Centro de Investigación en Matemáticas

CIMAT

l_1 y la Propiedad del Punto Fijo

T E S I S

Que para obtener el título de

Maestro en Ciencias con Especialidad en Matemáticas Básicas

P R E S E N T A:

Chayan Adelki De la Cruz Reyes

DIRECTOR(A) DE TESIS:

M. en C. Helga Andrea Fetter Nathansky

Guanajuato, Guanajuato. Febrero del año 2014

Índice general

Agradecimientos

La realización de un trabajo de tesis puede ser equiparable a emprender una aventura hacia un lugar poco o nada conocido, donde en el camino inevitablemente nos encontraremos con eventos inesperados, situaciones adversas que requerirán lo mejor de nosotros para ser superadas. Sin embargo, cuando en esta travesía, contamos con personas dispuestas a tender una mano amiga, el yugo se aligera y nuestros labios se vuelven hidrópicos por beber de las fuentes del conocimiento. Esta peripecia no es la excepción, y en este viaje anecdótico he sentido el apoyo de muchas personas a las que me gustaría dedicarles unas líneas de agradecimiento.

Primeramente, agradezco a DIOS por darme el regalo de la vida que es una fiesta y que me haya permitido ver realizados muchos de los anhelos de mi corazón.

Me encuentro muy agradecido con mi asesora de tesis, M. en C. Helga Fetter Nathansky, por su paciencia y los conocimientos que me ha compartido.

Mi familia es el motor que siempre me ha impulsado y que en gran medida es directamente responsable de los logros que he alcanzado. Por ello es que cada éxito conquistado, no es mío sino nuestro.

Que sería el hombre sin sus amigos, vendría a ser como un edificio sin buenos cimientos. Agradezco en especial a Aída y Martha, que son dos luces que dios me ha dado para alumbrar mi sendero.

Introducción

El primer resultado trascedental en el campo de la teoría métrica del punto fijo, es el célebre teorema conocido como principio de contracción de Banach. Las aplicaciones de esta teoría han trascendido en distintas áreas de las matemáticas, ya que existen numerosos problemas que se pueden formular como un problema de punto fijo de una aplicación no expansiva. En particular, a través del principio de contracción de Banach se puede resolver el problema de Cauchy sobre la existencia y unicidad de una solución de una ecuación diferencial, que satisface una condición inicial dada. La solución corresponde a un punto fijo de una contracción, que se encuentra definida sobre el espacio de las funciones continuas con valores reales $\mathbb{C}[0, T]$.

En 1965, la teoría métrica del punto fijo tuvo un auge importante con la aparición de algunos resultados. El primero de ellos fue probado por F. Browder, quien demostró que si X es un espacio de Hilbert y C un subconjunto que es no vacío, cerrado, acotado y convexo de X, entonces cada aplicación no expansiva $T : C \to C$ tiene un punto fijo. Un subconjunto C con tales características, se dice que tiene la propiedad del punto fijo (PPF). Casi de manera inmediata, Browder y Göhde probaron que el mismo resultado era válido para una clase más amplia de espacios llamados uniformemente convexos. Ese mismo año, Kirk observó que la presencia de una propiedad geométrica, llamada estructura normal, implica la propiedad del punto fijo si el espacio es reflexivo. Esta fue la base para la gran parte de la teoría posterior.

Todos los espacios que se conocían hasta el 2007 que satisfacían la PPF eran reflexivos, razón por la que se especulaba que para que un espacio satisficiera la PPF era necesario que el espacio fuera reflexivo. Sin embargo, en 2008 Pei-Kee Lin probó que eso no era verdad. El mostró que si el espacio de sucesiones l_1, que no es reflexivo, se encuentra dotado con cierta norma equivalente a la usual de l_1, satisface la PPF, abriendo una nueva vertiente en el estudio de espacios de Banach no reflexivos que pueden ser renornamados para tener la PPF. El resultado de Lin es el pilar fundamental en la realización de este trabajo.

Capítulo 1

Preliminares

El capítulo tiene como intención primordial proporcionarnos la herramienta necesaria para el estudio de la PPF en el espacio l_1. Estudiaremos en primera instancia el principio de contracción de Banach y declararemos un resultado análogo sobre un espacio métrico compacto, considerando una aplicación contractiva. Más adelante, introduciremos los conceptos de topología débil, débil estrella y la convergencia en dichas topologías. Además enunciaremos algunos resultados conocidos de análisis funcional que no se demostrarán, éstos pueden ser consultados en varios libros de texto de esta área [3, 10].

1.1. Principio de contracción de Banach

La teoría del punto fijo tiene sus inicios en el trabajo desarrollado por Poincaré en 1880, quien mostró que las soluciones a ciertos problemas analíticos podían ser estudiadas considerando un conjunto K y una función $f : K \to K$, de tal manera que las soluciones correspondieran a puntos fijos de la función f.

Las funciones utilizadas por Poincaré para su estudio del punto fijo, son conocidas como funciones de Lipschitz, que definiremos a continuación.

Definición 1.1 *Consideremos* (M, ρ) *espacio métrico. Una aplicación* $T : M \to M$ *es* **Lipschitz** *si existe una constante* $k \geq 0$ *tal que para todos* $x, y \in M$*,*

$$\rho(Tx, Ty) \leq k\rho(x, y).$$

La más pequeña de las constantes k *que satisfacen lo anterior se llama* **constante de Lipschitz** *y se denota por* $k(T)$*.*

Si $k(T) < 1$, la aplicación $T : M \to M$ es una **contracción**.

En 1922, Stefan Banach probó en su tesis un teorema que asegura la existencia y unicidad de un punto fijo para contracciones.

Teorema 1.2 (principio de Contracción de Banach) *Sean* (M, ρ) *espacio métrico completo y* $T : M \to M$ *una contracción. Entonces* T *tiene un único punto fijo en* M*. Además para cada* $x_0 \in M$ *la sucesión de iteraciones* $\{T^n x_0\}$ *converge a ese punto fijo de* T*.*

Existe una clase de aplicaciones que se encuentran entre las contracciones y las aplicaciones con constante de Lipschitz igual a 1, llamadas contractivas.

Definición 1.3 *Una aplicación* $T : M \to M$ *se llama* **contractiva** *si:*

$$\rho(Tx, Ty) < \rho(x, y), \qquad \forall x, y \in M, x \neq y$$

Para espacios compactos se tiene un resultado similar al que probó Banach, considerando ahora aplicaciones contractivas.

Teorema 1.4 *Sean* (M, ρ) *espacio métrico compacto y* $T : M \to M$ *contractiva. Entonces* T *tiene un único punto fijo en* M*, y para cada* $x_0 \in M$ *la sucesión* $\{T^n x_0\}$ *de iteraciones converge al punto fijo.*

En el teorema anterior no se puede reemplazar la compacidad con la completez y acotabilidad del espacio, como se muestra en el siguiente ejemplo.

Ejemplo 1.5 *Sea $X = \mathbb{C}[0,1]$ el espacio de funciones continuas con valores reales en $[0,1]$ dotado con la norma del supremo, esto es, para cada $x \in \mathbb{C}[0,1]$,*

$$||x|| = \sup\{|x(t)| \;:\; t \in [0,1]\}.$$

Consideremos el subconjunto K de X definido por

$$K = \{x \in C[0,1] : 0 = x(0) \leq x(t) \leq x(1) = 1\}.$$

Es claro que el conjunto K esta acotado por la función constante igual a 1. El conjunto K es cerrado, en efecto:
Sea $\{x_n\} \subset K$ sucesión de funciones, tales que para cada n, $x_n : [0,1] \to \mathbb{R}$ y

$$0 = x_n(0) \leq x_n(t) \leq x_n(1) = 1.$$

Supongamos que $x_n \to x$, cuando $n \to \infty$. Sea $\epsilon > 0$, existe $N \in \mathbb{N}$ tal que si $n \geq N$, entonces

$$||x_n - x|| = \sup\{|x_n(t) - x(t)| \;:\; t \in [0,1]\} < \epsilon.$$

Así, para todo $t \in [0,1]$,

$$|x_n(t) - x(t)| < \epsilon. \tag{1.1}$$

Esto significa que la sucesión $x_n \to x$ uniformemente; como cada x_n es continua, x es continua. Tomando $t = 0$ en 1.1 se tiene que

$$|x_n(0) - x(0)| = |x(0)| < \epsilon,$$

y como ϵ es arbitrario, deducimos que $x(0) = 0$. De manera análoga, considerando ahora $t = 1$ en 1.1 es fácil ver que $x(1) = 1$. Por otro lado, si $n \geq N$, observemos que

$$\begin{aligned} |x(t)| &= |x(t) - x_n(t) + x_n(t)| \\ &\leq |x(t) - x_n(t)| + |x_n(t)| \\ &< \epsilon + |x_n(t)|. \end{aligned}$$

Tomando el supremo en ambos lados de la desigualdad, obtenemos que $||x|| < \epsilon + 1$ *y como* ϵ *es arbitrario esto implica que* $0 \leq ||x|| \leq 1$*, así el conjunto* K *es cerrado. Debido a que* $C[0,1]$ *es completo con la métrica inducida por* $\| \cdot \|$*, se sigue que* K *es completo. Además observemos que* K *es convexo; para ello consideremos* $x, y \in K$, $\lambda \in [0,1]$ *y definamos la función*

$$z_1(t) = \lambda x(t) + (1-\lambda)y(t)$$

que es continua debido a que es la suma de dos funciones continuas. Si consideramos $t = 0$, $z_1(0) = \lambda \cdot 0 + (1-\lambda) \cdot 0 = 0$*. Ahora si tomamos* $t = 1$*, tenemos que* $z_1(1) = \lambda \cdot 1 + (1-\lambda) \cdot 1 = 1$*. Es claro que* $0 \leq z_1(t) \leq 1$*. Por lo tanto,* $z_1 \in K$*.*

Definamos una aplicación $T : K \to K$ *por* $(Tx)(t) = tx(t)$*. Afirmamos que* T *es contractiva, en efecto:*
Si $x, y \in K$ *con* $x \neq y$*, entonces existe* $t_1 \in [0,1]$ *tal que* $x(t_1) \neq y(t_1)$*. Por otro lado,*

$$||Tx - Ty|| = \sup\{|tx(t) - ty(t)| \ : \ t \in [0,1]\} = t_2|x(t_2) - y(t_2)|,$$

para algún $t_2 \in [0,1]$*. Si* $t_2 = 1$*, entonces*

$$||Tx - Ty|| = |x(1) - y(1)| = 0 < |x(t_1) - y(t_1)| \leq ||x - y||.$$

Si $0 \leq t_2 < 1$*,*

$$||Tx - Ty|| = t_2|x(t_2) - y(t_2)| < |x(t_2) - y(t_2)| \leq ||x - y||.$$

Ahora probaremos que T *no tiene punto fijo. Supongamos que existe* $x \in K$ *tal que* $Tx = x$*, así* $(Tx)(t) = tx(t) = x(t)$ *para toda* $t \in [0,1]$*. Como* $x(t)$ *no es idénticamente cero y continua, existe* $t \in (0,1)$ *tal que* $x(t) \neq 0$*, así* $tx(t) < x(t)$*, llegando a una contradicción.*

En el próximo capítulo, para el estudio de la PPF enfocaremos nuestra atención en funciones más generales que las contracciones y contractivas, a saber las funciones no expansivas.

1.2. Topologías w y w^*

En un espacio normado X si toda sucesión acotada contiene una subsucesión convergente, la dimensión de X debe de ser finita. La búsqueda de subsucesiones convergentes de sucesiones acotadas, llevó a considerar estructuras topológicas más débiles que tuvieran más compactos y que no alteraran la estructura de espacio vectorial. Las topologías naturales a considerar, son la topología débil y débil estrella.

Definición 1.6 *Sea X un espacio normado y X^* su dual. La topología en X que tiene como base local de x_0 a los conjuntos de la forma*

$$V(x_0, x_1^*, x_2^*, ..., x_k^*, \epsilon) = \bigcap_{i=1}^{k} \{x \in X : |x_i^*(x - x_0)| < \epsilon)\},$$

con $x_1^*, x_2^*, ..., x_k^* \in X^*$ y $\epsilon > 0$, recibe el nombre de **topología débil** *y se denota por $\sigma(X, X^*)$ o simplemente por w.*

Una sucesión $\{x_n\}$ en X converge débilmente a x_0 si y sólo si $x^*(x_n) \to x^*(x_0)$ para toda $x^* \in X^*$. La convergecia la denotaremos por

$$x_n \overset{w}{\to} x_0.$$

Como podemos apreciar, la topología débil se encuentra definida en el espacio normado mismo, mientras que la topología débil estrella se define en su dual, como se muestra a continuación.

Definición 1.7 *Sea X un espacio normado y X^* su dual. La topología en X^* que tiene como base local de x_0^* a los conjuntos de la forma*

$$V(x_0^*, x_1, x_2, ..., x_k, \epsilon) = \bigcap_{i=1}^{k} \{x^* \in X^* : |(x_0^* - x^*)(x_i)| < \epsilon\},$$

con $x_1, x_2, ..., x_k \in X^*$ y $\epsilon > 0$, recibe el nombre de **topología débil estrella** *y se denota por $\sigma(X^*, X)$ o simplemente por w^*.*

Una sucesión $\{x_n^*\}$ en X^* converge débilmente a x_0^* si $x_n^*(x) \to x_0^*(x)$ para toda $x \in X$. La convergecia la denotaremos por

$$x_n^* \xrightarrow{w^*} x_0^*.$$

Definición 1.8 *Sea X espacio vectorial dotado con una norma $||\cdot||$. Decimos que X es un* **espacio de Banach** *si toda sucesión de Cauchy converge con respecto a la norma en X.*

Definición 1.9 *Sea X un espacio de Banach. Un conjunto $C \subset X$ es* **convexo** *si para toda $\lambda \in [0,1]$ se satisface que*

$$\lambda C + (1-\lambda)C \subset C.$$

La cerradura en la norma y la cerradura en la topología débil de un conjunto en general son distintas. Sin embargo, el siguiente resultado muestra que éstas coinciden cuando el conjunto es convexo.

Proposición 1.10 *Sea X un espacio normado. Si $A \subset X$ es convexo, entonces $\overline{A} = \overline{A}^w$. Así un subconjunto convexo de X es cerrado si y sólo si es débilmente cerrado.*

Una de las propiedades trascedentales que tenemos en la topología w^*, es que los conjuntos norma cerrados y acotados en X^* son w^* compactos. Esta propiedad queda expresada en el siguiente teorema.

Teorema 1.11 (Banach-Alaoglu) *Para todo espacio normado X, el conjunto*

$$B_{X^*} = \{x^* \in X^* : ||x^*|| \leq 1\},$$

donde B_{X^*} denota a la bola unitaria cerrada en X^*, es w^* compacto y por lo tanto, todo subconjunto w^* cerrado y acotado de X^* es w^* compacto.

A continuación presentamos el teorema de Krein-Smulian en su versión para conjuntos convexos.

Teorema 1.12 *Sea X un espacio de Banach y C un subconjunto convexo de X^*. Entonces, C es w^*-cerrado si y sólo si $C \cap tB_{X^*}$ es w^* cerrado, para todo $t > 0$.*

Las topologías w y w^* en espacios de dimensión infinita nunca son metrizables.

Proposición 1.13 *Sea X espacio de Banach. Si la topología $w(w^*)$ en $X(X^*)$ es metrizable, entonces $X(X^*)$ tiene dimensión finita.*

No obstante, si consideramos a X separable, entonces la topología w^* restringida a conjuntos acotados es metrizable.

