Centro de Investigación en Matemáticas A. C.

CIMAT

Juegos cooperativos, distribución de costos conjuntos múltiples y asignación de bienes indivisibles

T E S I S

Que para obtener el grado de

Doctor en ciencias

con orientación en

Matemáticas Aplicadas

P R E S E N T A:

Jony Alexander Rojas Rojas

Director de tesis:

Dr. Francisco Sánchez Sánchez

GUANAJUATO, GTO. 2016

Centro de Investigación en Matemáticas A. C.

CIMAT

Juegos cooperativos, distribución de costos conjuntos múltiples y asignación de bienes indivisibles

T E S I S

Que para obtener el grado de

Doctor en Ciencias

con orientación en

Matemáticas Aplicadas

P R E S E N T A:

Jony Alexander Rojas Rojas

Dr. Francisco Sánchez Sánchez
(Director de Tesis)

Comité de evaluación:

- Dr. Francisco Javier Solís Lozano
- Dr. Luis Hernández Lamoneda
- Dr. Leobardo Pedro Plata Pérez
- Dr. William José Olvera López

GUANAJUATO, GTO. 2016

A mi mi esposa Gabriela Johana Flores, a mis hijos
Gabriel Alexander Rojas y Brittany Johana Rojas y a madre Mercedita Rojas
cuyo apoyo, ánimos, y fieles oraciones
hicieron posible esta tesis.

Agradecimientos

Quisiera aprovechar esta oportunidad para manifestar mi agradecimiento a las personas e instituciones sin las cuales este trabajo no hubiera sido posible:

- *A Dios por su infinita misericordia, darme vida, salud, paciencia y sabiduría para poder concluir esta tesis.*
- *A mi amada esposa Gabriela Johana Flores por su apoyo, comprensión y por estar a mi lado en los muchos momentos difíciles vividos durante la elaboración de esta tesis.*
- *A mis hijos Gabriel Alexander Rojas y Brittany Johana Rojas por ser la alegría de mi vida y el motor que me motiva a seguir adelante.*
- *A la mujer que me ha dado la vida y que a pesar de sus limitaciones ha estado conmigo y siempre a confiado en mi; gracias madre, éste también es un logro tuyo.*
- *A mis hermanos por darme su apoyo, y cuidar de mi madre durante todo este tiempo.*
- *Al director de esta tesis, el Dr. Francisco Sánchez Sánchez, por su tiempo, por sus enseñanzas de vida, paciencia, tolerancia y constante apoyo a largo de esta tesis.*
- *A los doctores Francisco Javier Solís Lozano, Luis Hernández Lamoneda, Leobardo Pedro Plata Pérez y William José Olvera López por aceptar ser parte de mi comité de evaluación, y por el tiempo dedicado a revisar esta tesis.*
- *Al personal acádemico y administrativo del CIMAT por su constante apoyo incluso desde antes de ser parte de esta institución. Muy especialmente a Arturo Hernández Aguirre, Jannet Vega Gutiérrez, Ma. Dolores Aguilera Mújica, Claudia Vega Gutiérrez y Eduardo Aguirre Hernández.*
- *Al Consejo Nacional de Ciencia y Tecnología (CONACYT) por el apoyo económico otorgado durante los cuatro años que duro el doctorado.*

Índice general

Introducción

La variedad de problemas que surgen en las actividades humanas han dado lugar, en muchas ocasiones, al desarrollo de nuevas disciplinas matemáticas. Este es el caso de la teoría de juegos. En el año 1928, John von Neumann publica el primer trabajo de teoría de juegos; en él se demuestra el Teorema del Minimax en el contexto de los juegos bipersonales finitos de suma cero. Pero se considera que el nacimiento de la teoría de juegos fue en el año 1944 con la obra Theory of Games and Economic Behavior de John von Neumann y Oscar Morgenstern. Las aplicaciones de la teoría de juegos han sido muy diversas, pero es en la economía donde ha tenido mas éxito. El impacto que esta disciplina ha tenido en el desarrollo de la economía moderna ha sido reconocido al serle concedido el premio nobel de economía a nueve teóricos de juegos: John Nash, Reinhard Selten y John Harsanyi en 1994; Robert J. Aumann y Thomas C. Schelling en 2005; Eric Maskin y Roger B. Myerson en 2007 y finalmente en 2012, Loyd Shapley y Alvin E. Roth.

Los juegos suelen clasificarse en dos tipos: no cooperativos y cooperativos. Los cooperativos se dividen en dos tipos: de costo y beneficio. En general, en los juegos cooperativos, que son los que trabajamos en esta tesis, los jugadores disponen de mecanismos que les permiten tomar acuerdos vinculantes. El objetivo principal de la teoría de juegos cooperativos es el de proponer cómo deben repartirse entre los jugadores los beneficios (costos) que se generan debido a su cooperación.

En esta tesis trabajaremos con situaciones cooperativas donde existe un número concreto de agentes que se conocen entre sí y que todos los posibles resultados de cada situación es de conocimiento común. Dado que las situaciones abordadas en esta tesis son diversas, cada capítulo empieza con las definiciones y resultados básicos necesarios relacionados con los modelos que se van a estudiar. Luego, presentamos los resultados y posteriormente damos las conclusiones. De acuerdo con estas consideraciones, esta tesis titulada *Juegos cooperativos, distribución de costos conjuntos múltiples y asignación de bienes indivisibles* se ha estructura en cuatro capítulos, que se resumen a continuación.

- En la primera sección del Capítulo 1 se introducen algunos conceptos y resultados básicos referentes a los juegos cooperativos de utilidad transferible y a los valores de Shapley y Banzhaf. A continuación presentamos los resultados obtenidos en el estudio del problema inverso de cada valor que satisface los axiomas de linealidad, simetría, eficiencia y diferenciación coalicional (o valor LSEDC). Usando técnicas de álgebra lineal, obtenemos los siguientes resultados:

Teorema 0.1. *Sea $\varphi^b : G^N \to \mathbb{R}^n$ un valor LSEDC. Si $\mathcal{W}^b = \{w_S^b : S \subseteq N, 2 \leq s\} \subseteq G^N$ con*

$$w_N^b(T) = \begin{cases} 1 & si\ t = 1, \\ 0 & en\ otro\ caso, \end{cases}$$

y para todo $S \subseteq N$ tal que $2 \leq s \leq n-1$,

$$w_S^b(T) = \begin{cases} 1 & si\ t = 1\ y\ T \nsubseteq S, \\ \frac{b_1}{b_s}\binom{n-2}{s-1} & si\ T = S, \\ 0 & en\ otro\ caso, \end{cases}$$

entonces, $null(\varphi^b) = Span(\mathcal{W}^b)$.

Dada la función lineal φ^b encontrar una base de $null(\varphi^b)$ en general no es simple. Pero si φ^b satisface el axioma de diferenciación coalicional, entonces el Teorema 0.1 nos dice que forma tienen los elementos del espacio nulo de φ^b, y por lo tanto, nos proporciona una base para $null(\varphi^b)$.

El Teorema 0.2 nos proporciona una base del complemento de $null(\varphi^b)$, lo cual nos permite descomponer el espacio de juegos, G^N, como suma directa del espacio nulo de φ^b y su complemento.

Teorema 0.2. *Sea $\varphi^b : G^N \to \mathbb{R}^n$ un valor LSEDC. Si $\mathcal{W}_*^b = \{w_{\{i\}}^b : i \in N\} \subseteq G^N$, donde para todo $i \in N$*

$$w_{\{i\}}^b(T) = \begin{cases} \frac{1}{b_t} & si\ i \in T\ y\ T \neq N, \\ n & si\ T = N, \\ 0 & en\ otro\ caso, \end{cases}$$

entonces

$$\varphi_i^b(w_{\{j\}}^b) = \begin{cases} n & si\ i = j, \\ 0 & en\ otro\ caso, \end{cases}$$

y

$$G^N = Span(\mathcal{W}_*^b) \bigoplus Span(\mathcal{W}^b).$$

Dragan [10] encuentra todos los juegos en G^N tales que al aplicarle el valor de Shapley da como resultado un vector de pago dado con anterioridad, es decir, resuelve el problema inverso del valor de Shapley. Pero el valor de Shapley satisface los axiomas linealidad, simetría, eficiencia y diferenciación coalicional, es decir, el resultado de Dragan es un caso particular del siguiente teorema:

Teorema 0.3. *Sea $\varphi^b : G^N \to \mathbb{R}^n$ un valor LSEDC y $x \in \mathbb{R}^n$ un vector de pagos. Entonces, $\varphi^b(v) = x$ sí y sólo si*

$$v = \sum_{i \in N} \frac{x_i}{n} w_{\{i\}}^b + \sum_{S \subseteq N : s \geq 2} a_S w_S^b,$$

donde las a_S son constantes arbitrarias.

Notemos que el Teorema 0.3 utiliza la descomposición $G^N = Span(\mathcal{W}_*^b) \bigoplus Span(\mathcal{W}^b)$ para resolver el problema inverso de cualquier valor LSEDC φ^b. Este enfoque es diferente al que utiliza Dragan en [10], ya que la base utilizada por él esta basada en los resultados de Hart y Mas-Colell [18, 19].

Para mayores detalles sobre los axiomas utilizados y la notación utilizada favor de referirse a la Sección 1.2.

Nos gustaría hacer notar que los resultados obtenidos en la Sección 1.2 de este capítulo actualmente están sometidos para su publicación en la revista *Operations Research Letters.*

- En el Capítulo 2 tratamos con juegos cooperativos con estructura coalicional. Estudiamos un valor para esta clase de juegos propuesto en [1], llamado *valor de Banzhaf simétrico.* Dado un juego con estructura coalicional $(N, \mathcal{B}, v) \in \Gamma^N$, este valor asigna a cada jugador $i \in N$ el número real:

$$\Pi_i(N, \mathcal{B}, v) = \sum_{\substack{K \ni k \\ K \subseteq M}} \sum_{\substack{S \ni i \\ S \subseteq B_k}} \frac{(s-1)!(b_k - s)!}{2^{m-1} b_k!} \left[v(Q_K \cup S) - v(Q_K \cup S \setminus \{i\}) \right]$$

  Notemos que el valor Π pondera las coaliciones de 2^M como lo hace valor de Banzhaf y las coaliciones de 2^{B_k} como en el valor de Shapley. Usando este hecho proponemos una modificación del axioma de jugador neutro, invarianza por transferencia fuerte y contribuciones balanceadas (ver el Capítulo 1 para mayores detalles acerca de los axiomas). Esto nos permite derivar el resultado del Capítulo 2 (ver [35]):

  Teorema 0.4. *El único valor definido en Γ^N que satisface jugador neutro coalicional, invarianza por transferencia coalicional y contribuciones balanceadas intracoalicional es el valor de Banzhaf simétrico.*

  Para mayor información acerca de la notación y los axiomas utilizados favor referirse a la sección 2.3.

  Cabe mencionar que el resultado obtenido en este capítulo se encuentra publicado en la revista *The International Journal of Advances in Applied Mathematics and Mechanics.*

- En el Capítulo 3 estudiamos un problema de distribución de costos discreto con consumo sin rivalidad. Tenemos un conjunto finito de agentes, un conjunto finito de servicios que es requerido por cada agente. Además, hay una función que indica el costo de satisfacer cualquier vector de demandas. Proponemos y caracterizamos una solución para esta clase de problemas de costo. Específicamente, obtenemos el siguiente resultado:

  Teorema 0.5. *Existe una única solución $\phi : \mathcal{P} \to \mathbb{R}^{nm}$ que satisface aditividad, eficiencia, nulidad local y agentes sustitutos local. Dado un problema $(N, M, c) \in \mathcal{P}$ y $j \in M$, esta solución asigna a cada jugador $i \in N$ el número real:*

$$\psi_{ij}(N, M, c) = \sum_{K \ni j} \sum_{S \ni i} \alpha_{|K||S|} \left[c(R^{S,(j,K)}) - c(R^{S \setminus \{i\},(j,K)}) \right],$$

donde $\alpha_{|K||S|} = \frac{(|K|-1)!(m-|K|)!(|S|-1)!(n-|S|)!}{m!n!}$.

Los axiomas usados en el Teorema 0.5 son una adaptación de los que propone Shapley en [39], debido a esto nuestros axiomas son simples y la solución obtenida tiene una interpretación por medio de un enfoque probabilístico. Dado un problema (N, M, c), elegimos un orden σ de M y un orden θ de N, con una distribución uniforme sobre los $m!$ y los $n!$ órdenes posibles, respectivamente. Cobramos los servicios uno por uno, de acuerdo al orden σ, y no cobramos otro servicio hasta que le hemos cobrado a todos los agentes por el servicio actual. Los agentes pagan por un servicio uno por uno de acuerdo al orden θ. El pago del agente i por el servicio j dado por los órdenes σ y θ será el costo marginal cuando se incorpora a los agentes que lo preceden en la demanda del servicio j,

$$c\left(R^{(H_i^\theta \cup \{i\}),(j,F_j^\sigma)}\right) - c\left(R^{H_i^\theta,(j,F_j^\sigma)}\right)$$

donde H_i^θ es el conjunto de agentes que preceden a i en el orden θ y F_j^σ es el conjunto de servicios que preceden a j en el orden σ. El pago esperado para el agente i bajo este procedimiento es precisamente la solución obtenida.

Para mayores detalles sobre los axiomas utilizados, la notación utilizada y la derivación de la solución favor de referirse a la Sección 3.3.

Como resultado de una modificación del axioma de contribuciones balanceadas propuesto en [32] obtenemos otra caracterización de nuestra solución. También, damos algunas aplicaciones de nuestro modelo y solución a otros contextos: situación de distribución multitema, gestión de grupos de retención y a un problema de distribución de costo con múltiples bienes divisibles.

Los resultados obtenidos en este capítulo han sido sometidos para su publicación en la revista *An International Journal of Optimization and Control: Theories & Applications.*

- Finalmente, en el Capítulo 4 tratamos un problema de asignación, donde n bienes indivisibles deben ser distribuidos entre n agentes. Cada agente tiene valoraciones sobre los bienes y se le puede asignar cualquier bien disponible. Además, cada agente tiene una función cuasi-lineal y requiere sólo un bien. Bajo el supuesto de que las valoraciones de cada agente sobre los bienes son no negativas, obtenemos los siguientes resultados (ver [36]):

Proposición 0.6. *Para cada problema* $A \in \mathbb{R}_+^{M\times N}$ *existe* $(\theta, p) \in \mathcal{S}_n \times \mathbb{R}_+^M$ *tal que* (θ, p) *es libre de envidias e individualmente racional.*

Este resultado nos dice que siempre es posible encontrar una asignación de bienes a agentes y un precio para cada bien de tal manera que cada agente desea un bien diferente y además no paga más de lo que él esta dispuesto a pagar por el bien que recibe.

El núcleo de un juego es un concepto de solución para juegos cooperativos, el cual asocia a cada juego un conjunto de vectores de pago. Caracterizar el núcleo es una de las problemáticas estudiadas en teoría de juegos, ya que cualquier vector de pago en el núcleo proporciona a cada coalición al menos lo que ésta puede obtener en el juego. Al igual que en [38] nosotros asociamos a cada problema A un juego cooperativo. Usando soluciones libre de envidias e individualmente racional derivamos una caracterización del núcleo de este juego.

Proposición 0.7. *Sea un problema* $A \in \mathbb{R}_+^{M\times N}$ *y su juego asociado* (N', V_A). *Tenemos que* $(u, v) \in \mathcal{C}(N', V_A)$ *sí y sólo si existe* $\theta \in \mathcal{S}_n$ *tal que* (θ, v) *es una solución libre de envidias e individualmente racional para el problema* A *y* u *satisface que* $u_j = a_{\theta(j)j} - v_{\theta(j)}$ *para todo* $j \in N$.

Para mayor información acerca de la notación y la deducción de los resultados favor de referirse a la sección 4.3.

Los resultados obtenidos en este capítulo se encuentran publicados en la revista *Applied Mathematical Sciences.*

CAPÍTULO 1

Preliminares

Imaginemos una situación con tres empresarios: Ana, Juan y Carlos. Ana tiene ideas para varios inventos y patentes, y ella estima una ganancia debido a estos inventos de \$170,000 por año. Juan tiene un agudo sentido comercial y esta interesado en formar una empresa de asesoramiento, la cual él estima que puede producir una ganancia de \$150,000 por año. Carlos es un excelente vendedor y esta interesado en formar una empresa de ventas, la cual él estima que puede producir una ganancia de \$180,000 por año. Los tres empresarios reconocen que sus talentos son complementarios y que si ellos trabajan juntos podrían ganar más si cada uno de ellos trabaja separadamente. Juan puede asesorar a Ana respecto a qué patentes controlan la mayor demanda del mercado, por lo cual ellos estiman que juntos pueden obtener una ganancia de \$350,000 por año. Juan y Carlos trabajando juntos pueden formar una empresa de asesorías y un consorcio de ventas, lo cual ellos estiman que puede generarles una ganancia de \$360,000 por año. Carlos puede vender los inventos de Ana, con lo cual ellos estiman que pueden obtener una ganancia de \$380,000 por año. Si los tres empresarios trabajan juntos, Juan puede decirle a Ana cuales inventos tendrán la mayor demanda en el mercado y entonces Carlos puede vender estos inventos: la ganancia estimada de los tres trabajando juntos es \$560,000 por año.

Los empresarios entienden la importancia de trabajar juntos, pero no es claro como deberían de dividirse la ganancia obtenida, ya que la contribución de cada empresario es diferente. Esto plantea un nuevo tipo de problema: encontrar la manera en la que se repartirá la ganancia obtenida gracias a la cooperación.

En este primer capítulo primero hacemos una exposición de los conceptos básicos de la teoría de juegos cooperativos; luego reproducimos dos caracterizaciones de los valores mas usados y conocidos dentro de los juegos cooperativos, el valor de Shapley y el de Banzhaf. Finalmente, presentamos algunos resultados para la familia de valores lineales, simétricos y eficientes.

1.1. Juegos cooperativos

Definición 1. Un juego cooperativo de utilidad transferible (o simplemente un juego) es un par (N, v), donde $N = \{1, \ldots, n\}$ es el conjunto de jugadores y $v : 2^N \to \mathbb{R}$ es una función que asigna a cada subconjunto S de N un número real $v(S)$ con la condición de que $v(\emptyset) = 0$. La función v se denomina función característica del juego.

Dada una coalición $T \subseteq N$, $v(T)$ representa el pago que pueden asegurar los jugadores de T, independientemente de cómo actúen el resto de los jugadores.

Denotaremos por G^N al conjunto de todos los juegos cooperativos de utilidad transferible y conjunto de jugadores $N = \{1, 2, \ldots, n\}$. En algunas ocasiones identificaremos un juego (N, v) con su función característica v por cuestiones de simplicidad.

