CIMAT

Centro de Investigación en Matemáticas, A.C.

Difusiones Ramificantes en Medios Aleatorios

T E S I S

Que para obtener el grado de

Maestro en Ciencias

con Orientación en

Probabilidad y Estadística

P r e s e n t a

José Alfredo Cervantes Guzmán

Director de Tesis:

Dr. Juan Carlos Pardo Millán

Guanajuato, Gto.. Enero de 2014

Índice general

La aproximación de la difusión de procesos de ramificación en medios aleatorios la conjenturó Keiding (1975) y fue formalizado por Kurtz (1978). Esta aproximación se logra a través de procesos de ramificación en medios aleatorios debidamente escalados, de tal forma que el medio aleatorio resultante es un movimiento browniano con deriva. El proceso de ramificación en medio aleatorio puede pensarse como un proceso de ramificación clásico cuando se condiciona en el medio, de tal forma que la ley de la progenie evoluciona de acuerdo al medio. Aunque puede haber modelos más generales, incluyendo por ejemplo ciertos procesos de Lévy como medios aleatorios, el tener al movimiento browniano como medio aleatorio resulta en fórmulas explícitas para varios cálculos, ya que el movimiento browniano es uno de los principales procesos que se han estudiado.

Las difusiones ramificantes en medios aleatorios, BDRE por sus siglas en inglés, son un modelo cómodo para aplicaciones, ya que depende solamente de tres parámetros. A diferencia de los procesos de ramificación clásicos, los BDRE presentan un cambio de fase y tienen 5 clasificaciones: supercrítico, crítico, subcrítico fuerte, subcrítico intermedio y subcrítico débil. En este trabajo se estudian los artículos de Böinghoff & Hutzenthaler [2] y Hutzenthaler [4], más precisamente, nos enfocamos en estudiar el comportamiento asintótico de las probabilidades de supervivencia de la ley de la población, en donde la clasificación de estos procesos será evidente, así como la conexión que hay entre la ley de la población de los BDRE supercríticos condicionados a la extinción y la ley de la población de un BDRE subcrítico. Esta es otra diferencia con los procesos de ramificación clásicos, pues un BDRE supercrítico condicionado a la extinción es una difusión bidimensional, no necesariamente es un BDRE, mientras que en un proceso de ramificación sí lo es. También obtendremos que un BDRE supercrítico condicionado en $\{S_\infty = -\infty\}$ (donde S es el medio aleatorio) resulta en un BDRE subcrítico.

El objetivo de este trabajo es presentar de manera digerida los cálculos y detalles que se hicieron en ambos artículos en la cual se basa esta tesina, así como hacer explícito el desarrollo de las técnicas que se utilizaron, además de proporcionar las referencias necesarias para poder seguir el texto. Para asimilar este trabajo se necesita tener conocimiento de cálculo de Itô y difusiones.

Capítulo 1

Preliminares

Los procesos de ramificación en medios aleatorios fueron introducidos por Smith y Wilkinson (1969); últimamente ha habido un gran interés en estos modelos, por un lado, por ser más realistas comparado con los modelos clásicos de procesos de ramificación, por otro lado, por sus propiedades interesantes, como la transición de fase en el caso subcrítico.

En este trabajo nos enfocaremos en la aproximación a la difusión de procesos de ramificación en medios aleatorios. La aproximación fue conjenturada por Keiding (1975) y formalizada por Kurtz (1978). Nos referiremos a dicha aproximación como difusiones ramificantes en medios aleatorios. Estos procesos pueden verse como un proceso de ramificación de masa continua en medios aleatorios. La principal observación de este trabajo es que la aproximación a la difusión de procesos de ramificación en medios aleatorios es un modelo sencillo, de tres parámetros, que tiene fórmulas explícitas para varias expresiones, lo cual lo hace atractivo para aplicaciones.

A partir de ahora, haremos referencia a las difusiones ramificantes en medios aleatorios como BDRE, por sus siglas en inglés, y denotaremos a los procesos de ramificación en medios aleatorios como BPRE, igualmente por sus siglas en inglés.

1.1. Difusión de Feller

Sea $X = (X_t)_{t\geq 0}$ un proceso estocástico càdlàg tal que es una solución fuerte de

$$\mathrm{d}X_t = \sqrt{2\sigma^2 X_t}\mathrm{d}B_t, \tag{1.1.1}$$

donde $B = (B_t)_{t\geq 0}$ es un movimiento browniano estándar y $\sigma^2 \geq 0$.

Definición 1. Sea $X = (X_t)_{t\geq 0}$ un proceso estocástico, decimos que X es una difusión de Feller si es solución fuerte de (1.1.1).

Primero notemos que cuando el proceso inicia en cero, $X \equiv 0$, es la única solución fuerte de (1.1.1). Ahora, si $X_0 = x > 0$, queremos encontrar unicidad trayectorial para (1.1.1), así el Teorema de Yamada-Watanabe garantizaría la unicidad fuerte de la solución. Observemos que la deriva de la ecuación diferencial es idénticamente cero, y que la parte de la difusión está dada por $\sigma(x) = \sqrt{2\sigma^2 x}$. Esto implica que

$$|\sigma(x) - \sigma(y)| = \sqrt{2\sigma^2}|\sqrt{x} - \sqrt{y}| \leq \sqrt{2\sigma^2}\sqrt{|x-y|},$$

por lo que es Lipschitz continua, condición necesaria para usar el Teorema 3.5 del Capítulo IX en [7], el cual nos garantiza la unicidad trayectorial. En otras palabras, tenemos la existencia de una única solución no negativa para (1.1.1).

A continuación veremos que la difusión de Feller es una difusión ramificante en un medio constante, es decir, X satisface la propiedad de ramificación,

$$\mathbb{E}_{x+y}\left[e^{-\lambda X_t}\right] = \mathbb{E}_x\left[e^{-\lambda X_t}\right]\mathbb{E}_y\left[e^{-\lambda X_t}\right],$$

para toda $t \geq 0$ y $x, y \geq 0$.

Proposición 2. Sea $X = (X_t)_{t\geq 0}$ una difusión de Feller, entonces X es una difusión ramificante.

Demostración. Es suficiente demostrar que X satisface la propiedad de ramificación. Sean $\hat{X} = (\hat{X}_t)_{t\geq 0}$ y $\tilde{X} = (\tilde{X}_t)_{t\geq 0}$ dos copias independientes de X, con $\hat{X}_0 = x$ y $\tilde{X}_0 = y$. Basta ver que $Z = \hat{X} + \tilde{X}$ satisface (1.1.1). Para ello, observemos que

$$\begin{aligned} Z_t &= x + y + \int_0^t \sqrt{2\sigma^2 \hat{X}_u}\mathrm{d}\hat{B}_u + \int_0^t \sqrt{2\sigma^2 \tilde{X}_u}\mathrm{d}B_u \\ &= x + y + \int_0^t \sqrt{2\sigma^2 Z_u}\mathrm{d}M_u, \end{aligned}$$

donde

$$\mathrm{d}M_u = \frac{\sqrt{2\sigma^2 \hat{X}_u}\mathrm{d}\hat{B}_u + \sqrt{2\sigma^2 \tilde{X}_u}\mathrm{d}B_u}{\sqrt{2\sigma^2(\hat{X}_u + \tilde{X}_u)}}\mathbb{1}_{\{\hat{X}_u \neq 0, \tilde{X}_u \neq 0\}}.$$

Si el proceso $M = (M_t)_{t\geq 0}$ resulta ser un movimiento browniano, la prueba estará terminada, ya que Z satisfacerá (1.1.1). Con este objetivo, como M es una martingala local continua, calculemos la variación cuadrática de M,

$$\begin{aligned}
\langle M\rangle_t &= \left\langle \int_0^{\cdot} \frac{\sqrt{2\sigma^2\hat{X}_u}\mathrm{d}\hat{B}_u + \sqrt{2\sigma^2\tilde{X}_u}\mathrm{d}B_u}{\sqrt{2\sigma^2(\hat{X}_u+\tilde{X}_u)}} \right\rangle_t \\
&= \int_0^t \frac{2\sigma^2\hat{X}_u}{2\sigma^2(\hat{X}_u+\tilde{X}_u)}\mathrm{d}u + \int_0^t \frac{2\sigma^2\tilde{X}_u}{2\sigma^2(\hat{X}_u+\tilde{X}_u)}\mathrm{d}u \;= t.
\end{aligned}$$

Por el Teorema de caracterización de Lévy, se tiene que M es un movimiento browniano. Por lo tanto X satisface la propiedad de ramificación y es un proceso de ramificación continuo. ∎

Proposición 3. (Transformada de Laplace de la difusión de Feller) Sea $(X_t)_{t\geq 0}$ una solución fuerte de $\mathrm{d}X_t = \sqrt{2\kappa X_t}\mathrm{d}B_t$. Entonces

$$\mathbb{E}_z\left[e^{-\lambda X_t}\right] = \exp\left\{-\frac{z}{\kappa t + \frac{1}{\lambda}}\right\},$$

para toda $t \geq 0$.

Demostración. Sea $(X_t)_{t\geq 0}$ una difusión de Feller con $X_0 = z$. Sea $t > 0$, fija. Apliquemos la fórmula de Itô a $H(s, X_s) = \exp\left\{\frac{-\lambda X_s}{1+\kappa\lambda(t-s)}\right\}$, entonces tenemos que para toda $0 \leq s \leq t$,

$$\begin{aligned}
H(s, X_s) &= \exp\left\{\frac{-\lambda z}{1+\kappa\lambda(t-s)}\right\} - \int_0^t \frac{\lambda}{1+\kappa\lambda(t-u)} \exp\left\{\frac{-\lambda X_u}{1+\kappa\lambda(t-u)}\right\}\mathrm{d}X_u \\
&\quad - \int_0^t \frac{\kappa\lambda^2 X_u}{(1+\kappa\lambda(t-u))^2} \exp\left\{\frac{-\lambda X_u}{1+\kappa\lambda(t-u)}\right\}\mathrm{d}u \\
&\quad + \frac{1}{2}\int_0^t \left(\frac{-\lambda}{1+\kappa\lambda(t-u)}\right)^2 \exp\left\{\frac{-\lambda X_u}{1+\kappa\lambda(t-u)}\right\} 2\kappa X_u \mathrm{d}u \\
&= \exp\left\{\frac{-\lambda z}{1+\kappa\lambda(t-s)}\right\} - \int_0^t \frac{\lambda}{1+\kappa\lambda(t-u)} \exp\left\{\frac{-\lambda X_u}{1+\kappa\lambda(t-u)}\right\}\mathrm{d}X_u \\
&= \exp\left\{\frac{-\lambda z}{1+\kappa\lambda(t-s)}\right\} - \int_0^t \frac{\lambda\sqrt{2\kappa X_u}}{1+\kappa\lambda(t-u)} \exp\left\{\frac{-\lambda X_u}{1+\kappa\lambda(t-u)}\right\}\mathrm{d}B_u,
\end{aligned}$$

por lo tanto $\exp\left\{\frac{-\lambda X_s}{1+\kappa\lambda(t-s)}\right\}$ es una martingala local, y al estar acotada por 1 es una martingala uniformemente integrable. Así

$$\mathbb{E}_z\left[\exp\left\{\frac{-\lambda X_s}{1+\kappa\lambda(t-s)}\right\}\right] = \mathbb{E}_z\left[\exp\left\{\frac{-\lambda X_0}{1+\kappa\lambda(t-0)}\right\}\right] = \exp\left\{\frac{-\lambda z}{1+\kappa\lambda t}\right\},$$

para $0 \leq s \leq t$. Tomando $s = t$, tenemos

$$\mathbb{E}_z\left[e^{-\lambda X_t}\right] = \exp\left\{\frac{-\lambda z}{1+\kappa\lambda t}\right\}.$$

∎

Proposición 4. (Probabilidad de extinción de la difusión de Feller) Sea $X = (X_t)_{t\geq 0}$ una solución fuerte de (1.1.1), es decir, X es una difusión de Feller. Entonces X se extingue con probabilidad 1.

Demostración. Como X es un proceso estocástico positivo, por la Proposición 3, vemos que se cumple

$$\begin{aligned}\mathbf{P}_z\left(X_t = 0\right) &= \lim_{\lambda\to\infty} \mathbb{E}_z\left[\exp\{-\lambda X_t\}\right] = \lim_{\lambda\to\infty} \exp\left\{-\frac{z}{\kappa t + \frac{1}{\lambda}}\right\} \\ &= \exp\left\{-\frac{z}{\kappa t}\right\}.\end{aligned}$$

Ahora, note que $\{X_{t+s} = 0\} \supseteq \{X_t = 0\}$, para toda $s \geq 0$, ya que el punto 0 es un estado absorbente. Así, por la continuidad de la medida de probabilidad $\mathbf{P}$ tenemos

$$\mathbf{P}_z\left(X_\infty = 0\right) = \lim_{t\to\infty} \mathbf{P}_z\left(X_t = 0\right) = \lim_{t\to\infty} \exp\left\{-\frac{z}{\kappa t}\right\} = 1.$$

Por lo tanto, con probabilidad 1 la difusión de Feller se extingue. ∎

Ahora veremos que la difusión de Feller puede verse como un movimiento browniano cambiado de tiempo. Recordemos que,

$$X_t = x + \int_0^t \sqrt{2\sigma^2 X_s}\mathrm{d}B_s, \qquad t \geq 0.$$

Sea $\tau_0 = \inf\{s \geq 0 : X_s = 0\}$. Note que X es una martingala local y su variación cuadrática está dada por

$$\langle X\rangle_t = \int_0^t 2\sigma^2 X_s \mathrm{d}s.$$

Tambien observemos que $X_t = 0$, para toda $t \geq \tau_0$, lo cual implica

$$\langle X\rangle_\infty = \int_0^\infty 2\sigma^2 X_s\mathrm{d}s = \int_0^{\tau^0} 2\sigma^2 X_s \mathrm{d}s = \langle X\rangle_{\tau_0}.$$

Por el Teorema generalizado de Dubins-Schwarz, vease Teorema 1.7 del capítulo V en [7], tenemos que existe un movimiento browniano estándar β independiente de X, tal que

$$B_t = \begin{cases} X_{\langle X\rangle_t^{-1}} & \text{si } t < \langle X\rangle_\infty \\ X_\infty + \beta_{t-\langle X\rangle_\infty} & \text{si } t \geq \langle X\rangle_\infty \end{cases}$$

es un movimiento browniano que empieza en x y donde $\langle X\rangle_t^{-1} = \text{ínf}\{s \geq 0 : \langle X\rangle_s > t\}$. Como $X_\infty = X_{\tau_0} = 0$, concluimos que

$$X_t = B_{\langle X\rangle_t}, \qquad \text{para} \quad t < \tau_0.$$

1.2. Procesos de ramificación en medios aleatorios

La aproximación a la difusión fue conjeturada por Keiding (1975) y formalizada por Kurtz (1978). Esta aproximación a la difusión es la solución fuerte $(Z_t, S_t)_{t\geq 0}$ de la ecuación diferencial estocástica

$$\begin{aligned} \mathrm{d}Z_t &= \frac{\sigma_e^2}{2} Z_t \mathrm{d}t + Z_t \mathrm{d}S_t + \sqrt{\sigma_b^2 Z_t}\,\mathrm{d}W_t^{(b)} \\ \mathrm{d}S_t &= \alpha \mathrm{d}t + \sqrt{\sigma_e^2}\,\mathrm{d}W_t^{(e)} \end{aligned} \tag{1.2.1}$$

para $t \geq 0$, donde $S_0 = 0$, $\alpha \in \mathbb{R}$, $\sigma_e \in [0, \infty)$ y $\sigma_b \in (0, \infty)$. Los procesos $(W_t^{(b)})_{t\geq 0}$ y $(W_t^{(e)})_{t\geq 0}$ son movimientos brownianos independientes. Decimos que $(Z_t, S_t)_{t\geq 0}$ es una difusión ramificante en medios aleatorios (BDRE).

Sea Δ el espacio polaco de medidas de probabilidad en $\mathbb{N}_0 = \{0, 1, 2, \ldots\}$ dotado con la métrica de variación total. Sea $n \in \mathbb{N}$, fija. Sea $\Pi^{(n)} = \{Q_1^{(n)}, Q_2^{(n)}, \ldots\}$ una sucesión de variables aleatorias independientes e idénticamente distribuidas tomando valores en Δ. Condicionado en $\Pi^{(n)}$ el proceso de ramificación en medios aleatorios (BPRE) $(Z_i^{(n)})_{i\in\mathbb{N}_0}$ esta definida recursivamente como sigue

$$Z_{i+1}^{(n)} := \sum_{j=1}^{Z_i^{(n)}} \xi_{j,i}^{(n)}, \quad i \in \mathbb{N}_0,$$

donde $Z_0^{(n)}$ es independiente de $\Pi^{(n)}$ y $\left(\xi_{j,i}^{(n)}\right)$ condicionado en $\Pi^{(n)}$ son variables independientes con distribución

$$\mathbf{P}\left(\xi_{j,i}^{(n)} = k \,\middle|\, \Pi^{(n)}\right) = Q_i^{(n)}(k),$$

para todo $j, i, k \in \mathbb{N}_0$. Definamos la media del medio al tiempo $i \in \mathbb{N}$ como

$$m(Q_i^{(n)}) := \sum_{k=0}^{\infty} k Q_i^{(n)}(k).$$

Ahora, definiremos una versión continua del BPRE mediante $Z_t^{(n)} := Z_{\lfloor t\rfloor}^{(n)}$, donde $\lfloor t\rfloor := \text{máx}\{m \in \mathbb{N}_0 : m \leq t\}$, para toda $t \geq 0$. Sea $\left(S_t^{(n)}\right)_{t\geq 0}$ la caminata aleatoria definida como

$$S_t^{(n)} := \sqrt{n}\sum_{i=1}^{\lfloor t\rfloor -1}\log(m(Q_i^{(n)})),$$

para $t \geq 0$. Esta caminata aleatoria desempeña un papel importante para el BDRE ya que determina la media del BDRE

$$\mathbb{E}\left[Z_t^{(n)}\middle|\Pi^{(n)}\right] = \mathbb{E}\left[Z_0^{(n)}\right]\prod_{i=1}^{\lfloor t\rfloor -1} m(Q_i^{(n)}) = \mathbb{E}\left[Z_0^{(n)}\right]\exp\left\{\frac{S_t^{(n)}}{\sqrt{n}}\right\}, \quad t \in [0,\infty).$$

Al hacer $n \to \infty$ obtendremos la aproximación a la difusión. Las siguientes condiciones nos aseguran que la caminata aleatoria converge a un movimiento browniano con deriva $\alpha \in \mathbb{R}$ y desviación estándar $\sigma_e \in [0,\infty)$:

$$\lim_{n\to\infty} n\cdot\mathbb{E}\left[m(Q_1^{(n)}) - 1\right] = \alpha \in \mathbb{R}, \tag{1.2.2}$$

$$\lim_{n\to\infty} n\cdot\mathbb{E}\left[(m(Q_1)^{(n)} - 1)^2\right] = \sigma_e^2 \in [0,\infty), \tag{1.2.3}$$

$$\sup_{n\in\mathbb{N}}\mathbb{E}\left[\sum_{k=0}^{\infty}\left|\frac{k}{m(Q_1^{(n)})} - 1\right|^3 \cdot Q_1^{(n)}(k)\right] < \infty, \tag{1.2.4}$$

Además, suponemos que la media de la variación de la ramificación en cada generación se estabiliza en el límite cuando $n \to \infty$,

$$\lim_{n\to\infty}\mathbb{E}\left[\sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{k}{m(Q_1^{(n)})} - 1\right)^2 Q_1^{(n)}(k)\right] = \sigma_b^2 \in (0,\infty). \tag{1.2.5}$$

Así, α es un parámetro que nos dirá cuando el proceso es supercrítico/subcrítico, σ_e^2 es un parámetro de desviación estándar de la media de progenie y σ_b^2 es la media de la varianza de la progenie por individuo por generación. Bajo las condiciones arriba impuestas, Kurtz en [5] mostró en el Corolario 2.18 que el BPRE convenientemente reescalado converge en distribución a una difusión.