Proposición 1.14 *Sea X un espacio normado. Son equivalentes:*

(1) *X es separable.*

(2) *Toda bola cerrada en X^* es w^* metrizable.*

(3) *La bola unitaria de X^* denotada por B_{X^*}, es w^* metrizable.*

En espacios métricos tenemos que un conjunto es compacto si y sólo si es secuencialmente compacto. Así, por el teorema de Banach-Alaoglu y por la Proposición 1.14 deducimos el siguiente teorema:

Teorema 1.15 *Si X es separable y $\{f_n\}$ una sucesión acotada en X^*, entonces $\{f_n\}$ tiene una subsucesión w^*-convergente.*

1.3. Miscelánea

Otros resultados y definiciones que necesitaremos en capítulos posteriores son los siguientes:

Definición 1.16 *Sea X un espacio vectorial, dos normas $||\cdot||_1$ y $||\cdot||_2$ en X son* **equivalentes** *si y sólo si existen $L>0$ y $M>0$ tales que para toda $x\in X$,*

$$L||x||_1 \leq ||x||_2 \leq M||x||_1.$$

Lema 1.17 *Sea V un espacio vectorial y $K\subset V$ convexo. Si $x_1,x_2,...,x_n\in K$, $t_1,...,t_n\geq 0$ y $t_1+\cdots+t_n=1$, entonces $t_1x_1+\cdots+t_nx_n\in K$.*

Demostración. Procederemos por inducción sobre n. Es claro que para $n=1$ se obtiene la conclusión del lema. Supongamos que la afirmación se cumple para $n=k$. Consideremos en seguida $x_1,...,x_{k+1}\in K$ y $t_1,...,t_{k+1}\geq 0$ tales que $t_1+\cdots+t_{k+1}=1$. Supongamos primero que $t\equiv t_{k+1}=1$. Entonces $t_1=\cdots=t_k=0$ y

$$t_1x_1+\cdots+t_{k+1}x_{k+1}=x_{k+1}\in K.$$

Supongamos ahora que $t\neq 1$. Tenemos que

$$t_1x_1+\cdots+t_kx_k+tx_{k+1}=(1-t)\left(\frac{t_1}{1-t}x_1+\cdots+\frac{t_k}{1-t}x_k\right)+tx_{k+1}. \tag{1.2}$$

Debido a que $\frac{t_k}{1-t}\geq 0$ y $\frac{t_1}{1-t}+\cdots+\frac{t_k}{1-t}=\frac{1}{1-t}(t_1+\cdots+t_k)=1$, por hipótesis de inducción obtenemos que $\frac{t_1}{1-t}x_1+\cdots+\frac{t_k}{1-t}x_k\in K$. Como K es convexo, de (1.2) concluimos que $t_1x_1+\cdots+t_kx_k+tx_{k+1}\in K$. ■

Definición 1.18 *Sea X espacio de Banach. Si $A\subset X$, el subconjunto convexo más pequeño de X que contiene a A es*

$$convA=\cap\{K\subset X : K\supset A, K\ convexo\}, \tag{1.3}$$

al que llamaremos la **envolvente convexa** *de A.*

Sin embargo, podemos encontrar en algunos libros de análisis funcional como es el caso de [3], que la envolvente convexa se define como

$$conv A = \left\{ \sum_{i=1}^{n} \alpha_i x_i \ : \ \alpha_i \in \mathbb{R}, \ \alpha_i \geq 0, \ \sum_{i=1}^{n} \alpha_i = 1, \ x_i \in A, \ i = 1, 2, ..., n \right\}. \quad (1.4)$$

No es difícil probar que ambas definiciones son equivalentes, para ello, renombremos a (1.3) por $conv_1$ y a (1.4) por $conv_2$. En efecto:

Si $x, y \in conv_2 A$, entonces son de la forma

$$x = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i x_i \ : \ \alpha_i \in \mathbb{R}, \ \alpha_i \geq 0, \ \sum_{i=1}^{n} \alpha_i = 1, \ x_i \in A, \ i = 1, 2, ..., n,$$

$$y = \sum_{i=1}^{m} \beta_i y_i \ : \ \beta_i \in \mathbb{R}, \ \beta_i \geq 0, \ \sum_{i=1}^{m} \beta_i = 1, \ y_i \in A, \ i = 1, 2, ..., m.$$

Sea $\lambda \in [0, 1]$. Tenemos que

$$\lambda x + (1 - \lambda) y = \sum_{i=1}^{n} \lambda \alpha_i x_i + \sum_{i=1}^{m} (1 - \lambda) \beta_i y_i,$$

además

$$\sum_{i=1}^{n} \lambda \alpha_i + \sum_{i=1}^{m} (1 - \lambda) \beta_i = \lambda(1) + (1 - \lambda)(1) = 1.$$

Así $\lambda x + (1 - \lambda) y \in conv_2 A$, por lo tanto, el conjunto $conv_2 A$ que contiene a A es convexo. De aquí se desprende que $conv_1 A \subset conv_2 A$. Por otro lado, supongamos $x \in conv_2 A$, entonces x es de la forma

$$x = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i x_i \ : \ \alpha_i \in \mathbb{R}, \ \alpha_i \geq 0, \ \sum_{i=1}^{n} \alpha_i = 1, \ x_i \in A \subset K, \ i = 1, 2, ..., n,$$

donde K es un subconjunto convexo de X que contiene a A. Por lema anterior, tenemos que $x \in K$ para todo subconjunto convexo K que contiene a A. Por lo tanto, $x \in conv_1 A$.

Definición 1.19 *Sea $\mathbb{F}$ una familia de subconjuntos de un conjunto Y. Decimos que $\mathbb{F}$ tiene la* **propiedad de la intersección finita***, si la intersección de cualquier subfamilia finita de $\mathbb{F}$ es no vacía.*

Proposición 1.20 *Sea (X, τ) espacio topológico. Son equivalentes:*

(1) *X es compacto.*

(2) *Toda familia $\{F_i\}_{i \in I}$ de cerrados en X que tiene la propiedad de la intersección finita, tiene intersección no vacía.*

Capítulo 2

Propiedad del Punto Fijo para Aplicaciones no expansivas

En este capítulo consideraremos la clase de aplicaciones no expansivas que incluye a las contracciones y a las aplicaciones contractivas. Definiremos la propiedad del punto fijo (PPF) para este tipo de funciones y proveeremos algunas herramientas que nos facilitarán el estudio de dicha propiedad, además daremos a conocer algunos ejemplos en los que no se cumple la PPF. De hecho, probaremos que l_1 no tiene la PPF [5].

Posteriormente, introduciremos el concepto de copia asintóticamente isométrica y mostraremos que si un espacio contiene una de tales copias, entonces no tiene la PPF. Definiremos una norma equivalente a la usual en l_1 y probaremos que bajo este nuevo renormamiento, l_1 no contiene ninguna copia asintóticamente isométrica de l_1.

2.1. Apliaciones no expansivas

Definición 2.1 *Sean X un espacio de Banach con norma $||\cdot||$ y K un subonjunto no vacío, cerrado, acotado y convexo. Una apliación $T : K \to K$ es* **no expansiva** *si para todo $x, y \in K$*

$$||Tx - Ty|| \leq ||x - y||.$$

Es fácil ver que todas las iteraciones T^n de T para n=0,1,2,..., también son no expansivas.

Observación 2.2 *Cabe mencionar que una aplicación no expansiva puede no tener un punto fijo (ver Ejemplo 1.5) y en caso que lo tuviera no necesariamente es único (para esto último basta considerar la función identidad). Además, si una aplicación no expansiva tiene un único punto fijo x_0, la sucesión de iteraciones $\{T^n x\}$ con $x \neq x_0$ no necesariamente converge a x_0, como se verá en el próximo ejemplo.*

Ejemplo 2.3 *Sean $X = l_2$ el espacio vectorial de las sucesiones $x = (x_n)_{n=1}^{\infty} \subset \mathbb{K}$ tales que $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \mid x_n \mid^2 < \infty$ dotado con la norma*

$$\| x \| = (\sum_{n=1}^{\infty} \mid x_n \mid^2)^{1/2}$$

y $B_X = \{x \in X \ : \ ||x|| \leq 1\}$ la bola unitaria de X. Definimos una aplicación $T : B_X \to B_X$ por $Tx = (0, \alpha_1 x_1, \alpha_2 x_2, ..., \alpha_i x_i, ...)$, donde $\alpha_1 = 1$ y $\alpha_i = (1 - 1/i^2)$ para $i = 2, 3, ...$ Consideremos $x, y \in B_X$

$$\begin{aligned} ||Tx - Ty|| &= ||(0, \alpha_1(x_1 - y_1), \alpha_2(x_2 - y_2), ...)|| = (\sum_{i=1}^{\infty} |\alpha_i(x_i - y_i)|^2)^{1/2} \\ &< \sum_{i=1}^{\infty} |x_i - y_i|^2)^{1/2} = ||x - y||, \end{aligned}$$

esto prueba que T es contractiva, además es claro que (0,0,..,0,..) es punto fijo de T. Si tomamos $x = (1, 0, ..., 0, ...) \in B_X$, entonces para cada n

$$T^n x = (0, 0, ..., \prod_{i=1}^{n} \alpha_i, 0, ..),$$

así $||T^n x|| = \frac{n+1}{2(n)} \to \frac{1}{2}$, *cuando* $n \to \infty$.

Definición 2.4 *Un subconjunto cerrado, acotado y convexo* K *de un espacio de Banach que satisface la propiedad que si toda aplicación no expansiva* $T : K \to K$ *tiene un punto fijo, se dice que tiene la* **propiedad del punto fijo** *(PPF).*

Si un espacio de Banach X *satisface lo anterior para cada subconjunto* $K \subset X$ *no vacío, cerrado, acotado y convexo, se dice que tiene la PPF.*

Contamos con dos herramientas importantes en nuestra búsqueda de puntos fijos para una aplicación no expansiva. La primera de ellas viene dada a través del siguiente lema.

Lema 2.5 *Bajo las mismas suposiciones que en la definición anterior sobre* K *y* T*, se tiene*

$$inf\{||x - Tx|| : x \in K\} = 0.$$

Demostración. *Consideremos* $z \in K$ *fijo,* $\epsilon \in (0, 1)$ *y la aplicación* $T_\epsilon : K \to K$ *definida por*

$$T_\epsilon x = \epsilon z + (1 - \epsilon)Tx.$$

Notemos que T_ϵ *es una contracción. En efecto, para todo* $x, y \in K$*:*

$$\begin{aligned} ||T_\epsilon x - T_\epsilon y|| &= ||[\epsilon z + (1-\epsilon)Tx] - [\epsilon z + (1-\epsilon)Ty]|| \\ &= ||(1-\epsilon)(Tx - Ty)|| \\ &= (1-\epsilon)||Tx - Ty|| \\ &\leq (1-\epsilon)||x - y||. \end{aligned}$$

Debido a que $K \subset X$ *es cerrado y* X *es completo,* K *es completo; por el principio de contracción de Banach, existe* $x_\epsilon \in K$ *tal que* $T_\epsilon x_\epsilon = x_\epsilon$*. Por lo tanto,*

$$||x_\epsilon - Tx_\epsilon|| = ||T_\epsilon x_\epsilon - Tx_\epsilon||$$

$$
\begin{aligned}
&= ||\epsilon z + (1-\epsilon)Tx_\epsilon - Tx_\epsilon|| \\
&= ||\epsilon z - \epsilon Tx_\epsilon|| \\
&= \epsilon||z - Tx_\epsilon|| \\
&\leq \epsilon \cdot diamK.
\end{aligned}
$$

Haciendo tender $\epsilon \to 0$ se obtiene el resultado. ■

El lema anterior garantiza la existencia de una sucesión $\{y_n\}$ contenida en K tal que, $\lim_{n\to\infty} ||y_n - Ty_n|| = 0$. Dicha sucesión en el idioma inglés recibe el nombre de "approximate fixed point sequence", que abreviaremos como afps.

Definición 2.6 *Un subconjunto D de K es* **invariante** *con respecto a la aplicación $T : K \to K$, si $T(D) \subset D$.*

El segundo hecho que facilita el estudio de la PPF es la existencia de conjuntos T-invariantes minimales que a continuación definimos.

Definición 2.7 *Un subconjunto D no vacío, cerrado, convexo de un conjunto K es* **invariante minimal** *con respecto a una aplicación $T : K \to K$ si $T(D) \subset D$ y si D no contiene subconjuntos propios no vacíos, cerrados y convexos que sean invariantes bajo T.*

Observación 2.8 *La intersección de cualquier familia de subconjuntos de K que son no vacíos, cerrados, convexos y T-invariantes es cerrada, convexa y T-invariante, aunque puede ser vacía.*
En efecto, sea $\{D_\alpha\}_{\alpha\in\wedge}$ familia de subconjuntos de K bajo las anteriores consideraciones y sea $A = \bigcap\limits_{\alpha\in\wedge} D_\alpha$:

(1) *Claramente A es cerrado.*

(2) *A es T-invariante, pues por hipótesis sobre la familia $\{D_\alpha\}$ tenemos que $T(D_\alpha) \subset D_\alpha$ para toda $\alpha \in \wedge$. Si $x \in A$, entonces $x \in D_\alpha$ para cada $\alpha \in \wedge$, se sigue que $T(x) \in D_\alpha$ para toda $\alpha \in \wedge$. Por lo tanto $T(x) \in \bigcap\limits_{\alpha \in \wedge} D_\alpha$, como x es arbitrario se concluye que $T(A) \subset A$.*

(3) *A es convexo ya que si $z_1, z_2 \in A$ y $t \in [0,1]$, esto implica que $z_1, z_2 \in D_\alpha$, para toda $\alpha \in \wedge$, debido a la convexidad de los conjuntos D_α desprendemos que $tz_1 + (1-t)z_2 \in A$.*

Teorema 2.9 *Sea K un subconjunto no vacío, débilmente compacto, convexo de un espacio de Banach. Para cualquier aplicación $T : K \to K$ existe un subconjunto de K cerrado, convexo que es invariante minimal bajo T.*

Demostración. Consideremos la familia $\mathfrak{M}$ de todos los subconjuntos de K que son no vacíos, cerrados, convexos (así débilmente compactos) y T-invariantes, que es distinta del vacío debido a que $K \in \mathfrak{M}$. Definamos el siguiente orden en $\mathfrak{M}$: para $K_1, K_2 \in \mathfrak{M}$, $K_1 \leq K_2$ si $K_2 \subset K_1$. Notemos que cualquier cadena (familia linealmente ordenada) finita $K_1 \leq K_2 \leq ... \leq K_n$ de conjuntos en $\mathfrak{M}$ tiene intersección no vacía, esto es, el conjunto $B = \bigcap\limits_{i=1}^{n} K_i = K_n \neq \emptyset$. Además el conjunto B constituye una cota superior de la cadena anterior. Como consecuencia de la compacidad débil de K y la propiedad de la intersección finita en $\mathfrak{M}$ tenemos que cualquier cadena $\{K_\alpha \ : \ \alpha \in \wedge\}$ de conjuntos en $\mathfrak{M}$ tiene intersección no vacía y el conjunto $C = \bigcap\limits_{\alpha \in \wedge} K_\alpha$ es una cota superior de la cadena y además $C \in \mathfrak{M}$ por la Observación 2.8. Aplicando el Lema de Zorn existe al menos un conjunto $D \in \mathfrak{M}$ que es maximal con respecto a $\leq$, así concluimos que D es T-invariante minimal. ■

Sea K un subconjunto no vacío, cerrado, acotado y convexo. Para una aplicación $T : K \to K$, una sucesión decreciente de subconjuntos no vacíos, cerrados, convexos y T-invariantes, puede ser obtenida de la siguiente manera,

$$K_0 = K; \qquad K_{n+1} = \overline{conv}T(K_n), \qquad n = 0, 1, 2, ... \tag{2.1}$$

Es claro que K_{n+1} es cerrado y convexo para todo $n = 0, 1, 2, ...$ La prueba de que la sucesión $\{K_n\}$ es decreciente es llevada a cabo por inducción:

(1) Para $n = 1$

$$K_1 = \overline{conv}T(K) = \bigcap\{A_1 \subset K \mid T(K) \subset A_1, A_1 \, cerrado \, y \, convexo\} \subset K.$$

(2) Para n supongamos que $K_n \subset K_{n-1}$.

(3) Para $n + 1$, tenemos que

$$K_{n+1} = \overline{conv}T(K_n) \subset \overline{conv}T(K_{n-1}) = K_n. \tag{2.2}$$

Ahora mostremos que cada conjunto K_{n+1} es $T-$invariante para $n = 0, 1, 2, ...$, esto se ve como sigue,

$$K_{n+1} = \overline{conv}T(K_n) = \bigcap\{A_{n+1} \subset K \mid T(K_n) \subset A_{n+1}, \; A_{n+1} \, cerrado \, y \, convexo\}.$$

Sea $x \in K_{n+1}$, se tiene que $x \in A_{n+1}$ para todo $A_{n+1} \subset K$ tal que $T(K_n) \subset A_{n+1}$ con A_{n+1} cerrado y convexo. Por (2.2) $x \in K_n$, así $T(x) \in A_{n+1}$, por lo tanto $T(K_{n+1}) \subset K_{n+1}$.

