

## HOJA DE APROBACIÓN DE TESIS

En cumplimiento al Reglamento de Estudios de Posgrado vigente y tomando en consideración que el C. César Zamora Martínez, efectuó las correcciones pertinentes recomendadas en su trabajo:

**Título de la Tesis:** *Hacia una estrategia de cuantificación de incertidumbre para el problema de tomografía de impedancia eléctrica,*

procedo a otorgarle el Visto Bueno, para que continúe con los trámites correspondientes.

---

**Dr. Marcos Capistrán Ocampo.**  
Asesor de Tesis

**Guanajuato, Guanajuato, México.**  
**15 de Agosto de 2014**





CIMAT

CENTRO DE INVESTIGACIÓN EN  
MATEMÁTICAS, A.C.

---

---

Hacia una estrategia de cuantificación  
de incertidumbre para el problema de  
tomografía de impedancia eléctrica

T E S I S

QUE PARA OBTENER EL TÍTULO DE:

MAESTRO EN CIENCIAS CON ESPECIALIDAD EN

MATEMÁTICAS APLICADAS

P R E S E N T A:

CÉ SAR Z A M O R A M A R T Í N E Z

DIRECTOR DE TESIS:

Dr. Marcos Capistrán Ocampo

## **Hoja de Datos del Jurado**

### **1. Datos del alumno**

César Zamora Martínez  
CIMAT  
Maestría en Ciencias  
Especialidad en Matemáticas Aplicadas

### **2. Datos del asesor de tesis**

Dr. Marcos Capistrán Ocampo  
CIMAT

### **3. Datos del sinodal 1**

Dra. Maria Luisa Sandoval Solís  
UAM-Iztapalapa

### **4. Datos del sinodal 2**

Dr. Joaquín Peña Acevedo  
CIMAT

### **5. Datos del trabajo escrito**

Hacia una estrategia de cuantificación de incertidumbre para el problema de tomografía de impedancia eléctrica  
94 págs.  
2014

## Resumen

La tomografía de impedancia eléctrica intenta formar una imagen de la conductividad eléctrica en el interior de una sección del cuerpo humano a partir de mediciones tomadas por electrodos en su superficie. La idea es que tal imagen pueda ayudar al médico a conocer el estatus clínico del cuerpo en estudio.

Este trabajo de tesis tiene por objetivo plantear una estrategia computacionalmente eficiente para resolver el problema directo asociado, junto con su implementación numérica. Tal estrategia pretende ser usada para muestrear de la distribución posterior que la tomografía de impedancia eléctrica define, tomando el enfoque Bayesiano para el problema de inversión de datos correspondiente. Esta forma de abordar el problema es necesaria pues existen fuentes de error e incertidumbre que de ignorarse a la hora de hacer predicciones del fenómeno a partir de los datos podrían ocasionar un diagnóstico diferente al estatus clínico del paciente y poner en riesgo su vida.



*A mi mamá, quien lucha valientemente.*

*A la pequeña Elvira, a quien nunca he olvidado.  
Descansa en paz.*





"No soy hombre culto, hermano, pero he pensado mucho en este asunto. ¡Ciertamente, los misterios son infinitos! Son demasiadas las interrogaciones que aplastan al hombre contra la tierra. Forjamos las hipótesis que podemos, sin jamás llegar a certeza alguna. . ."Los Hermanos Karamazov, F. Dostoievsky



---

# Agradecimientos

---

A mis padres, María del Carmen y Filiberto, por su apoyo incondicional, por su fuerza y entrega para enfrentar la vida.

A mis compañeros del posgrado por todos los momentos compartidos, su apoyo y trabajo en equipo. A mis amigos de toda la vida por darme su tiempo y su energía, sobre todo durante los momentos difíciles.

A mi tutor Marcos Capistrán por confianza, dedicación y constancia en mi trabajo. También a los profesores que han contribuido a mi formación personal y académica.

A CIMAT y su personal, por darme la oportunidad de continuar mi formación profesional.

A CONACYT por apoyar financieramente mis estudios.

---

# Índice general

---

<b>Agradecimiento</b>	<b>11</b>
<b>1. Introducción</b>	<b>14</b>
<b>2. Planteamiento del problema</b>	<b>4</b>
2.1. Tomografía de Impedancia Eléctrica . . . . .	4
2.2. Cuantificación de Incertidumbre . . . . .	6
2.3. Modelo matemático . . . . .	9
<b>3. Materiales y métodos</b>	<b>14</b>
3.1. Enfoque Bayesiano . . . . .	14
3.2. Métodos MCMC . . . . .	16
3.3. Esquema del Método de Elemento Finito . . . . .	17
3.4. Consideraciones y funciones lineales a pedazos . . . . .	20
3.4.1. Funciones de forma y sus coeficientes . . . . .	21
3.4.2. Otros resultados . . . . .	24
3.5. Aproximaciones numéricas de las integrales . . . . .	26
3.5.1. Integral $\int_{\Omega} \sigma \cdot \nabla \varphi_i \cdot \nabla \varphi_j \, dx \, dy$ . . . . .	26
3.5.2. Integral $\int_{e_l} \varphi_i \varphi_j \, dS$ . . . . .	29

<i>ÍNDICE GENERAL</i>	13
3.5.3. Integral $\int_{e_l} \varphi_i dS$ . . . . .	31
3.5.4. Integral $ e_l $ . . . . .	34
3.6. Formación de las matrices del sistema . . . . .	34
3.7. Malla de la implementación . . . . .	39
3.8. Sobre la solución del sistema lineal del MEF . . . . .	45
3.8.1. Características de las submatrices de $A$ . . . . .	45
3.8.1.1. Matriz $B$ . . . . .	45
3.8.1.2. Matriz $C$ . . . . .	57
3.8.2. Estrategia de solución del sistema . . . . .	61
<b>4. Resultados</b>	<b>64</b>
4.1. Datos de la simulación numérica . . . . .	64
4.2. Inclusiones consideradas y resultados . . . . .	68
4.3. Datos de ejecución del programa implementado . . . . .	81
<b>5. Discusión</b>	<b>86</b>
5.1. Sobre la estrategia propuesta . . . . .	86
<b>6. Conclusiones</b>	<b>92</b>

# CAPÍTULO 1

---

## Introducción

---

La tomografía de impedancia eléctrica es una técnica de formación de imágenes médicas en la cual se infiere la conductividad o permitividad de alguna parte de un cuerpo (humano) a partir de mediciones eléctricas en la superficie del cuerpo. Para recolectar datos, se colocan electrodos en la piel del paciente y se aplica corriente alterna a algunos electrodos, y se miden los voltajes eléctricos resultantes. Este proceso requiere diseño experimental para determinar que información es necesaria recolectar para inferir la conductividad en un caso determinado.

El problema de estimar la conductividad eléctrica a partir de mediciones de potencial en la superficie del cuerpo es un problema inverso no lineal y severamente mal planteado en el sentido de Hadamard. La formulación matemática de este problema se conoce en la literatura matemática de los problemas inversos como "Problema Inverso de Calderón". Este problema ha recibido mucha atención en diversas comunidades matemáticas. Se han establecido resultados de existencia y unicidad de soluciones [4].

En los últimos años ha habido un desarrollo importante de métodos estadísticos para problemas inversos [6], y existen diversas formulaciones Bayesianas de este problema [5]. Sin embargo, reconstruir la conductividad o permitividad de un cuerpo

sigue siendo un problema activo como tema de investigación [6, 7, 13].

Este trabajo de tesis tiene por objetivos hacer una formulación Bayesiana de la cuantificación de incertidumbre del problema de tomografía de impedancia eléctrica para el caso bidimensional y proponer métodos computacionalmente eficientes para resolver el problema directo asociado. El propósito de fondo es usarlos como herramienta para muestrear de la distribución posterior del problema de tomografía de impedancia eléctrica en búsqueda de información estadísticamente significativa. Adicionalmente, tenemos por objetivo implementar en Python las estrategias numéricas que se proponen y ver como funciona el código resultante cuando el dominio tiene presentes diferentes tipos de inclusiones, esto para tener idea de su funcionamiento e identificar los detalles relevantes para el problema inverso que pueden presentarse como resultado de la solución de múltiples problemas directos.

La tesis tiene la siguiente estructura: en el primer capítulo planteamos el problema de tomografía de impedancia eléctrica y hacemos una discusión acerca de lo que se entiende por cuantificación de incertidumbre en el contexto científico. Además, se introduce un modelo que describe la física del fenómeno. El segundo capítulo trata sobre el enfoque Bayesiano de problemas inversos y el método de elemento finito para aproximar la solución del problema directo para un dominio en el plano. Un algoritmo de como resolver el sistema lineal resultante es propuesto basándonos en el método de gradiente conjugado. Los resultados de implementar éste en Python, para un dominio particular y diferentes tipos de inclusiones, son mostrados en el capítulo tres. El cuarto capítulo es una discusión de como usar el algoritmo propuesto en la formulación Bayesiana y de sus principales ventajas. Finalmente, el último capítulo muestra las conclusiones de este trabajo.

---

# Índice de figuras

---

2.1. Paciente con electrodos alrededor del pecho . . . . .	5
2.2. Modelación computacional imperfecta . . . . .	8
3.1. Patrón base de la malla . . . . .	41
3.2. Triangulación de niveles I . . . . .	42
3.3. Triangulación de niveles II . . . . .	42
3.4. Prototipo de la malla . . . . .	43
3.5. Malla con electrodos . . . . .	44
3.6. Estructura de matriz $M$ . . . . .	54
3.7. Estructura de matriz $W,I$ . . . . .	55
3.8. Estructura de matriz $W,II$ . . . . .	56
3.9. Estructura de matriz $C$ . . . . .	60
4.1. Representación de los electrodos alrededor de $\Omega$ . . . . .	66
4.2. Perfil de voltaje. Caso H.1 . . . . .	70
4.3. Voltajes en electrodos. Caso H.1 . . . . .	70
4.4. Caso H.2a . . . . .	71
4.5. Perfil de voltaje. Caso H.2a . . . . .	71
4.6. Voltajes en electrodos. Caso H.2a . . . . .	71



4.7. Caso H.2b . . . . .	72
4.8. Caso H.2b . . . . .	73
4.9. Perfil de voltaje. Caso H.2b . . . . .	73
4.10. Discrepancias de voltaje para H.2a y H.2b . . . . .	74
4.11. Caso H.3a . . . . .	74
4.12. Perfil de voltaje. Caso H.3a . . . . .	75
4.13. Voltajes en electrodos. Caso H.3a . . . . .	75
4.14. Discrepancias de voltaje para H.2a y H.3a . . . . .	76
4.15. Caso H.3b . . . . .	76
4.16. Perfil de voltaje. Caso H.3b . . . . .	76
4.17. Voltajes en electrodos. Caso H.3b . . . . .	77
4.18. Discrepancias de voltaje para H.3a y H.3b . . . . .	78
4.19. Caso H.4 . . . . .	78
4.20. Perfil de voltaje. Caso H.4 . . . . .	79
4.21. Voltajes en electrodos. Caso H.4 . . . . .	79
4.22. Caso H.5 . . . . .	80
4.23. Perfil de voltaje. Caso H.5 . . . . .	80
4.24. Voltajes en electrodos. Caso H.5 . . . . .	81

---

# Índice de cuadros

---

4.1. Datos de la malla . . . . .	65
4.2. Impedancias de contacto . . . . .	67
4.3. Intensidades de corriente . . . . .	67
4.4. Tiempos de formación de las matrices del sistema . . . . .	82
4.5. Algunos tiempos de ejecución . . . . .	83
4.6. Iteraciones promedio del método GC . . . . .	83
4.7. Tiempos totales de ejecución . . . . .	84
4.8. Llamadas a función de la implementación . . . . .	85

# CAPÍTULO 2

---

## Planteamiento del problema

---

### 2.1. Tomografía de Impedancia Eléctrica

La impedancia eléctrica es una medida de la oposición de un cuerpo al flujo de corriente alterna. De forma dual, la conductividad eléctrica es la magnitud de aceptación a este flujo. Aunque se sabe que la propiedad de impedancia eléctrica varía dependiendo del tipo de objeto al que se le aplique corriente, algunos hechos importantes son conocidos tratándose de tejido biológico [1, 3]:

- Se encuentra estrechamente ligada a la frecuencia de corriente que se aplica.
- Está en función de la estructura del tejido en cuestión. En otras palabras, tejidos cuya conformación difiere presentan distintos valores de impedancia.
- Existen enfermedades (como cáncer de seno, piel, vejiga y cuello del útero) cuyos efectos cambian sustancialmente los valores de impedancia eléctrica entre tejido sano y enfermo. Es decir, esta magnitud física puede reflejar el estatus clínico de un tejido en estudio.

La información anterior sugiere que la aplicación de corriente alterna a un organismo (dentro de algún rango de frecuencias) y el estudio de sus datos de respuesta eléctrica puede servir para diferenciar entre tipos de tejidos. Además parece plausible usar las mediciones de impedancia eléctrica como un indicador de anomalías ocasionadas por enfermedades que alteran estructuralmente a los tejidos. Estas ideas son la base de la técnica de tomografía de impedancia eléctrica.

En términos precisos, dentro del contexto de formación de imágenes médicas, se busca generar un gráfico que describa de manera fidedigna el perfil de impedancia eléctrica de una sección del cuerpo humano donde se presumen anomalías de tejido (por ejemplo, un corte transversal del torso o seno). La idea es que esta imagen sirva como una herramienta auxiliar para el médico en el diagnóstico, como lo hacen las radiografías.

Con este propósito, varios electrodos son colocados alrededor de la sección del cuerpo humano que se desea estudiar y a través de ellos se aplican valores controlados de corriente. Después, los datos de la respuesta eléctrica provocada (voltaje) son recabados por estos dispositivos.



Figura 2.1: Paciente con electrodos alrededor del pecho

En contraste con otras técnicas que tienen el mismo propósito, la tomografía basada en impedancia eléctrica evita el uso de radiación. El proceso de hecho no usa sustancias que penetren físicamente el cuerpo del paciente, por lo que se considera no invasivo. Adicionalmente, el costo implicado es relativamente bajo.

Sin embargo, si bien es cierto que los datos recolectados por los electrodos contienen información del perfil de impedancia eléctrica en la región de interés, éstos no pueden ser tomados expresamente como válidos puesto que existe un error asociado a las mediciones. Ignorar esta circunstancia podría provocar que se ofrezca un diagnóstico completamente distinto al estatus clínico del paciente.

Nos encontramos pues ante la necesidad de adoptar un enfoque matemático que, además de ser capaz de hacer pronósticos de la condición clínica en una región basados en la información de los electrodos, permita cuantificar la incertidumbre presente. El propósito de este último punto es tener un indicador que permita determinar la efectividad y limitaciones de los pronósticos hechos. Este es el objetivo central del trabajo de tesis.

En la siguiente sección hablaremos con mayor profundidad del concepto de cuantificación de incertidumbre.

## 2.2. Cuantificación de Incertidumbre

Una ambiciosa meta de la ciencia es lograr hacer pronósticos de la realidad que aporten información relevante a la hora de tomar decisiones. Éstos buscan llevarse a cabo juiciosamente a través de la teoría científica y la observación del fenómeno de interés.