Proposición 6. Suponga que $Z_0^{(n)}/n \to Z_0$ en distribución cuando $n \to \infty$. Bajo las condiciones (1.2.2), (1.2.3), (1.2.4) y (1.2.5) tenemos

$$\left(\frac{Z_{tn}^{(n)}}{n}, \frac{S_{tn}^{(n)}}{\sqrt{n}}\right)_{t\geq 0} \xrightarrow{\text{ley}} (Z_t, S_t)_{t\geq 0} \quad \text{cuando } n \to \infty,$$

en la topología de Skorohod, donde el límite a la difusión es una solución fuerte de (1.2.1).

Con lo anterior vemos que los BDRE existen y se pueden obtener mediante la aproximación que se propone en la Proposición anterior. Note que la contribución del proceso de ramificación y el medio aleatorio a la difusión límite es explícita a través de los parámetros. Nos referiremos al parámetro α como un parámetro crítico, diremos que el BDRE es supercrítico si $\alpha > 0$, crítico si $\alpha = 0$ y subcrítico si $\alpha < 0$. En el caso de las difusiones ramificantes en medios aleatorios, el caso subcrítico tiene a su vez tres subclasificaciones más, débilmente subcrítico si $-\sigma_e^2 < \alpha < 0$, intermedio subcrítico si $\alpha = -\sigma_e^2$ y fuertemente subcrítico si $\alpha < -\sigma_e^2$.

Ahora calcularemos el generador del proceso $(Z_t, S_t)_{t\geq 0}$, para ello nos apoyaremos en la fórmula de Itô. Para hacer más legible el texto utilizaremos la siguiente notación, $f_z(z,s) = \frac{\partial}{\partial z} f(z,s)$, $f_s(z,s) = \frac{\partial}{\partial s} f(z,s)$, $f_{zs}(z,s) = \frac{\partial}{\partial z \partial s} f(z,s)$, $f_{zz}(z,s) = \frac{\partial^2}{\partial^2 z} f(z,s)$ y $f_{ss}(z,s) = \frac{\partial^2}{\partial^2 s} f(z,s)$, para toda $z \in [0,\infty)$ y $s \in \mathbb{R}$.

Proposición 7. Sea $(Z_t, S_t)_{t\geq 0}$ un BDRE, es decir, es solución fuerte de (1.2.1). Entonces su generador está dado por

$$\begin{aligned}\mathcal{G}f(z,s) = {} & \left(\alpha + \frac{\sigma_e^2}{2}\right) z f_z(z,s) + \alpha f_s(z,s) + \frac{1}{2}(\sigma_e^2 z^2 + \sigma_b^2 z) f_{zz}(z,s) \\ & + \frac{1}{2}\sigma_e^2 f_{ss}(z,s) + \sigma_e^2 z f_{zs}(z,s).\end{aligned}$$

Demostración. Note que

$$\begin{aligned}\mathrm{d}Z_u &= \left(\alpha + \frac{\sigma_e^2}{2}\right) Z_u \mathrm{d}u + \sqrt{\sigma_e^2 Z_u^2}\,\mathrm{d}W_u^{(e)} + \sqrt{\sigma_b^2 Z_u}\,\mathrm{d}W_u^{(b)}, \\ \mathrm{d}\left\langle S \right\rangle_u &= \sigma_e^2 \mathrm{d}u, \\ \mathrm{d}\left\langle Z \right\rangle_u &= \left(\sigma_e^2 Z_u^2 + \sigma_b^2 Z_u\right) \mathrm{d}u, \\ \mathrm{d}\left\langle Z, S \right\rangle_u &= \sigma_e^2 Z_u \mathrm{d}u.\end{aligned}$$

Sea $f \in \mathbf{C}_0^2([0,\infty)\times\mathbb{R},\mathbb{R})$. Aplicando la fórmula de Itô a $f(Z_t,S_t)$, tenemos que

$$\begin{aligned} f(Z_t,S_t) = f(z,s) &+ \int_0^t f_z(Z_u,S_u)\mathrm{d}Z_u + \int_0^t f_s(Z_u,S_u)\mathrm{d}S_u \\ &+ \frac{1}{2}\int_0^t f_{ss}(Z_u,S_u)\mathrm{d}\left\langle S\right\rangle_u + \frac{1}{2}\int_0^t f_{zz}(Z_u,S_u)\mathrm{d}\left\langle Z\right\rangle_u \\ &+ \int_0^t f_{zs}(Z_u,S_u)\mathrm{d}\left\langle Z,S\right\rangle_u . \end{aligned}$$

Así,

$$\begin{aligned} \mathrm{d}f(Z_t,S_t) = f_z(Z_t,S_t) &\left[\left(\alpha+\frac{\sigma_e^2}{2}\right)Z_t\mathrm{d}t + \sqrt{\sigma_e^2 Z_t^2}\mathrm{d}W_t^{(e)} + \sqrt{\sigma_b^2 Z_t}\mathrm{d}W_t^{(b)}\right] \\ &+ f_s(Z_t,S_t)\left[\alpha\mathrm{d}t + \sqrt{\sigma_e^2}\mathrm{d}W_t^{(e)}\right] + \frac{1}{2}f_{ss}(Z_t,S_t)\sigma_e^2\mathrm{d}t \\ &+ \frac{1}{2}f_{zz}(Z_t,S_t)\left(\sigma_e^2 Z_t^2 + \sigma_b^2 Z_t\right)\mathrm{d}t + f_{zs}(Z_t,S_t)\sigma_e^2 Z_t\mathrm{d}t. \end{aligned}$$

Despejando, obtenemos

$$\begin{aligned} \mathrm{d}H_t = \mathrm{d}f(Z_t,S_t) - f_z(Z_t,S_t)\left(\alpha+\frac{\sigma_e^2}{2}\right)Z_t\mathrm{d}t - \alpha f_s(Z_t,S_t)\mathrm{d}t - \frac{1}{2}f_{ss}(Z_t,S_t)\sigma_e^2\mathrm{d}t \\ - \frac{1}{2}f_{zz}(Z_t,S_t)\left(\sigma_e^2 Z_t^2 + \sigma_b^2 Z_t\right)\mathrm{d}t - f_{zs}(Z_t,S_t)\sigma_e^2 Z_t\mathrm{d}t, \end{aligned}$$

donde $\mathrm{d}H_t = f_z(Z_t,S_t)\left(\sqrt{\sigma_e^2 Z_t^2}\mathrm{d}W_t^{(e)} + \sqrt{\sigma_b^2 Z_t}\mathrm{d}W_t^{(b)}\right) + f_s(Z_t,S_t)\sqrt{\sigma_e^2}\mathrm{d}W_t^{(e)}$, así H_t es una martingala local para toda $f \in \mathbf{C}_0^2([0,\infty)\times\mathbb{R},\mathbb{R})$. Por lo tanto

$$\begin{aligned} \mathcal{G}f(z,s) = \left(\alpha+\frac{\sigma_e^2}{2}\right)zf_z(z,s) + \alpha f_s(z,s) + \frac{1}{2}(\sigma_e^2 z^2 + \sigma_b^2 z)f_{zz}(z,s) \\ + \frac{1}{2}\sigma_e^2 f_{ss}(z,s) + \sigma_e^2 z f_{zs}(z,s), \end{aligned}$$

para toda $z \in [0,\infty)$ y $s \in \mathbb{R}$. Esto es consecuencia de la Proposición 2.2 del Capítulo VII en [7]. ∎

Capítulo 2

Probabilidad de Extinción

En este Capítulo expondremos algunos resultados concernientes a las difusiones ramificantes en medios aleatorios, que nos ayudarán en el siguiente Capítulo a calcular las probabilidades asintóticas del BDRE en sus diferentes clasificaciones. También serán de gran utilidad para calcular las probabilidades del BDRE supercrítico condicionado a la extinción.

2.1. Probabilidad de extinción para difusiones ramificantes en medios aleatorios

La siguiente Proposición nos será de gran utilidad, ya que nos proporciona una representación de la difusión ramificante en medios aleatorios expresada a través de una difusión de Feller con un cambio de tiempo aleatorio y un movimiento browniano con deriva. Con dicha representación es sencillo calcular la transformada de Laplace del BDRE condicionado en el medio.

Proposición 1. Sean $\alpha \in \mathbb{R}$, $\sigma_b \in (0,\infty)$ y $\sigma_e \in [0,\infty)$. Además, sean $\left(W_t^{(b)}\right)_{t\geq 0}$ y $\left(W_t^{(e)}\right)_{t\geq 0}$ dos movimientos brownianos estándar independientes. Sí $(F_t)_{t\geq 0}$ es una solución fuerte de

$$\mathrm{d}F_t = \sqrt{F_t}\mathrm{d}W_t^{(b)},$$

para $t \in [0,\infty)$, y si $S_t := \alpha t + \sigma_e W_t^{(e)}$, para $t \in [0,\infty)$. Definiendo el siguiente tiempo aleatorio $(\tau(t))_{t\geq 0}$ como

$$\tau(t) := \int_0^t e^{-S_u}\sigma_b^2 \mathrm{d}u,$$

para $t \in [0, \infty)$, tenemos que

$$(F_{\tau(t)} e^{-S_t}, S_t)_{t \geq 0},$$

es una solución débil de (1.2.1), es decir, es una versión del BDRE.

Demostración. Sean $\alpha, \theta \in \mathbb{R}$, $\sigma_b \in (0, \infty)$ y $\sigma_e \in [0, \infty)$, fijos. Sea $(F_t)_{t \geq 0}$ una solución fuerte de

$$\mathrm{d}F_t = \sqrt{F_t} \mathrm{d}W_t^{(b)}.$$

Sean S_t y $\tau(t)$ definidas como antes. Integrando por partes, y utilizando la independencia entre $(F_t)_{t \geq 0}$ y $(S_t)_{t \geq 0}$, tenemos

$$\begin{aligned} F_{\tau(t)} e^{S_t} &= F_{\tau(0)} e^{S_0} + \int_0^t e^{S_u} \mathrm{d}F_{\tau(u)} + \int_0^t F_{\tau(u)} \mathrm{d}e^{S_u} + \left\langle F_{\tau(\cdot)}, e^{S_\cdot} \right\rangle_t \\ &= F_{\tau(0)} e^{S_0} + \int_0^t e^{S_u} \mathrm{d}F_{\tau(u)} + \int_0^t F_{\tau(u)} \mathrm{d}e^{S_u}, \end{aligned} \tag{2.1.1}$$

note que $\left\langle F_{\tau(\cdot)}, e^{S_\cdot} \right\rangle_t = 0$ c.s., esto se ve al hacer un cambio en el tiempo y usando que $\sigma(F_t, t \geq 0)$ es independiente de $\sigma(S_t, t \geq 0)$, pues los movimientos brownianos asociados a cada proceso son independientes, es decir

$$\begin{aligned} \left\langle F_\tau, e^S \right\rangle_t &= \left\langle F, e^{S_{\tau^{-1}}} \right\rangle_{\tau(t)} \\ &= 0. \end{aligned}$$

Por otro lado, de la fórmula de Itô, tenemos

$$e^{S_t} = e^{S_0} + \int_0^t e^{S_u} \mathrm{d}S_u + \frac{1}{2} \int_0^t e^{S_u} \mathrm{d} \left\langle S \right\rangle_u = e^{S_0} + \int_0^t e^{S_u} \mathrm{d}S_u + \frac{1}{2} \int_0^t e^{S_u} \sigma_e^2 \mathrm{d}u.$$

Así

$$\mathrm{d}e^{S_t} = e^{S_t} \mathrm{d}S_t + \frac{\sigma_e^2}{2} e^{S_t} \mathrm{d}t. \tag{2.1.2}$$

Ahora, de (2.1.1) y (2.1.2) vemos que $F_{\tau(t)} e^{S_t}$ satisface la siguiente ecuación diferencial estocástica

$$\begin{aligned} \mathrm{d}F_{\tau(t)} e^{S_t} &= e^{S_t} \mathrm{d}F_{\tau(t)} + F_{\tau(t)} \left(e^{S_t} \mathrm{d}S_t + \frac{1}{2} e^{S_t} \sigma_e^2 \mathrm{d}t \right) \\ &= e^{S_t} \mathrm{d}F_{\tau(t)} + e^{S_t} F_{\tau(t)} \mathrm{d}S_t + \frac{1}{2} \sigma_e^2 e^{S_t} F_{\tau(t)} \mathrm{d}t \\ &= e^{S_t} \sqrt{F_{\tau(t)}} \mathrm{d}W_{\tau(t)}^{(b)} + e^{S_t} F_{\tau(t)} \mathrm{d}S_t + \frac{1}{2} \sigma_e^2 e^{S_t} F_{\tau(t)} \mathrm{d}t, \end{aligned}$$

haciendo $Z_t = e^{S_t}F_{\tau(t)}$, por la igualdad anterior y la definición de τ, tenemos que

$$\begin{aligned}
\mathrm{d}Z_t &= e^{S_t}\sqrt{F_{\tau(t)}}\mathrm{d}W^{(b)}_{\tau(t)} + Z_t\mathrm{d}S_t + \frac{1}{2}\sigma_e^2 Z_t\mathrm{d}t \\
&= \frac{1}{2}\sigma_e^2 Z_t\mathrm{d}t + Z_t\mathrm{d}S_t + \sqrt{\sigma_b^2 Z_t}\frac{1}{\sqrt{\sigma_b^2 e^{-S_t}}}\mathrm{d}W^{(b)}_{\tau(t)}.
\end{aligned}$$

Sea $M_t = \int\limits_0^t \frac{1}{\sqrt{\sigma_b^2 e^{-S_u}}}\mathrm{d}W^{(b)}_{\tau(u)}$. La prueba termina si probamos que $M = (M_t)_{t\geq 0}$ es un movimiento browniano independiente de $(W_t^{(e)})_{t\geq 0}$. Para ello veamos que M_t es una martingala local, que resultará ser cuadrado integrable y por ende una martingala, después calcularemos su variación cuadrática y por el Teorema de caracterización de Lévy tendremos que M es un movimento browniano.

Para ver que $M = (M_t)_{t\geq 0}$ es martingala local hacemos un cambio de tiempo y utilizamos la independencia entre $(S_t)_{t\geq 0}$ y $(W_t^{(b)})_{t\geq 0}$, es decir

$$\begin{aligned}
M_t &= \int\limits_0^t \frac{1}{\sqrt{\sigma_b^2 e^{-S_u}}}\mathrm{d}W^{(b)}_{\tau(u)} \\
&= \int\limits_0^{\tau_t^{-1}(t)} \frac{1}{\sqrt{\sigma_b^2 e^{-S_{\tau^{-1}(u)}}}}\mathrm{d}W^{(b)}_u.
\end{aligned}$$

Por lo tanto M es una martingala local. Note que τ^{-1} existe y es biyectiva, pues τ es una función creciente. Por otro lado, para ver que M es una martingala es suficiente ver que es cuadrado integrable, lo cual es equivalente a que $\mathbb{E}\left[\langle M\rangle_t\right] < \infty$, para toda $t \geq 0$. Así, tenemos

$$\begin{aligned}
\langle M\rangle_t &= \left\langle \int\limits_0^{\tau^{-1}(\cdot)} \frac{1}{\sqrt{\sigma_b^2 e^{-S_{\tau^{-1}(u)}}}}\mathrm{d}W^{(b)}_u \right\rangle_t \\
&= \int\limits_0^{\tau^{-1}(t)} \left(\frac{1}{\sqrt{\sigma_b^2 e^{-S_{\tau^{-1}(u)}}}}\right)^2 \mathrm{d}\left\langle W^{(b)}\right\rangle_u \\
&= \int\limits_0^t \frac{1}{\sigma_b^2 e^{-S_u}}\mathrm{d}\tau(u) = t < \infty,
\end{aligned}$$

para toda $t \geq 0$, pues $\mathrm{d}\tau(u) = \sigma_b^2 e^{-S_u}\mathrm{d}u$. Por el Teorema de caracterización de Lévy M es un movimento browniano. Ahora, para ver que $(M_t)_{t\geq 0}$ y $\left(W_t^{(e)}\right)_{t\geq 0}$ son independientes basta con ver que $\left\langle M, W^{(e)}\right\rangle_t = 0$, para toda $t \geq 0$. Así

$$\begin{aligned}
\left\langle M, W^{(e)}\right\rangle_t &= \left\langle \int_0^{\cdot} \frac{1}{\sqrt{\sigma_b^2 e^{-S_u}}} \mathrm{d}W^{(b)}_{\tau(u)}, W^{(e)} \right\rangle_t \\
&= \int_0^t \frac{1}{\sqrt{\sigma_b^2 e^{-S_{\tau}^{-1}(u)}}} \mathrm{d}\left\langle W^{(b)}_{\tau(\cdot)}, W^{(e)}\right\rangle_u \\
&= \int_0^t \frac{1}{\sqrt{\sigma_b^2 e^{-S_{\tau}^{-1}(u)}}} \mathrm{d}\left\langle W^{(b)}, W^{(e)}_{\tau^{-1}(\cdot)}\right\rangle_{\tau(u)} = 0,
\end{aligned}$$

pues $\left(W_t^{(e)}\right)_{t\geq 0}$ es independiente de $\left(W_t^{(b)}\right)_{t\geq 0}$ y τ es una función medible respecto a $\sigma(W_t^{(e)}, t \geq 0)$. ∎

Corolario 2. Sean $\alpha \in \mathbb{R}$, $\sigma_b \in (0,\infty)$ y $\sigma_e \in [0,\infty)$. Sea $(Z_t, S_t)_{t\geq 0}$ una solución fuerte de (1.2.1). Entonces, tenemos

$$\mathbb{E}_{(z,0)}\left[e^{-\lambda Z_t} \,\middle|\, (S_u)_{u\leq t}\right] = \exp\left\{ -\frac{z}{\int_0^t \frac{\sigma_b^2}{2}\exp\{-S_u\}\,\mathrm{d}u + \frac{1}{\lambda}\exp\{-S_t\}} \right\},$$

para toda $t, z, \lambda \in [0,\infty)$ c.s.