De la Observación 2.8 se desprende que la intersección $K_\infty = \bigcap\limits_{n=0}^{\infty} K_n$ es cerrada, convexa y $T-$invariante, aunque podría ser vacía. A continuación proporcionamos un ejemplo donde la intersección es precisamente vacía.

Ejemplo 2.10 *Consideremos el espacio* $X = \mathbb{C}[0, 1]$ *y el subconjunto* K *de* X *definido por*

$$K = \{x \in C[0, 1] : 0 = x(0) \leq x(t) \leq x(1) = 1\}.$$

Ya se probó en el Ejemplo 1.5 que la aplicación $T : K \to K$ *definida por* $(Tx)(t) = tx(t)$ *es contractiva. Consideremos* $\{K_n\}$ *la sucesión de conjuntos obtenida como en (2.1). Mostraremos que*

$$K_n \subset A_n \equiv \{x \in K \,:\, x(t) \leq t^n\}, \tag{2.3}$$

para $n = 0, 1, 2, ...$ *Previo a ello, probaremos que el conjunto* A_n *es convexo. Sean* $x_1, x_2 \in A_n$ *y* $\lambda \in [0,1]$*, tenemos que*

$$z(t) \equiv \lambda x_1(t) + (1-\lambda)x_2(t) \leq \lambda t^n + (1-\lambda)t^n = t^n.$$

Observemos que $z(t)$ *toma los valores de 0 y 1, para* $t = 0$ *y* $t = 1$*, respectivamente. Por lo tanto,* $z \in K$*, esto prueba que* A_n *es convexo. Ahora mostraremos que* A_n *es cerrado, para ello consideremos* $\{x_m\} \subset A_n$ *tal que* $x_m \to x$*. De aquí tenemos que* $x_m \to x$ *uniformemente y* x *es continua. Además* $x(t) \leq t^n$*. Por lo cual,* A_n *es cerrado.*

Ya estamos en condiciones de probar (2.3). Por inducción :

(1) *Para* $n = 0$

$$K_0 = K \subset \{x \in K \,:\, x(t) \leq 1\}.$$

(2) *Supongamos que para* n*, se cumple* $K_n \subset \{x \in K \,:\, x(t) \leq t^n\}$*. De aquí se tiene que*

$$T(K_n) \subset T(\{x \in K \,:\, x(t) \leq t^n\}) \subset \{x \in K \,:\, x(t) \leq t^{n+1}\}.$$

(3) *Para* $n+1$*, tenemos que*

$$K_{n+1} = \overline{conv}T(K_n) \subset \overline{conv}\{x \in K \,:\, x(t) \leq t^{n+1}\} = \{x \in K \,:\, x(t) \leq t^{n+1}\}.$$

Probaremos por contradicción que $\bigcap_{n=0}^{\infty} K_n$ *es vacía. Supongamos que existe* $x \in \bigcap_{n=0}^{\infty} K_n$*, entonces* $x \in K_n$ *para todo* $n \geq 0$*, así* $x(t) \leq t^n$ *para todo* $n \geq 0$*. Si* $0 \leq t < 1$*, lo anterior implica que* $x(t) = 0$ *cuando* $n \to \infty$*. Pero* $x(1) = 1$ *y esto contradice la continuidad de* x*, por ende* $\bigcap_{n=0}^{\infty} K_n = \emptyset$*.*

2.2. La PPF falla en l_1

Esta sección representa la base medular de nuestra motivación para el estudio de la PPF en el espacio l_1. Daremos un ejemplo que apoya la idea que los matemáticos tuvieron durante mucho tiempo, ya que se creía que sólo los espacios reflexivos poseían la PPF y por ende en cualquier renormamiento de l_1 fallaba dicha propiedad. Sin embargo, más adelante mostraremos que esto no es verdad.

Ejemplo 2.11 *Sean $X = l_1$ el espacio vectorial de las sucesiones $x = (x_n)_{n=1}^{\infty} \subset \mathbb{K}$ tales que $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \mid x_n \mid < \infty$ dotado con la norma*

$$\| x \| = \sum_{n=1}^{\infty} \mid x_n \mid$$

y $\{e_n\}_{n\geq 1}$ la base canónica de l_1, donde $e_n = (\underbrace{0, ..., 0, 1}_{n}, 0, ...)$. Consideremos el conjunto

$$K = \overline{conv}\{e_n : n \geq 1, 2, ...\} = \{x = \{x_i\} \ : \ x_i \geq 0, \ i = 1, 2, ..., ; ||x|| = 1\}.$$

La igualdad anterior se obtiene como sigue:
Sea $y \in \overline{conv}\{e_n : n \geq 1, 2, ...\}$, existe

$$\{x_n\} \subset conv\{e_n : n \geq 1, 2, ...\} = \{\sum_{i=1}^{m} \alpha_i e_i, \ \alpha_i \geq 0, \ \sum_{i=1}^{m} \alpha_i = 1\},$$

tal que

$$x_n = \sum_{i=1}^{m_n} \alpha_i^n e_i \longmapsto y = \sum_{i=1}^{\infty} \alpha_i e_i,$$

cuando $n \to \infty$. Consideremos la función coordenada e_k^* definida por

$$e_k^*(x) = e_k^*(\sum_{i=1}^{m_n} x_i e_i) = \begin{cases} x_k & k \leq m_n \\ 0 & k > m_n, \end{cases}$$

que es continua. Cuando $n \to \infty$, $e_k^*(x_n) \longrightarrow e_k^*(y)$, esto es, $\alpha_k^n \longrightarrow \alpha_k$. Como consecuencia de que $\alpha_k^n \geq 0$ para todo k, obtenemos que $\alpha_k \geq 0$. Observemos que

$||x_n|| \longrightarrow ||y||$, *cuando* $n \to \infty$*; como* $||x_n|| = 1$ *para todo* $n \geq 1, 2, ...$, *por ende* $||y|| = 1$. *Por otro lado, si*

$$y \in \{x = \{x_i\} \,:\, x_i \geq 0,\ i = 1, 2, ...,; ||x|| = 1\} = \{\sum_{i=1}^{\infty} \alpha_i e_i,\ \alpha_i \geq 0,\ \sum_{i=1}^{\infty} \alpha_i = 1\},$$

entonces $y = \sum_{i=1}^{\infty} \alpha_i e_i$ *para algunos* $\alpha_i \geq 0$. *Consideremos la combinación lineal convexa de* $(e_1, ..., e_{n+1})$

$$y_n = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i e_i + (1 - \sum_{i=1}^{n} \alpha_i) e_{n+1} \in \overline{conv}\{e_n \,:\, n \geq 1, 2, ...\}.$$

Dado $\epsilon > 0$ *y* n *suficientemente grande, tenemos que*

$$\begin{aligned} ||y - y_n|| &= ||\sum_{i=n+1}^{\infty} \alpha_i e_i - (1 - \sum_{i=1}^{n} \alpha_i) e_{n+1})|| \\ &= \sum_{i=n+2}^{\infty} |\alpha_i| + (1 - \sum_{i=1}^{n+1} |\alpha_i|) \\ &< \epsilon + (1 - 1) = \epsilon. \end{aligned}$$

En consecuencia, $y \in \overline{conv}\{e_n : n \geq 1, 2, ...\}$. *El diámetro de* K *es igual a* 2, *como se ve a continuación: sean* $x_1, y_1 \in K$ *arbitrarios, tenemos que*

$$||x_1 - y_1|| \leq ||x_1|| + ||y_1|| = 1 + 1 = 2,$$

la afirmación se obtiene notando que $||e_i - e_j|| = 2$ *para* $i \neq j$. *Definimos el operador de traslación* $S : K \to K$ *por*

$$Sx = S(x_1, x_2, x_3, ...) = (0, x_1, x_2, ...). \tag{2.4}$$

Es fácil ver que dicho operador es una isometría, además no tiene punto fijo. Esto último lo probaremos por contradicción. Supongamos que existe $x \in K$ *que satisface* $Sx = x$, *entonces* $(0, x_1, x_2, ...) = (x_1, x_2, x_3, ...)$, *esto implica que* $x_i = 0$ *para todo* $i \geq 1$. *Por lo tanto* $||x|| = 0$ *y* x *no pertece a* K *ya que su norma no es 1. De (2.4), deducimos que*

$$S(K) = \{y = \{y_i\} \,:\, y_1 = 0,\ y_i = x_{i-1} \geq 0,\ para\ i = 2, 3, ...,; ||y|| = 1\} \subset K,$$

esto prueba que K es S-invariante.

Como ya se vio en (2.1), para $n = 0, 1, 2, ...$, los conjuntos $K_{n+1} = \overline{conv}S(K_n)$ forman una sucesión decreciente. Podemos observar que la intersección de dichos conjuntos es vacía. Supongamos lo contrario, esto es, tomemos $x \in \bigcap_{n=0}^{\infty} K_n$, entonces $x \in K_n$ para todo $n \geq 0$. Observemos que

$$\begin{aligned} K &= \{\sum_{i=1}^{\infty} \alpha_i e_i,\ \alpha_i \geq 0\, para\, i = 1, 2, ..., ; \sum_{i=1}^{\infty} \alpha_i = 1\}, \\ K_1 &= \overline{conv}S(K) = \{\sum_{i=1}^{\infty} \beta_i e_i\ :\ \beta_1 = 0,\ \ \beta_i \geq 0\, para\, i = 2, 3, ..., ;\ \sum_{i=1}^{\infty} \beta_i = 1\}, \\ &\vdots \\ K_{n+1} &= \overline{conv}S(K_n) = \{\sum_{i=1}^{\infty} \gamma_i e_i\ :\ \gamma_1 = ... = \gamma_{n+1} = 0,\ \ \gamma_i \geq 0\, para\, i \geq n+2;\ \sum_{i=1}^{\infty} \gamma_i = 1\}, \end{aligned}$$

de aquí podemos deducir que $x = 0$, por consiguiente, $||x|| = 0$; esto representa una contradicción ya que $||x|| = 1$ por pertenecer x en K.

Sin embargo, lo anterior no representa el comportamiento típico de las aplicaciones $T : K \to K$ no expansivas para conjuntos K cerrados, acotados, convexos y no vacíos en l_1 como ilustraremos con un ejemplo a continuación, para esto necesitamos algunas definiciones y un resultado previo.

Definición 2.12 *Una sucesión acotada $\{x_n\}$ en l_1 es* **convergente coordenada a coordenada** *a $x \in l_1$, si $lim_{n\to\infty} x_n(i) = x_i$ para $i = 1, 2, ...$*

Observación 2.13 *Considerando a la topología débil estrella en $l_1 = c_0^*$, si una sucesión f_n converge débil estrella a f, entonces converge coordenada a coordenada a f.*

Definición 2.14 *Las* **proyecciones canónicas** *sobre los subespacios generados por $\{e_1, e_2, ..., e_i\}$ para $i = 1, 2, ...$, están dadas por,*

$$P_i(x_1, x_2, ...) = (x_1, x_2, ..., x_i, 0, 0, ...)$$

y $Q_i = I - P_i$.

Definición 2.15 *Para una sucesión* $\{x_n\}$ *en* l_1 *fija y* $y \in l_1$ *arbitrario, denotamos*

$$r(y) = \limsup_{n\to\infty} \parallel x_n - y \parallel .$$

Lema 2.16 *Si* $\{x_n\}$ *es una sucesión acotada en* l_1 *que converge coordenada a coordenada a* $x \in l_1$*, entonces para cualquier* $y \in l_1$*,*

$$r(y) = r(x) + \parallel x - y \parallel .$$

Demostración. Probaremos las siguientes igualdades:

(1) Para toda i=1,2,..., $r(x) = \limsup_{n\to\infty} ||Q_i(x_n - x)||$.

Sean $\epsilon > 0$ e i fijo. Por hipótesis tenemos que $lim_{n\to\infty} x_n(i) = x_i$, esto es, existe $N \in \mathbb{N}$ tal que si $n \geq N$ $|x_n(j) - x_j| < \epsilon/i$ para toda $j = 1, 2, ..., i$.

$||Q_i(x_n - x)|| = \sum_{j=i+1}^{\infty} |x_n(j) - x_j|$. Si $n \geq N$ entonces

$$\begin{aligned} ||Q_i(x_n - x)|| \leq ||x_n - x|| &= \sum_{j=1}^{\infty} |x_n(j) - x_j| \\ &= \sum_{j=1}^{i} |x_n(j) - x_j| + \sum_{j=i+1}^{\infty} |x_n(j) - x_j| \\ &< \epsilon + ||Q_i(x_n - x)||, \end{aligned}$$

esto implica que,

$$\limsup_{n\to\infty} ||Q_i(x_n - x)|| \leq \limsup_{n\to\infty} ||x_n - x|| = r(x) \leq \limsup_{n\to\infty} ||Q_i(x_n - x)||,$$

por ende $r(x) = \limsup_{n\to\infty} ||Q_i(x_n - x)||$.

(2) $||x - y|| = \lim_{i\to\infty} \lim_{n\to\infty} ||P_i(x_n - y)||$.

Tenemos que $||P_i(x_n - y)|| = \sum_{j=1}^{i} |x_n(j) - y_j|$. Tomando límites primero con respecto a n y posteriormente respecto a i,

$$\begin{aligned} \lim_{i\to\infty} \lim_{n\to\infty} ||P_i(x_n - y)|| &= \lim_{i\to\infty} \lim_{n\to\infty} \sum_{j=1}^{i} |x_n(j) - y_j| = \lim_{i\to\infty} \sum_{j=1}^{i} \lim_{n\to\infty} |x_n(j) - y_j| \\ &= \lim_{i\to\infty} \sum_{j=1}^{i} |x(j) - y_j| = \sum_{j=1}^{\infty} |x(j) - y_j| = ||x - y||. \end{aligned}$$

(3) Sean $x, y \in l_1$, entonces $\lim_{i\to\infty} ||Q_i(x-y)|| = 0$.

$$\lim_{i\to\infty} ||Q_i(x-y)|| = \lim_{i\to\infty} \sum_{j=i+1}^{\infty} |x_j - y_j| = 0.$$

Por otra parte, tenemos que

$$\begin{aligned} ||P_i(x_n-y)|| + ||Q_i(x_n-x)|| - ||Q_i(x-y)|| &\leq ||P_i(x_n-y)|| + ||Q_i(x_n-y)|| \\ &= ||x_n - y|| \\ &\leq ||P_i(x_n-y)|| + ||Q_i(x_n-x)|| \\ &+ ||Q_i(x-y)||. \end{aligned}$$

Si en las desigualdades anteriores tomamos el límite primero con respecto a n y posteriormente con respecto i y haciendo uso de las igualdades (1), (2) y (3), obtenemos que

$$||x-y|| + r(x) - 0 \leq r(y) \leq ||x-y|| + r(x) + 0,$$

esto prueba el lema. ■

A pesar de que en l_1 no se satisfaga la PPF, el siguiente ejemplo nos permite visualizar que para un conjunto en particular, que de hecho ha sido obtenido por una pequeña modificación del conjunto K del Ejemplo 2.11 se cumple la PPF.

