(w) = c(y) - x$ y usando la sobreyectividad de b tenemos que existe $z \in B$ tal que $b(z) = w$. Luego $c \circ g(z) = g' \circ b(z) = g'(w) = c(y) - x$. Así $x = c(y) - c \circ g(z) = c(y - g(z))$, i.e. $x \in \mathrm{Im}(c)$. Por lo tanto c es sobreyectiva. ■

Teorema 2.22. Sea $0 \longrightarrow A^\bullet \xrightarrow{f} B^\bullet \xrightarrow{g} C^\bullet \longrightarrow 0$ una sucesión exacta corta de complejos. Entonces hay morfismos $\delta : H^n(C^\bullet) \to H^{n+1}(A^\bullet)$ llamados homomorfismos conectores, tales que

$$\cdots \longrightarrow H^{n-1}(C^\bullet) \xrightarrow{\delta} H^n(A^\bullet) \xrightarrow{f^*} H^n(B^\bullet) \xrightarrow{g^*} H^n(C^\bullet) \xrightarrow{\delta} H^{n+1}(A^\bullet) \longrightarrow \cdots$$

es una sucesión exacta.

Demostración. Tenemos la sucesión exacta de complejos:

$$\begin{tikzcd}
 & \vdots \arrow[d] & \vdots \arrow[d] & \vdots \arrow[d] & \\
0 \arrow[r] & A^{n-1} \arrow[r, "f^{n-1}"] \arrow[d, "d_A^{n-1}"] & B^{n-1} \arrow[r, "g^{n-1}"] \arrow[d, "d_B^{n-1}"] & C^{n-1} \arrow[r] \arrow[d, "d_C^{n-1}"] & 0 \\
0 \arrow[r] & A^{n} \arrow[r, "f^{n}"] \arrow[d, "d_A^{n}"] & B^{n} \arrow[r, "g^{n}"] \arrow[d, "d_B^{n}"] & C^{n} \arrow[r] \arrow[d, "d_C^{n}"] & 0 \\
0 \arrow[r] & A^{n+1} \arrow[r, "f^{n+1}"] \arrow[d, "d_A^{n+1}"] & B^{n+1} \arrow[r, "g^{n+1}"] \arrow[d, "d_B^{n+1}"] & C^{n+1} \arrow[r] \arrow[d, "d_C^{n+1}"] & 0 \\
 & \vdots & \vdots & \vdots &
\end{tikzcd}$$

Y consideramos el siguiente diagrama

$$\begin{tikzcd}
 & A^n/\operatorname{Im}(d_A^{n-1}) \arrow[r, "\overline{f^n}"] \arrow[d, "\overline{d_A}"] & B^n/\operatorname{Im}(d_B^{n-1}) \arrow[r, "\overline{g^n}"] \arrow[d, "\overline{d_B}"] & C^n/\operatorname{Im}(d_C^{n-1}) \arrow[r] \arrow[d, "\overline{d_C}"] & 0 \\
0 \arrow[r] & \operatorname{Ker}(d_A^{n+1}) \arrow[r, "\widehat{f^{n+1}}"] & \operatorname{Ker}(d_B^{n+1}) \arrow[r, "\widehat{g^{n+1}}"] & \operatorname{Ker}(d_C^{n+1}) &
\end{tikzcd}$$

donde $\overline{f^n}(a+\operatorname{Im}(d_A^{n-1})) = f^n(a)+\operatorname{Im}(d_B^{n-1})$, para $a \in A^n$ y $\overline{g^n}$ se define de manera análoga.
$\overline{d_A}(a + \operatorname{Im}(d_A^{n-1})) = d_A^n(a)$, para $a \in A^n$ y está bien definida pues $\operatorname{Im}(d_A^{n-1})$ se anula bajo d_A^n y
$d_A^n(a) \in \operatorname{Im}(d_A^n) \subseteq \operatorname{Ker}(d_A^{n+1})$; $\overline{d_B}$ y $\overline{d_C}$ se definen de manera análoga.
Además $\widehat{f^{n+1}} := f^{n+1}\mid_{\operatorname{Ker}(d_A^{n+1})}$ y $\widehat{g^{n+1}} := g^{n+1}\mid_{\operatorname{Ker}(d_B^{n+1})}$.

Veamos que el diagrama conmuta. Sea $a + \operatorname{Im}(d_A^{n-1}) \in A^n/\operatorname{Im}(d_A^{n-1})$, luego
$\overline{d_B} \circ \overline{f^n}(a + \operatorname{Im}(d_A^{n-1})) = \overline{d_B}(f^n(a) + \operatorname{Im}(d_B^{n-1})) = d_B^n \circ f^n(a)$. Y $\widehat{f^{n+1}} \circ \overline{d_A}(a + \operatorname{Im}(d_A^{n-1})) = \widehat{f^{n+1}} \circ d_A^n(a) = f^{n+1} \circ d_A^n(a) = d_B^n \circ f^n(a)$. Por lo tanto $\overline{d_B} \circ \overline{f^n} = \widehat{f^{n+1}} \circ \overline{d_A}$. De la misma manera $\overline{d_C} \circ \overline{g^n} = \widehat{g^{n+1}} \circ \overline{d_B}$. Y así el diagrama conmuta. Además así como están definidos los morfismos tenemos que

$$A^n/\operatorname{Im}(d_A^{n-1}) \xrightarrow{\overline{f^n}} B^n/\operatorname{Im}(d_B^{n-1}) \xrightarrow{\overline{g^n}} C^n/\operatorname{Im}(d_C^{n-1}) \longrightarrow 0$$

y

$$0 \longrightarrow \operatorname{Ker}(d_A^{n+1}) \xrightarrow{\widehat{f^{n+1}}} \operatorname{Ker}(d_B^{n+1}) \xrightarrow{\widehat{g^{n+1}}} \operatorname{Ker}(d_C^{n+1})$$

son exactas. Así tenemos el siguiente diagrama conmutativo

$$
\begin{tikzcd}
 & \operatorname{Ker}(\overline{d_A}) \arrow[r, "\overline{f^n}'"] \arrow[d, "i"] & \operatorname{Ker}(\overline{d_B}) \arrow[r, "\overline{g^n}'"] \arrow[d, "i"] & \operatorname{Ker}(\overline{d_C}) \arrow[d, "i"] & \\
 & A^n/\operatorname{Im}(d_A^{n-1}) \arrow[r, "\overline{f^n}"] \arrow[d, "\overline{d_A}"] & B^n/\operatorname{Im}(d_B^{n-1}) \arrow[r, "\overline{g^n}"] \arrow[d, "\overline{d_B}"] & C^n/\operatorname{Im}(d_C^{n-1}) \arrow[r] \arrow[d, "\overline{d_C}"] & 0 \\
0 \arrow[r] & \operatorname{Ker}(d_A^{n+1}) \arrow[r, "\widehat{f^{n+1}}"] \arrow[d, "p"] & \operatorname{Ker}(d_B^{n+1}) \arrow[r, "\widehat{g^{n+1}}"] \arrow[d, "p"] & \operatorname{Ker}(d_C^{n+1}) \arrow[d, "p"] & \\
 & \operatorname{Coker}(\overline{d_A}) \arrow[r, "\widehat{f^{n+1}}'"] & \operatorname{Coker}(\overline{d_B}) \arrow[r, "\widehat{g^{n+1}}'"] & \operatorname{Coker}(\overline{d_C}) &
\end{tikzcd}
$$

donde i es la inclusión, p es la proyección; $\overline{f^n}'$ y $\overline{g^n}'$ son las restricciones de $\overline{f^n}$ y $\overline{g^n}$ respectivamente; $\widehat{f^{n+1}}'$ y $\widehat{g^{n+1}}'$ son los morfismos inducidos por $\widehat{f^{n+1}}$ y $\widehat{g^{n+1}}$ respectivamente. Así por el Lema de la Serpiente tenemos que

$$\operatorname{Ker}(\overline{d_A}) \xrightarrow{\overline{f^n}'} \operatorname{Ker}(\overline{d_B}) \xrightarrow{\overline{g^n}'} \operatorname{Ker}(\overline{d_C}) \xrightarrow{\delta} \operatorname{Coker}(\overline{d_A}) \xrightarrow{\widehat{f^{n+1}}'} \operatorname{Coker}(\overline{d_B}) \xrightarrow{\widehat{g^{n+1}}'} \operatorname{Coker}(\overline{d_C})$$

es exacta. Ahora calculemos $\operatorname{Ker}(\overline{d_A})$ y $\operatorname{Coker}(\overline{d_A})$. $\operatorname{Ker}(\overline{d_A}) = \{a + \operatorname{Im}(d_A^{n-1}) | d_A^n(a) = 0\} = \{a + \operatorname{Im}(d_A^{n-1}) | a \in \operatorname{Ker}(d_A^n)\} = \operatorname{Ker}(d_A^n)/\operatorname{Im}(d_A^{n-1}) = H^n(A^\bullet)$. Análogamente $\operatorname{Ker}(\overline{d_B}) = H^n(B^\bullet)$ y $\operatorname{Ker}(\overline{d_C}) = H^n(C^\bullet)$. Luego $\operatorname{Im}(\overline{d_A}) = \{\overline{d_A}(a + \operatorname{Im}(d_A^{n-1})) | a \in A^n\} = \{d_A^n(a) | a \in A^n\} = \operatorname{Im}(d_A^n)$. Por lo tanto $\operatorname{Coker}(\overline{d_A}) = \operatorname{Ker}(d_A^{n+1})/\operatorname{Im}(\overline{d_A}) = \operatorname{Ker}(d_A^{n+1})/\operatorname{Im}(d_A) = H^{n+1}(A^\bullet)$. Análogamente $\operatorname{Coker}(\overline{d_B}) = H^{n+1}(B^\bullet)$ y $\operatorname{Coker}(\overline{d_C}) = H^{n+1}(C^\bullet)$. Por lo tanto

$$\cdots \longrightarrow H^n(A^\bullet) \xrightarrow{\overline{f^n}'} H^n(B^\bullet) \xrightarrow{\overline{g^n}'} H^n(C^\bullet) \xrightarrow{\delta} H^{n+1}(A^\bullet) \xrightarrow{\widehat{f^{n+1}}'} H^{n+1}(B^\bullet) \xrightarrow{\widehat{g^{n+1}}'} H^{n+1}(C^\bullet) \longrightarrow \cdots$$

es exacta. ■

Definición 2.23. Un complejo $A^\bullet$ se llama **acíclico** si $H^n(A^\bullet) = 0$ para todo $n \in \mathbb{Z}$.

Notación. La categoría $C(\mathcal{A})$ contiene varias subcategorías plenas $C^*(\mathcal{A})$ que son importantes y listamos a continuación:

$* = +$, la subcategoría plena cuyos objetos son los complejos acotados por debajo (o por la izquierda), i.e. existe un entero $n_0 \in \mathbb{Z}$ tal que $A^m = 0$ para todo $m \leq n_0$.
$* = -$, la subcategoría plena cuyos objetos son los complejos acotados por arriba (o por la derecha).
$* = b$, la subcategoría plena cuyos objetos son los complejos acotados por arriba y por abajo.

Así cuando escribamos $C^*(A)$ nos referimos a alguna de las tres subcategorías plenas de $C(A)$ que acabamos de mencionar.
De ahora en adelante vamos a suponer que $\mathcal{A}$ es una categoría abeliana.
Introducimos el automorfismo desplazamiento $T : C^*(A) \to C^*(A)$ dado por $T(X^\bullet) = X[1]^\bullet$ en objetos, donde para $n \in \mathbb{Z}$ tenemos $(X[n]^\bullet)^s = X^{n+s}$ y $d^s_{T(X^\bullet)} = -d^{s+1}_{X^\bullet}$ para todo $s \in \mathbb{Z}$.

Y en morfismos f el funtor T está dado por $T(f)^s = f^{s+1}$. El automorfismo inverso es $T^{-1}(X^\bullet) = X[-1]^\bullet$.
Sean $X^\bullet$ e $Y^\bullet$ dos complejos en $C^*(\mathcal{A})$. Obtenemos un complejo de grupos abelianos $\mathrm{Hom}^\bullet(X^\bullet, Y^\bullet)$, tomando como componentes

$$\mathrm{Hom}^k(X^\bullet, Y^\bullet) = \{(u^m)_{m\in\mathbb{Z}} : u^m : X^m \to Y^{m+k} \text{ morfismo}\}$$

y la diferencial $d^k : \mathrm{Hom}^k(X^\bullet, Y^\bullet) \to \mathrm{Hom}^{k+1}(X^\bullet, Y^\bullet)$ dada por

$$d^k(u^m) = d^{k+m}_{Y^\bullet} \circ u^m + (-1)^{k+1} u^{m+1} \circ d^m_{X^\bullet}.$$

Cuando tengamos $u \in \mathrm{Hom}^k(X^\bullet, Y^\bullet)$ diremos que u es de grado k. Además recordemos que estos morfismos de grado k deben de satisfacer la conmutatividad con las diferenciales de cada complejo, tomando en cuenta el signo que el funtor desplazamiento aporta a las diferenciales.

Definición 2.24. Sean $X^\bullet$ e $Y^\bullet$ dos complejos en $C^*(\mathcal{A})$.
a) Decimos que un morfismo $u : X^\bullet \to Y^\bullet$ es un **casi isomorfismo** si el morfismo inducido al nivel de cohomología $u^* : H^k(X^\bullet) \to H^k(Y^\bullet)$ es un isomorfismo para todo k.
b) Sean $u, v : X^\bullet \to Y^\bullet$ dos morfismos de complejos. Decimos que u y v son **homótopos** si existe $h \in \mathrm{Hom}^{-1}(X^\bullet, Y^\bullet)$ tal que $u - v = d_{Y^\bullet} h + h d_{X^\bullet}$.

$$\begin{tikzcd}
\cdots \arrow[r] & X^{k-1} \arrow[r, "d^{k-1}_{X^\bullet}"] \arrow[d] \arrow[dl, "h"] & X^k \arrow[r, "d^k_{X^\bullet}"] \arrow[d] \arrow[dl, "h"] & X^{k+1} \arrow[r] \arrow[d] \arrow[dl, "h"] & \cdots \\
\cdots \arrow[r] & Y^{k-1} \arrow[r, "d^{k-1}_{Y^\bullet}"'] & Y^k \arrow[r, "d^k_{Y^\bullet}"'] & Y^{k+1} \arrow[r] & \cdots
\end{tikzcd}$$

Dicho morfismo h es llamado una **homotopía** entre u y v y usamos la notación $u \simeq v$ para indicar que u y v son homótopos.
c) Decimos que un morfismo $u : X^\bullet \to Y^\bullet$ es una **equivalencia homotópica** si existe un morfismo $v : Y^\bullet \to X^\bullet$ tal que $v \circ u \simeq Id_{X^\bullet}$ y $u \circ v \simeq Id_{Y^\bullet}$.

Lema 2.25. Sean $u, v : X^\bullet \to Y^\bullet$ dos morfismos. Si u es homótopo a v, entonces los morfismos inducidos en la cohomología u^* y v^* son iguales.

Demostración. Tenemos que por ser $u \simeq v$, existe $h \in \mathrm{Hom}^{-1}(X^\bullet, Y^\bullet)$ tal que $d_Y \circ h + h \circ d_X = u - v$. Tomando el morfismo inducido de la igualdad tenemos $0 = (d_Y \circ h + h \circ d_X)^* = (u - v)^* = u^* - v^*$ y así $u^* = v^*$. ∎

De este lema se sigue que si u es una equivalencia homotópica entonces es un casi isomorfismo.
Notemos que para todo $C^\bullet \in Ob(C(\mathcal{A}))$ es equivalente:
a) $C^\bullet$ es exacto, i.e. exacto en cada C^n.
b) $C^\bullet$ es acíclico.
c) El morfismo $0^\bullet \to C^\bullet$ es casi isomorfismo, donde $0^\bullet$ es el complejo cuyas componentes y morfismos son todos cero.
Pues $C^\bullet$ es exacto si y sólo si $H^n(C^\bullet) = \mathrm{Ker}(d^n)/\mathrm{Im}(d^{n-1}) = 0$ para todo $n \in \mathbb{Z}$. Además $0^\bullet \to C^\bullet$ es casi isomorfismo si y sólo si $0 = H^n(C^\bullet)$ para todo $n \in \mathbb{Z}$.

Definición 2.26. Sea $u : X^\bullet \to Y^\bullet$ un morfismo de complejos en $C^*(\mathcal{A})$. El **cono del morfismo** de u es el complejo en $C^*(\mathcal{A})$ dado por

$$C_u^\bullet = Y^\bullet \oplus (X^\bullet[1]),$$

donde $d_u(y,x) = (dy+u(x), -dx)$. También se denota al cono del morfismo u como $Cone(u)$ o $Cone(u : X^\bullet \to Y^\bullet)$.

Proposición 2.27. (i) Sea $u : X^\bullet \to Y^\bullet$ un morfismo de complejos en $C^*(\mathcal{A})$. Los conos de los morfismos $Cone(u)$ y $Cone(-u)$ son isomorfos vía el morfismo $(y,x) \overset{f}{\mapsto} (y,-x)$.
(ii) Consideremos el siguiente diagrama conmutativo en $C^*(\mathcal{A})$

$$\begin{tikzcd}
X^\bullet \arrow[r, "u"] \arrow[d, "a"] & Y^\bullet \arrow[d, "b"] \\
X[1]^\bullet \arrow[r, "v"] & Y[1]^\bullet
\end{tikzcd}$$

entonces existe un morfismo de complejos $(a,b) : Cone(u) \to Cone(v)[1]$, dado por $(y,x) \mapsto (b(y), a(x))$.

Demostración. (i) Tenemos el siguiente diagrama

$$\begin{tikzcd}
C_u^\bullet : \cdots \arrow[r] & Y^{n-1} \oplus X^n \arrow[r, "d_u^{n-1}"] \arrow[d, "f^{n-1}"] & Y^n \oplus X^{n+1} \arrow[r, "d_u^n"] \arrow[d, "f^n"] & Y^{n+1} \oplus X^{n+2} \arrow[r] \arrow[d, "f^{n+1}"] & \cdots \\
C_{-u}^\bullet : \cdots \arrow[r] & Y^{n-1} \oplus X^n \arrow[r, "d_{-u}^{n-1}"] & Y^n \oplus X^{n+1} \arrow[r, "d_{-u}^n"] & Y^{n+1} \oplus X^{n+2} \arrow[r] & \cdots
\end{tikzcd}$$

Probaremos que el diagrama conmuta, i.e. $f^{n+1} \circ d_u^n = d_{-u}^n \circ f^n$. Sea $(y,x) \in Y^n \oplus X^{n+1}$. Luego

$$f^{n+1} \circ d_u^n(y,x) = f^{n+1}(d_Y^n(y) + u^{n+1}(x), -d_X^{n+1}(x)) = (d_Y^n(y) + u^{n+1}(x), d_X^{n+1}(x)) \quad \text{y}$$

$$d_{-u}^n \circ f^n(y,x) = d_{-u}^n(y,-x) = (d_Y^n(y)+[-u^{n+1}(-x)], -d_X^{n+1}(-x)) = (d_Y^n(y)+u^{n+1}(x), d_X^{n+1}(x)).$$

Además es claro que cada f^n es un isomorfismo. Por lo tanto f es un isomorfismo de complejos.

(ii) Tenemos el siguiente diagrama conmutativo

$$\begin{tikzcd}
X^n \arrow[r, "u^n"] \arrow[d, "a^n"'] & Y^n \arrow[d, "b^n"] \\
X^{n+1} \arrow[r, "v^{n+1}"'] & Y^{n+1}
\end{tikzcd}$$

para todo $n \in \mathbb{Z}$. Queremos probar que el diagrama

$$\begin{tikzcd}
C_u^\bullet : \cdots \arrow[r] & Y^{n-1} \oplus X^n \arrow[r, "d_u^{n-1}"] \arrow[d, "(a,b)^{n-1}"] & Y^n \oplus X^{n+1} \arrow[r, "d_u^n"] \arrow[d, "(a,b)^n"] & Y^{n+1} \oplus X^{n+2} \arrow[r] \arrow[d, "(a,b)^{n+1}"] & \cdots \\
C_v[1]^\bullet : \cdots \arrow[r] & Y^n \oplus X^{n+1} \arrow[r, "d_v^n"] & Y^{n+1} \oplus X^{n+2} \arrow[r, "d_v^{n+1}"] & Y^{n+2} \oplus X^{n+3} \arrow[r] & \cdots
\end{tikzcd}$$

es conmutativo. Donde $(a,b)^n : Y^n \oplus X^{n+1} \to Y^{n+1} \oplus X^{n+2}$ es tal que $(a,b)^n(y,x) = (b^n(y), a^{n+1}(x))$, con $(y,x) \in Y^n \oplus X^{n+1}$. Sea $(y,x) \in Y^n \oplus X^{n+1}$. Luego

$$\begin{aligned}(a,b)^{n+1} \circ d_u^n(y,x) &= (a,b)^{n+1}(d_Y^n(y) + u^{n+1}(x), -d_X^{n+1}(x)) \\ &= (b^{n+1}(d_Y^n(y) + u^{n+1}(x)), a^{n+2}(-d_X^{n+1}(x))) \\ &= (b^{n+1} \circ d_Y^n(y) + b^{n+1} \circ u^{n+1}(x), -a^{n+2} \circ d_X^{n+1}(x)).\end{aligned}$$

Además

$$\begin{aligned}d_v^{n+1} \circ (a,b)^n(y,x) &= d_v^{n+1}(b^n(y), a^{n+1}(x)) \\ &= (d_Y^{n+1} \circ b^n(y) + v^{n+2} \circ a^{n+1}(x), -d_X^{n+2} \circ a^{n+1}(x)) \\ &= (b^{n+1} \circ d_Y^n(y) + b^{n+1} \circ u^{n+1}(x), -a^{n+2} \circ d_X^{n+1}(x)).\end{aligned}$$

Entonces $(a,b)^{n+1} \circ d_u^n = d_v^{n+1} \circ (a,b)^n$. Y así tenemos que (a,b) es un morfismo de complejos. ■

El cono del morfismo u da lugar a un triángulo, llamado **estándar**:

$$T_u : X^\bullet \xrightarrow{u} Y^\bullet \xrightarrow{q} C_u^\bullet \xrightarrow{p} X[1]^\bullet$$

donde q es la inclusión en el primer factor y p es la proyección. Tal triángulo se denota algunas veces como:

$$\begin{tikzcd} X^\bullet \arrow[rr] & & Y^\bullet \arrow[dl] \\ & C_u^\bullet \arrow[ul, "{[1]}"] & \end{tikzcd}$$

Lema 2.28. (i) La composición de dos morfismos consecutivos en el triángulo T_u es homótopa a 0.
(ii) Para cualquier complejo $X^\bullet$, el cono del morfismo identidad $C^\bullet_{Id_{X^\bullet}}$ es homótopo al complejo cero.
(iii) Si $u \simeq v$, entonces existe un isomorfismo de complejos $f : C_u^\bullet \to C_v^\bullet$ tal que el siguiente diagrama conmuta

$$\begin{tikzcd} & C_u^\bullet \arrow[dd, "\cong"', "f"] \arrow[dr, "p"] & \\ Y^\bullet \arrow[ur, "q"] \arrow[dr, "q"'] & & X[1]^\bullet \\ & C_v^\bullet \arrow[ur, "p"'] & \end{tikzcd}$$

Demostración. (i) Consideremos $p_X \in \mathrm{Hom}^{-1}_{C(\mathcal{A})}(X^\bullet, C_u^\bullet)$ donde $p_X^n : X^n \to Y^{n-1} \oplus X^n$ está definida como $p_X^n(x) := (0,x)$, para $x \in X^n$ y $n \in \mathbb{Z}$. Luego

$$\begin{aligned}p_X^{n+1} \circ d_X^n(x) + d_u^{n-1} \circ p_X^n(x) &= (0, d_X^n(x)) + d_u^{n-1}(0,x) \\ &= (0, d_X^n(x)) + (u^n(x), -d_X^n(x)) \\ &= (u^n(x), 0) \\ &= q^n \circ u^n(x).\end{aligned}$$

Así $p_X \circ d_X + d_u \circ p_X = q \circ u$ y por lo tanto $q \circ u \simeq 0$.
Notemos que $p^n \circ q^n = 0$ para toda $n \in \mathbb{Z}$. Por lo tanto $p \circ q \simeq 0$.
Ahora consideremos $i \in \mathrm{Hom}_{C(\mathcal{A})}(C_u^\bullet, Y^\bullet) = \mathrm{Hom}^{-1}_{C(\mathcal{A})}(C_u^\bullet, Y[1]^\bullet)$, donde $i^n : Y^n \oplus X^{n+1} \to Y^n$ está definida como $i^n(y) = (0, y)$, para $y \in Y^n$ y $n \in \mathbb{Z}$. Luego

$$\begin{aligned} i^{n+1} \circ d_u^n(y,x) - d_Y^n \circ i^n(y,x) &= i^{n+1}(d_Y^n(y) + u^{n+1}(x), -d_u^{n+1}(x)) - d_Y^n(y) \\ &= d_Y^n(y) + u^{n+1}(x) - d_Y^n(y) \\ &= u^{n+1}(x). \end{aligned}$$

Donde el signo menos se obtiene de que $d^{n-1}_{T(X^\bullet)} = -d_X^n$. Así $i \circ d_u - d_Y \circ i = u \circ p$ y por lo tanto $u \circ p \simeq 0$.

(ii) Consideremos $k \in \mathrm{Hom}^{-1}_{C(\mathcal{A})}(C^\bullet_{Id_X}, C^\bullet_{Id_X})$, donde $k^n : X^n \oplus X^{n+1} \to X^{n-1} \oplus X^n$ se define como $k^n(x, x') := (0, x)$, para $(x, x') \in X^n \oplus X^{n+1}$. Luego

$$\begin{aligned} k^{n+1} \circ d^n_{Id_X}(x,x') + d^{n-1}_{Id_X} \circ k^n(x,x') &= k^{n+1}(d_X^n(x) + x', -d_X^{n+1}(x')) + d^{n-1}_{Id_X}(0,x) \\ &= (0, d_X^n(x) + x') + (x, -d_X^n(x)) \\ &= (x, x') \\ &= Id_{C^\bullet_{Id_X}}(x,x'). \end{aligned}$$

Así $k \circ d_{Id_X\bullet} + d_{Id_X\bullet} \circ k = Id_{C^\bullet_{Id_X}}$ y por lo tanto $Id_{C^\bullet_{Id_X}} \simeq 0 = Id_0$. Y trivialmente el morfismo cero hace que $Id_0 \simeq 0$. Entonces $C^\bullet_{Id_{X^\bullet}} \simeq 0$.