Demostración. Gracias a la Proposición 1, basta probarlo para $\left(F_{\tau(t)}e^{S_t}\right)_{t\geq 0}$, pues tienen la misma ley. Por la Proposición 1.3, sabemos que la transformada de Laplace de la difusión de Feller está dada por

$$\mathbb{E}_z\left[e^{-\lambda X_t}\right] = \exp\left\{-\frac{z}{\frac{t}{2} + \frac{1}{\lambda}}\right\}.$$

Así

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}_{(z,0)}\left[e^{-\lambda F_{\tau(t)}e^{S_t}} \,\middle|\, (S_u)_{u\leq t}\right] &= \exp\left\{-\frac{z}{\frac{\tau(t)}{2} + \frac{1}{\lambda e^{S_t}}}\right\} \\
&= \exp\left\{ -\frac{z}{\int_0^t \frac{\sigma_b^2}{2}\exp\{-S_u\}\,\mathrm{d}u + \frac{e^{-S_t}}{\lambda}} \right\},
\end{aligned}$$

ya que $\tau(t)$ y e^{S_t} son medibles con respecto a la filtración $\sigma(S_u, u \leq t)$. ∎

Corolario 3. Sean $\alpha \in \mathbb{R}, \sigma_b \in (0,\infty)$ y $\sigma_e \in [0,\infty)$. Sea $(Z_t, S_t)_{t\geq 0}$ una solución fuerte de (1.2.1). Entonces

$$\mathbf{P}_{(z,0)}\Big(Z_t > 0\Big|(S_u)_{u\leq t}\Big) = 1 - \exp\left\{ -\frac{z}{\int_0^t \frac{\sigma_b^2}{2}\exp\{-S_u\}\,du} \right\},$$

para toda $t \in (0,\infty)$ y toda $z \in [0,\infty)$ c.s. Sea $\beta := -\frac{2\alpha}{\sigma_e^2}$, si $\beta > -1$ y $\sigma_e^2 > 0$, entonces

$$\mathbf{P}_z\left(Z_t > 0\right) = \mathbb{E}\left[f\left(\frac{z}{2A^{(\beta)}_{t\sigma_e^2/4}} \right) \right] = \int_0^\infty f(za)p_{t\sigma_e^2/4,\beta}(a)\mathrm{d}a,$$

para toda $t > 0$ y $z \geq 0$, donde la función $f(x) := 1 - \exp\Big\{ -\frac{\sigma_e^2}{\sigma_b^2}x \Big\}$, $A_t^{(\beta)}$ esta definida como

$$A_t^{(\beta)} = \int_0^t \exp\Big\{2(\beta u + W_u^{(e)})\mathrm{d}u\Big\}, \quad t \geq 0, \tag{2.1.3}$$

y la función de densidad de $\left(2A_v^{(\beta)}\right)^{-1}$ satisface

$$\begin{aligned} p_{v,\beta}(a)\mathrm{d}a :&= \mathbf{P}\left(\frac{1}{2A_v^{(\beta)}} \in \mathrm{d}a \right) \\ &= \frac{e^{-\beta^2 v/2} e^{\pi^2/(2v)}}{\pi^2\sqrt{2v}}\Gamma\left(\frac{\beta+2}{2}\right) e^{-a} a^{-(\beta+1)/2} \\ &\quad \times \int_0^\infty \int_0^\infty e^{-\xi^2/(2v)} s^{(\beta-1)/2} e^{-as} \frac{\sinh(\xi)\cosh(\xi)\sin(\pi\xi/v)}{\left(s+\cosh^2(\xi)\right)^{\frac{\beta+2}{2}}} \mathrm{d}\xi \mathrm{d}s \mathrm{d}a, \end{aligned}$$

para toda $a \in (0,\infty)$ y toda $v \in (0,\infty)$. Se requiere que $\beta > -1$, ya que así la integral de la densidad es finita, sino diverge. Veáse la relación (2.5) en Matsumoto & Yor [6] para más detalle.

Demostración. Sean $z, t \in [0,\infty)$, fijas. Por el Teorema de convergencia dominada, se satisface

$$\begin{aligned} \lim_{\lambda\to\infty} \mathbb{E}_{(z,0)}\left[1 - \exp\{-\lambda Z_t\} \,\Big|\, (S_u)_{u\leq t}\right] &= \lim_{\lambda\to\infty}\left(1 - e^{-\frac{z}{\int_0^t \frac{\sigma_b^2}{2}\exp\{-S_u\}\,du + \frac{e^{-S_t}}{\lambda}}} \right) \\ &= 1 - \exp\left\{ -\frac{z}{\int_0^t \frac{\sigma_b^2}{2}\exp\{-S_u\}\,du} \right\}. \end{aligned} \tag{2.1.4}$$

Recordemos que para una variable aleatoria X positiva, se tiene

$$\lim_{\lambda\to\infty} \mathbb{E}\left[1-e^{-\lambda X}\right] = \mathbf{P}\left(X>0\right). \tag{2.1.5}$$

Por lo tanto de (2.1.4), (2.1.5) y por ser Z_t un proceso positivo, vemos que se satisface

$$\begin{aligned}\mathbf{P}_{(z,0)}\Big(Z_t>0\Big|(S_u)_{u\le t}\Big) &= \lim_{\lambda\to\infty}\mathbb{E}_{(z,0)}\left[1-e^{-\lambda Z_t}\,\Big|\,(S_u)_{u\le t}\right]\\ &= 1-\exp\left\{-\frac{z}{\int_0^t \frac{\sigma_b^2}{2}\exp\{-S_u\}\,\mathrm{d}u}\right\}.\end{aligned} \tag{2.1.6}$$

Por otro lado, sean $\sigma_e>0$ y $\beta=-2\alpha/\sigma_e^2$. Se tiene que

$$\begin{aligned}\left(-\alpha s-\sigma_e W_s^{(e)}\right)_{s\le t} &\overset{\text{ley}}{=} \left(-\alpha s+\sigma_e W_s^{(e)}\right)_{s\le t}\\ &= \left(2\left(-\frac{2\alpha}{\sigma_e^2}\right)\frac{\sigma_e^2}{4}s+2\frac{\sigma_e}{2}W_s^{(e)}\right)_{s\le t}\\ &\overset{\text{ley}}{=} \left(2\beta\frac{\sigma_e^2}{4}s+2W^{(e)}_{\frac{\sigma_e^2}{4}s}\right)_{s\le\frac{4t}{\sigma_e^2}},\end{aligned}$$

por simetría y la propiedad de escala ($a^{1/2}W_t^{(e)}\overset{\text{ley}}{=}W_{at}^{(e)}, t\ge 0$), del movimiento browniano. Así, sustituyendo $S_t=\alpha t+\sigma_e^2 W_t^{(e)}$ en (2.1.6) y utilizando la igualdad en distribución anterior, vemos que se satisface

$$\begin{aligned}\mathbf{P}_{(z,0)}\Big(Z_t>0\Big|(S_u)_{u\le t}\Big) &= 1-\exp\left\{-\frac{z}{\int_0^t \frac{\sigma_b^2}{2}\exp\Big\{-\alpha u-\sigma_e W_u^{(e)}\Big\}\,\mathrm{d}u}\right\}\\ &\overset{\text{ley}}{=} 1-\exp\left\{-\frac{z}{\int_0^t \frac{\sigma_b^2}{2}\exp\Big\{2\beta\frac{\sigma_e^2}{4}u+2W^{(e)}_{\frac{\sigma_e^2}{4}u}\Big\}\,\mathrm{d}u}\right\},\end{aligned}$$

haciendo $s=\dfrac{\sigma_e^2}{4}u$, tenemos

$$\begin{aligned}\mathbf{P}_{(z,0)}\Big(Z_t>0\Big|(S_u)_{u\le t}\Big) &= 1-\exp\left\{-\frac{z}{\int_0^{\sigma_e^2 t/4}\frac{\sigma_b^2}{2}\frac{4}{\sigma_e^2}\exp\Big\{2\beta s+2W_u^{(e)}\Big\}\,\mathrm{d}u}\right\}\\ &= 1-\exp\left\{-\frac{\sigma_e^2 z}{2\sigma_b^2 A^{(\beta)}_{\sigma_e^2 t/4}}\right\} = f\left(\frac{z}{2A^{(\beta)}_{\sigma_e^2 t/4}}\right),\end{aligned}$$

donde $f(x) = 1 - \exp\Big\{-\frac{\sigma_e^2}{\sigma_b^2}x\Big\}$. Por lo tanto

$$\mathbf{P}_z\left(Z_t > 0\right) = \mathbb{E}_z\left[\mathbb{E}_z\left[1\!\!1_{\{Z_t>0\}}\,\middle|\,(S_u)_{u\le t}\right]\right] = \mathbb{E}_z\left[f\left(\frac{z}{2A^{(\beta)}_{\sigma_e^2 t/4}}\right)\right].$$

∎

Lema 4. Sea $(Y_t)_{t\geq 1}$ una familia de v.a. no negativas. Suponga que existe una función $c_t : [1,\infty) \to [0,\infty)$ y una constante $a \in [0,\infty)$ tal que $\text{lím}_{t\to\infty} c_t\mathbb{E}\left[Y_t\right] = a$ y $\text{lím sup}_{t\to\infty} c_t\mathbb{E}\left[Y_t^2\right] = 0$. Entonces, tenemos

$$\lim_{t\to\infty} c_t\mathbb{E}\left[1 - \exp\{-\lambda Y_t\}\right] = \lambda a,$$

para toda $\lambda \in [0,\infty)$.

Demostración. Sea $\lambda \in [0,\infty)$, fija. Note que $1 - e^{-\lambda x} \leq \lambda x$ y $1 - e^{-\lambda x} \geq \lambda x - \frac{\lambda^2 x^2}{2}$, para $x \geq 0$. Así

$$\begin{aligned} c_t\mathbb{E}\left[1 - \exp\{-\lambda Y_t\}\right] &\geq c_t\mathbb{E}\left[\lambda Y_t - \frac{\lambda^2 Y_t^2}{2}\right] \\ &= \lambda c_t\mathbb{E}\left[Y_t\right] - \frac{\lambda^2 c_t}{2}\mathbb{E}\left[Y_t^2\right]. \end{aligned}$$

Por hipótesis tenemos que $\text{lím}_{t\to\infty} c_t\mathbb{E}\left[Y_t\right] = a$ y $\text{lím sup}_{t\to\infty} c_t\mathbb{E}\left[Y_t^2\right] = 0$, por lo tanto

$$\begin{aligned} \liminf_{t\to\infty} c_t\mathbb{E}\left[1 - \exp\{-\lambda Y_t\}\right] &\geq \liminf_{t\to\infty}\left(\lambda c_t\mathbb{E}\left[Y_t\right] - \frac{\lambda^2 c_t}{2}\mathbb{E}\left[Y_t^2\right]\right) \\ &\geq \liminf_{t\to\infty} \lambda c_t\mathbb{E}\left[Y_t\right] - \limsup_{t\to\infty}\frac{\lambda^2 c_t}{2}\mathbb{E}\left[Y_t^2\right] \\ &= \lambda a. \end{aligned}$$

Pero, por otro lado tenemos

$$\limsup_{t\to\infty} c_t\mathbb{E}\left[1 - \exp\{-\lambda Y_t\}\right] \leq \lambda \limsup_{t\to\infty} c_t\mathbb{E}\left[Y_t\right] = \lambda a.$$

∎

Note que por el Teorema de Girsanov, para un movimento browniano estándar $(W_s)_{s\geq 0}$, se tiene que

$$\mathbb{E}\left[h((W_s + \zeta s)_{0\leq s\leq t})\right] = \mathbb{E}\left[\exp\left\{\zeta W_t - \zeta^2 t/2\right\} h((W_s)_{0\leq s\leq t})\right], \quad \forall t > 0.$$

Lo anterior nos será de utilidad para demostrar el siguiente Lema.

Lema 5. Sea $\gamma \in \mathbb{R}$ y sea $\left(A_t^{(\gamma)}\right)_{t\geq 0}$ como se definió en (2.1.3). Entonces, tenemos

$$\mathbb{E}\left[\frac{1}{2A_t^{(\gamma)}}\right] = e^{-(2\gamma-2)t}\mathbb{E}\left[\frac{1}{2A_t^{(-(\gamma-2))}}\right],$$
$$\mathbb{E}\left[\frac{1}{\left(2A_t^{(\gamma)}\right)^2}\right] \leq e^{-(2\gamma-2)t}\mathbb{E}\left[\frac{1}{2A_{t/2}^{(\gamma-2)}}\right]\mathbb{E}\left[\frac{1}{2A_{t/2}^{(-(\gamma-2))}}\right],$$

para toda $t \in (0,\infty)$.

Demostración. Sea $t \in (0,\infty)$ y $\sigma \in \mathbb{R}$, fijos. Del Teorema de Girsanov, aplicándolo a

$$h_1((W_s^{(e)})_{s\leq t}) = \frac{1}{2\int\limits_0^t \exp\left\{2((\gamma-2)s + W_s^{(e)})\right\}\mathrm{d}s},$$

se tiene que

$$\mathbb{E}\left[\frac{1}{2A_t^{(\gamma)}}\right] = \mathbb{E}\left[\frac{1}{2\int\limits_0^t \exp\left\{2(\gamma s + W_s^{(e)})\mathrm{d}s\right\}}\right] = \mathbb{E}\left[\frac{\exp\left\{2W_t^{(e)} - 2^2t/2\right\}}{2\int\limits_0^t \exp\left\{2((\gamma-2)s + W_s^{(e)})\mathrm{d}s\right\}}\right]$$
$$= e^{-2t}\mathbb{E}\left[\frac{1}{2\int\limits_0^t \exp\left\{2((\gamma-2)s + W_s^{(e)} - W_t^{(e)})\mathrm{d}s\right\}}\right].$$

Ahora, por la propiedad de simetría y retorno en el tiempo del movimento browniano, $(W_s^{(e)} - W_t^{(e)} \overset{\text{ley}}{=} W_{t-s}^{(e)}, t \geq 0)$, tenemos

$$\mathbb{E}\left[\frac{1}{2A_t^{(\gamma)}}\right] = e^{-2t}\mathbb{E}\left[\frac{1}{2\int\limits_0^t \exp\left\{2((\gamma-2)s + W_{t-s}^{(e)})\mathrm{d}s\right\}}\right].$$

Haciendo un cambio de variable $u = t - s$, obtenemos

$$\mathbb{E}\left[\frac{1}{2A_t^{(\gamma)}}\right] = e^{-2t}\mathbb{E}\left[\frac{1}{2\int\limits_0^t \exp\left\{2((\gamma-2)(t-u) + W_u^{(e)})\mathrm{d}s\right\}}\right]$$
$$= e^{-2t}e^{2(2-\gamma)t}\mathbb{E}\left[\frac{1}{2\int\limits_0^t \exp\left\{2(-(\gamma-2)u + W_u^{(e)})\mathrm{d}s\right\}}\right].$$

Así
$$\mathbb{E}\left[\frac{1}{2A_t^{(\gamma)}}\right] = e^{(2-2\gamma)t}\mathbb{E}\left[\frac{1}{2A_t^{(-(\gamma-2))}}\right]$$
Lo que prueba la primera afirmación. Análogamente, del Teorema de Girsanov aplicado a
$$h_2((W_s^{(e)})_{s\le t}) = \frac{1}{\left(2\int\limits_0^t \exp\left\{2((\gamma-2)s + W_s^{(e)})\mathrm{d}s\right\}\right)^2},$$

se tiene que

$$\mathbb{E}\left[\frac{1}{\left(2A_t^{(\gamma)}\right)^2}\right] = \mathbb{E}\left[\frac{1}{\left(2\int\limits_0^t \exp\left\{2(\gamma s + W_s^{(e)})\mathrm{d}s\right\}\right)^2}\right]$$
$$= \mathbb{E}\left[\frac{\exp\left\{2W_t^{(e)} - 2^2 t/2\right\}}{\left(2\int\limits_0^t \exp\left\{2((\gamma-2)s + W_s^{(e)})\mathrm{d}s\right\}\right)^2}\right]$$
$$\le \mathbb{E}\left[\frac{\left(e^{-2t}\right)\left(\exp\left\{2W_t^{(e)}\right\}\right)}{\left(2\int\limits_0^{t/2} \exp\left\{2((\gamma-2)s + W_s^{(e)})\mathrm{d}s\right\}\right)\left(2\int\limits_{t/2}^t \exp\left\{2((\gamma-2)s + W_s^{(e)})\mathrm{d}s\right\}\right)}\right]$$
$$= e^{-2t}\mathbb{E}\left[\frac{1}{A_{t/2}^{(\gamma-2)}}\right]$$
$$\times \mathbb{E}\left[\mathbb{E}\left[\left(\frac{1}{2\int\limits_{t/2}^t \exp\left\{2((\gamma-2)s - \left(W_t^{(e)} - W_s^{(e)}\right))\mathrm{d}s\right\}}\right)\right]\Big|(W_s^{(e)})_{s\le t/2}\right]$$
$$= e^{-2t}\mathbb{E}\left[\frac{1}{A_{t/2}^{(\gamma-2)}}\right]\mathbb{E}\left[\frac{1}{2\int\limits_{t/2}^t \exp\left\{2((\gamma-2)s - W_{t-s}^{(e)})\mathrm{d}s\right\}}\right]$$
$$= e^{-2t}\mathbb{E}\left[\frac{1}{A_{t/2}^{(\gamma-2)}}\right]\mathbb{E}\left[\frac{1}{2\int\limits_{t/2}^t \exp\left\{2((\gamma-2)s + W_{t-s}^{(e)})\mathrm{d}s\right\}}\right],$$

la desigualdad se tiene ya que $\dfrac{1}{(a+b)^2} \le \dfrac{1}{2ab} \le \dfrac{1}{ab}$, si $a, b \in [0,\infty)$. Note que en la expresión anterior, por incrementos independientes del movimiento browniano, tenemos que la esperanza del producto de variables aleatorias independientes es el producto de las esperanzas, también se utilizó la propiedad de simetría y retorno en el tiempo del movimiento browniano. Nuevamente, haciendo un cambio de variable $u = t - s$, en la segunda esperanza de la parte derecha, obtenemos

$$\mathbb{E}\left[\frac{1}{2\int\limits_{t/2}^{t}\exp\left\{2((\gamma-2)s+W^{(e)}_{t-s})\mathrm{d}s\right\}}\right] = \mathbb{E}\left[\frac{1}{2\int\limits_{0}^{t/2}\exp\left\{2((\gamma-2)(t-u)+W^{(e)}_{u})\mathrm{d}u\right\}}\right]$$
$$= \mathbb{E}\left[\frac{e^{2(2-\gamma)t}}{2\int\limits_{0}^{t/2}\exp\left\{2((2-\gamma)u+W^{(e)}_{u})\mathrm{d}u\right\}}\right].$$

Por lo tanto

$$\mathbb{E}\left[\frac{1}{\left(2A_t^{(\gamma)}\right)^2}\right] \leq e^{-2t}e^{2(2-\gamma)t}\mathbb{E}\left[\frac{1}{A_{t/2}^{(\gamma-2)}}\right]\mathbb{E}\left[\frac{1}{2\int\limits_{0}^{t/2}\exp\left\{2((2-\gamma)u+W^{(e)}_{u})\mathrm{d}s\right\}}\right]$$
$$\leq e^{(2-2\gamma)t}\mathbb{E}\left[\frac{1}{2A_{t/2}^{(\gamma-2)}}\right]\mathbb{E}\left[\frac{1}{2A_{t/2}^{(-(\gamma-2))}}\right].$$

∎

El siguiente Lema, debido a Dufresne, se presentará sin demostración, puede ver [8] para la demostración. En el siguiente Capítulo nos será de utilidad como herramienta para calcular algunas probabilidades asintóticas del BDRE supercrítico condicionado a la extinción.

Lema 6. (Dufresne) Sea $(W_t)_{t\geq 0}$ un movimiento browniano estándar. Para toda $a \neq 0$ y $b > 0$, se tiene que

$$\left(\int\limits_0^\infty \exp\{(aW_s - bs)\mathrm{d}s\}\right)^{-1} \overset{\text{ley}}{=} \frac{a^2}{2}G_{\frac{2b}{a^2}},$$

donde

$$\mathbf{P}\left(G_v \in \mathrm{d}x\right) = \frac{x^{v-1}e^{-x}}{\Gamma(v)}\mathrm{d}x,$$

es decir, G_v es una variable aleatoria con distribución gama con parámetro de forma v y de escala 1.