Puede verse fácilmente que G^N es un espacio vectorial real con la suma y la multiplicación por escalares definidos de la forma usual: para cualesquiera dos juegos $v, w \in G^N$ y cualquier $\alpha \in \mathbb{R}$, $(\alpha v + w)(S) = \alpha v(S) + w(S)$, para todo $S \subseteq N$. Dado un conjunto finito $N = \{1, \ldots, n\}$, la familia de juegos de unanimidad $\{u_S | S \neq \emptyset, S \subseteq N\}$, donde

$$u_S(T) = \begin{cases} 1 & \text{si } T \supseteq S \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

constituyen una base para G^N. Otra base de G^N esta formada por los juegos δ_S, donde para cada $S \in 2^N \setminus \emptyset$,

$$\delta_S(T) = \begin{cases} 1 & \text{si } T = S \\ 0 & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

Dado un juego $(N, v) \in G^N$, suponiendo que todos los jugadores están de acuerdo en formar la coalición N, existe una cantidad $v(N)$ que los jugadores tienen para repartirse entre ellos. Esto puede hacerse de cualquier forma, pero es razonable suponer que ningún jugador aceptará un pago menor de lo que puede obtener por sí solo. Teniendo en cuenta esto se obtiene un subconjunto de $\mathbb{R}^n$ que contiene a todos los vectores de pagos razonables. Este conjunto se denomina conjunto de imputaciones.

Definición 2. Dado un juego $(N, v) \in G^N$ se dice que un vector $x \in \mathbb{R}^n$ es una imputación si satisface las dos condiciones siguientes:

I. $x_i \geq v(\{i\})$, para todo $i \in N$,

II. $\sum_{i \in N} x_i = v(N)$.

Dado un juego $(N, v) \in G^N$ se denotará por $I(N, v)$ al conjunto de imputaciones de dicho juego.

De la definición anterior es claro que dadas dos imputaciones existirán algunos jugadores que prefieran una de ellas frente a la otra. Se formalizará esta idea con la siguiente definición.

Definición 3. Sean $(N, v) \in G^N$ y $x, z \in I(N, v)$. Se dice que x domina a z a través de $S \in 2^N \setminus \emptyset$ si se verifica:

I. $x_i > z_i$, para todo $i \in S$.

II. $\sum_{i \in S} x_i = v(S)$

La primera condición establece que los jugadores de S prefieren el valor que les asigna el vector x al correspondiente en el vector z, mientras que la segunda condición establece que el vector x es factible para S, en el sentido de que la cantidad total propuesta por x para los jugadores de S no es superior a la cantidad que los jugadores de S pueden garantizarse, $v(S)$.

En [15] se introduce el concepto del núcleo de un juego.

Definición 4. El núcleo de un juego $(N, v) \in G^N$, $C(N, v)$, es el siguiente subconjunto de $I(N, v)$,

$$C(N, v) = \{x \in I(N, v) : \sum_{i \in S} x_i \geq v(S), \text{ para toda coalición } S \in 2^N \setminus \emptyset\}.$$

Es posible encontrar juegos de G^N en los que el núcleo es vacío y otros en los que está formado por más de un vector de pagos. Esto se debe a que el núcleo asocia a cada juego (N, v) un subconjunto de $\mathbb{R}^n$. En esta tesis, trabajaremos con funciones que asignan a cada juego un único vector de pago y que se determinan buscando que el resultado final sea "justo". Para ello, se proponen diversas propiedades y se trata de caracterizar un valor a partir de estas propiedades. En primer lugar, se establece el concepto de valor sobre G^N.

Definición 5. Un valor en G^N es una aplicación $\phi : G^N \to \mathbb{R}^n$ el cual determina, para todo juego $(N, v) \in G^N$ y todo $i \in N$, un pago $\phi_i(N, v) \in \mathbb{R}$ por participar en el juego (N, v).

A continuación enunciaremos algunas propiedades usadas en la literatura de teoría de juegos cooperativos para caracterizar un valor $\phi : G^N \to \mathbb{R}^n$.

Linealidad. Un valor $\phi : G^N \to \mathbb{R}^n$ satisface el axioma de linealidad si para todo par de juegos $(N, v), (N, w) \in G^N$ y todo $\alpha \in \mathbb{R}$, se cumple que

$$\phi(N, \alpha v + w) = \alpha \phi(N, v) + \phi(N, w).$$

Este axioma es muy utilizado en la literatura de teoría de juegos cooperativos y puede interpretarse de la siguiente manera: La regla para dividir los beneficios (costos) de dos situaciones cooperativas no cambia si se hace de manera conjunta o separadamente. Entonces, resulta natural pedir que lo que obtenga cada jugador en el juego suma sea exactamente la suma de lo que se obtenga en cada uno de los juegos individuales.

Eficiencia. Un valor $\phi : G^N \to \mathbb{R}^n$ satisface el axioma de eficiencia si para todo juego $(N, v) \in G^N$, se cumple que

$$\sum_{i \in N} \phi_i(N, v) = v(N).$$

Este axioma nos dice que el monto que se reparte entre todos los jugadores es exactamente el monto que puede conseguir la coalición N.

Simetría. Un valor $\phi : G^N \to \mathbb{R}^n$ satisface el axioma de simetría si para toda permutación θ de N y todo juego $(N, v) \in G^N$, se cumple que

$$\phi(N, \theta^* v) = \theta \cdot \phi(N, v),$$

donde el juego $\theta^* v$ se define por $\theta^* v(S) = v(\theta^{-1} S)$ y $\theta \cdot (y_1, \ldots, y_n) = (y_{\theta(1)}, \ldots, y_{\theta(n)})$, para todo vector $(y_1, \ldots, y_n) \in \mathbb{R}^n$.

Este axioma pide que el valor no dependa de la etiqueta de cada jugador. Por lo tanto, si los jugadores cambian roles en el juego y cada coalición obtiene exactamente la misma valía que la coalición a la que reemplaza, entonces cada jugador en el nuevo juego debe obtener exactamente lo mismo que el jugador al cual él o ella reemplaza.

Antes de enunciar los siguientes axiomas necesitamos dos definiciones:

Definición 6. Un jugador i es nulo en (N, v) sí y sólo si $v(S \cup \{i\}) - v(S) = 0$ para toda $S \subseteq N \setminus \{i\}$.

Definición 7. Un jugador i es neutro en (N, v) sí y sólo si $v(S \cup \{i\}) - v(S) = v(\{i\})$ para toda $S \subseteq N \setminus \{i\}$.

Nulidad. Un valor $\phi : G^N \to \mathbb{R}^n$ satisface el axioma de nulidad si para todo juego $(N, v) \in G^N$ y todo jugador nulo i en (N, v), se cumple que

$$\phi_i(N, v) = 0.$$

Lo que este axioma está pidiendo es que si la participación de alguien no tiene ningún efecto en la valía de cualquier grupo al que se una, entonces no debe corresponderle pago alguno.

Jugador neutro. Un valor $\phi : G^N \to \mathbb{R}^n$ satisface el axioma de jugador neutro si para todo juego $(N, v) \in G^N$ y todo jugador neutro i en (N, v), se cumple que

$$\phi_i(N, v) = v(\{i\}).$$

Este axioma pide que si el efecto de un jugador en la valía de cualquier grupo al que se une es siempre lo que este jugador obtiene por si sólo en el juego, entonces el pago de este jugador es exactamente lo que él obtiene por si sólo en el juego.

Poder total. Un valor $\phi : G^N \to \mathbb{R}^n$ satisface el axioma de poder total si para todo juego $(N, v) \in G^N$, se cumple que

$$\sum_{i=1}^{n} \phi_i(N, v) = \frac{1}{2^n} \sum_{i=1}^{n} \sum_{S \subseteq N \setminus \{i\}} \left[v(S \cup \{i\}) - v(S) \right].$$

Poder total nos dice que el poder que se reparte entre todos los jugadores es la suma de las contribuciones marginales de todos los jugadores ponderados por el recíproco de 2^n.

Invarianza por trasferencia fuerte. Un valor ϕ satisface el axioma de invarianza por trasferencia fuerte si para todo juego $(N, v) \in G^N$, se cumple que $\phi_i(N, v) = \phi_i(N, v + \alpha(\delta_S - \delta_T))$ para todo $\alpha \in \mathbb{R}$ y todo par de coaliciones $S, T \subseteq N$ tal que $i \in S \cap T$.

Este axioma dice que el pago de un jugador es invariante a una transferencia de valor entre dos coaliciones que lo contienen.

Contribuciones balanceadas. Un valor $\phi : G^N \to \mathbb{R}^n$ satisface el axioma de contribuciones balanceadas si para todo juego $(N, v) \in G^N$ y todo $\{i, j\} \subseteq N$, se cumple que

$$\phi_i(N, v) - \phi_i(N \setminus \{j\}, v) = \phi_j(N, v) - \phi_j(N \setminus \{i\}, v).$$

Contribuciones balanceadas pide una regla de justicia en el pago de cada jugador, esto es, el efecto que tiene el jugador i en el pago del jugador j es el mismo que tiene j en el pago del jugador i.

El siguiente axioma nos dice que si dos juegos sólo difieren en una coalición, entonces los respectivos pagos de los jugadores en esa coalición deben de ser diferente.

Diferenciación coalicional. Un valor $\phi : G^N \to \mathbb{R}^n$ satisface el axioma de diferenciación coalicional si para todo par de juegos $(N, v), (N, w) \in G^N$ tales que $v(S) \neq w(S)$ para alguna $\emptyset \neq S \subseteq N$ y $v(T) = w(T)$ para toda $T \neq S$, se cumple que $\phi_i(N, v) \neq \phi_i(N, w)$ para todo $i \in S$.

Este axioma nos permitirá una caracterización de una familia de valores que estudiaremos a detalle en la siguiente sección.

Entre los valores más populares para juegos cooperativos se encuentran el valor de Shapley ([39]) y el valor de Banzhaf, introducido en [2] para la familia de los juegos simples y extendido en [33] a cualquier juego. Replicamos aquí la caracterización del valor de Shapley obtenida en [39] y la de [32]. También, damos la caracterización del valor de Banzhaf obtenida en [13] y la de [5].

Teorema 1.1 (Shapley, 1953)**.** *Existe un único valor definido en G^N que satisface los axiomas de linealidad, eficiencia, simetría y nulidad. Dado un juego (N, v), este valor asigna a cada jugador $i \in N$ el número real:*

$$Sh_i(N, v) = \sum_{S \ni i} \frac{(s-1)!(n-s)!}{n!} [v(S) - v(S \setminus i)],$$

donde s representa la cardinalidad de $S \subseteq N$.

Teorema 1.2 (Feltkamp, 1995). *Existe un único valor definido en G^N que satisface los axiomas de linealidad, poder total, simetría y nulidad. Dado un juego (N, v), este valor asigna a cada jugador $i \in N$ el número real:*

$$Bz_i(N, v) = \sum_{S \ni i} \frac{1}{2^{n-1}} [v(S) - v(S \setminus i)].$$

Notemos que sólo una propiedad diferencía estas dos caracterizaciones: el valor de Shapley, Sh, verifica eficiencia mientras que el valor de Banzhaf, Bz, verifica poder total.

A la vista de las expresiones proporcionadas por los teoremas anteriores, se ve que ambos valores asignan a cada jugador una suma ponderada de las contribuciones marginales que dicho jugador hace a todas las coaliciones a las que se une. Para el valor de Shapley los pesos asignados a cada coalición dependen de su tamaño, mientras que en el valor de Banzhaf todas las coaliciones tienen el mismo peso.

En 1980, Myerson caraterizó el valor de Shapley utilizando la propiedad de contribuciones balanceadas.

Teorema 1.3 (Myerson, 1980). *El único valor definido en G^N que satisface los axiomas de eficiencia y contribuciones balanceadas es el valor de Shapley.*

Por otra parte en el 2015, Béal et al. [5] caracterizaron el valor de Banzhaf usando la propiedad de invarianza por transferencia fuerte.

Teorema 1.4 (Béal et al., 2015). *El único valor definido en G^N que satisface los axiomas de invarianza por transferencia fuerte y jugador neutro es el valor de Banzhaf.*

Otras caracterizaciones de estos valores pueden verse en [27] y [19], respectivamente. En la siguiente sección resolvemos el problema inverso de una familia de valores que contienen al valor de Shapley como uno de sus miembros.

1.2. El problema inverso para valores LSEDC en juegos cooperativos

En la sección anterior vimos dos caracterizaciones del valor de Shapley. Este valor pertenece a una familia de valores que satisfacen los axiomas de linealidad, simetría y eficiencia y que llamaremos familia LSE, presentada inicialmente en [37]. En [22] se establece una correspondencia uno a uno entre las $(n-1)$-tuplas $b = (b_1, \ldots, b_{n-1}) \in \mathbb{R}^{n-1}$ y los valores LSE para n jugadores.

La correspondencia está dada por $b \longmapsto \varphi^b$, donde

$$\varphi_i^b(v) = \frac{v(N)}{n} + \sum_{S \ni i : S \neq N} \frac{b_s}{\binom{n-1}{s-1}} v(S) - \sum_{S \not\ni i} \frac{b_s}{\binom{n-1}{s}} v(S), \tag{1.1}$$

para todo $i \in N$ y $s = |S|$.

La expresión (1.1) tiene la siguiente interpretación: primero, $v(N)$ se divide de forma igualitaria entre todos los jugadores, es decir, cada jugador recibe $\frac{v(N)}{n}$. Después, necesitamos hacer compensaciones entre los jugadores de acuerdo a su diferente participación en el juego. Estas compensaciones son hechas vía transferencias entre los jugadores. Estas transferencias se hacen siguiendo una simple regla: Para cada coalición $S \neq N$, los jugadores en S reciben, de los jugadores en $N \setminus S$, una división igualitaria de $\frac{nb_s v(S)}{\binom{n}{s}}$. Similarmente, cada jugador en $N \setminus S$, paga de forma igualitaria la anterior cantidad. Así, el pago final que cada jugador recibe esta dado por (1.1).

El la siguiente sección trabajaremos con una subfamilia de la familia LSE, la cual caracterizamos a continuación:

Lema 1. *Un valor $\phi : G^N \to \mathbb{R}^n$ satisface los axiomas de linealidad, simetría, eficiencia y diferenciación coalicional sí y sólo si ϕ es de la siguiente forma*

$$\phi_i(v) = \frac{v(N)}{n} + \sum_{S \ni i : S \neq N} \frac{b_s}{\binom{n-1}{s-1}} v(S) - \sum_{S \not\ni i} \frac{b_s}{\binom{n-1}{s}} v(S), \quad \forall i \in N, \tag{1.2}$$

con $b_s \neq 0$ para todo $s = 1, 2, \ldots, n-1$.

Demostración. De los resultados de [22] todo valor que satisface los axiomas de linealidad, simetría y eficiencia es de la forma 1.1, para algunos $b_s \in \mathbb{R}$ $(s = 1, 2, \ldots, n-1)$. Notemos que cada juego δ_S con $S \neq \emptyset$ sólo es diferente del juego nulo en la coalición S y que

$$\varphi_i^b(\delta_S) = \begin{cases} \frac{1}{n} & \text{si } S = N, \\ \frac{b_s}{\binom{n-1}{s-1}} & \text{si } i \in S \text{ y } S \neq N, \\ \frac{-b_s}{\binom{n-1}{s}} & \text{si } i \notin S \text{ y } S \neq N. \end{cases}$$

De la igualdad anterior y el axioma de diferenciación coalicional se sigue fácilmente que $b_s \neq 0$ para todo $s = 1, 2, \ldots, n-1$. □

Es claro que el valor de Shapley es un miembro de la familia descrita en el lema anterior. Llamaremos familia LSEDC a la subfamilia de valores LSE que satisfacen el axioma de diferenciación coalicional.

Ejemplo 1. *Consideremos un juego $v \in G^{\{1,2,3\}}$ y un valor LSEDC φ^b, con $b = (1, 1)$, dado de la siguiente forma*

$$\varphi_1^b(v) = v(\{1\}) - v(\{2,3\}) + \frac{1}{2}[v(\{1,2\}) + v(\{1,3\})] - \frac{1}{2}[v(\{2\}) + v(\{3\})] + \frac{1}{3}v(\{1,2,3\}),$$
$$\varphi_2^b(v) = v(\{2\}) - v(\{1,3\}) + \frac{1}{2}[v(\{1,2\}) + v(\{2,3\})] - \frac{1}{2}[v(\{1\}) + v(\{3\})] + \frac{1}{3}v(\{1,2,3\}),$$
$$\varphi_3^b(v) = v(\{3\}) - v(\{1,2\}) + \frac{1}{2}[v(\{1,3\}) + v(\{2,3\})] - \frac{1}{2}[v(\{1\}) + v(\{2\})] + \frac{1}{3}v(\{1,2,3\})$$

Si calculamos el valor para los siguientes juegos

$$v(\{1\}) = v(\{2\}) = 0, \quad v(\{3\}) = 2, \quad v(\{1,2\}) = v(\{1,3\}) = v(\{2,3\}) = v(\{1,2,3\}) = 3,$$

y

$$w(S) = \begin{cases} 1 & si\ 3 \in S\ y\ S \neq \{1,2,3\}, \\ 3 & si\ S = \{1,2,3\}, \\ 0 & en\ otro\ caso, \end{cases}$$

obtenemos que $\varphi^b(v) = \varphi^b(w) = (0,0,3)$.

Dragan fue el primero en estudiar el problema inverso de un valor en G^N. En [10] él encuentra todos los juegos en G^N tales que al aplicarles el valor de Shapley da como resultado un vector de pago dado con anterioridad. Dragan propone un sistema de pesos basado en algunos resultados de álgebra lineal y el potencial del valor de Shapley debido a Hart y Mas Colell ([18] y [19]). En este caso, la solución del problema inverso fue exitosa porque él descubrió una nueva base para el espacio nulo del valor de Shapley, la cual llamó base potencial. En [11] Dragan usa una base similar en la resolución del problema inverso para semivalores [12]. Sin embargo, para el caso de valores LSEDC las bases potenciales no funcionan debido a la falta de una función potencial para cada valor LSEDC y resultados análogos a los de Hart y Mas Colell. Nuestro objetivo en esta sección es resolver el problema inverso de cada valor LSEDC φ^b, es decir, queremos encontrar todos los juegos v tal que $\varphi^b(v) = x$, donde x es un vector de pago dado con anterioridad.

Hay muchas situaciones donde podría ser interesante calcular todos los juegos cooperativos tales que al aplicarles un valor se obtiene el mismo vector de pagos. Por ejemplo, supongamos que existe un convenio entre compañías para distribuir sus costos derivados de algunos rubros de acuerdo a un valor lineal, simétrico, eficiente y regular. Además, estas compañías quiere disminuir sus costos para el siguiente periodo. Hipotéticamente, si las compañías ya conocen los costos (vectores de pago) que desea para el siguiente periodo, entonces necesita conocer los juegos que producen esos costos. Ya conociendo el juego las compañías tendrán información que les permitirá el reforzamiento de algunas coaliciones.