Ejemplo 2.17 *Sea $\epsilon \in (0,1)$, consideremos el conjunto $K_\epsilon \subset l_1$ definido por :*

$$\begin{aligned} K_\epsilon &= \overline{conv}\{(1-\epsilon)e_1, e_2, e_3, ...\} \\ &= \{\alpha_1(1-\epsilon)e_1 + \sum_{j=1}^{\infty} \alpha_j e_j : \alpha_i \geq 0, \sum_{j=1}^{\infty} \alpha_j = 1\}. \end{aligned}$$

Sea $T : K_\epsilon \to K_\epsilon$ una aplicación no expansiva. Por el Lema 2.5, existe una sucesión $\{x_n\}$ en K_ϵ tal que $\lim_{n\to\infty} \parallel x_n - Tx_n \parallel = 0$. Para cada $n \in \mathbb{N}$, tenemos *que* $x_n = ((1-\epsilon)\alpha_1^n, \alpha_2^n, \alpha_3^n, ...)$, $\alpha_i^n \geq 0$ *para* $i = 1, 2, 3, ...$ *y* $\sum_{i=1}^{\infty} \alpha_i^n = 1$. *Por el Teorema 1.15* $\{x_n\}$ *contiene una subsucesión convergente coordenada a coordenada a un elemento en* l_1 *y podemos suponer que* $\{x_n\}$ *mismo converge coordenada a coordenada a un elemento que llamaremos* $x = (x_1, x_2, x_3, ...)$. *Entonces*

$$\lim_{n\to\infty} (1-\epsilon)\alpha_1^n = x_1 \equiv (1-\epsilon)\beta_1 \quad y \quad \lim_{n\to\infty} \alpha_i^n = x_i \equiv \beta_i,$$

para $i = 2, 3, ...$ *De aquí desprendemos que* $\beta_i \geq 0$ *para* $i = 2, 3, ...$ *Sea* $m \in \mathbb{N}$, *para todo* n *tenemos que* $\alpha_1^n + \alpha_2^n + ... + \alpha_m^n \leq 1$. *Haciendo tender* $n \to \infty$ *obtenemos que* $\beta_1 + \beta_2 + ... + \beta_m \leq 1$. *Así cuando* $m \to \infty$, $\sum_{i=1}^{\infty} \beta_i \leq 1$. *Por lo tanto* x *es de la forma*

$$x = ((1-\epsilon)\beta_1, \beta_2, \beta_3, ...),$$

con $\beta_i \geq 0$ *para toda* $i \in \mathbb{N}$ *y* $\sum_{i=1}^{\infty} \beta_i \leq 1$. *Consideremos el conjunto*

$$conv(K_\epsilon \cup \{0\}) = \{\sum_{j=1}^{N} \lambda_j y_j : \lambda_j \geq 0, \ \sum_{j=1}^{N} \lambda_j = 1; \ y_j \in K_\epsilon \cup \{0\}\}.$$

Sea $\lambda = \sum_{i=1}^{\infty} \beta_i$. *Si* $\lambda = 0$, *claramente* $x \in conv(K_\epsilon \cup \{0\})$. *Supongamos ahora que* $\lambda \neq 0$, *entonces*

$$x = \lambda(\frac{(1-\epsilon)\beta_1}{\lambda}, \frac{\beta_2}{\lambda}, \frac{\beta_3}{\lambda}, ...) + (1-\lambda) \cdot 0 \in conv(K_\epsilon \cup \{0\}).$$

Si $x \in K_\epsilon$, *esto es, si* $\sum_{i=1}^{\infty} \beta_i = 1$ *entonces* $x = Tx$. *En efecto, por el Lema 2.16 tenemos que* $r(Tx) = r(x) + \| Tx - x \|$, *por otra parte,*

$$\begin{aligned} r(Tx) &= \limsup_{n\to\infty} \| Tx - x_n \| \\ &\leq \limsup_{n\to\infty} \| Tx - Tx_n \| + \limsup_{n\to\infty} \| Tx_n - x_n \| \\ &= \limsup_{n\to\infty} \| Tx - Tx_n \| \\ &\leq \limsup_{n\to\infty} \| x - x_n \| \\ &= r(x). \end{aligned}$$

Consecuentemente, $||Tx - x|| = 0$ *y esto prueba nuestra afirmación. Por otro lado si* $x \notin K_\epsilon$*, esto es, si* $1 - \sum_{i=1}^{\infty} \beta_i \equiv \delta > 0$*, entonces el único punto de* K_ϵ *más cercano a* x *es* $z = ((1-\epsilon)(\beta_1 + \delta), \beta_2, \beta_3, ...)$*. En efecto, observemos que* $\beta_1 + \delta \geq 0$ *y* $\beta_i \geq 0$ *para* $i = 1, 2, 3, ...$ *Por otra parte*

$$(\beta_1 + \delta) + \sum_{i=2}^{\infty} \beta_i = \delta + \sum_{i=1}^{\infty} \beta_i = 1 - \sum_{i=1}^{\infty} \beta_i + \sum_{i=1}^{\infty} \beta_i = 1.$$

Por ende $z \in K_\epsilon$*. Además* $||x - z|| = (1 - \epsilon)\delta$*. Si* $z' = ((1 - \epsilon)\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3, ...) \in K_\epsilon$*, entonces*

$$\sum_{i=1}^{\infty} \beta_i < \sum_{i=1}^{\infty} \gamma_i = 1.$$

Esto implica que existe $j \in \mathbb{N}$ *tal que* $\beta_j < \gamma_j$*. Supongamos que* $\beta_1 < \gamma_1$ *y* $\beta_j = \gamma_j$ *para* $j = 2, 3, ...$ *Entonces* $\gamma_1 + \sum_{i=2}^{\infty} \beta_i = 1$*, así* $\gamma_1 = 1 - \sum_{i=2}^{\infty} \beta_i = \beta_1 + \delta$*, en consecuencia* $z = z'$*. Por otra parte, si* $\beta_j < \gamma_j$ *para algún* $j \geq 2$*, entonces*

$$\begin{aligned}
||x - z'|| &= (1 - \epsilon)|\beta_1 - \gamma_1| + \sum_{i=2}^{\infty} |\beta_i - \gamma_i| \\
&> (1 - \epsilon)|\beta_1 - \gamma_1| + (1 - \epsilon) \sum_{i=2}^{\infty} |\beta_i - \gamma_i| \\
&\geq (1 - \epsilon)(\gamma_1 - \beta_1) + (1 - \epsilon) \sum_{i=2}^{\infty} (\gamma_i - \beta_i) \\
&= (1 - \epsilon) \sum_{i=1}^{\infty} \gamma_i - (1 - \epsilon) \sum_{i=1}^{\infty} \beta_i \\
&= (1 - \epsilon)(1 - \sum_{i=1}^{\infty} \beta_i) \\
&= ||x - z||.
\end{aligned}$$

Por lo tanto, $||x - z|| < ||x - z'||$ *para todo* $z' \in K_\epsilon$ *con* $z' \neq z$*. Por lo anterior* $(1 - \epsilon)\delta = ||x - z|| = \inf\{||x - y|| : y \in K_\epsilon\}$*. Por el Lema 2.16 cada* $y \in K_\epsilon$ *satisface* $r(y) = r(x) + ||x - y|| \geq r(x) + ||x - z|| = r(z)$*. Además* $r(Tz) \leq r(z)$ *para todo* $z \in K_\epsilon$*. En vista de las dos desigualdades anteriores, desprendemos que* r *alcanza su mínimo en* z*, esto es,* $r(Tz) = r(z)$*, esto implica que* $||Tz - z|| = 0$ *y por ende*

$Tz = z$. Así concluimos que cualquier aplicación no expansiva $T : K_\epsilon \to K_\epsilon$ tiene un punto fijo.

2.3. Copia asintóticamente isométrica de l_1

El concepto de copia asintóticamente isométrica de l_1 fue definido por Hagler en su tesis. El probó que un espacio de Banach contiene una copia asintóticamente isométrica de l_1, si y sólo si, su dual contiene una copia isométrica de $L_1[0,1]$. Tiempo después ese resultado fue publicado en [11]. Más tarde, P.N. Dowling y C.J. Lennard retomaron dicho concepto y obtuvieron el resultado importante que establece que si un espacio contiene una copia asintóticamente isométrica de l_1, entonces no posee la PPF. En esta sección probaremos dicho resultado y daremos un renormamiento de l_1, de tal manera que con esta nueva norma , l_1 no contiene ninguna copia asintóticamente isométrica de l_1. En el capítulo siguiente se mostrará que este espacio de hecho satisface la PPF.

Definición 2.18 *Sea $(X, ||\cdot||)$ espacio de Banach. Decimos que X contiene una* **copia asintóticamente isométrica de** *l_1, si existen una sucesión $\{\epsilon_n\} \subset (0,1)$ tal que $\epsilon_n \to 0$ y una sucesión $\{x_n\} \subset X$ que satisfacen*

$$\sum_{n=1}^{\infty}(1-\epsilon_n)|a_n| \leq ||\sum_{n=1}^{\infty} a_n x_n|| \leq \sum_{n=1}^{\infty}|a_n|, \tag{2.5}$$

para toda $\{a_n\} \in l_1$.

En 1997 Dowling y Lennard probaron en [8] el siguiente teorema:

Teorema 2.19 *Si el espacio $(X, ||\cdot||)$ contiene una copia asintóticamente isométrica de l_1, entonces existe una aplicación no expansiva de un conjunto cerrado, acotado y convexo en sí mismo que no tiene punto fijo.*

Demostración. Sean (x_n) y (ϵ_n) como en la Definición 2.18. Considerando $a_n = 1$ y $a_i = 0$ para $i \in \mathbb{N}$ con $i \neq n$ en (2.5), deducimos que $1 - \epsilon_n \leq ||x_n|| \leq 1$ para cada n. Sea $\{\lambda_n\} \subset (1, \infty)$ una sucesión que satisface $\lambda_{n+1} < (1 - \epsilon_n)\lambda_n$ y tal que $\lim_n \lambda_n = 1$. Consideremos el conjunto

$$K = \overline{conv}\{\lambda_n x_n : n \in \mathbb{N}\} = \{\sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n(\lambda_n x_n) : \alpha_n \geq 0 \, para\, toda\, n \in \mathbb{N}\, y\, \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n = 1\},$$

que es cerrado, convexo y acotado. Sea $y_n = \lambda_n x_n$. Definimos el operador de traslación $T : K \to K$ por

$$T(\sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n y_n) = \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n y_{n+1}.$$

Mostraremos que T es no expansiva, de hecho es contractiva. En efecto:
Sean $w = \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n y_n$ y $z = \sum_{n=1}^{\infty} \beta_n y_n$ elementos en K con $w \neq z$. Así

$$\begin{aligned}
||Tw - Tz|| &= ||\sum_{n=1}^{\infty}(\alpha_n - \beta_n)y_{n+1}|| \leq \sum_{n=1}^{\infty} |\alpha_n - \beta_n| \cdot ||y_{n+1}|| \\
&= \sum_{n=1}^{\infty} |\alpha_n - \beta_n| \cdot \lambda_{n+1}(||x_{n+1}||) \\
&< \sum_{n=1}^{\infty} |\alpha_n - \beta_n|(1 - \epsilon_n)\lambda_n \\
&\leq ||\sum_{n=1}^{\infty}(\alpha_n - \beta_n)\lambda_n x_n|| \\
&= ||\sum_{n=1}^{\infty}(\alpha_n - \beta_n)y_n|| \\
&= ||x - y||.
\end{aligned}$$

Por último, tenemos que T no tiene punto fijo. Supongamos lo contrario, esto es, existe $\sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n y_n \in K$ tal que $T(\sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n y_n) = \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n y_{n+1} = \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n y_n$. Esto implica que

$$\sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n(y_{n+1} - y_n) = \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n(\lambda_{n+1}x_{n+1} - \lambda_n x_n) = 0.$$

Sea $k \in \mathbb{N}$, tenemos que

$$\begin{aligned}\sum_{n=1}^{k} \alpha_n(\lambda_{n+1}x_{n+1} - \lambda_n x_n) &= \alpha_1(\lambda_2 x_2 - \lambda_1 x_1) + ... + \alpha_k(\lambda_{k+1}x_{k+1} - \lambda_k x_k) \\ &= -\alpha_1\lambda_1 x_1 + \sum_{n=2}^{k}(\alpha_{n-1} - \alpha_n)\lambda_n x_n + \alpha_k\lambda_{k+1}x_{k+1}.\end{aligned}$$

Por (2.5), para $2 \leq j \leq k$ obtenemos que

$$\begin{aligned}(1-\epsilon_j)|\alpha_{j-1} - \alpha_j|\lambda_j &\leq (1-\epsilon_1)\alpha_1\lambda_1 + \sum_{n=2}^{k}(1-\epsilon_n)|\alpha_{n-1} - \alpha_n|\lambda_n + (1-\epsilon_{k+1})\alpha_k\lambda_{k+1} \\ &\leq ||-\alpha_1\lambda_1 x_1 + \sum_{n=2}^{k}(\alpha_{n-1} - \alpha_n)\lambda_n x_n + \alpha_k\lambda_{k+1}x_{k+1}||.\end{aligned}$$

Haciendo tender k a infinito, da como resultado

$$(1-\epsilon_j)|\alpha_{j-1} - \alpha_j|\lambda_j \leq 0.$$

Por lo tanto, $\alpha_{j-1} = \alpha_j$ para toda $j \in \mathbb{N}$ con $j \geq 2$. Debido a que $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \alpha_n < \infty$, se sigue que $\alpha_n = 0$ para toda $n \in \mathbb{N}$. Pero esto es una contradicción, ya que $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \alpha_n = 1$. Por lo tanto, T no tiene puntos fijos. ■

Dowling, Lennard y Turett definieron en [9] una norma equivalente a la de l_1, de tal manera que dicho espacio no contiene copias asintóticamente isométricas de l_1. Esto se muestra en el siguiente lema:

Lema 2.20 *Sean $||\cdot||$ la norma usual en l_1 y (γ_k) sucesión en $(0,1)$ estrictamente creciente tal que $\gamma_k \to 1$. La función $|||\cdot|||$ en l_1 dada por*

$$|||x||| = \sup_{k\geq 1} \gamma_k \sum_{n=k}^{\infty} |x_n| \equiv \sup_{k\geq 1} \gamma_k R_k(x)$$

para toda $x = (x_k) \in l_1$, define una norma equivalente a $||\cdot||$. El espacio $(l_1, |||\cdot|||)$ no contiene copias asintóticamente isométricas de l_1.

Demostración.

Notemos que $|||\cdot|||$ define una norma en l_1. En efecto, sean $x = (x_n), y = (y_n) \in l_1$ y $c \in \mathbb{K}$, se observa que:

(a) Es claro que $|||x||| \geq 0$ y que si $x = 0$, entonces $|||x||| = 0$. Supongamos que $|||x||| = 0$, entonces

$$\gamma_1||x|| = \gamma_1 R_1(x) \leq \sup_{k\geq 1} \gamma_k R_k(x) = 0.$$

Como $\gamma_1 > 0$, se sigue que $||x|| = 0$. Por ende $x = 0$.

(b) $|||cx||| = \sup_{k\geq 1} \gamma_k R_k(cx) = |c| \sup_{k\geq 1} \gamma_k R_k(x) = |c| \cdot |||x|||$.

(c) $|||x+y||| = \sup_{k\geq 1} \gamma_k R_k(x+y) \leq \sup_{k\geq 1} \gamma_k R_k(x) + \sup_{k\geq 1} \gamma_k R_k(y) = |||x||| + |||y|||$.

Más aún, por la definicion 1.16 inferimos que $||| \cdot |||$ es una norma equivalente a la norma $|| \cdot ||$ en l_1 debido a que

$$\gamma_1||x|| \leq |||x||| \leq ||x||. \tag{2.6}$$

Además observemos que la norma $||| \cdot |||$ es bimonótona.

Lo que queremos probar es que $(l_1, ||| \cdot |||)$ no contiene copias asintóticamente isométricas de l_1. Por contradicción, supongamos que existen una sucesión $\{\epsilon_n\}$ contenida en $(0, 1)$ tal que $\epsilon_n \to 0$ y una sucesión $\{x_n\} \subset X$ que satisfacen

$$\sum_{n=1}^{\infty}(1 - \epsilon_n)|t_n| \leq |||\sum_{n=1}^{\infty} t_n x_n||| \leq \sum_{n=1}^{\infty} |t_n|, \tag{2.7}$$

para toda $t = \{t_n\} \in l_1$. Inspirados en la prueba del principio de selección de Bessaga-Pelczyński [2, 4] probaremos que sin pérdida de generalidad, podemos suponer que (x_n) es una sucesión que satisface (2.7) y que el soporte de x_m es disjunto del soporte de x_n si $m \neq n$.