Desde el punto de vista de las matemáticas aplicadas, la teoría corresponde con las leyes de la física, biología y demás, que rigen al fenómeno y también a los modelos matemáticos, basados en estos principios, que son asociados a su descripción. Por su parte, las observaciones son los datos que tenemos disponibles sobre él a través de mediciones hechas con instrumentos.

Sin embargo, intentar hacer pronósticos de un fenómeno físico adoptando tal enfoque involucra fuentes de error e incertidumbre en múltiples partes del proceso. Estas se describen en términos generales a continuación:

- Los modelos matemáticos y las leyes que se usan para plantearlos son abstracciones de la realidad. Puede ocurrir que el modelo considerado sea formulado en términos de principios que no capturan con precisión la naturaleza del fenómeno por falta de información. Además, es frecuente que sus expresiones involucren parámetros de los cuales se tiene conocimiento incompleto o nulo. Es decir, existe un *error de modelación* inherente al usar este enfoque para describir la realidad.
- Las mediciones son contaminadas por imperfecciones en los instrumentos. Llevarlas a cabo requiere de un acertado diseño experimental para determinar cualitativa y cuantitativamente como se efectuará la recolección de los datos. Nos referiremos a este punto con el nombre de *error de observación*.

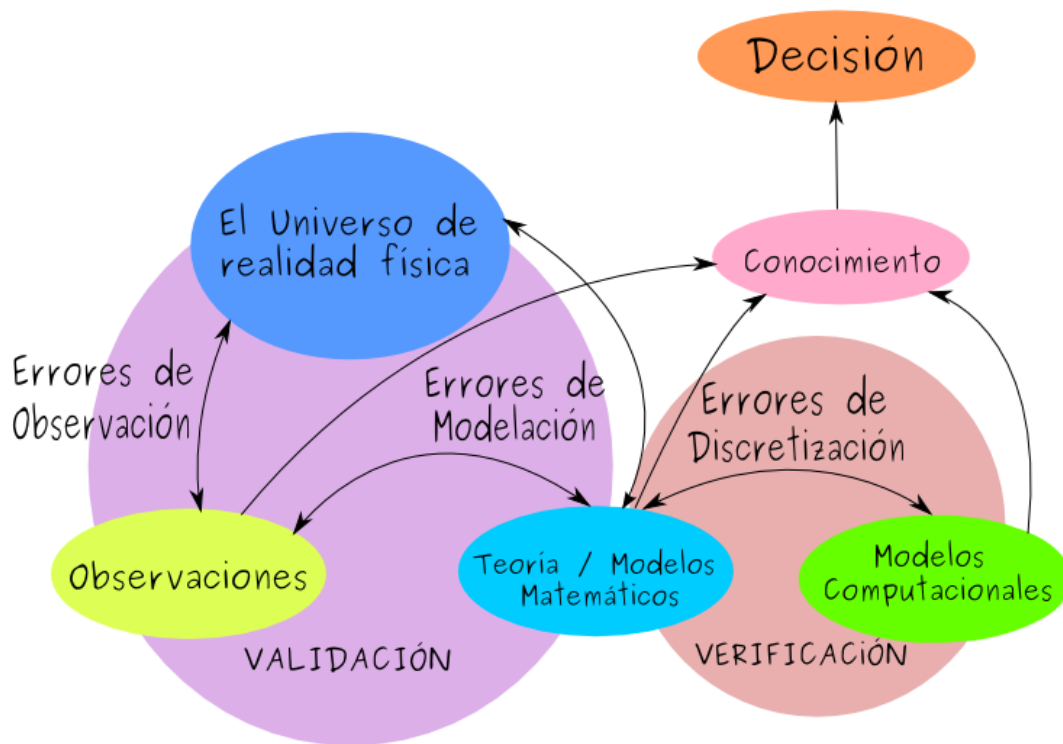


Figura 2.2: Modelación computacional imperfecta: Imperfecciones del modelo matemático, datos incompletos de las observaciones hechas con instrumentos imperfectos y corrupción del modelo al ser discretizado para hacer cálculos. Imagen tomada de [11]

- A menudo los modelos computacionales considerados (versiones discretas de los modelos matemáticos que permiten llevar a cabo cálculos en un ordenador) introducen errores a los resultados, aunados a los propios del uso de aritmética de punto flotante. El nombre con el que nos referiremos a este punto es *error de discretización*.

Todos estos factores de error e incertidumbre afectan cada aspecto del pronóstico que se desea hacer. Es necesario pues contar con un procedimiento sistemático para tratar la incertidumbre del modelo matemático asociado y de los datos, además de su propagación a través del modelo computacional con el objetivo de lograr buenos pronósticos del fenómeno de interés.

En el problema de tomografía de impedancia eléctrica nos interesa de hecho contar con una técnica que permita la *cuantificación de incertidumbre inversa*. Es decir, queremos una estrategia que, a partir de los datos experimentales y los resultados obtenidos mediante simulación computacional, estime la discrepancia entre el experimento y el modelo matemático. Además, también deseamos que sea capaz de hacer estimaciones de los parámetros desconocidos que aparecen en el modelo (ya que describen a la conductividad eléctrica  $\sigma$ ).

El desarrollo de teoría y metodologías de cuantificación inversa de incertidumbre es un área activa de investigación. Es importante señalar que en este rubro se enfrentan dos puntos notables: la identificabilidad de parámetros y la alta dimensionalidad de los problemas. Este último implica un fuerte costo computacional y hace necesario el diseño de métodos eficientes.

Para efectos de este trabajo, adoptaremos el paradigma Bayesiano de cuantificación inversa de incertidumbre. Este enfoque sugiere representarla en términos de probabilidad. Fundamentalmente, la probabilidad juega el papel de nuestra confianza en una afirmación, dada la información que tenemos disponible. Además, el Teorema de Bayes permite actualizar esa confianza (probabilidad) cuando nuevos datos están disponibles.

Nuestro objetivo bajo este enfoque es diseñar una estrategia que, usando un modelo matemático que capture fielmente la física del fenómeno, pueda ofrecer eficiencia computacional para lidiar con la alta dimensionalidad del problema. En la siguiente sección describiremos el modelo matemático que nos servirá como base.

### 2.3. Modelo matemático

En esta sección, vamos a introducir un modelo asociado al problema de tomografía de impedancia eléctrica, propuesto originalmente en [2]. Remarcamos que en este trabajo sólo abordaremos el caso bidimensional.

Representamos la parte del cuerpo en estudio como un dominio  $\Omega$  de  $\mathbb{R}^2$ . Este es pensado como un conjunto acotado cuyo complemento es conexo, que además cuenta con una frontera suave.



Vamos a suponer que los campos electromagnéticos que actúan en  $\Omega$  son armónicos en el tiempo y que sus frecuencias son bajas. En la aproximación cuasiestática éstos pueden ser descritos en términos de un potencial de voltaje escalar  $u$  que satisface la llamada **ecuación de conductividad**:

$$\nabla \cdot (\sigma \nabla u) = 0 \quad \text{en } \Omega. \quad (2.1)$$

Dentro de esta ecuación, la función  $\sigma : \Omega \rightarrow \mathbb{R}_+$  describe a la conductividad eléctrica, que, como fue mencionado, es una medida de la aceptación de  $\Omega$  al flujo de la corriente. Suponemos que este coeficiente pertenece a una clase admisible de funciones  $\mathcal{A} = \mathcal{A}(\Omega)$ , definida por las siguientes condiciones:

1. Para algún  $N \geq 1$  existe una familia  $\{\Omega_j\}_{j=1}^N$  de subconjuntos de  $\Omega$ , disjuntos a pares, que son abiertos y cuentan con una frontera suave a pedazos. Además cumplen

$$\bar{\Omega} = \bigcup_{j=1}^N \bar{\Omega}_j. \quad (2.2)$$

2. Para cada  $1 \leq j \leq N$  se tiene que

$$\sigma|_{\Omega_j} \in C(\bar{\Omega}_j). \quad (2.3)$$

3. Existen dos constantes  $c, C \in \mathbb{R}^+$  tales que

$$0 < c < \sigma(x) < C < \infty \quad \text{para } x \in \Omega. \quad (2.4)$$

En nuestro contexto los conjuntos  $\Omega_j$  pueden representar órganos o tejidos diferentes, en donde la conductividad es continua dentro de  $\Omega_j$  y hasta la frontera de este conjunto. Además, como corresponde a la realidad física, se toma que la magnitud  $\sigma$  de los tejidos es positiva y acotada dentro de ciertos valores.

Para describir la inyección de corriente y la medición de voltaje en la superficie del cuerpo, definimos porciones de  $\partial\Omega$

$$e_l \subset \partial\Omega \quad \text{para } 1 \leq l \leq L, \quad (2.5)$$

que representan a los electrodos. Dado que no queremos que éstos se empalmen, imponemos que cumplan:

$$\bar{e}_k \cap \bar{e}_l = \emptyset \text{ si } k \neq l. \quad (2.6)$$

Denotamos con las letras  $I_l$  y  $U_l$ , respectivamente, a la corriente y al voltaje producidos en  $e_l$ . Ambas magnitudes se suponen constantes en la superficie de cada electrodo. Suponemos que se satisface la ley de conservación para la corriente:

$$\text{Conservación de corriente} \quad \sum_{l=1}^L I_l = 0. \quad (2.7)$$

Por otro lado, mediante una adecuada elección de voltaje a tierra, es posible suponer:

$$\text{Elección de voltajes} \quad \sum_{l=1}^L U_l = 0. \quad (2.8)$$

La inyección de corriente en la superficie del cuerpo produce una densidad (de corriente). En la frontera del cuerpo, la expresión del vector normal hacia el interior correspondiente a dicha densidad, denotado por  $j$ , está dada por la ecuación:

$$j = \sigma \cdot \frac{\partial u}{\partial n} \text{ en } \partial\Omega \quad (2.9)$$

En términos de  $j$ , supondremos que cada electrodo satisface:

$$\int_{e_l} \sigma \frac{\partial u}{\partial n} dS = I_l; \quad 1 \leq l \leq L \quad (2.10)$$

y que fuera de los electrodos se cumple

$$\sigma \frac{\partial u}{\partial n} = 0 \text{ en } \Omega \setminus e_l, \quad 1 \leq l \leq L \quad (2.11)$$

Estas ecuaciones dicen que la densidad de corriente hace efecto exactamente en los electrodos adheridos a la frontera del cuerpo y que en la sección que está libre de ellos no existen pérdidas de corriente o fuentes.

Ahora añadiremos una ecuación para contar el efecto electroquímico inducido por el contacto entre el electrodo y el cuerpo. Esto se debe a la formación de una delgada capa, altamente resistiva, entre ambos. La impedancia de esta capa está

caracterizada por un número  $z_l > 0$  al que llamaremos **impedancia de contacto efectivo** o simplemente impedancia de contacto. La relación entre estas variables es

$$u + z_l \sigma \frac{\partial u}{\partial n} = U_l \quad \text{en } e_l, \quad 1 \leq l \leq L \quad (2.12)$$

En resumen, han sido establecidas las siguientes ecuaciones:

$$\begin{aligned} \nabla \cdot (\sigma \nabla u) &= 0 \quad \text{en } \Omega \\ \int_{e_l} \sigma \frac{\partial u}{\partial n} dS &= I_l; \quad 1 \leq l \leq L \\ \sigma \frac{\partial u}{\partial n} &= 0 \quad \text{en } \partial\Omega \setminus e_l, \quad 1 \leq l \leq L \\ u + z_l \sigma \frac{\partial u}{\partial n} &= U_l \quad \text{en } e_l, \quad 1 \leq l \leq L \\ \sum_{l=1}^L I_l &= 0 \quad \sum_{l=1}^L U_l = 0 \end{aligned} \quad (2.13)$$

Este modelo captura la física del fenómeno de inyección de corriente al cuerpo  $\Omega$ , en el sentido de que permite predecir los datos de voltaje con la precisión del sistema de medición [10].

En el resto del trabajo supondremos que un acertado diseño experimental, hecho previamente, nos brinda los datos de impedancia de contacto. Además, pensamos que se tiene un dispositivo que permite controlar los valores de corriente inyectada en los electrodos. En otras palabras, vamos a suponer que los datos  $z_1, \dots, z_L$  y  $I_1, \dots, I_L$  son conocidos.

Si tuviéramos bien caracterizada la conductividad  $\sigma$  del cuerpo, encontrar la función  $u$  dentro de  $\Omega$  y los valores  $U_1, \dots, U_L$  en los electrodos, descritos por (2.13), brindaría un pronóstico del perfil de voltaje dentro de la sección estudiada y de los datos recabados en cada  $e_l$ . Este es un problema de teoría de ecuaciones diferenciales parciales al que denominaremos **problema directo**.

Sin embargo, en general ignoramos el tipo de tejidos que integran al cuerpo en estudio y por ende, su perfil conductivo  $\sigma$ . De hecho, en el problema de tomografía

de impedancia, buscamos inferir información de la conductividad eléctrica de  $\Omega$  a partir de las mediciones de voltaje en los electrodos, usando (2.13). Este recibe el nombre de **problema inverso de Calderón**.

En el siguiente capítulo expondremos el enfoque Bayesiano para problemas inverso. También se mostrarán los materiales y métodos para resolver eficientemente el problema directo.

# CAPÍTULO 3

---

## Materiales y métodos

---

En este capítulo se tienen dos objetivos: describir el enfoque Bayesiano de cuantificación inversa de incertidumbre y proponer una técnica que permita aproximar la solución del problema directo de forma eficiente, para el caso bidimensional.

Este segundo punto lo llevamos acabo basándonos en el método elemento finito [8]. Tal procedimiento deriva en un sistema lineal cuyas entradas están dadas en términos de integrales. Por ello, discutimos esquemas que permiten su aproximación numérica. Probamos algunas propiedades de submatrices involucradas y proveemos esquemas para su formación. Además, proponemos un algoritmo de solución basado en el método de gradiente conjugado.

Mostramos también un esquema de malla cuando  $\Omega$  es un círculo centrado en el origen y discutimos la estructura de las matrices involucradas en el método de elemento finito para este ejemplo.

### 3.1. Enfoque Bayesiano

El enfoque Bayesiano se fundamenta en la teoría de inversión estadística. Tiene por objetivos extraer información y evaluar la incertidumbre acerca de las variables

basándose en el conocimiento adquirido en el proceso de medición y aprovechando lo que se sabe previamente acerca de las incógnitas y sus modelos. Los puntos principales de los que se parte son:

- Todas las variables incluidas en el modelo se representan como variables aleatorias.
- La aleatoriedad describe el grado de información que tenemos acerca de las realizaciones de estas variables aleatorias.
- El grado de información concerniente a estos valores se codifica en sus distribuciones de probabilidad.

Procederemos a describir como se interpreta el problema inverso desde esta perspectiva. Supondremos que todas las variables aleatorias que aparecen desde ahora son absolutamente continuas. Es decir, se pueden expresar en términos de una densidad de probabilidad. Estas se denotan con letras mayúsculas y sus realizaciones con minúsculas. Remarcamos que los parámetros del modelo se consideran también como variables aleatorias.

En nuestro contexto se cuentan con mediciones de una cantidad  $y \in \mathbb{R}^m$  que esta relacionada con otra cantidad de interés  $x \in \mathbb{R}^n$  que no podemos determinar directamente. Sin embargo, existe una relación entre estas que sí es conocida, a través de una función modelo  $f : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^k \rightarrow \mathbb{R}^m$

$$y = f(x, e)$$

donde  $e \in \mathbb{R}^k$  representa ruido en la medición. El problema de inverso consiste en determinar  $x$  a partir de  $y$ .