(iii) Sea $f \in \mathrm{Hom}_{C(\mathcal{A})}(C_u^\bullet, C_v^\bullet)$, donde $f^n : C_u^n \to C_v^n$ se define como $f^n(y,x) := (y + k^{n+1}(x), x)$, para $(y, x) \in C_u^n$, donde k es el morfismo de homotopía entre u y v. Y sea $g \in \mathrm{Hom}_{C(\mathcal{A})}(C_v^\bullet, C_u^\bullet)$, donde $g^n : C_v^n \to C_u^n$ se define como $g^n(y', x') := (y' - k^{n+1}(x'), x')$, para $(y', x') \in C_v^n$.
Veamos que g es el inverso de f. Tenemos que $g^n \circ f^n(y,x) = g^n(y + k^{n+1}(x), x) = (y + k^{n+1}(x) - k^{n+1}(x), x) = (y, x)$. Además $f^n \circ g^n(y', x') = f^n(y' - k^{n+1}(x'), x') = (y' - k^{n+1}(x') + k^{n+1}(x'), x') = (y', x')$.
Para $y \in Y^n$, tenemos $f^n \circ q^n(y) = f^n(y, 0) = (y, 0) = q^n(y)$. Y para $(y, x) \in C_u^n$, tenemos $p^n \circ f^n(y,x) = p^n(y + k^{n+1}(x), x) = x = p(y,x)$. Por lo tanto el diagrama conmuta. ■

Proposición 2.29. A un triángulo T_u como el que se describió se le asocia una sucesión exacta larga en cohomología

$$\cdots \to H^k(Y^\bullet) \xrightarrow{q^*} H^k(C_u^\bullet) \xrightarrow{p^*} H^{k+1}(X^\bullet) \xrightarrow{u^* = \delta} H^{k+1}(Y^\bullet) \to \cdots$$

Demostración. A la sucesión exacta corta en $C^*(\mathcal{A})$

$$0 \longrightarrow Y^\bullet \xrightarrow{q} C_u^\bullet \xrightarrow{p} T(X^\bullet) \longrightarrow 0$$

está asociada la sucesión exacta larga de cohomología en $\mathcal{A}$

$$\cdots \to H^k(Y^\bullet) \xrightarrow{q^*} H^k(C_u^\bullet) \xrightarrow{p^*} H^k(T(X^\bullet)) \xrightarrow{\delta} H^{k+1}(Y^\bullet) \to \cdots$$

por el Teorema 2.22. Sea $\xi \in H^k(T(X^\bullet)) = H^{k+1}(X^\bullet)$ representado por $x \in \mathrm{Ker}(d_X^{n+1}) \subset X^{k+1}$. Tenemos que $p(0,x) = x$ y $q \circ u(x) = d_u(0,x)$, por lo tanto $\delta(\xi) = [u(x)]$. Y así $\delta = u^*$. ■

Podemos ver del resultado anterior que hay una relación entre las sucesiones exactas cortas y los triángulos estándar, además de tener el resultado anterior que es análogo al Teorema 2.22. que nos permite obtener una sucesión exacta larga en la cohomología.

Corolario 2.30. Un morfismo u es un casi isomorfismo si y sólo si el correspondiente cono del morfismo $C_u^\bullet$ es acíclico.

Demostración. Tenemos la sucesión exacta larga de cohomología de la Proposición anterior. Supongamos que u es un casi isomorfismo, entonces u^* es un isomorfismo y así $H^k(Y^\bullet) = \mathrm{Im}(u^*) = \mathrm{Ker}(q^*)$ y por lo tanto $q^* \equiv 0$, además $\mathrm{Im}(p^*) = \mathrm{Ker}(u^*) = \{0\}$ y por lo tanto $p^* \equiv 0$. Entonces $\{0\} = \mathrm{Im}(q^*) = \mathrm{Ker}(p^*) = H^k(C_u^\bullet)$ para toda $k \in \mathbb{Z}$. Por lo tanto $C_u^\bullet$ es acíclico.
Ahora supongamos que $C_u^\bullet$ es acíclico, entonces $H^k(C_u^\bullet) = 0$ para todo $k \in \mathbb{Z}$. Por lo que $\mathrm{Im}(u^*) = \mathrm{Ker}(q^*) = H^k(Y^\bullet)$, i.e. u^* es sobreyectiva e $0 = \mathrm{Im}(p^*) = \mathrm{Ker}(u^*)$, i.e. u^* es inyectiva. Luego u^* es isomorfismo. ■

A partir de ahora a un casi isomorfismo $f \in Hom_{C^*(\mathcal{A})}(X^\bullet, Y^\bullet)$ lo denotaremos como $X^\bullet \xrightarrow[\sim]{} Y^\bullet$

Proposición 2.31. Sea

$$0 \to X^\bullet \xrightarrow{u} Y^\bullet \xrightarrow{v} Z^\bullet \to 0$$

una sucesión exacta en $C^*(A)$. Entonces
(i) Existe un casi isomorfismo m tal que

$$\begin{tikzcd} C_u^\bullet \arrow[rr, "m", "\sim"'] & & Z^\bullet \\ & Y^\bullet \arrow[ul, "q"] \arrow[ur, "v"'] & \end{tikzcd}$$

es un diagrama conmutativo, con la inclusión q.
(ii) Si existe un morfismo $s : Z^\bullet \to Y^\bullet$ tal que $v \circ s = Id_{Z^\bullet}$, entonces m es una equivalencia homotópica.

Demostración. (i) El morfismo m definido como $m(y,x) := v(y)$ hace conmutar el diagrama. Consideremos el siguiente diagrama conmutativo

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & X^\bullet \arrow[r, "u"] & Y^\bullet \arrow[r, "v"] & Z^\bullet \arrow[r] & 0 \\ & X^\bullet \arrow[r, "-u"'] \arrow[u, "Id_{X^\bullet}"] & Y^\bullet \arrow[r, "-q"'] \arrow[u, "-Id_{Y^\bullet}"] & C_u^\bullet \arrow[r, "-p"'] \arrow[u, "m"] & T(X^\bullet) \end{tikzcd}$$

Las sucesiones exactas largas de cohomología forman el siguiente diagrama conmutativo

$$\begin{array}{ccccccccccc}
\cdots \longrightarrow & H^k(X^\bullet) & \xrightarrow{u^*} & H^k(Y^\bullet) & \xrightarrow{v^*} & H^k(Z^\bullet) & \xrightarrow{\delta} & H^{k+1}(X^\bullet) & \xrightarrow{u^*} & H^{k+1}(Y^\bullet) & \longrightarrow \cdots \\
& {\scriptstyle Id_{H(X^\bullet)}}\uparrow & & {\scriptstyle -Id_{H(Y^\bullet)}}\uparrow & & {\scriptstyle m^*}\uparrow & & {\scriptstyle Id_{H(X^\bullet)}}\uparrow & & {\scriptstyle -Id_{H(Y^\bullet)}}\uparrow & \\
\cdots \longrightarrow & H^k(X^\bullet) & \xrightarrow{-u^*} & H^k(Y^\bullet) & \xrightarrow{-q^*} & H^k(C_u^\bullet) & \xrightarrow{-p^*} & H^{k+1}(X^\bullet) & \xrightarrow{-u^*} & H^{k+1}(Y^\bullet) & \longrightarrow \cdots
\end{array}$$

donde $Id_{H(X^\bullet)}$ y $Id_{H(Y^\bullet)}$ son isomorfismos y aplicando el 5-Lema (Lema 2.21) tenemos que m^* es isomorfismo.

(ii) Sea $s : Z^\bullet \to Y^\bullet$ un morfismo tal que $v \circ s = Id_{Z^\bullet}$. Definimos un morfismo $r \in \mathrm{Hom}_{C^*(\mathcal{A})}(Z^\bullet, C_u^\bullet)$ como $r^n(z) := (s^n(z), 0)$, para $z \in Z^k$. Es claro que $m \circ r = Id_{Z^\bullet}$. Si $(y, x) \in C_u^k$, entonces $r \circ m(y, x) = r(v(y)) = (s \circ v(y), 0)$. Ahora veamos que $r \circ m \simeq Id_{C_u^\bullet}$. Definimos $k \in \mathrm{Hom}^{-1}(C_u^\bullet, C_u^\bullet)$ tal que $k(y, x) = (0, x')$, donde $x' \in X^k$ es el único elemento tal que $u(x') = y - s \circ v(y)$, el cual existe pues $y - s \circ v(y) \in \mathrm{Ker}(v) = \mathrm{Im}(u)$ y es único pues u es inyectiva. Luego, tenemos que

$$d_u \circ k(y, x) = d_u(0, x') = (u(x'), -d_X(x')) = (y - s \circ v(y), -d_X(x')) \quad \text{y}$$

$$k \circ d_u(y, x) = k(d_Y(y) + u(x), -d_X(x)) = (0, x + d_X(x')),$$

donde

$$\begin{aligned}
u(x + d_X(x')) &= u(x) + u(d_X(x')) \\
&= u(x) + d_Y \circ u(x') \\
&= u(x) + d_Y(y - s \circ v(y)) \\
&= u(x) + d_Y(y) - d_Y \circ s \circ v(y) \\
&= d_Y(y) + u(x) - s \circ v(d_y(y)).
\end{aligned}$$

Así que $(d_u \circ k + k \circ d_u)(y, x) = (y - s \circ v(y), x) = (Id_{C_u^\bullet} - rm)(y, x)$. Por lo tanto m es una equivalencia homotópica.

■

Capítulo 3

Categorías homótopas $K^*(\mathcal{A})$

En este capítulo construiremos la categoría homótopa $K^*(\mathcal{A})$, partiendo de la categoría $C^*(\mathcal{A})$. Veremos que $K^*(\mathcal{A})$ es una categoría aditiva dotada de una familia de "triángulos distinguidos"que reemplazan la noción de sucesiones exactas cortas. Las referencias de este capítulo pueden encontrarse en [1] y [2].

Definición 3.1. Sea $\mathcal{A}$ una categoría abeliana. Definimos la **categoría homótopa** de complejos de $\mathcal{A}$, que denotamos por $K^*(\mathcal{A})$, fijando los objetos como

$$Ob(K^*(\mathcal{A})) = Ob(C^*(\mathcal{A})),$$

y los morfismos como

$$\mathrm{Hom}_{K^*(\mathcal{A})}(X^\bullet, Y^\bullet) = \mathrm{Hom}_{C^*(\mathcal{A})}(X^\bullet, Y^\bullet)/\sim = H^0(\mathrm{Hom}^\bullet(X^\bullet, Y^\bullet))$$

donde la relación de equivalencia en los morfismos está dada por $u \sim v$ si y sólo si u es homótopo a v.

Nota 3.2. (i) La categoría $K^*(\mathcal{A})$ es aditiva, pero no necesariamente abeliana. Por ejemplo $K^*(\mathcal{A}b)$ no es abeliana. Por lo tanto, no podemos hablar de sucesiones exactas cortas, núcleos o imágenes. Las sucesiones exactas cortas son reemplazadas por la noción mas abstracta de triángulos exactos o distinguidos, esta definición se verá más adelante.

(ii) Para un morfismo $\varphi \in \mathrm{Hom}_{K^*(\mathcal{A})}(X^\bullet, Y^\bullet)$ en esta nueva categoría, el correspondiente cono del morfismo $C^\bullet_\varphi$ es definido salvo isomorfismos en $K^*(\mathcal{A})$, i.e. salvo equivalencia homotópica en $C^*(\mathcal{A})$.

(iii) Tenemos el siguiente diagrama

$$\begin{tikzcd} C^*(\mathcal{A}) \arrow[rr, "H^k"] \arrow[dr, "h"'] & & \mathcal{A} \\ & K^*(\mathcal{A}) \arrow[ur, "H^k"'] & \end{tikzcd}$$

donde h se comporta como la identidad en los objetos de $C^*(\mathcal{A})$ y a cada morfismo de $C^*(\mathcal{A})$ lo envía en su clase de equivalencia en $K^*(\mathcal{A})$. Luego $u \simeq v$ implica que $H^k(u) = H^k(v)$ para todo entero k.

(iv) La categoría $K^*(\mathcal{A})$ tiene un funtor desplazamiento definido exactamente como el funtor desplazamiento en la categoría $C^*(\mathcal{A})$.

Un **triángulo** en $K^*(\mathcal{A})$ consta de tres complejos $X^\bullet$, $Y^\bullet$ y $Z^\bullet$ y tres morfismos en $K^*(\mathcal{A})$ a, b y c. Tales que forman la siguiente sucesión

$$X^\bullet \xrightarrow{a} Y^\bullet \xrightarrow{b} Z^\bullet \xrightarrow{c} X[1]^\bullet$$

Por definición un **morfismo de triángulos** (f, g, h) de $X^\bullet \to Y^\bullet \to Z^\bullet \to X[1]^\bullet$ a $A^\bullet \to B^\bullet \to C^\bullet \to A[1]^\bullet$ está dado por el diagrama conmutativo en $K^*(\mathcal{A})$ del siguiente tipo

$$\begin{tikzcd} X^\bullet \arrow[r] \arrow[d, "f"] & Y^\bullet \arrow[r] \arrow[d, "g"] & Z^\bullet \arrow[r] \arrow[d, "h"] & X[1]^\bullet \arrow[d, "f[1]"] \\ A^\bullet \arrow[r] & B^\bullet \arrow[r] & C^\bullet \arrow[r] & A[1]^\bullet \end{tikzcd}$$

y cuando f, g y h son isomorfismos en $K^*(\mathcal{A})$ decimos que (f, g, h) es **isomorfismo de triángulos**.

Definición 3.3. Sea $\boldsymbol{T}$ la familia de triángulos en $K^*(\mathcal{A})$ que son isomorfos a un triángulo estándar T_u asociado a algún morfismo u en $C^*(\mathcal{A})$. Esta familia es por definición la familia de **triángulos distinguidos**, o exactos en $K^*(\mathcal{A})$.

Notemos que una sucesión exacta como en la situación de la Proposición 2.31. ii) en $C^*(\mathcal{A})$ induce un triángulo distinguido en $K^*(\mathcal{A})$. Pues $C_u^\bullet$ es homotópicamente equivalente a $Z^\bullet$ en $C^*(\mathcal{A})$, entonces $C_u^\bullet$ es isomorfo a $Z^\bullet$ en $K^*(\mathcal{A})$ y así T_u es isomorfo al triángulo de $Z^\bullet$ y por lo tanto

$$X^\bullet \xrightarrow{u} Y^\bullet \longrightarrow Z^\bullet \longrightarrow X[1]^\bullet$$

es un triángulo distinguido.

Proposición 3.4. Los triángulos distinguidos en $K^*(\mathcal{A})$ tienen las siguientes propiedades.

Tr1) Cualquier triángulo isomorfo a un triángulo distinguido es distinguido. Para cualquier objeto $X^\bullet$, el triángulo $X^\bullet \to X^\bullet \to 0 \to X[1]^\bullet$ donde el primer morfismo es la identidad es distinguido. Cualquier morfismo $u : X^\bullet \to Y^\bullet$ es parte de un triángulo distinguido $X^\bullet \stackrel{u}{\to} Y^\bullet \to Z^\bullet \to X[1]^\bullet$.

Tr2) Un triángulo $X^\bullet \stackrel{u}{\to} Y^\bullet \stackrel{v}{\to} Z^\bullet \stackrel{w}{\to} X[1]^\bullet$ es distinguido si y sólo si el triángulo $Y^\bullet \stackrel{v}{\to} Z^\bullet \stackrel{w}{\to} X[1]^\bullet \stackrel{-u[1]}{\to} Y[1]^\bullet$ es distinguido.

Tr3) Cualquier diagrama

$$\begin{array}{ccccccc}
X^\bullet & \longrightarrow & Y^\bullet & \longrightarrow & Z^\bullet & \longrightarrow & X[1]^\bullet \\
\downarrow & & \downarrow & & & & \\
A^\bullet & \longrightarrow & B^\bullet & \longrightarrow & C^\bullet & \longrightarrow & A[1]^\bullet
\end{array}$$

donde las filas son triángulos distinguidos y el cuadrado conmuta se extiende a un morfismo de triángulos.

Tr4) Para cualquier par de morfismos $u : X^\bullet \to Y^\bullet$ y $v : Y^\bullet \to Z^\bullet$ y cualquier tripleta de triángulos distinguidos $X^\bullet \overset{u}{\to} Y^\bullet \overset{x}{\to} A^\bullet \to X[1]^\bullet$, $Y^\bullet \overset{v}{\to} Z^\bullet \to B^\bullet \overset{y}{\to} Y[1]^\bullet$ y $X^\bullet \overset{vu}{\to} Z^\bullet \to C^\bullet \to X[1]^\bullet$ hay morfismos $a : A^\bullet \to C^\bullet$, $b : C^\bullet \to B^\bullet$ tales que $(id_{X^\bullet}, v, a)$ y $(u, id_{Z^\bullet}, b)$ son morfismos de triángulos y el triángulo $A^\bullet \overset{a}{\to} C^\bullet \overset{b}{\to} B^\bullet \overset{x[1]y}{\to} A[1]^\bullet$ es distinguido.

La demostración de esta proposición puede encontrarse en [1] pág. 47.

Notemos que en Tr1 el triángulo $X^\bullet \overset{u}{\to} Y^\bullet \to Z^\bullet \to X[1]^\bullet$ es único salvo isomorfismos. En particular, uno puede tomar $Z^\bullet = Cone(u)$, y con dicha elección de $Z^\bullet$ y $C^\bullet$ en Tr3 el morfismo $Z^\bullet \to C^\bullet$ puede obtenerse como en la Proposición 2.27.

Definición 3.5. Una categoría aditiva $\mathcal{A}$ dotada con un automorfismo de desplazamiento T y una familia de triángulos distinguidos $\boldsymbol{T}$ es una **categoría triangulada** si estos satisfacen las propiedades Tr1 - Tr4, con $X[1] = TX$. Una subcategoría aditiva plena $\mathcal{D} \subset \mathcal{A}$ es llamada **subcategoría triangulada** si $T(\mathcal{D}) \subset \mathcal{D}$ y si dos vértices en un triángulo distinguido en $\boldsymbol{T}$ están en $\mathcal{D}$, entonces también está el tercero.

Un triángulo $X \to Y \to Z \to X[1]$ también se denota como $X \to Y \to Z \overset{+1}{\to} X$. Se sigue de la Proposición 3.4 que la categoría homótopa $K(\mathcal{A})$ es una categoría triangulada de manera natural, y la categoría $K^*(\mathcal{A})$ para $* = +, -, b$ es una subcategoría triangulada en $K(\mathcal{A})$.

Nota 3.6. En la categoría triangulada C cualquier morfismo $u : X \to Y$ es la base de un triángulo distinguido $X \to Y \to Z \to T(X)$ por el axioma Tr1 y además el objeto Z es único salvo isomorfismos. Sin embargo, no tenemos en general una construcción explícita de Z como el cono de u.
Uno puede definir en este sentido el cono $Cone(u)$ del morfismo $u : X \to Y$ como este objeto Z. Es uno de los puntos delicados de la teoría que no existe el funtor cono, el cual envía a cada morfismo $u : X \to Y$ a su respectivo cono $Cone(u)$. Esto viene del hecho de que sólo la clase de isomorfismos de Z está bien definida y el morfismo $Z \to C$ cuya existencia se establece en el axioma Tr3 no es único.

Definición 3.7. Sea $\mathcal{C}$ una categoría triangulada y $\mathcal{A}$ una categoría abeliana. Un funtor aditivo $F : \mathcal{C} \to \mathcal{A}$ es un **funtor cohomológico** si para cualquier triángulo distinguido en la categoría triangulada $\mathcal{C}$

$$X \to Y \to Z \overset{+1}{\to} X,$$

la sucesión asociada bajo el funtor F en la categoría $\mathcal{A}$

$$F(X) \to F(Y) \to F(Z)$$

es exacta. Si F es un funtor cohomológico, establecemos $F^i(X) = F(X[i]) = F \circ T^i(X)$. La familia de funtores F^i es **conservativa** si para cualquier triángulo distinguido

$$X \to Y \to Z \overset{+1}{\to} X$$

la sucesión larga

$$\cdots \to F^i(X) \to F^i(Y) \to F^i(Z) \to F^{i+1}(X) \to \cdots$$

es exacta.

Ejemplo 3.8. Si $\mathcal{A}$ es una categoría abeliana, entonces $H^0 : K^*(\mathcal{A}) \to \mathcal{A}$ es un funtor cohomológico y el sistema de funtores H^k es conservativo. Verifiquemos esto. Sea

$$X^\bullet \xrightarrow{u} Y^\bullet \longrightarrow Z^\bullet \longrightarrow X[1]^\bullet$$

un triángulo distinguido en $K^*(\mathcal{A})$, donde $Z^\bullet$ es isomorfo a $C_u^\bullet$. Ahora consideremos la sucesión exacta en $C^*(\mathcal{A})$

$$0 \longrightarrow Y^\bullet \xrightarrow{i} C_u^\bullet \xrightarrow{p} X[1]^\bullet \longrightarrow 0$$

a la cual se le asocia la sucesión exacta larga

$$\cdots \longrightarrow H^0(Y^\bullet) \longrightarrow H^0(C_u^\bullet) \longrightarrow H^0(X[1]^\bullet) \longrightarrow H^1(Y^\bullet) \longrightarrow H^1(C_u^\bullet) \longrightarrow \cdots$$

donde $H^n(C_u^\bullet) \simeq H^n(Z^\bullet)$, así tenemos la sucesión exacta larga

$$\cdots \longrightarrow H^0(Y^\bullet) \longrightarrow H^0(Z^\bullet) \longrightarrow H^1(X^\bullet) \longrightarrow H^1(Y^\bullet) \longrightarrow H^1(Z^\bullet) \longrightarrow \cdots$$

Por lo tanto H^0 es cohomológico y la familia de H^k, $k \in \mathbb{Z}$ es conservativa.

Definición 3.9. Sean $\mathcal{C}$ y $\mathcal{C}'$ dos categorías trianguladas. Un funtor $\mathcal{C} \to \mathcal{C}'$ es un **δ-funtor**, si F es compatible con el funtor de desplazamiento, i.e. $F \circ T = T \circ F$ y F transforma cualquier triángulo distinguido en $\mathcal{C}$ en un triángulo distinguido en $\mathcal{C}'$.

A un funtor como en la definición anterior también se le llama funtor de categorías trianguladas funtor exacto.

Ejemplo 3.10. El funtor $\mathrm{Hom}(A, \quad) : K(\mathcal{A}) \to K(\mathcal{A}b)$, donde $A \in Ob(K(\mathcal{A})^{op})$, es un δ-funtor.

Definición 3.11. Sea C una categoría triangulada. Decimos que un objeto Y en C es la **extensión** de un objeto Z por un objeto X si existe un triángulo distinguido en C de la forma $X \to Y \to Z \overset{+1}{\to} X$.
Una subcategoría D en C se dice que es **estable bajo extensiones** si para cualquier triángulo distinguido en C de la forma $X \to Y \to Z \overset{+1}{\to} X$, si X y Z son objetos en D, también lo es Y.

En particular una subcategoría triangulada $D \subset C$ como en la Definición 3.5 es estable bajo extensiones.

Capítulo 4

Categorías derivadas $D^*(\mathcal{A})$

La categoría derivada $D^*(\mathcal{A})$ es en cierto sentido la categoría más cercana a la categoría homótopa $K^*(\mathcal{A})$ tal que todos los casi isomorfismos en $K^*(\mathcal{A})$ se convierten en isomorfismos en $D^*(\mathcal{A})$. De hecho es una localización de la categoría homótopa respecto de los casi isomorfismos. Las referencias de este capítulo pueden encontrarse en [1] y [2].

Definición 4.1. La **categoría derivada** de la categoría abeliana $\mathcal{A}$ es la categoría triangulada $D^*(\mathcal{A})$ obtenida localizando la categoría homótopa $K^*(\mathcal{A})$ respecto del sistema multiplicativo formado por todos los casi isomorfismos en $K^*(\mathcal{A})$. Donde un casi isomorfismo en $K^*(\mathcal{A})$ es la imagen de un casi isomorfismo en $C^*(\mathcal{A})$ bajo el funtor $h : C^*(\mathcal{A}) \to K^*(\mathcal{A})$ de la Nota 3.2. iii).

Al nivel de objetos, tenemos $Ob(D^*(\mathcal{A})) = Ob(K^*(\mathcal{A})) = Ob(C^*(\mathcal{A}))$. Los morfismos en $\mathrm{Hom}_{D^*(\mathcal{A})}(X^\bullet, Y^\bullet)$ están dados por clases de equivalencia de diagramas $(Z^\bullet; s; u)$ en $K^*(\mathcal{A})$ del tipo

$$\begin{tikzcd} & Z^\bullet \arrow[dl, "s"', "\sim"] \arrow[dr, "u"] & \\ X^\bullet & & Y^\bullet \end{tikzcd}$$

donde el morfismo s es un casi isomorfismo. Decimos que el diagrama $(Z_1^\bullet; s_1; u_1)$ domina a otro diagrama $(Z_2^\bullet; s_2; u_2)$ si existe un diagrama conmutativo

$$\begin{tikzcd} & Z_1^\bullet \arrow[dl, "s_1"', "\sim"] \arrow[dr, "u_1"] \arrow[dd] & \\ X^\bullet & & Y^\bullet \\ & Z_2^\bullet \arrow[ul, "s_2", "\sim"'] \arrow[ur, "u_2"'] & \end{tikzcd}$$

Dos diagramas $(Z_1^\bullet; s_1; u_1)$ y $(Z_2^\bullet; s_2; u_2)$ son equivalentes si ambos son dominados por un tercer diagrama $(Z_3^\bullet; s_3; u_3)$.

También podemos definir a los morfismos en $D^*(\mathcal{A})$ como la clase de equivalencia de diagramas $(W^\bullet; t; v)$ en $K^*(\mathcal{A})$ del tipo

$$\begin{tikzcd} & W^\bullet & \\ X^\bullet \arrow[ur, "v"] & & Y^\bullet \arrow[ul, "t"', "\sim"] \end{tikzcd}$$

donde t es un casi isomorfismo. Y definimos que dos diagramas sean equivalentes de manera análoga a como se definió para el primer tipo de diagramas.

Sea $\mathcal{A}$ una categoría.
Un **sistema multiplicativo** en $\mathcal{A}$ es una familia $\Sigma_{\mathcal{A}} \subset Mor(\mathcal{A})$ de morfismos de $\mathcal{A}$ que verifica las propiedades siguientes:

FR1 : a) Si $s, t \in \Sigma_{\mathcal{A}}$ y si $s \circ t$ existe, entonces $s \circ t \in \Sigma_{\mathcal{A}}$.
b)Si $X \in Ob(\mathcal{A})$, entonces $Id_X \in \Sigma_{\mathcal{A}}$.