Debido a que la bola unitaria cerrada de l_1 es w^*-secuencialmente compacta con respecto al predual c_0, pasando a una subsucesión, podemos suponer que (x_n)

converge w^* (y por lo tanto entrada por entrada con respecto a la base canónica (e_n) de l_1) a un elemento $y \in l_1$. Reemplazando (x_n) por la sucesión $((x_{2n} - x_{2n-1})/2)$, podemos suponer que $y = 0$. En efecto, sea $v_n = ((x_{2n} - x_{2n-1})/2)$. Por (2.7) inferimos que $|||x_n||| \leq 1$ para cada $n \in \mathbb{N}$. En consecuencia, para toda $t = \{t_n\} \in l_1$ se satisface que

$$\begin{aligned}
|||\sum_{n=1}^{\infty} t_n v_n||| &= |||\sum_{n=1}^{\infty} t_n \frac{(x_{2n} - x_{2n-1})}{2}||| \\
&\leq \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty} |t_n| \cdot |||(x_{2n} - x_{2n-1})||| \\
&\leq \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty} |t_n| \cdot (|||x_{2n}||| + |||x_{2n-1}|||) \\
&\leq \sum_{n=1}^{\infty} |t_n|.
\end{aligned}$$

Observemos que $|||v_n||| \leq 1$. Por otra parte,

$$\begin{aligned}
|||\sum_{n=1}^{\infty} t_n v_n||| &= |||\sum_{n=1}^{\infty} \frac{t_n(x_{2n} - x_{2n-1})}{2}||| = \frac{1}{2}|||\sum_{n=1}^{\infty} t_n(x_{2n}) - \sum_{n=1}^{\infty} t_n(x_{2n-1})||| \\
&= \frac{1}{2}|||\sum_{n=1}^{\infty} t_n(x_{2n}) + \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n(x_{2n-1})||| \qquad (\lambda_n = -t_n) \\
&\geq \frac{1}{2}\left(\sum_{n=1}^{\infty}(1 - \epsilon_{2n-1})|\lambda_n| + \sum_{n=1}^{\infty}(1 - \epsilon_{2n})|t_n|\right) \\
&= \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}(2 - \epsilon_{2n-1} - \epsilon_{2n})|t_n| \\
&= \sum_{n=1}^{\infty}(1 - \rho_n)|t_n|,
\end{aligned}$$

donde $\rho_n = (\epsilon_{2n-1} + \epsilon_{2n})/2$. Notemos que la sucesión $(\rho_n) \subset (0,1)$ y $\rho_n \to 0$ cuando $n \to \infty$. Por lo tanto, (v_n) satisface (2.7). Además $v_n \overset{w^*}{\to} 0$ cuando $n \to \infty$.

Sea $p_1 = 1$. Tenemos v_n es de la forma

$$v_n = \sum_{j=1}^{\infty} \alpha_j^n e_j.$$

Existe $q_1 > 0$ tal que

$$|||\sum_{j=q_1+1}^{\infty} \alpha_j^{p_1} e_j||| < \frac{1}{2^3}.$$

Debido a que $v_n \overset{w^*}{\to} 0$, existe $p_2 > p_1$ de manera que,

$$|||\sum_{j=1}^{q_1} \alpha_j^{p_2} e_j||| < \frac{1}{2^3}.$$

Existe $q_2 > q_1$ tal que

$$|||\sum_{j=q_2+1}^{\infty} \alpha_j^{p_2} e_j||| < \frac{1}{2^4}.$$

Siguiendo con el mismo razonamiento, podemos construir sucesiones crecientes de enteros positivos (p_n) y (q_n) tales que

$$|||\sum_{j=q_{n+1}}^{\infty} \alpha_j^{p_n} e_j||| \leq \frac{1}{2^{n+2}}$$

y

$$|||\sum_{j=1}^{q_n} \alpha_j^{p_{n+1}} e_j||| \leq \frac{1}{2^{n+2}}.$$

Para $n \in \mathbb{N}$, definimos

$$w_n = \sum_{j=q_n+1}^{q_{n+1}} \alpha_j^{p_{n+1}} e_j.$$

Debido a que la norma $|||\cdot|||$ es bimonótona tenemos que

$$|||w_n||| = |||\sum_{j=q_n+1}^{q_{n+1}} \alpha_j^{p_{n+1}} e_j||| \leq |||\sum_{j=1}^{\infty} \alpha_j^{p_{n+1}} e_j||| = |||v_{p_{n+1}}||| \leq 1.$$

Por lo tanto, para toda $t = \{t_n\} \in l_1$ se cumple que

$$|||\sum_{n=1}^{\infty} t_n w_n||| \leq \sum_{n=1}^{\infty} |t_n| \cdot |||w_n||| \leq \sum_{n=1}^{\infty} |t_n|.$$

Por otra parte,

$$
\begin{aligned}
|||v_{p_{n+1}} - w_n||| &= |||\sum_{j=1}^{\infty} \alpha_j^{p_{n+1}} e_j - \sum_{j=q_n+1}^{q_{n+1}} \alpha_j^{p_{n+1}} e_j||| \\
&\leq |||\sum_{j=1}^{q_n} \alpha_j^{p_{n+1}} e_j||| + |||\sum_{j=q_{n+1}+1}^{\infty} \alpha_j^{p_{n+1}} e_j||| \\
&\leq \frac{1}{2^{n+2}} + \frac{1}{2^{n+3}} \\
&\leq \frac{1}{2^{n+1}}.
\end{aligned}
$$

Por la desigualdad del triángulo,

$$
\begin{aligned}
|||\sum_{n=1}^{\infty} t_n w_n||| &\geq |||\sum_{n=1}^{\infty} t_n v_{p_{n+1}}||| - |||\sum_{n=1}^{\infty} t_n (w_n - v_{p_{n+1}}||| \\
&\geq \sum_{n=1}^{\infty} (1 - \rho_{p_{n+1}})|t_n| - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^{n+1}}|t_n| \\
&= \sum_{n=1}^{\infty} (1 - \rho_{p_{n+1}} - \frac{1}{2^{n+1}})|t_n| \\
&= \sum_{n=1}^{\infty} (1 - \phi_n)|t_n|,
\end{aligned}
$$

donde $\phi_n = \rho_{p_{n+1}} + \frac{1}{2^{n+1}}$. Es fácil ver que $\phi_n \subset (0,1)$ y $\phi_n \to 0$ cuando $n \to \infty$.

En consecuencia, podemos considerar a la sucesión (x_n) con soportes disjuntos. Así para cada $n \in \mathbb{N}$, x_n es de la forma

$$x_n = \sum_{j=q_n+1}^{q_{n+1}} \alpha_j e_j.$$

Sin pérdida de generalidad podemos suponer que (x_n) es $|||\cdot|||$-normalizada: Considerando $t_n = 1$ y $t_i = 0$ para $i \in \mathbb{N}$ con $i \neq n$, deducimos que $|||x_n||| > 0$ para cada n. Sea $y_n = x_n/|||x_n|||$, se sigue que $|||y_n||| = 1$. Para toda $t \in l_1$ se tiene que

$$|||\sum_{n=1}^{\infty} t_n y_n||| \leq \sum_{n=1}^{\infty} |t_n| \cdot |||y_n||| = \sum_{n=1}^{\infty} |t_n|.$$

Ya que $|||x_n||| \leq 1$, se sigue que

$$|||\sum_{n=1}^{\infty} t_n y_n||| = |||\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{|||x_n|||} t_n x_n||| \geq \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{|||x_n|||}(1-\epsilon_n)|t_n| \geq \sum_{n=1}^{\infty}(1-\epsilon_n)|t_n|.$$

Por lo tanto, (y_n) satisface (2.7).

Pasando a una subsucesión si fuera necesario, podemos suponer que $\epsilon_n < 1/2^n$ para cada $n \in \mathbb{N}$. Para cada $N \in \mathbb{N}$ consideremos $t_1 = 1$, $t_N = N$ y $t_j = 0$ para toda $j \in \mathbb{N}$ con $j \neq 1, N$. Tenemos que

$$\begin{aligned}
1-\epsilon_1+N-N\epsilon_N &\leq |||x_1 + Nx_N||| \\
&= max\left\{ \sup_{q_1+1\leq k\leq q_2} \gamma_k \left(\sum_{n=k}^{q_2} |\alpha_n| + N \sum_{n=q_N+1}^{q_{N+1}} |\alpha_n| \right), \right. \\
&\qquad \left. \sup_{q_N+1\leq l\leq q_{N+1}} N\gamma_l \sum_{n=l}^{q_{N+1}} |\alpha_n| \right\} \\
&\leq max\left\{ \sup_{q_1+1\leq k\leq q_2} \gamma_k \sum_{n=k}^{q_2} |\alpha_n| + N\gamma_{q_2} \sum_{n=q_N+1}^{q_{N+1}} |\alpha_n|, \right. \\
&\qquad \left. \sup_{q_N+1\leq l\leq q_{N+1}} N\gamma_l \sum_{n=l}^{q_{N+1}} |\alpha_n| \right\} \\
&= max\left\{ \sup_{q_1+1\leq k\leq q_2} \gamma_k \sum_{n=k}^{q_2} |\alpha_n| + N\frac{\gamma_{q_2}}{\gamma_{q_N+1}} \left(\gamma_{q_N+1} \sum_{n=q_N+1}^{q_{N+1}} |\alpha_n| \right), \right. \\
&\qquad \left. \sup_{q_N+1\leq l\leq q_{N+1}} N\gamma_l \sum_{n=l}^{q_{N+1}} |\alpha_n| \right\} \\
&\leq max\left\{ 1 + \frac{N\gamma_{q_2}}{\gamma_{q_N+1}}, N \right\}.
\end{aligned}$$

Ya que $\epsilon_1 < 1/2$ y $N\epsilon_N < N/2^N \leq 1/2$, deducimos que $N+1-\epsilon_1-N\epsilon_N > N$. Por lo tanto,

$$max\left\{ 1 + \frac{N\gamma_{q_2}}{\gamma_{q_N+1}}, N \right\} = 1 + \frac{N\gamma_{q_2}}{\gamma_{q_N+1}}$$

y

$$N+1-\epsilon_1-N\epsilon_N \leq 1 + \frac{N\gamma_{q_2}}{\gamma_{q_N+1}},$$

para todo $n \in \mathbb{N}$. Se sigue que,

$$1 + \frac{1}{N} - \frac{\epsilon_1}{N} - \epsilon_N \leq \frac{1}{N} + \frac{\gamma_{q_2}}{\gamma_{q_N+1}}.$$

Cuando $N \to \infty$, obtenemos que $1 \leq \gamma_{q_2}$. Esto es una contradicción ya que $\gamma_k < 1$ para todo $k \in \mathbb{N}$. $\blacksquare$

En el siguiente capítulo mostraremos que con este nuevo renormamiento, l_1 tiene la PPF.

Capítulo 3

Renormamiento de l_1 con la PPF

En este capítulo consideraremos un espacio de Banach X dotado con una topología lineal τ y una familia de seminormas $\{R_k(\cdot)\}$ que satisfacen ciertas condiciones. A través de esta familia definiremos una norma equivalente $|||\cdot|||$ en X. Probaremos si C es un subconjunto no vacío, cerrado, acotado y convexo de $(X, |||\cdot|||)$ que es τ-relativamente secuencialmente compacto, entonces cualquier aplicación no expansiva $T : C \to C$ tiene un punto fijo. Este resultado permitirá dar un renormamiento al espacio l_1 con la PPF. Sin embargo, este renormamiento con la PPF no es único. Proporcionaremos otro, cambiando la familia de seminormas $\{R_k(\cdot)\}$. Por último, probaremos que no todo espacio puede ser renormado para tener la PPF.

3.1. Resultados preliminares

Sea C subconjunto cerrado, acotado y convexo de un espacio de Banach $(X, ||\cdot||)$ y $T : C \to C$ aplicación no expansiva. El Lema 2.5 asegura la existencia de una afps $(x_n) \subset C$.

Lema 3.1 *Sean C y T bajo las anteriores consideraciones. Si $d > 0$ y el conjunto*

$$D = \{x \in C : \limsup_n ||x_n - x|| \leq d\}$$

es distinto del vacío, se verifica que D es:

(1) *Cerrado.*

(2) *Convexo.*

(3) *T-invariante.*

Demostración. (1) Sea $(y_n) \subset D$ tal que $y_n \to x$ cuando $n \to \infty$. Dado $\epsilon > 0$, existe $N \in \mathbb{N}$ tal que si $n \geq N$, entonces $||y_n - x|| \leq \epsilon$. Observemos que

$$\begin{aligned} \limsup_n ||x_n - x|| &\leq \limsup_n ||x_n - y_m|| + \limsup_n ||y_m - x|| \\ &\leq d + ||y_m - x||. \end{aligned}$$

Haciendo tender $m \to \infty$, tenemos que $\limsup_n ||x_n - x|| \leq d + \epsilon$. Ya que ϵ es arbitrario, $\limsup_n ||x_n - x|| \leq d$ y por ende $x \in D$.

(2) Sean $x, y \in D$ y $\lambda \in [0,1]$. Notemos que $\lambda x + (1-\lambda)y \in C$ por la convexidad de C. Por otra parte,

$$\begin{aligned} \limsup_n ||x_n - \lambda x - (1-\lambda)y|| &= \limsup_n ||x_n - \lambda x_n + \lambda x_n - \lambda x - (1-\lambda)y|| \\ &= \limsup_n ||\lambda(x_n - x) + (1-\lambda)(x_n - y)|| \\ &\leq \limsup_n \lambda||(x_n - x)|| + \limsup_n (1-\lambda)||(x_n - y)|| \\ &\leq \lambda d + (1-\lambda)d = d. \end{aligned}$$

(3) Supongamos que $x \in D$. Entonces

$$\begin{aligned} \limsup_n ||x_n - Tx|| &\leq \limsup_n ||x_n - Tx_n|| + \limsup_n ||Tx_n - Tx|| \\ &= \limsup_n ||Tx_n - Tx|| \\ &\leq \limsup_n ||x_n - x|| = d. \end{aligned}$$

Por lo tanto, $Tx \in D$. ∎

Lema 3.2 *Sean $(X, ||\cdot||)$ espacio de Banach y $C \subset X$ cerrado, acotado y convexo. Sea $T : C \to C$ aplicación no expansiva y supongamos que T no tiene punto fijo. Entonces existe algún $a > 0$ y un subconjunto D cerrado, convexo y T-invariante de C tal que para cada afps (x_n) en D y para cualquier $z \in D$,*

$$\limsup_n ||x_n - z|| \geq a.$$

Demostración. Por contradicción, supongamos que para todo $a > 0$ y $D \subset C$ cerrado , convexo y T-invariante, existen $(x_n) \subset D$ afps y $z \in D$ tal que

$$\limsup_n ||x_n - z|| < a.$$

Esto implica que existe una sucesión afps (x_n^1) en C y $z_1 \in C$ tales que

$$\limsup_n ||x_n^1 - z_1|| < \frac{1}{2}.$$

El conjunto $D_1 = \{z \in C : \limsup_n ||x_n^1 - z|| \leq \frac{1}{2}\}$ es no vacío ya que $z_1 \in D_1$. Por el lema anterior, D_1 es cerrado, convexo y T-invariante. Aplicando el mismo argumento a D_1, deducimos la existencia de una sucesión $(x_n^2) \subset D_1$ y $z_2 \in D_1$ tales que

$$\limsup_n ||x_n^2 - z_2|| < \frac{1}{2^2}.$$

El conjunto $D_2 = \{z \in D_1 : \limsup_n ||x_n^2 - z|| \leq \frac{1}{2^2}\}$ es no vacío, cerrado, convexo y $T-$invariante. De esta manera podemos construir una sucesión $(D_k)_{k\in\mathbb{N}}$ decreciente de subconjuntos cerrados, acotados, convexos y $T-$invariantes de C tales que $diam(D_k) \leq \frac{1}{2^{k-1}}$. Esta última desigualdad se ve como sigue: sean $x, y \in D_k$, donde

$$D_k = \{z \in D_{k-1} : \limsup_n ||x_n^k - z|| \leq \frac{1}{2^k}\}.$$

Por desigualdad triangular, tenemos que

$$||x - y|| \leq ||x - x_n^k|| + ||x_n^k - y||.$$

Tomando el límite superior de ambos lados de la desigualdad obtenemos que

$$||x-y|| \leq \limsup_n ||x-x_n^k|| + \limsup_n ||x_n^k - y|| \leq \frac{1}{2^k} + \frac{1}{2^k} = \frac{1}{2^{k-1}}.$$

Como x y y son arbitrarios, inferimos que $diam(D_k) \leq \frac{1}{2^{k-1}}$. Esto implica que $diam(D_k) \to 0$ cuando $k \to \infty$.