Definimos tres variables aleatorias  $Y \in \mathbb{R}^m$ ,  $X \in \mathbb{R}^n$  y  $E \in \mathbb{R}^k$  que serán asociadas, respectivamente, a las mediciones, la incógnita y el ruido. Pensaremos que los datos observados corresponden a una realización de  $Y$ , esto es  $Y = y_{obs}$ . Usando la función modelo, estas cumplen:

$$Y = f(X, E).$$

Esta expresión permite relacionar las funciones de densidad de las variables aleatorias involucradas.

Ahora bien, para el enfoque Bayesiano, la solución del problema de inversión es la distribución posterior  $\pi_{post}(x)$ . Ésta codifica la información de la incógnita respecto a las mediciones disponibles y la incertidumbre involucrada. El Teorema de Bayes nos ofrece una expresión de la posterior.

**Teorema 3.1 (Teorema de Bayes)** *Supongamos que la variable aleatoria  $X \in \mathbb{R}^n$  tiene una densidad de probabilidad  $\pi_{pr}(x)$  conocida y los datos  $y_{obs}$  corresponden a una realización de la variable aleatoria observable  $Y \in \mathbb{R}^m$  tal que  $\pi(y_{obs}) > 0$ . Entonces, la distribución de probabilidad posterior de  $X$  dados los datos  $y_{obs}$ , denotada  $\pi_{post}(x) := \pi(x|y_{obs})$ , tiene la expresión*

$$\pi_{post}(x) = \frac{\pi_{prior}(x) \cdot \pi(y_{obs}|x)}{\pi(y_{obs})}.$$

Las distribuciones  $\pi_{prior}(x)$  y  $\pi(y_{obs}|x)$  reciben los nombres, respectivamente, de distribución a priori y verosimilitud. La información previa que conocemos acerca de la incógnita está codificada en la primera. La segunda representa nuestro conocimiento acerca de como se relacionan los datos y la incógnita.

La distribución posterior debe ser explorada por algún método en búsqueda de información estadísticamente significativa para el problema. Los métodos Markov Chain Monte Carlo (MCMC) son útiles para tal efecto y serán el tema de la siguiente sección.

## 3.2. Métodos MCMC

En la sección pasada mostramos que, en el enfoque Bayesiano, la solución del problema de inversión es una distribución de probabilidad. Para obtener extraer información estadísticamente significativa debemos integrar numéricamente con respecto de ésta. Sin embargo, si el espacio de parámetros  $\mathbb{R}^n$  es demasiado grande, el uso de métodos de cuadratura es ineficiente desde el punto de vista numérico. Una buena alternativa son los métodos Markov Chain Monte Carlo (MCMC). Su idea

central es generar un muestra representativa de puntos  $\{x_1, \dots, x_N\} \subset \mathbb{R}^n$ , distribuidos de acuerdo a la medida  $\nu$  respecto a la que se integra, de tal manera que, por el Teorema del límite central, tengamos

$$\int_{\mathbb{R}^n} f(x)\nu(dx) \approx \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N f(x_i). \quad (3.1)$$

La muestra de puntos  $\{x_1, \dots, x_N\}$  se genera usando cadenas de Markov que satisfacen propiedades, respecto a  $\nu$  y al tipo de saltos, útiles para garantizar (3.1). Con esta técnica es posible aproximar eficientemente integrales en dimensiones altas. Dos métodos relevantes son Metropolis-Hastings y Gibbs Sampler [6].

### 3.3. Esquema del Método de Elemento Finito

Una sección del cuerpo humano puede presentar varios tipos de tejido con valores de conductividad muy diferentes entre sí. Esta observación nos obliga a presumir discontinuidades de la función  $\sigma$  sobre el dominio de interés. Se hace necesario entonces reinterpretar las soluciones del problema directo (2.13) en forma débil.

Suponiendo que la conductividad es parte de la clase admisible  $\mathcal{A}$ , descrita en la sección 2.3, el funcional

$$\mathcal{B}_{\sigma,z}((u, U), (v, V)) = \int_{\Omega} \sigma(\nabla u \cdot \nabla v) dx dy + \sum_{l=1}^L \frac{1}{z_l} \int_{e_l} (u - U_l)(v - V_l) dS \quad (3.2)$$

(donde  $v \in H^1(\Omega)$ ,  $V \in \mathbb{R}^L$ ) permite debilitar el sistema de ecuaciones en cuestión. En [9] y [10] fueron probados resultados de existencia y unicidad de la solución del problema directo en esta versión.

Una ventaja importante de este enfoque es que nos permite usar técnicas como el Método de Elemento Finito (MEF) con el propósito de aproximar la solución buscando dentro un espacio de dimensionalmente finito, digamos  $\text{Span}\{\varphi_i \mid 1 \leq i \leq \mathcal{N}\}$ . Usaremos tal estrategia para obtener una aproximación de la solución cuya expresión sea del estilo

$$u^h = \sum_{i=1}^{\mathcal{N}} \alpha_i \cdot \varphi_i \quad (3.3)$$



donde  $\{\varphi_i\}$  es un conjunto de funciones base relacionadas con la malla definida en el dominio, sobre un conjunto de  $\mathcal{N}$  nodos de interés. Como es usual en el MEF,  $h$  denota el tamaño de la malla a  $\Omega$ .

El voltaje en  $e_l$ , denotado  $U_l$ , será aproximado por la cantidad  $U_l^h$ , la cual corresponde con los valores de  $u^h$  en ese electrodo. Impondremos la condición de que el vector  $U^h = [U_1^h, \dots, U_{L-1}^h, U_L^h]^T$ , se describa como

$$U^h = \sum_{j=1}^{L-1} \beta_j \cdot n_j \quad (3.4)$$

donde

$$n_1 = [1, -1, 0, \dots, 0]^T, \dots, n_{L-1} = [1, 0, \dots, 0, -1]^T \in \mathbb{R}^L, \text{ etc.}$$

La expresión anterior se puede reescribir como

$$U_1^h = \sum_{j=1}^{L-1} \beta_j, \quad (3.5)$$

$$U_2^h = -\beta_1, \dots, U_L = -\beta_{L-1}. \quad (3.6)$$

Esto tiene como consecuencia que  $\sum_{l=1}^L U_l^h = 0$ .

Observemos en particular para  $\varphi_i, \varphi_j$  la expresión (3.2) es:

$$\mathcal{B}_{\sigma,z}((\varphi_i, U), (\varphi_j, V)) = \int_{\Omega} \sigma(\nabla\varphi_i \cdot \nabla\varphi_j) dx dy + \sum_{l=1}^L \frac{1}{z_l} \int_{e_l} (\varphi_i - U_l)(\varphi_j - V_l) dS$$

De acuerdo a lo expuesto en [12], los coeficientes (3.3) y (3.4), asociados al método de elemento finito, se pueden obtener mediante la solución del sistema lineal:

$$Ab = f, \quad (3.7)$$

donde  $A$  queda definida por cuatro submatrices

$$A = \begin{pmatrix} B & C \\ C^T & D \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{(\mathcal{N}+L-1) \times (\mathcal{N}+L-1)} \quad (3.8)$$

con  $B \in \mathbb{R}^{\mathcal{N} \times \mathcal{N}}$ ,  $C \in \mathbb{R}^{\mathcal{N} \times (L-1)}$  y  $D \in \mathbb{R}^{(L-1) \times (L-1)}$ .

La matriz  $B$  es la suma de un par de matrices  $M, W \in \mathbb{R}^{\mathcal{N} \times \mathcal{N}}$ , llamadas respectivamente **matriz de masas** y **matriz de rigidez**. Es decir

$$B = M + W \quad (3.9)$$

Las entradas de estas matrices tienen la expresión

$$M(i, j) = \sum_{l=1}^L \frac{1}{z_l} \int_{e_l} \varphi_i \varphi_j dS, \quad W(i, j) = \int_{\Omega} \sigma(\nabla \varphi_i \cdot \nabla \varphi_j) dx dy \quad 1 \leq i, j \leq \mathcal{N} \quad (3.10)$$

Por su parte,  $C$  y  $D$  están descritas como

$$C(i, j) = - \left( \frac{1}{z_1} \int_{e_1} \varphi_i dS - \frac{1}{z_{j+1}} \int_{e_{j+1}} \varphi_i dS \right); \quad (3.11)$$

en donde  $i = 1, \dots, \mathcal{N}, j = 1, \dots, L-1$

$$D(i, j) = \begin{cases} \frac{|e_1|}{z_1} & \text{si } i \neq j \\ \frac{|e_1|}{z_1} + \frac{|e_{j+1}|}{z_{j+1}} & \text{si } i = j \end{cases}; i, j = 1, \dots, L-1 \quad (3.12)$$

Por otro lado, el vector  $b \in \mathbb{R}^{\mathcal{N}+L-1}$  queda definido en términos de  $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_{\mathcal{N}})^T \in \mathbb{R}^{\mathcal{N}}$  y  $\beta = (\beta_1, \dots, \beta_{L-1})^T \in \mathbb{R}^{L-1}$  como

$$b = \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} \quad (3.13)$$

Finalmente, el vector  $f \in \mathbb{R}^{\mathcal{N}+L-1}$  está dado por  $\tilde{I} = (I_1 - I_2, \dots, I_1 - I_L)^T \in \mathbb{R}^{L-1}$  como

$$f = \begin{pmatrix} \mathbf{0} \\ \tilde{I} \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{\mathcal{N}+L-1} \quad (3.14)$$

### 3.4. Consideraciones y funciones lineales a pedazos

Para nuestro análisis consideramos los siguientes puntos:

- Tratamos solamente con casos bidimensionales, i.e., casos en que  $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ .
- La malla de  $\Omega$  para el MEF consta únicamente de elementos triangulares.
- Cada electrodo es representado como una poligonal contenida en la frontera de la malla, presumiblemente no cerrada, determinada por segmentos de recta que unen a varios nodos. Es términos precisos, cada electrodo  $e_l$  corresponde en la malla a una poligonal de la forma

$$[N_{r_1}^l, N_{r_2}^l] \cup [N_{r_2}^l, N_{r_3}^l] \cup \dots \cup [N_{r_{m-1}}^l, N_{r_m}^l]$$

donde  $[x, y]$  denota al segmento de recta que une a  $x$  con  $y$ .

- Las funciones  $\varphi_i$  que determinan a  $u^h$ , véase (3.3), son continuas en  $\Omega$  y lineales a pedazos. En otras palabras, suponemos que cada función  $\varphi_i$  es continua en el dominio y que sobre cada triángulo  $T$  de la malla tiene la expresión

$$\varphi_i(x, y) = a_{i,T} + b_{i,T}x + c_{i,T}y \text{ para } (x, y) \text{ en } T \quad (3.15)$$

- Las funciones  $\{\varphi_i\}_{i=1}^{\mathcal{N}}$  satisfacen:

$$\varphi_i(N_j) = \begin{cases} 1 & \text{si } i = j \\ 0 & \text{si } i \neq j \end{cases}; \quad 1 \leq i, j \leq \mathcal{N} \quad (3.16)$$

donde  $N_j$  denota el  $j$ -ésimo nodo de la malla. Conviene observar que esta condición implica

$$u^h(N_j) = \sum_{i=1}^{\mathcal{N}} \alpha_i \varphi_i(N_j) = \alpha_j.$$

Es decir, los coeficientes  $\alpha_j$  corresponden con la aproximación del voltaje en el nodo  $N_j$ .

Para la implementación será necesario tener a la mano una estrategia de cálculo de coeficientes de  $\varphi_i$  sobre cada triángulo. Esta será mostrada en la siguiente parte.

### 3.4.1. Funciones de forma y sus coeficientes

Consideremos a una función  $\varphi_i$  de la base elegida y a un triángulo  $T$  de la malla. Daremos el nombre de función de forma a la restricción de esta a  $T$ , es decir a la función  $\psi_\mu^T(x, y) = \varphi_i(x, y)|_{(x,y) \in T}$ . De acuerdo con las consideraciones hechas al inicio de la sección 3.4,  $\psi_\mu^T$  está definida por tres coeficientes que dependen de  $T$  de manera  $\psi_\mu^T(x, y) = a + bx + cy$  dentro de tal elemento. En esta parte del trabajo mostraremos como calcularlos en términos de los vértices de  $T$ .

Sea  $T$  un elemento de la malla y  $(x_1, y_1)$ ,  $(x_2, y_2)$  y  $(x_3, y_3)$  sus vértices. Consideremos a  $\varphi_1, \varphi_2$  y  $\varphi_3$ , las funciones asociadas a éstos. Si  $\psi_i^T$  es la función de forma asociada a  $\varphi_i$  en  $T$ , sabemos que para  $(x, y) \in T$  tenemos expresiones

$$\begin{aligned}\psi_1^T(x, y) &= a_1 + b_1x + c_1y, \\ \psi_2^T(x, y) &= a_2 + b_2x + c_2y, \\ \psi_3^T(x, y) &= a_3 + b_3x + c_3y.\end{aligned}\tag{3.17}$$

Por otro lado, echando mano de la condición (3.16), se tiene:

$$\psi_i^T(x_j, y_j) = \begin{cases} 1 & \text{si } i = j \\ 0 & \text{si } i \neq j \end{cases}; \quad i, j = 1, 2, 3\tag{3.18}$$

La combinación de (3.17) y (3.18) implica al sistema matricial

$$\begin{bmatrix} 1 & x_1 & y_1 \\ 1 & x_2 & y_2 \\ 1 & x_3 & y_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.\tag{3.19}$$

De aquí que si

$$Q = \begin{bmatrix} 1 & x_1 & y_1 \\ 1 & x_2 & y_2 \\ 1 & x_3 & y_3 \end{bmatrix}.$$

Entonces

$$Q^{-1} = \begin{bmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{bmatrix}.$$

Consecuentemente, la inversión de la matriz  $Q$  proporciona los coeficientes de  $\{\varphi_i\}_{i=1}^3$  referidos al triángulo  $T$ .