Lema 7. Sea $g : [0,\infty) \to [0,\infty)$ una función Borel medible. Suponga que existen constantes $c, p \in (0,\infty)$ tal que $g(x) \le cx^p$ para toda $x \ge 0$. Entonces se satisface que

$$\lim_{t\to\infty} \sqrt{t}\mathbb{E}\left[g\left(\frac{1}{2A_t}\right)\right] = \int\limits_0^\infty g(a)\frac{e^{-a}}{a\sqrt{2\pi}}\mathrm{d}a < \infty,$$

en donde $A_t := A_t^{(0)}$, con $A_t^{(0)}$ definida como en (2.1.3).

Demostración. Por el Teorema 4.1 en [3], la función de densidad de $(2A_t)^{-1}$ esta dada por

$$\begin{aligned} p_t(a)\mathrm{d}a &:= \mathbf{P}\left(\frac{1}{2A_t} \in \mathrm{d}a\right) \\ &= \frac{\sqrt{2}e^{\pi^2/(8t)}}{\sqrt{\pi^2 at}}\int\limits_0^\infty \exp\left\{-a\cosh^2(y) - \frac{y^2}{2t}\right\}\cosh(y)\cos\left(\frac{\pi y}{2t}\right)\mathrm{d}y\mathrm{d}a, \end{aligned}$$

para toda $a > 0$ y $t \ge 0$. Por otro lado, tenemos que para toda $x > 0$,

$$\frac{e^x}{2} \le \cosh(x) \le e^x \quad \text{y} \quad |\cos(x)| \le 1.$$

Sea g una función tal que satisface las hipótesis del Lema, así obtenemos que para toda $t \ge 1$,

$$\begin{aligned} \sqrt{t}\mathbb{E}\left[g\left(\frac{1}{2A_t}\right)\right] &\le \frac{\sqrt{2}}{\pi}\int\limits_0^\infty\int\limits_0^\infty \sup_{t\ge 1}\left|\frac{e^{\frac{\pi^2}{8t}}g(a)}{\sqrt{a}}\exp\left\{-a\cosh^2(y) - \frac{y^2}{2t}\right\}\right. \\ &\qquad \left.\times \cosh(y)\cos\left(\frac{\pi y}{2t}\right)\right|\mathrm{d}y\mathrm{d}a \\ &\le k_1\int\limits_0^\infty\int\limits_0^\infty e^{\frac{\pi^2}{8}}a^{p-1/2}\exp\left\{-\frac{ae^{2y}}{4}\right\}e^y\mathrm{d}y\mathrm{d}a, \end{aligned} \tag{2.1.7}$$

donde $0 < k_1 = c\frac{\sqrt{2}}{\pi} < \infty$, aquí utilizamos que el supremo del producto es menor o igual al producto de los supremos. Haciendo un cambio de variable $z = ax$, vemos que

$$\int\limits_0^\infty a^{p-1/2}e^{-ax}\mathrm{d}a = \int\limits_0^\infty z^{p-1/2}x^{1/2-p}e^{-z}\frac{1}{x}\mathrm{d}z = \frac{1}{x^{p+1/2}}\Gamma\left(p+1/2\right), \tag{2.1.8}$$

para toda $x > 0$. Utilizando el Teorema de tonelli en (2.1.7) y la igualdad en (2.1.8), se satisface

$$
\begin{aligned}
&\sqrt{t}\mathbb{E}\left[g\left(\frac{1}{2A_t}\right)\right] \\
&\leq k_2 \int_0^\infty \int_0^\infty a^{p-1/2} \exp\left\{-\frac{ae^{2y}}{4}\right\} e^y \mathrm{d}y\mathrm{d}a = k_2 \int_0^\infty \int_0^\infty a^{p-1/2} \exp\left\{-\frac{ae^{2y}}{4}\right\} e^y \mathrm{d}a\mathrm{d}y \\
&= k_2 \int_0^\infty \Gamma\left(p+1/2\right) \left(\frac{4}{e^{2y}}\right)^{p+1/2} e^y \mathrm{d}y = k_2 \Gamma\left(p+1/2\right) 2^{2p+1} \int_0^\infty e^{-2py} \mathrm{d}y \\
&= k_2 \Gamma\left(p+1/2\right) 2^{2p+1} \frac{1}{2p} < \infty.
\end{aligned}
$$

donde $0 < k_2 = e^{\frac{\pi^2}{8}} k_1 < \infty$. Por lo tanto $\sqrt{t}\mathbb{E}\left[g(\frac{1}{2A_t})\right]$ es finita, para toda $t \geq 1$. Por el Teorema de convergencia dominada tenemos

$$
\begin{aligned}
\lim_{t\to\infty} \sqrt{t}\mathbb{E}\left[g\left(\frac{1}{2A_t}\right)\right] &= \lim_{t\to\infty} \sqrt{t} \int_0^\infty g(a) p_t(a) \mathrm{d}a \\
&= \int_0^\infty g(a) \int_0^\infty \lim_{t\to\infty} \sqrt{t} \frac{\sqrt{2} e^{\frac{\pi^2}{8t}}}{\sqrt{\pi^2 a t}} \exp\left\{-a\cosh^2(y) - \frac{y^2}{2t}\right\} \\
&\quad \times \cosh(y) \cos\left(\frac{\pi y}{2t}\right) \mathrm{d}y\mathrm{d}a \\
&= \int_0^\infty g(a) \int_0^\infty \frac{\sqrt{2}}{\pi\sqrt{a}} \exp\left\{-a\cosh^2(y)\right\} \cosh(y) \mathrm{d}y\mathrm{d}a.
\end{aligned}
$$

Para terminar la prueba, note que $\cosh^2(y) = \sinh^2(y) + 1$, para toda $y \in \mathbb{R}$. Haciendo un cambio de variable $x = \sqrt{2a}\sinh(y)$, vemos que se satisface

$$
\begin{aligned}
\int_0^\infty \frac{\sqrt{2}}{\pi\sqrt{a}} \exp\left\{-a\cosh^2(y)\right\} \cosh(y) \mathrm{d}y &= \int_0^\infty \frac{\sqrt{2}}{\pi\sqrt{a}} \exp\left\{-a(1+\sinh^2(y))\right\} \cosh(y) \mathrm{d}y \\
&= \int_0^\infty \frac{\sqrt{2}}{\pi\sqrt{a}} \exp\left\{-a - \frac{x^2}{2}\right\} \frac{1}{\sqrt{2a}} \mathrm{d}x \\
&= \frac{e^{-a}}{a\sqrt{2\pi}},
\end{aligned}
$$

para toda $a > 0$. Por lo tanto

$$
\lim_{t\to\infty} \sqrt{t}\mathbb{E}\left[g\left(\frac{1}{2A_t}\right)\right] = \int_0^\infty g(a) \frac{e^{-a}}{a\sqrt{2\pi}} \mathrm{d}a < \infty.
$$

$\blacksquare$

Lema 8. Sea $\gamma > 0$ y sea $g : [0,\infty) \to [0,\infty)$ una función Borel medible. Suponga que para toda $x \geq 0$, $g(x) \leq cx^b$, para algún $b > \gamma/2$ y $c > 0$. Entonces

$$\lim_{t\to\infty} t^{3/2} e^{\gamma^2 t/2} \mathbb{E}\left[g\left(\frac{1}{2A_t^{(\gamma)}} \right) \right] = \int_0^\infty g(a)\phi_\gamma(a)\mathrm{d}a,$$

donde

$$\begin{aligned}\phi_\gamma(a) = \int_0^\infty \int_0^\infty & \frac{1}{\pi\sqrt{2}} \Gamma\left(\frac{\gamma+2}{2}\right) e^{-a} a^{-\gamma/2} u^{(\gamma-1)/2} e^{-u} \\ & \times \frac{\sinh(\xi)\cosh(\xi)\xi}{(u + a\cosh^2(\xi))^{(\gamma+2)/2}} \mathrm{d}\xi \mathrm{d}u.\end{aligned}$$

Demostración. Sea $\gamma > 0$, fija. Sea g una función tal que satisface las hipótesis del Lema con constantes $b > \gamma/2$ y $c > 0$. Recordemos la densidad de $\frac{1}{2A_t^{(\gamma)}}$, para $\gamma > 0$. Así, para $t > 0$, tenemos

$$\begin{aligned} t^{3/2} e^{\gamma^2 t/2} & \mathbb{E}\left[g\left(\frac{1}{2A_t^{(\gamma)}} \right) \right] \\ &= t^{3/2} e^{\gamma^2 t/2} \int_0^\infty g(a) p_{t,\gamma}(a) \mathrm{d}a \\ &= t^{3/2} e^{\gamma^2 t/2} \frac{e^{-\gamma^2 t/2} e^{\pi^2/(2t)}}{\pi^2 \sqrt{2t}} \Gamma\left(\frac{\gamma+2}{2}\right) \int_0^\infty \int_0^\infty \int_0^\infty g(a) e^{-a} a^{-(\gamma+1)/2} \\ & \quad \times e^{-\xi^2/(2t)} s^{(\gamma-1)/2} e^{-as} \frac{\sinh(\xi)\cosh(\xi)\sin(\pi\xi/t)}{\left(s + \cosh^2(\xi)\right)^{\frac{\gamma+2}{2}}} \mathrm{d}\xi \mathrm{d}s \mathrm{d}a. \end{aligned}$$

Haciendo un cambio de variable $u = as$, obtenemos

$$\begin{aligned} t^{3/2} e^{\gamma^2 t/2} \mathbb{E}\left[g\left(\frac{1}{2A_t^{(\gamma)}} \right) \right] &= \frac{t e^{\frac{\pi^2}{2t}}}{\pi^2\sqrt{2}} \Gamma\left(\frac{\gamma+2}{2}\right) \int_0^\infty \int_0^\infty \int_0^\infty g(a) e^{-a} a^{-(\gamma+1)/2} e^{-\xi^2/(2t)} \\ & \quad \times \left(\frac{u}{a}\right)^{(\gamma-1)/2} e^{-u} \frac{\sinh(\xi)\cosh(\xi)\sin(\pi\xi/t)}{\left(u/a + \cosh^2(\xi)\right)^{\frac{\gamma+2}{2}}} \mathrm{d}\xi \frac{\mathrm{d}u}{a} \mathrm{d}a \\ &= \frac{t e^{\frac{\pi^2}{2t}}}{\pi^2\sqrt{2}} \Gamma\left(\frac{\gamma+2}{2}\right) \int_0^\infty \int_0^\infty \int_0^\infty g(a) e^{-a} a^{-\gamma/2} \\ & \quad \times e^{-\xi^2/(2t)} u^{(\gamma-1)/2} e^{-u} \frac{\sinh(\xi)\cosh(\xi)\sin(\pi\xi/t)}{\left(u + a\cosh^2(\xi)\right)^{\frac{\gamma+2}{2}}} \mathrm{d}\xi \mathrm{d}u \mathrm{d}a. \end{aligned}$$

Ahora veremos que la integral de la parte derecha esta dominada por una función integrable para toda $t \geq 1$, después utilizaremos el Teorema de convergencia dominada para obtener el resultado. Tenemos que se satisfacen las siguientes desigualdades

$$|\sin(x)| \leq x, \quad \sinh(x) \leq \cosh(x) \leq e^x, \quad \frac{e^x}{2} \leq \cosh(x), \quad \forall x \geq 0.$$

Y por hipótesis $g(x) \leq cx^b$, para toda $x \geq 0$. Entonces para $t \geq 1$, tenemos que se satisface

$$\begin{aligned}
t^{3/2} e^{\frac{\gamma^2 t}{2}} \mathbb{E}\left[g\left(\frac{1}{2A_t}\right)\right] &\leq \int_0^\infty\int_0^\infty\int_0^\infty \sup_{t\geq 1}\left[\frac{te^{\frac{\pi^2}{2t}}}{\pi^2\sqrt{2}}\Gamma\left(\frac{\gamma+2}{2}\right) g(a)e^{-a}a^{-\gamma/2}\right. \\
&\qquad \left.\times\, e^{-\frac{\xi^2}{2t}} u^{\frac{\gamma-1}{2}} e^{-u}\frac{\sinh(\xi)\cosh(\xi)\sin(\pi\xi/t)}{\left(u+a\cosh^2(\xi)\right)^{\frac{\gamma+2}{2}}}\right] \mathrm{d}\xi \mathrm{d}u \mathrm{d}a \\
&\leq \int_0^\infty\int_0^\infty\int_0^\infty \sup_{t\geq 1}\left[\frac{te^{\frac{\pi^2}{2t}}}{\pi^2\sqrt{2}}\Gamma\left(\frac{\gamma+2}{2}\right) ca^b e^{-a}a^{-\frac{\gamma}{2}}\right. \\
&\qquad \left.\times\, e^{-\frac{\xi^2}{2t}} u^{\frac{\gamma-1}{2}} e^{-u}\frac{\pi e^{2\xi}\frac{\xi}{t}}{\left(u+\frac{ae^{2\xi}}{4}\right)^{\frac{\gamma+2}{2}}}\right] \mathrm{d}\xi \mathrm{d}u \mathrm{d}a \\
&\leq c_1 \int_0^\infty\int_0^\infty\int_0^\infty e^{-a}a^{b-\frac{\gamma}{2}} u^{\frac{\gamma-1}{2}} e^{-u}\frac{e^{2\xi}\xi}{(4u+ae^{2\xi})^{(\gamma+2)/2}} \mathrm{d}\xi \mathrm{d}u \mathrm{d}a \\
&= c_1\left[\int_0^1\int_0^\infty\int_0^\infty e^{-a}a^{b-\frac{\gamma}{2}} u^{\frac{\gamma-1}{2}} e^{-u}\frac{e^{2-\gamma\xi}\xi}{(4ue^{-2\xi}+a)^{(\gamma+2)/2}} \mathrm{d}\xi \mathrm{d}u \mathrm{d}a\right. \\
&\qquad \left. + \int_1^\infty\int_0^\infty\int_0^\infty e^{-a}a^{b-\frac{\gamma}{2}} u^{\frac{\gamma-1}{2}} e^{-u}\frac{e^{2-\gamma\xi}\xi}{(4ue^{-2\xi}+a)^{(\gamma+2)/2}} \mathrm{d}\xi \mathrm{d}u \mathrm{d}a\right],
\end{aligned}$$

donde $0 < c_1 = \dfrac{ce^{\pi^2/2}}{\pi^2\sqrt{2}}\Gamma\left(\dfrac{\gamma+2}{2}\right) < \infty$. Ahora veamos que cada sumando es finito, para así obtener que la suma lo es. Para el primer término, sea $\epsilon \in (0, \text{mín}(b-\gamma/2, \gamma/2))$, note que ϵ existe, ya que tenemos $\gamma > 0$ y $b - \gamma/2 > 0$. Además utilizando que $a^x \leq a^y$ para toda $a \in [0,1]$ y $0 \leq y \leq x$, vemos que se satisface

$$\begin{aligned}
&\int_0^1\int_0^\infty\int_0^\infty e^{-a}a^{b-\gamma/2}u^{(\gamma-1)/2}e^{-u}\frac{e^{2-\gamma\xi}\xi}{(4ue^{-2\xi}+a)^{(\gamma+2)/2}} \mathrm{d}\xi \mathrm{d}u \mathrm{d}a \\
&\qquad \leq \int_0^1\int_0^\infty\int_0^\infty a^{\epsilon}u^{(\gamma-1)/2}e^{-u}\frac{e^{2-\gamma\xi}\xi}{(4ue^{-2\xi}+a)^{(\gamma+2)/2}} \mathrm{d}\xi \mathrm{d}u \mathrm{d}a
\end{aligned}$$

por el Teorema de Tonelli y notando que $a^\epsilon \le (4ue^{-2\xi}+a)^\epsilon$, para $a, u, \xi \ge 0$, tenemos

$$\begin{aligned}
&\int_0^1\int_0^\infty\int_0^\infty e^{-a}a^{b-\gamma/2}u^{(\gamma-1)/2}e^{-u}\frac{e^{2-\gamma\xi}\xi}{(4ue^{-2\xi}+a)^{(\gamma+2)/2}}\mathrm{d}\xi\mathrm{d}u\mathrm{d}a\\
&\qquad\le \int_0^\infty\int_0^\infty\int_0^1 (4ue^{-2\xi}+a)^\epsilon u^{(\gamma-1)/2}e^{-u}\frac{e^{-\xi\gamma}\xi}{(4ue^{-2\xi}+a)^{(\gamma+2)/2}}\mathrm{d}a\mathrm{d}u\mathrm{d}\xi\\
&\qquad\le \int_0^\infty\int_0^\infty u^{(\gamma-1)/2}e^{-u}e^{-\xi\gamma}\xi\int_0^1\frac{1}{(4ue^{-2\xi}+a)^{(\gamma+2)/2-\epsilon}}\mathrm{d}a\mathrm{d}u\mathrm{d}\xi\\
&\qquad= \int_0^\infty\int_0^\infty u^{(\gamma-1)/2}e^{-u}e^{-\xi\gamma}\xi\left(\frac{1}{(4ue^{-2\xi})^{\gamma/2-\epsilon}}-\frac{1}{(4ue^{-2\xi}+1)^{\gamma/2-\epsilon}}\right)\frac{1}{\gamma/2-\epsilon}\mathrm{d}u\mathrm{d}\xi\\
&\qquad\le \int_0^\infty\int_0^\infty u^{(\gamma-1)/2}e^{-u}e^{-\xi\gamma}\xi\left(\frac{1}{(4ue^{-2\xi})^{\gamma/2-\epsilon}}\right)\frac{1}{\gamma/2-\epsilon}\mathrm{d}u\mathrm{d}\xi\\
&\qquad= \frac{4^{\epsilon-\gamma/2}}{\gamma/2-\epsilon}\int_0^\infty\int_0^\infty u^{\epsilon-1/2}e^{-u}e^{-2\epsilon\xi}\xi\mathrm{d}u\mathrm{d}\xi\\
&\qquad= \frac{4^{\epsilon-\gamma/2}}{\gamma/2-\epsilon}\Gamma\left(\frac{1}{2}+\epsilon\right)\frac{1}{4\epsilon^2}<\infty,
\end{aligned}$$

ya que $\epsilon > 0$. Para el segundo término, utilizando que

$$\frac{e^{2-\gamma\xi}\xi}{(4ue^{-2\xi}+a)^{(\gamma+2)/2}}\le\frac{e^{2-\gamma\xi}\xi}{a^{(\gamma+2)/2}},$$

obtenemos

$$\begin{aligned}
&\int_1^\infty\int_0^\infty\int_0^\infty e^{-a}a^{b-\gamma/2}u^{(\gamma-1)/2}e^{-u}\frac{e^{2-\gamma\xi}\xi}{(4ue^{-2\xi}+a)^{(\gamma+2)/2}}\mathrm{d}\xi\mathrm{d}u\mathrm{d}a\\
&\qquad\le \int_1^\infty\int_0^\infty\int_0^\infty e^{-a}a^{b-\gamma/2}u^{(\gamma-1)/2}e^{-u}\frac{e^{2-\gamma\xi}\xi}{a^{(\gamma+2)/2}}\mathrm{d}\xi\mathrm{d}u\mathrm{d}a.
\end{aligned}$$