FR2 : Sean $X, Y, Z \in Ob(\mathcal{A})$. Si $u \in \operatorname{Hom}_{\mathcal{A}}(X, Y)$ (respectivamente $u \in \operatorname{Hom}_{\mathcal{A}}(Y, X)$) y $s \in \operatorname{Hom}_{\mathcal{A}}(Z, Y) \cap \Sigma_{\mathcal{A}}$ (respectivamente $s \in \operatorname{Hom}_{\mathcal{A}}(Y, Z) \cap \Sigma_{\mathcal{A}}$) existe $W \in Ob(\mathcal{A})$ y dos morfismos $v \in \operatorname{Hom}_{\mathcal{A}}(W, Z)$ (respectivamente $v \in \operatorname{Hom}_{\mathcal{A}}(Z, W)$) y $t \in \operatorname{Hom}_{\mathcal{A}}(W, X) \cap \Sigma_{\mathcal{A}}$ (respectivamente $t \in \operatorname{Hom}_{\mathcal{A}}(X, W) \cap \Sigma_{\mathcal{A}}$) tales que el diagrama

$$\begin{tikzcd} W \arrow[r, "v"] \arrow[d, "t"'] & Z \arrow[d, "s"] \\ X \arrow[r, "u"'] & Y \end{tikzcd} \quad \text{(respectivamente} \quad \begin{tikzcd} W & Z \arrow[l, "v"] \\ X \arrow[u, "t"] & Y \arrow[l, "u"'] \arrow[u, "s"'] \end{tikzcd} \quad)$$

es conmutativo.

FR3 : Sean $X, Y \in Ob(\mathcal{A})$ y $u, v \in \operatorname{Hom}_{\mathcal{A}}(X, Y)$.
Las condiciones siguientes son equivalentes:
i) Existe $Y' \in Ob(\mathcal{A})$ y $s \in \operatorname{Hom}_{\mathcal{A}}(Y, Y') \cap \Sigma_{\mathcal{A}}$ tales que $s \circ u = s \circ v$.
ii) Existe $X' \in Ob(\mathcal{A})$ y $t \in \operatorname{Hom}_{\mathcal{A}}(X', X) \cap \Sigma_{\mathcal{A}}$ tales que $u \circ t = v \circ t$.

$$X' \xrightarrow{t} X \xrightarrow{u,v} Y \xrightarrow{s} Y'$$

Cuando no hay lugar a confusión escribimos Σ en vez de $\Sigma_{\mathcal{A}}$. Si Σ es un sistema multiplicativo en $\mathcal{A}$, existe una categoría A_Σ y un funtor

$$P_\Sigma : \mathcal{A} \to \mathcal{A}_\Sigma$$

que verifica las propiedades siguientes:
i) Si $s \in \Sigma$, entonces $P_\Sigma(s)$ es un isomorfismo en $\mathcal{A}_\Sigma$.
ii) Si $F : \mathcal{A} \to \mathcal{D}$ es un funtor que transforma a los elementos de Σ en isomorfismos de $\mathcal{D}$, entonces existe un único funtor $G : \mathcal{A}_\Sigma \to \mathcal{D}$ tal que el diagrama

$$\begin{tikzcd} \mathcal{A} \arrow[r, "F"] \arrow[d, "P_\Sigma"'] & \mathcal{D} \\ \mathcal{A}_\Sigma \arrow[ur, "G"'] & \end{tikzcd}$$

es conmutativo.
Tal categoría $\mathcal{A}_\Sigma$ se llama la **localización** de $\mathcal{A}$ respecto del sistema multiplicativo Σ y es única salvo isomorfismos.
La composición de dos morfismos $f \in Hom_{D^*(\mathcal{A})}(X^\bullet, Y^\bullet)$ y $g \in Hom_{D^*(\mathcal{A})}(Y^\bullet, Z^\bullet)$ representados por los diagramas $(W_1^\bullet; s; u)$ y $(W_2^\bullet; s'; u')$ respectivamente, está dada por la clase de equivalencia del morfismo $g \circ f \in Hom_{D^*(\mathcal{A})}(X^\bullet, Z^\bullet)$ representado por el diagrama $(W^\bullet; s \circ t; u' \circ v)$, donde $W^\bullet$, t y v existen por la propiedad FR2 de sistemas multiplicativos.

$$\begin{tikzcd}
& & W^\bullet \arrow[dl, "t"', "\sim"] \arrow[dr, "v"] & & \\
& W_1^\bullet \arrow[dl, "s"', "\sim"] \arrow[dr, "u"] & & W_2^\bullet \arrow[dl, "s'"', "\sim"] \arrow[dr, "u'"] & \\
X^\bullet & & Y^\bullet & & Z^\bullet
\end{tikzcd}$$

Nuevamente tenemos una definición análoga para la composición de morfismos en $D^*(\mathcal{A})$, usando los diagramas del segundo tipo.

Denotamos por $P^*_{\mathcal{A}} : K^*(\mathcal{A}) \to D^*(\mathcal{A})$ al funtor localización. Veamos que $P^*_{\mathcal{A}}$ es un δ-funtor. Tenemos que s es un casi isomorfismo en $K^*(\mathcal{A})$ si y sólo si el morfismo desplazado $T(s)$ es un casi isomorfismo y por la propiedad universal de $P^*_{\mathcal{A}}$, existe un único funtor $\widehat{T}$ tal que

$$\begin{tikzcd}
K^*(\mathcal{A}) \arrow[r, "T"] \arrow[d, "P^*_{\mathcal{A}}"'] & K^*(\mathcal{A}) \arrow[d, "P^*_{\mathcal{A}}"] \\
D^*(\mathcal{A}) \arrow[r, "\widehat{T}"'] & D^*(\mathcal{A})
\end{tikzcd}$$

conmuta y $\widehat{T}$ es un automorfismo de categorías. Entonces $\widehat{T}$ es el funtor de traslación en $D^*(\mathcal{A})$. Ahora, sea $\mathcal{T}$ la familia de triángulos en $D^*(\mathcal{A})$ que son isomorfos a la imagen del funtor $P^*_{\mathcal{A}}$ de un triángulo distinguido en $K^*(\mathcal{A})$. Como la familia $\mathcal{T}$ verifica las propiedades TR1-TR4, entonces $\mathcal{T}$ son triángulos distinguidos. Y al ser isomorfos a las imágenes de triángulos distinguidos por TR1 tenemos que las imágenes de triángulos distinguidos también son distinguidos. Así $P^*_{\mathcal{A}}$ es δ-funtor.
Bajo este funtor un morfismo $u : X^\bullet \to Y^\bullet$ es enviado a la clase del diagrama $(X^\bullet; Id_{X^\bullet}, u)$.
Si $s : X^\bullet \to Y^\bullet$ es un casi isomorfismo en $K^*(\mathcal{A})$, entonces es fácil verificar que el diagrama $(X^\bullet; s, Id_{X^\bullet})$, considerado como un elemento en $\mathrm{Hom}_{D^*(\mathcal{A})}(Y^\bullet, X^\bullet)$ es un inverso para $P^*_{\mathcal{A}}(s)$.
Pues las composiciones se pueden representar por los siguientes diagramas

$$\begin{tikzcd}
& & X^\bullet \arrow[dl, "Id_{X^\bullet}"', "\sim"] \arrow[dr, "Id_{X^\bullet}", "\sim"'] & & \\
& X^\bullet \arrow[dl, "Id_{X^\bullet}"', "\sim"] \arrow[dr, "s", "\sim"'] & & X^\bullet \arrow[dl, "s"', "\sim"] \arrow[dr, "Id_{X^\bullet}", "\sim"'] & \\
X^\bullet & & Y^\bullet & & X^\bullet
\end{tikzcd}$$

y

$$\begin{tikzcd}
 & & X^\bullet \arrow[dl, "Id_{X^\bullet}"', "\sim"] \arrow[dr, "Id_{X^\bullet}", "\sim"'] & & \\
 & X^\bullet \arrow[dl, "s"', "\sim"] \arrow[dr, "Id_{X^\bullet}", "\sim"'] & & X^\bullet \arrow[dl, "Id_{X^\bullet}"', "\sim"] \arrow[dr, "s", "\sim"'] & \\
Y^\bullet & & X^\bullet & & Y^\bullet
\end{tikzcd}$$

donde el primero es la identidad en $X^\bullet$ y el segundo está en la clase de la identidad en $Y^\bullet$ en $D^*(\mathcal{A})$. Pues el siguiente diagrama nos muestra que los morfismos representados por $(X^\bullet; Id_{X^\bullet} \circ s; Id_{X^\bullet} \circ s)$ y $(Y^\bullet; Id_{Y^\bullet}; Id_{Y^\bullet})$ son equivalentes.

$$\begin{tikzcd}
 & X^\bullet \arrow[dl, "s"', "\sim"] \arrow[dr, "s"] & \\
Y^\bullet & Y^\bullet \arrow[l, "s"', "\sim"] \arrow[r, "s"] \arrow[u, "Id_{Y^\bullet}"'] \arrow[d, "s"] & Y^\bullet \\
 & Y^\bullet \arrow[ul, "Id_{Y^\bullet}", "\sim"'] \arrow[ur, "Id_{Y^\bullet}"'] &
\end{tikzcd}$$

En este sentido s se convierte en un isomorfismo en la categoría derivada $D^*(\mathcal{A})$.

Definición 4.2. Un objeto I en una categoría abeliana $\mathcal{A}$ es **inyectivo** si para cualquier morfismo inyectivo $f : A \to B$ y un morfismo $\alpha : A \to I$, existe al menos un morfismo $\beta : B \to I$ tal que $\alpha = \beta \circ f$.

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & A \arrow[r, "f"] \arrow[d, "\alpha"'] & B \arrow[dl, "\exists\beta"] \\
 & I &
\end{tikzcd}$$

Y un objeto P es **proyectivo** si para cualquier morfismo sobreyectivo $g : B \to C$ y un morfismo $\gamma : P \to C$ existe al menos un morfismo $\beta : P \to B$ tal que $\gamma = g \circ \beta$.

$$\begin{tikzcd}
 & P \arrow[dl, "\exists\beta"'] \arrow[d, "\gamma"] & \\
B \arrow[r, "g"'] & C \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

Ejemplo 4.3. *(i)* Si $\mathcal{A}$ es la categoría $Vect_{\mathbb{K}}$, donde $\mathbb{K}$ es un campo, entonces cualquier objeto $X \in Ob(\mathcal{A})$ es inyectivo.

(ii) Si $\mathcal{A}$ es una categoría abeliana, I_1 e I_2 son inyectivos, entonces $I_1 \oplus I_2$ es inyectivo. Pues para $f : A \to B$ sobreyectiva y $\alpha : A \to I_1 \oplus I_2$, tenemos que si $p_j : I_1 \oplus I_2 \to I_j$ con $j = 1, 2$ son las proyecciones, entonces existen $\beta_j : B \to I_j$ con $j = 1, 2$ tales que el siguiente diagrama conmuta

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & A \arrow[r, "f"] \arrow[d, "p_j\circ\alpha"'] & B \arrow[dl, "\beta_j"] \\ & I_j & \end{tikzcd}$$

para $j = 1, 2$. Así definimos $\beta := \beta_1 \oplus \beta_2$, el cual satisface que $\beta \circ f = \alpha$.

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & A \arrow[r, "f"] \arrow[d, "\alpha"'] & B \arrow[dl, "\beta"] \\ & I_1 \oplus I_2 & \end{tikzcd}$$

(iii) Si $\mathcal{A}$ es una categoría abeliana, P_1 y P_2 son proyectivos, entonces $P_1 \oplus P_2$ es proyectivo. La prueba es análoga a la de inyectivos.

Proposición 4.4. Sea P un R-módulo libre, entonces P es proyectivo.

Demostración. Sean M, N R-módulos arbitrarios, $f : M \to N$ sobreyectiva y $\varphi : P \to N$ un morfismo. Consideremos la base $\{x_i\}_{i\in I}$ de P. Como f es sobreyectiva $\varphi(x_i) \in \mathrm{Im}(f)$ para cada $i \in I$, entonces existen $y_i \in M$ tales que $\varphi(x_i) = f(y_i)$. Como $\{x_i\}_{i\in I}$ es una base de P, $\psi(x_i) := y_i$ determina un morfismo. Además $f(\psi(x_i)) = f(y_i) = \varphi(x_i)$, por lo tanto $f \circ \psi = \varphi$ y así tenemos que P es proyectivo.

$$\begin{tikzcd} & P \arrow[dl, "\exists\psi"'] \arrow[d, "\varphi"] & \\ M \arrow[r, "f"] & N \arrow[r] & 0 \end{tikzcd}$$

■

Definición 4.5. Decimos que una categoría $\mathcal{A}$ tiene **suficientes inyectivos** si para cualquier objeto $X \in \mathcal{A}$ existe una sucesión exacta $0 \to X \to I$ en $\mathcal{A}$, con I un objeto inyectivo. Y decimos que tiene **suficientes proyectivos** si para cualquier objeto $X \in \mathcal{A}$ existe una sucesión exacta $P \to X \to 0$ en $\mathcal{A}$, con P un objeto proyectivo.

Ejemplo 4.6. Para cualquier anillo R, la categoría $\mathcal{M}od(R)$ tiene suficientes inyectivos y proyectivos. La prueba de esto puede encontrarse en [5] 1.10.1.

El interés en las categorías que tienen suficientes inyectivos viene esencialmente del siguiente resultado.

Proposición 4.7. Si $\mathcal{A}$ es una categoría abeliana con suficientes inyectivos, entonces para cualquier complejo $X^\bullet \in C^+(\mathcal{A})$ existe un casi isomorfismo $X^\bullet \to I^\bullet$ con $I^\bullet \in C^+(\mathcal{A})$ un complejo inyectivo.

La prueba puede encontrarse en [2] pág. 16.

Definición 4.8. En la situación de la proposición anterior $I^\bullet$ es llamada una **resolución inyectiva** del complejo $X^\bullet$. Análogamente se definen las resoluciones proyectivas.

Resoluciones como las inyectivas y proyectivas nos ayudarán a construir los funtores derivados en el teorema de existencia de funtores derivados.
Denotamos por $I(\mathcal{A})$ a la subcategoría plena de $\mathcal{A}$ formada por los objetos inyectivos de $\mathcal{A}$ y los morfismos en $\mathcal{A}$ entre ellos.

Lema 4.9. Si $X^\bullet \in K(\mathcal{A})$ es un complejo acíclico y si $Y^\bullet \in K^+(I(\mathcal{A}))$, entonces $\mathrm{Hom}_{K(\mathcal{A})}(X^\bullet, Y^\bullet) = 0$.

Demostración. Sea $u \in \mathrm{Hom}_{C(\mathcal{A})}(X^\bullet, Y^\bullet)$, debemos definir un morfismo $k \in \mathrm{Hom}^{-1}(X^\bullet, Y^\bullet)$ tal que $dk + kd = u$. Sin pérdida de generalidad podemos suponer $Y^p = 0$, para $p < 0$. Es claro que $k^p = 0$, para $p \leq 0$. Supongamos que hemos definido k^p, para $p \leq q$, con $q > 0$. Sea $x \in \mathrm{Im}(d_X^q) \subseteq X^{q+1}$ y sea $x' \in X^q$ tal que $d_X^q(x') = x$. Si $x'' \in X^q$ es tal que $d_X^q(x'') = x$, entonces tenemos que $u^q(x') - d_{Y^\bullet}^{q-1} \circ k^q(x') = u^q(x'') - d_{Y^\bullet}^{q-1} \circ k^q(x'')$. Pues como $x' - x'' \in \mathrm{Ker}(d_{X^\bullet}^q)$, entonces $x' - x'' \in \mathrm{Im}(d_{X^\bullet}^{q-1})$, por lo que existe $w \in X^{q-1}$ tal que $d_{X^\bullet}^{q-1}(w) = x' - x''$. Luego, usando que $k^q \circ d_{X^\bullet}^{q-1} + d_{Y^\bullet}^{q-2} \circ k^{q-1} = u^{q-1}$ y que u es morfismo, tenemos

$$\begin{aligned}
(u^q - d_{Y^\bullet}^{q-1} \circ k^q)(x' - x'') &= (u^q - d_{Y^\bullet}^{q-1} \circ k^q)(d_{X^\bullet}^{q-1}(w)) \\
&= u^q \circ d_{X^\bullet}^{q-1}(w) - d_{Y^\bullet}^{q-1} \circ k^q \circ d_{X^\bullet}^{q-1}(w) \\
&= u^q \circ d_{X^\bullet}^{q-1}(w) - d_{Y^\bullet}^{q-1} \circ (u^{q-1} - d_{Y^\bullet}^{q-2} \circ k^{q-1})(w) \\
&= u^q \circ d_{X^\bullet}^{q-1}(w) - d_{Y^\bullet}^{q-1} \circ u^{q-1}(w) + d_{Y^\bullet}^{q-1} \circ d_{Y^\bullet}^{q-2} \circ k^{q-1}(w) \\
&= u^q \circ d_{X^\bullet}^{q-1}(w) - d_{Y^\bullet}^{q-1} \circ u^{q-1}(w) \\
&= 0.
\end{aligned}$$

Y así tenemos lo deseado. Luego podemos definir $k^{q+1} : \mathrm{Im}(d_X^q) \to Y^q$, como $k^{q+1}(x) := u^q(x') - d_{Y^\bullet}^{q-1} \circ k^q(x')$. Y como Y^q es inyectivo podemos extender este morfismo a un morfismo $k^{q+1} : X^{q+1} \to Y^q$

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & \mathrm{Im}(d_X^q) \arrow[r, "i"] \arrow[d, "k^{q+1}"'] & X^{q+1} \arrow[dl, "\exists k^{q+1}"] \\
& Y^q &
\end{tikzcd}$$

que safisface la condición requerida. ■

Lema 4.10. Si $u \in \mathrm{Hom}_{C^+(I(\mathcal{A}))}(X^\bullet, Y^\bullet)$ es un casi isomorfismo, entonces u es una equivalencia homotópica.

Demostración. Consideremos el triángulo estándar

$$X^\bullet \xrightarrow[\sim]{u} Y^\bullet \xrightarrow{q} C_u^\bullet \xrightarrow{p} T(X^\bullet)$$

Como u es un casi isomorfismo, por el Corolario 2.30. el cono $C_u^\bullet$ es acíclico y por el Lema 4.9. p es homótopo a 0, así existe un morfismo $k \in \mathrm{Hom}^{-1}(C_u^\bullet, T(X^\bullet))$ tal que para todo $n \in \mathbb{Z}$

$$k^{n+1} \circ d_u^n + d_{T(X^\bullet)}^{n-1} \circ k^n = p^n \qquad (*)$$

La aplicación $v = k \circ q : Y^\bullet \to X^\bullet$, donde $v^n := k^n \circ q^n$, es de grado 0 y componiendo ambos lados de $(*)$ por q^n tenemos

$$k^{n+1} \circ d_u^n \circ q^n + d_{T(X^\bullet)}^{n-1} \circ k^n \circ q^n = p^n \circ q^n = 0$$

entonces, sustituyendo $d_{T(X^\bullet)}^{n-1} = -d_X^n$ tenemos

$$k^{n+1} \circ d_u^n \circ q^n - d_{X^\bullet}^n \circ k^n \circ q^n = 0$$

luego,

$$k^{n+1} \circ q^{n+1} \circ d_Y^n - d_{X^\bullet}^n \circ k^n \circ q^n = 0$$

y así

$$v^{n+1} \circ d_Y^n - d_{X^\bullet}^n \circ v^n = 0$$

Luego $dv = vd$, donde $v \in \mathrm{Hom}_{C^+(I(\mathcal{A}))}(Y^\bullet, X^\bullet)$. Sea $q_{X^\bullet} : X^\bullet \to C_u^\bullet$ la inclusión de grado -1, i.e. para $x \in X^n$ $q_{X^\bullet}^n(x) = (0, x) \in C_u^{n-1}$. La aplicación $k' = k \circ q_{X^\bullet} : X^\bullet \to X^\bullet$ es de grado -1, donde $k'^n = k^{n-1} \circ q_{X^\bullet}^n$, para cada $n \in \mathbb{Z}$ y componiendo ambos lados de $(*)$ por $q_{X^\bullet}^{n+1}$ y teniendo en cuenta la definición de $d_{C_u^\bullet}$ tenemos

$$k^{n+1} \circ d_u^n \circ q_{X^\bullet}^{n+1} + d_{T(X^\bullet)}^{n-1} \circ k^n \circ q_{X^\bullet}^{n+1} = p^n \circ q_{X^\bullet}^{n+1}.$$

Evaluando la ecuación anterior en $x \in X^{n+1}$ tenemos
$k^{n+1} \circ d_u^n \circ q_{X^\bullet}^{n+1}(x) + d_{T(X^\bullet)}^{n-1} \circ k^n \circ q_{X^\bullet}^{n+1}(x) = p^n \circ q_{X^\bullet}^{n+1}(x) \Leftrightarrow$
$k^{n+1}(u^{n+1}(x), -d_{X^\bullet}^{n+1}(x)) - d_{X^\bullet}^n \circ k^n \circ q_{X^\bullet}^{n+1}(x) = x \Leftrightarrow$
$k^{n+1}((u^{n+1}(x), 0) - q_{X^\bullet}^{n+2}(d_{X^\bullet}^{n+1}(x))) - d_{X^\bullet}^n \circ k'^{n+1}(x) = x \Leftrightarrow$
$k^{n+1}(u^{n+1}(x), 0) - k^{n+1} \circ q_{X^\bullet}^{n+2}(d_{X^\bullet}^{n+1}(x)) - d_{X^\bullet}^n \circ k'^{n+1}(x) = x \Leftrightarrow$
$k^{n+1} \circ q^{n+1} \circ u^{n+1}(x) - k'^{n+2} \circ d_{X^\bullet}^{n+1}(x) - d_{X^\bullet}^n \circ k'^{n+1}(x) = Id_{X^\bullet}^{n+1}(x) \Leftrightarrow$
$v^{n+1} \circ u^{n+1}(x) - k'^{n+2} \circ d_{X^\bullet}^{n+1}(x) - d_{X^\bullet}^n \circ k'^{n+1}(x) = Id_{X^\bullet}^{n+1}(x)$
y así

$$k'^{n+2} \circ d_{X^\bullet}^{n+1}(x) + d_{X^\bullet}^n \circ k'^{n+1}(x) = v^{n+1} \circ u^{n+1}(x) - Id_{X^\bullet}^{n+1}(x)$$

Entonces $dk' + k'd = vu - Id_{X^\bullet}$, i.e. $vu \sim Id_{X^\bullet}$. Es claro que v es un casi isomorfismo, pues $v^* \circ u^* = (v \circ u)^* = Id_{H(X^\bullet)}$ y además u^* es un isomorfismo. Luego, podemos aplicar el mismo razonamiento a v para obtener un morfismo $w \in \mathrm{Hom}_{C^+(I(\mathcal{A}))}(X^\bullet, Y^\bullet)$ tal que $wv \sim Id_{Y^\bullet}$. Así deducimos que $w \sim u$ y así $uv \sim Id_{Y^\bullet}$. Por lo tanto u es una equivalencia homotópica. ■

Corolario 4.11. En la categoría $K^+(I(\mathcal{A}))$ un morfismo u es un casi isomorfismo si y sólo si es un isomorfismo.

Demostración. Sea $u : X^\bullet \to Y^\bullet$ un morfismo en $K^+(I(\mathcal{A}))$. Si u es un isomorfismo, entonces es trivialmente un casi isomorfismo. Supongamos que u es un casi isomorfismo, podemos considerarlo como un morfismo en $C^+(I(\mathcal{A}))$ y aplicar el Lema 4.10., así u es una equivalencia homotópica, entonces existe un casi isomorfismo v tal que $vu \sim Id_{X^\bullet}$ y $uv \sim Id_{Y^\bullet}$. Entonces u es un isomorfismo en $K^+(I(\mathcal{A}))$. ■

Notemos que la familia de casi isomorfismos de $K^+(I(\mathcal{A}))$ es un sistema multiplicativo para $K^+(I(\mathcal{A}))$. Así que podemos definir $D^+(I(\mathcal{A}))$ la localización de $K^+(I(\mathcal{A}))$ respecto a dicho sistema multiplicativo junto con el funtor localización $P^+_{I(\mathcal{A})} : K^+(I(\mathcal{A})) \to D^+(I(\mathcal{A}))$.

Proposición 4.12. El funtor canónico

$$P^+_{I(\mathcal{A})} : K^+(I(\mathcal{A})) \to D^+(I(\mathcal{A}))$$

es un isomorfismo de categorías.

Demostración. Por el Corolario anterior el funtor $1_{K^+(I(\mathcal{A}))}$ transforma los casi isomorfismos en isomorfismos, así podemos usar la propiedad universal del funtor localización $P^+_{I(\mathcal{A})} : K^+(I(\mathcal{A})) \to D^+(I(\mathcal{A}))$ tenemos que existe un único funtor $G : D^+(I(\mathcal{A})) \to K^+(I(\mathcal{A}))$ tal que $G \circ P^+_{I(\mathcal{A})} = 1_{K^+(I(\mathcal{A}))}$.

$$\begin{tikzcd}
K^+(I(\mathcal{A})) \arrow[r, "1_{K^+(I(\mathcal{A}))}"] \arrow[d, "P^+_{I(\mathcal{A})}"'] & K^+(I(\mathcal{A})) \\
D^+(I(\mathcal{A})) \arrow[ur, "\exists! G"'] &
\end{tikzcd}$$

La propiedad universal del funtor $P^+_{I(\mathcal{A})}$ muestra también que existe un único funtor $\widehat{G}$ tal que el siguiente diagrama conmuta

$$\begin{tikzcd}
K^+(I(\mathcal{A})) \arrow[r, "P^+_{I(\mathcal{A})}"] \arrow[d, "P^+_{I(\mathcal{A})}"'] & D^+(I(\mathcal{A})) \\
D^+(I(\mathcal{A})) \arrow[ur, "\exists! \widehat{G}"'] &
\end{tikzcd}$$

y como tanto $\widehat{G} = Id_{D^+(I(\mathcal{A}))}$ como $\widehat{G} = P^+_{I(\mathcal{A})} \circ G$ hacen conmutar el diagrama, entonces $Id_{D^+(I(\mathcal{A}))} = P^+_{I(\mathcal{A})} \circ G$.
Por lo tanto $P^+_{I(\mathcal{A})}$ es un isomorfismo de categorías. ■

El funtor inclusión $K^+(I(\mathcal{A})) \xrightarrow{i} K^+(\mathcal{A})$ induce un único funtor $Q^+_{I(\mathcal{A})}$ que hace conmutar el diagrama:

$$\begin{tikzcd}
K^+(I(\mathcal{A})) \arrow[r, "i"] \arrow[d, "P^+_{I(\mathcal{A})}"'] & K^+(\mathcal{A}) \arrow[d, "P^+_{\mathcal{A}}"] \\
D^+(I(\mathcal{A})) \arrow[r, "Q^+_{I(\mathcal{A})}"'] & D^+(\mathcal{A})
\end{tikzcd}$$

En efecto, esto resulta de la propiedad universal del funtor $P^+_{I(\mathcal{A})}$, pues la composición $P^+_{\mathcal{A}} \circ i$ evidentemente transforma a los casi isomorfismos de $K^+(I(\mathcal{A}))$ en isomorfismos de $D^+(\mathcal{A})$. Es fácil ver que el funtor $Q^+_{I(\mathcal{A})}$ es la inclusión, pues la inclusión hace conmutar el diagrama y el funtor $Q^+_{I(\mathcal{A})}$ es único.