Antes de proseguir debemos hacer algunas observaciones técnicas:

1. Un resultado de geometría euclidiana garantiza que si los puntos  $(x_1, y_1)$ ,  $(x_2, y_2)$ ,  $(x_3, y_3)$  determinan un triángulo  $T$  en el plano, entonces su área, denotada por  $|T|$ , guarda la relación

$$2|T| = |\det(Q)|. \quad (3.20)$$

Además

$$|\det(Q)| = \left| \det \begin{bmatrix} 1 & x_1 & y_1 \\ 1 & x_2 & y_2 \\ 1 & x_3 & y_3 \end{bmatrix} \right| = |(x_1 - x_3)(y_2 - y_1) - (x_1 - x_2)(y_3 - y_1)| \quad (3.21)$$

2. Resolver la ecuación matricial (3.19) es equivalente a resolver

$$\begin{bmatrix} 1 & x_1 & y_1 \\ 1 & x_2 & y_2 \\ 1 & x_3 & y_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_1 \\ b_1 \\ c_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad (3.22)$$

$$\begin{bmatrix} 1 & x_1 & y_1 \\ 1 & x_2 & y_2 \\ 1 & x_3 & y_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_2 \\ b_2 \\ c_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad (3.23)$$

$$\begin{bmatrix} 1 & x_1 & y_1 \\ 1 & x_2 & y_2 \\ 1 & x_3 & y_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_3 \\ b_3 \\ c_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}. \quad (3.24)$$

3. La solución de los sistemas anteriores puede ser obtenida a través de la regla de Cramer. A saber

$$a_1 = \frac{\begin{vmatrix} 1 & x_1 & y_1 \\ 0 & x_2 & y_2 \\ 0 & x_3 & y_3 \end{vmatrix}}{|Q|}; b_1 = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 1 & y_1 \\ 1 & 0 & y_2 \\ 1 & 0 & y_3 \end{vmatrix}}{|Q|}; c_1 = \frac{\begin{vmatrix} 1 & x_1 & 1 \\ 1 & x_2 & 0 \\ 1 & x_3 & 0 \end{vmatrix}}{|Q|}; \quad (3.25)$$

$$a_1 = \frac{x_2y_3 - x_3y_2}{|Q|}; b_1 = \frac{y_2 - y_3}{|Q|}; c_1 = \frac{x_3 - x_2}{|Q|};$$

Análogamente

$$a_2 = \frac{x_3y_1 - x_1y_3}{|Q|}; b_2 = \frac{y_3 - y_1}{|Q|}; c_2 = \frac{x_1 - x_3}{|Q|};$$

$$a_3 = \frac{x_1y_2 - x_2y_1}{|Q|}; b_3 = \frac{y_1 - y_2}{|Q|}; c_3 = \frac{x_2 - x_1}{|Q|};$$

Las expresiones (3.20) y (3.21) junto con la discusión anterior permiten obtener fórmulas para calcular los coeficientes de (3.17) en  $T$ :

$$\begin{aligned} a_1 &= \frac{x_2y_3 - x_3y_2}{2|T|}, & b_1 &= \frac{y_2 - y_3}{2|T|}, & c_1 &= \frac{x_3 - x_2}{2|T|}, \\ a_2 &= \frac{x_3y_1 - x_1y_3}{2|T|}, & b_2 &= \frac{y_3 - y_1}{2|T|}, & c_2 &= \frac{x_1 - x_3}{2|T|}, \\ a_3 &= \frac{x_1y_2 - x_2y_1}{2|T|}, & b_3 &= \frac{y_1 - y_2}{2|T|}, & c_3 &= \frac{x_2 - x_1}{2|T|}. \end{aligned} \quad (3.26)$$

Esto se resume en el siguiente cuadro:

---

**Algorithm 1** Cálculo de los coeficientes de  $\varphi_i$  sobre  $T_k$ 


---

**Data:** Índice  $i$  y triángulo  $T_k$ **Result:** Coeficientes  $a, b, c$  de  $\varphi_i$  sobre  $T_k$ 1: Lista los vértices del triángulo donde  $T_k$ 

$$N_{j_1} = (x_1, y_1), \quad N_{j_2} = (x_2, y_2), \quad N_{j_3} = (x_3, y_3)$$

2: **if**  $i \in \{j_1, j_2, j_3\}$  **then**3:  $2|T| \leftarrow |(x_1 - x_3)(y_2 - y_1) - (x_1 - x_2)(y_3 - y_1)|$ 4: **if**  $i = j_1$  **then**

$$a_1 \leftarrow \frac{x_2 y_3 - x_3 y_2}{2|T|} \quad b_1 \leftarrow \frac{y_2 - y_3}{2|T|} \quad c_1 \leftarrow \frac{x_3 - x_2}{2|T|}$$

5: **else if**  $i = j_2$  **then**

$$a_2 \leftarrow \frac{x_3 y_1 - x_1 y_3}{2|T|} \quad b_2 \leftarrow \frac{y_3 - y_1}{2|T|} \quad c_2 \leftarrow \frac{x_1 - x_3}{2|T|}$$

6: **else**

$$a_3 \leftarrow \frac{x_1 y_2 - x_2 y_1}{2|T|} \quad b_3 \leftarrow \frac{y_1 - y_2}{2|T|} \quad c_3 \leftarrow \frac{x_2 - x_1}{2|T|}$$

7: **end if**8:  $a \leftarrow a_j, \quad b \leftarrow b_j, \quad c \leftarrow c_j$ 9: **else**10:  $a, b, c \leftarrow 0$ 11: **end if**


---

Más adelante usaremos las expresiones de los coeficientes de las funciones de forma definidas en esta sección para demostrar propiedades interesantes de las matrices de masas y de rigidez. También para proponer un algoritmo de formación para la implementación usando el mapeo de numeración local a global.

### 3.4.2. Otros resultados

Agregaremos tres resultados que serán de utilidad más adelante:

**Proposición 3.2** *Suponiendo que  $T_k$  es un triángulo no degenerado con vértices*

$$N_{k_1} = (x_1, y_1), \quad N_{k_2} = (x_2, y_2), \quad N_{k_3} = (x_3, y_3),$$

entonces  $\varphi_i$  se anula en  $T_k$  si  $i \notin \{k_1, k_2, k_3\}$ .

Tomemos  $i \notin \{k_1, k_2, k_3\}$ . En virtud de (3.16), sucede  $\varphi_i(N_{k_1}) = \varphi_i(N_{k_2}) = \varphi_i(N_{k_3}) = 0$ . Esto implica que si  $Q$  es la matriz definida en (3.25) con respecto a estos vértices y  $\eta = [a, b, c]^T$  es el vector de los coeficientes que definen a  $\varphi_i$  en  $T$ , entonces  $Q\eta = 0$ . Como los vértices del triángulo no son colineales se sigue que la matriz  $Q$  es invertible<sup>1</sup>, así  $\eta$  es cero.  $\square$

De la proposición anterior se desprende un resultado que involucra a dos funciones de la base:

**Proposición 3.3** *Suponiendo que  $T_k$  tiene por vértices a los puntos*

$$N_{k_1} = (x_1, y_1), \quad N_{k_2} = (x_2, y_2), \quad N_{k_3} = (x_3, y_3),$$

*entonces el producto de funciones  $\varphi_i \cdot \varphi_j$  se anula en  $T_k$ , si alguno de los índices  $i$  y  $j$  no pertenece al conjunto  $\{k_1, k_2, k_3\}$ .*

Vamos a demostrar otra proposición relativa al hecho de que  $\varphi_i$  se anule en dos nodos de la malla.

**Proposición 3.4** *Supongamos que se tienen dos nodos de la malla  $N_j$  y  $N_k$  de modo que el segmento que une a dichos puntos,  $[N_j, N_k]$ , es arista de un elemento  $T$ . Si se cumple que  $\varphi_i(N_j) = \varphi_i(N_k) = 0$  entonces  $\varphi_i$  es la constante cero sobre  $[N_j, N_k]$ .*

Supongamos que sobre  $T$  la función  $\varphi_i(x, y) = a + bx + cy$  y que  $N_k = (x_k, y_k)$  y  $N_j = (x_j, y_j)$ . Tomemos  $t \in [0, 1]$ . Observando que si  $x = (x_1, x_2)$  y  $y = (y_1, y_2)$  entonces

$$\begin{aligned} \varphi_i(x + t(y - x)) &= \varphi_i(x_1 + t(y_1 - x_1), x_2 + t(y_2 - x_2)) \\ &= a + b[x_1 + t(y_1 - x_1)] + c[x_2 + t(y_2 - x_2)] \\ &= (a + bx_1 + cx_2) + t[b(y_1 - x_1) + c(y_2 - x_2)] \\ &= \varphi_i(x) + t \cdot [\varphi_i(y) - \varphi_i(x)]. \end{aligned}$$

---

<sup>1</sup>Véase por ejemplo en [en.wikipedia.org/wiki/Collinearity](http://en.wikipedia.org/wiki/Collinearity)



Dado que todo punto del segmento  $[N_j, N_k]$  es de la forma  $N_j + t(N_k - N_j)$ ,  $t \in [0, 1]$ , se tiene por lo anterior

$$\varphi_i(N_j + t(N_k - N_j)) = \varphi_i(N_j) + t \cdot (\varphi_i(N_k) - \varphi_i(N_j)) = 0.$$

Así  $\varphi_i$  se anula sobre el segmento de recta  $[N_j, N_k]$ .  $\square$

### 3.5. Aproximaciones numéricas de las integrales

De acuerdo a la sección 3.3, las integrales que aparecen en el proceso del MEF y que debemos aproximar numéricamente para la implementación son

$$\int_{\Omega} \sigma \cdot (\nabla \varphi_i \cdot \nabla \varphi_j) \, dx \, dy \quad (3.27)$$

$$\int_{e_i} \varphi_i \varphi_j \, dS \quad (3.28)$$

$$\int_{e_i} \varphi_i \, dS \quad (3.29)$$

$$|e_i| := \int_{e_i} 1 \, dS \quad (3.30)$$

En las siguientes secciones mostramos esquemas para llevar a cabo este propósito.

#### 3.5.1. Integral $\int_{\Omega} \sigma \cdot \nabla \varphi_i \cdot \nabla \varphi_j \, dx \, dy$

Primero trataremos el caso de una aproximación numérica

$$\int_T \sigma \cdot \nabla \varphi_i \cdot \nabla \varphi_j \, dx \, dy. \quad (3.31)$$

Una manera de aproximar la integral de una función regular  $f$  sobre el triángulo  $T$  es usar la regla de cuadratura:

$$\int_T f \, dx \, dy \approx |T| \cdot f(\bar{x}, \bar{y}) \quad (3.32)$$

cuyo orden es 1, es decir, ésta integra exactamente polinomios de grado 1.

La expresión  $(\bar{x}, \bar{y})$  denota el *centroide* del triángulo. Este punto notable de  $T$  se puede localizar con sus vértices  $N_1, N_2, N_3$  mediante la relación:

$$(\bar{x}, \bar{y}) = \frac{N_1 + N_2 + N_3}{3}.$$

Usaremos pues la regla de cuadratura (3.32) para aproximar  $\int_T \sigma \cdot \nabla \varphi_i \cdot \nabla \varphi_j dx$ . Para ello, observemos que por (3.15) se sigue que  $\nabla \varphi_i = (b_i, c_i)$  sobre un elemento  $T$  y en consecuencia  $\nabla \varphi_i \cdot \nabla \varphi_j = b_i b_j + c_i c_j$ . Hemos establecido

$$\begin{aligned} \int_T \sigma \nabla \varphi_i \cdot \nabla \varphi_j dx dy &= (\nabla \varphi_i \cdot \nabla \varphi_j) \int_T \sigma dx dy \approx (b_i b_j + c_i c_j) |T| \sigma(\bar{x}, \bar{y}) \\ \int_T \sigma \nabla \varphi_i \cdot \nabla \varphi_j dx dy &\approx (b_i b_j + c_i c_j) \cdot |T| \cdot \sigma(\bar{x}, \bar{y}) \end{aligned} \quad (3.33)$$

La discusión anterior puede ser resumida en el siguiente cuadro:

---

**Algorithm 2** Aproximación numérica de  $\int_{T_k} \sigma \nabla \varphi_i \cdot \nabla \varphi_j dx dy$

---

**Data:** Índices  $i, j$  y triángulo  $T_k$

**Result:** Aproximación numérica de  $I = \int_{T_k} \sigma \nabla \varphi_i \cdot \nabla \varphi_j dx dy$

1: Lista los vértices del triángulo  $T_k$ :

$$N_{k_1} = (x_1, y_1), \quad N_{k_2} = (x_2, y_2), \quad N_{k_3} = (x_3, y_3)$$

2: **if**  $\{i, j\} \subseteq \{k_1, k_2, k_3\}$  **then**

3:     Calcula los coeficientes de  $\varphi_i$  en  $T_k$  usando **algoritmo 1**

4:     Calcula los coeficientes de  $\varphi_j$  en  $T_k$  usando **algoritmo 1**

5:      $\nabla \varphi_i \cdot \nabla \varphi_j \leftarrow b_i b_j + c_i c_j$

6:      $|T_k| \leftarrow \frac{1}{2} |(x_1 - x_3)(y_2 - y_1) - (x_1 - x_2)(y_3 - y_1)|$  ▷ Área de  $T_k$

7:      $(\bar{x}, \bar{y}) \leftarrow \frac{1}{3}(N_{k_1} + N_{k_2} + N_{k_3})$  ▷ Centroide de  $T_k$

8:      $\sigma_c := \sigma(\bar{x}, \bar{y})$  ▷ Valor de  $\sigma$  en el centroide de  $T_k$

9:      $I \leftarrow \sigma_c \cdot (\nabla \varphi_i \cdot \nabla \varphi_j) \cdot |T_k|$  ▷ Regla de Cuadratura

10: **else**

11:      $I \leftarrow 0$

12: **end if**

---

Ahora nos ocuparemos de la aproximación numérica de (3.27). Su valor es aproximado al de la integral de la misma función sobre la región definida por la malla

del MEF. Por teoría integración, esta última se puede descomponer como la suma de las aportaciones de cada triángulo. Es decir, podemos pensar que

$$\int_{\Omega} \sigma(\nabla\varphi_i \cdot \nabla\varphi_j) dx dy \approx \sum_{T \in \mathcal{T}} \int_T \sigma(\nabla\varphi_i \cdot \nabla\varphi_j) dx dy,$$

donde  $\mathcal{T}$  denota el conjunto de elementos de la malla. Este argumento permite expresar la aproximación de  $\int_{\Omega} \sigma(\nabla\varphi_i \cdot \nabla\varphi_j) dx dy$  en términos de integrales sobre los elementos de la malla, las cuales podemos calcular por lo expuesto al inicio de esta sección.

### 3.5.2. Integral $\int_{e_l} \varphi_i \varphi_j dS$

Consideraremos en primera instancia el cálculo de esta integral sobre el segmento que une a dos nodos de la malla  $x$  y  $y$ , denotado como  $[x, y]$ , suponiendo que se encuentra contenido en la frontera que esta define. Denotamos

$$I_{ij} := \int_{[x,y]} \varphi_i \varphi_j dS$$

Esta integral tiene una forma paramétrica:

$$I_{ij} := \int_0^1 \varphi_i(x + t(y - x)) \varphi_j(x + t(y - x)) \cdot |y - x| dt$$

$$I_{ij} := |y - x| \cdot \int_0^1 \varphi_i(x + t(y - x)) \varphi_j(x + t(y - x)) dt$$

Como los nodos  $x$  y  $y$  están en la frontera de la malla, existe un único nodo  $z$  tal que los puntos  $x$ ,  $y$  y  $z$  determinan un elemento  $T := T(x, y)$  con  $[x, y] \subseteq T$ . Usando el **Algoritmo 1** es posible calcular los coeficientes de la expresión

$$\varphi_i(u, v) = a + bu + cv \quad \text{y} \quad \varphi_j(u, v) = \alpha + \beta u + \gamma v$$

sobre  $T$  y en consecuencia sobre  $[x, y]$ .