Consideremos $\{x_k\}_k$ sucesión en X con $x_k \in D_k$ para cada $k \in \mathbb{N}$; tal sucesión es de Cauchy: Sean $\epsilon > 0$ y $N > 0$ tales que $diamD_N < \epsilon$, así para todo $k \geq N$, $D_k \subset D_N$ y por lo tanto $diamD_k < \epsilon$. Esto implica que si $k, l \geq N$, entonces $||x_k - x_l|| < \epsilon$. Ya que X es completo, se sigue que $x_k \to x_0 \in X$ cuando $k \to \infty$. Como $(x_n) \subset D_k$ para $n \geq k$ y D_k es cerrado, es claro que $x_0 \in \cap_{k=1}^{\infty} D_k$. Como $diamD_k \to 0$, $\cap_k D_k = \{x_0\}$. Por la Observación 2.8 $T(\cap_k D_k) \subset \cap_k D_k$, así, $Tx_0 = x_0$. Esto contradice la hipótesis de que T no tiene punto fijo. ■

Observación 3.3 (1) *Notemos que toda subsucesión de una afps es de nuevo afps.*

(2)*Si consideramos a X dotado con una topología lineal τ tal que cada sucesión acotada tiene una subsucesión τ-convergente, entonces la conclusión del Lema 3.2 implica*

$$\inf\{\limsup_n ||x_n - x|| : (x_n) \subset D,\ (x_n)\ afps\ y\ x_n \xrightarrow{\tau} x\} \geq a.$$

3.2. Teorema principal

Esta sección tiene como finalidad primordial dar a conocer las propiedades y resultados que permitirán demostrar la existencia de una norma equivalente en l_1 con la FPP. Para ello consideremos a $(X, ||\cdot||)$ espacio de Banach, dotado con una topología lineal τ, que es τ-relativamente secuencialmente compacta. Esto último se define a continuación.

Definición 3.4 *Sean (M, τ) espacio topológico y A subconjunto de M. Decimos que A es* **τ-relativamente secuencialmente compacto***, si cada sucesión en A contiene una subsucesión τ-convergente a un punto en M. Si los límites de las subsucesiones convergentes pertenecen a A, entonces A se dice que es* **τ-secuencialmente compacto**.

Teorema 3.5 *Sea $k \in \mathbb{N}$. Supongamos la existencia de una familia de seminormas $R_k : X \to [0, \infty)$ que satisfacen las siguientes propiedades:*

(i) Para todo $x \in X$, $R_1 = ||x||$ y $R_k(x) \leq ||x||$ para $k \geq 2$.

(ii) Para todo $x \in X$, $\lim_k R_k(x) = 0$.

(iii) Si $x_n \xrightarrow{\tau} 0$ y es acotada en norma, entonces para todo $k \geq 1$,

$$\limsup_n R_k(x_n) = \limsup_n ||x_n||.$$

(iv) Si $x_n \xrightarrow{\tau} 0$, es acotada en norma y $x \in X$, entonces

$$\limsup_n R_k(x_n + x) = \limsup_n R_k(x_n) + R_k(x),$$

para todo $k \geq 1$.

Sean $\{\gamma_k\}_k \subset (0,1)$ sucesión no decreciente tal que $\lim_k \gamma_k = 1$ y $x \in X$. Definimos

$$|||x||| = \sup_{k \geq 1} \gamma_k R_k(x).$$

Entonces $||| \cdot |||$ es una norma equivalente en X (ver Lema 2.20) tal que $(X, ||| \cdot |||)$ satisface la siguiente propiedad: para cada subconjunto no vacío, cerrado, acotado, convexo C que es τ-relativamente secuencialmente compacto y para cada $T : C \to C$ no expansiva, existe un punto fijo.

Antes de probar el teorema, necesitamos los siguientes lemas:

Lema 3.6 *Consideremos X espacio de Banach dotado con una topología lineal τ y $\{R_k(\cdot)\}_k$ familia de seminormas que satisfacen las propiedades (i), (ii), (iii) y (iv). Sean $|||\cdot|||$ la norma definida en el Teorema 3.5 y $(x_n),(y_n)$ sucesiones acotadas en X. Se satisfacen:*

(1) *Si $x_n \xrightarrow{\tau} 0$, entonces*

$$\limsup_n |||x_n||| = \limsup_n ||x_n||.$$

(2) *Si $x_n \xrightarrow{\tau} x$ y $y_n \xrightarrow{\tau} y$, entonces*

$$\limsup_m \limsup_n |||x_n - y_m||| \geq \limsup_n |||x_n - x||| + \limsup_m |||y_m - y|||.$$

Demostración. (1): Para cada $k \geq 1$ y $x \in X$, por (i) obtenemos que

$$|||x||| = \sup_{k\geq 1} \gamma_k R_k(x) \leq R_k(x) \leq ||x||.$$

Aplicando la propiedad (iii) para cada $k \geq 1$,

$$\limsup_n ||x_n|| \geq \limsup_n |||x_n||| \geq \gamma_k \limsup_n R_k(x_n) = \gamma_k \limsup_n ||x_n||.$$

Haciendo tender k a infinito deducimos que $\limsup_n |||x_n||| = \limsup_n ||x_n||$.

(2): Notemos que $(x_n - x) \xrightarrow{\tau} 0$ y $(y_n - y) \xrightarrow{\tau} 0$ cuando $n \to \infty$. Además $(x_n - x)$ y $(y_n - y)$ están acotadas en norma. Por la propiedad (iv), para cada $k \geq 1$ tenemos que

$$\begin{aligned}
\limsup_m \limsup_n R_k(x_n - y_m) &= \limsup_m [\limsup_n R_k(x_n - x + x - y_m)] \\
&= \limsup_m [\limsup_n R_k(x_n - x) + R_k(x - y_m)] \\
&= \limsup_n R_k(x_n - x) + \limsup_m R_k(x - y + y - y_m) \\
&= \limsup_n R_k(x_n - x) + \limsup_m R_k(y - y_m) + R_k(x - y).
\end{aligned}$$

De la definición de $|||\cdot|||$, la propiedad (iii) y por (1) , deducimos que

$$\begin{aligned}
\limsup_m \limsup_n |||x_n - y_m||| &\geq \gamma_k [\limsup_n R_k(x_n - x) + \limsup_m R_k(y - y_m) + R_k(x - y)] \\
&\geq \gamma_k [\limsup_n ||x_n - x|| + \limsup_m ||y - y_m||] \\
&= \gamma_k [\limsup_n |||x_n - x||| + \limsup_m |||y - y_m|||].
\end{aligned}$$

Si $k \to \infty$ obtenemos el resultado deseado. ■

El siguiente lema permite definir el argumento principal en la prueba del Teorema 3.5.

Lema 3.7 *Consideremos el espacio de Banach* $(X, |||\cdot|||)$. *Sean* C *y* T *como en el Teorema 3.5. Si* T *no tiene punto fijo, podemos encontrar un conjunto* D *como en el Lema 3.2. Sea* K *cualquier subconjunto de* D *que es cerrado, convexo y* $T-$*invariante y denotemos*

$$\rho = \inf\{\limsup_n |||x_n - x||| : (x_n) \subset K \; es \; afps \; y \; x_n \xrightarrow{\tau} x\}.$$

Entonces para cada $(x_n) \subset K$ *afps que es* τ*-convergente y para cada* $z \in K$ *tenemos que*

$$\limsup_n |||x_n - z||| \geq 2\rho.$$

Demostración.

Observemos que existe $(x_n) \subset K$ afps con respecto a T y tiene una subsucesión afps τ-convergente ya que K es cerrado, acotado, convexo y τ-relativamente secuencialmente compacto. Consecuentemente $\rho > 0$ por el Lema 3.2. Por contradicción, supongamos que existen $(x_n) \subset K$ afps τ-convergente y $z \in K$ tales que

$$r = \limsup_n |||x_n - z||| < 2\rho.$$

Tenemos que $K_1 = \{w \in K : \limsup_n |||x_n - w||| \leq r\}$ es no vacío (ya que $z \in K_1$). Por Lema 3.1, K_1 es subconjunto cerrado, acotado, convexo y T-invariante de K. Por el Lema 2.5 existe una sucesión afps $(y_n) \subset K_1$. Debido a que C es τ-relativamente secuencialmente compacto, toda sucesión en C contiene una subsucesión τ-convergente. Además por (1) de la Observación 3.3, podemos suponer que (y_n) es afps y es tal que $y_n \xrightarrow{\tau} y$, para algún $y \in X$.

Para todo $m \in \mathbb{N}$, se tiene que $\limsup_n |||x_n - y_m||| \leq r$, esto implica que $\limsup_m \limsup_n |||x_n - y_m||| \leq r$. Denotemos por x el límite de la sucesión (x_n) en τ. Por la desigualdad (2) del Lema 3.6 obtenemos que

$$\begin{aligned} r &\geq \limsup_m \limsup_n |||x_n - y_m||| \\ &\geq \limsup_n |||x_n - x||| + \limsup_m |||y_m - y||| \\ &\geq \rho + \rho = 2\rho. \end{aligned}$$

Pero esto es una contradicción. ■

Demostración. (Teorema 3.5)

Por contradicción, supongamos que T no tiene punto fijo. Sea D como en la conclusión del Lema 3.2. Definimos

$$c = \inf\{\limsup_n |||x_n - x||| : (x_n) \subset D \; es \; afps \; y \; x_n \xrightarrow{\tau} x\},$$

que es mayor que 0. Consideremos $\epsilon_1 > 0$ con $c\epsilon_1 < 1/2$ y una afps $(x_n) \subset D$ tal que $x_n \xrightarrow{\tau} x$ y $\limsup_n |||x_n - x||| < (1 + \epsilon_1)c$. Por traslación podemos suponer que $x = 0$. En efecto, sean $z_n = x_n - x$ y $S : D - \{x\} \to D - \{x\}$ definida por

$$S(y - x) = Ty - x,$$

con $y \in D$. Tenemos que el conjunto $D - \{x\}$ es cerrado, acotado y convexo. La aplicación S es no expansiva: sean $x_1, x_2 \in D$,

$$|||S(x_1 - x) - S(x_2 - x)||| = |||Tx_1 - Tx_2||| \leq |||x_1 - x_2|||.$$

Además,

$$\limsup_n |||z_n - Sz_n||| = \limsup_n |||x_n - x - Tx_n + x||| = \limsup_n |||x_n - Tx_n||| = 0.$$

Por consiguiente, (z_n) es afps y $z_n \xrightarrow{\tau} 0$ cuando $n \to \infty$. Así, podemos suponer que $(x_n) \subset D$ es afps y $x_n \xrightarrow{\tau} 0$. Por lo tanto, $\limsup_n |||x_n||| < (1 + \epsilon_1)c$. Esto implica que existe $m \in \mathbb{N}$ suficientemente grande tal que $|||x_m||| < (1+\epsilon_1)c$. En consecuencia,

$$\limsup_n |||x_n - x_m||| \leq \limsup_n |||x_n||| + |||x_m||| < 2(1+\epsilon_1)c.$$

Consideremos el conjunto

$$K = \{z \in D : \limsup_n |||x_n - z||| \leq 2(1+\epsilon_1)c\},$$

que es no vacío, ya que $x_m \in K$ para m suficientemente grande. Por el Lema 3.1, K es cerrado, convexo y T-invariante. Definamos

$$\rho = \inf\{\limsup_n |||y_n - y||| : (y_n) \subset K \; es \; afps \; y \; y_n \xrightarrow{\tau} y\}.$$

Notemos que $c \leq \rho \leq \limsup_n |||x_n||| < (1+\epsilon_1)c$.

Antes de continuar probando las desigualdades que permitan demostrar el teorema, estableceremos lo que se quiere probar. Encontraremos una afps $(y_n) \subset K$ que sea τ-convergente y un punto $z \in K$ tales que

$$\limsup_n |||y_n - z||| < 2\rho,$$

obteniendo así una contradicción por la conclusión del Lema 3.7.

Notemos lo siguiente: Si $(y_n) \subset K$ es una afps y $y_n \xrightarrow{\tau} y$, entonces por $(iii), (iv)$ y (1) del Lema 3.6 tenemos que

$$\begin{aligned}
2(1+\epsilon_1)c &\geq \limsup_m \limsup_n |||x_n - y_m||| = \limsup_m \limsup_n |||x_n - (y_m - y) - y||| \\
&\geq \gamma_k \limsup_m \limsup_n R_k(x_n - (y_m - y) - y) \\
&= \gamma_k \left[\limsup_n R_k(x_n) + \limsup_m R_k(y_m - y) + R_k(y)\right] \\
&= \gamma_k \left[\limsup_n ||x_n|| + \limsup_m ||y_m - y|| + R_k(y)\right] \\
&= \gamma_k \left[\limsup_n |||x_n||| + \limsup_m |||y_m - y||| + R_k(y)\right] \\
&\geq \gamma_k [2c + R_k(y)].
\end{aligned}$$

Por ende,

$$R_k(y) \leq 2c\left(\frac{1+\epsilon_1}{\gamma_k} - 1\right). \tag{3.1}$$

Como $\epsilon_1 < 1/2$ y $c\epsilon_1 < c/2 \leq \rho/2$, entonces existe $\delta \in (c\epsilon_1, 1/2)$ tal que $\rho - 2\delta > 0$. Sea ϵ_2 tal que $0 < \epsilon_2 < \rho - 2\delta$. Por otra parte, definimos

$$q = (1+\epsilon_1)c + 2c\left(\frac{1+\epsilon_1}{\gamma_1} - 1\right) > \rho.$$

Por (1) del Lema 3.6, $\operatorname{lím\,sup}_n ||x_n|| = \operatorname{lím\,sup}_n |||x_n||| < (1+\epsilon_1)c$. Así, podemos encontrar un elemento $x \in K$ tal que $||x|| < (1+\epsilon_1)c$. Por la propiedad (ii), existe $m \in \mathbb{N}$ tal que si $k \geq m$, entonces $R_k(x) < \epsilon_2$ y

$$\frac{(1+\epsilon_1)c}{c+\delta} < \gamma_k,$$

debido a que $lim_k \gamma_k = 1$. Notemos que

$$\frac{(1+\epsilon_1)c}{\gamma_k} < c+\delta.$$

Por ende,

$$\left(\frac{1+\epsilon_1}{\gamma_k} - 1\right)c < \delta. \tag{3.2}$$

Por otra parte, consideremos $\lambda \in (0,1)$ tal que

$$\lambda < \frac{\rho(1-\gamma_m)}{\gamma_m(q-\rho)}.$$

Así $\lambda\gamma_m q - \lambda\gamma_m\rho < \rho(1-\gamma_m)$. Esto implica que $\lambda\gamma_m q < \rho(\lambda\gamma_m - \gamma_m + 1)$. Por lo tanto,

$$\begin{aligned}
\gamma_m[(2-\lambda)\rho + \lambda q] &= 2\gamma_m\rho - \lambda\gamma_m\rho + \lambda\gamma_m q < 2\gamma_m\rho - \lambda\gamma_m\rho + \lambda\gamma_m\rho - \gamma_m\rho + \rho \\
&= \rho(1+\gamma_m) < 2\rho.
\end{aligned}$$

Además,

$$(2-\lambda)\rho + \lambda(\epsilon_2 + 2\delta) = 2\rho - \lambda(\rho - (2\delta + \epsilon_2)) < 2\rho,$$

debido a que $\rho - 2\delta - \epsilon_2 > 0$. Por lo anterior, podemos encontrar $\epsilon_3 > 0$ tal que

$$(a) \quad \gamma_m[(2-\lambda)(\rho+\epsilon_3)+\lambda q] < 2\rho$$

y

$$(b) \quad (2-\lambda)(\rho+\epsilon_3)+\lambda(\epsilon_2+2\delta) < 2\rho.$$

Sea $(y_n) \subset K$ una afps tal que $y_n \xrightarrow{\tau} y$ y

$$\limsup_n ||y_n - y|| = \limsup_n |||y_n - y||| < \rho + \epsilon_3.$$

Por lo tanto, existe $s \in \mathbb{N}$ tal que $||y_N - y|| < \rho + \epsilon_3$ para todo $N \geq s$. Definimos

$$z = (1-\lambda)y_s + \lambda x \in K,$$

debido a que K es convexo. Lo que probaremos es que $\limsup_n |||y_n - z||| < 2\rho$. Pero antes, mostraremos que existe $M > 0$ tal que para toda $k \in \mathbb{N}$ y $N \geq s$, se cumple que

$$\gamma_k R_k(y_N - z) < M < 2\rho.$$

Para la prueba, consideraremos 2 casos.