Por otro lado, en la literatura de teoría de juegos cooperativos existen una variedad de valores que se utilizan en situaciones concretas, los cuales satisfacen linealidad, simetría y eficiencia (LSE). Por ejemplo, el valor de Shapley, el valor de solidaridad y el prenucleolo de mínimos cuadrados. Más aún, el estudio del problema inverso de un valor LSE podría derivar en su caracterización. Por ejemplo, en Béal et al. [4] se obtiene una caracterización de la solución del árbol promedio (ver Herings et al. [20]) a través del estudio del problema inverso de este valor. Otros ejemplos pueden encontrarse en Yokote [45] y en Béal et al. [3]. En ambos casos se encuentra una base para el espacio nulo del valor, el cual es objeto de estudio, y se propone un axioma de invarianza que permite caracterizarlo.

Dado un espacio vectorial real V, su elemento neutro será denotado por $\mathbf{0}_V$ y su dimensión por $dim(V)$. Si el espacio vectorial es la suma directa de los espacios vectoriales V^1 y V^2, es decir, $V = V^1 + V^2$ y $V^1 \cap V^2 = \mathbf{0}_V$, escribiremos $V = V^1 \bigoplus V^2$. Si $g : V \to W$ es una trasformación lineal del espacio vectorial V en W, entonces denotaremos por $null(g)$ su espacio nulo y por $g(V)$ a la imagen de V bajo g. Si X es un subconjunto de V, entonces $Span(X)$ denota el subespacio vectorial más pequeño que contiene a X.

Un juego $(N, v) \in G^N$ es *no esencial* si, para cada $S \subseteq N$ tal que $S \neq \emptyset$, $v(S) = \sum_{i \in S} v(\{i\})$. El subconjunto de juegos no esenciales, denotado por A^N, es un subespacio vectorial de G^N con $dim(A^N) = n$. Una base para A^N es la colección de juegos de unanimidad $\{u_{\{i\}}\}_{i \in N}$.

1.2.1. El espacio nulo de un valor LSEDC

En esta sección estamos interesados en contestar la siguiente interrogante: Dado un vector $x \in \mathbb{R}^n$ y un valor LSEDC φ^b ¿Cuáles son los juegos v tales que $\varphi^b(v) = x$? Para contestar está interrogante necesitamos algunos resultados.

Dado $x \in \mathbb{R}^n$ definimos el juego x^j, para cada $j : 1, \ldots, n$, de la siguiente forma:

$$x^j(S) = \begin{cases} \sum_{i \in S} x_i & \text{si } |S| = j, \\ 0 & \text{en otro caso,} \end{cases}$$

para cada $S \subseteq N$.

Proposición 1.5. *Sea $\varphi^b : G^N \to \mathbb{R}^n$ un valor LSE. Si $z \in \mathbb{R}^n$ es tal que $z(N) = \sum_{i \in N} z_i = 0$, entonces $\varphi^b(z^j) = \frac{n}{n-1} b_j z$ para todo $j : 1, \ldots, n-1$.*

Demostración. Sea $z \in \mathbb{R}^n$ con $z(N) = 0$, $i \in N$ y $j \in \{1, \ldots, n-1\}$.

$$\begin{aligned}
\varphi_i^b(z^j) &= \frac{z^j(N)}{n} + \sum_{S \ni i : S \neq N} \frac{b_s}{\binom{n-1}{s-1}} z^j(S) - \sum_{S \not\ni i} \frac{b_s}{\binom{n-1}{s}} z^j(S) \\
&= \frac{b_j z_i}{\binom{n-1}{j-1}} \times \binom{n-1}{j-1} + \sum_{k \neq i} z_k \left[\frac{b_j \binom{n-2}{j-2}}{\binom{n-1}{j-1}} - \frac{b_j \binom{n-2}{j-1}}{\binom{n-1}{j}} \right] \\
&= b_j z_i + \sum_{k \neq i} z_k b_j \left[\frac{j-1}{n-1} - \frac{j}{n-1} \right] \\
&= \frac{n}{n-1} b_j z_i + \sum_{k \in N} z_k b_j \frac{-1}{n-1} \\
&= \frac{n}{n-1} b_j z_i.
\end{aligned}$$

Como $i \in N$ y $j \in \{1, \ldots, n-1\}$ son arbitrarios, entonces $\varphi^b(z^j) = \frac{b_j n}{n-1} z$ para todo $j : 1, \ldots, n-1$. □

Dada la función lineal φ^b, una pregunta natural es ¿Cuándo la función φ^b tiene rango completo, es decir, $\varphi^b(G^N) = \mathbb{R}^n$? Nuestro próximo resultado contesta esta interrogante.

Teorema 1.6. *Sea $\varphi^b : G^N \to \mathbb{R}^n$ un valor LSE tal que $b \neq \mathbf{0}_{\mathbb{R}^n}$. Entonces $dim(null(\varphi^b)) = 2^n - n - 1$.*

Demostración. Supongamos que $\varphi^b : G^N \to \mathbb{R}^n$ es tal que $b \neq \mathbf{0}_{\mathbb{R}^n}$. Sea $x \in \mathbb{R}^n$ y $l \in \{1,\ldots,n-1\}$ tal que $b_l \neq 0$. Consideremos el juego $\hat{x} = \frac{x(N)}{n}\sum_{j=1}^n jc_j + \lambda z^l$, donde $\lambda = \frac{n-1}{nb_l}$, $z_i = x_i - \frac{x(N)}{n}$ y c_j se define como $c_j(S) = 1$ si $s = j$ y $c_j(S) = 0$ si $s \neq j$. Como los juegos c_j son simétricos, entonces por la Proposición (1.5) y el hecho de que φ^b es LSE se tiene que

$$\varphi^b(\hat{x}) = \frac{x(N)}{n}\iota + \frac{n\lambda}{n-1}b_l z = x,$$

donde $\iota = (1,\ldots,1) \in \mathbb{R}^n$. Como $x \in \mathbb{R}^n$ es arbitrario, φ^b es sobre y por lo tanto $dim(null(\varphi^b)) = 2^n - n - 1$. $\square$

Dada la función lineal φ^b encontrar una base de $null(\varphi^b)$ en general no es simple. Pero si φ^b satisface el axioma de diferenciación coalicional, entonces el siguiente teorema nos dice que forma tienen los elementos del espacio nulo de φ^b, y por lo tanto, nos proporciona una base para $null(\varphi^b)$.

Teorema 1.7. *Sea $\varphi^b : G^N \to \mathbb{R}^n$ un valor LSEDC. Si $\mathcal{W}^b = \{w_S^b : S \subseteq N, 2 \leq s\} \subseteq G^N$ con*

$$w_N^b(T) = \begin{cases} 1 & si\ t = 1, \\ 0 & en\ otro\ caso, \end{cases}$$

y para todo $S \subseteq N$ tal que $2 \leq s \leq n-1$,

$$w_S^b(T) = \begin{cases} 1 & si\ t = 1\ y\ T \not\subseteq S, \\ \frac{b_1}{b_s}\binom{n-2}{s-1} & si\ T = S, \\ 0 & en\ otro\ caso, \end{cases}$$

entonces, $null(\varphi^b) = Span(\mathcal{W}^b)$.

Demostración. Supongamos que $\sum_{S\subseteq N: s\geq 2}\delta_S w_S^b = 0$ y sea $T \subseteq N$ tal que $2 \leq t \leq n-1$. Si evaluemos $\sum_{S\subseteq N: s\geq 2}\delta_S w_S^b$ en T, entonces obtenemos que $\sum_{S\subseteq N: s\geq 2}\delta_S w_S^b(T) = \delta_T$. Combinando la igualdad anterior y el hecho que $\sum_{S\subseteq N: s\geq 2}\delta_S w_S^b$ evaluado en cualquier coalición es igual a cero, obtenemos que $\delta_S = 0$ para todo $S \subseteq N$ con $2 \leq s \leq n-1$. Dado que

$$0 = \left(\sum_{S\subseteq N: s\geq 2}\delta_S w_S^b\right)(\{j\}) = \sum_{\substack{S\subseteq N\setminus\{j\} \\ 2\leq s\leq n-1}}\delta_S + \delta_N, \quad con\ \ j \in N,$$

entonces $\delta_N = 0$. De todo lo anterior se sigue que $\mathcal{W}^b$ es linealmente independiente, de lo cual se sigue que $dim(Span(\mathcal{W}^b) = 2^n - n - 1$.

Ahora probaremos que $Span(\mathcal{W}^b) \subseteq null(\varphi^b)$. Para ello, sea $w_S^b \in \mathcal{W}^b$ y $i \in N$. Si $i \in S$, entonces

$$\varphi_i^b(w_S^b) = \frac{b_s}{\binom{n-1}{s-1}}\frac{b_1\binom{n-2}{s-1}}{b_s} - \frac{(n-s)b_1}{\binom{n-1}{1}} = 0.$$

Si $i \notin S$, entonces

$$\varphi_i^b(w_S^b) = b_1 - \frac{(n-s-1)b_1}{n-1} - \frac{(n-2)!b_1}{b_s(s-1)!(n-s-1)!} \times \frac{s!(n-s-1)!b_s}{(n-1)!} = 0.$$

Esto implica que $w_S^b \in null(\varphi^b)$. Como w_S^b es arbitrario, entonces $\mathcal{W}^b \subseteq null(\varphi^b)$. Por la Teorema (1.6) la $dim(null(\varphi^b)) = 2^n - n - 1$. Combinando la igualdad anterior con que $dim(Span(\mathcal{W}^b)) = 2^n - n - 1$ y $\mathcal{W}^b \subseteq null(\varphi^b)$, se tiene que $null(\varphi^b) = Span(\mathcal{W}^b)$. □

Lema 2. *Sea $Y \subseteq G^N$ tal que $dim(Y) = n$ y $\Phi : G^N \to \mathbb{R}^n$ un valor lineal en G^N. Entonces, $G^N = Y \bigoplus null(\Phi)$ sí y sólo si $\Phi(Y) = \mathbb{R}^n$.*

Demostración. Supongamos que $G^N = Y \bigoplus null(\Phi)$. Dado que la $dim(Y) = n$, entonces $dim(null(\Phi)) = 2^n - n - 1$ y por lo tanto Φ es sobre. Esto implica que $\Phi(Y) = \mathbb{R}^n$.

Recíprocamente, si $\Phi(Y) = \mathbb{R}^n$, entonces Φ es sobre. Por lo tanto la $dim(null(\Phi)) = 2^n - n - 1$. Como $dim(Y) = n$, entonces Φ es un isomorfismo cuando se restringe a Y. Sea $v \in Y \cap null(\Phi)$, entonces $\Phi(v) = \mathbf{0}_{\mathbb{R}^n}$. Dado que Φ es un isomorfismo restringido a Y y $v \in Y$ se tiene que $v = \mathbf{0}_{G^N}$. Esto implica que $Y \cap null(\Phi) = \{\mathbf{0}_{G^N}\}$. La igualdad anterior y que $dim(null(\Phi)) + dim(Y) = 2^n - 1$ implican que $G^N = Y \bigoplus null(\Phi)$. □

El siguiente teorema nos proporciona una base del complemento de $null(\varphi^b)$, lo cual nos permite descomponer el espacio de juegos, G^N, como suma directa del espacio nulo de φ^b y su complemento, siempre que φ^b satisfaga el axioma de diferenciación coalicional.

Teorema 1.8. *Sea $\varphi^b : G^N \to \mathbb{R}^n$ un valor LSEDC. Si $\mathcal{W}_*^b = \{w_i^b : i \in N\}$, donde para todo $i \in N$*

$$w_{\{i\}}^b(T) = \begin{cases} \frac{1}{b_t} & si\ i \in T\ y\ T \neq N, \\ n & si\ T = N, \\ 0 & en\ otro\ caso, \end{cases} \tag{1.3}$$

entonces

$$\varphi_i^b(w_{\{j\}}^b) = \begin{cases} n & si\ i = j, \\ 0 & en\ otro\ caso, \end{cases} \tag{1.4}$$

y

$$G^N = Span(\mathcal{W}_*^b) \bigoplus Span(\mathcal{W}^b).$$

Demostración. Sea $i, j \in N$. Si $i = j$, entonces

$$\varphi_i^b(w_{\{i\}}^b) = 1 + \sum_{S \ni i : S \neq N} \frac{1}{\binom{n-1}{s-1}} = \sum_{l=1}^{n} \frac{1}{\binom{n-1}{l-1}} \binom{n-1}{l-1} = n.$$

Si $i \neq j$, entonces

$$\varphi_i^b(w_{\{j\}}^b) = \sum_{\substack{S \ni i \\ S \ni j}} \frac{1}{\binom{n-1}{s-1}} + \sum_{\substack{S \subseteq N \setminus \{i\} \\ S \ni j}} \frac{1}{\binom{n-1}{s}} = \sum_{\substack{S \ni i \\ S \ni j}} \frac{1}{\binom{n-1}{s-1}} + \sum_{\substack{S \ni i \\ S \ni j}} \frac{1}{\binom{n-1}{s-1}} = 0.$$

Es muy fácil ver que el conjunto de juegos $\mathcal{W}_*^b$ es linealmente independiente, y por lo tanto, $dim(Span(\mathcal{W}_*^b)) = n$. Sea $x \in \mathbb{R}^n$ y $v^x \in G^N$ con $v^x = \sum_{i \in N} \frac{x_i}{n} w_{\{i\}}^b$. Entonces, por la linealidad de φ^b y por (1.4) obtenemos que $\varphi^b(v^x) = x$. Esta igualdad y que $x \in \mathbb{R}^n$ fue elegido de forma arbitraria implican que $\varphi^b(\mathcal{W}_*^b) = \mathbb{R}^n$. Así, por el Lema (2) obtenemos que $G^N = Span(\mathcal{W}_*^b) \bigoplus null(\varphi^b)$. Por el Teorema (1.6) tenemos que $null(\varphi^b) = Span(\mathcal{W}^b)$. Esta igualdad implica que

$$G^N = Span(\mathcal{W}_*^b) \bigoplus Span(\mathcal{W}^b).$$

□

Ahora, estamos listos para enunciar el teorema principal de esta sección:

Teorema 1.9. *Sea $\varphi^b : G^N \to \mathbb{R}^n$ un valor LSEDC y $x \in \mathbb{R}^n$ un vector de pagos. Entonces, $\varphi^b(v) = x$ sí y sólo si*

$$v = \sum_{i \in N} \frac{x_i}{n} w^b_{\{i\}} + \sum_{S \subseteq N : s \geq 2} a_S w^b_S, \tag{1.5}$$

donde las a_S son constantes arbitrarias.

Demostración. Sea $v \in G^N$. Por el Teorema (1.8) existen $v_1 \in Span(\mathcal{W}^b_*)$ y $v_2 \in Span(\mathcal{W}^b) = Nul(\varphi^b)$ tal que v se expresa de manera única como $v = v_1 + v_2$. De la linealidad de φ^b obtenemos que $\varphi^b(v) = \varphi^b(v_1) + \varphi^b(v_2) = \varphi^b(v_1)$. Ya que $v_1 \in Span(\mathcal{W}^b_*)$, existen constantes $a_{\{i\}}$, con $i \in N$, que permiten expresar a v_1 de forma única como $v_1 = \sum_{i \in N} a_{\{i\}} w^b_{\{i\}}$. Luego, por el Teorema (1.8) concluimos que

$$\varphi^b(v) = \sum_{i \in N} a_{\{i\}} \varphi^b(w^b_{\{i\}}) = (na_{\{1\}}, \ldots, na_{\{n\}}). \tag{1.6}$$

De (1.6) se sigue que $\varphi^b(v) = x$ sí y sólo si $v = \sum_{i \in N} \frac{x_i}{n} w^b_{\{i\}} + \sum_{S \subseteq N : s \geq 2} a_S w^b_S$, donde las a_S son constantes arbitrarias. □

Ejemplo 2. *Para ilustrar los resultados, retomemos el Ejemplo 1 para resolver el problema inverso del valor φ^b con $b = (1, 1)$.Consideremos el vector de pagos $x = (0, 0, 3)$. Queremos encontrar todos los juegos para los cuales el valor φ^b da como resultado x. Calculando la base del espacio nulo formado por los juegos $w^b_S \in \mathcal{W}^b$, con $S \subseteq N$, $2 \leq s \leq n$, y usando la fórmula 1.5 obtenemos la solución del problema inverso*

$$\begin{aligned}
v(\{1\}) &= a_{\{2,3\}} + a_{\{1,2,3\}},\\
v(\{2\}) &= a_{\{1,3\}} + a_{\{1,2,3\}},\\
v(\{3\}) &= 1 + a_{\{1,2\}} + a_{\{1,2,3\}},\\
v(\{1,2\}) &= a_{\{1,2\}},\\
v(\{1,3\}) &= 1 + a_{\{1,3\}},\\
v(\{2,3\}) &= 1 + a_{\{2,3\}},\\
v(\{1,2,3\}) &= 3.
\end{aligned}$$

El juego anterior depende de cuatro parámetros, y en general de $2^n - n - 1$. Es muy fácil de verificar que los juegos del Ejemplo 1 son obtenidos para los siguientes valores de los parámetros:

- $a_{\{1,2\}} = 3$, $a_{\{2,3\}} = a_{\{1,3\}} = 2$ *y* $a_{\{1,2,3\}} = -2$,
- $a_{\{1,2\}} = a_{\{2,3\}} = a_{\{1,3\}} = a_{\{1,2,3\}} = 0$.

1.2.2. La propiedad de juego no esencial

Supongamos que tenemos un juego $v \in G^N$ tal que $v(S) = \sum_{i \in S} v(\{i\})$ para todo $S \subseteq N$, es decir, la valía de cualquier coalición es igual a la suma de lo que cada miembro de la coalición puede conseguir por sí solo. Es razonable suponer que el pago de cualquier jugador en este juego v debe ser precisamente lo que él puede conseguir por sí solo en v. Esta propiedad es conocida en la literatura como la propiedad de juego no esencial. A continuación caracterizamos todos los valores LSE, φ^b, que satisfacen esta propiedad.

Propiedad de juego no esencial. *Un valor $\phi : G^N \to \mathbb{R}^n$ satisface la propiedad de juego no esencial si $\phi(v) = (v(\{1\}), \ldots, v(\{n\}))$, para todo $v \in A^N$.*

El siguiente teorema caracteriza los valores LSE, φ^b, que satisfacen la propiedad de juego no esencial.