De este modo si  $x = (x_1, x_2)$  y  $y = (y_1, y_2)$  entonces

$$\begin{aligned} \varphi_i(x + t(y - x)) &= \varphi_i(x_1 + t(y_1 - x_1), x_2 + t(y_2 - x_2)) \\ &= a + b[x_1 + t(y_1 - x_1)] + c[x_2 + t(y_2 - x_2)] \\ &= (a + bx_1 + cx_2) + t[b(y_1 - x_1) + c(y_2 - x_2)] \\ &= \varphi_i(x) + t \cdot [\varphi_i(y) - \varphi_i(x)] \end{aligned}$$

Análogamente

$$\varphi_j(x + t(y - x)) = \varphi_j(x) + t \cdot [\varphi_j(y) - \varphi_j(x)]$$

De este modo

$$\begin{aligned}
 \varphi_i(x + t(y - x))\varphi_j(x + t(y - x)) &= \varphi_i(x)\varphi_j(x) \\
 &+ t \cdot [\varphi_i(x)(\varphi_j(y) - \varphi_j(x)) + \varphi_j(x)(\varphi_i(y) - \varphi_i(x))] \\
 &+ t^2(\varphi_i(y) - \varphi_i(x))(\varphi_j(y) - \varphi_j(x))
 \end{aligned}$$

Consecuentemente

$$\begin{aligned}
 \int_0^1 \varphi_i(x + t(y - x))\varphi_j(x + t(y - x))dt &= \varphi_i(x)\varphi_j(x) \\
 &+ \frac{1}{2} \cdot [\varphi_i(x)(\varphi_j(y) - \varphi_j(x)) + \varphi_j(x)(\varphi_i(y) - \varphi_i(x))] \\
 &+ \frac{1}{3} \cdot (\varphi_i(y) - \varphi_i(x))(\varphi_j(y) - \varphi_j(x))
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 I_{ij} &= |y - x|\varphi_i(x)\varphi_j(x) + \frac{|y - x|}{2} \cdot [\varphi_i(x)(\varphi_j(y) - \varphi_j(x)) + \varphi_j(x)(\varphi_i(y) - \varphi_i(x))] \\
 &+ \frac{|y - x|}{3} \cdot (\varphi_i(y) - \varphi_i(x))(\varphi_j(y) - \varphi_j(x))
 \end{aligned}$$

La discusión anterior permite plantear el **Algoritmo 3** para el cálculo de la integral.

Ahora vamos a describir un algoritmo para el cálculo de la integral  $\int_{e_l} \varphi_i \varphi_j dS$ . Supongamos el electrodo  $e_l$  es representado en la malla como un poligonal de la forma

$$[N_{r_1}^l, N_{r_2}^l] \cup [N_{r_2}^l, N_{r_3}^l] \cup \dots \cup [N_{r_{m-1}}^l, N_{r_m}^l]$$

Esta expresión permite aproximar la integral de interés usando el cálculo de integrales sobre segmentos

$$\int_{e_l} \varphi_i \cdot \varphi_j dS \approx \sum_{q=1}^{m-1} \int_{[N_{r_q}^l, N_{r_{q+1}}^l]} \varphi_i \cdot \varphi_j dS$$

Este proceso puede llevarse a cabo a través del **Algoritmo 3**. Tal argumento es expuesto en el **Algoritmo 4**.

---

**Algorithm 3** Aproximación numérica de  $\int_{[N_r, N_s]} \varphi_i \varphi_j dS$

---

**Data:** Índices  $i, j$  y nodos  $N_r, N_s$  de la malla

**Result:** Aproximación numérica  $I_{ij} = \int_{[N_r, N_s]} \varphi_i \varphi_j dS$

- 1: Calcula  $|N_s - N_r|$
- 2: Usando (3.16) calcula

$$\varphi_i(N_r), \quad \varphi_i(N_s), \quad \varphi_j(N_r), \quad \varphi_j(N_s).$$

3:

$$\begin{aligned} I_{ij} &\leftarrow |N_s - N_r| \cdot \varphi_i(N_r) \varphi_j(N_r) \\ &+ \frac{|N_s - N_r|}{2} \cdot [\varphi_i(N_r)(\varphi_j(N_s) - \varphi_j(N_r)) + \varphi_j(N_r)(\varphi_i(N_s) - \varphi_i(N_r))] \\ &+ \frac{|N_s - N_r|}{3} \cdot (\varphi_i(N_s) - \varphi_i(N_r))(\varphi_j(N_s) - \varphi_j(N_r)) \end{aligned}$$


---

---

**Algorithm 4** Aproximación numérica de  $I$

---

**Data:** Índices  $i, j$  y electrodo  $e_l$

**Result:** Aproximación numérica de  $I := \int_{e_l} \varphi_i \varphi_j dS$

- 1: Lista los vértices de  $e_l$ :

$$N_{r_1}^l, \dots, N_{r_m}^l$$

▷ El electrodo  $e_l$  está definido como la unión de poligonales

$$e_l = [N_{r_1}^l, N_{r_2}^l] \cup \dots \cup [N_{r_{m-1}}^l, N_{r_m}^l]$$

- 2:  $I \leftarrow 0$
- 3: **for**  $q \in \{1, \dots, m-1\}$  **do**
- 4:     Calcula  $\int_{[N_{r_q}^l, N_{r_{q+1}}^l]} \varphi_i \varphi_j dS$  usando el **Algoritmo 3**
- 5:

$$I \leftarrow I + \int_{[N_{r_q}^l, N_{r_{q+1}}^l]} \varphi_i \varphi_j dS$$

6: **end for**

---

### 3.5.3. Integral $\int_{e_l} \varphi_i dS$

Análogo al caso tratado anteriormente, primero abordaremos la integral de la función sobre un segmento de recta  $[x, y]$  contenido en la frontera de ésta, definido

por dos de sus nodos,  $x$  y  $y$ . Es decir, nos ocuparemos de la integral  $I_{ij} := \int_{[x,y]} \varphi_i dS$ . Esta se puede representar de forma paramétrica

$$I_{ij} := \int_0^1 \varphi_i(x + t(y - x)) \cdot |y - x| dt$$

$$I_{ij} = |y - x| \cdot \int_0^1 \varphi_i(x + t(y - x)) dt$$

Dado que  $x$  y  $y$  se encuentran en la frontera de la malla existe un único nodo  $z$  tal que los puntos  $x$ ,  $y$  y  $z$  determinan un elemento  $T := T(x, y)$  con  $[x, y] \subseteq T$ . Usando el **Algoritmo 1** es posible calcular los coeficientes de la expresión

$$\varphi_i(u, v) = a + bu + cv$$

sobre  $T$  y en consecuencia sobre  $[x, y]$ .

Por otro lado, si  $x = (x_1, x_2)$  y  $y = (y_1, y_2)$  entonces

$$\begin{aligned} \varphi_i(x + t(y - x)) &= \varphi_i(x_1 + t(y_1 - x_1), x_2 + t(y_2 - x_2)) \\ &= a + b[x_1 + t(y_1 - x_1)] + c[x_2 + t(y_2 - x_2)] \\ &= (a + bx_1 + cx_2) + t[b(y_1 - x_1) + c(y_2 - x_2)] \\ &= \varphi_i(x) + t \cdot [\varphi_i(y) - \varphi_i(x)] \end{aligned}$$

De este modo

$$\int_0^1 \varphi_i(x + t(y - x)) dt = \varphi_i(x) + \frac{1}{2} \cdot (\varphi_i(y) - \varphi_i(x))$$

$$I_{ij} = |y - x| \cdot \left[ \varphi_i(x) + \frac{1}{2} \cdot (\varphi_i(y) - \varphi_i(x)) \right]$$

La discusión anterior se resume en el siguiente cuadro:

Ahora describiremos un esquema para aproximar la integral  $\int_{e_l} \varphi_i dS$ . Supongamos que el electrodo  $e_l$  se representa en la malla como la poligonal

$$[N_{r_1}^l, N_{r_2}^l] \cup [N_{r_2}^l, N_{r_3}^l] \cup \dots \cup [N_{r_{m-1}}^l, N_{r_m}^l]$$

---

**Algorithm 5** Aproximación numérica de  $I$ 

---

**Data:** Índice  $i$  y nodos  $N_r, N_s$  de la malla**Result:** Aproximación numérica de  $I = \int_{[N_r, N_s]} \varphi_i dS$ 

- 1: Calcula  $|N_s - N_r|$
- 2: Usando (3.16) calcula

$$\varphi_i(N_r), \quad \varphi_i(N_s)$$

3:

$$I \leftarrow |N_s - N_r| \cdot \left[ \varphi_i(N_r) + \frac{1}{2} \cdot (\varphi_i(N_s) - \varphi_i(N_r)) \right]$$


---

Entonces

$$\int_{e_l} \varphi_i dS \approx \sum_{q=1}^{m-1} \int_{[N_{r_q}^l, N_{r_{q+1}}^l]} \varphi_i dS$$

Esta ecuación muestra que para obtener una aproximación de  $\int_{e_l} \varphi_i dS$  basta calcular un número finito de integrales sobre segmentos. Esto ya sabemos hacerlo mediante el algoritmo descrito en la primera parte de esta sección. El cuadro muestra como proceder:

---

**Algorithm 6** Aproximación numérica de  $\int_{e_l} \varphi_i dS$ 

---

**Data:** Índice  $i$  y electrodo  $e_l$ **Result:** Aproximación numérica de  $I := \int_{e_l} \varphi_i dS$ 

- 1: Lista los vértices de
- $e_l$
- :

$$N_{r_1}^l, \dots, N_{r_m}^l$$

▷ El electrodo  $e_l$  esta definido como la unión de poligonales

$$e_l = [N_{r_1}^l, N_{r_2}^l] \cup \dots \cup [N_{r_{m-1}}^l, N_{r_m}^l]$$

2:  $I \leftarrow 0$ 3: **for**  $q \in \{1, \dots, m-1\}$  **do**4:     Calcula la integral  $\int_{[N_{r_q}^l, N_{r_{q+1}}^l]} \varphi_i dS$  usando el **Algoritmo 5**

5:

$$I \leftarrow I + \int_{[N_{r_q}^l, N_{r_{q+1}}^l]} \varphi_i dS$$

6: **end for**

---



### 3.5.4. Integral $|e_l|$

El hecho de que  $e_l$  sea representado por una poligonal de la forma

$$[N_{r_1}^l, N_{r_2}^l] \cup [N_{r_2}^l, N_{r_3}^l] \cup \dots \cup [N_{r_{m-1}}^l, N_{r_m}^l]$$

facilita aproximar  $|e_l|$  como la longitud total de esta. Este valor coincide con la suma de las longitudes de los segmentos de recta que lo forman. Es decir

$$|e_l| \approx \sum_{i=1}^{l-1} |[N_i, N_{i+1}]| = \sum_{i=1}^{l-1} d(N_i, N_{i+1}).$$

Dicha observación se explota en el siguiente cuadro:

---

**Algorithm 7** Aproximación numérica de  $|e_l|$

---

**Data:** Índice electrodo  $e_l$

**Result:** Aproximación numérica de  $I = |e_l| = \int_{e_l} 1 dS$

1: Lista los vértices de  $e_l$ :

$$N_{r_1}^l, \dots, N_{r_m}^l$$

▷ El electrodo  $e_l$  esta definido como la unión de poligonales

$$e_l = [N_{r_1}^l, N_{r_2}^l] \cup \dots \cup [N_{r_{m-1}}^l, N_{r_m}^l]$$

2:  $I \leftarrow 0$

3: **for**  $q \in \{1, \dots, m-1\}$  **do**

4:  $d(N_{r_q}^l, N_{r_{q+1}}^l) \leftarrow \|N_{r_q}^l - N_{r_{q+1}}^l\|_2$

5:

$$I \leftarrow I + d(N_{r_q}^l, N_{r_{q+1}}^l)$$

6: **end for**

---

Los esquemas de aproximación de las integrales que han sido descritos dan pie a proponer técnicas para formar a las matrices  $M, W, B, C$  y  $D$ . Esto será el tema de la próxima sección.

## 3.6. Formación de las matrices del sistema

Los **Algoritmos** 6 y 7 permiten definir las entradas de  $C$  y  $D$  como se muestra a continuación:

---

**Algorithm 8** Armado la matriz  $C$

---

**Data:** Número de nodos  $\mathcal{N}$ , número de electrodos  $L$

**Result:** Matriz  $C$

- 1:  $C \leftarrow \mathbf{0} \in \mathbb{R}^{\mathcal{N} \times L-1}$
  - 2: **for**  $1 \leq i \leq \mathcal{N}$  **do**
  - 3:     **for**  $1 \leq j \leq L-1$  **do**
  - 4:         Calcula la aproximación  $A_{ij}^l$  de  $\int_{e_1} \varphi_i dS$  usando el **Algoritmo 6**.
  - 5:         Calcula la aproximación  $B_{ij}^l$  de  $\int_{e_{j+1}} \varphi_i dS$  usando el **Algoritmo 6**.
  - 6:          $C_{ij} \leftarrow C_{ij} - \frac{A_{ij}}{z_1} + \frac{B_{ij}}{z_{j+1}}$
  - 7:     **end for**
  - 8: **end for**
- 

---

**Algorithm 9** Armado la matriz  $D$

---

**Data:** número de electrodos  $L$

**Result:** Matriz  $D$

- 1:  $D \leftarrow \mathbf{1} \in \mathbb{R}^{L-1 \times L-1}$ ,  $\mathbf{1}$  matriz con todas las entradas igual a 1.
  - 2: Calcula la aproximación  $I$  de  $|e_1|$  usando el **Algoritmo 7**
  - 3:  $D \leftarrow I * D$
  - 4: **for**  $1 \leq i \leq L-1$  **do**
  - 5:     Calcula la aproximación  $J$  de  $|e_{j+1}|$  usando el **Algoritmo 7**
  - 6:      $D_{ii} \leftarrow D_{ii} + \frac{J}{z_{j+1}}$
  - 7: **end for**
-

Por otro lado, el **Algoritmo 10** es una estrategia de como formar a  $M$  usando el **Algoritmo 4** y aprovechando que las entradas de la matriz de rigidez cumplen  $M_{ij} = M_{ji}$ .

---

**Algorithm 10** Armado la matriz de masas  $M$

---

**Data:** Número de nodos  $\mathcal{N}$ , número de electrodos  $L$

**Result:** Matriz de masas  $M$

```

1:  $M \leftarrow \mathbf{0} \in \mathbb{R}^{\mathcal{N} \times \mathcal{N}}$ 
2: for  $1 \leq i \leq \mathcal{N}$  do
3:   for  $i \leq j \leq \mathcal{N}$  do
4:     for  $1 \leq l \leq L$  do ▷ Aproxima  $\sum_{l=1}^L \frac{1}{z_l} \int_{e_l} \varphi_i \varphi_j dS$ 
5:       Calcula la aproximación  $I_{ij}^l$  de  $\int_{e_l} \varphi_i \varphi_j dS$  usando el Algoritmo 4
6:        $M_{ij} \leftarrow M_{ij} + \frac{1}{z_l} I_{ij}^l$ 
7:     end for
8:      $M_{ji} \leftarrow M_{ij}$  ▷ Llena entrada simétrica,  $M = M^T$ 
9:   end for
10: end for

```

---

La técnica para formar la matriz  $W$  será un poco distinta a las anteriormente presentadas. Fundamentalmente nos basaremos en la propiedad

$$W_{ij} = \int_{\Omega} \sigma(\nabla \varphi_i \cdot \nabla \varphi_j) dx dy \approx \sum_{T \in \mathcal{T}} \int_T \sigma(\nabla \varphi_i \cdot \nabla \varphi_j) dx dy$$

donde  $\mathcal{T}$  representa al conjunto de elementos de la malla. Notemos que en particular la expresión anterior dice que calculando los valores de las integrales en cada triángulo se puede obtener una aproximación de  $W_{ij}$ .