Pero

$$\begin{aligned}
&\int_1^\infty\int_0^\infty\int_0^\infty e^{-a}a^{b-\gamma/2}u^{(\gamma-1)/2}e^{-u}\frac{e^{2-\gamma\xi}\xi}{a^{(\gamma+2)/2}}\mathrm{d}\xi\mathrm{d}u\mathrm{d}a\\
&= \int_1^\infty\int_0^\infty e^{-a}a^{b-\gamma/2}u^{(\gamma-1)/2}e^{-u}\frac{1}{a^{(\gamma+2)/2}}\frac{1}{\gamma^2}\mathrm{d}u\mathrm{d}a=\frac{1}{\gamma^2}\int_1^\infty e^{-a}a^{b-\gamma/2}\frac{1}{a^{(\gamma+2)/2}}\Gamma\left(\frac{\gamma+1}{2}\right)\mathrm{d}a\\
&\le \frac{1}{\gamma^2}\Gamma\left(\frac{\gamma+1}{2}\right)\Gamma\left(1+b-\frac{\gamma}{2}\right)<\infty,
\end{aligned}$$

pues se tiene $\gamma > 0$ y $b - \gamma/2 > 0$. Note que también utilizamos que $\dfrac{1}{a^\ell} \leq 1$, para toda $a \geq 1$ y $\ell \geq 0$. Por lo tanto

$$t^{3/2} e^{\gamma^2 t/2} \mathbb{E}\left[g\left(\frac{1}{2A_t} \right) \right] < \infty,$$

para toda $t \geq 1$. Utilizando el Teorema de convergencia dominada y que

$$t \sin(\pi\xi/t) \to \pi\xi, \qquad \text{cuando } t \to \infty,$$

para toda $\xi \in [0, \infty)$, obtenemos

$$\begin{aligned}
\lim_{t\to\infty} t^{3/2} e^{\gamma^2 t/2} \mathbb{E}\left[g\left(\frac{1}{2A_t} \right) \right] &= \Gamma\left(\frac{\gamma+2}{2} \right) \int_0^\infty \int_0^\infty \int_0^\infty \lim_{t\to\infty} \frac{t \sin(\pi\xi/t) e^{\pi^2/(2t)} e^{-\xi^2/(2t)}}{\pi^2 \sqrt{2}} \\
&\quad \times g(a) e^{-a} a^{-\gamma/2} u^{(\gamma-1)/2} e^{-u} \frac{\sinh(\xi)\cosh(\xi)}{\left(u + a\cosh^2(\xi) \right)^{\frac{\gamma+2}{2}}} \mathrm{d}\xi \mathrm{d}u \mathrm{d}a \\
&= \Gamma\left(\frac{\gamma+2}{2} \right) \int_0^\infty \int_0^\infty \int_0^\infty \frac{\pi\xi}{\pi^2 \sqrt{2}} \\
&\quad \times g(a) e^{-a} a^{-\gamma/2} u^{(\gamma-1)/2} e^{-u} \frac{\sinh(\xi)\cosh(\xi)}{\left(u + a\cosh^2(\xi) \right)^{\frac{\gamma+2}{2}}} \mathrm{d}\xi \mathrm{d}u \mathrm{d}a \\
&= \frac{1}{\pi\sqrt{2}} \Gamma\left(\frac{\gamma+2}{2} \right) \int_0^\infty \int_0^\infty \int_0^\infty g(a) e^{-a} a^{-\gamma/2} u^{(\gamma-1)/2} e^{-u} \\
&\quad \times \frac{\sinh(\xi)\cosh(\xi)\xi}{\left(u + a\cosh^2(\xi) \right)^{\frac{\gamma+2}{2}}} \mathrm{d}\xi \mathrm{d}u \mathrm{d}a \\
&= \int_0^\infty g(a) \phi_\gamma(a) \mathrm{d}a.
\end{aligned}$$

∎

Lema 9. Sean $\sigma_b, \sigma_e, \alpha \in (0, \infty)$. Definamos las funciones $U : [0, \infty) \to (0, \infty)$ y $V : \mathbb{R} \to (0, \infty)$, como

$$U(z) := (\sigma_e^2 z + \sigma_b^2)^{-\frac{2\alpha}{\sigma_e^2}} \quad \text{y} \quad V(s) := \exp\left\{ -\frac{2\alpha}{\sigma_e^2} s \right\},$$

para toda $z \in [0, \infty)$ y $s \in \mathbb{R}$. Entonces U es una función de escala para $(Z_t)_{t\geq 0}$ y V es una función escala para $(S_t)_{t\geq 0}$, es decir, $(U(Z_t))_{t\geq 0}$ y $(V(S_t))_{t\geq 0}$ son martingalas. Además sus generadores infinitesimales valen cero, es decir, $\mathcal{G}U(z) = 0 = \mathcal{G}V(s)$.

Demostración. Aplicando la fórmula de Itô a $U(Z_t)$, vemos que se satisface

$$
\begin{aligned}
U(Z_t) &= U(Z_0) + \int_0^t \frac{\mathrm{d}U(Z_u)}{\mathrm{d}z}\mathrm{d}Z_u + \frac{1}{2}\int_0^t \frac{\mathrm{d}^2U(Z_u)}{\mathrm{d}z^2}\mathrm{d}\left\langle Z\right\rangle_u \\
&= U(Z_0) + \int_0^t -2\alpha\left(\sigma_e^2 Z_u + \sigma_b^2\right)^{-\left(1+\frac{2\alpha}{\sigma_e^2}\right)}\left(\left(\alpha + \frac{1}{2}\sigma_e^2\right) Z_u\mathrm{d}u\right. \\
&\quad \left. + \sqrt{\sigma_e^2 Z_u^2}\mathrm{d}W_u^{(e)} + \sqrt{\sigma_b^2 Z_u}\mathrm{d}W_u^{(b)}\right) + \frac{1}{2}\int_0^t (4\alpha^2 + 2\alpha\sigma_e^2)\left(\sigma_e^2 Z_u + \sigma_b^2\right)^{-\left(2+\frac{2\alpha}{\sigma_e^2}\right)} \\
&\quad \times \left(\sigma_e^2 Z_u^2 + \sigma_b^2 Z_u\right)\mathrm{d}u \\
&= U(Z_0) + \int_0^t -2\alpha\left(\sigma_e^2 Z_u + \sigma_b^2\right)^{-\left(1+\frac{2\alpha}{\sigma_e^2}\right)}\sqrt{\sigma_e^2 Z_u^2}\mathrm{d}W_u^{(e)} \\
&\quad + \int_0^t -2\alpha\left(\sigma_e^2 Z_u + \sigma_b^2\right)^{-\left(1+\frac{2\alpha}{\sigma_e^2}\right)}\sqrt{\sigma_b^2 Z_u}\mathrm{d}W_u^{(b)} \\
&= U(Z_0) + \int_0^t \frac{\partial U(Z_u)}{\partial z}\sqrt{\sigma_e^2 Z_u^2}\mathrm{d}W_u^{(e)} + \int_0^t \frac{\partial U(Z_u)}{\partial z}\sqrt{\sigma_b^2 Z_u}\mathrm{d}W_u^{(b)}.
\end{aligned}
$$

Aquí utilizamos que $\mathrm{d}Z_t = \left(\alpha + \frac{1}{2}\sigma_e^2\right) Z_u\mathrm{d}u + \sqrt{\sigma_e^2 Z_u^2}\mathrm{d}W_u^{(e)} + \sqrt{\sigma_b^2 Z_u}\mathrm{d}W_u^{(b)}$ y que $\mathrm{d}\left\langle Z\right\rangle_t = \left(\sigma_e^2 Z_u^2 + \sigma_b^2 Z_u\right)\mathrm{d}u$. Por lo tanto $\mathcal{G}U(z) = 0$ y $(U(Z_t))_{t\geq 0}$ es una martingala local. Por ser U una función acotada por $(1/\sigma_b^2)^{\frac{-2\alpha}{\sigma_e^2}}$, tenemos que $(U(Z_t))_{t\geq 0}$ es una martingala, aún más, es una martingala uniformemente integrable.

Por otro lado, como V es doblemente diferenciable, aplicando la fórmula de Itô a $V(S_t)$, vemos que se cumple

$$
\begin{aligned}
V(S_t) &= V(S_0) + \int_0^t \frac{\mathrm{d}V(S_u)}{\mathrm{d}s}\mathrm{d}S_u + \frac{1}{2}\int_0^t \frac{\mathrm{d}^2V(S_u)}{\mathrm{d}s}\mathrm{d}\left\langle S\right\rangle_u \\
&= V(S_0) + \int_0^t \frac{-2\alpha}{\sigma_e^2}e^{\frac{-2\alpha}{\sigma_e^2}S_u}\left(\alpha\mathrm{d}u + \sqrt{\sigma_e^2}\mathrm{d}W_u^{(e)}\right) \\
&\quad + \frac{1}{2}\int_0^t \frac{4\alpha^2}{\sigma_e^4}e^{\frac{-2\alpha}{\sigma_e^2}S_u}\sigma_e^2\mathrm{d}u \\
&= V(S_0) + \int_0^t \frac{-2\alpha}{\sigma_e^2}e^{\frac{-2\alpha}{\sigma_e^2}S_u}\sqrt{\sigma_e^2}\mathrm{d}W_u^{(e)} \\
&= V(S_0) + \int_0^t \frac{\partial V(S_u)}{\partial s}\sqrt{\sigma_e^2}\mathrm{d}W_u^{(e)}.
\end{aligned}
$$

Por lo tanto $\mathcal{G}V(s) = 0$. Además, tenemos que $V(S_t)_{t\geq 0}$ es una martingala, pues para $s \leq t$, se tiene que $\mathbb{E}\Big[e^{-\lambda B_t}\Big|\mathcal{F}_s\Big] = e^{-\lambda B_s + \frac{\lambda^2}{2}(t-s)}$, donde $(B_t)_{t\geq 0}$ es un movimiento browniano estándar y $(\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$ una filtración en la cuál $(B_t)_{t\geq 0}$ es adaptada. ∎

Lema 10. Sean $\alpha, \sigma_e, \sigma_b \in (0,\infty)$. Entonces el semigrupo del BDRE $(Z_t, S_t)_{t\geq 0}$ condicionado a la extinción satisface

$$\mathbb{E}_{(z,s)}\left[f(Z_t,S_t)\,\Big|\, Z_\infty = 0\right] = \frac{\mathbb{E}_{(z,s)}\left[U(Z_t)f(Z_t,S_t)\right]}{U(z)},$$

el semigrupo del BDRE $(Z_t, S_t)_{t\geq 0}$ condicionado en $\{S_\infty = -\infty\}$ satisface que

$$\mathbb{E}_{(z,s)}\left[f(Z_t,S_t)\,\Big|\, S_\infty = -\infty\right] = \frac{\mathbb{E}_{(z,s)}\left[V(S_t)f(Z_t,S_t)\right]}{V(s)},$$

y el semigrupo del BDRE $(Z_t, S_t)_{t\geq 0}$ condicionado en $\{Z_\infty > 0\}$ satisface

$$\mathbb{E}_{(z,s)}\left[f(Z_t,S_t)\,\Big|\, Z_\infty > 0\right] = \frac{\mathbb{E}_{(z,s)}\left[\left(U(0)-U(Z_t)\right)f(Z_t,S_t)\right]}{U(0)-U(z)},$$

para toda $z \in [0,\infty)$, $s \in \mathbb{R}$, $t \geq 0$, y toda función medible y acotada $f : [0,\infty)\times\mathbb{R} \to \mathbb{R}$.

Demostración. Sea $f \in \mathbf{C}_0^2([0,\infty)\times\mathbb{R},\mathbb{R})$. Sea $\tau_x = \text{ínf}\{t \geq 0 : Z_t = x\}$, para $x \in [0,\infty)$, un tiempo de llegada. Como U es una función escala para $(Z_t)_{t\geq 0}$ un proceso continuo, tenemos que

$$\mathbf{P}_z\left(\tau_0 < \infty\right) = \lim_{\ell\to\infty} \mathbf{P}_z\left(\tau_0 < \tau_\ell\right) = \lim_{\ell\to\infty}\frac{U(\ell)-U(z)}{U(\ell)-U(0)} = \frac{U(z)}{U(0)},$$

pues $\limsup_{t\to\infty} S_t = \infty$ y $\lim_{\ell\to\infty} U(\ell) = 0$. Note que

$$\{Z_\infty = 0\} = \{\tau_0 < \infty\} = \lim_{\ell\to\infty}\{\tau_0 < \tau_\ell\} = \bigcup_{\ell\in\mathbb{Q}_+}\{\tau_0 < \tau_\ell\}.$$

Así

$$\begin{aligned}\mathbb{E}_{(z,s)}\left[f(Z_t,S_t)\,\Big|\, Z_\infty = 0\right] &= \mathbb{E}_{(z,s)}\left[f(Z_t,S_t)\,\Big|\, \tau_0 < \infty\right]\\ &= \frac{\mathbb{E}_{(z,s)}\left[f(Z_t,S_t)\mathbf{P}_{Z_t}\left(\tau_0<\infty\right)\right]}{\mathbf{P}_z\left(\tau_0<\infty\right)}\\ &= \frac{\mathbb{E}_{(z,s)}\left[f(Z_t,S_t)U(Z_t)\right]}{U(z)},\end{aligned}$$

para toda $z \in [0,\infty)$, $s \in \mathbb{R}$ y $t \geq 0$. Análogamente, sea $T_x = \text{ínf}\{t \geq 0 : S_t = x\}$ un tiempo de llegada, para $x \in \mathbb{R}$. Como V es una función escala para $(S_t)_{t\geq 0}$, tenemos que

$$\mathbf{P}_s\left(T_{-n} < \infty\right) = \lim_{k\to\infty}\mathbf{P}_s\left(T_{-n} < T_k\right) = \lim_{k\to\infty}\frac{V(k)-V(s)}{V(k)-V(-n)} = \frac{V(s)}{V(-n)},$$

para toda $n \in \mathbb{N}$, ya que $\limsup_{t\to\infty} S_t = \infty$ y $\lim_{k\to\infty} V(k) = 0$. Note que $\{S_\infty = -\infty\} = \lim_{n\to\infty}\{T_{-n} < \infty\} = \bigcap_{n\in\mathbb{Q}_+}\{T_{-n} < \infty\}$, ya que el proceso $(S_t)_{t\geq 0}$ es continuo c.s. Así

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}_{(z,s)}\left[f(Z_t,S_t)\,\middle|\, S_\infty = -\infty\right] &= \lim_{n\to\infty} \mathbb{E}_{(z,s)}\left[f(Z_t,S_t)\,\middle|\, T_{-n} < \infty\right] \\
&= \lim_{n\to\infty} \frac{\mathbb{E}_{(z,s)}\left[f(Z_t,S_t)\mathbf{P}_{S_t}\left(T_{-n<\infty}\right)\right]}{\mathbf{P}_{(z,s)}\left(T_{-n} < \infty\right)} \\
&= \frac{\mathbb{E}_{(z,s)}\left[f(Z_t,S_t)\frac{V(S_t)}{V(-n)}\right]}{\frac{V(s)}{V(-n)}} \\
&= \frac{\mathbb{E}_{(z,s)}\left[f(Z_t,S_t)V(S_t)\right]}{V(s)},
\end{aligned}$$

para toda $z \in [0,\infty)$, $s \in \mathbb{R}$ y $t \geq 0$. Por último, note que

$$\{Z_\infty > 0\} = \{\lim_{t\to\infty} Z_t = \infty\} = \bigcap_{\ell\in\mathbb{Q}_+}\{\tau_\ell < \tau_0\}.$$

Así, por ser U una función escala para $(Z_t)_{t\geq 0}$, tenemos

$$\begin{aligned}
\mathbf{P}_z\left(Z_\infty > 0\right) = \mathbf{P}_z\left(\lim_{t\to\infty} Z_t = \infty\right) &= \lim_{\ell\to\infty} \mathbf{P}_z\left(\tau_\ell < \tau_0\right) \\
= \lim_{\ell\to\infty} \frac{U(0)-U(z)}{U(0)-U(\ell)} &= \frac{U(0)-U(z)}{U(0)},
\end{aligned}$$

para toda $z \in [0,\infty)$. Por lo tanto

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}_{(z,s)}\left[f(Z_t,S_t)\,\middle|\, Z_\infty > 0\right] &= \mathbb{E}_{(z,s)}\left[f(Z_t,S_t)\,\middle|\, \lim_{t\to\infty} Z_t = \infty\right] \\
&= \lim_{\ell\to\infty} \mathbb{E}_{(z,s)}\left[f(Z_t,S_t)\,\middle|\, \tau_\ell < \tau_0\right] \\
&= \lim_{\ell\to\infty} \frac{\mathbb{E}_{(z,s)}\left[f(Z_t,S_t)\mathbf{P}_{Z_t}\left(\tau_\ell < \tau_0\right)\right]}{\mathbf{P}_z\left(\tau_\ell < \tau_0\right)} \\
&= \lim_{\ell\to\infty} \frac{\mathbb{E}_{(z,s)}\left[f(Z_t,S_t)\left(\frac{U(0)-U(Z_t)}{U(0)-U(\ell)}\right)\right]}{\frac{U(0)-U(z)}{U(0)-U(\ell)}} \\
&= \frac{\mathbb{E}_{(z,s)}\left[f(Z_t,S_t)\left(U(0)-U(Z_t)\right)\right]}{U(0)-U(z)}.
\end{aligned}$$

∎

Capítulo 3

Resultados principales

En este último Capítulo nos enfocaremos en la probabilidad de superviviencia del BDRE en el caso supercrítico ($\alpha > 0$) condicionado a la extinción, que gracias a los resultados del Capítulo 2, en conjunto con algunos resultados que demostraremos en este Capítulo, se podrá solucionar sin dificultad. Con ello, sabemos como se comporta asintóticamente esta probalibidad y como es su decaimiento.

Sabemos que un proceso de ramificación supercrítico en un medio constante condicionado a la extinción es un proceso de ramificación subcrítico. En el caso de las difusiones, tenemos que el BDRE supercrítico condicionado a la extinción es una difusión bidimensional la cuál no satisface (1.2.1). Sin embargo, veremos que el BDRE supercrítico condicionado en $\{S_\infty = -\infty\}$, resulta en un BDRE subcrítico de parámetro $-\alpha$, además, también veremos que la ley del tamaño de la población de un BDRE supercrítico condicionado a la extinción es igual en ley al tamaño de la población de un BDRE subcrítico con parámetro $-\alpha$. Así, también tenemos una transición de fase para el BDRE supercrítico condicionado a la extinción. Por lo tanto, el obtener una conexión entre la ley marginal del tamaño de la población de un BDRE supercrítico condicionado a la extinción y un BDRE subcrítico, será una herramienta crucial para calcular dichas probalibidades asintóticas.

3.1. Probabilidades asintóticas de difusiones ramificantes en medios aleatorios

El siguiente Teorema será nuestra herramienta principal, pues nos dará casi de forma inmediata, en conjunto con otros resultados, las probabilidades asintóticas del BDRE condicionado a la extinción.