Caso 1 : Sea $k \geq m$. Por la propiedad (i), (3.1), (3.2) y (b) obtenemos que

$$\begin{aligned}
\gamma_k R_k(y_N - z) &= \gamma_k R_k(y_N - (1-\lambda)y_s - \lambda x) \\
&\leq R_k(y_N - y - (1-\lambda)(y_s - y) - \lambda(x-y)) \\
&\leq R_k(y_N - y) + (1-\lambda)R_k(y_s - y) + \lambda R_k(x-y) \\
&\leq ||y_N - y|| + (1-\lambda)||y_s - y|| + \lambda R_k(x-y) \\
&\leq (\rho+\epsilon_3) + (1-\lambda)(\rho+\epsilon_3) + \lambda(R_k(x) + R_k(y)) \\
&< (2-\lambda)(\rho+\epsilon_3) + \lambda(\epsilon_2 + R_k(y)) \\
&\leq (2-\lambda)(\rho+\epsilon_3) + \lambda\left(\epsilon_2 + 2c\left(\frac{1+\epsilon_1}{\gamma_k} - 1\right)\right) \\
&< (2-\lambda)(\rho+\epsilon_3) + \lambda(\epsilon_2 + 2\delta) \\
&< 2\rho.
\end{aligned}$$

Caso 2 : Sea $k \leq m$. Por la propiedad (i), (3.1) y (a) tenemos que

$$
\begin{aligned}
\gamma_k R_k(y_N - z) &\leq \gamma_m R_k(y_N - (1-\lambda)y_s - \lambda x)\\
&= \gamma_m[R_k(y_N - y - (1-\lambda)(y_s - y) - \lambda(x-y))]\\
&\leq \gamma_m[R_k(y_N - y) + (1-\lambda)R_k(y_s - y) + \lambda R_k(x-y)]\\
&\leq \gamma_m[||y_N - y|| + (1-\lambda)||y_s - y|| + \lambda R_k(x-y)]\\
&\leq \gamma_m[(\rho+\epsilon_3) + (1-\lambda)(\rho+\epsilon_3) + \lambda(R_k(x) + R_k(y))]\\
&< \gamma_m[(2-\lambda)(\rho+\epsilon_3) + \lambda((1+\epsilon_1)c + R_k(y))]\\
&\leq \gamma_m\left[(2-\lambda)(\rho+\epsilon_3) + \lambda\left((1+\epsilon_1)c + 2c\left(\frac{1+\epsilon_1}{\gamma_k} - 1\right)\right)\right]\\
&\leq \gamma_m\left[(2-\lambda)(\rho+\epsilon_3) + \lambda\left((1+\epsilon_1)c + 2c\left(\frac{1+\epsilon_1}{\gamma_1} - 1\right)\right)\right]\\
&= \gamma_m[(2-\lambda)(\rho+\epsilon_3) + \lambda q]\\
&< 2\rho.
\end{aligned}
$$

Consideremos,

$$M = max\{(2-\lambda)(\rho+\epsilon_3) + \lambda(\epsilon_2 + 2\delta), \gamma_m[(2-\lambda)(\rho+\epsilon_3) + \lambda q]\}.$$

En consecuencia, para toda $N \geq s$,

$$|||y_N - z||| < M < 2\rho.$$

Por lo tanto, $\limsup_n |||y_n - z||| < 2\rho$. Pero esto contradice al Lema 3.7. ■

3.3. Renormamiento de l_1 con la PPF

En 2008 Pei-Kee Lin proporcionó el primer ejemplo de un espacio de Banach no reflexivo que satisface la PPF [7]. Él consideró al espacio l_1 dotado con la norma $|||\cdot|||$ definida en el Lema 2.20 y tomó a $\gamma_k = \frac{8^k}{1+8^k}$, para probar que $(l_1, |||\cdot|||)$ posee la PPF. La demostración la llevó a cabo de manera directa. Sin embargo, en esta sección mostraremos el mismo resultado para una sucesión $\{\gamma_k\} \subset (0,1)$ arbitraria creciente a 1, como una aplicación directa del Teorema 3.5 [1]. Antes de abordar este resultado, necesitamos una definición y un lema previo.

Definición 3.8 *Sea (X,τ) espacio topológico. Un subconjunto E de X se dice que es* **secuencialmente cerrado***, si para cada sucesión $\{x_n\} \subset E$ tal que $x_n \xrightarrow{\tau} x$, se tiene que $x \in E$.*

Lema 3.9 *Sea X espacio de Banach separable. Un subconjunto convexo de X^* es w^* cerrado si y sólo si es w^* secuencialmente cerrado.*

Demostración. Sean $C \subset X^*$ convexo y $t > 0$. Supongamos que C es w^* cerrado y que además existe una sucesión $(x_n) \subset C$ tal que $x_n \xrightarrow{w^*} x$. Sea V vecindad w^* de x. Dado que $x_n \xrightarrow{w^*} x$, existe $N \in \mathbb{N}$ tal que si $n \geq N$, entonces $x_n \in V$. Así para $n \geq N$, $x_n \in C \cap V$. Por lo tanto, x está en la cerradura w^* de C. Debido a que C es w^* cerrado por hipótesis, tenemos que $x \in C$.

Ahora supongamos que C es w^* secuencialmente cerrado. Por la Proposición 1.14 tenemos que la topología relativa al conjunto tB_{X^*} es inducida por una métrica. Ya que tB_{X^*} es w^* cerrado, se sigue que es w^* secuencialmente cerrado. Por lo tanto, el conjunto $C \cap tB_{X^*} \subset tB_{X^*}$ es w^* secuencialmente cerrado. Como tB_{X^*} es metrizable, tenemos que $C \cap tB_{X^*}$ es w^* cerrado. Por el Teorema 1.12 concluimos que C es w^* cerrado. $\blacksquare$

Teorema 3.10 *Consideremos $\{\gamma_k\} \subset (0,1)$ sucesión no decreciente tal que $\gamma_k \to 1$ cuando $k \to \infty$. Definimos el renormamiento*

$$|||x||| = \sup_{k\geq 1} \gamma_k \sum_{n=k}^{\infty} |x_n| = \sup_{k\geq 1} \gamma_k R_k(x),$$

para $x = (x_k) \in l_1$. Entonces $(l_1, |||\cdot|||)$ tiene la propiedad del punto fijo.

Demostración. Es fácil ver que para cada $k \in \mathbb{N}$, $R_k(\cdot)$ es una seminorma. Sean $||\cdot||$ la norma usual de l_1 y τ la topología w^* asociada a la dualidad $\sigma(l_1, c_0)$. Observemos que:

(I) Es claro que $R_1(x) = ||x||$ y $R_k(x) \leq ||x||$ para todo $x \in l_1$.

(II) Es claro que $\lim_k R_k(x) = 0$ para todo $x \in l_1$.

(III) Si $\{x_n\} \subset l_1$ es $||\cdot||$-acotada y $x_n \xrightarrow{w^*} 0$, entonces para todo $k \geq 1$,

$$\limsup_n R_k(x_n) = \limsup_n ||x_n||.$$

En efecto, por (I) para cada $n \in \mathbb{N}$ y $k \geq 1$, tenemos que $R_k(x_n) \leq ||x_n||$. Así

$$\limsup_n R_k(x_n) \leq \limsup_n ||x_n||.$$

Por otra parte, sean $\epsilon > 0$ y $x_n = \{a_j^n\}_{j=1}^\infty \in l_1$. Ya que $x_n \xrightarrow{w^*} 0$, se tiene que converge coordenada a coordenada. Así para cada $j \in \mathbb{N}$, $a_j^n \to 0$ cuando $n \to \infty$. Por lo tanto, para cada k fija existe $N \in \mathbb{N}$ tal que si $n \geq N$, entonces $|a_j^n| < \epsilon/\text{k}$ para toda $j = 1, ..., k$. Así

$$\limsup_n ||x_n|| = \limsup_n \left(\sum_{j=1}^{k-1} |a_j^n| + \sum_{j=k}^{\infty} |a_j^n| \right) < \epsilon + \limsup_n R_k(x_n).$$

Debido a que ϵ es arbitrario, deducimos que $\limsup_n ||x_n|| \leq \limsup_n R_k(x_n)$.

(IV) Si $\{x_n\} \subset l_1$ es $||\cdot||$-acotada, $x_n \xrightarrow{w^*} 0$ y $x \in l_1$, entonces

$$\limsup_n R_k(x_n + x) = \limsup_n R_k(x_n) + R_k(x),$$

para todo $k \geq 1$. En efecto, consideremos $\{e_n\}_{n=1}^\infty$ la base canónica de l_1, $x_n = \{a_j^n\}_{j=1}^\infty \in l_1$ y $x = \{b_j\}_{j=1}^\infty \in l_1$. Sea $P_k(x) = \sum_{j=1}^k b_j e_j$ la proyección canónica. Notemos que, $\lim_k P_k(x) = x$. Primero probaremos que

$$\limsup_n ||x_n + x|| = \limsup_n ||x_n|| + ||x||. \tag{3.3}$$

Por desigualdad triangular, $\limsup_n ||x_n + x|| \leq \limsup_n ||x_n|| + ||x||$. Para probar la otra desigualdad, sean $\epsilon > 0$ e I la aplicación identidad. Existe $m \in \mathbb{N}$ tal que

$$||(I - P_m)x|| < \epsilon.$$

Ya que $x_n \stackrel{w^*}{\to} 0$, existe $N \in \mathbb{N}$ tal que si $k > N$, entonces $||P_m x_k|| < \epsilon$. Por lo tanto, $\limsup_k ||P_m x_k|| \leq \epsilon$.

Esto implica que

$$\begin{aligned}
\limsup_n ||x_n + x|| &= \limsup_n ||(I - P_m)x_n + P_m x_n + (I - P_m)x + P_m x|| \\
&= \limsup_n [||(I - P_m)x_n + (I - P_m)x|| + ||P_m x_n + P_m x||] \\
&\geq \limsup_n [||(I - P_m)x_n|| - ||(I - P_m)x|| + ||P_m x|| - ||P_m x_n||] \\
&\geq \limsup_n [||x_n|| - 2||P_m x_n|| + ||P_m x|| - ||(I - P_m)x||] \\
&= \limsup_n [||x_n|| - 2||P_m x_n|| + ||x|| - 2||(I - P_m)x||] \\
&\geq \limsup_n ||x_n|| - 2\epsilon + ||x|| - 2\epsilon \\
&= \limsup_n ||x_n|| + ||x|| - 4\epsilon.
\end{aligned}$$

Como ϵ es arbitrario, obtenemos que

$$\limsup_n ||x_n + x|| \geq \limsup_n ||x_n|| + ||x||.$$

Aplicando la igualdad (3.3) a la sucesión $((I - P_{k-1})x_n)$ que converge w^* a 0 y al elemento $(I - P_{k-1})x$, obtenemos que

$$\begin{aligned}
\limsup_n R_k(x_n + x) &= \limsup_n ||(I - P_{k-1})(x_n + x)|| \\
&= \limsup_n ||(I - P_{k-1})x_n + (I - P_{k-1})x|| \\
&= \limsup_n ||(I - P_{k-1})x_n|| + ||(I - P_{k-1})x|| \\
&= \limsup_n R_k(x_n) + R_k(x).
\end{aligned}$$

Por el teorema de Banach-Alaoglu tenemos que la bola unitaria de l_1 es w^* compacta. Sabemos el espacio c_0 es separable, por el Lema 3.9, inferimos que todo conjunto C contenido en l_1 que es w^* cerrado, acotado y convexo es w^*-secuencialmente compacto. Aplicando el Teorema 3.5, obtenemos que toda aplicación no expansiva $T : C \to C$ con respecto a la norma $|||\cdot|||$ tiene punto fijo. ■

3.3.1. Otro renormamiento de l_1 con la PPF

Aunque un espacio X cumpla las condiciones del Teorema 3.5 que garantizan la existencia de un renormamiento del espacio con la PPF, este renormamiento no tiene por que ser único. Por ejemplo, en el caso de l_1 podemos considerar distintas sucesiones $\{\gamma_k\}$ que converjan a 1. Más aún, podemos definir un renormamiento de l_1 distinto al del Teorema 3.10, cambiando la familia de seminormas $\{R_k(\cdot)\}$, como mostramos en el teorema siguiente.

Teorema 3.11 *Sean* $\{\gamma_k\} \subset (0,1)$ *sucesión no decreciente tal que* $\lim_k \gamma_k = 1$ *y* $||\cdot||$ *la norma usual en* l_1. *Para* $p > 1$, $k \geq 1$ *y* $x = (x_k) \in l_1$ *la función* $|||\cdot|||$ *dada por*

$$|||x||| = \sup_{k\geq 1} \gamma_k \left(\sum_{n=2k}^{\infty} |x_n| + (\sum_{n=k}^{2k-1} |x_n|^p)^{1/p} \right) = \sup_{k\geq 1} \gamma_k R_k(x)$$

define una norma equivalente a $||\cdot||$ *tal que* $(l_1, |||\cdot|||)$ *satisface la PPF.*

Demostración. Primero probaremos que $|||\cdot|||$ define una norma en l_1. En efecto, sean $x = (x_n), y = (y_n) \in l_1$ y $c \in \mathbb{K}$, tenemos que:

(a) Es claro que si $x = 0$ entonces $|||x||| = 0$. Supongamos que $|||x||| = 0$. Entonces

$$\gamma_1 ||x|| = \gamma_1 R_1(x) \leq \sup_{k\geq 1} \gamma_k R_k(x) = 0.$$

Esto implica que $||x|| = 0$, por lo tanto $x = 0$.

(b) $|||cx||| = \sup_{k\geq 1}\gamma_k R_k(cx) = |c|\sup_{k\geq 1}\gamma_k R_k(x) = |c|\cdot|||x|||$.

(c) Por la desigualdad del triángulo en l_p tenemos que

$$\begin{aligned}
|||x+y||| &= \sup_{k\geq 1}\gamma_k\left(\sum_{n=2k}^{\infty}|x_n+y_n| + (\sum_{n=k}^{2k-1}|x_n+y_n|^p)^{1/p}\right)\\
&\leq \sup_{k\geq 1}\gamma_k\left(\sum_{n=2k}^{\infty}|x_n| + \sum_{n=2k}^{\infty}|y_n| + (\sum_{n=k}^{2k-1}|x_n|^p)^{1/p}) + (\sum_{n=k}^{2k-1}|y_n|^p)^{1/p})\right)\\
&\leq \sup_{k\geq 1}\gamma_k R_k(x) + \sup_{k\geq 1}\gamma_k R_k(y)\\
&= |||x||| + |||y|||.
\end{aligned}$$

Por otro lado, observemos que para cada $n\in\mathbb{N}$ se satisface que

$$(|x_1|^p + |x_2|^p + ... + |x_n|^p)^{1/p} \leq [(|x_1| + |x_2| + ... + |x_n|)^p]^{1/p}.$$

De aquí inferimos que

$$|||x||| \leq R_k(x) = \sum_{n=2k}^{\infty}|x_n| + (\sum_{n=k}^{2k-1}|x_n|^p)^{1/p} \leq \sum_{n=2k}^{\infty}|x_n| + \sum_{n=k}^{2k-1}|x_n| \leq ||x||.$$

Así tenemos que, $\gamma_1||x|| \leq |||x||| \leq ||x||$. En consecuencia, $|||\cdot|||$ y $||\cdot||$ son normas equivalentes.

Ahora probaremos que la familia de seminormas $\{R_k(\cdot)\}$ satisface las cuatro condiciones del Teorema 3.5. Las primeras dos son directas. Sólo probaremos las siguientes:

(1) Si $\{x_n\}\subset l_1$ es $||\cdot||$-acotada y $x_n \xrightarrow{w^*} 0$, entonces para todo $k\geq 1$,

$$\lim\sup_n R_k(x_n) = \lim\sup_n ||x_n||.$$

En efecto, para cada $n\in\mathbb{N}$ y $k\geq 1$, tenemos que $R_k(x_n)\leq ||x_n||$. Así,

$$\lim\sup_n R_k(x_n) \leq \lim\sup_n ||x_n||.$$

Por otro lado, sean $\epsilon > 0$ y $x_n = \{a_j^n\}_{j=1}^{\infty} \in l_1$. Debido a que $x_n \overset{w^*}{\to} 0$, para cada $j \in \mathbb{N}$, $a_j^n \to 0$ cuando $n \to \infty$. Por lo tanto, para cada k fija existe $N \in \mathbb{N}$ tal que si $n \geq N$, entonces $|a_j^n| < \epsilon/$2k-1 para toda $j = 1, ..., 2k-1$. Así

$$\begin{aligned}
\limsup_n ||x_n|| &= \limsup_n \left(\sum_{j=1}^{2k-1} |a_j^n| + \sum_{j=2k}^{\infty} |a_j^n| \right) \\
&\leq \limsup_n \left(\sum_{j=1}^{2k-1} |a_j^n| + \sum_{j=2k}^{\infty} |a_j^n| + (\sum_{j=k}^{2k-1} |a_j^n|^p)^{1/p} \right) \\
&< \epsilon + \limsup_n R_k(x_n).
\end{aligned}$$

Ya que ϵ es arbitrario, $\limsup_n ||x_n|| \leq \limsup_n R_k(x_n)$.