Supongamos que tenemos a un elemento  $T$  con vértices  $(x_1, y_1)$ ,  $(x_2, y_2)$  y  $(x_3, y_3)$  que corresponden a los nodos  $N_j$ ,  $N_k$  y  $N_l$ , respectivamente. Del mismo modo supongamos que las funciones asociadas a los nodos son  $\varphi_1, \varphi_2$  y  $\varphi_3$ , en mismo el orden descrito.

De acuerdo a que  $\varphi_i$  lineal sobre  $T$ , tenemos la expresión de su gradiente  $\nabla \varphi_i = [b_i, c_i]$  para cada  $i = 1, 2, 3$  sobre dicho elemento. Denotaremos  $\bar{\sigma} := \sigma(\bar{x})$ , donde  $\bar{x}$  es el centroide de triángulo.

Definimos la matriz de rigidez local de  $T$ ,  $W^T$ , como

$$W^T = \begin{bmatrix} \int_T \sigma(\nabla\varphi_1 \cdot \nabla\varphi_1)dx & \int_T \sigma(\nabla\varphi_1 \cdot \nabla\varphi_2)dx & \int_T \sigma(\nabla\varphi_1 \cdot \nabla\varphi_3)dx \\ \int_T \sigma(\nabla\varphi_2 \cdot \nabla\varphi_1)dx & \int_T \sigma(\nabla\varphi_2 \cdot \nabla\varphi_2)dx & \int_T \sigma(\nabla\varphi_2 \cdot \nabla\varphi_3)dx \\ \int_T \sigma(\nabla\varphi_3 \cdot \nabla\varphi_1)dx & \int_T \sigma(\nabla\varphi_3 \cdot \nabla\varphi_2)dx & \int_T \sigma(\nabla\varphi_3 \cdot \nabla\varphi_3)dx \end{bmatrix}$$

Usando la regla de cuadratura de la sección 3.5.1 podemos escribir

$$W^T \approx \bar{\sigma} \cdot |T| \cdot \begin{bmatrix} b_1^2 + c_1^2 & b_1b_2 + c_1c_2 & b_1b_3 + c_1c_3 \\ b_2b_1 + c_2c_1 & b_2^2 + c_2^2 & b_2b_3 + c_2c_3 \\ b_3b_1 + c_3c_1 & b_3b_2 + c_3c_2 & b_3^2 + c_3^2 \end{bmatrix}$$

De este modo, si definimos el mapeo de numeración local al global  $loc2glob^T$  que se encargue de traducir la numeración local de los nodos del triángulo  $T$  en la que se tiene de manera global, es decir, la función:

$$\begin{aligned} loc2glob^T : [1, 2, 3] &\rightarrow [i, j, k] \\ 1 &\mapsto i \\ 2 &\mapsto j \\ 3 &\mapsto k \end{aligned}$$

podemos escribir

$$\sum_{T \in \mathcal{T}} W_{\delta_T(i), \delta_T(j)}^T \approx \sum_{T \in \mathcal{T}} \int_T \sigma(\nabla\varphi_i \cdot \nabla\varphi_j)dx \approx W_{ij}$$

donde  $\delta_T(i) = [loc2glob^T]^{-1}(i)$ ,  $\delta_T(j) = [loc2glob^T]^{-1}(j)$

Es decir

$$W_{ij} \approx \sum_{K \in \mathcal{T}} W_{\delta_T(i), \delta_T(j)}^T$$

Esto es, basta hacer la suma sobre los índices de la numeración local en cada triángulo para obtener el aporte de la integral para conseguir la integral global. Por lo tanto, si hacemos la suma sobre los índices locales exportándolos de manera global con las funciones  $loc2glob^T$  sobre cada triángulo como se indica arriba, obtenemos la aproximación de las integrales que determinan las entradas de  $W$ . Esta discusión es resumida en el **Algoritmo 11**.

---

**Algorithm 11** Armado la matriz de rigidez  $W$ 

---

**Data:** Matrices de los nodos y el conjunto de elementos de la malla  $\mathcal{T}$ **Result:** Matriz de rigidez  $W$ 1:  $W \leftarrow \mathbf{0} \in \mathbb{R}^{N \times N}$ 2: **for**  $K \in \mathcal{T}$  **do** ▷ Arma las integrales que determinan las entradas de  $M$   
sumando las contribuciones a estas por triángulo3:     Lista los vértices de  $K$ ,

$$N_{j_1} = (x_1, y_1), N_{j_2} = (x_2, y_2) \text{ y } N_{j_3} = (x_3, y_3)$$

4:      $\bar{x} \leftarrow \frac{1}{3}(N_{j_1} + N_{j_2} + N_{j_3})$  ▷ Centroide de  $K$ 5:      $\bar{\sigma} \leftarrow \sigma(\bar{x})$  ▷ Valor de  $\sigma$  en el centroide de  $K$ 6:      $|K| \leftarrow \frac{1}{2} |(x_1 - x_3)(y_2 - y_1) - (x_1 - x_2)(y_3 - y_1)|$  ▷ Área de  $K$ 7:     **for**  $i = 1, 2, 3$  **do**8:         Calcula  $a_i, b_i, c_i$  asociados a  $\varphi_{j_i}$  usando el **Algoritmo 1**9:     **end for**

10:

$$W^K \leftarrow \bar{\sigma} \cdot |K| \cdot \begin{bmatrix} b_1^2 + c_1^2 & b_1 b_2 + c_1 c_2 & b_1 b_3 + c_1 c_3 \\ b_2 b_1 + c_2 c_1 & b_2^2 + c_2^2 & b_2 b_3 + c_2 c_3 \\ b_3 b_1 + c_3 c_1 & b_3 b_2 + c_3 c_2 & b_3^2 + c_3^2 \end{bmatrix}$$

▷ Matriz de rigidez local de  $K$ 

11:     Define el mapeo de numeración local al global

$$loc2gbl : [1, 2, 3] \mapsto [N_1, N_2, N_3]$$

12:     **for**  $i = 1, 2, 3$  **do**13:         **for**  $j = 1, 2, 3$  **do**

14:

$$W_{loc2gbl_i, loc2gbl_j} = W_{loc2gbl_i, loc2gbl_j} + W_{ij}^K$$

15:         **end for**16:     **end for**17: **end for**

---

### 3.7. Malla de la implementación

En esta sección describiremos la malla de un dominio particular que será usada para resolver el problema directo mediante el MEF. En términos precisos, vamos aproximar la solución del problema directo cuando  $\Omega$  un círculo con centro en el origen y radio  $r > 0$ .

La malla tendrá un número  $n_b > 0$  de nodos colocados en  $\partial\Omega$  que determinarán su frontera. Nuestra construcción de los nodos tiene como base a una colección de puntos que se obtiene multiplicando por  $r$  a las  $n_b$  raíces de la unidad. Es decir, consideraremos los puntos

$$w_k := \left( r \cos \left( \frac{2\pi(k-1)}{n_b} \right), r \sin \left( \frac{2\pi(k-1)}{n_b} \right) \right); \quad k = 1, 2, \dots, n_b$$

Tomemos una colección finita  $\{c_i\}_{i=1}^k$  de números reales tal que

$$0 < c_k < \dots < c_2 < c_1 = 1$$

Haremos homotecias de la colección  $\{w_k\}$  usando a las constantes  $c_i$  a través de los conjuntos

$$C_i = \{c_i \cdot w_1, \dots, c_i \cdot w_{n_b}\} \text{ para } i = 1, \dots, k$$

Notemos que la elección de la sucesión  $\{c_i\}$  garantiza que los puntos de  $C_i$  se localizan en círculos de radio cada vez más pequeño. Ahora bien, ordenaremos los vértices de cada  $C_i$  empezando desde el punto  $c_i \cdot w_1$  siguiendo la dirección contraria a las manecillas del reloj. A los puntos del nivel  $C_1$ , que son los de la frontera de  $\Omega$ , agregaremos los del siguiente nivel interior, es decir  $C_2$ . A este agregaremos entonces el del siguiente nivel interior  $C_3$  y así sucesivamente hasta agregar los del nivel  $C_k$ . Por último añadiremos a esta construcción al origen.

Los puntos de malla quedan ordenados en niveles:

$$\begin{aligned} \text{Círculo 1: } & N_1 = c_1 w_1, \quad \dots, \quad N_{n_b} = c_1 w_{n_b}. \\ \text{Círculo 2: } & N_{1+n_b} = c_2 w_1, \quad \dots, \quad N_{2n_b} = c_2 w_{n_b}. \\ & \vdots \end{aligned}$$

$$\text{Círculo } j: N_{1+(j-1)n_b} = c_j w_1, \quad \dots, \quad N_{j \cdot n_b} = c_j w_{n_b}.$$

$$\vdots$$

$$\text{Círculo } k: N_{1+(k-1)n_b} = c_k w_1, \quad \dots, \quad N_{k \cdot n_b} = c_k w_{n_b}$$

$$N_{1+k \cdot n_b} = (0, 0).$$

Vamos a suponer, por simplicidad, que el número de nodos en la frontera  $n_b$  es par.

Abusando de la notación identificaremos a cada electrodo  $e_l$  con la poligonal de los nodos de la malla que lo define.

Cada electrodo  $e_1$  en la malla será representado por una poligonal que se encuentra en la frontera de esta, determinada por un número  $r_l$  de nodos. Supondremos que estos son algunos de los primeros  $n_b$  nodos definidos. Ésta condición asegura que los electrodos se encuentran de verdad en la frontera de la región que nuestra malla define. Adicionalmente los electrodos están colocados desde el primer cuadrante uno tras otro según su índice, siguiendo el sentido contrario a las manecillas del reloj. El número de nodos sobre la frontera de la malla que separan al electrodo  $e_l$  del  $e_{l+1}$  será denotado por  $s_l$  para  $1 \leq l \leq L - 1$ . Denotando con  $s_L$  al de nodos sobre la frontera de la malla que separan  $e_1$  y  $e_L$ . Más aún, la descripción de electrodos que impondremos será

$$\begin{aligned} e_1 &= [N_1, N_2] \cup \dots \cup [N_{r_1-1}, N_{r_1}], \\ e_2 &= [N_{t_1+1}, N_{t_1+2}] \cup \dots \cup [N_{t_1+r_2-1}, N_{t_1+r_2}]; \quad t_1 = s_1 + r_1 + 1 \\ &\vdots \\ e_{j+1} &= [N_{t_j+1}, N_{t_j+2}] \cup \dots \cup [N_{t_j+r_{j+1}-1}, N_{t_j+r_{j+1}}]; \quad t_j = \sum_{d=1}^j (s_d + r_d + 1) \\ &\vdots \\ e_L &= [N_{n_b-s_L-r_L}, N_{n_b-s_L-r_L+1}] \cup \dots \cup [N_{n_b-s_L-1}, N_{n_b-s_L}]; \end{aligned}$$

Describiremos los elementos de la malla. Tomemos un índice  $i$  de la forma

$$i = 1 + 2 \cdot \kappa \text{ para } 1 \leq \kappa < \frac{n_b}{2} - 1.$$

Tomaremos bloques de 6 nodos definidos en términos de los niveles  $C_1$  y  $C_2$ , agrupando 3 nodos del nivel 1 y 3 del nivel 2, con elementos definidos por ternas índices como sigue

$$(i, i + 1, i + n_b), (i + 1, i + 2, i + 2 + n_b)$$

$$(i + 2 + n_b, i + 1 + n_b, i + 1), (i + 1 + n_b, i + n_b, i + 1)$$

Un representación de estos bloques y los elementos recién definidos en ellos se muestra:

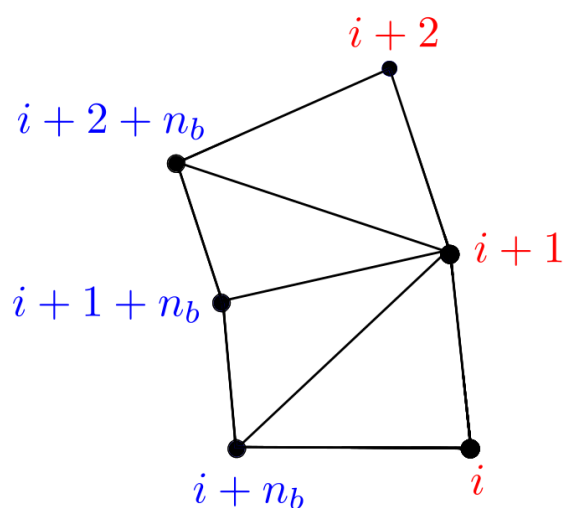


Figura 3.1: Bloque

Por otro lado, para  $i = n_b - 1$  se considera a los elementos

$$(i, i + 1, i + n_b)$$

$$(i + 1, 1, 1 + n_b),$$

$$(1 + n_b, i + 1 + n_b, i + 1),$$

$$(i + 1 + n_b, i + n_b, i + 1)$$

Tal proceso, para  $C_1$  y  $C_2$ , construye un anillo triangulado como en la figura (3.2)



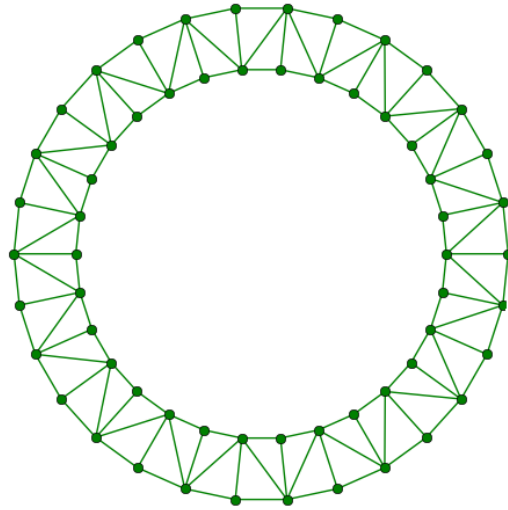


Figura 3.2: Anillo triangulado

Dicha construcción se aplica recursivamente en cada anillo determinado por los conjuntos  $C_i$  y  $C_{i+1}$ , creando más anillos con el mismo patrón de triangulación, como se aprecia en la figura (3.3).