Teorema 1.10. *Sea $\varphi^b : G^N \to \mathbb{R}^n$ un valor LSE. φ^b satisface la propiedad de juego no esencial sí y sólo si $\sum_{l=1}^{n-1} b_l = \frac{n-1}{n}$.*

Demostración. Supongamos que $\varphi^b : G^N \to \mathbb{R}^n$ es tal que $\sum_{l=1}^{n-1} b_l = \frac{n-1}{n}$. Sea $w \in A^N$ y $x \in \mathbb{R}^n$ tal que $w = \sum_{i \in N} x_i u_{\{i\}}$. Es muy fácil verificar que $w = \hat{x}$, donde $\hat{x} = \frac{x(N)}{n} \sum_{j=1}^{n} j c_j + \sum_{j=1}^{n-1} z^j$ con z y los c_j como en la prueba del Teorema (1.6). Como los juegos c_j son simétricos, entonces por la Proposición (1.5) y el hecho de que φ^b es LSE se tiene que

$$\varphi^b(w) = \varphi^b(\hat{x}) = \frac{x(N)}{n}\iota + \frac{n}{n-1} \sum_{l=1}^{n-1} b_l z, \tag{1.7}$$

donde $\iota = (1, \ldots, 1) \in \mathbb{R}^n$. De 1.7 y que $w \in A^N$ es arbitrario, se sigue el resultado. $\square$

Intuitivamente, b_l es una ponderación que mide la importancia de las coaliciones de tamaño l, así, el Teorema 1.10 nos dice que un valor LSE φ^b tiene la propiedad de juego no esencial sí y sólo si la importancia total de las coaliciones de acuerdo a $b \in \mathbb{R}^{n-1}$ es igual a la importancia total cuando las ponderaciones son igualitarias, es decir, $b_l = \frac{1}{n}$ para todo $l = 1, \ldots, n-1$.

1.3. Conclusiones

En este capítulo desarrollamos los conceptos y resultados necesarios de teoría de juegos que usaremos en el resto de la tesis. Además, en la sección 1.2 obtuvimos los primeros resultados de esta tesis concernientes al problema inverso de un valor LSEDC. Primero, dimos una base para espacio nulo del valor LSEDC φ^b. Luego, expresamos el espacio de juegos, G^N como suma directa del espacio nulo de φ^b y su respectivo complemento. Usando esta descomposición encontramos todos los juegos v tales que $\varphi^b(v) = x$, donde $x \in \mathbb{R}^n$ es un vector de pagos dado a priori. También, caracterizamos los valores LSE que satisfacen la propiedad de juego no esencial.

CAPÍTULO 2

Una caracterización del valor de Banzhaf simétrico para juegos con estructura coalicional

Alonso-Meijide y Fiestras-Janeiro en el 2002 proponen una modificación del valor de Banzhaf para juegos con estructura coalicional. En este capítulo proporcionamos una nueva caracterización de este valor por medio de los axiomas de jugador neutro coalicional, contribuciones balanceadas intracoalicionales e invarianza por transferencia coalicional. El último axioma indica que el pago total de un bloque es invariante a una transferencia de valor entre dos coaliciones que contienen a los miembros del bloque, siempre que dichas coaliciones no contengan subconjuntos propios de cualquier otro bloque.

2.1. Introducción

El valor de Shapley [39] y el valor de Banzhaf [2] son dos valores populares dentro de la teoría de juegos cooperativos de utilidad transferible. Ambos valores asignan a cada jugador la suma de sus contribuciones marginales ponderadas. En el valor de Banzhaf cada jugador tiene igual probabilidad de entrar a cualquier coalición y en el valor de Shapley esta probabilidad depende del número de elementos de la coalición.

En [1] se propone una extensión del valor de Banzhaf a juegos con estructura coalicional llamado valor de Banzhaf simétrico. Este valor es la composición del valor de Banzhaf y el valor de Shapley en el siguiente sentido: supóngase que en un juego con estructura coalicional existen dos niveles de negociación; primero entre bloques y después entre jugadores del mismo bloque. El reparto entre bloques se hace asignando a cada bloque su valor de Banzhaf en el juego cociente. La cantidad asignada a cada bloque en este primer reparto se divide entre los jugadores de cada bloque usando el valor de

Shapley de cada "juego de bloque".

En este capítulo proporcionamos otra caracterización de la extención dada por [1] del valor de Banzhaf para juegos con estructura coalicional por medio de tres axiomas. El primero es el bien conocido axioma de contribuciones balanceadas intracoalicional. El segundo axioma, llamado jugador neutro coalicional, indica que si un bloque es un jugador neutro en el juego cociente, entonces el pago de ese bloque es lo que consiguen los miembros del bloque por sí solos en el juego. El tercer axioma, llamado invarianza por transferencia coalicional, establece que el pago total de un bloque es invariante a una transferencia de valor entre dos coaliciones que contienen a los miembros del bloque, siempre que dichas coaliciones no contengan subconjuntos propios de cualquier otro bloque. Esto es, si el valor de una coalición varía en una cierta cantidad, y al mismo tiempo, el valor de otra coalición varía en la cantidad opuesta, entonces el pago resultante de los jugadores en ambas coaliciones no cambia, siempre que dichas coaliciones no contengan subconjuntos propios de cualquier bloque.

El resto de este capítulo está organizado como sigue: primero establecemos la notación y definiciones básicas concernientes al modelo que trabajamos. Luego, proporcionamos la caracterización del valor de Banzhaf simétrico.

2.2. Juegos con estructura coalicional

Sea $N = \{1, \ldots, n\}$ un conjunto de jugadores. Una *estructura coalicional* sobre N es una partición de N, es decir, $\mathcal{B} = \{B_1, \ldots, B_m\}$ es una estructura coalicional si se satisface que $\bigcup_{1 \leq k \leq m} B_k = N$ y $B_k \cap B_l = \emptyset$ si $k \neq l$. También suponemos que $B_k \neq \emptyset$ para todo k. Los conjuntos $B_k \in \mathcal{B}$ serán llamados "bloques o sindicatos". Denotaremos por $\mathcal{B}(N)$ al conjunto de todas las estructuras coalicionales sobre N. Un *juego* (N, v) *con estructura coalicional* $\mathcal{B} \in \mathcal{B}(N)$ es una terna $(N, \mathcal{B}, v)$. La estructura coalicional $\mathcal{B}$ se interpreta como una estructura a priori de cooperación entre los jugadores. Denotaremos por Γ^N al conjunto de juegos con estructura coalicional.

Si $(N, \mathcal{B}, v) \in \Gamma^N$ con $\mathcal{B} = \{B_l : l \in M := \{1, \ldots, m\}\} \in \mathcal{B}(N)$, el *juego cociente* $(M, v^{\mathcal{B}})$ es un juego, donde los jugadores son los bloques dados por la estructura coalicional $\mathcal{B}$ y donde el valor de $v^{\mathcal{B}}$ se calcula tomando uniones de dichos bloques, es decir,

$$(M, v^{\mathcal{B}}) \in G^M \qquad y \qquad v^{\mathcal{B}}(K) = v\left(\bigcup_{k \in K} B_k\right) \quad \forall K \subseteq M.$$

Un *valor* en Γ^N es una aplicación $f : \Gamma^N \to \mathbb{R}^n$ el cual determina, para todo $(N, \mathcal{B}, v) \in \Gamma^N$ y todo $i \in N$, un pago $f_i(N, \mathcal{B}, v) \in \mathbb{R}$ por participar en el juego con estructura coalicional $(N, \mathcal{B}, v) \in \Gamma^N$.

Dado un valor f en Γ^N y una coalición $S \subseteq N$, denotamos por $f(N, \mathcal{B}, v)[S] = \sum_{i \in S} f_i(N, \mathcal{B}, v)$ al pago total que obtienen los elementos de S de acuerdo a f. Para todo $l \in M$ con $|B_l| > 1$ y todo $i \in B_l$, se define $\mathcal{B}_{-i} = \{B_1, \ldots, B_l \setminus \{i\}, \ldots B_m\}$, es decir, $\mathcal{B}_{-i}$ es la nueva estructura coalicional cuando el jugador i se va del juego. Notemos que $\mathcal{B}_{-i}$ proporciona una estructura a priori de cooperación entre los jugadores de $N \backslash \{i\}$.

En este capítulo nuestro interés se centra en el valor para juegos con estructura coalicional propuesto en [1], llamado *valor de Banzhaf simétrico*. Dado un juego con estructura coalicional $(N, \mathcal{B}, v) \in \Gamma^N$, este valor asigna a cada jugador $i \in N$ el número real:

$$\Pi_i(N, \mathcal{B}, v) = \sum_{\substack{K \ni k \\ K \subseteq M}} \sum_{\substack{S \ni i \\ S \subseteq B_k}} \frac{(s-1)!(b_k - s)!}{2^{m-1} b_k!} \left[v(Q_K \cup S) - v(Q_K \cup S \setminus \{i\}) \right] \tag{2.1}$$

donde $B_k \in \mathcal{B}$ es el bloque que contiene a i $(i \in B_k)$ y $Q_R = \bigcup_{r \in R} B_r$ con $R \subseteq M$.

El valor Π es muy interesante porque cumple los mismos axiomas que el valor de Owen para juegos con estructura coalicional, excepto el axioma de eficiencia. De hecho Alonso-Meijide y Fiestras-Janeiro caracterizan este valor sustituyendo el axioma de eficiencia por una versión del axioma de poder total. Además en [1] ellos proporcionan varias aplicaciones de dicho valor. Además, Π recibe el nombre de valor de Banzhaf simétrico porque $\Pi(N, \mathcal{B}, v) = Bz(N, v)$ cuando $\mathcal{B} = \{\{1\}, \ldots, \{n\}\}$.

Dado que $\Pi(N, \mathcal{B}, v)[B_k] = Bz_k(M, v^{\mathcal{B}})$ para todo $k \in M$ y el valor de Banzhaf satisface el axioma de jugador neutro (JN), entonces el valor de Banzhaf simétrico, Π, satisface el siguiente axioma:

Jugador neutro coalicional. *Un valor f en Γ^N satisface el axioma de jugador neutro coalicional si para todo $(N, \mathcal{B}, v) \in \Gamma^N$ y todo $k \in M$ tal que $v^{\mathcal{B}}(T \cup \{k\}) - v^{\mathcal{B}}(T) = v^{\mathcal{B}}(\{k\})$ para cualquier $T \subseteq M \setminus \{k\}$, se cumple que $f(N, \mathcal{B}, v)[B_k] = v(B_k)$.*

Notemos que el juego cociente del juego con estructura coalicional $(N, \mathcal{B}, v + w)$ es $(M, \mathcal{B}, v^{\mathcal{B}} + w^{\mathcal{B}})$. Esta linealidad, la ecuación $\Pi(N, \mathcal{B}, v)[B_k] = Bz_k(M, v^{\mathcal{B}})$, $\forall k \in M$, la igualdad $\delta^{\mathcal{B}}_{Q_T}(R) = \delta_T(R)$ para todo $R \in 2^M$ y todo $T \in 2^M \setminus \emptyset$, más el hecho de que $Bz_k(M, v^{\mathcal{B}})$ sólo depende de la suma de todas las contribuciones marginales de las coaliciones de bloques que contienen al bloque k, se obtiene que el valor de Banzhaf simétrico, Π, satisface el siguiente axioma.

Invarianza por transferencia coalicional. *Un valor f en Γ^N satisface el axioma de invarianza por transferencia coalicional si para todo $(N, \mathcal{B}, v) \in \Gamma^N$, para todo $\alpha \in \mathbb{R}$ y todo $K, R \in 2^M \setminus \emptyset$, se cumple que $f(N, \mathcal{B}, v)[B_l] = f(N, \mathcal{B}, v + \alpha(\delta_{Q_K} - \delta_{Q_R}))[B_l], \forall l \in K \cap R$.*

Observación 2.1. Sean $K, R \in 2^M \setminus \emptyset$. Si $v' = v + \alpha(\delta_{Q_K} - \delta_{Q_R})$, entonces

1. $v'(Q_K) = v(Q_K) + \alpha$ y $v'(Q_R) = v(Q_R) - \alpha$.
2. $v'(S) = v(S)$ para todo $S \neq Q_K, Q_R$.
3. $\sum_{H \subseteq M \setminus \{l\}} \Delta_l v'^{\mathcal{B}}(H) = \sum_{S \subseteq M \setminus \{l\}} \Delta_l v^{\mathcal{B}}(H)$ para todo $l \in K \cap R$, donde $\Delta_l v^{\mathcal{B}}(H) = v^{\mathcal{B}}(H \cup \{l\}) - v^{\mathcal{B}}(H)$, para todo $l \in M$ y todo $H \subseteq M \setminus \{l\}$.

Basados en las tres partes de la observación anterior, interpretaremos el nuevo axioma. Sea $(N, \mathcal{B}, v) \in \Gamma^N$, $\alpha \in \mathbb{R}$ y $K, R \in 2^M \setminus \emptyset$. Consideremos la suma de $\alpha(\delta_{Q_K} - \delta_{Q_R})$

a v. Entonces, la parte 1 de la observación dice que el valor de la coalición Q_K cambia en α y el de Q_R en $-\alpha$. La parte 2 de la observación dice que el valor de una coalición diferente a Q_K o a Q_R no cambia. Además, la parte 3 de la observación dice que la suma de las contribuciones marginales de un bloque en $K \cap R$ no cambia. Como resultado, podemos esperar que el pago total resultante para dicho bloque no cambie.

2.3. Caracterización

En esta sección proporcionamos una nueva caracterización del valor de Banzhaf simétrico por medio de los axiomas de jugador neutro coalicional, invarianza por transferencia coalicional y la siguiente modificación del axioma de contribuciones balanceadas.

Contribuciones balanceadas intracoalicionales. *Un valor f en Γ^N satisface el axioma de contribuciones balanceadas intracoalicionales si para todo $(N,\mathcal{B},v)$, para todo $l \in M$ y todo $\{i,j\} \subseteq B_l$ se cumple que*

$$f_i(N,\mathcal{B},v) - f_i(N \setminus j, \mathcal{B}_{-j}, v) = f_j(N,\mathcal{B},v) - f_j(N \setminus i, \mathcal{B}_{-i}, v).$$

Este axioma establece que el efecto que tiene el jugador i en el pago de j es el mismo que tiene j en el pago de i, si ambos pertenecen al mismo bloque.

Con ello, obtenemos el siguiente teorema

Teorema 2.2. *El único valor definido en Γ^N que satisface los axiomas de jugador neutro coalicional, invarianza por transferencia coalicional y contribuciones balanceadas intracoalicional es el valor de Banzhaf simétrico.*

Demostración. **Existencia.** En la sección (2.2) dijimos que el valor Π satisface jugador neutro coalicional y invarianza por transferencia coalicional. De los resultados de Myerson [32] y de que el valor Π se escribe como

$$\Pi_i(N,\mathcal{B},v) = \frac{1}{2^{m-1}} \sum_{\substack{K \ni k \\ K \subseteq M}} Sh_i(B_k, v_{Q_K}) \quad \forall i \in N,$$

donde $v_{Q_K}(S) = v(Q_K \cup S) - v(Q_K)$ para todo $S \subseteq B_k$, deducimos que el valor Π satisface contribuciones balanceadas intracoalicionales.

Unicidad. Sea $(N,\mathcal{B},v) \in \Gamma^N$ un juego con estructura coalicional, f un valor en Γ^N satisfaciendo los axiomas enumerados en el Teorema (2.2) y $q = (q_S)_{S \in 2^N} \in \mathbb{R}^{|2^N|}$ tal que $q_\emptyset = 0$. Primero, probaremos que $f(N,\mathcal{B},v)[B_k] = \Pi(N,\mathcal{B},v)[B_k]$ para todo $k \in M$. Para ello, definimos un valor φ^q en G^M tal que para todo $(M,w) \in G^M$ y todo $k \in M$, $\varphi^q_k(M,w) = f(N,\mathcal{B},\overline{w})[B_k]$, donde para todo $S \subseteq N$,

$$\overline{w}(S) = \begin{cases} w(T) & \text{si } S = Q_T \text{ con } T \subseteq M, \\ q_S & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

Como f es un valor en Γ^N, entonces φ^q es un valor en G^M.

Ahora, probaremos que φ^q satisface el axioma de jugador neutro (JN) e invarianza por transferencia fuerte en G^M.

Jugador neutro. Sea $k \in M$ tal que tal que $v^{\mathcal{B}}(T \cup \{k\}) - v^{\mathcal{B}}(T) = v^{\mathcal{B}}(\{k\})$ para cualquier $T \subseteq M \setminus \{k\}$. Ya que el juego cociente del juego con estructura coalicional $(N, \mathcal{B}, \overline{w})$ es precisamente (M, w) y f satisface JNC, $\varphi^q_k(M, w) = f(N, \mathcal{B}, \overline{w})[B_k] = \overline{w}(B_k) = w(\{k\})$. Esto implica que φ^q satisface JN en G^M.

Invarianza por transferencia fuerte. Sea $\alpha \in \mathbb{R}$ y $k \in M$ tal que $k \in K_1 \cap K_2$ con $K_1, K_2 \subseteq M$. Como el juego cooperativo $\overline{w + \alpha(\delta_{K_1} - \delta_{K_2})} \in G^N$ coincide con el juego cooperativo $\overline{w} + \alpha(\delta_{Q_{K_1}} - \delta_{Q_{K_2}}) \in G^N$ se tiene que

$$\varphi^q_k(M, w + \alpha(\delta_{Q_{K_1}} - \delta_{Q_{K_2}})) = f(N, \mathcal{B}, \overline{w} + \alpha(\delta_{Q_{K_1}} - \delta_{Q_{K_2}})[B_k].$$

Ya que $k \in K_1 \cap K_2$ y f satisface invarianza por transferencia coalicional, entonces

$$\varphi^q_k(M, w + \alpha(\delta_{Q_{K_1}} - \delta_{Q_{K_2}})) = f(N, \mathcal{B}, \overline{w})[B_k] = \varphi^q_k(M, w),$$

lo cual implica que φ^q satisface invarianza por transferencia fuerte.
Béal et al. [5] (ver Teorema 1.4) prueban que el valor de Banzhaf es el único valor en G^M que satisface invarianza por transferencia fuerte y jugador neutro. Luego, $\varphi^q = Bz$ en G^M.