Proposición 4.13. Si para todo casi isomorfismo $s \in \mathrm{Hom}_{K^+(\mathcal{A})}(X^\bullet, Y^\bullet)$, donde $X^\bullet \in ObK^+I(\mathcal{A})$, existe $f \in \mathrm{Hom}_{K^+(\mathcal{A})}(Y^\bullet, Z^\bullet)$, para algún $Z^\bullet \in Ob(K^+I(\mathcal{A}))$, tal que $f \circ s \in \mathrm{Hom}_{K^+(I(\mathcal{A}))}(X^\bullet, Z^\bullet)$ es un casi isomorfismo; entonces el funtor $Q^+_{I(\mathcal{A})} : D^+(I(\mathcal{A})) \to D^+(\mathcal{A})$ es plenamente fiel (se identifica con una subcategoría plena de $D^+(\mathcal{A})$).

Demostración. Sean $X^\bullet, Y^\bullet \in Ob(K^+(I(\mathcal{A})))$, vamos a probar que la aplicación

$$\mathrm{Hom}_{D^+(I(\mathcal{A}))}(X^\bullet, Y^\bullet) \to \mathrm{Hom}_{D^+(\mathcal{A})}(Q^+_{I(\mathcal{A})}(X^\bullet), Q^+_{I(\mathcal{A})}(Y^\bullet))$$

es biyectiva. Sean $\alpha, \beta \in \mathrm{Hom}_{D^+(I(\mathcal{A}))}(X^\bullet, Y^\bullet)$ representados por $(U^\bullet; s; a)$ y $(V^\bullet; t; b)$ respectivamente. Supongamos que $Q^+_{I(\mathcal{A})}(\alpha) = Q^+_{I(\mathcal{A})}(\beta)$; entonces tenemos un diagrama conmutativo en $K^+(\mathcal{A})$

$$\begin{tikzcd}
 & U^\bullet \arrow[d, "p"] & \\
X^\bullet \arrow[ur, "a"] \arrow[r, "c"] \arrow[dr, "b"'] & T^\bullet & Y^\bullet \arrow[ul, "s"', "\sim"] \arrow[l, "r"', "\sim"] \arrow[dl, "t", "\sim"'] \\
 & V^\bullet \arrow[u, "p'"] &
\end{tikzcd}$$

donde $T^\bullet$ y r están en $K^+(\mathcal{A})$, queremos encontrar un diagrama conmutativo similar, donde $(U^\bullet; s; a)$ y $(V^\bullet; t; b)$ estén dominados por un tercer diagrama en $K^+(I(\mathcal{A}))$. Por hipótesis para $r : Y^\bullet \to T^\bullet$ existe $f \in \mathrm{Hom}_{K^+(\mathcal{A})}(T^\bullet, Z^\bullet)$, donde $Z^\bullet \in Ob(K^+(I(\mathcal{A})))$ tal que $f \circ r : Y^\bullet \to Z^\bullet$ es un casi isomorfismo en $K^+(I(\mathcal{A}))$. Así el diagrama

$$\begin{tikzcd}
 & U^\bullet \arrow[d, "f \circ p"'] & \\
X^\bullet \arrow[ur, "a"] \arrow[r, "f \circ c"] \arrow[dr, "b"'] & Z^\bullet & Y^\bullet \arrow[ul, "s"', "\sim"] \arrow[l, "f \circ r"', "\sim"] \arrow[dl, "t", "\sim"'] \\
 & V^\bullet \arrow[u, "f \circ p'"] &
\end{tikzcd}$$

es conmutativo y además $(Z^\bullet; f \circ r; f \circ c)$ es un morfismo en $D^+(I(\mathcal{A}))$. Por lo tanto $\alpha = \beta$ en $D^+(I(\mathcal{A}))$. Ahora, sea $\beta \in \mathrm{Hom}_{D^+(\mathcal{A})}(Q^+_{I(\mathcal{A})}(X^\bullet), Q^+_{I(\mathcal{A})}(Y^\bullet))$ representado por $(Z^\bullet; s; b)$. Entonces por hipótesis existe $f : Z^\bullet \to W^\bullet$ con $W^\bullet \in Ob(K^+(I(\mathcal{A})))$ tal que $f \circ s$ es un casi isomorfismo en $K^+(I(\mathcal{A}))$. Sea $\alpha \in \mathrm{Hom}_{D^+(I(\mathcal{A}))}(X^\bullet, Y^\bullet)$ el morfismo representado por $(W^\bullet; f \circ s; f \circ b)$, tenemos el diagrama conmutativo

$$
\begin{tikzcd}
 & Z^\bullet \arrow[d, "f"'] & \\
X^\bullet \arrow[ur, "b"] \arrow[r, "f\circ b"] \arrow[dr, "f\circ b"'] & W^\bullet & Y^\bullet \arrow[ul, "s"', "\sim"] \arrow[l, "f\circ s"', "\sim"] \arrow[dl, "f\circ s", "\sim"'] \\
 & W^\bullet \arrow[u, "Id_{W^\bullet}"] &
\end{tikzcd}
$$

y así $Q^+_{I(\mathcal{A})}(\alpha) = \beta$ en $D^+(\mathcal{A})$. ■

Proposición 4.14. El funtor

$$Q^+_{I(\mathcal{A})} : D^+(I(\mathcal{A})) \to D^+(\mathcal{A})$$

es plenamente fiel.

Demostración. Sea $s \in \mathrm{Hom}_{K^+(\mathcal{A})}(X^\bullet, Y^\bullet)$ un casi isomorfismo, donde $X^\bullet \in Ob(K^+(I(\mathcal{A})))$. La primera parte de la demostración del Lema 4.10. que sólo utiliza el hecho de que $X^\bullet$ es un complejo acotado inferiormente de objetos inyectivos, muestra que existe $f \in \mathrm{Hom}_{K^+(\mathcal{A})}(Y^\bullet, X^\bullet)$ tal que $f \circ s = Id_{X^\bullet}$ en $K^+(I(\mathcal{A}))$. Entonces por la Proposición 4.13. tenemos que $Q^+_{I(\mathcal{A})}$ es plenamente fiel. ■

En la prueba del siguiente teorema usaremos un resultado importante que dice que un funtor $F : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ es una equivalencia de categorías si y sólo si F es plenamente fiel y cada objeto $D \in \mathcal{D}$ es isomorfo a $F(C)$ para algún $C \in \mathcal{C}$. La prueba de este resultado puede encontrarse en [7] pág. 91.

Teorema 4.15. Si $\mathcal{A}$ tiene suficientes inyectivos, entonces el funtor natural

$$\widehat{P^+} : K^+(I(\mathcal{A})) \to D^+(\mathcal{A})$$

es una equivalencia de categorías. El funtor $\widehat{P^+}$ es la composición

$$K^+(I(\mathcal{A})) \xrightarrow{j} K^+(\mathcal{A}) \xrightarrow{P^+_{\mathcal{A}}} D^+(\mathcal{A})$$

que es igual a $Q^+_{I(\mathcal{A})} \circ P^+_{I(\mathcal{A})}$.

Demostración. Como $\widehat{P^+} = Q^+_{I(\mathcal{A})} \circ P^+_{I(\mathcal{A})}$, entonces por la Proposición 4.12. y 4.14. tenemos que $\widehat{P^+}$ es plenamente fiel. Sea $Y^\bullet \in Ob(D^+(\mathcal{A}))$. Como la categoría tiene suficientes inyectivos, entonces existe $X^\bullet \in Ob(K^+(I(\mathcal{A})))$ y un casi isomorfismo $s : Y^\bullet \to X^\bullet$ en $K^+(\mathcal{A})$. Luego $\widehat{P^+}(s) = P^+_{\mathcal{A}}(s) : Y^\bullet \to \widehat{P^+}(X^\bullet)$ es un isomorfismo en $D^+(\mathcal{A})$. ■

Este resultado nos permite en muchos casos reemplazar la categoría derivada más abstracta $D^+(\mathcal{A})$ por la categoría más concreta $K^+(I(\mathcal{A}))$.

Sea $K^*(\mathcal{A}) \xrightarrow{F} K(\mathcal{B})$ un δ-funtor.

Definición 4.16. Llamamos **funtor derivado derecho de** F a una pareja (R^*F, ξ_F), donde $R^*F : D^*(\mathcal{A}) \to D(\mathcal{B})$ es un δ-funtor y $\xi_F : P_{\mathcal{B}} \circ F \to R^*F \circ P^*_{\mathcal{A}}$ es una transformación natural que safisface la siquiente propiedad universal: para cualquier δ-funtor $G : D^*(\mathcal{A}) \to D(\mathcal{B})$ y cualquier transformación natural $\zeta : P_{\mathcal{B}} \circ F \to G \circ P^*_{\mathcal{A}}$, hay una única transformación natural $\eta : R^*F \to G$ tal que $\zeta = (\eta \circ P^*_{\mathcal{A}}) \circ \xi_F$.
La información obtenida en esta definición puede ser parcialmente descrita diciendo que el diagrama

$$\begin{tikzcd}
K^*(\mathcal{A}) \arrow[r, "F"] \arrow[d, "P^*_{\mathcal{A}}"'] & K(\mathcal{B}) \arrow[d, "P_{\mathcal{B}}"] \\
D^*(\mathcal{A}) \arrow[r, "R^*F"'] & D(\mathcal{B})
\end{tikzcd}$$

es conmutativo salvo la transformación natural ξ_F. La noción de funtor derivado izquierdo L^*F es obtenida por dualidad.

Nota 4.17. (i) Si R^*F y L^*F existen, entonces son únicos salvo isomorfismos naturales.
(ii) Si $\varphi : F \to G$ es una transformación de δ-funtores $F, G : K^*(\mathcal{A}) \to K^*(\mathcal{B})$ y si los funtores derivados R^*F y R^*G existen, entonces existe una transformación natural $R^*\varphi : R^*F \to R^*G$.

Teorema 4.18. (Existencia de funtores derivados). Sean $\mathcal{A}$ y $\mathcal{B}$ dos categorías abelianas y sea $F : K^*(\mathcal{A}) \to K(\mathcal{B})$ un δ-funtor. Supongamos que existe una subcategoría triangulada $\Gamma(\mathcal{A}) \subset K^*(\mathcal{A})$ tal que

a) para cualquier $X^\bullet \in Ob(K^*(\mathcal{A}))$, existe $M^\bullet \in Ob(\Gamma(\mathcal{A}))$ y un casi isomorfismo $X^\bullet \to M^\bullet$,
b) si $M^\bullet \in Ob(\Gamma(\mathcal{A}))$ es acíclico, entonces $F(M^\bullet)$ también lo es.

Entonces el funtor derivado derecho (R^*F, ξ_F) existe y para cualquier complejo $M^\bullet \in Ob(\Gamma(\mathcal{A}))$, el morfismo inducido $\xi_F(M^\bullet) : P_{\mathcal{B}} \circ F(M^\bullet) \to R^*F \circ P^*_{\mathcal{A}}(M^\bullet)$ es un isomorfismo en $D(\mathcal{B})$.

Demostración. El siguiente diagrama contiene los diferentes funtores que intervienen en la demostración.

$$\begin{tikzcd}
 & K^*(\mathcal{A}) \arrow[rr, "F"] \arrow[dddl, "P^*_{\mathcal{A}}"'] & & K(\mathcal{B}) \arrow[dddr, "P_{\mathcal{B}}"] & \\
 & & \Gamma(\mathcal{A}) \arrow[ul, "i"'] \arrow[ur, "F"] \arrow[d, "\overline{P}"] & & \\
 & & \overline{\Gamma(\mathcal{A})} \arrow[dll, bend left, "Q"] \arrow[drr, "\overline{F}"] & & \\
D^*(\mathcal{A}) \arrow[urr, bend left, "U"] \arrow[rrrr, "R^*F"'] & & & & D(\mathcal{B})
\end{tikzcd}$$

Denotamos por His a la familia de casi isomorfismos de $K^*(\mathcal{A})$ y $Mor(\Gamma(\mathcal{A}))$ es la familia de morfismos de $\Gamma(\mathcal{A})$.

i) Como $\Gamma(\mathcal{A})$ es una subcategoría triangulada, la familia $\overline{His} := His \cap Mor(\Gamma(\mathcal{A}))$ es un sistema multiplicativo en $\Gamma(\mathcal{A})$. Podemos definir la categoría localizada $\overline{\Gamma(\mathcal{A})} = \Gamma(\mathcal{A})_{\overline{His}}$ y el funtor localización $\overline{P} : \Gamma(\mathcal{A}) \to \overline{\Gamma(\mathcal{A})}$.

ii) Denotemos como F a la restricción del funtor F en $\Gamma(\mathcal{A})$. Sea $s \in \mathrm{Hom}_{\Gamma(\mathcal{A})}(X^\bullet, Y^\bullet) \cap His$. Por la propiedad TR1 de triángulos distinguidos existe un triángulo distinguido $X^\bullet \xrightarrow{s} Y^\bullet \longrightarrow Z^\bullet \longrightarrow T(X^\bullet)$ y por el Corolario 2.30. $Z^\bullet$ es acíclico porque s es un casi isomorfismo. Y por la hipótesis b) tenemos que $F(Z^\bullet)$ es es acíclico. Además como F es un δ-funtor, tenemos que $F(X^\bullet) \xrightarrow{F(s)} F(Y^\bullet) \longrightarrow F(Z^\bullet) \longrightarrow F(T(X^\bullet))$ es un triángulo distinguido y por el Corolario 2.30. $F(s) \in \mathrm{Hom}_{K(\mathcal{B})}(F(X^\bullet), F(Y^\bullet)) \cap His$, i.e. $F : \Gamma(\mathcal{A}) \to K(\mathcal{B})$ preserva casi isomorfismos.

iii) Por la propiedad universal del funtor $\overline{P}$, existe un único funtor $\overline{F} : \overline{\Gamma(\mathcal{A})} \to D(\mathcal{B})$ tal que $\overline{F} \circ \overline{P} = P_{\mathcal{B}} \circ F$. Y por el mismo razonamiento existe un único funtor $Q : \overline{\Gamma(\mathcal{A})} \to D^*(\mathcal{A})$ tal que $P_A^* \circ i = Q \circ \overline{P}$.

iv) Sea $s \in \mathrm{Hom}_{K^*(\mathcal{A})}(X^\bullet, Y^\bullet) \cap His$, donde $X^\bullet \in Ob(\Gamma(\mathcal{A}))$, por la hipótesis a) tenemos que existe un casi isomorfismo $f : Y^\bullet \to M^\bullet$ con $M^\bullet \in Ob(\Gamma(\mathcal{A}))$. Y así $f \circ s \in Hom_{K^*(\mathcal{A})}(X^\bullet, M^\bullet)$ es casi isomorfismo. Por lo tanto el funtor $Q : \overline{\Gamma(\mathcal{A})} \to D^*(\mathcal{A})$ inducido por el funtor inclusión $i : \Gamma(\mathcal{A}) \to K^*(\mathcal{A})$ es plenamente fiel, esto es por la Proposición 4.13. usando la subcategoría $\Gamma(\mathcal{A})$ en vez de $K^+(I(\mathcal{A}))$.
Sea $Y^\bullet \in Ob(D^*(\mathcal{A}))$. Por la hipótesis a) existe un casi isomorfismo $f : Y^\bullet \to M^\bullet$ con $M^\bullet \in Ob(\Gamma(\mathcal{A}))$. Entonces $P_A^*(f) : P_A^*(Y^\bullet) = Y^\bullet \to P_A^*(M^\bullet) = Q(M^\bullet)$ es un isomorfismo en $D^*(\mathcal{A})$. De aquí que para todo $Y^\bullet \in Ob(D^*(\mathcal{A}))$ existe $M^\bullet \in Ob(\Gamma(\mathcal{A}))$ tal que $Q(M^\bullet) \cong Y^\bullet$. Entonces Q es una equivalencia de categorías. Por lo tanto existen $U : D^*(\mathcal{A}) \to \overline{\Gamma(\mathcal{A})}$ funtor inverso a Q salvo isomorfismo natural y dos isomorfismos de funtores

$$\alpha : 1_{\overline{\Gamma(\mathcal{A})}} \to U \circ Q \quad \text{y} \quad \beta : 1_{D^*(\mathcal{A})} \to Q \circ U$$

v) Hagamos $R^*F = \overline{F} \circ U : D^*(\mathcal{A}) \to D(\mathcal{B})$. Sea $X^\bullet \in D^*(\mathcal{A})$, por a) existe un casi isomorfismo $X^\bullet \to M^\bullet$, donde $M^\bullet \in \Gamma(\mathcal{A})$ y así tenemos $R^*F(X^\bullet) = \overline{F} \circ U(X^\bullet) \cong \overline{F}(M^\bullet) = F(M^\bullet)$. Sea $\alpha \in \mathrm{Hom}_{D^*(\mathcal{A})}(X^\bullet, Y^\bullet)$ representado por $(Z^\bullet; s; a)$

$$\begin{tikzcd} & Z^\bullet \arrow[dl, "s"', "\sim"] \arrow[dr, "a"] & \\ X^\bullet & & Y^\bullet \end{tikzcd}$$

De ahora en adelante si tenemos un casi morfismo h en $K^*(\mathcal{A})$ denotaremos por h^{-1} al inverso de $P_{\mathcal{A}}^*(h)$.

Por a) existen casi isomorfismos $X^\bullet \xrightarrow{f} M^\bullet$, $Y^\bullet \xrightarrow{g} N^\bullet$ y $Z^\bullet \xrightarrow{h} L^\bullet$, con $M^\bullet$, $N^\bullet$ y $L^\bullet$ en $Ob(\Gamma(\mathcal{A}))$. Tenemos $R^*F(\alpha) = \overline{F} \circ U(\alpha) = \overline{F}(\alpha') = F(\alpha') \in \mathrm{Hom}_{D(\mathcal{B})}(F(M^\bullet), F(N^\bullet))$, donde $\alpha' \in \mathrm{Hom}_{\overline{\Gamma(\mathcal{A})}}(M^\bullet, N^\bullet)$ es representada por $(L^\bullet; f \circ s \circ h^{-1}; g \circ a \circ h)$

$$\begin{tikzcd}
 & L^\bullet \arrow[dl, "f\circ s\circ h^{-1}"', "\sim"] \arrow[dr, "g\circ a\circ h"] & \\
M^\bullet & & N^\bullet
\end{tikzcd}$$

Y $F(\alpha')$ está representada por $(F(L^\bullet); F(f \circ s \circ h^{-1}); F(g \circ a \circ h))$.

$$\begin{tikzcd}
 & F(L^\bullet) \arrow[dl, "F(f\circ s\circ h^{-1})"', "\sim"] \arrow[dr, "F(g\circ a\circ h)"] & \\
F(M^\bullet) & & F(N^\bullet)
\end{tikzcd}$$

Falta definir una transformación natural

$$\xi_F : P_B \circ F \to R^* F \circ P^*_{\mathcal{A}} = \overline{F} \circ U \circ P^*_{\mathcal{A}}$$

Si $X^\bullet \in Ob(K^*(\mathcal{A}))$, entonces $U \circ P^*_v(X^\bullet) \in Ob(\overline{\Gamma(\mathcal{A})})$, luego existe $X^\bullet \to M^\bullet$ casi isomorfismo, con $M^\bullet \in Ob(\Gamma(\mathcal{A}))$ y así $\overline{P}(M^\bullet) \cong U \circ P^*_{\mathcal{A}}(X^\bullet)$. El isomorfismo en $D^*(\mathcal{A})$

$$\beta(P^*_{\mathcal{A}}(X^\bullet)) : P^*_{\mathcal{A}}(X^\bullet) \to Q \circ U \circ P^*_{\mathcal{A}}(X^\bullet) \cong Q \circ \overline{P}(M^\bullet)$$

es representado por un diagrama en $D^*(\mathcal{A})$:

$$\begin{tikzcd}
 & V^\bullet & \\
X^\bullet \arrow[ur, "t", "\sim"'] & & M^\bullet \arrow[ul, "s"', "\sim"]
\end{tikzcd}$$

donde por a) podemos suponer que $V^\bullet \in Ob(\Gamma(\mathcal{A}))$. Así aplicando F tenemos el diagrama en $D(\mathcal{B})$

$$\begin{tikzcd}
 & F(V^\bullet) & \\
F(X^\bullet) \arrow[ur, "F(t)"] & & F(M^\bullet) \arrow[ul, "F(s)"', "\sim"]
\end{tikzcd}$$

donde $F(s)$ es un casi isomorfismo por ii). Definimos entonces $\xi_F(X^\bullet) : P_{\mathcal{B}} \circ F(X^\bullet) \to P_{\mathcal{B}} \circ F(M^\bullet) \cong \overline{F} \circ U \circ P^*_{\mathcal{A}}(X^\bullet)$ como la clase de equivalencia de ese diagrama, dicho de otra manera

$$\xi_F(X^\bullet) = (P_{\mathcal{B}}(F(s)))^{-1} \circ P_{\mathcal{B}} \circ F(t).$$

Notemos que si $X^\bullet \in Ob(\Gamma(\mathcal{A}))$, entonces por ii) tenemos que $F(t)$ es también un casi isomorfismo y así $\xi_F(X^\bullet)$ es un isomorfismo en ese caso. Ahora veamos que la definición precedente es funtorial, es decir si $f \in \mathrm{Hom}_{K^*(\mathcal{A})}(X^\bullet, Y^\bullet)$, entonces tenemos un diagrama conmutativo en $D(\mathcal{B})$:

$$\begin{tikzcd}
P_{\mathcal{B}} \circ F(X^\bullet) \arrow[r, "\xi_F(X^\bullet)"] \arrow[d, "P_{\mathcal{B}}\circ F(f)"'] & R^*F \circ P^*_{\mathcal{A}}(X^\bullet) \arrow[d, "R^*F\circ P^*_{\mathcal{A}}(f)"] \\
P_{\mathcal{B}} \circ F(Y^\bullet) \arrow[r, "\xi_F(Y^\bullet)"'] & R^*F \circ P^*_{\mathcal{A}}(Y^\bullet)
\end{tikzcd}$$

Sea $N^\bullet \in Ob(\Gamma(\mathcal{A}))$ tal que $\overline{P}(N^\bullet) \cong U \circ P^*_{\mathcal{A}}(Y^\bullet)$ y sea
$$\begin{tikzcd} & W^\bullet & \\ Y^\bullet \arrow[ur, "t'", "\sim"'] & & N^\bullet \arrow[ul, "s'"', "\sim"] \end{tikzcd}$$
un representante de $\beta(P^*_{\mathcal{A}}(Y^\bullet))$. Aplicando dos veces la propiedad FR2 de sistemas multiplicativos podemos construir el diagrama siguiente en el cual todos los objetos, salvo $X^\bullet$ y $Y^\bullet$ están en $\Gamma(\mathcal{A})$

$$\begin{tikzcd}
X^\bullet \arrow[r, "t", "\sim"'] \arrow[dd, "f"'] & V^\bullet \arrow[d, "f'"'] & & M^\bullet \arrow[ll, "s"', "\sim"] \arrow[dl, "a"] \\
& P^\bullet \arrow[r, "u", "\sim"'] & Q^\bullet & \\
Y^\bullet \arrow[ur, "r", "\sim"'] \arrow[rr, "t'", "\sim"'] & & W^\bullet \arrow[u, "r'", "\sim"'] & N^\bullet \arrow[l, "s'", "\sim"'] \arrow[ul, "b"', "\sim"]
\end{tikzcd}$$

Así, aplicando F tenemos el siguiente diagrama conmutativo:

$$\begin{tikzcd}
F(X^\bullet) \arrow[r, "F(t)"] \arrow[dd, "F(f)"'] & F(V^\bullet) \arrow[d, "F(f')"'] & & F(M^\bullet) \arrow[ll, "F(s)"', "\sim"] \arrow[dl, "F(a)"] \\
& F(P^\bullet) \arrow[r, "F(u)", "\sim"'] & F(Q^\bullet) & \\
F(Y^\bullet) \arrow[ur, "F(r)"] \arrow[rr, "F(t')"] & & F(W^\bullet) \arrow[u, "F(r')", "\sim"'] & F(N^\bullet) \arrow[l, "F(s')", "\sim"'] \arrow[ul, "F(b)"', "\sim"]
\end{tikzcd}$$

Tenemos que $R^*F \circ P^*_{\mathcal{A}}(X^\bullet) = P_{\mathcal{B}} \circ F(M^\bullet)$ y $R^*F \circ P^*_{\mathcal{A}}(Y^\bullet) = P_{\mathcal{B}} \circ F(N^\bullet)$. El morfismo $R^*F(P^*_{\mathcal{A}}(f)) : R^*F \circ P^*_{\mathcal{A}}(X^\bullet) \to R^*F \circ P^*_{\mathcal{A}}(Y^\bullet)$ es representado por el diagrama:

$$\begin{tikzcd} & F(Q^\bullet) & \\ F(M^\bullet) \arrow[ur, "F(a)"] & & F(N^\bullet) \arrow[ul, "F(b)"', "\sim"] \end{tikzcd}$$

Tenemos que:
$R^*F(P^*_{\mathcal{A}}(f)) \circ \xi_F(X^\bullet) = ((P_{\mathcal{B}} \circ F(b))^{-1} \circ (P_{\mathcal{B}} \circ F(a))) \circ ((P_{\mathcal{B}} \circ F(s))^{-1} \circ (P_{\mathcal{B}} \circ F(t)))$
$= (P_{\mathcal{B}} \circ F(r') \circ P_{\mathcal{B}} \circ F(s'))^{-1} \circ (P_{\mathcal{B}} \circ F(u) \circ P_{\mathcal{B}} \circ F(f') \circ P_{\mathcal{B}} \circ F(s)) \circ (P_{\mathcal{B}} \circ F(s))^{-1} \circ P_{\mathcal{B}} \circ F(t)$
$= (P_{\mathcal{B}} \circ F(s'))^{-1} \circ (P_{\mathcal{B}} \circ F(r'))^{-1} \circ P_{\mathcal{B}} \circ F(u) \circ P_{\mathcal{B}} \circ F(f') \circ P_{\mathcal{B}} \circ F(t)$
$= (P_{\mathcal{B}} \circ F(s'))^{-1} \circ (P_{\mathcal{B}} \circ F(r'))^{-1} \circ P_{\mathcal{B}} \circ F(u) \circ P_{\mathcal{B}} \circ F(r) \circ P_{\mathcal{B}} \circ F(f)$
$= (P_{\mathcal{B}} \circ F(s'))^{-1} \circ (P_{\mathcal{B}} \circ F(r'))^{-1} \circ P_{\mathcal{B}} \circ F(r') \circ P_{\mathcal{B}} \circ F(t') \circ P_{\mathcal{B}} \circ F(f)$
$= (P_{\mathcal{B}} \circ F(s'))^{-1} \circ P_{\mathcal{B}} \circ F(t') \circ P_{\mathcal{B}} \circ F(f)$
$= \xi_F(Y^\bullet) \circ P_{\mathcal{B}} F(f)$.
Por lo tanto $R^*F(P^*_{\mathcal{A}}(f)) \circ \xi_F(X^\bullet) = \xi_F(Y^\bullet) \circ P_{\mathcal{B}} F(f)$.

vi) Sea $(G;\zeta)$, donde $G : D^*(\mathcal{A}) \to D(\mathcal{B})$ es un δ-funtor y $\zeta : P_{\mathcal{B}} \circ F \to G \circ P^*_{\mathcal{A}}$ es un morfismo de funtores. Supongamos que existe un morfismo de funtores $\eta : R^*F \to G$ tal que $\zeta = (\eta \circ P^*_{\mathcal{A}}) \circ \xi_F$, entonces para todo $M^\bullet \in Ob(\Gamma(\mathcal{A}))$ tendríamos $\zeta(M^\bullet) =$

$\eta(M^\bullet)\circ\xi_F(M^\bullet)$ y así $\eta(M^\bullet)=\zeta(M^\bullet)\circ\xi_F(M^\bullet)^{-1}$, ya que $\xi_F(M^\bullet)$ es un isomorfismo, pues $M^\bullet\in Ob(\Gamma(\mathcal{A}))$. La igualdad precedente define, por lo tanto, η en la subcategoría $\overline{\Gamma(\mathcal{A})}$ de $D^*(\mathcal{A})$. Además si $X^\bullet\in Ob(D^*(\mathcal{A}))=Ob(K^*(\mathcal{A}))$, entonces existe un casi isomorfismo $s: X^\bullet\to M^\bullet$, donde $M^\bullet\in Ob(\Gamma(\mathcal{A}))$. Como $P^*_{\mathcal{A}}(s)$ es isomorfismo en $D^*(\mathcal{A})$ podemos hacer $\eta(X^\bullet)=G(P^*_{\mathcal{A}}(s))^{-1}\circ\eta(M^\bullet)\circ R^*F(P^*_{\mathcal{A}}(s))$. Como ζ y ξ_F son dos transformaciones naturales se sigue que η es una transformación natural en la subcategoría $\overline{\Gamma(\mathcal{A})}$. Además sea $f\in \mathrm{Hom}_{D^*(\mathcal{A})}(X^\bullet,Y^\bullet)$ y dos casi isomorfismos $s:X^\bullet\to M^\bullet$ y $t:Y^\bullet\to N^\bullet$, con $M^\bullet$ y $N^\bullet$ en $Ob(\Gamma(\mathcal{A}))$. Podemos aplicar dos veces la propiedad FR2 de sistemas multiplicativos y construir un morfismo $g\in\mathrm{Hom}_{D^*(\mathcal{A})}(M^\bullet,N^\bullet)$ como en v) y obtenemos el diagrama

$$\begin{tikzcd}
R^*F(M^\bullet) \arrow[rrr, "\eta(M^\bullet)"] \arrow[ddd, "R^*F(g)"'] & & & G(M^\bullet) \arrow[ddd, "G(g)"] \\
& R^*F(X^\bullet) \arrow[r, "\eta(X^\bullet)"] \arrow[ul, "R^*F(P^*_{\mathcal{A}}(s))"', "\cong"] \arrow[d, "R^*F(f)"'] & G(X^\bullet) \arrow[ur, "G(P^*_{\mathcal{A}}(s))", "\cong"'] \arrow[d, "G(f)"] & \\
& R^*F(Y^\bullet) \arrow[r, "\eta(Y^\bullet)"'] \arrow[dl, "R^*F(P^*_{\mathcal{A}}(t))"', "\cong"] & G(Y^\bullet) \arrow[dr, "G(P^*_{\mathcal{A}}(t))", "\cong"'] & \\
R^*F(N^\bullet) \arrow[rrr, "\eta(N^\bullet)"'] & & & G(N^\bullet)
\end{tikzcd}$$

donde los cuadros laterales son conmutativos. Como el cuadrado exterior es conmutativo entonces el cuadrado interior también lo es. Y es evidente de la construcción que η es la única transformación natural tal que $\zeta=(\eta\circ P^*_{\mathcal{A}})\circ\xi_F$. ∎

Un caso importante es descrito a continuación.