Teorema 1. Sean $\alpha \in \mathbb{R}$ y $\sigma_b, \sigma_e \in \mathbb{R}_+$. Sea $(Z_t, S_t)_{t\geq 0}$ una solución fuerte de (1.2.1). Entonces

$$\lim_{t\to\infty} \mathbf{P}_z\left(Z_t > 0\right) = 1 - \left(1 + \frac{\sigma_e^2}{\sigma_b^2} z\right)^{-\frac{2\alpha}{\sigma_e^2}} > 0 \quad \text{si } \alpha > 0,$$

$$\lim_{t\to\infty} \sqrt{t}\mathbf{P}_z\left(Z_t > 0\right) = \frac{\sqrt{2}}{\sigma_e\sqrt{\pi}} \log\left(1 + \frac{\sigma_e^2}{\sigma_b^2} z\right) > 0 \quad \text{si } \alpha = 0,$$

$$\lim_{t\to\infty} \sqrt{t^3} e^{\frac{\alpha^2 t}{2\sigma_e^2}} \mathbf{P}_z\left(Z_t > 0\right) = \frac{8}{\sigma_e^3} \int_0^\infty f(za)\phi_\beta(a)\mathrm{d}a > 0 \quad \text{si } \alpha \in (-\sigma_e^2, 0),$$

$$\lim_{t\to\infty} \sqrt{t} e^{\frac{\sigma_e^2 t}{2}} \mathbf{P}_z\left(Z_t > 0\right) = \frac{\sigma_e\sqrt{2}}{\sigma_b^2\sqrt{\pi}} z > 0 \quad \text{si } \alpha = -\sigma_e^2,$$

$$\lim_{t\to\infty} e^{(\alpha - \frac{\sigma_e^2}{2})t} \mathbf{P}_z\left(Z_t > 0\right) = -\frac{2(\alpha + \sigma_e^2)}{\sigma_b^2} z > 0 \quad \text{si } \alpha < -\sigma_e^2,$$

para toda $z \in (0, \infty)$, donde $\beta := -\frac{2\alpha}{\sigma_e^2}$, ϕ_a esta definida como en el Lema 2.8 y $f(x) := 1 - \exp\left\{-\frac{\sigma_e^2}{\sigma_b^2} x\right\}$, para toda $x \geq 0$.

Demostración. Sean $z \geq 0$ y $\alpha > 0$. Como $1 - e^{-x} \leq 1$, para toda $x \geq 0$, podemos aplicar el Teorema de convergencia dominada. Por el Corolario 2.3 y el Lema 2.6, vemos que se satisface

$$\begin{aligned}
\lim_{t\to\infty} \mathbf{P}_z\left(Z_t > 0\right) &= \lim_{t\to\infty} \mathbb{E}\left[1 - \exp\left\{\frac{2z}{\sigma_b^2 \int_0^t \exp\left\{-\alpha s - \sigma_e W_u^{(e)}\right\} \mathrm{d}u}\right\}\right] \\
&= \mathbb{E}\left[1 - \exp\left\{\frac{2z}{\sigma_b^2 \int_0^\infty \exp\left\{-\alpha s - \sigma_e W_u^{(e)}\right\} \mathrm{d}u}\right\}\right] \\
&= \mathbb{E}\left[1 - \exp\left\{-\frac{\sigma_e^2}{\sigma_b^2} z G_{\frac{2\alpha}{\sigma_e^2}}\right\}\right],
\end{aligned}$$

donde G_v es una variable aleatoria con distribución gama con parámetro de forma $v = \dfrac{2\alpha}{\sigma_e^2}$ y parámetro de escala 1. Como $\mathbb{E}\left[\exp\{-\lambda G_v\}\right] = \dfrac{1}{(1+\lambda)^v}$, se tiene que

$$\lim_{t\to\infty} \mathbf{P}_z\left(Z_t > 0\right) = 1 - \left(1 + \frac{\sigma_e^2}{\sigma_b^2} z\right)^{-\frac{2\alpha}{\sigma_e^2}}.$$

Ahora, sea $\alpha = 0$. Como $f(xz) \leq \dfrac{\sigma_e^2 z}{\sigma_b^2} x$, para toda $x \geq 0$, las condiciones del Lema 2.7 se satisfacen con $g = f$. Utilizando el Corolario 2.3 y Lema 2.7, obtenemos

$$\lim_{t\to\infty} \sqrt{t}\mathbf{P}_z\left(Z_t > 0\right) = \frac{2}{\sigma_e} \lim_{t\to\infty} \sqrt{\frac{\sigma_e^2 t}{4}} \mathbb{E}\left[f\left(\frac{z}{2A_{\sigma_e^2 t/4}}\right)\right] = \frac{2}{\sigma_e} \int_0^\infty f(za) \frac{e^{-a}}{a\sqrt{2\pi}} \mathrm{d}a.$$

Utilizando el Teorema de Tonelli, tenemos que para toda $c \geq 0$,

$$\begin{aligned}\int_0^\infty (1-e^{-cx})\frac{e^{-x}}{x}\mathrm{d}x &= \int_0^\infty\int_0^c e^{-yx}e^{-x}\mathrm{d}y\mathrm{d}x = \int_0^c\int_0^\infty e^{-(y+1)x}\mathrm{d}x\mathrm{d}y \\ &= \int_0^c \frac{1}{1+y}\mathrm{d}y = \log(1+c).\end{aligned}$$

Así,

$$\begin{aligned}\lim_{t\to\infty}\sqrt{t}\mathbf{P}_z\left(Z_t>0\right) &= \frac{2}{\sigma_e}\int_0^\infty \left(1-\exp\left\{-\frac{\sigma_e^2}{\sigma_b^2}za\right\}\right)\frac{e^{-a}}{a\sqrt{2\pi}}\mathrm{d}a \\ &= \frac{\sqrt{2}}{\sigma_e\sqrt{\pi}}\log\left(1+\frac{\sigma_e^2}{\sigma_b^2}z\right).\end{aligned}$$

Ahora, sea $\alpha \in (-\sigma_e^2, 0)$ y $\beta := -\frac{2\alpha}{\sigma_e^2}$. Por el Corolario 2.3, tenemos

$$\lim_{t\to\infty} t^{3/2}e^{\frac{\alpha^2}{2\sigma_e^2}t}\mathbf{P}_z\left(Z_t>0\right) = \frac{8}{\sigma_e^3}\lim_{t\to\infty}\left(\frac{\sigma_e^2 t}{4}\right)^{3/2} e^{\left(\frac{2\alpha}{\sigma_e^2}\right)^2\cdot\frac{\sigma_e^2 t}{4}\cdot\frac{1}{2}}\mathbb{E}\left[f\left(\frac{z}{2A^{(\beta)}_{\sigma_e^2 t/4}}\right)\right].$$

Como $f(zx) \leq \dfrac{\sigma_e^2 z}{\sigma_b^2}x$, para toda $x \geq 0$, y $0 < \beta < 2$, las condiciones del Lema 2.8 se satisfacen con $g = f$, $\gamma = \beta$ y $b = 1 > \beta/2$. Así, por el Lema 2.8, tenemos

$$\lim_{t\to\infty} t^{3/2}e^{\frac{\alpha^2}{2\sigma_e^2}t}\mathbf{P}_z\left(Z_t>0\right) = \frac{8}{\sigma_e^3}\int_0^\infty f(za)\phi_\beta(a)\mathrm{d}a.$$

Ahora sea $\alpha = -\sigma_e^2$ ($\beta = 2$). El Lema 2.5 nos afirma que

$$\mathbb{E}\left[\frac{1}{2A_t^{(2)}}\right] = e^{-2t}\mathbb{E}\left[\frac{1}{2A_t}\right],$$

y

$$\mathbb{E}\left[\frac{1}{(2A_t^{(2)})^2}\right] \leq e^{-2t}\left(\mathbb{E}\left[\frac{1}{2A_{t/2}}\right]\right)^2,$$

para $t > 0$. Además, por el Lema 2.7

$$\lim_{t\to\infty}\sqrt{t}\mathbb{E}\left[\frac{1}{2A_t}\right] = \int_0^\infty \frac{e^{-a}}{\sqrt{2\pi}}\mathrm{d}a < \infty,$$

basta considerar $g(x) = x$, $p = 1$ y $c > 1$. Por lo tanto $\left(\mathbb{E}\left[\frac{1}{2A_{t/2}}\right]\right)^2$ decae como t^{-1}, cuando $t \to \infty$. Así, las condiciones del Lema 2.4 se satisfacen con $c_t = e^{2t}\sqrt{t}$ y

$Y_t = \frac{1}{2A_t^{(2)}}$, para toda $t \geq 1$. Por el Corolario 2.3 y el Lema 2.4, tenemos

$$\begin{aligned}
\lim_{t\to\infty} \sqrt{t} e^{\frac{\sigma_e^2}{2}t} \mathbf{P}_z\left(Z_t > 0\right) &= \sqrt{\frac{4}{\sigma_e^2}} \lim_{t\to\infty} \sqrt{\frac{\sigma_e^2 t}{4}} e^{2\frac{\sigma_e^2}{4}t} \mathbb{E}\left[f\left(\frac{z}{2A^{(2)}_{\sigma_e^2 t/4}} \right) \right] \\
&= \frac{2}{\sigma_e} \frac{\sigma_e^2 z}{\sigma_b^2} \int_0^\infty a \frac{e^{-a}}{a\sqrt{2\pi}} \mathrm{d}a = \frac{\sigma_e \sqrt{2}}{\sigma_b^2 \sqrt{\pi}} z.
\end{aligned}$$

Por último, consideremos el caso $\alpha < -\sigma_e^2$. Sea $t > 0$, fijo. Por el Lema 2.5, tenemos que

$$\mathbb{E}\left[\frac{1}{2A_t^{(\beta)}}\right] = e^{-(2\beta-2)t} \mathbb{E}\left[\frac{1}{2A_t^{(-(\beta-2))}}\right], \tag{3.1.1}$$

$$\mathbb{E}\left[\frac{1}{(2A_t^{(\beta)})^2}\right] \leq e^{-(2\beta-2)} \mathbb{E}\left[\frac{1}{2A_{t/2}^{(\beta-2)}}\right] \mathbb{E}\left[\frac{1}{2A_{t/2}^{(-(\beta-2))}}\right], \tag{3.1.2}$$

para toda $t \in (0, \infty)$. Como $\beta > 2$, por el Teorema de convergencia monótona y el Lema 2.6, vemos que se satisface

$$\lim_{t\to\infty} \mathbb{E}\left[\frac{1}{2A_{t/2}^{(-(\beta-2))}}\right] = \mathbb{E}\left[\frac{1}{2A_\infty^{(-(\beta-2))}}\right] = \mathbb{E}\left[G_{\beta-2}\right] = \beta - 2 < \infty, \tag{3.1.3}$$

donde $G_{\beta-2}$ tiene una distribución gama con parámetro de forma $\beta - 2 > 0$ y parámetro de escala 1. Utilizando la relación (1.1) de [6], que dice que para $u > 0$

$$\left\{ \frac{1}{A_t^{(-u)}}, \quad t > 0 \right\} \overset{\text{ley}}{=} \left\{ \frac{1}{A_t^{(u)}} + 2\gamma_u, \quad t > 0 \right\},$$

donde $\gamma_u \sim$ gama(u) es independiente de $(A_t^{(u)}, t \geq 0)$, y el Teorema de convergencia monótona, obtenemos

$$\lim_{t\to\infty} \mathbb{E}\left[\frac{1}{2A_{t/2}^{(\beta-2)}}\right] = \lim_{t\to\infty} \mathbb{E}\left[\frac{1}{2A_{t/2}^{(-(\beta-2))}}\right] - \mathbb{E}\left[G_{\beta-2}\right] = 0.$$

Así, las condiciones del Lema 2.4 se satisfacen con $c_t = e^{(2\beta-2)t}$ y $Y_t = \frac{1}{2A_t^{(\beta)}}$, para toda $t \geq 1$. Gracias al Corolario 2.3, el Lema 2.4 y (3.1.3), tenemos

$$\begin{aligned}
\lim_{t\to\infty} e^{(2\beta-2)\sigma_e^2 t/4} \mathbf{P}_z\left(Z_t > 0\right) &= \lim_{t\to\infty} e^{(2\beta-2)\sigma_e^2 t/4} \mathbb{E}\left[f\left(\frac{z}{2A^{(\beta)}_{\sigma_e^2 t/4}} \right) \right] \\
&= \frac{\sigma_e^2}{\sigma_b^2} z \lim_{t\to\infty} \mathbb{E}\left[\frac{1}{2A^{(-(\beta-2))}_{\sigma_e^2 t/4}} \right] = -\frac{2(\alpha + \sigma_e^2)}{\sigma_b^2} z.
\end{aligned}$$

Con esto queda demostrado el Teorema 1. ∎

Teorema 2. Sea $\sigma_e \in (0,\infty)$ y $\sigma_b, z \in [0,\infty)$, tales que $\sigma_b + z > 0$. Si $(Z_t, S_t)_{t\geq 0}$ es solución de (1.2.1) con parámetro crítico $\alpha > 0$, entonces

$$\mathcal{L}\left((Z_t, S_t)_{t\geq 0} \middle|\, Z_\infty = 0\right) = \mathcal{L}\left((\check{Z}_t, \check{S}_t)_{t\geq 0}\right),$$

donde $(\check{Z}_t, \check{S}_t)_{t\geq 0}$ es una difusión bidimensional que satisface $\check{Z}_0 = Z_0, \check{S}_0 = 0$ y

$$\begin{aligned}
\mathrm{d}\check{Z}_t &= \left(\frac{\sigma_e^2}{2} - \frac{2\alpha\sigma_b^2}{\sigma_e^2\check{Z}_t} + \sigma_b^2\right)\check{Z}_t\mathrm{d}t + \check{Z}_t\mathrm{d}\check{S}_t + \sqrt{\sigma_b^2\check{Z}_t}\mathrm{d}W_t^{(b)},\\
\mathrm{d}\check{S}_t &= \left(\alpha - \frac{2\alpha\sigma_e^2\check{Z}_t}{\sigma_e^2\check{Z}_t + \sigma_b^2}\right)\mathrm{d}t + \sqrt{\sigma_e^2}\mathrm{d}W_t^{(e)},
\end{aligned}$$

para $t \geq 0$.

Demostración. Para demostrar el Teorema es suficiente ver cual es el generador $\hat{\mathcal{G}}$ del proceso condicionado. El generador es la derivada respecto al tiempo del semigrupo del proceso condicionado evaluado en $t = 0$. Sea $f \in \mathbf{C}^2([0,\infty)\times\mathbb{R},\mathbb{R})$. Gracias al Lema 2.10, tenemos que el generador del proceso condicionado $\left((Z_t, S_t)_{t\geq 0}\middle|\, Z_\infty = 0\right)$ es

$$\begin{aligned}
\hat{\mathcal{G}}f(z,s) &= \lim_{h\to 0}\frac{\mathbb{E}_{(z,s)}\left[f(Z_t,S_t) - f(z,s)\,\middle|\, Z_\infty = 0\right]}{h}\\
&= \lim_{h\to 0}\frac{\mathbb{E}_{(z,s)}\left[U(Z_t)f(Z_t,S_t) - U(z)f(z,s)\right]/U(z)}{h}\\
&= \frac{\mathcal{G}(U\cdot f)(z,s)}{U(z)}.
\end{aligned}$$

De la fórmula de Itô, aplicado a $h(Z_t,S_t) = U(Z_t)f(Z_t,S_t)$, y utilizando nuevamente la notación $\dfrac{\partial f(x,y)}{\partial y} = f_y(x,y)$, etc. Obtenemos

$$\begin{aligned}
U(Z_t)f(Z_t,S_t) = U(z)f(z,s) &+ \int_0^t \frac{\partial h(Z_t,S_t)}{\partial z}\mathrm{d}Z_u + \int_0^t \frac{\partial h(Z_t,S_t)}{\partial s}\mathrm{d}S_u\\
&+ \frac{1}{2}\int_0^t \frac{\partial^2 h(Z_t,S_t)}{\partial^2 s}\mathrm{d}\left\langle S\right\rangle_u + \frac{1}{2}\int_0^t \frac{\partial^2 h(Z_t,S_t)}{\partial^2 z}\mathrm{d}\left\langle Z\right\rangle_u\\
&+ \int_0^t \frac{\partial^2 h(Z_t,S_t)}{\partial z\partial s}\mathrm{d}\left\langle Z,S\right\rangle_u.
\end{aligned}\tag{3.1.4}$$

Note que

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial h(Z_t,S_t)}{\partial z} &= f_z(Z_t,S_t)U(Z_t) + f(Z_t,S_t)\frac{\mathrm{d}U(Z_t)}{\mathrm{d}z},\\
\frac{\partial h(Z_t,S_t)}{\partial s} &= U(Z_t)f_s(Z_t,S_t),\\
\frac{\partial^2 h(Z_t,S_t)}{\partial z\partial s} &= f_s(Z_t,S_t)\frac{\mathrm{d}U(Z_t)}{\mathrm{d}z} + U(Z_t)f_{zs}(Z_t,S_t),\\
\frac{\partial^2 h(Z_t,S_t)}{\partial^2 s} &= U(Z_t)f_{ss}(Z_t,S_t),\\
\frac{\partial^2 h(Z_t,S_t)}{\partial^2 z} &= 2f_z(Z_t,S_t)\frac{\mathrm{d}U(Z_t)}{\mathrm{d}z} + f(Z_t,S_t)\frac{\mathrm{d}^2U(Z_t)}{\mathrm{d}z} + U(Z_t)f_{zz}(Z_t,S_t).
\end{aligned}
$$

Sustituyendo lo anterior en (3.1.4), obtenemos

$$
\begin{aligned}
U(Z_t)f(Z_t,S_t) = U(z)f(z,s) &+ \int_0^t \left(f_z(Z_u,S_u)U(Z_t) + f(Z_u,S_u)\frac{\mathrm{d}U(Z_u)}{\mathrm{d}z}\right)\\
&\times\left(\left(\alpha+\frac{1}{2}\sigma_e^2\right)Z_u\mathrm{d}u + \sqrt{\sigma_e^2Z_u^2}\mathrm{d}W_u^{(e)} + \sqrt{\sigma_b^2Z_u}\mathrm{d}W_u^{(b)}\right)\\
&+ \int_0^t U(Z_u)f_s(Z_u,S_u)\left(\alpha\mathrm{d}u + \sqrt{\sigma_e^2}\mathrm{d}W_u^{(e)}\right)\\
&+ \int_0^t \left(f_s(Z_u,S_u)\frac{\mathrm{d}U(Z_u)}{\mathrm{d}z} + U(Z_u)f_{zs}(Z_u,S_u)\right)\sigma_e^2Z_u\mathrm{d}u\\
&+ \frac{1}{2}\int_0^t U(Z_u)f_{ss}(Z_u,S_u)\sigma_e^2\mathrm{d}u\\
&+ \frac{1}{2}\int_0^t \left(2f_z(Z_t,S_t)\frac{\mathrm{d}U(Z_t)}{\mathrm{d}z} + f(Z_t,S_t)\frac{\mathrm{d}^2U(Z_t)}{\mathrm{d}z} + U(Z_u)f_{zz}(Z_u,S_u)\right)\\
&\times\left(\sigma_e^2Z_u^2 + \sigma_b^2Z_u\right)\mathrm{d}u. \qquad (3.1.5)
\end{aligned}
$$

Ya que tenemos que se satisface

$$
\begin{aligned}
\mathrm{d}Z_u &= \left(\alpha+\frac{1}{2}\sigma_e^2\right)Z_u\mathrm{d}u + \sqrt{\sigma_e^2Z_u^2}\mathrm{d}W_u^{(e)} + \sqrt{\sigma_b^2Z_u}\mathrm{d}W_u^{(b)},\\
\mathrm{d}S_u &= \alpha\mathrm{d}u + \sqrt{\sigma_e^2}\mathrm{d}W_u^{(e)},\\
\mathrm{d}\left\langle Z,S\right\rangle_u &= \sigma_e^2Z_u\mathrm{d}W_u^{(e)},\\
\mathrm{d}\left\langle Z\right\rangle_u &= (\sigma_e^2Z_u^2+\sigma_b^2Z_u)\mathrm{d}u,\\
\mathrm{d}\left\langle S\right\rangle_u &= \sigma_e^2\mathrm{d}u.
\end{aligned}
$$