Consideremos q tal que $q_S = v(S)$ para toda $S \in 2^N$. Ahora es muy fácil concluir que

$$Bz_k(M, v^{\mathcal{B}}) = f(N, \mathcal{B}, v)[B_k] \quad \forall k \in M. \tag{2.2}$$

De (2.2) y de que $\Pi(N, \mathcal{B}, v)[B_k] = Bz_k(M, v^{\mathcal{B}})$ para todo $k \in M$, concluimos que

$$f(N, \mathcal{B}, v)[B_k] = \Pi(N, \mathcal{B}, v)[B_k]. \tag{2.3}$$

Sea $k \in M$. Ahora probaremos que $f_i(N, \mathcal{B}, v) = \Pi_i(N, \mathcal{B}, v)$ para todo $i \in B_k$, por inducción en el número de elementos en B_k. Si $B_k = \{j\}$, entonces la igualdad (2.3) implica que $f_j(N, \mathcal{B}, v) = \Pi_j(N, \mathcal{B}, v)$. Supongamos que $b_k \geq 2$. Por CBI para cada $\{i, j\} \subseteq B_k$ se cumple

$$f_i(N, \mathcal{B}, v) - f_i(N \setminus j, \mathcal{B}_{-j}, v) = f_j(N, \mathcal{B}, v) - f_j(N \setminus i, \mathcal{B}_{-i}, v). \tag{2.4}$$

Por hipótesis de inducción, $f_i(N \setminus j, \mathcal{B}_{-j}, v) = \Pi_i(N \setminus j, \mathcal{B}_{-j}, v)$ y $f_j(N \setminus i, \mathcal{B}_{-i}, v) = \Pi_j(N \setminus j, \mathcal{B}_{-j}, v)$. Ahora, usando (2.4) obtenemos que $f_i(N, \mathcal{B}, v) - f_j(N, \mathcal{B}, v) = \Pi_i(N \setminus j, \mathcal{B}_{-j}, v) - \Pi_j(N \setminus i, \mathcal{B}_{-i}, v)$. Esto implica que

$$f_i(N, \mathcal{B}, v) - f_j(N, \mathcal{B}, v) = \Pi_i(N, \mathcal{B}, v) - \Pi_j(N, \mathcal{B}, v).$$

Sumando sobre todo $j \in B_k$ en la igualdad anterior y usando (2.3), obtenemos $b_k f_i(N, \mathcal{B}, v) = b_k \Pi_i(N, \mathcal{B}, v)$. De esta igualdad y que $b_k \geq 2$ concluimos que $f_i(N, \mathcal{B}, v) = \Pi_i(N, \mathcal{B}, v)$ para todo $i \in B_k$. □

2.4. Conclusiones

En este capítulo estudiamos un valor para juegos con estructura coalicional, llamado valor de Banzhaf simétrico. Usamos el hecho de que en el valor de Banzhaf las contribuciones marginales de un jugador son ponderadas por $1/2^{n-1}$ para proponer el axioma de invarianza por transferencia coalicional. Esto nos permitió obtener una nueva caracterización del valor de Banzhaf simétrico.

CAPÍTULO 3

Una solución para un problema de distribución de costos conjuntos múltiples

En este capítulo trabajamos con un problema de distribución de costo múltiple con consumo sin rivalidad, donde el costo de los servicios depende de los agentes que lo requieran. Proponemos una solución basada en juegos cooperativos para encontrar un precio para cada servicio de acuerdo con la función de costo y la demanda de cada agente. También, usamos juegos cooperativos para encontrar cómo distribuir este precio, por servicio, entre los agentes que lo requieran. Mostramos dos caracterizaciones de la solución propuesta y algunas situaciones donde nuestro modelo puede ser aplicado.

3.1. Introducción

En general, en un problema de distribución de costo, hay un conjunto de agentes, N, que requieren diferentes cantidades de m diferentes bienes, M. Así, cada agente tiene asociado un vector de demanda $M_i \in \mathbb{R}^n$ donde la j-ésima entrada corresponde a su demanda del bien $j \in M$. También, hay una función de costo, que asigna un número real a cada subconjunto de bienes que puede ser requerido. Esta clase de problemas surgen en diversas situaciones, por ejemplo, en la asignación de costos conjuntos y precios de transferencias [40], [44], distribución del costo de la inversión pública [28] y en mensajes de multidifusión [23]. Si los bienes son indivisibles, decimos que el problema de distribución de costo es *discreto*. En [29] Moulin estudió estas situaciones, comparando soluciones como el método de Shapley-Shubik [40] y el método serial [30]. Si los bienes son divisibles, el problema de distribución de costo es *continuo*. Para obtener más información acerca de estos problemas, consulte [31], [41] y [14].

En este capítulo estudiamos una versión específica de un problema de distribución de costo discreto. Primero, asumimos que cada agente requiere todos los servicios, los cuales son discretos. Segundo, el consumo de los servicios es sin rivalidad: esto significa que el proveedor de servicio garantiza la demanda de todos los agentes en cualquier servicio. También, asumimos que el costo de un conjunto de servicios depende de los agentes que lo requieran. Es decir, permitimos situaciones donde el costo del conjunto de servicios S no necesariamente es el mismo para los agentes en A como para los de B. Estamos considerando agentes distinguibles según la función de costo y por lo tanto, trabajamos con una clase más general de función de costo. Así, nuestro interés es proporcionar un método para asignar el costo total de satisfacer todas las demandas entre los agentes. Proponemos una solución basada en precios y usando juegos cooperativos: primero, usamos un juego cooperativo para encontrar el costo de cada servicio de acuerdo a la función de costo. Luego, usamos otro juego cooperativo para dividir el costo del servicio entre los agentes que lo requieren. Proporcionamos dos caracterizaciones de esta solución; en la primera, utilizamos versiones de propiedades bien conocidas de juegos cooperativos tales como simetría, eficiencia, nulidad local y agentes sustitutos local; en la segunda caracterización, usamos ideas de Myerson [32].

Consideremos la siguiente situación: un grupo de compra es una compañia compuesta por varias empresas pequeñas con personalidad jurídica que obtiene los beneficios de un gran consorcio y, sin embargo, las pequeñas empresas que la conforman no pierden su identidad legal y el uso de las ventajas de ser una pequeña empresa (por ejemplo, en el pago de impuestos). En general, la unión es sólo puntual, con el objetivo de adquirir una serie de bienes o servicios. Podemos asumir que existe una pequeña empresa tal que el proveedor de servicios hace un descuento adicional (esto debido a relaciones anteriores entre ellos) sobre el precio final si esta empresa pertenece al grupo de compra. Así, las otras empresas obtienen un beneficio si esta empresa se junta con ellas. Claramente, esta situación puede ser modelada usando la clase de funciones de costo introducida en el párrafo anterior (por la distinción entre los agentes). Estamos interesados en distribuir el costo total de la compra entre las pequeñas empresas del grupo de compra.

Otra situación donde este modelo puede ser aplicado es como sigue. En cierta parte de la ciudad, hay algunas zonas residenciales donde la recolección de basura por parte del gobierno municipal sólo se realiza un día a la semana, causando insatisfacción entre sus habitantes. Es posible contratar un servicio privado adicional de recolección de basura. La compañia que provee el servicio puede hacer un recorrido dentro de cada zona residencial cualquier día de lunes a jueves. El costo de este servicio depende unicamente de que días es proveído y del tamaño de las zonas residenciales. Si las zonas residenciales están cerca una de la otra y ellas deciden contratar el servicio todos los días, podemos considerar este problema como un problema de distribución de costo conjunto múltiple (nuevamente, por la distinción de los agentes, zonas residenciales, y porque los agentes pueden tener diferentes tamaños). Es necesario proporcionar una forma de distribuir el costo total de contratar el servicio privado entre las zonas residenciales.

El capítulo está organizado de la siguiente manera: en la Sección 3.2 se muestran las definiciones y notación que utilizaremos en el resto del capítulo. En la Sección 3.3 presentamos nuestra solución y la principal caracterización. La Sección 3.4 tiene una caracterización adicional de la solución, y por último, damos algunas situaciones donde nuestro modelo puede aplicarse.

3.2. Notación y definiciones

Sean $N := \{1, \ldots, n\}$ un conjunto finito de agentes y $M := \{1, \ldots, m\}$ un conjunto finito de servicios indivisibles. Un *vector de demandas* es un vector $(R_1, \ldots, R_m) \in (2^N)^M = \underbrace{2^N \times 2^N \times \ldots \times 2^N}_{|M|\text{- veces}}$, donde las entradas del vector están indexadas de acuerdo con los elementos de M y la entrada j-ésima es $R_j \subseteq N$, el conjunto de agentes que requieren el servicio j. Para todo $S \subseteq N$, denotamos por $\overline{S}$ el vector de demandas cuyas coordenadas son todas iguales a S, es decir, $\overline{S} = (S, \ldots, S)$. Una *función de costo múltiple* es una aplicación $c : (2^N)^M \to \mathbb{R}$, donde $c(\emptyset, \ldots, \emptyset) = 0$. Un *problema de distribución de costo múltiple*, o por simplicidad, un *problema*, es una terna (N, M, c) donde N es el conjunto de agentes, M es el conjunto de servicios y c es una función de costo múltiple.

Denotaremos por $\mathcal{C} = \{c \mid c : (2^N)^M \to \mathbb{R} \text{ con } c(\overline{\emptyset}) = 0\}$, al conjunto de funciones de costo múltiple y por $\mathcal{P}$ al conjunto de problemas de distribución de costo múltiple con N y M fijos. Dados $R, Q \in (2^N)^M$ y $\emptyset \neq K \subset M$, (R_K, Q_{-K}) es el vector de demandas cuya j-ésima coordenada es R_j si $j \in K$ y Q_j si $j \in M \setminus K$. $R \cup Q$, $R \cap Q$ son los vectores de demandas cuya j-ésima coordenada es $(R \cup Q)_j = R_j \cup Q_j$ y $(R \cap Q)_j = R_j \cap Q_j$ respectivamente. Diremos que $R \subseteq Q$ si $R_j \subseteq Q_j$ para todo $j \in M$. Dado $R \in (2^N)^M$ y un agente $i \in N$, denotamos por $R_i^j := (R_1, \ldots, R_{j-1}, R_j \cup \{i\}, R_{j+1}, \ldots, R_m)$ al vector de demandas donde el agente i requiere adicionalmente el servicio j de acuerdo a R. En este capítulo usaremos la notación $|S|$ para referirnos a la cardinalidad del conjunto $S \subseteq N$.

Ejemplo 3. *Supongamos que un grupo de compra está formado por tres empresas ($n = 3$) interesadas en adquirir dos servicios ($m = 2$). Supongamos además que la función de costo múltiple está dada por,*

$$c(R_1, R_2) = \begin{cases} 36|R_2| + 0{,}9(6|R_1| + 12|R_2|)^{0,5}, & si\ 1 \in R_1 \cup R_2 \\ 40|R_2| + (6|R_1| + 12|R_2|)^{0,5}, & si\ 1 \notin R_1 \cup R_2. \end{cases}$$

De acuerdo a esta función de costo, es benéfico para el grupo de compra que la empresa 1 esté en el grupo. Notemos, por ejemplo, que $c(\{2, 3\}, \emptyset) > c(\{1, 3\}, \emptyset)$. Además, la función de costo es cóncava, lo cual implica que la formación del grupo de compra es garantizada. Ahora, el problema es cómo dividir el costo $c(N, N)$ entre las empresas.

Una *solución para un problema de distribución de costo múltiple (o simplemente, una solución)* es una aplicación $\phi : \mathcal{P} \to \mathbb{R}^{n \times m}$, donde $\phi_{ij}(N, M, c)$ representa el monto que debe pagar el agente i por recibir el servicio j de acuerdo a la función de costo múltiple c.

Dados un problema (N, M, c), $K \subseteq M$, $j \in M$ y $S \subseteq N$, definimos el vector de demandas $R^{S,(j,K)}$ como:

$$R_l^{S,(j,K)} := \begin{cases} N & \text{si } l \in K \setminus \{j\}, \\ S & \text{si } l = j, \\ \emptyset & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

De acuerdo al vector de demandas $R^{S,(j,K)}$, todos los agentes requieren los servicios en $K \backslash \{j\}$, el servicio j es requerido sólo por los agentes en S y ningún agente requiere cualquier otro servicio. También, para cada $R \in (2^N)^M$, definimos

$$A(R) := \{j \in M | R_j \neq \emptyset\}. \tag{3.1}$$

Este conjunto está formado por los servicios que son demandados, por almenos, un agente en R.

3.3. Caracterización

En esta sección se muestra una caracterización axiomática de una solución para un problema de distribución de costo múltiple.

Aditividad. *Una solución $\phi : \mathcal{P} \to \mathbb{R}^{n\times m}$ satisface el axioma de aditividad si para todo par de problemas $(N, M, c_1), (N, M, c_2) \in \mathcal{P}$,*

$$\phi(N, M, c_1 + c_2) = \phi(N, M, c_1) + \phi(N, M, c_2).$$

Esta es una propiedad bien conocida en teoría de juegos cooperativos y problemas de distribución de costos: la solución debe ser aditiva en la función de costo.

Eficiencia. *Una solución $\phi : \mathcal{P} \to \mathbb{R}^{n\times m}$ satisface el axioma de eficiencia si para todo problema $(N, M, c) \in \mathcal{P}$,*

$$\sum_{j\in M} \sum_{i\in N} \phi_{ij}(N, M, c) = c(N, \ldots, N).$$

Como estamos considerando que cada agente requiere de todo el conjunto de servicios, una solución eficiente asigna el costo total $c(N, \ldots, N)$ entre todos los agentes.

Nulidad local. *Una solución $\phi : \mathcal{P} \to \mathbb{R}^{n\times m}$ satisface el axioma de nulidad local si para todo problema $(N, M, c) \in \mathcal{P}$, $i \in N$ y $j \in M$ donde $c(R_i^j) = c(R)$, para todo $R \in (2^N)^M$ tal que $i \notin R_j$,*

$$\phi_{ij}(N, M, c) = 0.$$

De acuerdo al axioma anterior, si un agente $i \in N$ no contribuye al costo de un servicio $j \in M$, entonces él no debe pagar por ese servicio.

Agentes localmente sustitutos. *Una solución $\phi : \mathcal{P} \to \mathbb{R}^{n\times m}$ satisface el axioma de agentes localmente sustitutos local si para todo problema $(N, M, c) \in \mathcal{P}$, $i, k \in N$ y $j \in M$ donde $c(R_i^j) = c(R_k^j)$, para todo $R \in (2^N)^M$ tal que $i, k \notin R_j$,*

$$\phi_{ij}(N, M, c) = \phi_{kj}(N, M, c).$$

Este axioma establece que si dos agentes son indistinguibles en su contribución al costo de un servicio, entonces sus pagos deben ser iguales en ese servicio.

En teoría de juegos cooperativos y problemas de costo es muy útil definir una solución en una base del espacio de juegos o del espacio de las funciones de costo. Para $R \in (2^N)^M \setminus \{\bar{\emptyset}\}$, definimos la función de costo:

$$c_R(Q) = \begin{cases} 1 & \text{si } Q \supseteq R, \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases} \tag{3.2}$$

donde $Q \in (2^N)^M$. La función c_R la llamaremos *función de costo de unanimidad.*

Lema 3. *Para todo $c \in \mathcal{C}$,*

$$c = \sum_{R \in (2^N)^M \setminus \bar{\emptyset}} \lambda_R c_R$$

donde, $\forall R \in (2^N)^M \setminus \bar{\emptyset}$,

$$\lambda_R = \sum_{Q \subseteq R} (-1)^{\sum_{j \in M} |R_j| - \sum_{j \in M} |Q_j|} c(Q).$$

Demostración.

Sea $P \in (2^N)^M$. Entonces

$$\begin{aligned}
\sum_{R \in (2^N)^M \setminus \bar{\emptyset}} \lambda_R c_R(P) &= \sum_{R \subseteq P} \lambda_R \\
&= \sum_{R \subseteq P} \left(\sum_{Q \subseteq R} (-1)^{\sum_{j \in M} |R_j| - \sum_{j \in M} |Q_j|} c(Q) \right) \\
&= \sum_{Q \subseteq P} \left(\sum_{\{R | Q \subseteq R \subseteq P\}} (-1)^{\sum_{j \in M} |R_j| - \sum_{j \in M} |Q_j|} \right) c(Q) \\
&= \sum_{Q \subseteq P} \left(\prod_{j=1}^{m} \sum_{\{R | Q \subseteq R \subseteq P, R_l = Q_l, \forall l \neq j\}} (-1)^{\sum_{j \in M} |R_j| - \sum_{j \in M} |Q_j|} \right) c(Q) \\
&= \sum_{Q \subseteq P} \left(\prod_{j=1}^{m} \sum_{h=|Q_j|}^{|P_j|} \binom{|P_j| - |Q_j|}{h - |Q_j|} (-1)^{h - |Q_j|} \right) c(Q) \\
&= c(P).
\end{aligned}$$

□

Ahora, estamos listos para enunciar el teorema principal de este capítulo:

Teorema 3.1. *Existe una única solución $\phi : \mathcal{P} \to \mathbb{R}^{n \times m}$ que satisface los axiomas de aditividad, eficiencia, nulidad local y agentes localmente sustitutos. Dado un problema $(N, M, c) \in \mathcal{P}$ y $j \in M$, esta solución asigna a cada jugador $i \in N$ el número real:*

$$\psi_{ij}(N, M, c) = \sum_{K \ni j} \sum_{S \ni i} \alpha_{|K||S|} \left[c(R^{S,(j,K)}) - c(R^{S \setminus \{i\},(j,K)}) \right], \tag{3.3}$$

donde $\alpha_{|K||S|} = \frac{(|K|-1)!(m-|K|)!(|S|-1)!(n-|S|)!}{m!n!}$.

Demostración.

Primero, probaremos la existencia de la solución. Para ello basta comprobar que la solución 3.3 satisface los cuatro axiomas mencionados en el enunciado del teorema. Aditividad, nulidad local y agentes localmente sustitutos son fáciles de verificar, por lo que omitiremos su prueba. Entonces, probamos que (3.3) satisface eficiencia. Podemos reescribir nuestra solución como:

$$\psi_{ij}(N,M,c)=\sum_{K\ni j}\frac{(|K|-1)!(m-|K|)!}{m!}Sh_i(N,w_K^j),$$

donde (N,w_K^j) es un juego (ver Definición 1) tal que, para cada $K\subseteq M$, $S\subseteq N$ y $j\in M$, está definido de la siguiente manera:

$$w_K^j(S)=\begin{cases}c(R^{S,(j,K)})-c(\overline{N}_{K\setminus\{j\}},\overline{\emptyset}_{-K\setminus\{j\}}) & \text{si } j\in K\\ \\ 0 & \text{en otro caso.}\end{cases} \tag{3.4}$$

Para todo $S\subseteq N$, $w_K^j(S)$ indica el cambio en el costo cuando el servicio j es requerido por los agentes en S, en comparación cuando nadie requiere éste (los otros servicios son requeridos de acuerdo a $R^{\emptyset,(j,K)}$). Ahora, sumando sobre todo $i\in N$, obtenemos

$$\sum_{i\in N}\psi_{ij}(N,M,c)=Sh_j(M,v)$$

con (M,v) el juego definido por

$$v(K)=c(\overline{N}_K,\overline{\emptyset}_{-K})\quad \forall K\subseteq M. \tag{3.5}$$

Luego, $\sum_{j\in M}\sum_{i\in N}\psi_{ij}(N,M,c)=\sum_{j\in M}Sh_j(M,v)=c(\overline{N})$.