Corolario 4.19. Sean $\mathcal{A}$ y $\mathcal{B}$ dos categorías abelianas y $F: K^+(\mathcal{A})\to K(\mathcal{B})$ un δ-funtor. Supongamos que
(i) $\mathcal{A}$ tiene suficientes inyectivos;
(ii) F transforma complejos acíclicos de $K^+(I(\mathcal{A}))$ en complejos acíclicos de $K(\mathcal{B})$.
Entonces el funtor derivado derecho R^+F existe.

Demostración. Se sigue inmediatamente del Teorema anterior teniendo en cuenta que $K^+(\mathcal{A})$ es una categoría triangulada. ∎

Este resultado nos permite calcular $R^*F(X^\bullet)$ usando una resolución inyectiva $X^\bullet\to M^\bullet$. De hecho, $X^\bullet\simeq M^\bullet$ en $D^*(\mathcal{A})$ implica $R^*F(X^\bullet)\simeq R^*F(M^\bullet)\simeq F(M^\bullet)$ en $D(\mathcal{B})$. El teorema de existencia de funtores derivados izquierdos es análogo y con él podemos calcular $L^*F(X^\bullet)$ usando una resolución proyectiva $P^\bullet\to X^\bullet$.
Algunas veces el funtor derivado R^+F es denotado por RF.
Notemos que si $F: K^+(\mathcal{A})\to K(B)$ es un funtor aditivo, entonces la condición (ii) se satisface automáticamente, pues si $M^\bullet\in Ob(K^+(I(\mathcal{A})))$ es acíclico, entonces el morfismo cero $0\xrightarrow{u} M^\bullet$ es un casi isomorfismo y por el Corolario 4.11. es un isomorfismo en

$K^+(I(\mathcal{A}))$. Luego, aplicando F tenemos que $F(u) : F(0) \to F(M^\bullet)$ es isomorfismo y $F(0) = 0$ ya que F es aditivo, por lo tanto es casi isomorfismo y así $F(M^\bullet)$ es acíclico.
Aquí hay una construcción explícita para el funtor RF en el caso descrito en el corolario previo. Si

$$X^\bullet \to I^\bullet$$

es una resolución inyectiva de $X^\bullet$, entonces

$$R^+F(X^\bullet) \simeq p_{\mathcal{B}} \circ F(I^\bullet).$$

Si el funtor F es exacto, entonces $F(X^\bullet) \to F(I^\bullet)$ es un casi isomorfismo y así

$$R^+F(X^\bullet) \simeq p_{\mathcal{B}} \circ F(X^\bullet).$$

Por esta razón en tal situación el funtor derivado $R^+F(X^\bullet)$ es denotado por F.
Para cada funtor derivado R^*F, hay dos familias asociadas de funtores de imagen superior directa: los funtores $R^nF : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ para $n \in \mathbb{Z}$ definido por la composición

$$\mathcal{A} \xrightarrow{C_0} D^*(\mathcal{A}) \xrightarrow{R^*F} D^*(\mathcal{B}) \xrightarrow{H^n} \mathcal{B}$$

y los híper funtores $\mathbb{R}^nF : D^*(\mathcal{A}) \to \mathcal{B}$ definidos como la composición

$$D^*(\mathcal{A}) \xrightarrow{R^*F} D^*(\mathcal{B}) \xrightarrow{H^n} \mathcal{B}.$$

Cuando el funtor F es exacto izquierdo tenemos $F = R^0F$. Pues para $X \in Ob(\mathcal{A})$, existe una resolución inyectiva $I^\bullet$, digamos

$$0 \longrightarrow X \xrightarrow{i} I^0 \xrightarrow{d^0} I^1 \xrightarrow{d^1} I^2 \longrightarrow \cdots$$

de aquí que

$$0 \longrightarrow X \xrightarrow{i} I^0 \xrightarrow{d^0} \mathrm{Im}(d^0) \longrightarrow 0$$

es exacta y aplicando el funtor F tenemos que

$$0 \longrightarrow F(X) \xrightarrow{F(i)} F(I^0) \xrightarrow{F(d^0)} F(\mathrm{Im}(d^0))$$

es exacta. Entonces

$$R^0F(X) = H^0(F(I^\bullet)) = \mathrm{Ker}(F(d^0))/0 = \mathrm{Ker}(F(d^0)) = \mathrm{Im}(F(i)) \cong F(X)$$

Análogamente para $G : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ un δ-funtor exacto derecho entre categorías abelianas. Si $\mathcal{A}$ tiene suficientes proyectivos tenemos los funtores derivados derechos L_iG, $(i \geq 0)$ de G como sigue. Si A es un objeto de $\mathcal{A}$, escogemos una resolución proyectiva $P \to A$ de A y así tenemos

$$L_iF(A) = H_i(F(P)).$$

Definición 4.20. Sea $F : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ un funtor exacto izquierdo. Un objeto X en $\mathcal{A}$ es **F-acíclico** si $R^nF(X) = 0$ para todo $n > 0$.

Ejemplo 4.21. Un objeto inyectivo es F-acíclico para cualquier funtor exacto izquierdo F. Pues si I es un objeto inyectivo, entonces $C_0(I) : I \longrightarrow 0 \longrightarrow 0 \longrightarrow \cdots$ es una resolución inyectiva, pues $I \xrightarrow{Id_I} I \longrightarrow 0 \longrightarrow \cdots$ es exacta. Así tenemos $R^nF(I) = H^n(F(C_0(I))) = 0$ para todo $n \neq 0$.

Proposición 4.22. Supongamos que tenemos un diagrama

$$\begin{tikzcd}
 & & & 0 \arrow[d] & \\
\cdots \arrow[r] & P^2 \arrow[r, "\alpha^2"] & P^1 \arrow[r, "\alpha^1"] & P^0 \arrow[r, "\alpha^0"] & A \arrow[r] \arrow[d, "\varphi"] & 0 \\
 & & & & B \arrow[d, "\eta"] & \\
\cdots \arrow[r] & J^2 \arrow[r, "\gamma^2"] & J^1 \arrow[r, "\gamma^1"] & J^0 \arrow[r, "\gamma^0"] & C \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
 & & & & 0 &
\end{tikzcd}$$

donde la columna es exacta y las filas son resoluciones proyectivas. Sea $K^n := P^n \oplus J^n$. Entonces los objetos K^n con $n \geq 0$ forman una resolución proyectiva $K^\bullet$ de B tal que la sucesión

$$0 \longrightarrow P^\bullet \xrightarrow{i} K^\bullet \xrightarrow{p} J^\bullet \longrightarrow 0$$

es exacta, donde i es la inclusión y p la proyección naturales.

Demostración. Definimos $K^n := P^n \oplus J^n$, el cual es proyectivo para $n = 0, 1, 2, ...$ Como J^0 es proyectivo, $\gamma^0 : J^0 \to C$ es morfismo y $\eta : B \to C$ es sobreyectiva tenemos que existe un morfismo $f : J^0 \to B$ tal que $\eta \circ f = \gamma^0$. Ahora definimos $\beta^0 : P^0 \oplus J^0 \to B$ como $\beta^0(x, y) = \varphi \circ \alpha^0(x) + f(y)$, para $(x, y) \in P^0 \oplus J^0$. Consideremos el siguiente diagrama conmutativo

$$\begin{tikzcd}
 & 0 \arrow[d] & 0 \arrow[d] & \\
\mathrm{Ker}(\alpha^0) \arrow[r, "i"] \arrow[d, "i"] & P^0 \arrow[r, "\alpha^0"] \arrow[d, "i"] & A \arrow[r, "p"] \arrow[d, "\varphi"] & \mathrm{Coker}(\alpha^0) \arrow[d, "p_\varphi"] \\
\mathrm{Ker}(\beta^0) \arrow[r, "i"] \arrow[d, "p"] & P^0 \oplus J^0 \arrow[r, "\beta^0"] \arrow[d, "p"] & B \arrow[r, "p"] \arrow[d, "\eta"] & \mathrm{Coker}(\beta^0) \arrow[d, "p_\eta"] \\
\mathrm{Ker}(\gamma^0) \arrow[r, "i"] & J^0 \arrow[r, "\gamma^0"] \arrow[d] & C \arrow[r, "p"] \arrow[d] & \mathrm{Coker}(\gamma^0) \\
 & 0 & 0 &
\end{tikzcd}$$

donde i es la inclusión, p es la proyección, $p_\varphi : A/\operatorname{Im}(\alpha^0) \to B/\operatorname{Im}(\beta^0)$ es tal que $p_\varphi(a+\operatorname{Im}(\alpha^0)) = \varphi(a)$ con $a \in A$ y $p_\eta : B/\operatorname{Im}(\beta^0) \to C/\operatorname{Im}(\gamma^0)$ es tal que $p_\eta(b+\operatorname{Im}(\beta^0)) = \eta(b)$ con $b \in B$, las cuales están bien definidas pues $\varphi(\operatorname{Im}(\alpha^0)) \subseteq \operatorname{Im}(\beta^0)$ y $\eta(\operatorname{Im}(\beta^0)) \subseteq \operatorname{Im}(\gamma^0)$.
Como las dos columnas de en medio son exactas, podemos aplicar el Lema de la serpiente y tenemos que existe una sucesión exacta

$$\operatorname{Ker}(\alpha^0) \longrightarrow \operatorname{Ker}(\beta^0) \longrightarrow \operatorname{Ker}(\gamma^0) \longrightarrow \operatorname{Coker}(\alpha^0) \longrightarrow \operatorname{Coker}(\beta^0) \longrightarrow \operatorname{Coker}(\gamma^0)$$

Usamos ahora que $\operatorname{Coker}(\alpha^0) = \{0\} = \operatorname{Coker}(\gamma^0)$ y así tenemos que $\operatorname{Coker}(\beta^0) = \{0\}$, lo que implica que β^0 es sobreyectiva. Puesto que $0 \to \operatorname{Ker}(\alpha^0) \to \operatorname{Ker}(\beta^0) \to \operatorname{Ker}(\gamma^0) \to 0$ es exacta, podemos aplicar el Lema 3x3 al diagrama

$$\begin{tikzcd}
 & 0 \arrow[d] & 0 \arrow[d] & 0 \arrow[d] & \\
0 \arrow[r] & \operatorname{Ker}(\alpha^0) \arrow[r, "i"] \arrow[d] & P^0 \arrow[r, "\alpha^0"] \arrow[d, "i"] & A \arrow[r] \arrow[d, "\gamma"] & 0 \\
0 \arrow[r] & \operatorname{Ker}(\beta^0) \arrow[r, "i"] \arrow[d] & P^0 \oplus J^0 \arrow[r, "\beta^0"] \arrow[d, "p"] & B \arrow[r] \arrow[d, "\eta"] & 0 \\
0 \arrow[r] & \operatorname{Ker}(\gamma^0) \arrow[r, "i"] \arrow[d] & J^0 \arrow[r, "\gamma^0"] \arrow[d] & C \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
 & 0 & 0 & 0 &
\end{tikzcd}$$

donde las filas y las dos últimas columnas son exactas y así la primera columna también lo es. Esto es el paso inicial de la inducción y nos lleva a la situación

$$\begin{tikzcd}
 & & 0 \arrow[d] & \\
\cdots \arrow[r] & P^1 \arrow[r, "\alpha^1"] & \operatorname{Ker}(\alpha^0) \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
 & & \operatorname{Ker}(\beta^0) \arrow[d] & \\
\cdots \arrow[r] & J^1 \arrow[r, "\gamma^1"] & \operatorname{Ker}(\gamma^0) \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
 & & 0 &
\end{tikzcd}$$

Siguiendo este proceso inductivo, llegamos a lo deseado. ■

Proposición 4.23. Supongamos que tenemos un diagrama

$$
\begin{tikzcd}
 & 0 \arrow[d] & & & & \\
0 \arrow[r] & A \arrow[r] \arrow[d] & I^0 \arrow[r] & I^1 \arrow[r] & I^2 \arrow[r] & \cdots \\
 & B \arrow[d] & & & & \\
0 \arrow[r] & C \arrow[r] \arrow[d] & J^0 \arrow[r] & J^1 \arrow[r] & J^2 \arrow[r] & \cdots \\
 & 0 & & & &
\end{tikzcd}
$$

donde la columna es exacta y las filas son resoluciones inyectivas. Sea $P^n := I^n \oplus J^n$. Entonces los objetos P^n con $n \geq 0$ forman una resolución inyectiva $P^\bullet$ de B y la sucesión

$$0 \longrightarrow I^\bullet \xrightarrow{i} P^\bullet \xrightarrow{p} J^\bullet \longrightarrow 0$$

es exacta, donde i es la inclusión y p la proyección naturales.

La demostración es análoga a la que se hizo para resoluciones proyectivas.

Proposición 4.24. Sea $\mathcal{A}$ una categoría abeliana con suficientes inyectivos, $B, C, D \in Obj(\mathcal{A})$, F un funtor exacto izquierdo (o derecho) y

$$0 \to B \xrightarrow{\alpha} C \xrightarrow{\beta} D \to 0$$

una sucesión exacta. Entonces existe una sucesión exacta larga

$$\cdots \to R^n F(B) \to R^n F(C) \to R^n F(D) \to R^{n+1} F(B) \to \cdots .$$

Demostración. Como hay suficientes inyectivos, entonces existen resoluciones inyectivas $I^\bullet$ y $J^\bullet$ para B y D respectivamente y por la Proposición anterior $I^\bullet \oplus J^\bullet$ es resolución inyectiva de C y la sucesión

$$0 \longrightarrow I^\bullet \xrightarrow{i} I^\bullet \oplus J^\bullet \xrightarrow{p} J^\bullet \longrightarrow 0$$

es exacta, donde i es la inclusión y p es la proyección natural. Además como la sucesión es escindida tenemos que existe $j : I^\bullet \oplus J^\bullet \to I^\bullet$ dada por $j^n(x,y) = x$ con $(x,y) \in I^n \oplus J^n$, $n \in \mathbb{Z}$ tal que $j^n \circ i^n(x) = j^n(x,0) = x = Id_{I^n}(x)$. Luego aplicamos el funtor F a la sucesión de resoluciones proyectivas y tenemos la sucesión exacta

$$0 \longrightarrow F(I^\bullet) \xrightarrow{F(i)} F(I^\bullet \oplus J^\bullet) \xrightarrow{F(p)} F(J^\bullet)$$

donde $Id_{F(I^n)} = F(Id_{I^n}) = F(j^n \circ i^n) = F(j^n) \circ F(i^n)$ con $n \in \mathbb{Z}$ por lo que esta sucesión escinde y así

$$0 \longrightarrow F(I^\bullet) \xrightarrow{F(i)} F(I^\bullet) \oplus F(J^\bullet) \xrightarrow{F(p)} F(J^\bullet) \longrightarrow 0$$

es exacta.
Luego, por el Teorema 2.22. tenemos la sucesión exacta larga

$$\cdots \longrightarrow H^n(F(I^\bullet)) \longrightarrow H^n(F(I^\bullet) \oplus F(J^\bullet)) \longrightarrow H^n(F(J^\bullet)) \longrightarrow H^{n+1}(F(I^\bullet)) \longrightarrow \cdots$$

y sustituyendo $R^nF(B)$, $R^nF(C)$ y $R^nF(D)$ por $H^n(F(I^\bullet))$, $H^n(F(I^\bullet \oplus J^\bullet))$ y $H^n(F(J^\bullet))$ respectivamente, tenemos la sucesión deseada. ■

En la práctica, para trabajar con funtores derivados, uno encuentra los siguientes resultados muy útiles.

Proposición 4.25. Sean $\mathcal{A} \xrightarrow{G} \mathcal{B} \xrightarrow{F} \mathcal{C}$ dos funtores aditivos entre categorías abelianas, donde $\mathcal{A}$ y $\mathcal{B}$ tienen suficientes inyectivos, supongamos que F es exacto izquierdo. Si G transforma objetos inyectivos en objetos F-acíclicos, entonces existe un isomorfismo

$$R^+(F \circ G) \cong R^+F \circ R^+G.$$

Demostración. Consideremos la subcategoría triangulada de $K^+(\mathcal{B})$, formada por los complejos cuyas entradas son elementos F-acíclicos y la denotaré como $\Gamma(\mathcal{B})$. Probemos que $\Gamma(\mathcal{B})$ cumple las hipótesis del Teorema 4.18.

a) Sea $X^\bullet \in Ob(\Gamma(\mathcal{B}))$, como $\mathcal{B}$ tiene suficientes inyectivos, entonces existe $I^\bullet \in I(\mathcal{B}) \subseteq \Gamma(\mathcal{B})$ y un casi isomorfismo $X^\bullet \to I^\bullet$.

b) Sea $B^\bullet \in Ob(\Gamma(\mathcal{B}))$ acíclico. Tenemos que $B^\bullet$ es acotado por debajo. Supongamos que

$$B^\bullet = 0 \longrightarrow B' \xrightarrow{\alpha} B \xrightarrow{\beta} B'' \xrightarrow{\gamma} B''' \longrightarrow 0$$

La prueba para un complejo arbitrario en $Ob(\Gamma(\mathcal{B}))$ se sigue por inducción.
$B^\bullet$ por hipótesis es un complejo acíclico, i.e. exacto, así que tenemos $\operatorname{Im}(\alpha) = \operatorname{Ker}(\beta)$, $\operatorname{Im}(\beta) = \operatorname{Ker}(\gamma)$, α inyectiva y γ sobreyectiva. Entonces $\operatorname{Ker}(\gamma) = \operatorname{Im}(\beta) \cong B/\operatorname{Ker}(\beta) = B/\operatorname{Im}(\alpha) =: \operatorname{Coker}(\alpha)$. Hacemos $C := \operatorname{Coker}(\alpha)$. Podemos partir a $B^\bullet$ en dos sucesiones exactas:

$$0 \longrightarrow B' \xrightarrow{\alpha} B \xrightarrow{p} C \longrightarrow 0 \longrightarrow \cdots \quad \text{y}$$

$$0 \longrightarrow C \xrightarrow{i} B'' \xrightarrow{\gamma} B''' \longrightarrow 0 \longrightarrow \cdots$$

donde i es la inclusión y p la proyección. Por la Proposición 4.24. estas sucesiones inducen las sucesiones exactas largas

$$0 \longrightarrow FB' \xrightarrow{f_1} FB \xrightarrow{f_2} FC \longrightarrow R^1FB' \longrightarrow R^1FB \longrightarrow R^1FC \longrightarrow \cdots \quad (1) \text{ y}$$

$$0 \longrightarrow FC \xrightarrow{g_1} FB'' \xrightarrow{g_2} FB''' \longrightarrow R^1FC \longrightarrow R^1FB'' \longrightarrow R^1FB''' \longrightarrow R^2FC \longrightarrow \cdots \quad (2)$$

Usando que B'' y B''' son F-acíclicos obtenemos de (1) que $R^nFC = 0$ para todo $n > 0$, i.e. C es F-acíclico. Y así tenemos las sucesiones exactas cortas

$$0 \longrightarrow FB' \xrightarrow{f_1} FB \xrightarrow{f_2} FC \longrightarrow 0 \qquad (1')$$

y usando que B, B' y C son F-acíclicos

$$0 \longrightarrow FC \xrightarrow{g_1} FB'' \xrightarrow{g_2} FB''' \longrightarrow 0 \qquad (2')$$

Ahora consideremos el siguiente diagrama:

$$\begin{tikzcd}
 & & & 0 \arrow[d] & \\
0 \arrow[r] & FB' \arrow[r, "f_1"] & FB \arrow[r, "f_2"] \arrow[dr, "f_3"'] & FC \arrow[r] \arrow[d, "g_1"] & 0 \\
 & & & FB'' \arrow[d, "g_2"] & \\
 & & & FB''' \arrow[d] & \\
 & & & 0 &
\end{tikzcd}$$

Donde $f_3 := g_1 \circ f_2$. Veamos que la sucesión

$$0 \longrightarrow FB' \xrightarrow{f_1} FB \xrightarrow{f_3} FB'' \xrightarrow{g_2} FB''' \longrightarrow 0$$

es exacta. Tenemos que f_1 es inyectiva; $\mathrm{Ker}(f_3) = \mathrm{Ker}(g_1 \circ f_2) = \mathrm{Ker}(f_2) = \mathrm{Im}(f_1)$, pues g_1 es inyectiva; $\mathrm{Im}(f_3) = \mathrm{Im}(g_1 \circ f_2) = \mathrm{Im}(g_1) = \mathrm{Ker}(g_2)$, pues f_2 es sobreyectiva y g_2 es sobreyectiva. Por lo tanto la sucesión es exacta, i.e. acíclica.
Entonces $F(B^\bullet)$ es acíclico y así cumple las hipótesis del teorema de existencia. Notemos que para cualquier complejo de $\Gamma(\mathcal{B})$ se puede seguir el mismo procedimiento.
Podemos calcular R^+F usando una resolución F-acíclica. Ahora calculemos $R^+(F \circ G)$ y $R^+F \circ R^+G$. Sea $X^\bullet \in D^+(\mathcal{A})$, luego existe $N^\bullet \in I(\mathcal{A})$ y un casi isomorfismo $X^\bullet \to N^\bullet$. $R^+(F \circ G)(X^\bullet) = F \circ G(N^\bullet)$. Y $R^+F \circ R^+G(X^\bullet) = R^+F(G(N^\bullet)) = F \circ G(N^\bullet)$, esta última igualdad es porque G envía objetos inyectivos en F-acíclicos. ∎

Teorema 4.26. Con la notación e hipótesis de la proposición anterior, tenemos lo siguiente.
(i) Para cualquier objeto X en $\mathcal{A}$, existe una sucesión espectral

$$E_2^{p,q} = R^pF(R^qG(X))$$

que converge a $R^{p+q}(F \circ G)(X)$.
(ii) Para cualquier complejo $X^\bullet \in D^+(\mathcal{A})$, existe unas sucesión espectral

$$E_2^{p,q} = R^pF(\mathbb{R}^qG(X^\bullet))$$

que converge a $\mathbb{R}^{p+q}(F \circ G)(X^\bullet)$.

Estas sucesiones espectrales, llamadas las sucesiones espectrales de Grothendieck de $F \circ G$ son funtoriales en X, respectivamente en $X^\bullet$. Para simplificar la notación, usualmente se denotan los funtores $\mathbb{R}^mF$ como R^mF.
La prueba del Teorema anterior se puede encontrar en la página 207 de [4].

Capítulo 5

Los funtores derivados Hom

A continuación presentamos el funtor derivado del bifuntor Hom y sus híper funtores, los cuales, entre otras cosas, nos dan una caracterización para los objetos inyectivos y proyectivos. Las referencias de este capítulo pueden encontrarse en [1], [2], [3] y [10].

Definición 5.1. Sean $\mathcal{A}$, $\mathcal{B}$ y $\mathcal{C}$ categorías abelianas. Un funtor $F : \mathcal{A} \times \mathcal{B} \to \mathcal{C}$ es un **bifuntor** si:
a) Para cada $A_1 \in \mathcal{A}$, $F(A_1, \quad) : \mathcal{B} \to \mathcal{C}$ es funtor.
b) Para cada $A_2 \in \mathcal{B}$, $F(\quad, A_2) : \mathcal{A} \to \mathcal{C}$ es funtor.