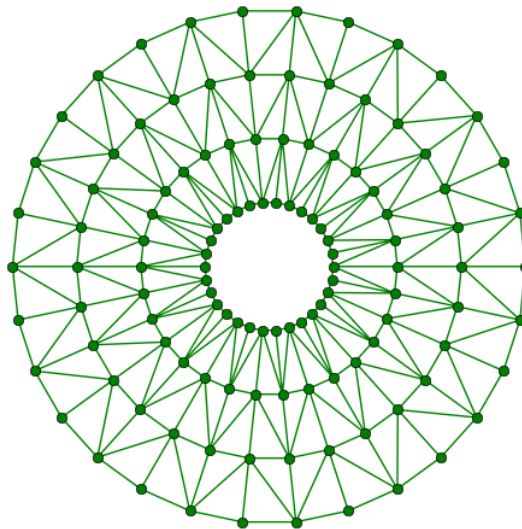


Figura 3.3: Anillos triangulados

Finalmente para los puntos del nivel  $C_k$ , se añaden los elementos que tienen por vértices a dos nodos vecinos de  $C_k$  y el origen, esto es elementos de la forma

$$(i, i + 1, n_b \cdot k + 1) \text{ para } i = n_b(k - 1) + s \text{ con } 1 \leq s \leq n_b - 1 \quad (3.34)$$

$$(n_b \cdot k, n_b \cdot (k - 1) + 1, n_b \cdot k + 1) \quad (3.35)$$

El resultado de añadir estos elementos a la malla se muestra en la figura (3.4)

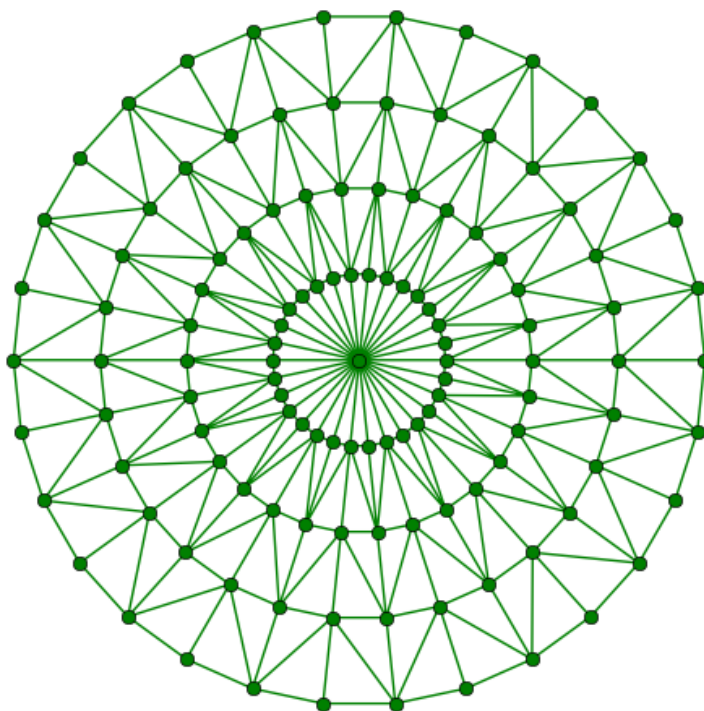


Figura 3.4: Malla resultado de nuestra construcción

En la figura 3.4 el número de nodos en la frontera se tomó como  $n_b = 64$ . Hay  $L = 16$  electrodos adheridos a la superficie del cuerpo y están descritos como:

$$\begin{aligned}
e_1 &= [N_1, N_2] \cup [N_2, N_3], \\
e_2 &= [N_5, N_6] \cup [N_6, N_7], \\
&\vdots \\
e_j &= [N_{1+4(j-1)}, N_{2+4(j-1)}] \cup [N_{2+4(j-1)}, N_{3+4(j-1)}], \\
&\vdots \\
e_{16} &= [N_{61}, N_{62}] \cup [N_{62}, N_{63}]. \\
s_1 &= \dots = s_{16} = 1
\end{aligned} \tag{3.36}$$

El siguiente es un diagrama de la posición de los electrodos en la malla.

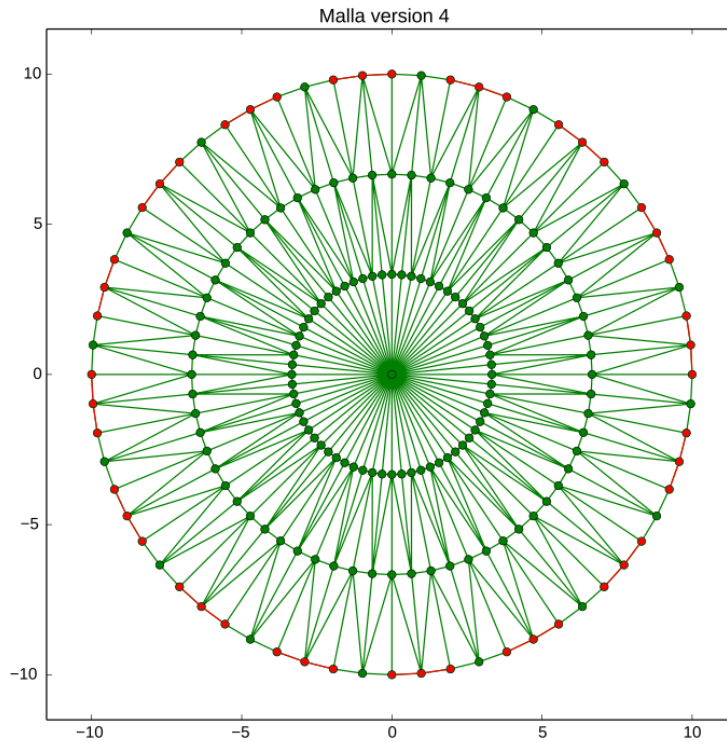


Figura 3.5: Malla con electrodos

Cerraremos esta sección agregando tres comentarios acerca de la malla construida en esta sección:

- Si se considera a la sucesión  $0 < c_k < \dots < c_2 < c_1 = 1$  para definir a la malla, el número de puntos de ésta es  $n_b \cdot k + 1$ .
- Suponiendo que  $n_b$  es par, el número de elementos entre  $C_i$  y  $C_{i+1}$  es  $2n_b$  y el número de elementos que tienen un vértice en el origen son  $n_b$ . De este modo si se usa un número  $k$  de homotecias, se tienen  $(2k + 1)n_b$  elementos.
- Podemos variar el número de niveles y puntos tiene la malla, así como la cercanía entre éstos, y su distancia a la frontera de la malla considerando diferentes sucesiones  $0 < c_k < \dots < c_2 < c_1 = 1$ .

## 3.8. Sobre la solución del sistema lineal del MEF

### 3.8.1. Características de las submatrices de $A$

Con el propósito de obtener una estrategia eficiente para la solución del sistema lineal asociado al MEF, mostraremos propiedades de las submatrices de  $A$  (véase la sección 3.3), independientes de la base de funciones con que se aproxima la solución, y otras que son propias de la elegida por nosotros. Además, discutiremos la estructura que la malla construida en la sección 3.7 tiene como resultado de estas propiedades y de su construcción particular.

#### 3.8.1.1. Matriz $B$

Recordemos que las matrices,  $M$  y  $W$  tienen definidas sus entradas para  $i, j = 1, \dots, \mathcal{N}$  como

$$M_{ij} = \sum_{l=1}^L \frac{1}{z_l} \int_{e_l} \varphi_i \varphi_j dS, \quad W_{ij} = \int_{\Omega} \sigma(\nabla \varphi_i \cdot \nabla \varphi_j) dx dy$$

y que la matriz  $B$  es la suma de  $W$  y  $M$ . Estas matrices tienen propiedades interesantes que serán usadas en la implementación.

La primera propiedad relevante es el hecho de matriz  $B$  es **simétrica**. Esto es consecuencia de que  $M$  y  $W$  son simétricas. Por otro lado, las proposiciones siguientes muestran que las matrices de masas y de rigidez son también semidefinidas positivas.

**Proposición 3.5** *La matriz de rigidez  $W$  es semidefinida positiva.*

Tomemos  $\xi \in \mathbb{R}^{\mathcal{N}}$ . Se tiene

$$\begin{aligned}
 \xi^T W \xi &= \sum_{i,j=1}^{\mathcal{N}} \xi_i W_{ij} \xi_j \\
 &= \sum_{i,j=1}^{\mathcal{N}} \xi_i \left( \int_{\Omega} \sigma (\nabla \varphi_i \cdot \nabla \varphi_j) dx dy \right) \xi_j \\
 &= \int_{\Omega} \sigma \cdot \left[ \nabla \left( \sum_{i=1}^{\mathcal{N}} \xi_i \varphi_i \right) \cdot \nabla \left( \sum_{j=1}^{\mathcal{N}} \xi_j \varphi_j \right) \right] dx dy \\
 &= \left\| \nabla \left( \sum_{j=1}^{\mathcal{N}} \xi_j \varphi_j \right) \right\|_{L^2(\Omega), \sigma}^2
 \end{aligned}$$

Es decir, hemos establecido

$$\xi^T W \xi = \left\| \nabla \left( \sum_{j=1}^{\mathcal{N}} \xi_j \varphi_j \right) \right\|_{L^2(\Omega), \sigma}^2 \geq 0, \quad (3.37)$$

donde  $\| \cdot \|_{L^2(\Omega), \sigma}$  denota a la norma en  $L^2(\Omega)$  inducida por el producto interior  $\langle f, g \rangle = \int_{\Omega} \sigma \cdot fg dx dy$  y la función de conductividad  $\sigma > 0$ .  $\square$

**Proposición 3.6** *La matriz de masas  $M$  es semidefinida positiva.*

Notemos que

$$M = \frac{1}{z_1} M^1 + \dots + \frac{1}{z_L} M^L \text{ donde } M_{ij}^l = \int_{e_l} \varphi_i \varphi_j dS$$

De modo que si probamos que cada matriz  $M^l$  es semidefinida positiva, como las impedancias de contacto en cada electrodo son positivas, entonces  $M$  también cumplirá esta condición.

Tomemos pues  $\xi \in \mathbb{R}^{\mathcal{N}}$  y  $1 \leq l \leq L$ . Entonces

$$\begin{aligned}
 \xi^T M^l \xi &= \sum_{i,j=1}^{\mathcal{N}} \xi_i M_{ij}^l \xi_j \\
 &= \sum_{i,j=1}^{\mathcal{N}} \xi_i \left( \int_{e_l} \varphi_i \varphi_j dS \right) \xi_j \\
 &= \int_{e_l} \left( \sum_{i=1}^{\mathcal{N}} \xi_i \varphi_i \right) \cdot \left( \sum_{j=1}^{\mathcal{N}} \xi_j \varphi_j \right) dS \\
 &= \int_{e_l} \left( \sum_{i=1}^{\mathcal{N}} \xi_i \varphi_i \right)^2 dS \geq 0
 \end{aligned}$$

En consecuencia

$$\xi^T M \xi = \sum_{l=1}^L \frac{1}{z_l} \int_{e_l} \left( \sum_{i=1}^{\mathcal{N}} \xi_i \varphi_i \right)^2 dS \geq 0. \quad (3.38)$$

Es decir, hemos probado que  $M$  es semidefinida positiva.  $\square$

Dado que  $B$  es la suma de las matrices de rigidez y masas,  $W$  y  $M$ , se tiene en particular el siguiente resultado.

**Proposición 3.7** *La matriz  $B$  es semidefinida positiva.*

Nuestra elección de la base de funciones  $\varphi_i$  permitirá probar que es definida positiva. Para verificarlo primero debemos ver algunos lema relativos a la estructura de ésta.

**Lema 3.8** *Dada un malla  $\Omega \subset \mathbb{R}^2$  formada por elementos triangulares, que consta de  $\mathcal{N}$  número de nodos y  $\{\varphi_j\}_{j=1}^{\mathcal{N}}$  la base funciones continuas lineales a pedazos asociada a ésta que cumple*

$$\varphi_i(N_j) = \begin{cases} 1 & \text{si } i = j \\ 0 & \text{si } i \neq j \end{cases}$$

donde  $N_j$  denota el  $j$ -ésimo nodo de la malla, se tiene que  $\sum_{j=1}^{\mathcal{N}} \varphi_j$  es la función constante 1 sobre la malla.

Bastará demostrar que  $\sum_{j=1}^{\mathcal{N}} \varphi_j$  es la constante 1 sobre cualquier triángulo  $T$  de la malla. Tomemos pues a  $T$  un elemento triangular de la malla con nodos  $N_{i_l} = (x_{i_l}, y_{i_l})$  con  $l = 1, 2, 3$ . Para cada  $1 \leq j \leq \mathcal{N}$  representemos  $\varphi_j(x, y) = a_j + b_j x + c_j y$  sobre  $T$ . Observemos que si  $N_i$  es diferente de los nodos de  $T$ , entonces  $\varphi_i$  se anula sobre  $N_{i_1}, N_{i_2}$  y  $N_{i_3}$  (véase proposición 3.3). Como  $\varphi_i$  es lineal sobre  $T$ , esto implica que se anula  $T$ , este decir  $a_i = b_i = c_i = 0$  (véase Proposición 3.2). Entonces  $\sum_{j=1}^{\mathcal{N}} \varphi_j(x, y) = \sum_{l=1}^3 \varphi_{i_l}(x, y)$  para  $(x, y) \in T$ . Esto se puede reescribir como

$$\sum_{j=1}^{\mathcal{N}} \varphi_j(x, y) = \sum_{l=1}^3 a_{i_l} + \left( \sum_{l=1}^3 b_{i_l} \right) x + \left( \sum_{l=1}^3 c_{i_l} \right) y \text{ para } (x, y) \in T$$

Es decir, la suma de funciones queda en términos de

$$a_{l_1}, b_{l_1}, c_{l_1}, a_{l_2}, b_{l_2}, c_{l_2}, a_{l_3}, b_{l_3}, \text{ y } c_{l_3}.$$

Recordemos estos coeficientes se pueden calcular (véase 3.26) mediante las fórmulas

$$a_{l_1} = \frac{x_2 y_3 - x_3 y_2}{2|T|} \quad b_{l_1} = \frac{y_2 - y_3}{2|T|} \quad c_{l_1} = \frac{x_3 - x_2}{2|T|}$$

$$a_{l_2} = \frac{x_3 y_1 - x_1 y_3}{2|T|} \quad b_{l_2} = \frac{y_3 - y_1}{2|T|} \quad c_{l_2} = \frac{x_1 - x_3}{2|T|}$$

$$a_{l_3} = \frac{x_1 y_2 - x_2 y_1}{2|T|} \quad b_{l_3} = \frac{y_1 - y_2}{2|T|} \quad c_{l_3} = \frac{x_2 - x_1}{2|T|}$$

De estas ecuaciones se sigue que  $\sum_{l=1}^3 b_{i_l} = \sum_{l=1}^3 c_{i_l} = 0$ . Esto implica que  $\sum_{j=1}^{\mathcal{N}} \varphi_j(x, y)$  es una función constante, pues

$$\sum_{j=1}^{\mathcal{N}} \varphi_j(x, y) = \sum_{l=1}^3 a_{i_l} \text{ para } (x, y) \in T$$

Observando que  $\sum_{j=1}^{\mathcal{N}} \varphi_j(N_{l_1}) = 1$ , se tiene que dicha función toma el valor constante igual a 1 sobre  $T$ .  $\square$

**Lema 3.9** *Tomemos una malla de elementos triangulares de  $\Omega$ , que consta de  $\mathcal{N}$  número de nodos y sea  $\{\varphi_j\}_{j=1}^{\mathcal{N}}$  un base asociada a la malla del MEF que satisface  $\sum_{j=1}^{\mathcal{N}} \varphi = 1$  y (3.16). Son ciertas las siguientes afirmaciones:*

- (i) *Dado  $\xi \in \mathbb{R}^{\mathcal{N}}$ , se tiene la igualdad  $\xi^T W \xi = 0$  si  $\xi$  es de la forma  $\rho(1, \dots, 1)^T$  para algún  $\rho \in \mathbb{R}$ .*
- (ii) *Recíprocamente, dado  $\xi \in \mathbb{R}^{\mathcal{N}}$ , si  $\xi^T W \xi = 0$  entonces  $\xi$  es de la forma  $\rho(1, \dots, 1)^T$  para algún  $\rho \in \mathbb{R}$ .*
- (iii) *Dado  $\xi \in \mathbb{R}^{\mathcal{N}}$ , si  $\xi$  es de la forma  $\rho(1, \dots, 1)^T$  para algún  $\rho \in \mathbb{R}$ ,  $\rho \neq 0$ , entonces  $\xi^T M \xi > 0$*

Tomemos  $\xi \in \mathbb{R}^{\mathcal{N}}$ . Verificaremos los incisos:

- (i) Supongamos que  $\xi$  es de la forma  $\rho(1, \dots, 1)^T$  para algún  $\rho \in \mathbb{R}$ . La ecuación (3.37) garantiza

$$\xi^T W \xi = \left\| \nabla \left( \sum_{j=1}^{\mathcal{N}} \xi_j \varphi_j \right) \right\|_{L^2(\Omega), \sigma}^2 = \rho^2 \left\| \nabla \left( \sum_{j=1}^{\mathcal{N}} \varphi_j \right) \right\|_{L^2(\Omega), \sigma}^2$$

Por el Lema 3.9 se sigue

$$\left\| \nabla \left( \sum_{j=1}^{\mathcal{N}} \varphi_j \right) \right\|_{L^2(\Omega), \sigma}^2 = \|\nabla 1\|_{L^2(\Omega), \sigma}^2 = \|0\|_{L^2(\Omega), \sigma}^2 = 0$$

Es decir  $\xi^T W \xi = 0$ .