Para probar la unicidad, veremos que la solución está determinada de manera única en cada una de las funciones c_R. Por el Lema 3.2, si $c\in\mathcal{C}$, existen constantes λ_R, $\overline{\emptyset}\neq R\in(2^N)^M$ tal que

$$c=\sum_{\overline{\emptyset}\neq R}\lambda_R c_R.$$

Sea ψ una solución que satisface los axiomas que se mencionan en el Teorema 3.1. Usando el axioma de aditividad obtenemos

$$\psi_{ij}(N,M,c)=\sum_{\overline{\emptyset}\neq R}\psi_{ij}(N,M,\lambda_R c_R).$$

Sea $R\neq\overline{\emptyset}$ un vector de demandas. Como $c_R(Q_i^j)-c_R(Q)=0$, $\forall i\in N\setminus R_j$ y para todo $Q\in(2^N)^M$ tal que $i\notin Q_j$, por el axioma de nulidad local se tiene que $\psi_{ij}(N,M,\lambda_R c_R)=0$, $\forall i\in N\setminus R_j$. Además, $c_R(Q_i^j)=c_R(Q_k^j)$, para todo $Q\in(2^N)^M$ tal que $i,k\notin Q_j$ y todo $i,k\in R_j$. Entonces por los axiomas de agentes sustitutos local y eficiencia se tiene que

$$\psi_{ij}(N,M,\lambda_R c_R)=\begin{cases}\frac{\lambda_R}{|R_j||A(R)|} & \text{si } i\in R_j\\ \\ 0 & \text{en otro caso.}\end{cases}$$

Dado que $R \neq \overline{\emptyset}$ fue elegido arbitrariamente, tenemos determinada de forma única la solución en cada función de costo de unanimidad. $\square$

Notemos que $\psi_{ij}(N, M, c) = Sh_i(N, \nu_j)$, con ψ como en (3.3) y (N, ν_j) el juego con función característica

$$\nu_j = \sum_{K \ni j} \frac{(|K|-1)!(m-|K|)!}{m!} w_K^j,$$

y (N, w_K^j) el juego definido en (3.4).

De acuerdo con la solución (3.3), primero, calculamos el valor de Shapley del juego (M, v) construido en (3.5), para obtener un precio por cada servicio. Después, distribuimos este precio entre los agentes de acuerdo al valor de Shapley del juego (N, v_j) correspondiente.

Hay otra interpretación de la solución (3.3) por medio de un enfoque probabilístico. En un problema (N, M, c) hay n agentes requiriendo el servicio j. Para obtener el pago del agente i por el servicio j consideremos el siguiente procedimiento: elegimos un orden σ de M y un orden θ de N, con una distribución uniforme sobre los $m!$ y los $n!$ órdenes posibles, respectivamente. Cobramos los servicios uno por uno, de acuerdo al orden σ, y no cobramos otro servicio hasta que le hemos cobrado a todos los agentes por el servicio actual. Los agentes pagan por un servicio uno por uno de acuerdo al orden θ. El pago del agente i por el servicio j dado por los órdenes σ y θ será el costo marginal cuando se incorpora a los agentes que lo preceden en la demanda del servicio j,

$$c\left(R^{(H_i^\theta \cup \{i\}),(j,F_j^\sigma)}\right) - c\left(R^{H_i^\theta,(j,F_j^\sigma)}\right)$$

donde H_i^θ es el conjunto de agentes que preceden a i en el orden θ y F_j^σ es el conjunto de servicios que preceden a j en el orden σ. El pago esperado para el agente i bajo este procedimiento es precisamente la solución 3.3.

Observación 3.2.

1. Si $m = 1$, entonces la solución (3.3) es equivalente al valor de Shapley del juego (N, c). Esta es la solución recomendada en [29] cuando los bienes son indivisibles y cada agente requiere una unidad como máximo.

2. La solución (3.3) puede ser adaptada en el contexto de juegos de elección múltiple (N, v', M'), donde $M' = (m_1, \ldots, m_n)$, con $m_i = m'$ para cada $i \in N$, denota los niveles de actividad para todos los agentes. $v' : Q_1 \times \cdots \times Q_n \to \mathbb{R}$, con $Q_i = \{0, \ldots, m_i\}$ para cada $i \in N$ y $v'(0, \ldots, 0) = 0$. Para mayores detalles respecto a juegos de elección múltiple consulte [7] y [25]. Note que los agentes pueden participar en el nivel m' como máximo. Así, para este tipo de juegos de elección múltiple las ideas detrás de la solución (3.3) producen el siguiente valor:

$$\Psi_{ij}(N, v', M') = \sum_{x_{-i} \in \{0,m\}^{n-1}} \frac{s_m!(n-s_m-1)!}{n!} [v'(x_{-i}, j) - v'(x_{-i}, 0)] \qquad (3.6)$$

para cada $i \in N$, $j \in Q_i$, donde $s_m = |\{i \in N \mid x_i = m\}|$ para un $x_{-i} \in \{0, m\}^{n-1} \subseteq Q_1 \times \cdots \times Q_{n-1}$. Es decir, (3.3) puede ser considerado como un valor para una clase específica de juegos de elección múltiple que coincide con (3.6). El valor (3.6) en el contexto de juegos de elección múltiple es propuesto en [16] y también es estudiado como un semivalor en [26].

Ejemplo 4. *(Continuación del ejemplo (3)) Si aplicamos la solución (3.3) al ejemplo 3 obtenemos*

$$\begin{array}{ll} \psi_{11}(N,M,c) = 0{,}7395 & \psi_{12}(N,M,c) = 35{,}224 \\ \psi_{21}(N,M,c) = 0{,}88734 & \psi_{22}(N,M,c) = 38{,}434 \\ \psi_{31}(N,M,c) = 0{,}88734 & \psi_{32}(N,M,c) = 38{,}434. \end{array}$$

Notemos que la compañía 1 debe pagar una cantidada menor que la otras compañías por cada bien. Esta situación refleja el comportamineto de la función de costo múltiple, y además, el hecho que las compañias 2 y 3 son sustitutos locales.

3.4. Una caracterización alternativa

En esta sección usamos una versión modificada de la propiedad de contribuciones balanceadas introducida por Myerson [32] para dar una caracterzación alternativa a la solución (3.3).

Dados un problema (M,N,c), $i \in N$ y $j \in M$ definimos los siguientes problemas:

- *El problema restringido* $(N \setminus \{i\}, M, c^i_j)$, donde para todo $R \in (2^{N\setminus\{i\}})^M$

  $$c^i_j(R) = \begin{cases} c\left(R \cup (\overline{\{i\}}_{L_{ij}(R)}, \overline{\emptyset}_{-L_{ij}(R)})\right) & \text{si } L_{ij}(R) \neq \emptyset \\ c(R) & \text{en otro caso,} \end{cases}$$

  con $L_{ij}(R) = \{l \in M \setminus \{j\} \mid R_l = N \setminus \{i\}\}$.

- El problema $(N, M \setminus \{j\}, c_j)$, donde $c_j : (2^N)^{M\setminus\{j\}} \to \mathbb{R}$ se define como

  $$c_j(R_1,\ldots,R_{j-1},R_{j+1},\ldots,R_m) = c(R_1,\ldots,R_{j-1},\emptyset,R_{j+1},\ldots,R_m).$$

En el problema $(N \setminus \{i\}, M, c^i_j)$ el costo de cualquier servicio distinto a $j \in M$ que sea requerido por los agentes en $N\setminus\{i\}$, será el costo de proveer el servicio a todo N. El problema $(N, M \setminus \{j\}, c_j)$ es la restricción del problema (N,M,c) a los servicios en $M \setminus \{j\}$.

Contribuciones balanceadas totales. *Una solución $\phi : \mathcal{P} \to \mathbb{R}^{n\times m}$ satisface el axioma de contribuciones balanceadas totales si para todo problema $(M,N,c) \in \mathcal{P}$ y cualesquiera $j,l \in M$ con $j \neq l$,*

$$\sum_{i\in N} \phi_{ij}(N,M,c) - \sum_{i\in N} \phi_{ij}(N,M\setminus\{l\},c_l) = \sum_{i\in N} \phi_{il}(N,M,c) - \sum_{i\in N} \phi_{il}(N,M\setminus\{j\},c_j).$$

Aquí, el lado izquierdo de la ecuación se refiere a la contribución del servicio l al precio de j, cuando cambiamos de tener una demanda nula del servicio l a tener una demanda total. La idea es similar para el lado derecho.

Contribuciones balanceadas restringidas. *Una solución $\phi : \mathcal{P} \to \mathbb{R}^{n\times m}$ satisface el axioma de contribuciones balanceadas restringidas si para todo problema $(N, M, c) \in \mathcal{P}$, cualesquiera $i, k \in N$ con $i \neq k$ y todo $j \in M$,*

$$\phi_{ij}(N, M, c) - \phi_{ij}(N \setminus \{k\}, M, c_j^k) = \phi_{kj}(N, M, c) - \phi_{kj}(N \setminus \{i\}, M, c_j^i).$$

El axioma anterior pide una regla de justicia en el pago por cada servicio, esto es, el efecto que tiene el agente i en el pago que hace k por un servicio es el mismo que tiene k en el pago que hace i del mismo servicio.

Observación 3.3.

1. Para $i, k \in N$ con $i \neq k$ y $j \in M$,

$$\begin{aligned}\psi_{ij}(N \setminus \{k\}, M, c_j^k) &= \sum_{\substack{L\subseteq M\\ L\ni j}} \sum_{\substack{S\subseteq N\setminus\{k\}\\ S\ni i}} \alpha^*_{|L||S|} \left[c_j^k(R^{S,(j,L)}) - c_j^k(R^{S\setminus\{i\},(j,L)})\right]\\ &= \sum_{L\ni j} \frac{(|L|-1)!(m-|L|)!}{m!} Sh_i(N\setminus\{k\}, w_L^j),\end{aligned}$$

con $\alpha^*_{|L||S|} = \frac{(|L|-1)!(m-|L|)!(|S|-1)!(n-1-|S|)!}{m!(n-1)!}$.

2. Para $j, l \in M$ con $j \neq l$,

$$\sum_{i\in N} \psi_{ij}(N, M\setminus\{l\}, c_l) = \sum_{i\in N} \sum_{\substack{L\subseteq M\setminus\{l\}\\ L\ni j}} \sum_{\substack{S\subseteq N\\ S\ni i}} \overline{\alpha}_{|L||S|} \left[c_l(R^{S,(j,L)}) - c_l(R^{S\setminus\{i\},(j,L)})\right]$$

$$= \sum_{\substack{L\subseteq M\setminus\{l\}\\ L\ni j}} \frac{(|L|-1)!(m-1-|L|)!}{(m-1)!} \left[c(\overline{N}_L, \overline{\emptyset}_{-L}) - c(\overline{N}_{L\setminus\{j\}}, \overline{\emptyset}_{-(L\setminus\{j\})})\right]$$

$$= \mathrm{Sh}_j(M\setminus\{l\}, v), \text{ con } \overline{\alpha}_{|L||S|} = \frac{(|L|-1)!(m-1-|L|)!(|S|-1)!(n-|S|)!}{(m-1)!n!}.$$

La siguiente proposición muestra que la solución (3.3) satisface contribuciones balanceadas totales y contribuciones balanceadas restringidas.

Proposición 3.4. *La solución (3.3) satisface los axiomas de contribuciones balanceadas totales y contribuciones balanceadas restringidas.*

Demostración.

Primero probaremos que la solución (3.3) satisface contribuciones balanceadas totales. Sea (N, M, c) un problema de costo múltiple y $j, l \in M$ con $j \neq l$. Sabemos que $\sum_{i\in N} \psi_{ij}(N, M, c) = Sh_j(M, v)$ y por la Observación 3.3 $\sum_{i\in N} \psi_{ij}(N, M\setminus\{l\}, c_l) = Sh_j(M\setminus\{l\}, v)$. Así, por el resultado de Myerson [32], obtenemos

$$\sum_{i\in N} \psi_{ij}(N, M, c) - \sum_{i\in N} \psi_{ij}(N, M\setminus\{l\}, c_l) = \sum_{i\in N} \psi_{il}(N, M, c) - \sum_{i\in N} \psi_{il}(N, M\setminus\{j\}, c_j).$$

Ahora, probaremos que la solución (3.3) satisface contribuciones balanceadas restringidas. Sea $j \in M$ y $i, k \in N$ con $i \neq k$. Ahora, de la Observación 3.3, obtenemos

$$\begin{aligned}
\psi_{ij}(N,M,c) - \psi_{ij}(N\setminus\{k\},M,c_j^k) &= \sum_{L\ni j}\gamma_{|L|}Sh_i(N,w_L^j) - \sum_{L\ni j}\gamma_{|L|}Sh_i(N\setminus\{k\},w_L^j)\\
&= \sum_{L\ni j}\gamma_{|L|}\left(Sh_i(N,w_L^j) - Sh_i(N\setminus\{k\},w_L^j)\right)\\
&= \sum_{L\ni j}\gamma_{|L|}\left(Sh_k(N,w_L^j) - Sh_k(N\setminus\{i\},w_L^j)\right)\\
&= \sum_{L\ni j}\gamma_{|L|}Sh_k(N,w_L^j) - \sum_{L\ni j}\gamma_{|L|}Sh_k(N\setminus\{i\},w_L^j)\\
&= \psi_{kj}(N,M,c) - \psi_{kj}(N\setminus\{i\},M,c_j^i),
\end{aligned}$$

donde $\gamma_{|L|} = \frac{(|L|-1)!(m-|L|)!}{m!}$. Con lo cual la prueba termina. □

Si dos soluciones a un problema de costo múltiple satisfacen contribuciones balanceadas totales y contribuciones balanceadas restringidas, entonces el monto total a pagar por un servicio es igual en ambas soluciones.

Proposición 3.5. *Si $\phi^1, \phi^2 : \mathcal{P} \to \mathbb{R}^{n\times m}$ son dos soluciones eficientes que satisfacen contribuciones balanceadas totales y contribuciones balanceadas restringidas, entonces $\sum_{i\in N}\phi_{ij}^1(N,M,c) = \sum_{i\in N}\phi_{ij}^2(N,M,c)$ para todo problema $(N,M,c) \in \mathcal{P}$ y cualquier $j \in M$.*

Demostración.

Sean $\phi^1, \phi^2 : \mathcal{P} \to \mathbb{R}^{n\times m}$ dos soluciones que satisfacen contribuciones balanceadas totales y contribuciones balanceadas restringidas. Probaremos que para cualquier problema $(N,M,c) \in \mathcal{P}$ y cualquier $j \in M$, $\sum_{i\in N}\phi_{ij}^1(N,M,c) = \sum_{i\in N}\phi_{ij}^2(N,M,c)$. Lo haremos por inducción en el número de servicios en M.

Cuando $|M| = 1$, tenemos que $c : 2^N \to \mathbb{R}$, donde c_j^i es la restricción de c a $N\setminus\{i\}$. El axioma de contribuciones balanceadas restringidas se reduce a la propiedad de contribuciones balanceadas. Del resultado de Myerson [32] tenemos $\phi^1(N,M,c) = \phi^2(N,M,c) = Sh(N,c)$ porque estas soluciones eficientes satisfacen contribuciones balanceadas restringidas. De donde $\sum_{i\in N}\phi_{ij}^1(N,M,c) = \sum_{i\in N}\phi_{ij}^2(N,M,c)$.

Ahora, consideremos $m \geq 2$. Supongamos $\sum_{i\in N}\phi_{ij}^1(N,M,c) = \sum_{i\in N}\phi_{ij}^2(N,M,c)$ para todo problema $(N,M,c) \in \mathcal{P}$ con $|M| = m-1$ y cualquier $j \in M$. Sea $(N,M,c) \in \mathcal{P}$ un problema con $|M| = m$. Dado que ambas soluciones satisfacen contribuciones balanceadas totales, para $j, l \in M$ con $j \neq l$ tenemos

$$\begin{aligned}
\sum_{i\in N}\phi_{ij}^1(N,M,c) - \sum_{i\in N}\phi_{il}^1(N,M,c) &= \sum_{i\in N}\phi_{ij}^1(N,M\setminus\{l\},c_l) - \sum_{i\in N}\phi_{il}^1(N,M\setminus\{j\},c_j)\\
\sum_{i\in N}\phi_{ij}^2(N,M,c) - \sum_{i\in N}\phi_{il}^2(N,M,c) &= \sum_{i\in N}\phi_{ij}^2(N,M\setminus\{l\},c_l) - \sum_{i\in N}\phi_{il}^2(N,M\setminus\{j\},c_j).
\end{aligned}$$

Utilizando la hipótesis de inducción, obtenemos

$$\sum_{i\in N}\phi^1_{ij}(N,M,c)-\sum_{i\in N}\phi^1_{il}(N,M,c)=\sum_{i\in N}\phi^2_{ij}(N,M,c)-\sum_{i\in N}\phi^2_{il}(N,M,c).$$

Sumando sobre $l\in M\setminus\{j\}$ en la expresión anterior, tenemos

$$(m-1)\left(\sum_{i\in N}\phi^1_{ij}(N,M,c)-\sum_{i\in N}\phi^2_{ij}(N,M,c)\right)=\sum_{l\neq j}\sum_{i\in N}\phi^1_{il}(N,M,c)-\sum_{l\neq j}\sum_{i\in N}\phi^2_{il}(N,M,c)$$

y por eficiencia, la igualdad anterior implica

$$m\left(\sum_{i\in N}\phi^1_{ij}(N,M,c)-\sum_{i\in N}\phi^2_{ij}(N,M,c)\right)=c(\overline{N})-c(\overline{N}).$$

Dado que $m\geq 2$, $\sum_{i\in N}\phi^1_{ij}(N,M,c)=\sum_{i\in N}\phi^2_{ij}(N,M,c)$. Para cualquier $l\neq j$ la igualdad $\sum_{i\in N}\phi^1_{il}(N,M,c)=\sum_{i\in N}\phi^2_{il}(N,M,c)$ se demuestra de manera similar. Así, $\sum_{i\in N}\phi^1_{ij}(N,M,c)=\sum_{i\in N}\phi^2_{ij}(N,M,c)$ para todo problema $(N,M,c)\in\mathcal{P}$ con $|M|=m$ y cualquier $j\in M$. □

Teorema 3.6. *Una solución $\phi:\mathcal{P}\to\mathbb{R}^{n\times m}$ satisface los axiomas de eficiencia, contribuciones balanceadas totales y contribuciones balanceadas restringidas sí y sólo si es la solución (3.3).*

Demostración.