Sea $\mathcal{A}$ una categoría abeliana. Introducimos el bifuntor

$$\mathrm{Hom}^\bullet(\quad,\quad) : C(\mathcal{A})^{op} \times C(\mathcal{A}) \to C(\mathcal{A}b)$$

dado por

$$\mathrm{Hom}^n(X^\bullet, Y^\bullet) = \prod_{p\in\mathbb{Z}} \mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(X^p, Y^{p+n}).$$

Aquí las diferenciales $d^n : \mathrm{Hom}^n(X^\bullet, Y^\bullet) \to \mathrm{Hom}^{n+1}(X^\bullet, Y^\bullet)$ están dadas por

$$d^n\varphi = d_Y \circ \varphi + (-1)^{n+1}\varphi \circ d_X.$$

También tenemos que

$$H^0(\mathrm{Hom}^\bullet(X^\bullet, Y^\bullet)) = \frac{\mathrm{Ker}(d^0)}{\mathrm{Im}(d^{-1})} = \mathrm{Hom}_{K(\mathcal{A})}(X^\bullet, Y^\bullet),$$

lo cual es un caso particular del siguiente lema.

Lema 5.2. Tenemos $H^n(\mathrm{Hom}^\bullet(X^\bullet, Y^\bullet)) = \mathrm{Hom}_{K(\mathcal{A})}(X^\bullet, Y[n]^\bullet)$ para todo $n \in \mathbb{Z}$ y para todo $X^\bullet$ e $Y^\bullet$ en $Ob(K(\mathcal{A}))$.

Demostración. Sea $\varphi \in \mathrm{Hom}^n(X^\bullet, Y^\bullet)$. Si φ está en $\mathrm{Ker}(d^n)$, entonces $d_Y \circ \varphi = (-1)^n \varphi \circ d_X$ lo que significa que $\varphi \in \mathrm{Hom}_{C(\mathcal{A})}(X^\bullet, Y[n]^\bullet)$. Además si existe $\psi \in \mathrm{Hom}^{n-1}(X^\bullet, Y^\bullet)$ tal que $d^{n-1}\psi = \varphi$ tenemos $d_Y \circ \psi + (-1)^n \psi \circ d_X = \varphi$, lo que significa que φ es homótopo a 0 en $\mathrm{Hom}_{C(\mathcal{A})}(X^\bullet, Y[n]^\bullet)$.

Esto implica que el morfismo natural, que a la clase de cohomología representada por el morfismo $\varphi \in \mathrm{Ker}(d^n)$, asocia la clase de homotopía $[\varphi] \in \mathrm{Hom}_{K(\mathcal{A})}(X^\bullet, Y[n]^\bullet)$, es un isomorfismo de $H^n(\mathrm{Hom}^\bullet(X^\bullet, Y^\bullet))$ en $\mathrm{Hom}_{K(\mathcal{A})}(X^\bullet, Y[n]^\bullet)$. ■

Un **bi-δ-funtor** $F : \mathcal{A}_1 \times \mathcal{A}_2 \to A_3$, donde $\mathcal{A}_1$, $\mathcal{A}_2$ y $\mathcal{A}_3$ son categorías trianguladas es un bifuntor tal que tanto $F(A_1, \quad) : \mathcal{A}_2 \to A_3$ como $F(\quad, A_2) : \mathcal{A}_1 \to A_3$ son δ-funtores.
El bifuntor $\mathrm{Hom}^\bullet$ es compatible con las homotopías y como resultado induce un bifuntor en las categorías homótopas

$$\mathrm{Hom}^\bullet(\quad,\quad) : K(\mathcal{A})^{op} \times K(\mathcal{A}) \to K(\mathcal{A}b).$$

Este funtor $\mathrm{Hom}^\bullet$ es un bi-δ-funtor.
Supongamos que la categoría $\mathcal{A}$ tiene suficientes inyectivos. Sea $W^\bullet \in Ob(K(\mathcal{A}))$, luego dejando fija la primera entrada tenemos el δ-funtor

$$\mathrm{Hom}^\bullet(W^\bullet, \quad) : K^+(\mathcal{A}) \to K(\mathcal{A}b).$$

el cual admite un funtor derivado

$$\mathrm{R}^+\mathrm{Hom}^\bullet(W^\bullet, \quad) : D^+(\mathcal{A}) \to D(\mathcal{A}b).$$

Así tenemos el funtor

$$\mathrm{R}^+\mathrm{Hom}^\bullet(\quad,\quad) : K(\mathcal{A})^{op} \times D^+(\mathcal{A}) \to D(\mathcal{A}b).$$

Y si $Y^\bullet \in Ob(D^+(\mathcal{A}))$, dejando fija la segunda entrada tenemos el funtor

$$\mathrm{R}^+\mathrm{Hom}^\bullet(\quad, Y^\bullet) : K(\mathcal{A})^{op} \to D(\mathcal{A}b).$$

que transforma los casi isomorfismos de $K(\mathcal{A})$ en isomorfismos de $D(\mathcal{A}b)$. Luego, existe un único funtor

$$RR^+\mathrm{Hom}^\bullet(\quad, Y^\bullet) : D(\mathcal{A})^{op} \to D(\mathcal{A}b).$$

donde finalmente tenemos un funtor

$$RR^+\mathrm{Hom}^\bullet(\quad,\quad) : D(\mathcal{A})^{op} \times D^+(\mathcal{A}) \to D(\mathcal{A}b).$$

Análogamente si la categoría $\mathcal{A}$ tiene suficientes proyectivos, entonces podemos construir el funtor derivado

$$RR^-\mathrm{Hom}^\bullet(\quad,\quad) : D^-(\mathcal{A})^{op} \times D(\mathcal{A}) \to D(\mathcal{A}b).$$

Si la categoría $\mathcal{A}$ tiene suficientes inyectivos y proyectivos entonces los dos funtores derivados coinciden en la subcategoría $D^-(\mathcal{A})^{op} \times D^+(\mathcal{A})$.

Definición 5.3. Para cualquier entero n, definimos el **n-ésimo híperext** de un par $(X^\bullet, Y^\bullet)$ en $D^-(\mathcal{A})^{op} \times D^+(\mathcal{A})$ por la fórmula

$$\mathrm{Ext}^n(X^\bullet, Y^\bullet) = H^n(\mathrm{RHom}^\bullet(X^\bullet, Y^\bullet)).$$

Usualmente $\mathrm{Ext}^1(X^\bullet, Y^\bullet)$ es abreviado a $\mathrm{Ext}(X^\bullet, Y^\bullet)$. El funtor encaje $C_0 : \mathcal{A} \to D^b(\mathcal{A})$ es usado para definir $\mathrm{Ext}^n(X, Y)$ para dos objetos X, Y en $\mathcal{A}$.

Lema 5.4. Si $X^\bullet \to Y^\bullet$ es un casi isomorfismo en $K(\mathcal{A})$, donde $X^\bullet \in Ob(K^+(\mathcal{A}))$, entonces existe un casi isomorfismo $Y^\bullet \to Z^\bullet$, con $Z^\bullet \in K^+(\mathcal{A})$.

Demostración. Sea $s : X^\bullet \to Y^\bullet$ un casi isomorfismo en $K(\mathcal{A})$, donde $X^\bullet \in Ob(K^+(\mathcal{A}))$, podemos suponer que $X^i = 0$, para $i < 0$. Como s induce un isomorfismo en la cohomología tenemos que $H^i(Y^\bullet) = 0$, para $i < 0$. Definimos $Z^\bullet$ como

$$Z^i = \begin{cases} 0, & \text{si } \ i < 0 \\ \operatorname{Coker}(d_Y^{-1} : Y^{-1} \to Y^0), & \text{si } \ i = 0 \\ Y^i, & \text{si } \ i > 0 \end{cases}$$

Entonces $Z^\bullet \in Ob(K^+(\mathcal{A}))$ y el morfismo $t : Y^\bullet \to Z^\bullet$ definido por

$$t^i = \begin{cases} 0, & \text{si } \ i < 0 \\ p : Y^0 \to Y^0/\operatorname{Im}(d_Y^{-1}), & \text{si } \ i = 0 \\ Id_{Y^i}, & \text{si } \ i > 0 \end{cases}$$

donde p es la proyección canónica, es claramente un casi isomorfismo. ∎

Usando los resultados anteriores tenemos la siguiente proposición.

Proposición 5.5. Si $\mathcal{A}$ admite suficientes inyectivos, entonces para todo $X^\bullet \in Ob(D(\mathcal{A}))$, $Y^\bullet \in Ob(D^+(\mathcal{A}))$ y $n \in \mathbb{Z}$ tenemos

$$\operatorname{Ext}^n(X^\bullet, Y^\bullet) = \operatorname{Hom}_{D(\mathcal{A})}(X^\bullet, Y[n]^\bullet).$$

Demostración. Sea $s : Y^\bullet \to I^\bullet$ un casi isomorfismo donde $I^\bullet \in K^+(I(\mathcal{A}))$. Tenemos que

$$\operatorname{Hom}_{D(\mathcal{A})}(X^\bullet, Y[n]^\bullet) \cong \operatorname{Hom}_{D(\mathcal{A})}(X^\bullet, I[n]^\bullet) \cong \operatorname{Hom}_{K(\mathcal{A})}(X^\bullet, I[n]^\bullet)$$

El primer isomorfismo es evidente, pues el casi isomorfismo s induce un isomorfismo en $D(\mathcal{A})$. Para demostrar el segundo isomorfismo es suficiente demostrar que

$$\operatorname{Hom}_{D(\mathcal{A})}(X^\bullet, I^\bullet) \cong \operatorname{Hom}_{K(\mathcal{A})}(X^\bullet, I^\bullet)$$

Sea $\alpha \in \operatorname{Hom}_{D(\mathcal{A})}(X^\bullet, I^\bullet)$ representado por un diagrama $X^\bullet \xrightarrow{a} Z^\bullet \xleftarrow[\sim]{t} I^\bullet$ donde $Z^\bullet$, a y t están en $K(\mathcal{A})$. Como $I^\bullet$ es acotado inferiormente, por el Lema anterior tenemos que existe un casi isomorfismo $Z^\bullet \xrightarrow{b} W^\bullet$, donde $W^\bullet$ está en $K^+(\mathcal{A})$ y como $\mathcal{A}$ admite suficientes inyectivos existe un casi isomorfismo $W^\bullet \xrightarrow{c} J^\bullet$, donde $J^\bullet \in K^+(I(\mathcal{A}))$.

Finalmente podemos representar a α con un diagrama $X^\bullet \xrightarrow{c\circ b\circ a} J^\bullet \xleftarrow[\sim]{c\circ b\circ t} I^\bullet$, donde $c \circ b \circ t$ es un isomorfismo por el Corolario 4.11.
La correspondencia $\alpha \mapsto (c \circ b \circ t)^{-1} c \circ b \circ a : X^\bullet \to I^\bullet$ es el isomorfismo que buscábamos. Luego, por el Lema 5.2. tenemos que $\operatorname{Hom}_{K(\mathcal{A})}(X^\bullet, I[n]^\bullet) = H^n(\operatorname{Hom}^\bullet(X^\bullet, I^\bullet))$. Entonces $\operatorname{Hom}_{D(\mathcal{A})}(X^\bullet, Y[n]^\bullet) \cong H^n(\operatorname{Hom}^\bullet(X^\bullet, I^\bullet)) =: \operatorname{Ext}^n(X^\bullet, Y^\bullet)$. ∎

Si la categoría abeliana $\mathcal{A}$ tiene suficientes proyectivos e inyectivos y si X e Y son dos objetos en $\mathcal{A}$ tales que $\mathrm{Ext}(X,Y)=0$, entonces cualquier extensión

$$0 \to Y \to Z \to X \to 0$$

de X por Y es trivial, i.e. la sucesión anterior escinde. De hecho, aplicando el funtor $\mathrm{Hom}(X,\quad)$ a la sucesión exacta anterior obtenemos una sucesión exacta larga que contiene a la sucesión

$$\mathrm{Hom}(X,Z) \to \mathrm{Hom}(X,X) \to \mathrm{Ext}(X,Y)=0.$$

Esto implica que la proyección $p : Z \to X$ tiene una sección $s : X \to Z$, i.e. un morfismo s tal que $p \circ s = Id_X$.
Notemos que un complejo $X^\bullet \in C(\mathcal{M}od(R))$ de módulos, donde R es un anillo, puede ser considerado como un módulo graduado con una diferencial de grado -1, i.e. como un complejo del tipo de homología $X_\bullet$, fijando $X_m = X^{-m}$ para cualquier $m \in \mathbb{Z}$ y usando la misma diferencial para ambos $X^\bullet$ y $X_\bullet$. Con esta notación tenemos $H_m(X_\bullet) = H^{-m}(X^\bullet)$.
Los siguientes resultados son en la categoría de R-módulos para un anillo R.

Lema 5.6. Sea

$$0 \to D \xrightarrow{f} E \xrightarrow{g} F \to 0$$

una sucesión exacta de R-módulos. Entonces el funtor $\mathrm{Hom}_R(\quad,B) : \mathcal{M}od(R) \to \mathcal{M}od(R)$ es exacto izquierdo.

Demostración. Queremos probar que

$$0 \to \mathrm{Hom}_R(F,B) \xrightarrow{\circ g} \mathrm{Hom}_R(E,B) \xrightarrow{\circ f} \mathrm{Hom}_R(D,B)$$

es exacta. Probemos que $\circ g$ es inyectiva. $h \in \mathrm{Ker}(\circ g) \Leftrightarrow h \circ g = 0 \Leftrightarrow F = \mathrm{Im}(g) \subseteq \mathrm{Ker}(h) \subseteq F \Leftrightarrow \mathrm{Ker}(h) = F \Leftrightarrow h = 0$ y así $\circ g$ es inyectiva.
Ahora veamos que $\mathrm{Im}(\circ g) = \mathrm{Ker}(\circ f)$. Sea $h \in \mathrm{Im}(\circ g)$, entonces existe $k \in \mathrm{Hom}_R(F,B)$ tal que $k \circ g = h$, luego $(\circ f)(k \circ g) = k \circ g \circ f = 0$, pues $g \circ f = 0$, por lo tanto $k \circ g = h \in \mathrm{Ker}(\circ f)$. Así $\mathrm{Im}(\circ g) \subseteq \mathrm{Ker}(\circ f)$.
Sea $k \in \mathrm{Hom}_R(E,B)$ tal que $k \circ f = 0$, por lo que $\mathrm{Im}(f) = \mathrm{Ker}(g) \subseteq \mathrm{Ker}(k)$. Queremos probar que existe $h \in \mathrm{Hom}_R(F,B)$ tal que $k = h \circ g$. Como g es sobreyectiva para $a \in F$ existe $b \in E$ tal que $g(b) = a$, definimos $h : F \to B$ como $h(a) = k(b)$, donde $a = g(b)$. Así, si $b \in E$, entonces $h \circ g(b) = h(a) = k(b)$. Veamos que h está bien definida. Supongamos que existe $c \in E$ tal que $g(c) = g(b) = a$. Así $c - b \in \mathrm{Ker}(g) = \mathrm{Im}(f)$, por lo que existe $d \in D$ tal que $f(d) = c - b$. Luego $k(c-b) = k(f(d)) = 0$, por lo tanto $k(c) = k(d)$, i.e. h está bien definida. Y así $\mathrm{Im}(\circ g) \supseteq \mathrm{Ker}(\circ f)$. ■

Proposición 5.7. Los siguientes enunciados son equivalentes:
1. B es un R-módulo inyectivo.
2. $\mathrm{Hom}_R(\quad,B)$ es un funtor exacto.
3. $\mathrm{Ext}^i_R(A,B) = 0$ para todo $i \neq 0$ y todo A (B es $\mathrm{Hom}_R(A,\quad)$- acíclico para todo R-módulo A).
4. $\mathrm{Ext}^1_R(A,B) = 0$ para todo A.

Demostración. 1. $\Rightarrow$ 2. Sea

$$0 \to D \xrightarrow{f} E \xrightarrow{g} F \to 0$$

una sucesión exacta, donde D, E y F son R-módulos. Queremos probar que la sucesión

$$0 \to \operatorname{Hom}_R(F, B) \xrightarrow{\circ g} \operatorname{Hom}_R(E, B) \xrightarrow{\circ f} \operatorname{Hom}_R(D, B) \to 0$$

es exacta. Por el lema anterior $\operatorname{Hom}_R(\quad, B)$ es exacto izquierdo. Sólo falta probar que $\circ f$ es sobreyectiva, es decir que para dado $k \in \operatorname{Hom}_R(D, B)$, existe $h \in \operatorname{Hom}_R(E, B)$ tal que $h \circ f = k$, pero esto es la definición de que B es inyectivo.

2. $\Rightarrow$ 1. $\operatorname{Hom}_R(\quad, B)$ es funtor exacto, i.e. si la sucesión

$$0 \to D \xrightarrow{f} E \xrightarrow{g} F \to 0$$

es exacta, entonces

$$0 \to \operatorname{Hom}_R(F, B) \xrightarrow{\circ g} \operatorname{Hom}_R(E, B) \xrightarrow{\circ f} \operatorname{Hom}_R(D, B) \to 0$$

es exacta. En particular $\circ f$ es sobreyectiva, i.e. para todo $k \in \operatorname{Hom}_R(D, B)$, existe $l \in \operatorname{Hom}_R(E, B)$ tal que $l \circ f = k$. Por lo tanto B es inyectivo.

1. $\Rightarrow$ 3. Tenemos que B es inyectivo. Sea A un R-módulo arbitrario. Como B es inyectivo tenemos que $B \xrightarrow{Id_B} B \to 0 \to \cdots$ es exacta y así $\cdots \to 0 \to B \to 0 \to \cdots$ es una resolución inyectiva de B.

$$\begin{aligned}
\operatorname{Ext}^i_R(A, B) &= R^i \operatorname{Hom}_R(A, \quad)(B) \\
&= H^i(\operatorname{Hom}_R(A, \quad)(\cdots \to 0 \to B \to 0 \to \cdots)) \\
&= H^i(\cdots \to 0 \to \operatorname{Hom}_R(A, B) \to 0 \cdots) \\
&= \begin{cases} 0, & \text{si } \ i \neq 0 \\ \operatorname{Hom}_R(A, B), & \text{si } \ i = 0 \end{cases}
\end{aligned}$$

3. $\Rightarrow$ 4. Es inmediato.

4. $\Rightarrow$ 2. Supongamos que $\operatorname{Ext}^1_R(A, B) = 0$ para todo R-módulo A. Y sea

$$0 \longrightarrow A \longrightarrow D \longrightarrow C \longrightarrow 0$$

una sucesión exacta de R-módulos. Sabemos que $\operatorname{Hom}_R(\quad, B)$ es un funtor exacto izquierdo, entonces por la Proposición 4.24. existe la sucesión exacta larga

$$\cdots \longrightarrow R^n \operatorname{Hom}_R(C, B) \longrightarrow R^n \operatorname{Hom}_R(D, B) \longrightarrow R^n \operatorname{Hom}_R(A, B) \longrightarrow R^{n+1} \operatorname{Hom}_R(C, B) \longrightarrow \cdots$$

y usando la hipótesis tenemos la sucesión exacta

$$0 \longrightarrow R^0 \operatorname{Hom}_R(C, B) \longrightarrow R^0 \operatorname{Hom}_R(D, B) \longrightarrow R^0 \operatorname{Hom}_R(A, B) \longrightarrow 0$$

Así, usando que $\operatorname{Hom}_R(\quad, B) = R^0 \operatorname{Hom}_R(\quad, B)$, pues $\operatorname{Hom}_R(\quad, B)$ es exacto izquierdo, la sucesión

$$0 \longrightarrow \operatorname{Hom}_R(C, B) \longrightarrow \operatorname{Hom}_R(D, B) \longrightarrow \operatorname{Hom}_R(A, B) \longrightarrow 0$$

es exacta. ■

Proposición 5.8. Los siguientes enunciados son equivalentes:
1. A es un R-módulo proyectivo.
2. $\mathrm{Hom}_R(A, \quad)$ es un funtor exacto.
3. $\mathrm{Ext}^i_R(A, B) = 0$ para todo $i \neq 0$ y todo B (A es $\mathrm{Hom}_R(\quad, B)$- acíclico para toda B).
4. $\mathrm{Ext}^1_R(A, B) = 0$ para todo B.

Demostración. La prueba es análoga a la que se hizo para inyectivos.

■

Capítulo 6

Funtores adjuntos y exactitud izquierda y derecha

En este capítulo definimos los funtores adjuntos y vemos la relación que tienen con la exctitud. Además introducimos el colímite de un funtor, el cual bajo ciertas condiciones conmuta con los funtores derivados y además, cuando existe el colímite induce un funtor. Y por último introducimos el funtor derivado Tor y calculamos los híper funtores de Tor en grupos abelianos que nos dan información de la torsión. Las referencias de este capítulo pueden encontrarse en [2] y [10].

Lema 6.1. Una sucesión $A \xrightarrow{\alpha} B \xrightarrow{\beta} C$ en $\mathcal{A}$ es exacta si para todo $M \in Ob(\mathcal{A})$ la siguiente sucesión:

$$\mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(M, A) \xrightarrow{\alpha^*} \mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(M, B) \xrightarrow{\beta^*} \mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(M, C)$$

es exacta, donde $\alpha^* := \alpha \circ \_$ y $\beta^* := \beta \circ \_$.

Demostración. Tomando $M = A$, vemos que $\beta\alpha = \beta^*\alpha^*(id_A) = 0$, entonces $\mathrm{Im}(\alpha) \subseteq \mathrm{Ker}(\beta)$. Tomando $M = \mathrm{Ker}(\beta)$, vemos que la inclusión $i : \mathrm{Ker}(\beta) \to B$ satisface $\beta^*(i) = \beta i = 0$, por lo que existe $\sigma \in \mathrm{Hom}(M, A)$ con $i = \alpha^*(\sigma) = \alpha\sigma$. Luego $\mathrm{Ker}(\beta) = i(\mathrm{Ker}(\beta)) = \alpha\sigma(\mathrm{Ker}(\beta))$ y entonces $\mathrm{Ker}(\beta) = \mathrm{Im}(i) \subseteq \mathrm{Im}(\alpha)$. Y así la sucesión deseada es exacta. ∎

Teorema 6.2. Sea $L : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ y $R : \mathcal{B} \to \mathcal{A}$ un par adjunto de funtores aditivos (L es adjunto izquierdo y R adjunto derecho), esto es, existe un isomorfismo natural

$$\tau : \mathrm{Hom}_{\mathcal{B}}(L(A), B) \xrightarrow{\cong} \mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(A, R(B))$$

para A objeto de $\mathcal{A}$ y B objeto de $\mathcal{B}$ arbitrarios. Entonces L es exacto derecho y R es exacto izquierdo.

Demostración. Supongamos que $0 \to B' \xrightarrow{g} B \xrightarrow{h} B'' \to 0$ es exacta en $\mathcal{B}$. Por naturalidad de τ existe un diagrama conmutativo para cada A en $\mathcal{A}$

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & \mathrm{Hom}_{\mathcal{B}}(L(A),B') \arrow[r] \arrow[d, "\cong"'] & \mathrm{Hom}_{\mathcal{B}}(L(A),B) \arrow[r] \arrow[d, "\cong"'] & \mathrm{Hom}_{\mathcal{B}}(L(A),B'') \arrow[d, "\cong"'] \\
0 \arrow[r] & \mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(A,R(B')) \arrow[r] & \mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(A,R(B)) \arrow[r] & \mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(A,R(B''))
\end{tikzcd}$$

pues para $g : B' \to B$ y $h : B \to B''$ tenemos

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{Hom}_{\mathcal{B}}(L(A),B') \arrow[r, "\mathrm{Hom}_{\mathcal{B}}(L(A),g)", "\cong"'] \arrow[d, "\tau(B')"] & \mathrm{Hom}_{\mathcal{B}}(L(A),B) \arrow[d, "\cong"', "\tau(B)"] \\
\mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(A,R(B')) \arrow[r, "\mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(A,R(g))", "\cong"'] & \mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(A,R(B))
\end{tikzcd}
\quad \text{y} \quad
\begin{tikzcd}
\mathrm{Hom}_{\mathcal{B}}(L(A),B) \arrow[r, "\mathrm{Hom}_{\mathcal{B}}(L(A),h)"] \arrow[d, "\cong"', "\tau(B)"] & \mathrm{Hom}_{\mathcal{B}}(L(A),B'') \arrow[d, "\cong"', "\tau(B'')"] \\
\mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(A,R(B)) \arrow[r, "\mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(A,R(h))", "\cong"'] & \mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(A,R(B''))
\end{tikzcd}$$

respectivamente. La fila de arriba es exacta porque $\mathrm{Hom}(L(A),\quad)$ es exacto izquierdo, entonces la fila de abajo también es exacta para toda A. Por el lema anterior

$$0 \to R(B') \to R(B) \to R(B'')$$

es exacta. Esto prueba que todo funtor adjunto derecho R es exacto izquierdo. Análogamente L es exacto derecho. ■

Si $\mathcal{A}$ tiene suficientes proyectivos y $\mathcal{B}$ suficientes inyectivos, entonces los funtores adjuntos izquierdos (derechos) tienen funtores derivados izquierdos (derechos).

Sea R un anillo y B un R-módulo izquierdo. La siguiente proposición prueba que $\otimes_R B : \mathcal{M}od(R) \to \mathcal{A}b$ es adjunto izquierdo a $\mathrm{Hom}_{\mathcal{A}b} : (B,\quad)$ y así $\otimes_R B$ es exacto derecho. Más generalmente, si S es otro anillo y B es un R-S bimódulo, entonces $\otimes_R B : \mathcal{M}od(R) \to \mathcal{M}od(S)$ es adjunto izquierdo y por lo tanto es exacto derecho.

Proposición 6.3. Si B es un R-S bimódulo y C es un S-módulo derecho, entonces $\mathrm{Hom}_S(B,C)$ es naturalmente un R-módulo derecho por la regla $(fr)b = f(rb)$ para $f \in \mathrm{Hom}(B,C)$, $r \in R$ y $b \in B$. El funtor $\mathrm{Hom}_S(B,\quad) : \mathcal{M}od(S) \to \mathcal{M}od(R)$ es adjunto derecho a $\otimes_R B$. Esto es,para cada R-módulo A y S-módulo C existe un isomorfismo natural

$$\tau : \mathrm{Hom}_S(A \otimes_R B, C) \overset{\cong}{\to} \mathrm{Hom}_R(A, \mathrm{Hom}_S(B,C)).$$

Demostración. Dado $f : A \otimes_R B \to C$, definimos $(\tau f)(a)$ como el morfismo $b \mapsto f(a \otimes b)$ para cada $a \in A$. Dado $g : A \to \mathrm{Hom}_S(B,C)$, definimos $\tau^{-1}(g)$ como el morfismo definido por la forma bilineal $a \otimes b \mapsto g(a)(b)$.
Veamos que $\tau(f)(a)$ es un morfismo de S-módulos, $\tau(f)$ es un morfismo de R-módulos, $\tau^{-1}(g)$ es un morfismo de R-módulos, τ es un isomorfismo con inversa τ^{-1} y que τ es natural.
Sean $m,n \in B$ y $r,s \in S$, luego $\tau f(a)(rm+sn) = f(a \otimes (rm+sn)) = f((a \otimes rm)+(a \otimes sn)) = f(a \otimes rm) + f(a \otimes sn) = rf(a \otimes m) + sf(a \otimes n) = r\tau f(a)(m) + s\tau f(a)(n)$, por lo tanto $\tau(f)(a)$ es un morfismo de S-módulos.
Sean $m,n \in A$ y $r,s \in R$, luego $\tau f(rm+sn)(b) = f((rm+sn) \otimes b) = rf(m \otimes b) + sf(n \otimes b) = r(\tau f)(m)(b) + s(\tau f)(n)(b) = (r(\tau f)(m) + s(\tau f)(n))(b)$, por lo tanto $\tau(f)$ es un morfismo de R-módulos.