Ahora, haciendo

$$\begin{aligned}
g(Z_t,S_t) = U(Z_t)f(Z_t,S_t) - U(z)f(z,s) - \int_0^t \left(f_z(Z_u,S_u)U(Z_t) + f(Z_u,S_u)\frac{\mathrm{d}U(Z_u)}{\mathrm{d}z}\right) \\
\times \left(\alpha + \frac{1}{2}\sigma_e^2\right) Z_u \mathrm{d}u - \int_0^t U(Z_u) f_s(Z_u,S_u)\alpha \mathrm{d}u \\
- \frac{1}{2}\int_0^t U(Z_u) f_{ss}(Z_u,S_u)\sigma_e^2 \mathrm{d}u \\
- \int_0^t \left(f_s(Z_u,S_u)\frac{\mathrm{d}U(Z_u)}{\mathrm{d}z} + U(Z_u)f_{zs}(Z_u,S_u)\right)\sigma_e^2 Z_u \mathrm{d}u \\
- \frac{1}{2}\int_0^t \left(2f_z(Z_t,S_t)\frac{\mathrm{d}U(Z_t)}{\mathrm{d}z} + f(Z_t,S_t)\frac{\mathrm{d}^2U(Z_t)}{\mathrm{d}z} + U(Z_u)f_{zz}(Z_u,S_u)\right) \\
\times \left(\sigma_e^2 Z_u^2 + \sigma_b^2 Z_u\right)\mathrm{d}u,
\end{aligned}$$

vemos que $g(Z_t,S_t)$ es una martingala local, ya que de (3.1.4) se tiene

$$\begin{aligned}
g(Z_t,S_t) = \int_0^t \left(f_z(Z_u,S_u)U(Z_t) + f(Z_u,S_u)\frac{\mathrm{d}U(Z_u)}{\mathrm{d}z}\right) \\
\times \left(\sqrt{\sigma_e^2 Z_u^2}\mathrm{d}W_u^{(e)} + \sqrt{\sigma_b^2 Z_u}\mathrm{d}W_u^{(b)}\right) \\
+ \int_0^t U(Z_u) f_s(Z_u,S_u)\sqrt{\sigma_e^2}\mathrm{d}W_u^{(e)}.
\end{aligned}$$

Recordemos que $\mathcal{G}U(z)=0$, por lo tanto

$$\begin{aligned}
\mathcal{G}(U\cdot f)(z,s) &= \big(f(z,s)U'(z) + U(z)f_z(z,s)\big)\left(\alpha + \frac{1}{2}\sigma_e^2\right) z + U(z)f_s(z,s)\alpha \mathrm{d}t \\
&\quad + \frac{1}{2}U(z)f_{ss}(z,s)\sigma_e^2 + \frac{1}{2}(f(z,s)U''(z) + 2U'(z)f_z(z,s) + U(z)f_{zz}(z,s)) \\
&\quad \times \left(\sigma_e^2 z^2 + \sigma_b^2 z\right) + (U'(z)f_s(z,s) + U(z)f_{zs}(z,s))\sigma_e^2 z \\
&= U(z)\left(zf_z(z,s)\left(\alpha + \frac{\sigma_e^2}{2}\right) + \alpha f_s(z,s) + zf_{zs}(z,s)\sigma_e^2 + \frac{\sigma_e^2}{2}f_{ss}(z,s)\right. \\
&\quad \left. + \frac{1}{2}f_{zz}(z,s)(\sigma_e^2 z^2 + \sigma_b^2 z)\right) + f_z(z,s)U'(z)(\sigma_e^2 z^2 + \sigma_b^2 z) + U'(z)f_s(z,s) \\
&= f(z,s)\mathcal{G}U(z) + U(z)\mathcal{G}f(z,s) + f_z(z,s)U'(z)(\sigma_e^2 z^2 + \sigma_b^2 z) \\
&\quad + U'(z)f_s(z,s) + f(z,s)\left(zU'(z)\left(\alpha + \frac{\sigma_e^2}{2}\right) + \frac{1}{2}U''(z)(\sigma_e^2 z^2 + \sigma_b^2 z)\right) \\
&= U(z)\mathcal{G}f(z,s) + f_z(z,s)U'(z)(\sigma_e^2 z^2 + \sigma_b^2 z) + U'(z)f_s(z,s).
\end{aligned}$$

Note que $U'(z)/U(z) = -\frac{2\alpha}{\sigma_e^2 z+\sigma_b^2}$, para toda $z \geq 0$. Así

$$\begin{aligned}
\hat{\mathcal{G}}f(z,s) &= \frac{\mathcal{G}(U\cdot f)(z,s)}{U(z)} = \mathcal{G}f(z,s) - \frac{2\alpha}{\sigma_e^2 z+\sigma_b^2}\left(f_z(z,s)(\sigma_e^2 z^2+\sigma_b^2 z)+f_s(z,s)\right)\\
&= \mathcal{G}f(z,s) - 2\alpha z f_z(z,s) - \frac{2\alpha\sigma_e^2 z}{\sigma_e^2 z+\sigma_b^2} f_s(z,s)\\
&= z f_z(z,s)(\alpha+\sigma_e^2/2) + \alpha f_s(z,s) - 2\alpha z f_z(z,s) - \frac{2\alpha\sigma_e^2 z}{\sigma_e^2 z+\sigma_b^2} f_s(z,s)\\
&\quad + \frac{\sigma_e^2}{2} f_{ss}(z,s) + \frac{1}{2} f_{zz}(z,s)(\sigma_e^2 z^2+\sigma_b^2 z) + z f_{zs}(z,s)\sigma_e^2\\
&= \left(\frac{\sigma_e^2}{2}-\alpha\right) z f_z(z,s) + \left(\alpha - \frac{2\alpha\sigma_e^2 z}{\sigma_e^2 z+\sigma_b^2}\right) f_s(z,s)\\
&\quad + \frac{1}{2}(\sigma_e^2 z^2+\sigma_b^2 z) f_{zz}(z,s) + \frac{\sigma_e^2}{2} f_{ss}(z,s) + \sigma_e^2 z f_{zs}(z,s),
\end{aligned}$$

para toda $z \in [0,\infty)$, $s \in \mathbb{R}$ y toda $f \in C_0^2([0,\infty)\times\mathbb{R},\mathbb{R})$. Ahora veamos que el generador del proceso $(\check{Z}_t,\check{S}_t)_{t\geq 0}$ coincide con el que calculamos anteriormente, como el generador caracteriza al proceso, si estos coinciden los procesos tienen la misma ley. Sea $f \in \mathbf{C}_0^2([0,\infty)\times\mathbb{R},\mathbb{R})$. De la fórmula de Itô aplicado a $f(\check{Z}_t,\check{S}_t)$, obtenemos

$$\begin{aligned}
f(\check{Z}_t,\check{S}_t) &= f(z,s) + \int_0^t f_z(\check{Z}_u,\check{S}_u)\mathrm{d}\check{Z}_u + \int_0^t f_s(\check{Z}_u,\check{S}_u)\mathrm{d}\check{S}_u + \int_0^t f_{zs}(\check{Z}_u,\check{S}_u)\mathrm{d}\left\langle \check{Z},\check{S}\right\rangle_u\\
&\quad + \frac{1}{2}\int_0^t f_{ss}(\check{Z}_u,\check{S}_u)\mathrm{d}\left\langle \check{S}\right\rangle_u + \frac{1}{2}\int_0^t f_{zz}(\check{Z}_u,\check{S}_u)\mathrm{d}\left\langle \check{Z}\right\rangle_u\\
&= f(z,s) + \int_0^t f_z(\check{Z}_u,\check{S}_u)\left(\left(\frac{\sigma_e^2}{2}-\alpha\right)\check{Z}_u\mathrm{d}u + \sqrt{\sigma_e^2\check{Z}_u^2}\mathrm{d}W_u^{(e)} + \sqrt{\sigma_b^2\check{Z}_u}\mathrm{d}W_u^{(b)}\right)\\
&\quad + \int_0^t f_s(\check{Z}_u,\check{S}_u)\left(\left(\alpha - \frac{2\alpha\sigma_e^2\check{Z}_u}{\sigma_e^2\check{Z}_u+\sigma_b^2}\right)\mathrm{d}u + \sqrt{\sigma_e^2}\mathrm{d}W_u^{(e)}\right)\\
&\quad + \int_0^t f_{zs}(\check{Z}_u,\check{S}_u)\sigma_e^2\check{Z}_u\mathrm{d}u + \frac{1}{2}\int_0^t f_{ss}(\check{Z}_u,\check{S}_u)\sigma_e^2\mathrm{d}u\\
&\quad + \frac{1}{2}\int_0^t f_{zz}(\check{Z}_u,\check{S}_u)(\sigma_e^2\check{Z}_u^2+\sigma_b^2\check{Z}_u)\mathrm{d}u.
\end{aligned}$$

Por lo tanto

$$\begin{aligned}
\mathcal{G}f(\check{z},\check{s}) &= \left(\frac{\sigma_e^2}{2}-\alpha\right)\check{z} f_z(\check{z},\check{s}) + \left(\alpha - \frac{2\alpha\sigma_e^2\check{z}}{\sigma_e^2\check{z}+\sigma_b^2}\right) f_s(\check{z},\check{s})\\
&\quad + \frac{1}{2}(\sigma_e^2\check{z}^2+\sigma_b^2\check{z}) f_{zz}(\check{z},\check{s}) + \frac{\sigma_e^2}{2} f_{ss}(\check{z},\check{s}) + \sigma_e^2\check{z} f_{zs}(\check{z},\check{s}).
\end{aligned}$$

∎

Teorema 3. Sea $\sigma_e \in (0,\infty)$ y $\sigma_b, z \in [0,\infty)$, tal que $\sigma_b + z > 0$. Sea $(Z_t^{(\alpha)}, S_t^{(\alpha)})_{t\geq 0}$ una solución de (1.2.1) con parámetro crítico α, con $\alpha \in \mathbb{R}$. Si $\alpha > 0$, entonces

$$\mathcal{L}\left((Z_t^{(\alpha)}, S_t^{(\alpha)})_{t\geq 0} \middle| S_\infty = -\infty \right) = \mathcal{L}\left((Z_t^{(-\alpha)}, S_t^{(-\alpha)})_{t\geq 0} \right),$$

donde $Z_0^{(-\alpha)} = Z_0^{(\alpha)}$.

Demostración. Análogamente a la prueba anterior, calcularemos los generadores de ambos procesos y veremos que coinciden. Sí su dominio es el mismo, esto implicará que los procesos tienen la misma ley. Sea $f \in \mathbf{C}_0^2([0,\infty) \times \mathbb{R}, \mathbb{R})$ y $(Z_t, S_t)_{t\geq 0}$ un BDRE con parámetro crítico $\alpha > 0$, gracias al Lema 2.10 tenemos que el generador $\dot{\mathcal{G}}$ del proceso condicionado en $\{S_\infty = -\infty\}$ es

$$\begin{aligned}
\dot{\mathcal{G}} f(z,s) &= \lim_{h\to 0} \frac{\mathbb{E}_{(z,s)}\left[f(Z_t,S_t) - f(z,s) \middle| S_\infty = -\infty \right]}{h} \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{\mathbb{E}_{(z,s)}\left[V(S_t) f(Z_t,S_t) \right] / V(s)}{h} \\
&= \frac{\mathcal{G}(V\cdot f)(z,s)}{V(s)}.
\end{aligned}$$

Aplicando la fórmula de Itô a $h(Z_t,S_t) = V(S_t)f(Z_t,S_t)$ obtenemos

$$\begin{aligned}
V(S_t)f(Z_t,S_t) = V(z)f(z,s) &+ \int_0^t \frac{\partial h(Z_t,S_t)}{\partial z} \mathrm{d}Z_u + \int_0^t \frac{\partial h(Z_t,S_t)}{\partial s} \mathrm{d}S_u \\
&+ \int_0^t \frac{\partial^2 h(Z_t,S_t)}{\partial z \partial s} \mathrm{d}\left\langle Z,S \right\rangle_u + \frac{1}{2}\int_0^t \frac{\partial^2 h(Z_t,S_t)}{\partial^2 s} \mathrm{d}\left\langle S \right\rangle_u \\
&+ \frac{1}{2}\int_0^t \frac{\partial^2 h(Z_t,S_t)}{\partial^2 z} \mathrm{d}\left\langle Z \right\rangle_u .
\end{aligned} \tag{3.1.6}$$

Note que

$$\begin{aligned}
\frac{\partial h(Z_t,S_t)}{\partial s} &= f_s(Z_t,S_t)V(S_t) + f(Z_t,S_t)\frac{\mathrm{d}V(S_t)}{\mathrm{d}s}, \\
\frac{\partial h(Z_t,S_t)}{\partial z} &= V(S_t)f_z(Z_t,S_t), \\
\frac{\partial^2 h(Z_t,S_t)}{\partial z \partial s} &= f_z(Z_t,S_t)\frac{\mathrm{d}V(S_t)}{\mathrm{d}s} + V(S_t)f_{zs}(Z_t,S_t) \\
\frac{\partial^2 h(Z_t,S_t)}{\partial^2 z} &= V(S_t)f_{zz}(Z_t,S_t), \\
\frac{\partial^2 h(Z_t,S_t)}{\partial^2 s} &= 2f_s(Z_t,S_t)\frac{\mathrm{d}V(S_t)}{\mathrm{d}s} + f(Z_t,S_t)\frac{\mathrm{d}^2 V(S_t)}{\mathrm{d}s} + V(S_t)f_{ss}(Z_t,S_t).
\end{aligned}$$

Sustituyendo en lo anterior en (3.1.6) y observando que

$$\begin{aligned}
\mathrm{d}Z_u &= \left(\alpha + \frac{1}{2}\sigma_e^2\right) Z_u \mathrm{d}u + \sqrt{\sigma_e^2 Z_u^2}\mathrm{d}W_u^{(e)} + \sqrt{\sigma_b^2 Z_u}\mathrm{d}W_u^{(b)}, \\
\mathrm{d}S_u &= \alpha \mathrm{d}u + \sqrt{\sigma_e^2}\mathrm{d}W_u^{(e)}, \\
\mathrm{d}\left\langle Z, S\right\rangle_u &= \sigma_e^2 Z_u \mathrm{d}W_u^{(e)}, \\
\mathrm{d}\left\langle Z\right\rangle_u &= (\sigma_e^2 Z_u^2 + \sigma_b^2 Z_u)\mathrm{d}u \\
\mathrm{d}\left\langle S\right\rangle_u &= \sigma_e^2 \mathrm{d}u.
\end{aligned}$$

Se tiene

$$\begin{aligned}
\mathrm{d}V(S_t)f(Z_t,S_t) = &\left(f(Z_t,S_t)V'(S_t) + V(S_t)f_s(Z_t,S_t)\right)\left(\alpha\mathrm{d}t + \sqrt{\sigma_e^2}\mathrm{d}W_t^{(e)}\right) \\
&+ V(S_t)f_z(Z_t,S_t)\left(\left(\alpha + \frac{1}{2}\sigma_e^2\right) Z_t\mathrm{d}t + \sqrt{\sigma_e^2 Z_t^2}\mathrm{d}W_t^{(e)}\right. \\
&\left. + \sqrt{\sigma_b^2 Z_t}\mathrm{d}W_t^{(b)}\right) + \frac{1}{2}V(S_t)f_{zz}(Z_t,S_t)\left(\sigma_e^2 Z_t^2 + \sigma_b^2 Z_t\right)\mathrm{d}t \\
&+ \frac{1}{2}(f(Z_t,S_t)V''(S_t) + 2V'(S_t)f_s(Z_t,S_t) \\
&+ V(S_t)f_{ss}(Z_t,S_t))\sigma_e^2\mathrm{d}t + (V'(S_t)f_z(Z_t,S_t) \\
&+ V(S_t)f_{zs}(Z_t,S_t))\sigma_e^2 Z_t\mathrm{d}t.
\end{aligned}$$

Así,

$$\begin{aligned}
\mathcal{G}(V\cdot f)(z,s) &= \alpha\left(f(z,s)V'(s) + V(s)f_s(z,s)\right) + zV(s)f_z(z,s)\left(\alpha + \frac{1}{2}\sigma_e^2\right) \\
&\quad + \frac{1}{2}V(s)f_{zz}(z,s)\left(\sigma_e^2 z^2 + \sigma_b^2 z\right) + \frac{\sigma_e^2}{2}(f(z,s)V''(s) + 2V'(s)f_s(z,s) \\
&\quad + V(s)f_{ss}(z,s)) + \sigma_e^2 z(V'(s)f_z(z,s) + V(s)f_{zs}(z,s)) \\
&= V(s)\mathcal{G}f(z,s) + f(z,s)\mathcal{G}V(s) + \sigma_e^2 zV'(s)f_z(z,s) + \sigma_e^2 V'(s)f_s(z,s) \\
&= V(s)\mathcal{G}f(z,s) + \sigma_e^2 zV'(s)f_z(z,s) + \sigma_e^2 V'(s)f_s(z,s),
\end{aligned}$$

donde $\mathcal{G}V(S) = 0$. Note que $V'(s)/V(s) = -2\alpha/\sigma_2^2$. Por lo tanto

$$\begin{aligned}
\dot{\mathcal{G}}f(z,s) &= \frac{\mathcal{G}(V\cdot f)(z,s)}{V(s)} \\
&= \mathcal{G}f(z,s) - 2\alpha z f_z(z,s) - 2\alpha f_s(z,s) \\
&= \left(-\alpha + \frac{\sigma_e^2}{2}\right) z f_z(z,s) - \alpha f_s(z,s) + \frac{\sigma_e^2 z^2 + \sigma_b^2 z}{2} f_{zz}(z,s) \\
&\quad + \frac{\sigma_e^2}{2} f_{ss}(z,s) + \sigma_e^2 z f_{zs}(z,s),
\end{aligned}$$

para toda $z \in [0,\infty)$, $s \in \mathbb{R}$ y toda $f \in C_0^2([0,\infty)\times\mathbb{R},\mathbb{R})$. El generador anterior es el generador de un BDRE con parámetro crítico $-\alpha < 0$. ∎

Corolario 4. Sean $\sigma_e \in (0,\infty)$ y $\sigma_b, z \in [0,\infty)$, con $\sigma_b + z > 0$. Sea $(Z_t^{(\alpha)}, S_t^{(\alpha)})_{t\geq 0}$ una solución de (1.2.1) con parámetro crítico α, para toda $\alpha \in \mathbb{R}$. Si $\alpha > 0$, entonces la ley marginal condicionada a la extinción concuerda con la ley marginal del BDRE con parámetro crítico $-\alpha$, esto es

$$\mathcal{L}\left(\left(Z_t^{(\alpha)}\right)_{t\geq 0}\middle| Z_\infty = 0\right) = \mathcal{L}\left(\left(Z_t^{(-\alpha)}\right)_{t\geq 0}\right),$$

donde $Z_0^{(-\alpha)} = Z_0^{(\alpha)}$.