La existencia es una consecuencia de la Proposición 3.4. Para demostrar la unicidad supondremos que existen dos soluciones (ϕ^1 y ϕ^2) satisfaciendo eficiencia, contribuciones balanceadas totales y contribuciones balanceadas restringidas. Probaremos que $\phi^1=\phi^2$ usando inducción en el número de agentes en N.

Cuando $|N|=1$, $c:(\{\emptyset,\{1\}\})^M\to\mathbb{R}$ es equivalente al juego cooperativo (M,v) y $c(R)=v(A(R))$, con $A(R)$ como en (3.1), para todo $R\in(\{\emptyset,\{1\}\})^M$. En este caso el axioma de contribuciones balanceadas totales es equivalente al axioma de contribuciones balanceadas. Luego, del resultado de Myerson [32], obtenemos $\phi^1(N,M,c)=\phi^2(N,M,c)=Sh_j(M,v)$, ya que ambas soluciones eficientes satisfacen contribuciones balanceadas totales.

Sea $n\geq 2$. Supongamos que $\phi^1_{ij}(N,M,c)=\phi^2_{ij}(N,M,c)$ para todo problema de costo múltiple con $|N|=n-1$ y todo $j\in M$. Sean (N,M,c) un problema de costo múltiple con $|N|=n$, $j\in M$ y $i,k\in N$ con $i\neq k$. Como ambas soluciones satisfacen contribuciones balanceadas restringidas tenemos

$$\phi^1_{ij}(N,M,c)-\phi^1_{kj}(N,M,c)=\phi^1_{ij}(N\setminus\{k\},M,c^k_j)-\phi^1_{kj}(N\setminus\{i\},M,c^i_j)$$

$$\phi^2_{ij}(N,M,c)-\phi^2_{kj}(N,M,c)=\phi^2_{ij}(N\setminus\{k\},M,c^k_j)-\phi^2_{kj}(N\setminus\{i\},M,c^i_j).$$

Usando la hipótesis de inducción, tenemos

$$\phi^1_{ij}(N,M,c)-\phi^1_{kj}(N,M,c)=\phi^2_{ij}(N,M,c)-\phi^2_{kj}(N,M,c).$$

Sumando en la igualdad anterior sobre todo $k \in N \setminus \{i\}$ obtenemos

$$(n-1)\phi^1_{ij}(N,M,c) - \sum_{k\neq i} \phi^1_{kj}(N,M,c) = (n-1)\phi^2_{ij}(N,M,c) - \sum_{k\neq i} \phi^2_{kj}(N,M,c).$$

Pero la igualdad anterior se puede escribir de la siguiente manera

$$n\phi^1_{ij}(N,M,c) - \sum_{k\in N} \phi^1_{kj}(N,M,c) = n\phi^2_{ij}(N,M,c) - \sum_{k\in N} \phi^2_{kj}(N,M,c).$$

De la Proposición 3.5, $\sum_{k\in N} \phi^1_{kj}(N,M,c) = \sum_{k\in N} \phi^2_{kj}(N,M,c)$. Así, $\phi^1_{ij}(N,M,c) = \phi^2_{ij}(N,M,c)$. Para todo $k \neq i$ la igualdad $\phi^1_{kj}(N,M,c) = \phi^2_{kj}(N,M,c)$ se demuestra de manera de similar. También se demuestra de manera similar que $\phi^1_{il}(N,M,c) = \phi^2_{il}(N,M,c)$ para todo $l \neq j$. Entonces, $\phi^1(N,M,c) = \phi^2(N,M,c)$ en el caso de n agentes. $\square$

3.5. Aplicaciones

Muchas situaciones pueden ser modeladas como un problema de distribución de costos conjuntos múltiples. En esta sección consideramos tres aplicaciones. La primera es a situación de distribución multitema, la segunda a gestión de grupos de retención y finalmente una aplicacion para problemas de distribución de costo con múltiples bienes divisibles.

3.5.1. Situación de distribución multitema

Consideremos una situación de distribución multitema. Hay un conjunto finito $H = \{1,\ldots,h\}$ de temas, un conjunto finito $I = \{1,\ldots,n\}$ de agentes, una cantidad $E \geq 0$ para ser dividida entre los agentes y una matriz de reclamo $D = (d_{ki})_{k\in H, i\in I}$, donde d_{ki} es el reclamo del agente $i \in I$ en el tema $k \in H$. En esta clase de situaciones se desea encontrar una asignación $X \in \mathbb{R}^{H\times I}$ tal que

- $\sum_{k\in H}\sum_{i\in I} X_{ki} = E$.

- $0 \leq X_{ki} \leq d_{ki}$, $\forall k \in H$, $\forall i \in I$.

Para mayores detalles respecto a situaciones de distribución multitema referirse a [34].

Dada una situación de distribución multitema definimos una función de costo múltiple $c_{E,D}$ en $(2^I)^H$ como sigue:

$$c_{E,D}(R) = \max\{E - \sum_{k\in H} d_{kI\setminus R_k}, 0\} \quad \forall R \in (2^I)^H,$$

donde $d_{kS} = \sum_{i\in S} d_{ki}$, con lo cual obtenemos un problema $(I, H, c_{E,D})$. Notemos que de acuerdo a $c_{E,D}$, $c_{E,D}(R)$ es la parte restante de E después de pagar todas las reclamaciones de los agentes en $I \setminus R_k$ en el tema k, para todo $k \in H$.

Es muy fácil de verificar que si aplicamos la solución (3.3) al problema $(I, H, c_{E,D})$ definido anteriormente, entonces

- $\sum_{k\in H}\sum_{i\in I}\psi_{ki}(I,H,c_{E,D})=E$.

- $0\leq\psi_{ki}(I,H,c_{E,D})\leq d_{ki}$, $\forall k\in H$, $\forall i\in I$.

Luego, la solución (3.3) da una forma de distribuir E entre los agentes por cada tema.

3.5.2. Gestión de grupos de retención

Consideramos un ejemplo similar a uno propuesto por Luis Hernández Lamoneda y Francisco Sánchez Sánchez en [21]. Usualmente las compañías de seguros cobran las primas usando ciertos principios para que la probabilidad de insolvencia sea muy baja. Si X denota el monto a pagar por asegurar un grupo de personas contra un conjunto finito de siniestros y la compañía de seguros cobra las primas mediante el principio de la desviación típica, entonces la prima total a cobrar es

$$E[X]+3\sigma_X,$$

donde $E[X]$ y σ_X son la media y la desviación típica de X, respectivamente. El problema que resta por resolver es cómo distribuir esta prima total entre los asegurados.

Asumamos el siguiente escenario: tenemos un grupo de asegurados, N, y $m>1$ tipos de seguros. Cada individuo $i\in N$ tiene asegurada una cantidad a_{ij} en el tipo de seguro j y una probabilidad $q_{ij}=Pr(X_{ij}=1)$ de sufrir un accidente cubierto por ese seguro. Suponemos que los riesgos individuales son independientes y que las distribuciones tienen media y varianza finita. Si $M=\{1,\ldots,m\}$ es el conjunto de los tipos de seguros, $(R_1,\ldots,R_m)\in(2^N)^M$ y

$$Z^R=\sum_{l\in M}\sum_{i\in R_l}a_{il}X_{il},$$

entonces el costo total del seguro $c_{X,A}(R)$ que debe ser pagado por todos los asegurados en cada $R_j\subseteq N$ es

$$c_{X,A}(R)=E[Z^R]+3\sigma_{Z^R},$$

donde $X=(x_{ij})_{i\in N,j\in M}$, $A=(a_{ij})_{i\in N,j\in M}$ y

$$\begin{aligned}E[Z^R]&=\sum_{l\in M}\sum_{i\in R_l}a_{il}E[X_{il}]=\sum_{l\in M}\sum_{i\in R_l}a_{il}q_{il},\\ \sigma^2_{Z^R}&=\sum_{l\in M}\sum_{i\in R_l}a_{il}^2q_{il}(1-q_{il}).\end{aligned}$$

De lo anterior se sigue que

$$c_{X,A}(R)=\sum_{l\in M}\sum_{i\in R_l}a_{il}q_{il}+3\sqrt{\sum_{l\in M}\sum_{i\in R_l}a_{il}^2q_{il}(1-q_{il})},$$

de cual obtenemos una función de costo múltiple. Por lo tanto, podemos aplicar nuestra solución al problema $(M,N,c_{X,A})$ para obtener una distribución del costo total $c_{X,A}(N,\ldots,N)$ entre los asegurados por cada tipo de seguro.

3.5.3. Distribución de costos

Consideremos un problema de distribución de costo con múltiples bienes divisibles. En un problema de esta clase hay un conjunto finito $N = \{1, \dots, n\}$ de agentes, cada uno de ellos demandando una canasta de m diferentes tipos de bienes. Es decir, cada agente $i \in N$ es caracterizado por un vector de demanda $x_i = (x_{i1}, \dots, x_{im}) \in \mathbb{R}^m_+$. También hay una función de costo $f : \mathbb{R}^m_+ \to \mathbb{R}_+$ con $f(0, \dots, 0) = 0$. Una solución para esta clase de problemas es una asignación $y \in \mathbb{R}^N$ tal que $\sum_{i \in N} y_i = f\left(\sum_{i\in N} x_{i1}, \dots, \sum_{i \in N} x_{im}\right)$.

Dado un problema de distribución de costo con múltiples bienes, definimos una función de costo múltiple c_f de la siguiente manera

$$c_f(R_1, \dots, R_m) = f\left(\sum_{i \in R_1} x_{i1}, \dots, \sum_{i \in R_m} x_{im}\right) \quad \forall R \in (2^N)^M$$

donde $M = \{1, \dots, m\}$ es el conjunto de tipos de bienes. Entonces, obtenemos un problema de costo múltiple (N, M, c_f). Si aplicamos nuestra solución (3.3) al problema (N, M, c_f) y definimos $y_i = \sum_{j \in M} \psi_{ij}(N, M, c_f)$, para todo $i \in N$, entonces y es una asignación para el problema de distribución de costo con múltiples bienes. Para mayor información respecto a problemas de distribución de costo con múltiples bienes referirse a [24].

Observación 3.7. Notemos que si $x_{ij} = 1$ para todo $i \in N$ y $j \in M$, entonces $c_f(R) = f(|R_1|, \dots, |R_m|)$ para cada $R \in (2^N)^M$. Luego, para esta situación:

- Nuestro modelo puede ser considerado como una generalización del modelo introducido por Sprumont [42] para la subclase de problemas de distribución de costo donde cada agente requiere sólo una unidad de cada servicio de M como máximo. Esto es porque la solución propuesta por Sprumont [42] coincide con (3.3) en esta subclase.
- $\sum_{i \in N} \psi_{ij}(N, M, c) = x_j^{SS}(q; c')$, donde $x_j^{SS}(q; c')$ es el método de Shapley - Shubik [40], y $(q; c')$ es un problema de distribución de costo discreto con $q_j = |N|$, para cada $j \in M$.

3.6. Conclusiones

En este capítulo estudiamos un problema de distribución de costo múltiple discreto. Primero, asumimos que cada agente requiere todo el conjunto finito de servicios. Segundo, el consumo de los servicios es sin rivalidad: esto significa que el proveedor de servicio garantiza la demanda de todos los agentes en cualquier servicio. También, el costo de un conjunto de servicios depende de los agentes que lo requieran. Para esta clase de problemas de distribución de costo proporcionamos una solución y una interpretación de ésta en términos probabilísticos. También, proporcionamos dos caracterizaciones axiomáticas de la solución: la primera, basada en una modificación de los axiomas propuestos por Shapley [39] y la segunda basada en las ideas de Myerson [32]. Por último, aplicamos el modelo a diferentes situaciones.

CAPÍTULO 4

Soluciones libres de envidia y regla de distribución de bienes indivisibles

Consideremos la siguiente situación: El gobierno municipal de una ciudad quiere vender n lotes (terrenos) localizados en diferentes puntos de la ciudad a n familias. Supongamos que se conoce lo que cada familia esta dispuesta a pagar por cada lote (valoraciones que cada familia hace a los lotes). El gobierno municipal desea asignar los lotes sin causar insatisfacción y conflictos entre las familias. Esto plantea la siguiente interrogante ¿Cómo asignar los lotes a las familias y determinar uno precio por cada lote de tal manera que cada familia no desee un lote diferente a la que se le asignó?

En este capítulo probamos que siempre existe una asignación y un precio para cada bien de tal forma que ningún agente desee el bien de otro y pague más de lo que él este dispuesto a pagar por el bien que se le asigne. También, proporcionamos una regla que es libre de envidias.

4.1. Introducción

En este capítulo tratamos con un problema de división justa donde un número finito de bienes indivisibles debe ser distribuido entre un numero finito de agentes. Suponiendo conocidas las valoraciones de los agentes sobre los bienes debemos determinar un precio por cada bien. Asumimos que cada agente tiene asociado una función de utilidad cuasilineal en los precios y que está interesado en adquirir sólo un bien. Bajo este enfoque, hay estudios que se han realizado por varios autores tales como [6], [43] y [17].

Suponiendo que las valoraciones de cada agente sobre los bienes son no negativas, probamos que siempre existe una forma de asignar estos bienes entre los agentes y determinar un precio por cada bien. Estos precios son puestos de tal manera que ningún agente desee el bien de otro. Además, el precio de cada bien es a lo más la valoración del agente que lo recibe. También proporcionamos una regla de distribución que es libre de envidias e individualmente racional.

Una situación donde nuestra regla puede aplicarse es la siguiente: Un grupo de amigos considera alquilar una casa, pero primero necesitan ponerse de acuerdo sobre cómo distribuir las habitaciones y la distribución del alquiler. Cada uno de ellos tiene una valoración por cada habitación de la casa de tal manera que la suma de las valoraciones obtenidas bajo cualquier asignación de habitaciones es almenos el alquiler. Se va a alquilar la casa sólo si pueden encontrar una asignación de habitaciones y una distribución del alquiler, en el cual todos estén de acuerdo. En este capítulo proporcionamos una forma de realizar la asignación de habitaciones y una distribución del alquiler bajo la cual se alquila la casa.

Este capítulo esta dividido en 4 secciones. En la Sección 4.2 presentamos la notación y las definiciones que se usarán en todo el capítulo. En la Sección 4.3 damos la prueba de la existencia de soluciones libre de envidias y por último proporcionamos una regla de distribución.

4.2. Notación y definiciones

Sea $M := \{1, \ldots, n\}$ un conjunto de bienes indivisibles y $N := \{1, \ldots, n\}$ un conjunto de agentes. Suponemos que cada agente esta interesado en adquirir sólo un bien y que él o ella puede recibir cualesquiera de los bienes disponibles. Además cada agente tiene una valoración por cada bien, las cuales las representamos por la matriz $A := (a_{ij}) \in \mathbb{R}_+^{M \times N}$, donde a_{ij} es la valoración del agente j por el bien i. Así, un *problema* será una matriz de valoraciones $A \in \mathbb{R}_+^{M \times N}$. Denotaremos por A^T y A_j a la traspuesta y a la j-ésima columna de la matriz A, respectivamente.

Una *asignación* para el problema $A \in \mathbb{R}_+^{M \times N}$ es una aplicación biyectiva $\theta : N \to M$. Dada una asignación θ, $\theta(j) = i$ significa que el bien i es asignado al agente j. Sea $S_n = \{\theta : N \to M : \theta \text{ es biyectiva}\}$. Una asignación θ que satisface

$$\sum_{j=1}^{n} a_{\theta(j)j} \geq \sum_{j=1}^{n} a_{\delta(j)j} \quad \forall \delta \in \mathcal{S}_n$$

la llamaremos *asignación eficiente*.

Un *precio* es un vector $p = (p_1, \ldots, p_n) \in \mathbb{R}_+^M$, donde p_i representa el precio del bien i. Una *solución* es un par $(\theta, p) \in \mathcal{S}_n \times \mathbb{R}_+^M$ representando una asignación de bienes a agentes y un precio por cada bien.

Asumimos que cada agente $j \in N$ tiene una función de utilidad $u_j : M \times \mathbb{R}^M \to \mathbb{R}$, dada por $u_j(i, p) = a_{ij} - p_i$. Esta cantidad representa la utilidad del agente j una vez que él recibe el i-ésimo bien.

Una solución $(\theta, p) \in \mathcal{S}_n \times \mathbb{R}_+^M$ para un problema A es *individualmente racional* si $u_j(\theta(j), p) \geq 0, \forall j \in N$, es decir, el pago de cada agente es a lo más lo que él esta dispuesto a pagar por el bien que él recibe. Es *libre de envidias* si $u_j(\theta(j), p) \geq u_j(i, p)$, $\forall j \in N$ y $\forall i \in M$, lo cual significa que ningún agente desea el bien de otro.

Una *regla de distribución (o simplemente una regla)* es una correspondencia $\varphi : \mathbb{R}_+^{M\times N} \to 2^{\mathcal{S}_n \times \mathbb{R}_+^M}$, donde $u_j(\theta(j), p) = u_j(\sigma(j), \overline{p})$ para todo $j \in N$ siempre que $(\theta, p), (\sigma, \overline{p}) \in \varphi(A)$. Es decir, todos los agentes son indiferentes a que solución selecciona la regla. Una regla φ es llamada *libre de envidias* si para cada problema A, cada elemento de $\varphi(A)$ es libre de envidias. Así mismo, diremos que es *individualmente racional* si para cada problema A, cada elemento de $\varphi(A)$ es individualmente racional.

Dado un problema $A \in \mathbb{R}_+^{M\times N}$, $S \subseteq N$, $T \subseteq M$ con $|S|, |T| \geq 1$ definimos el siguiente problema de programación lineal $P_A(S,T)$ y su dual $D_A(S,T)$:

$$
\begin{array}{ll}
P_A(S,T): & D_A(S,T): \\
Max \sum_{i\in S} \sum_{j\in T} a_{ij} x_{ij} & Min \sum_{i\in S} v_i + \sum_{j\in T} u_j \\
s.a & s.a \\
\sum_{i\in S} x_{ij} \leq 1 \ \ \forall j \in T & u_j + v_i \geq a_{ij} \ \ \forall i \in S \text{ y } \forall j \in T \\
\sum_{j\in T} x_{ij} \leq 1 \ \ \forall i \in S & u_j \geq 0 \ \ \forall j \in T \\
x_{ij} \geq 0 & v_i \geq 0 \ \ \forall i \in S.
\end{array}
$$

Dantzig [8] probó que siempre existen soluciones óptimas de $P_A(S,T)$ tales que $x_{ij} \in \{0,1\}$ para todo $i \in T$ y $j \in S$. Entonces, este tipo de soluciones óptimas del problema $P_A(N,M)$ dan una asignación eficiente del problema A correspondiente. Denotaremos por $P_A^*(S,T)$ al valor óptimo del problema de programación lineal $P_A(S,T)$. Luego, $P_A^*(N,M)$ es el valor total que se obtiene por todos los bienes en M.