Sea $r \in R$ y $a \otimes b \in A \otimes_R B$, luego $\tau^{-1}(g)(r(a \otimes b)) = \tau^{-1}(g)((ra) \otimes b) = g(ra)(b) = rg(a)(b) = r\tau^{-1}(g)(a \otimes b)$, por lo tanto $\tau^{-1}(g)$ es un morfismo de R-módulos.
Sean $g \in \mathrm{Hom}_R(A, \mathrm{Hom}_S(B, C))$, $f \in \mathrm{Hom}_S(A \otimes_R B, C)$, $a \in A$ y $b \in B$. Luego $\tau \circ \tau^{-1}(g)(a \otimes b) = \tau(g(a)(b)) = g(a \otimes b)$. Además $\tau^{-1} \circ \tau(f)(a)(b) = \tau^{-1} f(a \otimes b) = f(a)(b)$ por lo tanto τ es un isomorfismo con inversa τ^{-1}.
Ahora probemos que τ es natural. Sean $\tau_1 : \mathrm{Hom}_S(A \otimes_R B, \quad) \to \mathrm{Hom}_R(A, \mathrm{Hom}_S(B, \quad))$ y $\alpha \in \mathrm{Hom}_S(C, D)$, tenemos $\mathrm{Hom}_S(A \otimes_R B, \alpha)(f) = \alpha \circ f$, donde $f \in \mathrm{Hom}_S(A \otimes_R B, C)$. Y $\mathrm{Hom}_R(A, \mathrm{Hom}_S(B, \alpha))$ es tal que para $g \in \mathrm{Hom}_R(A, \mathrm{Hom}_S(B, C))$, $\mathrm{Hom}_R(A, \mathrm{Hom}_S(B, \alpha))(g) : A \to \mathrm{Hom}_S(B, D)$ se define como $\mathrm{Hom}_R(A, \mathrm{Hom}_S(B, \alpha))(g)(a) = \alpha \circ g(a)$, para $a \in A$. Veamos que el siguiente diagrama conmuta

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{Hom}_S(A \otimes_R B, C) \arrow[r, "\mathrm{Hom}_S(A \otimes_R B, \alpha)"] \arrow[d, "\tau"'] & \mathrm{Hom}_S(A \otimes_R B, D) \arrow[d, "\tau"] \\
\mathrm{Hom}_R(A, \mathrm{Hom}_S(B, C)) \arrow[r, "\mathrm{Hom}_R(A, \mathrm{Hom}_S(B, \alpha))"] & \mathrm{Hom}_R(A, \mathrm{Hom}_S(B, D))
\end{tikzcd}$$

Sean $f \in \mathrm{Hom}_S(A \otimes_R B, C)$, $a \in A$ y $b \in B$. Tenemos que $\tau \circ \mathrm{Hom}_S(A \otimes_R B, \alpha)(f) = \tau(\alpha \circ f)$, donde $\tau(\alpha \circ f)(a)(b) = \alpha \circ f(a \otimes b)$. Y $\mathrm{Hom}_R(A, \mathrm{Hom}_S(B, \alpha)) \circ \tau(f)$ es tal que $\mathrm{Hom}_R(A, \mathrm{Hom}_S(B, \alpha)) \circ \tau(f)(a)(b) = \alpha(f(a \otimes b))$. Por lo tanto τ_1 es transformación natural.
Ahora consideremos $\tau_2 : \mathrm{Hom}_s(A \otimes_R \quad, C) \to \mathrm{Hom}_R(A, \mathrm{Hom}_S(\quad, C))$. Sean $f \in \mathrm{Hom}_{R-S}(B, D)$ y $g \in \mathrm{Hom}_S(A \otimes_R D, C)$, luego $\mathrm{Hom}_S(A \otimes_R f, C)(g) = g \circ (Id_A \otimes f)$. Y para $h \in \mathrm{Hom}_R(A, \mathrm{Hom}_S(D, C))$, tenemos que $\mathrm{Hom}_R(A, \mathrm{Hom}_S(f, D))(h) \in \mathrm{Hom}_R(A, \mathrm{Hom}_S(B, C))$ es tal que para $a \in A$, $\mathrm{Hom}_R(A, \mathrm{Hom}_S(f, D))(h)(a) = h(a) \circ f$. Veamos que el siguiente diagrama conmuta

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{Hom}_S(A \otimes_R B, C) \arrow[d, "\tau"'] & \mathrm{Hom}_S(A \otimes_R D, C) \arrow[l, "\mathrm{Hom}_S(A \otimes_R f, C)"'] \arrow[d, "\tau"] \\
\mathrm{Hom}_R(A, \mathrm{Hom}_S(B, C)) & \mathrm{Hom}_R(A, \mathrm{Hom}_S(D, C)) \arrow[l, "\mathrm{Hom}_R(A, \mathrm{Hom}_S(f, D))"]
\end{tikzcd}$$

Sea $g \in \mathrm{Hom}_S(A \otimes_R D, C)$, $a \in A$ y $b \in B$. Tenemos que $\tau \circ \mathrm{Hom}_S(A \otimes_R f, C)(g) = \tau(g \circ (Id_A \otimes f))$, donde $\tau(g \circ (Id_A \otimes f))(a)(b) = (g \circ (Id_A \otimes f))(a \otimes b) = g(a \otimes f(b))$. Y $\mathrm{Hom}_R(A, \mathrm{Hom}_S(f, D)) \circ \tau(g)$ es tal que $\mathrm{Hom}_R(A, \mathrm{Hom}_S(f, D)) \circ \tau(g)(a)(b) = \tau(g)(a) \circ f(b) = g(a \otimes f(b))$. Por lo tanto τ_2 es transformación natural.
Por último consideremos $\tau_3 : \mathrm{Hom}_s(\quad \otimes_R B, C) \to \mathrm{Hom}_R(\quad, \mathrm{Hom}_S(B, C))$. Sea $f \in \mathrm{Hom}_R(A, D)$. Para $g \in \mathrm{Hom}_S(D \otimes_R B, C)$, $\mathrm{Hom}_S(f \otimes_R B, C)(g) = g \circ (f \otimes Id_B)$. Y para $h \in \mathrm{Hom}_R(D, \mathrm{Hom}_S(B, C))$, $\mathrm{Hom}_R(f, \mathrm{Hom}_S(B, C))(h) = h \circ f$. Veamos que el siguiente diagrama conmuta

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{Hom}_S(A \otimes_R B, C) \arrow[d, "\tau"'] & \mathrm{Hom}_S(D \otimes_R B, C) \arrow[l, "\mathrm{Hom}_S(f \otimes_R B, C)"'] \arrow[d, "\tau"] \\
\mathrm{Hom}_R(A, \mathrm{Hom}_S(B, C)) & \mathrm{Hom}_R(D, \mathrm{Hom}_S(B, C)) \arrow[l, "\mathrm{Hom}_R(f, \mathrm{Hom}_S(B, C))"]
\end{tikzcd}$$

Sea $g \in \operatorname{Hom}_S(D \otimes_R B, C)$, $a \in A$ y $b \in B$. Tenemos que $\tau \circ \operatorname{Hom}_S(f \otimes_R B, C)(g) = \tau(g \circ (f \otimes Id_B))$, donde $\tau(g \circ (f \otimes Id_B))(a)(b) = g \circ (f \otimes Id_B)(a \otimes b) = g(f(a) \otimes b)$. Y $\operatorname{Hom}_R(f, \operatorname{Hom}_S(B, C)) \circ \tau(g) = \tau(g) \circ f$, donde $\tau(g) \circ f(a)(b) = g(f(a) \otimes b)$. Por lo tanto τ_3 es transformacicón natural. Y así τ es natural. ■

Definición 6.4. Sea B un R-módulo izquierdo, entonces $T(A) = A \otimes_R B$ es un funtor exacto derecho de $\mathcal{M}od(R)$ a $\mathcal{A}b$. Definimos los grupos abelianos

$$\operatorname{Tor}_n^R(A, B) = (L_n T)(A).$$

En particular, $\operatorname{Tor}_0^R(A, B) \cong A \otimes_R B$. Recordemos que estos grupos se calculan encontrando una resolución proyectiva $P \to A$ y tomando la homología de $P \otimes_R B$. En particular, si A es un R-módulo proyectivo, entonces $\operatorname{Tor}_n(A, B) = 0$, para $n \neq 0$.
Más generalmente, si B es un R-S bimódulo, podemos pensar en $T(A) = A \otimes_R B$ como un funtor exacto derecho aterrizando en $\mathcal{M}od(S)$ y por lo tanto podemos dotar a $\operatorname{Tor}_n^R(A, B)$ de una estructura de S-módulos.

Definición 6.5. Sea $\mathcal{C}$ una categoría, $\mathcal{A}$ una categoría abeliana. La **categoría funtor** $\mathcal{A}^{\mathcal{C}}$ es la categoría abeliana cuyos objetos son funtores $F : \mathcal{C} \to \mathcal{A}$ y los morfismos son transformaciones naturales entre ellos.
Sean I una categoría fija y $\mathcal{A}$ una categoría abeliana. Existe un **funtor diagonal** $\Delta : \mathcal{A} \to \mathcal{A}^{\mathcal{I}}$ tal que si A es un objeto de $\mathcal{A}$ entonces $\Delta A : \mathcal{I} \to \mathcal{A}$ es el funtor constante $\Delta A(i) = A$ para todo objeto i de $\mathcal{I}$ y para cada morfismo $f : A \to B$ en $\mathcal{A}$ tenemos que $\Delta(f) : \Delta(A) \to \Delta(B)$ es la transformación natural definida por $\Delta(f)(i) = f$, para cada i objeto de $\mathcal{I}$.
El **colímite** de un funtor $F : \mathcal{I} \to \mathcal{A}$, si existe, es un objeto de $\mathcal{A}$, denotado como $\operatorname{Colim}_{i \in I} F_i$, donde F_i denota a $F(i)$, junto con una colección de morfismos $\{\psi_i : F(i) \to \operatorname{Colim}_{i \in I} F_i \mid i \in I\}$ tales que si $\alpha : i \to j$ es un morfismo en $\mathcal{I}$, entonces el diagrama

$$\begin{tikzcd}
F(i) \arrow[rr, "F(\alpha)"] \arrow[dr, "\psi_i"'] & & F(j) \arrow[dl, "\psi_j"] \\
& \operatorname*{Colim}_{i \in \mathcal{I}} F_i &
\end{tikzcd}$$

conmuta. Además la colección $\{\psi_i : F(i) \to \operatorname{Colim}_{i \in I} F_i \mid i \in I\}$ satisface la siguiente propiedad universal: dado cualquier otro objeto M de $\mathcal{A}$ y otra colección de morfismos $\{\varphi_i : F(i) \to M \mid i \in I\}$ tales que si $\alpha : i \to j$ es un morfismo en $\mathcal{I}$, entonces el diagrama

$$\begin{tikzcd}
F(i) \arrow[rr, "F(\alpha)"] \arrow[dr, "\varphi_i"'] & & F(j) \arrow[dl, "\varphi_j"] \\
& M &
\end{tikzcd}$$

conmuta. Entonces existe un único morfismo $\gamma : \operatorname{Colim}_{i \in I} F_i \to M$ tal que

$$\begin{tikzcd}
F(i) \arrow[r, "\psi_i"] \arrow[d, "\varphi_i"'] & \operatorname*{Colim}_{i\in I} F_i \arrow[dl, "\gamma"] \\
M &
\end{tikzcd}$$

conmuta.

Ejemplo 6.6. 1) Sea A un grupo abeliano, sea $\{A_i\}_{i\in I}$ la colección de los subgrupos finitamente generados de A. Entonces $\operatorname{Colim}_{i\in\mathcal{I}} A_i = A$.
Sea $\mathcal{I}$ la categoría tal que $Ob(\mathcal{I}) = \{A_i\}_{i\in I}$ y

$$\mathcal{M}or(\mathcal{I}) = \begin{cases} A_j \xrightarrow{\iota_j^k} A_k, & \text{si } A_j \subseteq A_k \\ \varnothing, & \text{si } A_j \nsubseteq A_k \end{cases}$$

donde ι_j^k es la inclusión de A_j en A_k. Consideremos el funtor inclusión $F : \mathcal{I} \to \mathcal{A}b$. Probaremos que $\operatorname{Colim}_{i\in\mathcal{I}} A_i = A$ junto con los morfismos $\{A_j \xrightarrow{\iota_j} A\}_{A_j\in I}$, donde ι_j es la inclusión de A_j en A. El siguiente diagrama conmuta

$$\begin{tikzcd}
& A & \\
A_i \arrow[ur, "\iota_i"] \arrow[rr, "\iota_i^j"'] & & A_j \arrow[ul, "\iota_j"']
\end{tikzcd}$$

Ahora sólo falta probar la propiedad universal. Supongamos que existe $B \in Ob(\mathcal{A}b)$ y una familia de morfismos $\{f_{A_j}\}_{A_j\in I}$ tales que el diagrama

$$\begin{tikzcd}
& A & \\
A_i \arrow[ur, "\iota_i"] \arrow[rr, "\iota_i^j"] \arrow[dr, "f_{A_i}"'] & & A_j \arrow[ul, "\iota_j"'] \arrow[dl, "f_{A_j}"] \\
& B &
\end{tikzcd}$$

conmuta. Notemos que para cada $a \in A$ tenemos el subgrupo finitamente generado $\langle a\rangle$ y el siguiente diagrama conmutativo

$$\begin{tikzcd}
& A & \\
\langle a\rangle \arrow[ur, "\iota_a"] \arrow[rr, "\iota_a^j"] \arrow[dr, "f_{\langle a\rangle}"'] & & A_j \arrow[ul, "\iota_j"'] \arrow[dl, "f_{A_j}"] \\
& B &
\end{tikzcd}$$

Así, definimos un morfismo $\gamma : A \to B$ como $\gamma(a) = f_{\langle a\rangle}(a)$, notemos que $f_{A_j}(a) = f_{\langle a\rangle}(a)$ para todo $A_j \in Ob(\mathcal{I})$. Y por construcción es único. Por lo tanto $\operatorname{Colim}_{i\in\mathcal{I}} A_i = A$.

2) Veamos que $\operatorname{Colim} \Delta B = B$, con B en los objetos de $\mathcal{A}$ y donde los morfismos que acompañan al colímite son la identidad en B.
Sea $\alpha : i \to j$ un morfismo en $\mathcal{I}$, usando que $\Delta B(i) = B$ para todo $i \in Ob(\mathcal{I})$ y $\Delta B(\alpha) = Id_B$ para todo $\alpha \in \mathcal{M}or(\mathcal{I})$ tenemos el siguiente diagrama conmutativo

$$\begin{tikzcd}
\Delta B(i) \arrow[rr, "\Delta B(\alpha)"] \arrow[dr, "Id_B"'] & & \Delta B(j) \arrow[dl, "Id_B"] \\
& B &
\end{tikzcd}$$

Ahora supongamos que existe un objeto C en $\mathcal{A}$ y una familia $\{f_i\}_{i \in \mathcal{I}}$ de morfismos tal que el siguiente diagrama conmuta

$$\begin{tikzcd}
\Delta B(i) \arrow[rr, "\Delta B(\alpha)"] \arrow[dr, "f_i"'] & & \Delta B(j) \arrow[dl, "f_j"] \\
& C &
\end{tikzcd}$$

Notemos que de la conmutatividad del diagrama tenemos que $f_i = f_j$ para todo $i, j \in \mathcal{I}$. Además f_i es el único morfismo tal que $f_i = f_i \circ Id_B$

$$\begin{tikzcd}
\Delta B(i) \arrow[r, "f_i"] \arrow[d, "Id_B"'] & C \\
B \arrow[ur, "f_i"'] &
\end{tikzcd}$$

Por lo tanto $\operatorname{Colim} \Delta B = B$.

Si tenemos una transformación natural $T : F \to G$ entre dos funtores $F, G : \mathcal{I} \to \mathcal{A}$ y existe el colímite de ambos, para un morfismo cualquiera $\alpha : i \to j$ en $\mathcal{I}$ tenemos el siguiente diagrama conmutativo

$$\begin{tikzcd}
& \operatorname*{Colim}_{i \in I} F_i & \\
F(i) \arrow[ur, "\psi_i"] \arrow[rr, "F(\alpha)"] \arrow[d, "T(i)"] & & F(j) \arrow[ul, "\psi_j"'] \arrow[d, "T(j)"'] \\
G(i) \arrow[rr, "G(\alpha)"] \arrow[dr, "\varphi_i"'] & & G(i) \arrow[dl, "\varphi_j"] \\
& \operatorname*{Colim}_{i \in I} G_i &
\end{tikzcd}$$

Así tenemos que la colección de morfismos $\{\varphi_i \circ T(i)\}_{i \in \mathcal{I}}$ cumple la condición de conmutatividad del diagrama

$$\begin{tikzcd}
F(i) \arrow[rr, "F(\alpha)"] \arrow[dr, "\varphi_i \circ T(i)"'] & & F(j) \arrow[dl, "\varphi_j \circ T(j)"] \\
& \operatorname{Colim}_{i\in I} G_i &
\end{tikzcd}$$

y así por la propiedad universal del colímite existe un único morfismo $\gamma : \operatorname{Colim}_{i\in I} F_i \to \operatorname{Colim}_{i\in I} G_i$ tal que cuando el colímite existe, define un funtor

$$\operatorname{Colim} : \mathcal{A}^{\mathcal{I}} \to \mathcal{A}$$

donde si $F : \mathcal{I} \to \mathcal{A}$ es un objeto de $\mathcal{A}^{\mathcal{I}}$, entonces $\operatorname{Colim}(F) = \operatorname{Colim}_{i\in I} F_i$ y si $T : F \to G$ es un morfismo en $\mathcal{A}^{\mathcal{I}}$ entonces $\operatorname{Colim}(T) = \gamma : \operatorname{Colim}_{i\in I} F_i \to \operatorname{Colim}_{i\in I} G_i$.

Proposición 6.7. Colim es adjunto izquierdo a Δ.

Demostración. Probemos que existe un isomorfismo natural

$$\tau : \operatorname{Hom}_{\mathcal{A}}(\operatorname{Colim}(C), B) \xrightarrow{\cong} \operatorname{Hom}_{\mathcal{A}^{\mathcal{I}}}(C, \Delta(B))$$

para $C \in Ob(\mathcal{A}^{\mathcal{I}})$, $B \in Ob(\mathcal{A})$. Sea $f \in \operatorname{Hom}_{\mathcal{A}}(\operatorname{Colim}(C), B)$, definimos $\tau(f) : C \to \Delta(B)$ como $\tau f(i) = f \circ \varphi_i : C(i) \to \Delta B(i) = B$, para $i \in I$, donde $\{\varphi_i\}_{i\in I}$ son los morfismos de $\operatorname{Colim}(C)$. Verifiquemos que τf es una transformación natural. Sea $g : i \to j$ morfismo en $\mathcal{I}$

$$\begin{tikzcd}
C(i) \arrow[rr, "C(g)"] \arrow[dr, "\varphi_i"] \arrow[dd, "f\circ\varphi_i"'] & & C(j) \arrow[dl, "\varphi_j"'] \arrow[dd, "f\circ\varphi_j"] \\
& \operatorname{Colim} C \arrow[dl, "f"'] \arrow[dr, "f"] & \\
B \arrow[rr, "Id_B"'] & & B
\end{tikzcd}$$

Notemos que este diagrama es conmutativo por las propiedades del colímite, así que τf es transformación natural. Sea $T : C \to \Delta B$ en $\mathcal{A}^{\mathcal{I}}$ definimos $\tau^{-1}(T)$ como el único morfismo inducido $\gamma : \operatorname{Colim} C \to \operatorname{Colim} \Delta B$, donde $\operatorname{Colim} \Delta B = B$, que hace conmutar el diagrama

$$\begin{tikzcd}
C(i) \arrow[r, "\varphi_i^C"] \arrow[d, "\varphi_i^\Delta"'] & \operatorname{Colim} C \arrow[dl, "\gamma"] \\
\operatorname{Colim} \Delta B &
\end{tikzcd}$$

Es fácil ver que $\tau^{-1} \circ \tau = Id_{\operatorname{Hom}_{\mathcal{A}}(\operatorname{Colim} C, B)}$ y $\tau \circ \tau^{-1} = Id_{\operatorname{Hom}_{\mathcal{A}^{\mathcal{I}}}(C, \Delta B)}$. ■

Y así por el Teorema 6.2. Colim es un funtor exacto derecho cuando $\mathcal{A}$ es abeliana y el colímite existe.
La siguiente proposición nos da una equivalencia entre la existencia de sumas directas de objetos en un conjunto y el colímite.

Proposición 6.8. Los siguientes enunciados son equivalentes para una categoría abeliana $\mathcal{A}$:
1. La suma directa $\bigoplus A(i)$ existe en $\mathcal{A}$ para todo conjunto $\{A(i)\}$ de objetos en $\mathcal{A}$.
2. $\mathcal{A}$ es cocompleto, esto es, $\operatorname{Colim}_{i\in I} A_i$ existe en $\mathcal{A}$ para todo funtor $A : \mathcal{I} \to \mathcal{A}$ cuya categoría indexante $\mathcal{I}$ tiene solamente un conjunto de objetos.

Demostración. 2. $\Rightarrow$ 1. Sea C un conjunto, podemos construir una categoría $\mathcal{I}$ a partir de él, haciendo $Ob(\mathcal{I}) = C$ y

$$\operatorname{Hom}_{\mathcal{I}}(i,j) = \begin{cases} Id_i & \text{si } i = j \\ \varnothing & \text{si } i \neq j \end{cases}$$

Luego, para un funtor $A : \mathcal{I} \to \mathcal{A}$, tenemos que existe $\operatorname{Colim}_{i\in I} A_i$, que es un objeto de $\mathcal{A}$ junto con su respectiva familia de morfismos $\{\varphi_i\}_{i\in\mathcal{I}}$. Sea $Y \in Ob(\mathcal{A})$ y $\{f_i : A(i) \to Y\}_{i\in\mathcal{I}}$ una colección de morfismos, entonces para $\alpha : i \to j$ en $\mathcal{I}$

$$\begin{tikzcd} A(j) \arrow[r, "f_j"] & Y \\ A(i) \arrow[u, "A(\alpha)"] \arrow[ur, "f_i"'] & \end{tikzcd}$$

Conmuta trivialmente porque en $\operatorname{Hom}_{\mathcal{I}}$ sólo hay identidades. Así, usando la propiedad universal del colímite tenemos que existe un único $f : \operatorname{Colim}_{i\in I} A_i \to Y$ tal que

$$\begin{tikzcd} \operatorname*{Colim}_{i\in I} A_i \arrow[dr, "f"] & \\ A(i) \arrow[u, "\varphi_i"] \arrow[r, "f_i"'] & Y \end{tikzcd}$$

conmuta. Así que $\operatorname{Colim}_{i\in I} A_i = \bigoplus_{i\in\mathcal{I}} A(i)$.

1. $\Rightarrow$ 2. Consideremos el funtor $A : \mathcal{I} \to \mathcal{A}$. Para $\varphi : j \to k$ en $\mathcal{I}$ sean

$$\psi_\varphi : A(j) \xrightarrow{A(\varphi)} A(k) \xrightarrow{i} \bigoplus_{j\in I} A(j)$$

e

$$i : A(j) \to \bigoplus_{j\in I} A(j).$$

la inclusión. Luego definimos

$$f : \bigoplus_{\varphi : j\to k} A(j) \to \bigoplus_{j\in I} A(j)$$

como $f(a_\varphi) = A(\varphi)(a_\varphi) - a_\varphi$. Veamos que $\operatorname{Coker}(f) = \bigoplus_{j\in I} A(j)/\operatorname{Im}(f)$ es igual a $\operatorname{Colim}_{i\in I} A_i$. Y por lo tanto $\mathcal{A}$ es cocompleto. Consideremos la familia de morfismos $\{\psi_i : A(i) \to \bigoplus_{j\in I} A(j)/\operatorname{Im}(f)\}_{i\in I}$, definidos como $\psi_i : A(i) \xrightarrow{i} \bigoplus_{i\in I} A(i) \xrightarrow{p} \bigoplus_{j\in I} A(j)/\operatorname{Im}(f)$, donde p es la proyección canónica. Entonces vemos que el diagrama

$$\begin{tikzcd}
 & \bigoplus_{j\in I} A(j)/\operatorname{Im}(f) & \\
A(i) \arrow[ur, "\psi_i"] \arrow[rr, "A(\alpha)"'] & & A(j) \arrow[ul, "\psi_j"']
\end{tikzcd}$$

conmuta para todo $\alpha : i \to j$. Luego, si existe un objeto X y una familia de morfismos $f_i : A(i) \to X$ tales que el diagrama

$$\begin{tikzcd}
A(i) \arrow[rr, "A(\alpha)"] \arrow[dr, "f_i"'] & & A(j) \arrow[dl, "f_j"] \\
 & X &
\end{tikzcd}$$

conmuta, entonces podemos definir un morfismo $\gamma : \bigoplus_{j\in I} A(j)/\operatorname{Im}(f) \to X$, definido como $\gamma(a_{i_1} + a_{i_2} + ... + a_{i_m} + \operatorname{Im}(f)) = f_{i_1}(a_{i_1}) + f_{i_2}(a_{i_2}) + ... + f_{i_m}(a_{i_m})$.
Y de la construcción se tiene que es único tal que $f_i = \gamma \circ \psi_i$. Por lo tanto $\operatorname{Coker}(f) = \bigoplus_{j\in I} A(j)/\operatorname{Im}(f) = \operatorname{Colim}_{i\in I} A_i$. ■

Definición 6.9. El **límite** de un funtor $A : \mathcal{I} \to \mathcal{A}$ es el colímite del correspondiente funtor $A^{op} : \mathcal{I}^{op} \to \mathcal{A}^{op}$, entonces todos los resultados para colímites se aplican de manera dual a límites. En particular, $\operatorname{Lim} : \mathcal{A}^{\mathcal{I}} \to \mathcal{A}$ es adjunto derecho al funtor diagonal Δ y por lo tanto Lim es un funtor exacto izquierdo cuando existe. Si el producto $\prod A(i)$ de cada conjunto $A(i)$ de objetos existe en $\mathcal{A}$, entonces $\mathcal{A}$ es completo, esto es, $\operatorname{Lim}_{i\in I} A_i$ existe para todo $A : \mathcal{I} \to \mathcal{A}$ con $\mathcal{I}$ teniendo solamente un conjunto de objetos.