(2) Si $\{x_n\} \subset l_1$ es $|| \cdot ||$-acotada, $x_n \overset{w^*}{\to} 0$ y $x \in l_1$, entonces

$$\limsup_n R_k(x_n + x) = \limsup_n R_k(x_n) + R_k(x),$$

para todo $k \geq 1$. En efecto, consideremos $\{e_n\}_{n=1}^{\infty}$ la base canónica de l_1, $x_n = \{a_j^n\}_{j=1}^{\infty} \in l_1$ y $x = \{b_j\}_{j=1}^{\infty} \in l_1$. Por definición de $R_k(\cdot)$ tenemos que

$$R_k(x_n + x) = \sum_{j=2k}^{\infty} |a_j^n + b_j| + (\sum_{j=k}^{2k-1} |a_j^n + b_j|^p)^{1/p}.$$

Como $x_n \overset{w^*}{\to} 0$, existen una subsucesión $(x_{r_{n+1}})$ de (x_n) y una sucesión bloque básica (y_n) donde $y_n = \sum_{j=m_{n-1}+1}^{m_n} a_j^{r_{n+1}} e_j$, tales que $||x_{r_{n+1}} - y_n|| \to 0$ cuando $n \to \infty$ (ver Lema 2.20). Debido a que para cada $n \in \mathbb{N}$ y $k \geq 1$, tenemos que $R_k(x_{r_{n+1}} - y_n) \leq ||x_{r_{n+1}} - y_n||$, por la desigualdad del triángulo se puede probar que

$$\limsup_n R_k(x_{r_{n+1}}) = \limsup_n R_k(y_n) \tag{3.4}$$

y

$$\limsup_n R_k(x_{r_{n+1}} + x) = \limsup_n R_k(y_n + x). \tag{3.5}$$

Por otra parte, notemos que si $r_{n+1} \geq m_{2k-1} = N(k)$, entonces $a_j^{r_{n+1}} = 0$ para cada $j = k, ..., 2k-1$. Por ende,

$$(\sum_{j=k}^{2k-1} |a_j^{r_{n+1}} + b_j|^p)^{1/p} = (\sum_{j=k}^{2k-1} |b_j|^p)^{1/p} \quad y \quad (\sum_{j=k}^{2k-1} |a_j^{r_{n+1}}|^p)^{1/p} = 0.$$

Por (IV) del Teorema 3.10, deducimos que

$$\begin{aligned}
\limsup_n R_k(y_n + x) &= \limsup_n \left(\sum_{j=2k}^{\infty} |a_j^{r_{n+1}} + b_j| + (\sum_{j=k}^{2k-1} |a_j^{r_{n+1}} + b_j|^p)^{1/p} \right) \\
&= \limsup_n (\sum_{j=2k}^{\infty} |a_j^{r_{n+1}} + b_j|) + (\sum_{j=k}^{2k-1} |b_j|^p)^{1/p} \\
&= \limsup_n \sum_{j=2k}^{\infty} (|a_j^{r_{n+1}}| + |b_j|) + (\sum_{j=k}^{2k-1} |b_j|^p)^{1/p} \\
&= \limsup_n \left(\sum_{j=2k}^{\infty} |a_j^{r_{n+1}}| + (\sum_{j=k}^{2k-1} |a_j^{r_{n+1}}|^p)^{1/p} \right) \\
&+ \sum_{j=2k}^{\infty} |b_j| + (\sum_{j=k}^{2k-1} |b_j|^p)^{1/p} \\
&= \limsup_n R_k(y_n) + R_k(x).
\end{aligned}$$

Por (3.4) y (3.5), obtenemos que

$$\limsup_n R_k(x_{r_{n+1}} + x) = \limsup_n R_k(x_{r_{n+1}}) + R_k(x).$$

Por lo tanto, para cada sucesión (x_n) tal que $x_n \stackrel{w^*}{\to} 0$, existe una subsucesión (x_{n_l}) tal que

$$\limsup_n R_k(x_n + x) \geq \limsup_l R_k(x_{n_l} + x) = \limsup_l R_k(x_{n_l}) + R_k(x).$$

Por otro lado, existe una subsucesión (x_{n_m}) de (x_n) tal que

$$\limsup_n R_k(x_n) = \limsup_m R_k(x_{n_m}).$$

A su vez, (x_{n_m}) tiene una subsucesión $(x_{n_{m_j}})$ tal que

$$\begin{aligned}\limsup_n R_k(x_n + x) &\geq \limsup_j R_k(x_{n_{m_j}} + x) = \limsup_j R_k(x_{n_{m_j}}) + R_k(x) \\ &= \limsup_n R_k(x_n) + R_k(x).\end{aligned}$$

Por otra parte, por la desigualdad del triángulo se tiene que

$$\limsup_n R_k(x_n + x) \leq \limsup_n R_k(x_n) + R_k(x).$$

Así, por el Teorema 3.5 concluimos que $(l_1, |||\cdot|||)$ satisface la PPF. ■

3.4. $l_1(\Gamma)$ no tiene la PPF

Una de las interrogantes que viene a nuestra mente de manera natural después de probar que el espacio l_1 puede ser renormado para satisfacer la PPF, es si todo espacio puede ser renormado para tener la PPF. Responderemos negativamente a esta pregunta, considerando el espacio $l_1(\Gamma)$ con Γ conjunto no numerable [9]. Previo a ello, proporcionaremos una proposición sobre números ordinales, cuya prueba puede ser consultada en [6].

Proposición 3.12 *Sea Ω el primer ordinal no numerable. Supongamos que $\{x_\alpha\}_{\alpha\in\Omega}$ es una sucesión de números reales acotada y ya sea no creciente o no decreciente. Entonces existe β tal que $x_\alpha \equiv x_\beta$ para todo $\alpha \geq \beta$.*

Definición 3.13 *Sea Γ un conjunto no numerable. Tenemos que*

$$l_1(\Gamma) = \{\{a_\gamma\}_{\gamma\in\Gamma} : a_\gamma \in \mathbb{K} \quad y \quad \sum_{\gamma\in\Gamma} |a_\gamma| < \infty\}.$$

Teorema 3.14 *Cada renormamiento de $l_1(\Gamma)$ contiene una copia asintóticamente isométrica de l_1.*

Demostración. Para $\gamma \in \Gamma$, consideremos e_γ un elemento en $l_1(\Gamma)$ con $e_\gamma(\gamma) = 1$ y $e_\gamma(\alpha) = 0$ si $\alpha \neq \gamma$. Sea $|||\cdot|||$ una norma equivalente a la norma usual de $l_1(\Gamma)$. Por lo tanto, existen constantes $m, M > 0$ tales que

$$m \sum_{\gamma \in F} |a_\gamma| \leq ||| \sum_{\gamma \in F} a_\gamma e_\gamma ||| \leq M \sum_{\gamma \in F} |a_\gamma|, \tag{3.6}$$

para todo subconjunto finito F de Γ y para cualesquiera escalares a_γ con $\gamma \in F$. Sea A un subconjunto no numerable de Γ y definimos

$$m_A = \text{ínf}\{||| \sum_{\gamma \in F} a_\gamma e_\gamma ||| : \sum_{\gamma \in F} |a_\gamma| = 1,\ F\, subconjunto\, finito\, de\, A\}.$$

Por (3.6), deducimos que $m \leq m_A \leq M$ para todo subconjunto A no numerable de Γ. Observemos que m_A crece a medida que el conjunto A se hace más pequeño. Sea w_1 el primer ordinal no numerable. Por propiedades de los números ordinales, podemos considerar $(A_\alpha)_{\alpha < w_1}$ una cadena decreciente de subconjuntos no numerables de Γ tales que $\cap_{\alpha < w_1} A_\alpha = \emptyset$. Así tenemos que $(m_{A_\alpha})_{\alpha < w_1}$ es una sucesión transfinita no decreciente de números reales y por la Proposición 3.12 tenemos que se estabiliza. En consecuencia, existe α_0 tal que para todo $\alpha \geq \alpha_0$, se tiene que $m_{A_\alpha} = m_{A_{\alpha_0}} \equiv m_0$.

Consideremos el conjunto A_{α_0}. Existen $n_1 \in \mathbb{N}$, números reales a_j^1 y elementos $\gamma_j^1 \in A_{\alpha_0}$ para $j = 1, 2, ..., n_1$ tales que

$$\sum_{j=1}^{n_1} |a_j^1| = 1 \quad y \quad m_0 \leq ||| \sum_{j=1}^{n_1} a_j^1 e_{\gamma_j^1} ||| \leq m_0 + \frac{1}{2}.$$

Debido a que $\cap_{\alpha < w_1} A_\alpha = \emptyset$, existe $\alpha_1 \geq \alpha_0$ tal que $\gamma_j^1 \notin A_{\alpha_1}$ para $j = 1, ..., n_1$. Ya que $m_{A_{\alpha_1}} = m_0$, existen $n_2 \in \mathbb{N}$, números reales a_j^2 y elementos $\gamma_j^2 \in A_{\alpha_1}$ para $j = 1, 2, ..., n_2$ tales que

$$\sum_{j=1}^{n_2} |a_j^2| = 1 \quad y \quad m_0 \leq ||| \sum_{j=1}^{n_2} a_j^2 e_{\gamma_j^2} ||| \leq m_0 + \frac{1}{2^2}.$$

Continuando con este proceso, obtenemos una sucesión bloque básica (x_k) de (e_γ) donde

$$x_k = \sum_{j=1}^{n_k} a_j^k e_{\gamma_j^k}, \quad m_0 \leq |||x_k||| \leq m_0 + \frac{1}{2^k},$$

con $\sum_{j=1}^{n_k} |a_j^k| = 1$ y $\gamma_j^k \notin A_{\alpha_k}$.

Para cualesquiera escalares $a_1, a_2, ..., a_n$ tenemos que

$$m_0 \sum_{k=1}^{n} |a_k| \leq ||| \sum_{k=1}^{n} a_k x_k ||| \leq M \sum_{k=1}^{n} |a_k|. \tag{3.7}$$

En efecto: Por (3.6), inferimos que

$$\begin{aligned} ||| \sum_{k=1}^{n} a_k x_k ||| &\leq \sum_{k=1}^{n} |a_k| \cdot |||x_k||| \\ &= \sum_{k=1}^{n} |a_k| \cdot ||| \sum_{j=1}^{n_k} a_j^k e_{\gamma_j^k} ||| \\ &\leq \sum_{k=1}^{n} |a_k| \left(M \sum_{j=1}^{n_k} |a_j^k| \right) \\ &= M \sum_{k=1}^{n} |a_k|. \end{aligned}$$

Sea $l = \sum_{k=1}^{n} |a_k|$. Es claro que,

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{|a_k|}{l} \sum_{j=1}^{n_k} |a_j^k| = 1.$$

Por definición de m_0, obtenemos que

$$m_0 \leq ||| \sum_{k=1}^{n} \frac{a_k}{l} x_k ||| = ||| \sum_{k=1}^{n} \frac{a_k}{l} \sum_{j=1}^{n_k} a_j^k e_{\gamma_j^k} |||.$$

Por ende,

$$m_0 \sum_{k=1}^{n} |a_k| \leq ||| \sum_{k=1}^{n} a_k x_k |||.$$

Por otro lado, consideremos la sucesión $(x_k/|||x_k|||)_k$ con $N_k = |||x_k|||$. Notemos que la sucesión $(N_k)_k$ decrece a m_0 cuando $k \to \infty$. Por (3.7) y por la desigualdad del triángulo, obtenemos que

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{m_0}{N_k} |a_k| \leq ||| \sum_{k=1}^{\infty} a_k \frac{x_k}{N_k} ||| \leq \sum_{k=1}^{\infty} |a_k|.$$

Sea $\epsilon_k = 1 - \frac{m_0}{N_k}$. Notemos que la sucesión (ϵ_k) está en $(0,1)$ y es tal que $\epsilon_k \to 0$ cuando $k \to \infty$. Así

$$\sum_{k=1}^{\infty}(1-\epsilon_k)|a_k| \leq |||\sum_{k=1}^{\infty} a_k \frac{x_k}{N_k}||| \leq \sum_{k=1}^{\infty} |a_k|,$$

para toda $\{a_k\} \in l_1$. Por lo tanto, $(l_1(\Gamma), |||\cdot|||)$ contiene una copia asintóticamente isométrica de l_1. $\blacksquare$

Por los Teoremas 2.19 y 3.14 concluimos que si $|||\cdot|||$ es una norma equivalente a la usual en $l_1(\Gamma)$, el espacio $(l_1(\Gamma), |||\cdot|||)$ no posee la PPF.

Conclusiones

El espacio l_1 dotado con la norma usual no posee la PPF. Sin embargo, contiene subconjuntos no triviales cerrados, acotados y convexos que tienen la PPF (ver Ejemplo 2.17).

En 1997, Dowling y Lennard probaron que si un espacio contiene una copia asintóticamente isométrica de l_1, entonces no satisface la PPF (ver Teorema 2.19). Más tarde, estos autores junto con Turett definieron una norma equivalente a la usual de l_1 de tal manera que con este nuevo renormamiento dicho espacio no contenga copias asintóticamente isométricas de l_1 (ver Lema 2.20).

En 2008, P.K. Lin probó que con el nuevo renormamiento, el espacio l_1 satisface la PPF. Esto constituyó el primer ejemplo de un espacio de Banach no reflexivo que tiene la PPF. Posteriormente surgieron otros renormamientos de l_1 con la PPF (ver Teorema 3.11).

En 2009, Carlos Linares y María Japón probaron que si un espacio de Banach X se encuentra dotado con una topología lineal τ y $\{R_k(\cdot)\}$ es una familia de seminormas que satisfacen ciertas condiciones, entonces se puede definir una norma equivalente a la usual del espacio X tal que cada subconjunto cerrado, acotado y convexo que es τ-relativamente secuencialmente compacto cumple la PPF (ver Teorema 3.5). Como una aplicación directa de este resultado, se prueba que existe un renormamiento del espacio l_1 que tiene la PPF (ver Teorema 3.10).

Sin embargo, no todo espacio puede ser renormado para satisfacer la PPF. El espacio $l_1(\Gamma)$ con Γ conjunto no numerable constituye un ejemplo de esta afirmación (ver Teorema 3.14).

Bibliografía

[1] C.A.H Linares, M. A. Japón(2009) *A renorming in some Banach spaces with applications to fixed point theory*, J. Funct. Anal. doi:10.1016/j.jfa.2009.10.025.

[2] C. Bessaga and A. Pelczyński(1958). *On bases and unconditional convergence of series in Banach spaces*, Studia Math. 17 151-164.

[3] H. Fetter Nathansky y B. Gamboa de Buen (2008). *Introducción al Análisis Funcional y a la Geometría de espacios de Banach* (tercera edición), CIMAT.

[4] J. Diestel(1984). *Sequences and Series in Banach Spaces*, Springer-Verlag, New York, Berlin, Heidelberg, Tokyo

[5] K. Goebel and W. A. Kirk (1990). *Topics in metric fixed point theory*, Cambridge University Press.

[6] M. A. Khamsi, W. A. Kirk (2001). *An Introduction to Metric Spaces and Fixed Point Theory*, A Wiley-Interscience series of texts, Monographs and Tracts.

[7] P.K. Lin (2008). *There is an equivalent norm on l_1 that has the fixed point property*, Nonlinear Anal. 2303-2308

[8] P. N. Dowling and C. J. Lennard (1997). *Every nonreflexive subspace of $L_1[0,1]$ fails the fixed point property*, Proceedings of the Amer. Math. Soc. 125, 443-446.

[9] P.N. Dowling, Lennard, C.J and B. Turett (2001). *Renormings of l_1 and c_0 and fixed point properties*, Handbook of metric fixed point theory, pp. 269-297, Kluwer, Dordrecht

[10] Robert E. Megginson (1998). *An introduction to Banach space theory*, Graduate texts in mathematics.

[11] S.J. Dilworth, M. Girardi, J. Hagler (2000). *Dual Banach spaces which contain an isometric copy of L_1*, Bull. Pol. Acad. Sci. Math. 48, 1-12.