En la siguiente sección las soluciones óptimas del problema de programación lineal $D_A(N,M)$ jugaran un rol importante en la prueba de la existencia de soluciones libre de envidias.

4.3. Soluciones libres de envidias

En esta sección probaremos que todo problema $A \in \mathbb{R}_+^{M\times N}$ tiene una solución libre de envidias e individualmente racional.

Proposición 4.1. *Para cada problema $A \in \mathbb{R}_+^{M\times N}$ existe $(\theta, p) \in \mathcal{S}_n \times \mathbb{R}_+^M$ tal que (θ, p) es libre de envidias e individualmente racional.*

Demostración.

Sabemos por Dantzig [8] que el problema de programación lineal $P_A(N,M)$ tiene soluciones ópimas con $x_{ij} \in \{0,1\}$ para todo $i \in M$ y $j \in N$. Supongamos que x^* es una solución óptima y que (u^*, v^*) es una solución óptima de $D_A(N,M)$. Consideremos la solución (θ, v^*) con $\theta(j) = i$ si $x_{ij}^* = 1$, para todo $j \in N$. Entonces, por las condiciones de holgura complementaria tenemos que $u_j^* = a_{ij} - v_i^*$. Por la igualdad anterior y que $u_j^* \geq a_{ij} - v_i^*$ para todo $i \in M$ se tiene que (θ, v^*) es una solución libre de envidias. La desigualdad $a_{\theta(j)j} \geq v_{\theta(j)}^*$ se sigue de que $u_j^* = a_{\theta(j)j} - v_{\theta(j)}^* \geq 0$ para todo $j \in N$. $\square$

Observación 4.2. Note que el vector de precios sombras v de los bienes en el problema de programación lineal $P(N, M)$ tiene la siguiente propiedad: si $\theta, \delta \in \mathcal{S}_n$ son asignaciones eficientes, entonces (θ, v) y (δ, v) son soluciones libre de envidias e individualmente racional.

El siguiente lema nos dice que cualquier asignación en una solución libre de envidias es eficiente.

Lema 4. *Si $(\theta, p) \in \mathcal{S}_n \times \mathbb{R}_+^M$ es una solución libre de envidias, entonces θ es una asignación eficiente.*

Demostración.

Sea $(\theta, p) \in \mathcal{S}_n \times \mathbb{R}_+^M$ una solución libre de envidias. Entonces,

$$a_{\theta(j)j} - p_{\theta(j)} \geq a_{\sigma(j)j} - p_{\sigma(j)}$$

para todo $j \in N$ y toda permutación $\sigma \in \mathcal{S}_n$. Esto implica que

$$\sum_{j \in N} a_{\theta(j)j} - \sum_{j \in N} p_{\theta(j)} \geq \sum_{j \in N} a_{\sigma(j)j} - \sum_{j \in N} p_{\sigma(j)}$$

para toda permutación $\sigma \in \mathcal{S}_n$. Por lo tanto, $\sum_{j \in N} a_{\theta(j)j} \geq \sum_{j \in N} a_{\sigma(j)j}$ $\forall \sigma \in \mathcal{S}_n$. $\square$

El núcleo de un juego es un concepto de solución para juegos cooperativos, el cual asocia a cada juego un conjunto de vectores de pago. Caracterizar el núcleo es una de las problemáticas estudiadas en teoría de juegos, ya que cualquier vector de pago en el núcleo proporciona a cada coalición al menos lo que ésta puede obtener en el juego. Al igual que en [38] nosotros asociamos a cada problema A un juego cooperativo (N', V_A) (ver Definición 1) donde los jugadores son los agentes en N y los bienes en M, $N' := N \cup M$, y la función V_A se define como

$$V_A(R) = \begin{cases} \displaystyle\max_{\{S \subseteq R \cap N, T \subseteq R \cap M : |S|, |T| \geq 1\}} P_A^*(S, T) & \text{si } R \cap N \neq \emptyset \;\; y \;\; R \cap M \neq \emptyset, \\ \\ 0 & \text{en otro caso,} \end{cases}$$

para todo $R \subseteq N'$. De acuerdo al juego (N', V_A) el valor de toda coalición $R \subseteq N'$, con $R \cap N \neq \emptyset$ y $R \cap M \neq \emptyset$, es el valor máximo que obtenemos por los bienes en R bajo cualquier asignación eficiente entre los agentes en R. Las coaliciones con elementos sólo en N o M tienen valor cero.

Ahora, caracterizamos el núcleo (ver Definición 4) del juego asociado a un problema A via soluciones libre de envidias e individualmente racional.

Proposición 4.3. *Sea un problema $A \in \mathbb{R}_+^{M \times N}$ y su juego asociado (N', V_A). Tenemos que $(u, v) \in \mathcal{C}(N', V_A)$ sí y sólo si existe $\theta \in \mathcal{S}_n$ tal que (θ, v) es una solución libre de envidias e individualmente racional para el problema A y u satisface que $u_j = a_{\theta(j)j} - v_{\theta(j)}$ para todo $j \in N$.*

Demostración.

Sea $A \in \mathbb{R}_{+}^{M\times N}$ un problema, (N', V_A) su juego asociado y $\theta \in \mathcal{S}_n$ una asignación eficiente. Supongamos que $(u, v) \in \mathcal{C}(N', V_A)$. En [38] se prueba que todo elemento del núcleo de (N', V_A) es una solución óptima del problema de programación lineal $D_A(N, M)$. Luego, por la Observación (4.2), (θ, v) es una solución libre de envidias e individualmente racional para el problema A. A demás, como θ es eficiente, entonces $u_j = a_{\theta(j)j} - v_{\theta(j)}$.

Recíprocamente, sea $(u, v) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}_{+}^{n}$ y $\theta \in \mathcal{S}_n$. Supongamos que (θ, v) es libre de envidias e individualmente racional y que u satisface que $u_j = a_{\theta(j)j} - v_{\theta(j)}$ para todo $j \in N$. Entonces, $u_j \geq 0$ y $a_{\theta(j)j} - v_{\theta(j)} \geq \max\{a_{ij} - v_i : i \in M\}$, $\forall j \in N$. Esto implica que $(u, v) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}_{+}^{n}$ es una solución factible del problema de programación lineal $D_A(N, M)$. Notemos que $\theta \in \mathcal{S}_n$ es una asignación eficiente por el Lema (4), por lo tanto

$$\begin{aligned}
\sum_{j=1}^{n} u_j + \sum_{i=1}^{n} v_i &= \sum_{j=1}^{n} (a_{\theta(j)j} - v_{\theta(j)}) + \sum_{i=1}^{n} v_i \\
&= \sum_{j=1}^{n} a_{\theta(j)j} \\
&= V_A(N').
\end{aligned}$$

De la igualdad anterior se sigue que (u, v) es una solución óptima del problema de programación lineal $D_A(N, M)$. El resultado se sigue del hecho que toda solución óptima de $D_A(N, M)$ es un elemento de $\mathcal{C}(N', V_A)$ (ver [38]). $\square$

4.4. Una regla de distribución

En la sección anterior probamos que para cada $A \in \mathbb{R}_{+}^{M\times N}$ existe una solución libre de envidias e individualmente racional. En esta sección proporcionamos una regla que es libre de envidias e individualmente racional.

Sea θ una asignación. Definimos $p^{\theta} \in \mathbb{R}_{+}^{M}$ de la siguiente forma

$$p_i^{\theta} = P_A^{*}(N \setminus \{\theta^{-1}(i)\}, M) - P_A^{*}(N \setminus \{\theta^{-1}(i)\}, M \setminus \{i\}), \quad \forall i \in M.$$

Dada una asignación θ, el precio del bien $i \in M$ de acuerdo a p_i^{θ} es la diferencia entre los cantidades que se obtiene cuando i no es asignado a $\theta^{-1}(i)$ y $\theta^{-1}(i)$ ya ha recivido el bien i. Es claro que $p_i^{\theta} \geq 0$ para toda asignación $\theta \in \mathcal{S}_n$ y todo $i \in M$. Ahora, definimos la correspondencia Φ por

$$\Phi(A) = \{(\theta, p^{\theta}) \mid \theta \text{ es una asignación eficiente}\} \tag{4.1}$$

para todo $A \in \mathbb{R}_{+}^{M\times N}$.

Proposición 4.4. *La correspondencia (4.1) es una regla que es libre de envidias e individualmente racional.*

Demostración.

Sea A un problema, $j \in N$ y $(\theta, p^\theta), (\sigma, \overline{p}) \in \Phi(A)$. Ahora notemos que

$$u_j(\theta(j), p^\theta) = a_{\theta(j)j} - P_A^*(N \setminus \{j\}, M) + P_A^*(N \setminus \{j\}, M \setminus \{\theta(j)\})$$
$$u_j(\sigma(j), p^\sigma) = a_{\sigma(j)j} - P_A^*(N \setminus \{j\}, M) + P_A^*(N \setminus \{j\}, M \setminus \{\sigma(j)\}).$$

Como ambas asignaciones θ, σ son eficientes, entonces $u_j(\theta(j), p^\theta) = u_j(\sigma(j), p^\sigma)$. Ya que $j \in N$ y $(\theta, p^\theta), (\sigma, \overline{p}) \in \Phi(A)$ son arbitrarios, entonces la correspondencia (4.1) es una regla. Por otro lado, Demange [9] prueba que todo vector $(u, v) \in \mathbb{R}^{n \times n}$ con $u_j = P_A^*(N, M) - P_A^*(N \setminus \{j\}, M)$, para todo $j \in N$ y $v_i = p_i^\theta \in \mathbb{R}^n$, para todo $i \in M$, es un elemento del núcleo del juego V_A. Luego, por la Proposición (4.3), Φ es libre de envidias e individualmente racional. $\square$

Ejemplo 5. *Supongamos que hay tres casas para ser distribuidas entre tres familias, cuyas valoraciones sobre las casas están dadas por la siguiente matriz:*

$$A = \begin{bmatrix} 18 & 23 & 24 \\ 10 & 9 & 15 \\ 15 & 18 & 18 \end{bmatrix}.$$

Notemos que la única asignación eficiente es $\theta(1) = 3$, $\theta(2) = 1$ y $\theta(3) = 2$. Con esta asignación el valor total de las casas es de 54 unidades monetarias. Utilizando la fórmula explicita de p_i^θ y con un poco de álgebra obtenemos que $p^\theta = (9, 0, 4)$. Si de cada columna de A sustraemos el vector p^θ obtenemos la siguiente matriz

$$\begin{bmatrix} 9 & 14 & 15 \\ 10 & 9 & 15 \\ 11 & 14 & 14 \end{bmatrix}.$$

Cada entrada $a_{\theta(j)j}$, con $j \in N$, en esta matriz es positiva y mayor o igual a cualquier otra entrada en la misma columna. Esto implica que la solución $(\theta, p^\theta) = ((2, 3, 1), (9, 0, 4))$ es libre de envidias e individualmente racional.

4.5. Conclusiones

En este capítulo estudiamos el problema de distribución de n bienes indivisibles entre n agentes, donde los agentes tienen valoraciones sobre los bienes. Suponemos que las valoraciones de los agentes son no negativas, que cada agente sólo quiere adquirir un bien y tiene una función de utilidad cuasi-lineal en los precios. Demostramos que para cada problema existe una forma de distribuir los bienes entre los agentes de tal manera que ningún agente desea el bien de otro. También, proporcionamos una regla que es libre de envidias e individualmente racional.

Bibliografía

[1] José M Alonso-Meijide and M Gloria Fiestras-Janeiro. Modification of the banzhaf value for games with a coalition structure. *Annals of Operations Research*, 109 (1-4):213–227, 2002.

[2] John F Banzhaf. Weighted voting doesn't work: A mathematical analysis. *Rutgers Law Review*, 19:317–343, 1965.

[3] Sylvain Béal, Eric Rémila, and Philippe Solal. Veto players, the kernel of the shapley value and its characterization. Technical report, 2014.

[4] Sylvain Béal, Eric Rémila, and Philippe Solal. Characterization of the average tree solution and its kernel. *Journal of Mathematical Economics*, 60:159–165, 2015.

[5] Sylvain Béal, Eric Rémila, and Philippe Solal. Decomposition of the space of tu-games, strong transfer invariance and the banzhaf value. *Operations Research Letters*, 43(2):123–125, 2015.

[6] Steven J Brams and D Marc Kilgour. Competitive fair division. *Journal of Political Economy*, 109(2):418–443, 2001.

[7] Rodica Branzei, Dinko Dimitrov, and Stef Tijs. *Models in cooperative game theory*, volume 556. Springer Science & Business Media, 2008.

[8] George Bernard Dantzig. *Linear programming and extensions*. Princeton university press, 1998.

[9] Gabriel Demange. Strategyproofness in the assignment market game. *Laboratoire d'Econometrie de l'Ecole Polytechnique, Paris*, 1982.

[10] Irinel C Dragan. The potential basis and the weighted shapley value. *LIBERTAS MATHEMATICA*, 11:139–150, 1991.

[11] Irinel C Dragan. On the inverse problem for semivalues of cooperative t.u. games. *International Journal of Pure and Appl. Math.*, 22:545–561, 2005.

[12] Pradeep Dubey, Abraham Neyman, and Robert James Weber. Value theory without efficiency. *Mathematics of Operations Research*, 6(1):122–128, 1981.

[13] Vincent Feltkamp. Alternative axiomatic characterizations of the shapley and banzhaf values. *International Journal of Game Theory*, 24(2):179–186, 1995.

[14] Eric Friedman and Herve Moulin. Three methods to share joint costs or surplus. *Journal of Economic Theory*, 87(2):275–312, 1999.

[15] Donald Bruce Gillies. *Some theorems on n-person games.* PhD thesis, University of Princeton, 1953.

[16] Michel Grabisch and Fabien Lange. Games on lattices, multichoice games and the shapley value: a new approach. *Mathematical Methods of Operations Research*, 65 (1):153–167, 2007.

[17] Claus-Jochen Haake, Matthias G Raith, and Francis Edward Su. Bidding for envy-freeness: A procedural approach to n-player fair-division problems. *Social Choice and Welfare*, 19(4):723–749, 2002.

[18] Sergiu Hart and Andreu Mas-Colell. The potential basis of the shapley value. *Cambridge Univ. Press, The Shapley Value, Essays in Honor of L.S Shapley*, pages 139–150, 1988.

[19] Sergiu Hart and Andreu Mas-Colell. Potential, value, and consistency. *Econometrica: Journal of the Econometric Society*, pages 589–614, 1989.

[20] P Jean Jacques Herings, Gerard van der Laan, and Dolf Talman. The average tree solution for cycle-free graph games. *Games and Economic Behavior*, 62(1):77–92, 2008.

[21] L. Hernández-Lamoneda and Francisco Sánchez-Sánchez. Cooperative games with homogeneous groups of participants. *Theory and Decision*, 79(3): 451–461, 2014. ISSN 1573-7187. doi: 10.1007/s11238-014-9474-8. URL `http://dx.doi.org/10.1007/s11238-014-9474-8`.

[22] L Hernández-Lamoneda, Ruben Juarez, and F Sánchez-Sánchez. Dissection of solutions in cooperative game theory using representation techniques. *International Journal of Game Theory*, 35(3):395–426, 2007.

[23] Shai Herzog, Scott Shenker, and Deborah Estrin. Sharing the cost of multicast trees: an axiomatic analysis. *Networking, IEEE/ACM Transactions on*, 5(6):847–860, 1997.

[24] Jens Leth Hougaard. *An introduction to allocation rules.* Springer Science & Business Media, 2009.

[25] Chih-Ru Hsiao and TES Raghavan. Shapley value for multichoice cooperative games, i. *Games and economic behavior*, 5(2):240–256, 1993.

[26] Michael A Jones and Jennifer M Wilson. Multilinear extensions and values for multichoice games. *Mathematical Methods of Operations Research*, 72(1):145–169, 2010.

[27] Ehud Lehrer. An axiomatization of the banzhaf value. *International Journal of Game Theory*, 17(2):89–99, 1988.

[28] Edna Loehman and Andrew Whinston. An axiomatic approach to cost allocation for public investment. *Public Finance Review*, 2(2):236–250, 1974.

[29] Herve Moulin. On additive methods to share joint costs*. *Japanese Economic Review*, 46(4):303–332, 1995.

[30] Herve Moulin and Scott Shenker. Serial cost sharing. *Econometrica: Journal of the Econometric Society*, pages 1009–1037, 1992.

[31] Hervé Moulin and Scott Shenker. Average cost pricing versus serial cost sharing: an axiomatic comparison. *Journal of Economic Theory*, 64(1):178–201, 1994.

[32] Roger B Myerson. Conference structures and fair allocation rules. *International Journal of Game Theory*, 9(3):169–182, 1980.

[33] Guillermo Owen. Multilinear extensions and the banzhaf value. *Naval Research Logistics Quarterly*, 22(4):741–750, 1975.

[34] P. Borm P. Calleja and R. Hendrickx. Multi-issue allocation situations. *European Journal of Operational Research 164:730-747*, 2005.

[35] J. Rojas-Rojas and F. Sanchez Sanchez. A characterization of the symmetric banzhaf value for games with a coalition structure. *International Journal of Advances in Applied Mathematics and Mechanics*, 3(2):1 – 4, 2015.

[36] Jony Rojas-Rojas and Francisco Sanchez-Sanchez. Envy-free solution and allocation rule of indivisible goods. *Applied Mathematical Sciences*, 9(70):3449 – 3456, 2015.

[37] Luis M Ruiz, Federico Valenciano, and Jose M Zarzuelo. The family of least square values for transferable utility games. *Games and Economic Behavior*, 24(1):109–130, 1998.

[38] Lloyd S Shapley and Martin Shubik. The assignment game i: The core. *International Journal of Game Theory*, 1(1):111–130, 1971.

[39] L.S. Shapley. A value for n-person games. *In Contributions to the Theory of Games Volume II, Annals of Mathematical Studies, Editors H.W. Kuhn and A.W. Tucker. Princeton University Press*, 28:307–317, 1953.

[40] Martin Shubik. Incentives, decentralized control, the assignment of joint costs and internal pricing. *Management science*, 8(3):325–343, 1962.

[41] Yves Sprumont. Ordinal cost sharing. *Journal of Economic Theory*, 81(1):126–162, 1998.

[42] Yves Sprumont. On the discrete version of the aumann–shapley cost-sharing method. *Econometrica*, 73(5):1693–1712, 2005.

[43] Shao Chin Sung and Milan Vlach. Competitive envy-free division. *Social Choice and Welfare*, 23(1):103–111, 2004.

[44] Arthur Lawrence Thomas. A behavioural analysis of joint-cost allocation and transfer pricing. *In Arthur Andersen and Company Lecture Series, Stipes Publishing Company*, 1980.

[45] Koji Yokote. Weak addition invariance and axiomatization of the weighted shapley value. *International Journal of Game Theory*, pages 1–19, 2014.