Uno de las propiedades más útiles de los funtores adjuntos es el siguiente resultado.

Teorema 6.10. Sea $L : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ funtor adjunto izquierdo al funtor $R : \mathcal{B} \to \mathcal{A}$, donde $\mathcal{A}$ y $\mathcal{B}$ son categorías arbitrarias. Entonces
1. L preserva todos los colímites (coproductos, límites dirigidos, conúcleos, etc.). Esto es, si $A : \mathcal{I} \to \mathcal{A}$ tiene colímite, entonces también lo tiene $LA : \mathcal{I} \to \mathcal{B}$ y

$$L(\operatorname*{Colim}_{i\in I} A_i) = \operatorname*{Colim}_{i\in I} L(A_i).$$

2. R preserva todos los límites (productos, límites inversos, núcleos, etc.). Esto es, si $B : \mathcal{I} \to \mathcal{B}$ tiene límite, entonces también lo tiene $RB : \mathcal{I} \to \mathcal{A}$ y

$$R(\operatorname*{Lim}_{i\in I} B_i) = \operatorname*{Lim}_{i\in I} R(B_i).$$

Demostración. 1. Consideremos la sucesión exacta

$$\bigoplus_{\varphi: i\to j} A_i \xrightarrow{f} \bigoplus_{i\in I} A_i \xrightarrow{\quad p \quad} \operatorname*{Colim}_{i\in \mathcal{I}} A_i = \operatorname{Coker}(f) \longrightarrow 0$$

Donde f es el morfismo que se construyó en la Proposición 6.9. Como L es adjunto izquierdo, entonces por el Teorema 6.2. es exacto derecho, por lo tanto la sucesión

$$\bigoplus_{\varphi:i\to j} L(A_i) \xrightarrow{L(f)} \bigoplus_{i\in\mathcal{I}} L(A_i) \xrightarrow{\qquad L(p)\qquad} L(\operatorname*{Colim}_{i\in\mathcal{I}} A_i) \cong L(\mathrm{Coker}(f)) \longrightarrow 0$$

es exacta. Entonces $L(\mathrm{Colim}_{i\in\mathcal{I}} A_i) \cong L(\mathrm{Coker}(f)) \cong \mathrm{Coker}(L(f)) \cong \mathrm{Colim}_{i\in\mathcal{I}} L(A_i)$.
La demostración de 2. es análoga. ■

A continuación hay dos consecuencias que usan el hecho de que la homología conmuta con sumas directas arbitrarias de complejos [10] pág. 5.

Corolario 6.11. Si una categoría cocompleta arbitraria $\mathcal{A}$ tiene suficientes proyectivos y $F : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ es adjunto izquierdo, entonces para cualquier conjunto $\{A(i)\}$ de objetos en $\mathcal{A}$:

$$L_*F\left(\bigoplus_{i\in I} A_i\right) \cong \bigoplus_{i\in I} L_*F(A_i).$$

Demostración. Si $P_i \to A(i)$ son resoluciones proyectivas, entonces $\oplus P_i \to \oplus A(i)$ es una resolución proyectiva. Entonces $L_*F(\oplus A(i)) = H_*(F(\oplus P_i)) \cong H_*(\oplus F(P_i)) \cong \oplus H_*(F(P_i)) = \oplus L_*F(A(i))$. ■

Corolario 6.12. $\mathrm{Tor}_*(A, \oplus_{i\in I} B_i) = \oplus_{i\in I}\mathrm{Tor}_*(A, B_i)$.

Demostración. Si $P \to A$ es una resolución proyectiva, entonces
$\mathrm{Tor}_*(A, \oplus B_i) = H_*(P \otimes (\oplus B_i)) \cong H_*(\oplus(P \otimes B_i)) \cong \oplus H_*(P \otimes B_i) = \oplus\,\mathrm{Tor}_*(A, B_i)$. ■

Definición 6.13. Una categoría $\mathcal{I}$ se dice **filtrada** si
1. Para cada $i, j \in I$ hay flechas
$$\begin{tikzcd} & k & \\ i \arrow[ur] & & j \arrow[ul] \end{tikzcd}$$
para algún $k \in \mathcal{I}$.
2. Para cada par de flechas $u, v : i \to j$ existe una flecha $w : j \to k$ tal que $wu = wv$.
Un **colímite filtrado** en $\mathcal{A}$ es el colímite de un funtor $A : \mathcal{I} \to \mathcal{A}$ en el cual $\mathcal{I}$ es una categoría filtrada. Usamos la notación $\varinjlim\mathrm{Colim} A_i$ para tal colímite filtrado.
Si $\mathcal{I}$ es un conjunto parcialmente ordenado, considerado como una categoría, entonces la condición 1. se satisface y 2. sólo requiere que cada par de elementos tenga una cota superior en $\mathcal{I}$. Un conjunto parcialmente ordenado filtrado es comúnmente llamado **dirigido**; colímites filtrados sobre conjuntos parcialmente ordenados dirigidos son comúnmente llamados **límites dirigidos** y se denotan $\underrightarrow{\mathrm{Lim}} A_i$.

El siguiente lema nos da una descripción más concreta de los elementos de $\underrightarrow{\mathrm{Colim}} A_i$.

Lema 6.14. Sea $\mathcal{I}$ una categoría filtrada y $A : \mathcal{I} \to \mathcal{M}od(R)$ un funtor. Entonces
1. Cada elemento $a \in \underrightarrow{\mathrm{Colim}} A_i$ es la imagen de algún elemento $a_i \in A_i$, para algún $i \in \mathcal{I}$, bajo el morfismo canónico $A_i \to \underrightarrow{\mathrm{Colim}} A_i$.
2. Para cada i, el núcleo del morfismo canónico $A_i \to \underrightarrow{\mathrm{Colim}} A_i$ es la unión de núcleos de los morfismos $A(\varphi) : A_i \to A_j$, donde $\varphi : i \to j$ es un morfismo en $\mathcal{I}$.

Demostración. 1. Consideremos el siguiente diagrama

$$\begin{tikzcd}
\underrightarrow{\mathrm{Colim}} A_i & \cong & \bigoplus\limits_{i\in I} A_i/\operatorname{Im}(f) \\
& & \bigoplus\limits_{i\in I} A_i \arrow[u, "p"'] \\
& & A_k \arrow[u, "i"'] \arrow[uull, "\psi_k"]
\end{tikzcd}$$

Sea $a \in \underrightarrow{\mathrm{Colim}} A_i$, luego podemos considerar a a como un elemento de $\oplus_{i\in I} A_i/\operatorname{Im}(f)$. Como p es sobre tenemos que existe $a_{i_1} + a_{i_2} + \cdots + a_{i_m} \in \oplus_{i\in I} A_i$, con i_1, i_2,... $i_m \in \mathcal{I}$ tal que $p(a_{i_1} + a_{i_2} + \cdots + a_{i_m}) = a$. Luego, como $\mathcal{I}$ es filtrada existen $k \in \mathcal{I}$ y $f_{i_j} : i_j \to k$, con $j = 1, 2, ..., m$ y así $A(f_{i_j}) : A_{i_j} \to A_k$, con $j = 1, 2, ..., m$. Entonces $a_{i_1} + a_{i_2} + \cdots + a_{i_m} \in A_k$ y $\psi_k(a_{i_1} + a_{i_2} + \cdots + a_{i_m}) = a$.

2. Consideremos el siguiente diagrama

$$\begin{tikzcd}
A_i \arrow[rr, "A(\varphi)"] \arrow[dr, "\psi_i"'] & & A_j \arrow[dl, "\psi_j"] \\
& \underrightarrow{\mathrm{Colim}} A_i &
\end{tikzcd}$$

En $\mathcal{M}od(R)$ tenemos que $\underrightarrow{\mathrm{Colim}} A_i \cong \oplus A_i/\sim$, donde la relación de equivalencia está dada por $a \sim A(\varphi)(a)$ para todo $\varphi : i \to j$, [8] pág. 243. Así $\psi_i(a) = 0$ si y sólo si existe $\varphi : i \to j$ tal que $A(\varphi)(a) = 0 \in A(j)$. ■

Teorema 6.15. Colímites filtrados (y límites dirigidos) de R-módulos son exactos, considerados como funtores de $\mathcal{M}od(R)^{\mathcal{I}}$ a $\mathcal{M}od(R)$.

Demostración. Sea $\mathcal{A} = \mathcal{M}od(R)$. Vamos a probar que si $\mathcal{I}$ es una categoría filtrada, entonces $\underrightarrow{\mathrm{Colim}} : \mathcal{A}^{\mathcal{I}} \to \mathcal{A}$ es exacto. Ya probamos en Proposición 6.7. que $\underrightarrow{\mathrm{Colim}}$ es exacto derecho, así que sólo tenemos que probar que si $t : A \to B$ es inyectivo en $\mathcal{A}^{\mathcal{I}}$ (i.e. cada t_i es inyectiva), entonces $\underrightarrow{\mathrm{Colim}} A_i \to \underrightarrow{\mathrm{Colim}} B_i$ es inyectiva en $\mathcal{A}$.
Sea $a \in \underrightarrow{\mathrm{Colim}} A_i$ un elemento que se anula en $\underrightarrow{\mathrm{Colim}} B_i$. Por el lema anterior a es la imagen de algún $a_i \in A_i$ y como $t_i(a_i) \in B_i$ se anula en $\underrightarrow{\mathrm{Colim}} B_i$, nuevamente por el lema anterior, existe algún $\varphi : i \to j$ tal que

$$0 = B(\varphi)(t_i(a_i)) = t_j(A(\varphi(a_i))) \,\text{en}\, B_j.$$

Como t_j es inyectiva, $A(\varphi)(a_i) = 0$ en A_j. Entonces $a = 0$ en $\underrightarrow{\mathrm{Colim}} A_i$ ■

Diremos que una categoría abeliana $\mathcal{A}$ satisface el axioma (AB5) si es cocompleto y los colímites filtrados son exactos.

Corolario 6.16. Si $\mathcal{A} = \mathcal{M}od(R)$ (o $\mathcal{A}$ es cualquier categoría abeliana con suficientes proyectivos y que satisface el axioma (AB5)) y $F : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ es un funtor adjunto izquierdo, entonces para cada $A : \mathcal{I} \to \mathcal{A}$ con $\mathcal{I}$ filtrado

$$L_*F(\underrightarrow{\mathrm{Colim}} A_i) \cong \underrightarrow{\mathrm{Colim}} L_*F(A_i).$$

Demostración. Sea P_i una resolución proyectiva de A_i para cada $i \in \mathcal{I}$, es decir, sucesiones exactas
$$\cdots \to P_i^2 \to P_i^1 \to P_i^0 \to A_i \to 0$$
para cada $i \in \mathcal{I}$. Entonces como $\underrightarrow{\text{Colim}}$ es un funtor exacto tenemos que la sucesión
$$\cdots \to \underrightarrow{\text{Colim}} P_i^2 \to \underrightarrow{\text{Colim}} P_i^1 \to \underrightarrow{\text{Colim}} P_i^0 \to \underrightarrow{Colim} A_i \to 0$$
es exacta. Probaremos que $\underrightarrow{\text{Colim}} P_i^k$ es F-acíclico para cada $k \geq 0$. Para esto, construiremos una resolución proyectiva de $\underrightarrow{\text{Colim}} P_i^r$, para $r \geq 0$. Consideremos la siguiente sucesión
$$0 \to \bigoplus_{k \in \mathcal{I}} P_k^r \xrightarrow{\eta} \bigoplus_{\varphi : i \to j} P_i^r \xrightarrow{f} \bigoplus_{i \in \mathcal{I}} P_i^r \xrightarrow{p} \underrightarrow{\text{Colim}} P_i^r = \text{Coker}(f) \to 0$$
donde $\eta(p_i) = \sum_{\varphi : i \to j} \varphi(p_i)$, p es la proyección canónica y f es el morfismo que se definió en la Proposición 6.8.
Veamos que la sucesión es exacta. Sea $p_i \in P_i^r$, luego $\eta(p_i) = 0$ si y sólo si $\varphi(p_i) = 0$ para todo $\varphi : i \to j$, en particular para $\varphi = Id_i : i \to i$ y así $p_i = 0$. Por lo tanto η es inyectiva. $\text{Im}(\eta) = \text{Ker}(f)$, $\text{Im}(f) = \text{Ker}(p)$ y p es sobreyectiva por construcción. Por lo tanto la sucesión es exacta. Además sabemos que la suma directa de objetos proyectivos es proyectivo. Así tenemos que
$$P_\bullet^r : 0 \longrightarrow \bigoplus_{k \in \mathcal{I}} P_k^r \xrightarrow{\eta} \bigoplus_{\varphi : i \to j} P_i^r \xrightarrow{f} \bigoplus_{i \in \mathcal{I}} P_i^r$$
es resolución proyectiva de $\underrightarrow{\text{Colim}} P_i^r$. Luego aplicamos el funtor F a dicha resolución y obtenemos la sucesión
$$F(P_\bullet^r) : 0 \longrightarrow F\left(\bigoplus_{k \in \mathcal{I}} P_k^r\right) \xrightarrow{F(\eta)} F\left(\bigoplus_{\varphi : i \to j} P_i^r\right) \xrightarrow{F(f)} F\left(\bigoplus_{i \in \mathcal{I}} P_i^r\right)$$
la cual es exacta, pues F es exacto derecho y además $F(\eta)$ es inyectiva. Por lo que $L_n F(\underrightarrow{\text{Colim}} P_i^r) = H_n(F(P_\bullet^r)) = 0$, para $n \neq 0$. Por lo tanto $\underrightarrow{\text{Colim}} P_i^r$ es F-acíclico para cada $r \geq 0$.
Ya en la demostración de la Proposición 4.25. se probó que la subcategoría triangulada formada por los complejos cuyas entradas son objetos F-acíclicos cumple las hipótesis del teorema de existencia de funtores derivados. Así que $\underrightarrow{\text{Colim}} P_i$ es una resolución F-acíclica de $\underrightarrow{\text{Colim}} A_i$ y con ella podemos calcular $L_* F(\underrightarrow{\text{Colim}} A_i)$.
$$L_* F(\underrightarrow{\text{Colim}} A_i) = H_* F(\underrightarrow{\text{Colim}} P_i) = H_*(\underrightarrow{\text{Colim}} F(P_i)) = \underrightarrow{\text{Colim}} H_*(F(P_i)) = \underrightarrow{\text{Colim}} L_* F(A_i).$$
■

Corolario 6.17. Para cada $B : \mathcal{I} \to \mathcal{M}od(R)$ con $\mathcal{I}$ filtrada y cada $A \in \mathcal{M}od(R)$,
$$\text{Tor}_*(A, \underrightarrow{\text{Colim}} B_i) \cong \underrightarrow{\text{Colim}}\, \text{Tor}_*(A, B_i).$$

Demostración. Podemos considerar el funtor exacto derecho $T(B) = B \otimes_R A \cong A \otimes_R B$ y así $\mathrm{Tor}_*^R(A,B) = L_*T(B)$. Aplicamos el Corolario anterior y tenemos que

$$\mathrm{Tor}_*^R(A, \underrightarrow{\mathrm{Colim}} B_i) = L_*T(\underrightarrow{\mathrm{Colim}} B_i) \cong \underrightarrow{\mathrm{Colim}} L_*T(B_i) = \underrightarrow{\mathrm{Colim}}\, \mathrm{Tor}_*^R(A, B_i).$$

■

Ahora haremos algunos cálculos explícitos de Tor_n ayudándonos con los resultados anteriores.

Ejemplo 6.18. Calculemos $\mathrm{Tor}_n^{\mathbb{Z}}(\mathbb{Z}/p, B)$. Tomemos una resolución proyectiva de $\mathbb{Z}/p$

$$\cdots \longrightarrow 0 \longrightarrow \mathbb{Z} \xrightarrow{\times p} \mathbb{Z} \xrightarrow{\pi} \mathbb{Z}/p \longrightarrow 0$$

donde la sucesión es exacta y $\mathbb{Z}$ es un $\mathbb{Z}$-módulo libre y por lo tanto es proyectivo por la Proposición 4.4. Aplicamos el funtor T a la resolución, donde $T(A) = A \otimes_{\mathbb{Z}} B$

$$\cdots \longrightarrow 0 \longrightarrow \mathbb{Z} \otimes_{\mathbb{Z}} B \xrightarrow{p \otimes_{\mathbb{Z}} Id_B} \mathbb{Z} \otimes_{\mathbb{Z}} B \longrightarrow 0 \qquad (*)$$

Notemos que $\mathbb{Z} \otimes_{\mathbb{Z}} B \overset{f}{\cong} B$, donde $f(n \otimes b) = nb$ y $f^{-1}(b) = 1 \otimes b$, para $n \in \mathbb{Z}$ y $b \in B$. Así la sucesión $(*)$ es equivalente a

$$\widehat{B}^{\bullet} : \cdots \longrightarrow 0 \longrightarrow B \xrightarrow{p} B \longrightarrow 0$$

Por lo tanto

$$\begin{aligned} \mathrm{Tor}_n^{\mathbb{Z}}(\mathbb{Z}/p, B) &= H_n(\widehat{B}^{\bullet}) \\ &= \begin{cases} B/pB, & \text{si } n = 0 \\ B_p, & \text{si } n = 1 \\ 0, & \text{si } n \geq 2 \end{cases} \end{aligned}$$

donde $B_p = \{b \in B | pb = 0\}$.

Proposición 6.19. Sean A y B grupos abelianos finitamente generados, entonces
(a) $\mathrm{Tor}_1^{\mathbb{Z}}(A,B)$ es un grupo abeliano de torsión.
(b) $\mathrm{Tor}_n^{\mathbb{Z}}(A,B) = 0$ para $n \geq 2$.

Demostración. Como A es grupo abeliano finitamente generado tenemos que

$$A \cong \mathbb{Z}^m \oplus \mathbb{Z}/p_1\mathbb{Z} \oplus \cdots \mathbb{Z}/p_r\mathbb{Z}$$

para m, p_1,...$p_r \in \mathbb{Z}$. Usando que $\mathbb{Z}^m$ es proyectivo, entonces $\mathrm{Tor}_n^{\mathbb{Z}}(\mathbb{Z}^m, B) = 0$ para $n \neq 0$, tenemos

$$\begin{aligned} \mathrm{Tor}_n^{\mathbb{Z}}(A,B) &\cong \mathrm{Tor}_n^{\mathbb{Z}}(\mathbb{Z}^m \oplus \mathbb{Z}/p_1\mathbb{Z} \oplus \cdots \mathbb{Z}/p_r\mathbb{Z}, B) \\ &\cong \mathrm{Tor}_n^{\mathbb{Z}}(\mathbb{Z}^m, B) \oplus \mathrm{Tor}_n^{\mathbb{Z}}(\mathbb{Z}/p_1\mathbb{Z}, B) \oplus \cdots \oplus \mathrm{Tor}_n^{\mathbb{Z}}(\mathbb{Z}/p_r\mathbb{Z}, B) \\ &= \mathrm{Tor}_n^{\mathbb{Z}}(\mathbb{Z}/p_1\mathbb{Z}, B) \oplus \cdots \oplus \mathrm{Tor}_n^{\mathbb{Z}}(\mathbb{Z}/p_r\mathbb{Z}, B) \\ &= \begin{cases} B_{p_1} \oplus \cdots \oplus B_{p_r}, & \text{si } n = 1 \\ 0, & \text{si } n \geq 2 \end{cases} \end{aligned}$$

Y así tenemos lo deseado. ■

Proposición 6.20. Para cualesquiera grupos abelianos A y B:
(a) $\text{Tor}_1^{\mathbb{Z}}(A, B)$ es un grupo abeliano de torsión.
(b) $\text{Tor}_n^{\mathbb{Z}}(A, B) = 0$ para $n \geq 2$.

Notemos que el límite directo de grupos de torsión es de torsión, pues de acuerdo a la construcción que hicimos en la Proposición 6.8. Podemos verlo como el cociente de una suma directa entre la imagen de un morfismo f. Es fácil ver que la suma directa de grupos de torsión es de torsión y al pasar a un cociente sigue siendo de torsión.

Demostración. Ya probamos que A es el límite dirigido de sus subgrupos finitamente generados A_i, así por el Corolario 6.17. $\text{Tor}_n^{\mathbb{Z}}(A, B) = \text{Tor}_n^{\mathbb{Z}}(\underrightarrow{\text{Colim}} A_i, B) = \underrightarrow{\text{Colim}}\, \text{Tor}_n^{\mathbb{Z}}(A_i, B)$. Por la Proposición anterior tenemos que cada $\text{Tor}_1^{\mathbb{Z}}(A_i, B)$ es de torsión y como el límite dirigido de grupos de torsión es un grupo de torsión, tenemos que $\text{Tor}_1^{\mathbb{Z}}(A, B)$ es de torsión. Y como $\text{Tor}_n^{\mathbb{Z}}(A_i, B) = 0$ para $n \geq 2$, entonces $\text{Tor}_n^{\mathbb{Z}}(A, B) = 0$ para $n \geq 2$. ■

Veamos que $\mathbb{Z}/p \cong \langle \frac{1}{p} \rangle \subset \mathbb{Q}/\mathbb{Z}$. $\langle \frac{1}{p} \rangle \subset \mathbb{Q}/\mathbb{Z}$ se sigue directamente de la definición de $\mathbb{Q}/\mathbb{Z}$, pues n/p está en $\mathbb{Q}/\mathbb{Z}$ para todo $n \in \mathbb{Z}$.
Ahora veamos que $\mathbb{Z}/p \cong \langle \frac{1}{p} \rangle$. Damos un par de isomorfismos $\varphi : \mathbb{Z}/p \to \langle \frac{1}{p} \rangle$ definido como $\varphi([n]) := \frac{n}{p}$ y $\psi : \langle \frac{1}{p} \rangle \to \mathbb{Z}/p$ definido como $\psi(\frac{n}{p}) := [n]$.
Verifiquemos que ψ y φ son morfismos. Sean $n, m \in \mathbb{Z}$ tenemos $\varphi([n]+[m]) = \varphi([n+m]) = \frac{n+m}{p} = \frac{n}{p} + \frac{m}{p} = \varphi([n]) + \varphi([m])$. Y $\psi(\frac{n}{p} + \frac{m}{p}) = \psi(\frac{n+m}{p}) = [n+m] = [n]+[m] = \psi(\frac{n}{p}) + \psi(\frac{m}{p})$.
Además $\varphi([0]) = \frac{0}{p}$ y $\psi(0) = \psi(\frac{0}{p}) = [0]$.
Luego $\psi \circ \varphi([n]) = \psi(\frac{n}{p}) = [n]$ y $\varphi \circ \psi(\frac{n}{p}) = \varphi([n]) = \frac{n}{p}$. Así que φ es isomorfismo.

Proposición 6.21. $\text{Tor}_1^{\mathbb{Z}}(\mathbb{Q}/\mathbb{Z}, B)$ es el subgrupo de torsión de B para cada grupo abeliano B.

Demostración. Como $\mathbb{Q}/\mathbb{Z}$ es un grupo abeliano, entonces es límite dirigido de sus subgrupos finitos, cada uno de los cuales es isomorfo a $\mathbb{Z}/p$ para algún entero p. Y Tor conmuta con los límites dirigidos, $\text{Tor}_1^{\mathbb{Z}}(\mathbb{Q}/\mathbb{Z}, B) \cong \underrightarrow{\text{Lim}}\, \text{Tor}_1^{\mathbb{Z}}(\mathbb{Z}/p, B) \cong \underrightarrow{\text{Lim}}(B_p) = \cup_p \{b \in B | pb = 0\}$, que es el subgrupo de torsión de B, pues como ya probamos el límite es tomado sobre todos los enteros. ■

Proposición 6.22. Si A es un grupo abeliano libre de torsión, entonces $\text{Tor}_n^{\mathbb{Z}}(A, B) = 0$ para $n \neq 0$ y todo grupo abeliano B.

Demostración. A es el límite dirigido de sus subgrupos finitamente generados, cada uno de los cuales es isomorfo a $\mathbb{Z}^m$, para algún m. Entonces $\text{Tor}_n^{\mathbb{Z}}(A, B) \cong \underrightarrow{\text{Lim}}\, \text{Tor}_n^{\mathbb{Z}}(\mathbb{Z}^m, B) = 0$ para $n \neq 0$, pues $\text{Tor}_n^{\mathbb{Z}}(\mathbb{Z}^m, B) = 0$ para todo m. ■

Lema 6.23. Para todo anillo conmutativo R

$$\text{Tor}_*^R(A, B) \cong \text{Tor}_*^R(B, A)$$

Demostración. Ambos son funtores universales sobre $F(A) = A \otimes_R B \cong B \otimes_R A$. ■

Corolario 6.24. Para todo grupo abeliano A, $\mathrm{Tor}_1^{\mathbb{Z}}(A, \quad) = 0$ si y sólo si A es libre de torsión.

Demostración. El regreso es la Proposición 6.22.
Ahora supongamos que $\mathrm{Tor}_1^{\mathbb{Z}}(A, \quad) = 0$. Por el Lema anterior tenemos que $\mathrm{Tor}_1^{\mathbb{Z}}(\quad, A) \cong \mathrm{Tor}_1^{\mathbb{Z}}(A, \quad) = 0$, en particular $\mathrm{Tor}_1^{\mathbb{Z}}(\mathbb{Q}/\mathbb{Z}, A) = 0$, y por la Proposición 6.21. $\mathrm{Tor}_1^{\mathbb{Z}}(\mathbb{Q}/\mathbb{Z}, A)$ es el subgrupo de torsión de A, por lo tanto A es libre de torsión. ■

Estos resultados referentes al híper funtor Tor_n nos dan información acerca de la torsión.

Bibliografía

[1] Borel, A et al.: Algebraic D-Modules. Perspectives in Math., 2, Academic Press, Boston (1987).

[2] Dimca, Alexandru.: Sheaves in topology. Springer (2003).

[3] Freyd, Peter.: Abelian categories. An introduction to the theory of functors. Harper & Row, Publishers. New York, Evanston, and London (1964).

[4] Gelfand, S. I., Manin, Y.I.: Methods of Homological Algebra. Springer, Berlin Heidelberg New York (1996).

[5] Grothendieck, Alexander.: Sur quelques points d'algèbre homologique. Tôhoku Mathematical Journal (1957).

[6] Hatcher, Allen.: Algebraic Topology. Cambridge University Press (2002).

[7] Mac Lane, Sanders.: Categories for the Working Mathematician. Springer-Verlag, New York Heidelberg Berlin (1909)

[8] Rotman, Joseph J.: An Introduction to Homological Algebra. Springer (2009).

[9] Verdier, J.-L.: Catégories dérivées, Etat 0. Lecture Notes in Math.,Springer, Berlin (1977).

[10] Weibel, Charles A.: An introduction to homological algebra. Cambridge University Press (1994).