Demostración. Sea $(Z_t, S_t)_{t\geq 0}$ definidas como antes. Por el Teorema 2, tenemos que la ley del BDRE condicionado a la extinción $((Z_t,S_t)_{t\geq 0}|Z_\infty = 0)$ es igual en distribución al proceso $(\check{Z}_t, \check{S}_t)_{t\geq 0}$, donde $(\check{Z}_t, \check{S}_t)_{t\geq 0}$ es una difusión bidimensional que satisface $\check{Z}_0 = Z_0, \check{S}_0 = 0$ y

$$\begin{aligned}
\mathrm{d}\check{Z}_t &= \left(\frac{\sigma_e^2}{2} - 2\alpha\sigma_b^2\sigma_e^2\check{Z}_t + \sigma_b^2\right)\check{Z}_t\mathrm{d}t + \check{Z}_t\mathrm{d}\check{S}_t + \sqrt{\sigma_b^2\check{Z}_t}\mathrm{d}W_t^{(b)},\\
\mathrm{d}\check{S}_t &= \left(\alpha - \frac{2\alpha\sigma_e^2\check{Z}_t}{\sigma_e^2\check{Z}_t + \sigma_b^2}\right)\mathrm{d}t + \sqrt{\sigma_e^2}\mathrm{d}W_t^{(e)}.
\end{aligned}$$

De aquí, deducimos que

$$\left((Z_t)_{t\geq 0}|Z_\infty = 0\right) \overset{\text{ley}}{=} \left(\check{Z}_t\right)_{t\geq 0}.$$

Por otro lado, si sustituimos a $\mathrm{d}\check{S}_t$ en la definición de $\mathrm{d}\check{Z}_t$, vemos que se satisface

$$\mathrm{d}\check{Z}_t = \left(\frac{\sigma_e^2}{2} - \alpha\right)\check{Z}_t\mathrm{d}t + \sqrt{\sigma_e^2\check{Z}_t^2}\mathrm{d}W_t^{(e)} + \sqrt{\sigma_b^2\check{Z}_t}\mathrm{d}W_t^{(b)}.$$

Ahora, sea $(Z_t^{(-\alpha)}, S_t^{(-\alpha)})$ una solución de (1.2.1) con parámetro $-\alpha < 0$, de manera análoga al sustituir $\mathrm{d}S_t^{(-\alpha)}$ en $\mathrm{d}Z_t^{(-\alpha)}$ en (1.2.1) vemos que $\mathrm{d}Z_t^{(-\alpha)}$ satisface la siguiente ecuación

$$\mathrm{d}Z_t^{(-\alpha)} = \left(\frac{\sigma_e^2}{2} - \alpha\right)Z_t\mathrm{d}t + \sqrt{\sigma_e^2 Z_t^2}\mathrm{d}W_t^{(e)} + \sqrt{\sigma_b^2 Z_t}\mathrm{d}W_t^{(b)}.$$

Así, tenemos que

$$\left(\check{Z}_t\right)_{t\geq 0} \overset{\text{ley}}{=} \left(Z_t^{(-\alpha)}\right)_{t\geq 0},$$

ya que ambas satisfacen la misma ecuación diferencial estocástica. ∎

Teorema 5. Sea $\sigma_e \in (0,\infty)$ y $\sigma_b, z \in [0,\infty)$, tal que $\sigma_b + z > 0$. Sea $(Z_t, S_t)_{t\geq 0}$ una solución de (1.2.1) con parámetro crítico $\alpha > 0$, entonces

$$\mathcal{L}\left((Z_t, S_t)_{t\geq 0} \middle| Z_\infty > 0\right) = \mathcal{L}\left((\hat{Z}_t, \hat{S}_t)_{t\geq 0}\right),$$

donde $(\hat{Z}_t, \hat{S}_t)_{t\geq 0}$ es una difusión bidimensional que satisface $\hat{Z}_0 = Z_0, \hat{S}_0 = 0$ y

$$\begin{aligned} \mathrm{d}\hat{Z}_t &= \left(\frac{\sigma_e^2}{2} + 2\alpha \frac{\sigma_b^2 U(\hat{Z}_t)}{(\sigma_e^2 \hat{Z}_t + \sigma_b^2)(U(0) - U(\hat{Z}_t))}\right) \hat{Z}_t \mathrm{d}t + \hat{Z}_t \mathrm{d}\hat{S}_t + \sqrt{\sigma_b^2 \hat{Z}_t}\mathrm{d}W_t^{(b)} \\ \mathrm{d}\hat{S}_t &= \left(\alpha + 2\alpha \frac{\sigma_e^2 \hat{Z}_t U(\hat{Z}_t)}{(\sigma_e^2 \hat{Z}_t + \sigma_b^2)(U(0) - U(\hat{Z}_t))}\right) \mathrm{d}t + \sqrt{\sigma_e^2}\mathrm{d}W_t^{(e)}, \end{aligned} \tag{3.1.7}$$

para toda $t \geq 0$. La ley marginal condicionada a la no extinción satisface

$$\mathcal{L}\left((Z_t)_{t\geq 0} \middle| Z_\infty > 0\right) = \mathcal{L}\left((\hat{Z}_t)_{t\geq 0}\right),$$

donde $(\hat{Z}_t)_{t\geq 0}$ es la solución de una SDE unidimensional que satisface $\hat{Z}_0 = Z_0$ y

$$\mathrm{d}\hat{Z}_t = \left(\frac{\sigma_e^2}{2} + \alpha + 2\alpha \frac{U(\hat{Z}_t)}{U(0) - U(\hat{Z}_t)}\right) \hat{Z}_t \mathrm{d}t + \sigma_e \hat{Z}_t \mathrm{d}W_t^{(e)} + \sqrt{\sigma_b^2 \hat{Z}_t}\mathrm{d}W_t^{(b)},$$

para $t \geq 0$.

Demostración. De manera análoga a la prueba del Teorema 2, calcularemos los generadores de ambos procesos y veremos que coinciden, sí su dominio es el mismo, esto implicará que los procesos tienen la misma ley. Sea $f \in \mathbf{C}_0^2([0,\infty)\times\mathbb{R},\mathbb{R})$ y $(Z_t, S_t)_{t\geq 0}$ un BDRE con parámetro crítico $\alpha > 0$. Gracias al Lema 2.10 tenemos que el generador $\ddot{\mathcal{G}}$ del proceso condicionado $\left((Z_t, S_t)_{t\geq 0} \middle| Z_\infty > 0\right)$ es

$$\begin{aligned} \ddot{\mathcal{G}} f(z,s) &= \lim_{h\to 0} \frac{\mathbb{E}_{(z,s)}\left[f(Z_t, S_t) - f(z,s) \,\middle|\, Z_\infty > 0\right]}{h} \\ &= \lim_{h\to 0} \frac{\mathbb{E}_{(z,s)}\left[\frac{(U(0)-U(Z_t))f(Z_t,S_t) - (U(0)-U(z))f(z,s)}{U(0)-U(z)}\right]}{h} \\ &= \frac{\mathcal{G}((U(0)-U)\cdot f)(z,s)}{U(0)-U(z)} = \frac{U(0)\mathcal{G}f(z,s)}{U(0)-U(z)} - \frac{\mathcal{G}(U\cdot f)(z,s)}{U(0)-U(z)}, \end{aligned}$$

ya que el operador es lineal. Como $\mathcal{G}f(z,s)$ y $\mathcal{G}(U\cdot f)(z,s)$ ya se calcularon anteriormente, tenemos que

$$
\begin{aligned}
\ddot{\mathcal{G}}f(z,s) &= \frac{U(0)}{U(0)-U(z)}\mathcal{G}f(z,s) - \frac{1}{U(0)-U(z)}\left[U(z)\mathcal{G}f(z,s)\right.\\
&\quad \left. + f_z(z,s)U'(z)(\sigma_e^2 z^2 + \sigma_b^2 z) + U'(z)f_s(z,s)\right]\\
&= \mathcal{G}f(z,s) - \frac{1}{U(0)-U(z)}\left[f_z(z,s)U'(z)(\sigma_e^2 z^2 + \sigma_b^2 z) + U'(z)f_s(z,s)\right].
\end{aligned}
$$

Ahora note que

$$
\frac{U'(z)}{U(0)-U(z)} = \frac{-2\alpha}{\sigma_e^2 z + \sigma_b^2} \times \frac{U(z)}{U(0)-U(z)}.
$$

Por lo tanto

$$
\begin{aligned}
\ddot{\mathcal{G}}f(z,s) &= \left[\left(\alpha + \frac{\sigma_e^2}{2}\right) z f_z(z,s) + \alpha f_s(z,s) + \frac{1}{2}(\sigma_e^2 z^2 + \sigma_b^2 z) f_{zz}(z,s) + \frac{1}{2}\sigma_e^2 f_{ss}(z,s)\right.\\
&\quad \left. + \sigma_e^2 z f_{zs}(z,s)\right] + \frac{2\alpha}{\sigma_e^2 z + \sigma_b^2}\cdot\frac{U(z)}{U(0)-U(z)}\left[f_z(z,s)(\sigma_e^2 z^2 + \sigma_b^2 z) + f_s(z,s)\right]\\
&= \left(\alpha + \frac{\sigma_e^2}{2} + \frac{2\alpha U(z)}{U(0)-U(z)}\right) z f_z(z,s) + \left(\alpha + \frac{2\alpha\sigma_e^2 z U(z)}{(\sigma_e^2 z + \sigma_b^2)(U(0)-U(z))}\right)\\
&\quad \times f_s(z,s) + \frac{\sigma_e^2 z^2 + \sigma_b^2 z}{2} f_{zz}(z,s) + \frac{\sigma_e^2}{2} f_{ss}(z,s) + \sigma_e^2 z f_{zs}(z,s),
\end{aligned}
$$

para toda $z \in [0,\infty)$, $s \in \mathbb{R}$ y toda $f \in C_0^2([0,\infty)\times\mathbb{R},\mathbb{R})$.

Por otro lado, calcularemos el generador del proceso $(\hat{Z}_t, \hat{S}_t)_{t\geq 0}$, con parámetro $\alpha > 0$, el cual satisface (3.1.7). Sea $f \in \mathbf{C}_0^2([0,\infty)\times\mathbb{R},\mathbb{R})$, aplicando la fórmula de Itô a f obtenemos

$$
\begin{aligned}
f(\hat{Z}_t, \hat{S}_t) &= f(z,s) + \int_0^t f_s(\hat{Z}_u,\hat{S}_u)\mathrm{d}\hat{S}_u + \int_0^t f_z(\hat{Z}_u,\hat{S}_u)\mathrm{d}\hat{Z}_u + \int_0^t f_{zs}(\hat{Z}_u,\hat{S}_u)\mathrm{d}\left\langle \hat{Z},\hat{S}\right\rangle_u\\
&\quad + \frac{1}{2}\int_0^t f_{ss}(\hat{Z}_u,\hat{S}_u)\mathrm{d}\left\langle \hat{S}\right\rangle_u + \frac{1}{2}\int_0^t f_{zz}(\hat{Z}_u,\hat{S}_u)\mathrm{d}\left\langle \hat{Z}\right\rangle_u\\
&= f(z,s) + \int_0^t f_s(\hat{Z}_u,\hat{S}_u)\left[\left(\alpha + \frac{2\alpha\sigma_e^2\hat{Z}_u}{\sigma_e^2\hat{Z}_u + \sigma_b^2}\frac{U(\hat{Z}_u)}{U(0)-U(\hat{Z}_u)}\right)\mathrm{d}u\right.\\
&\quad \left. + \sqrt{\sigma_e^2}\mathrm{d}W_u^{(e)}\right] + \int_0^t f_z(\hat{Z}_u,\hat{S}_u)\left[\left(\frac{\sigma_e^2}{2} + \alpha + \frac{U(\hat{Z}_u)}{U(0)-U(\hat{Z}_u)}\right)\hat{Z}_u\mathrm{d}u\right.\\
&\quad \left. + \sqrt{\sigma_e^2\hat{Z}_u^2}\mathrm{d}W_u^{(e)} + \sqrt{\sigma_b^2\hat{Z}_u}\mathrm{d}W_u^{(b)}\right] + \int_0^t f_{zs}(\hat{Z}_u,\hat{S}_u)\sigma_e^2\hat{Z}_u\mathrm{d}u\\
&\quad + \frac{1}{2}\int_0^t f_{ss}(\hat{Z}_u,\hat{S}_u)\sigma_e^2\mathrm{d}u + \frac{1}{2}\int_0^t f_{zz}(\hat{Z}_u,\hat{S}_u)(\sigma_e^2\hat{Z}_u^2 + \sigma_b^2\hat{Z}_u)\mathrm{d}u
\end{aligned}
$$

Por lo tanto el generador del proceso $(\hat{Z}_t, \hat{S}_t)_{t\geq 0}$

$$\ddot{\mathcal{G}}f(z,s) = \left(\alpha + \frac{2\alpha\sigma_e^2 z}{\sigma_e^2 z + \sigma_b^2}\frac{U(z)}{U(0)-U(z)}\right) f_s(z,s) + \left(\frac{\sigma_e^2}{2} + \alpha + \frac{2\alpha U(z)}{U(0)-U(z)}\right)$$
$$\times z f_z(z,s) + \frac{\sigma_e^2}{2} f_{ss}(z,s) + \frac{1}{2}(\sigma_e^2 z^2 + \sigma_b^2 z) f_{zz}(z,s) + \sigma_e^2 z f_{zs}(z,s).$$

Como tienen el mismo generador, los procesos son iguales en distribución. ∎

Teorema 6. Sean $\alpha, \sigma_e, \sigma_b \in (0,\infty)$ y $(Z_t, S_t)_{t\geq 0}$ la única solución de (1.2.1) con $S_0 = 0$. Entonces

$$\lim_{t\to\infty} \sqrt{t^3} e^{\frac{\alpha^2 t}{2\sigma_e^2}} \mathbf{P}_z\Big(Z_t > 0 \Big| Z_\infty = 0\Big) = \frac{8}{\sigma_e^3}\int_0^\infty f(za)\phi_\beta(a)\mathrm{d}a > 0 \quad \text{si } \alpha \in (0,\sigma_e^2), \tag{3.1.8}$$

$$\lim_{t\to\infty} \sqrt{t} e^{\frac{\sigma_e^2 t}{2}} \mathbf{P}_z\Big(Z_t > 0 \Big| Z_\infty = 0\Big) = \frac{\sigma_e\sqrt{2}}{\sigma_b^2\sqrt{\pi}} z > 0 \quad \text{si } \alpha = \sigma_e^2, \tag{3.1.9}$$

$$\lim_{t\to\infty} e^{(\alpha - \frac{\sigma_e^2}{2})t} \mathbf{P}_z\Big(Z_t > 0 \Big| Z_\infty = 0\Big) = 2\frac{(\alpha - \sigma_e^2)}{\sigma_b^2} z > 0 \quad \text{si } \alpha > \sigma_e^2, \tag{3.1.10}$$

para toda $z \in (0,\infty)$, donde $\beta := \frac{2\alpha}{\sigma_e^2}$ y la función $\phi_\beta : (0,\infty) \to (0,\infty)$ esta definida como

$$\phi_\beta(a) = \int_0^\infty\int_0^\infty \frac{1}{\pi\sqrt{2}}\Gamma\left(\frac{\beta+2}{2}\right) e^{-a} a^{-\beta/2} u^{(\beta-1)/2} e^{-u}$$
$$\times \frac{\sinh(\xi)\cosh(\xi)\xi}{(u + a(\cosh(\xi))^2)^{(\beta+2)/2}} \mathrm{d}\xi \mathrm{d}u,$$

para toda $a \in (0,\infty)$.

Demostración. Sea $\alpha > 0$, fijo, y $(Z_t^{(\alpha)}, S_t^{(\alpha)})_{t\geq 0}$ una solución fuerte de (1.2.1) con parámetro crítico α. Gracias al Corolario 4, tenemos

$$\mathcal{L}\left((Z_t^{(\alpha)})_{t\geq 0}\Big| Z_\infty = 0\right) = \mathcal{L}\left((Z_t^{(-\alpha)})_{t\geq 0}\right),$$

donde $Z_0^{(-\alpha)} = Z_0^{(\alpha)}$. Así, por el Teorema 1, para $-\alpha \in (-\sigma_e^2, 0)$, obtenemos

$$\lim_{t\to\infty} \sqrt{t^3} e^{\frac{\alpha^2}{2\sigma_e^2}t} \mathbf{P}_z\Big(Z_t^{(\alpha)} > 0 \Big| Z_\infty^{(\alpha)} = 0\Big) = \lim_{t\to\infty} \sqrt{t^3} e^{\frac{\alpha^2}{2\sigma_e^2}t} \mathbf{P}_z\left(Z_t^{(-\alpha)} > 0\right)$$
$$= \frac{8}{\sigma_e^3}\int_0^\infty f(za)\phi_\beta(a)\mathrm{d}a.$$

Por otra parte, sea $\alpha = \sigma_e^2$. Por el Teorema 1 y el Corolario 4, tenemos

$$\lim_{t\to\infty} \sqrt{t} e^{\frac{\sigma_e^2 t}{2}} \mathbf{P}_z\Big(Z_t^{(\alpha)} > 0 \Big| Z_\infty = 0 \Big) = \lim_{t\to\infty} \sqrt{t} e^{\frac{\sigma_e^2 t}{2}} \mathbf{P}_z \left(Z_t^{(-\alpha)} > 0 \right) = \frac{\sigma_e \sqrt{2}}{\sigma_b^2 \sqrt{\pi}} z > 0.$$

Por último, sea $\alpha > \sigma_e^2$. Nuevamente, por el Teorema 1 y el Corolario 4, tenemos

$$\begin{aligned}\lim_{t\to\infty} e^{(\alpha - \frac{\sigma_e^2}{2})t} \mathbf{P}_z\Big(Z_t^{(\alpha)} > 0 \Big| Z_\infty = 0 \Big) &= \lim_{t\to\infty} e^{(2\beta - 2)\frac{\sigma_e^2}{4} t} \mathbf{P}_z \left(Z_t^{(-\alpha)} > 0 \right) \\ &= \frac{\sigma_e^2 z}{\sigma_b^2} (\beta - 2) \\ &= \frac{2(\alpha - \sigma_e^2)}{\sigma_b^2} z.\end{aligned}$$

Con esto queda demostrado el Teorema 6. ∎

Bibliografía

[1] Bansaye, V., & Tran, V. C. (2011). Branching Feller diffusion for cell division with parasite infection. *ALEA Lat. Am. J. Probab. Math. Stat.*, *8*, 95–127.

[2] Böinghoff, C., & Hutzenthaler, M. (2012). Branching diffusions in random environment. *Markov Process. Related Fields*, *18*(2), 269–310.

[3] Dufresne, D. (2001). The integral of geometric brownian motion. *Adv. in Appl. Probab.*, *33,1*, 223–241.

[4] Hutzenthaler, M. (2011). Supercritical branching diffusions in random environment. *Electron. Commun. Probab.*, *16*, no. 69, 781–791.

[5] Kurtz, T. G. (1978). Diffusion approximations for branching processes. *In Branching processes*, *5*, 269–292.

[6] Matsumoto, H., & Yor, M. (2003). On dufresne's relation between the probability laws of exponential functionals of brownian motions with different drifts. *Adv. Appl. Prob.*, *35*, 184–206.

[7] Revuz, D., & Yor, M. (1999). *Continuos Martingales and Brownian Motion*. Berlin: Springer, 3 ed.

[8] Yor, M. (1992). Sur certaines fonctionnelles exponentielles du mouvement brownien réel. *J. Appl. Probab.*, *29*(1), 202–208.