- (ii) Supongamos ahora que se da la igualdad  $\xi^T W \xi = 0$ .

En esta situación, por la ecuación (3.37), se tiene que el gradiente de  $\sum_{j=1}^{\mathcal{N}} \xi_j \varphi_j$  es cero en  $\Omega$

Entonces, existe  $\rho \in \mathbb{R}$  tal que  $\sum_{j=1}^{\mathcal{N}} \xi_j \varphi_j = \rho$ . Si evaluamos esta expresión en el  $i$ -ésimo nodo se tiene  $\rho = \sum_{j=1}^{\mathcal{N}} \xi_j \varphi_j(N_i) = \xi_i$  para cada  $1 \leq i \leq \mathcal{N}$ . Es decir  $\xi = \rho(1, \dots, 1)^T$ .



(iii) Dado  $\xi \in \mathbb{R}^{\mathcal{N}}$ , si  $\xi$  es de la forma  $\rho(1, \dots, 1)^T$  para algún  $\rho \in \mathbb{R}$ ,  $\rho \neq 0$ . Notemos que en virtud de 3.38

$$\xi^T M \xi = \sum_{i=1}^L \frac{1}{z_l} \int_{e_l} \left( \sum_{i=1}^{\mathcal{N}} \xi_i \varphi_i \right)^2 dS = \sum_{i=1}^L \frac{\rho^2}{z_l} \int_{e_l} \left( \sum_{i=1}^{\mathcal{N}} \varphi_i \right)^2 dS$$

De acuerdo al Lema 3.9 se sigue

$$\sum_{i=1}^L \frac{\rho^2}{z_l} \int_{e_l} \left( \sum_{i=1}^{\mathcal{N}} \varphi_i \right)^2 dS = \sum_{i=1}^L \frac{\rho^2}{z_l} \int_{e_l} 1 dS = \sum_{i=1}^L \frac{\rho^2 |e_l|}{z_l} > 0$$

Es decir, hemos probado que  $\xi^T M \xi > 0$ .  $\square$

El lema anterior es válido en particular para la familia  $\{\varphi_i\}$  que elegimos en este trabajo para el MEF, por el Lema 3.8.

Ahora procederemos a probar que la matriz  $B$  es definida positiva. Esto es consecuencia directa del Lema 3.9 y la siguiente proposición:

**Proposición 3.10** *Consideremos una malla de elementos triangulares de  $\Omega$ , que consta de  $\mathcal{N}$  número de nodos y sea  $\{\varphi_j\}_{j=1}^{\mathcal{N}}$  un base asociada a la malla del MEF que satisface  $\sum_{j=1}^{\mathcal{N}} \varphi_j = 1$  y (3.16). Entonces la matriz  $B$ , construida con respecto a esta información, es definida positiva.*

Tomemos  $\xi \in \mathbb{R}^{\mathcal{N}}$  con  $\xi \neq 0$ . La prueba se hará considerando casos:

- (1) Supongamos que  $\xi$  no es de la forma  $\xi = \rho(1, \dots, 1)^T$  con  $\rho \in \mathbb{R}$ . De acuerdo con el Lema (3.9),  $\xi^T W \xi \neq 0$ . Como esta matriz es semidefinida positiva esto implica que  $\xi^T W \xi > 0$ . Entonces  $\xi^T B \xi = \xi^T W \xi + \xi^T M \xi > 0$ , pues  $\xi^T M \xi \geq 0$ .
- (2) Ahora supongamos que  $\xi = \rho(1, \dots, 1)^T$  con  $\rho \neq 0$ . El Lema (3.9) garantiza que  $\xi^T W \xi = 0$  y  $\xi^T M \xi > 0$ . Es decir  $\xi^T B \xi = \xi^T W \xi + \xi^T M \xi > 0$ .

En ambos casos probamos que  $\xi^T B \xi > 0$ , es decir  $B$  es definida positiva.  $\square$

Haremos un par de comentarios respecto a lo establecido en la proposición 3.10.

- Ya sabíamos con antelación que la matriz  $W$  era semidefinida positiva. De hecho el punto medular de la prueba de la proposición 3.10 fue caracterizar al conjunto de vectores  $E_W$  donde  $\xi^T W \xi = 0$  y en consecuencia a la colección de éstos donde  $\xi^T W \xi > 0$ . En términos precisos mostramos que  $E_W = \{\rho(1, \dots, 1)^T : \rho \in \mathbb{R}\}$ .
- Uno de los argumentos usados fue que la igualdad  $0 = \xi^T W \xi$  implica la existencia de un  $\rho \in \mathbb{R}$  tal que  $\sum_{j=1}^N \xi_j \varphi_j = \rho$  y de la condición (3.16) se sigue  $\rho = \xi_1 = \dots = \xi_N$ . Si sucediera que  $\rho \neq 0$  entonces se tendría que  $\sum_{i=1}^N \varphi_j = 1$ . Si esta condición se cumple, sabemos que la proposición 3.10 garantiza que  $B$  es definida positiva.
- Sin embargo, si esta propiedad no se verificara, tendríamos automáticamente que  $\xi^T W \xi > 0$  para  $\xi \neq 0$ . Por ello  $W$  sería definida positiva y en consecuencia  $B$  también.
- Estos puntos implican que si cambiamos  $\{\varphi_i\}$  por funciones cuadráticas lineales a pedazos o con mayor grado, la matriz  $B$  sigue siendo positiva definida.

Ahora vamos a describir la estructura de las matrices de masas y rigidez, cualitativamente, con respecto a cualquier malla y relativa a la usada en la que fue definida en la sección 3.7.

Sobre la matriz de masas  $M$  se puede decir en general, que  $M_{ij}$  no se anula a menos que las funciones  $\varphi_i$  y  $\varphi_j$  compartan soporte en  $\Omega$ . Dado que el soporte de estas funciones es relativamente pequeño con respecto a los elementos de la malla, esto implica que la mayoría de las entradas de  $M$  son cero. Del mismo modo se puede asegurar que las entradas de la matriz  $W$  son en su mayoría cero. Esto implica que  $B$  es una matriz rala.

Por otro lado, poniendo nuestra atención en la malla definida en la sección 3.7, ña numeración de los nodos comienza desde los puntos en el círculo exterior y continua hacia los puntos de los círculos que se localizan más al centro. De hecho, ésta fue construida de tal manera que los vértices de cada electrodo  $e_l$  se encuentran entre

los del conjunto  $\{N_1, N_2, \dots, N_{n_b}\}$ . Esta observación, junto con (3.16), implica que

$$\varphi_i(N_k) = 0 \text{ si } i > n_b \text{ y } 1 \leq k \leq n_b,$$

de este modo, si  $i > n_b$ , entonces  $\varphi_i$  se anula en cada segmento  $[N_k, N_{k+1}]$  para  $k = 1, \dots, n_b - 1$  (véase la proposición 3.4).

Por otro lado, de acuerdo a las consideraciones expuestas al inicio de la sección 3.7, los vértices que definen a la poligonal que representa al electrodo  $e_l$  se encuentran entre los del conjunto  $\{N_1, \dots, N_{n_b}\}$ . Esta observación, junto con lo observado en el párrafo pasado implican que

$$\int_{e_l} \varphi_i \varphi_j dS = 0 \text{ si } i > n_b \text{ ó } j > n_b \text{ y } 1 \leq l \leq L$$

Es decir, la entradas de la matriz de masas  $M$  (véase la sección 3.3) reflejan que la aportación de integrales de frontera sólo corresponden a funciones  $\varphi_i$  cuyo índice es el de alguno de los  $n_b$  nodos de la malla, ya que estos definen la frontera del círculo  $\Omega$ . De esta discusión tenemos que para la malla propuesta, la matriz de masas tiene la estructura

$$M = \begin{bmatrix} \mathcal{M} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{bmatrix} \quad (3.39)$$

donde  $\mathcal{M} \in \mathbb{R}^{n_b \times n_b}$  recoge las aportaciones de los electrodos a las integrales de frontera. Procederemos a analizar su estructura.

Observemos que para cada nodo  $i$  en los vértices de  $e_l$  la integral  $\int_{e_l} \varphi_i \varphi_j dS$  se anula cuando  $j$  no es un nodo vecino de  $i$  o no forma parte de los nodos que definen a  $e_l$ . Es decir, suponiendo que el electrodo  $e_l$  en la malla está dado como la poligonal

$$e_l = [N_{n_1}, N_{n_2}] \cup [N_{n_2}, N_{n_3}] \cup \dots \cup [N_{n_{r_l-1}}, N_{n_{r_l}}]$$

- Si  $i$  es un nodo inicial,  $i = n_1$ , sólo tenemos aportaciones de las integrales

$$\int_{[N_{n_1}, N_{n_2}]} \varphi_{n_1} \varphi_{n_1} dS; \int_{[N_{n_1}, N_{n_2}]} \varphi_{n_1} \varphi_{n_2} dS$$

- Si  $i$  es un nodo final,  $i = n_r$ , sólo tenemos aportaciones de la integral

$$\int_{[N_{n_{k-1}}, N_{n_k}]} \varphi_{n_k} \varphi_{n_k} dS; \int_{[N_{n_{k-1}}, N_{n_k}]} \varphi_{n_k} \varphi_{n_{k-1}} dS$$



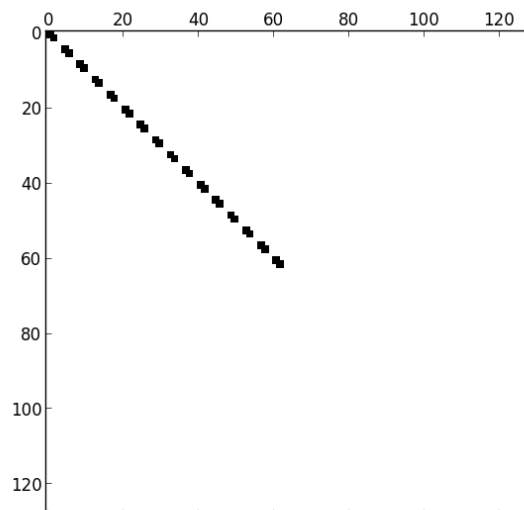


Figura 3.6: Estructura de matriz  $M$ , creada con 64 nodos en la frontera. Cada electrodo consta de 3 vértices y hay espacio de un vértice entre electrodos contiguos en la frontera de la malla

Ahora vamos a relacionar la malla de la sección 3.7 con la estructura de la matriz de rigidez. Tomemos un nodo  $N$  que se localiza en el nivel  $C_l$  y supongamos que está definido el siguiente nivel interior de puntos  $C_{l+1}$  de la misma. Si  $N$  corresponde al índice  $n_2$  y el que precede en el nivel  $C_l$  es  $n_1$  y el que sucede a éste es  $n_3$  en el nivel  $C_l$ , entonces los vértices que corresponden a éstos en el siguiente nivel son  $n_1 + n_b$ ,  $n_2 + n_b$  y  $n_3 + n_b$ . De acuerdo a la construcción de la malla los vértices vecinos de  $N$  que corresponden a índices mayores a  $N$  en la numeración encuentra únicamente entre los siguientes:  $n_3$ ,  $n_1 + n_b$ ,  $n_2 + n_b$  y  $n_3 + n_b$ . Esto es, tres pertenecen al nivel  $C_{l+1}$  como se especifica arriba.

Supongamos ahora que  $N$  pertenece al último nivel  $C_k$ . Si la numeración del vértice  $N$  es  $n_2$  y el que precede en el nivel  $C_l$  es  $n_1$  y el que sucede a este es  $n_3$  en el nivel  $C_l$ , entonces, de acuerdo a la construcción de la malla, los vértices vecinos de  $N$  que corresponden a índices mayores a  $N$  en la numeración de la malla se encuentra

únicamente entre los siguientes:  $n_3$  y el del origen  $1 + n_b \cdot k$ . Esto dice que dado un índice  $i$ ,

- Si  $1 \leq i \leq \mathcal{N} - n_b$ , la expresión  $\int_{\Omega} \sigma(\nabla\varphi_i \cdot \nabla\varphi_j) dx dy$ , en términos generales, se anula para casi todo  $j \geq i$  salvo en los valores

$$j = i, i + 1, i + n_b, i + 1 + n_b, i - 1 + n_b.$$

- Si  $\mathcal{N} - n_b \leq i \leq \mathcal{N}$ , la expresión  $\int_{\Omega} \sigma(\nabla\varphi_i \cdot \nabla\varphi_j) dx$  se anula para casi todo  $j \geq i$  excepto para

$$j = i, i + 1, 1 + n_b \cdot k.$$

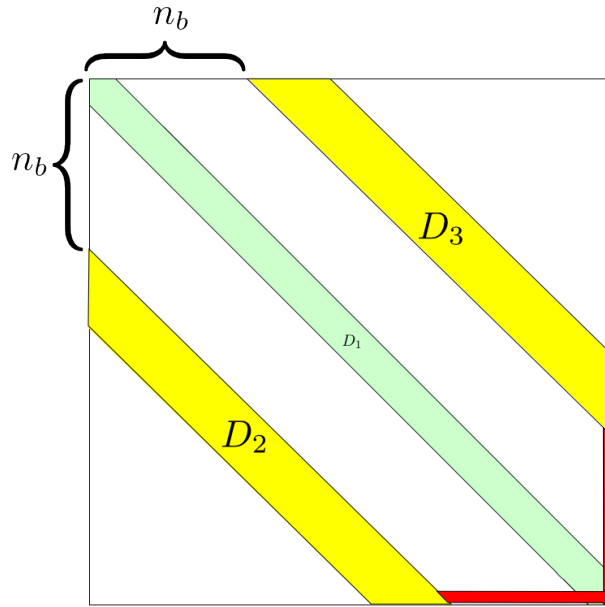


Figura 3.7: Estructura de matriz  $W$

Dicha estructura se aprecia en la imagen 3.7. La banda  $D_1$  tiene ancho 2, está centrada justamente en la diagonal de la matriz  $W$ . Por otro lado, las bandas  $D_2$  y  $D_3$  tienen longitud 3 y están colocadas a partir del lugar  $n_b + 1$  a partir de la diagonal principal de  $W$ . Las partes en rojo representan vectores de tamaño  $n_b$ , situada a partir del lugar  $1 + n_b \cdot k$  de la diagonal. Las partes restantes representan ceros de la matriz.

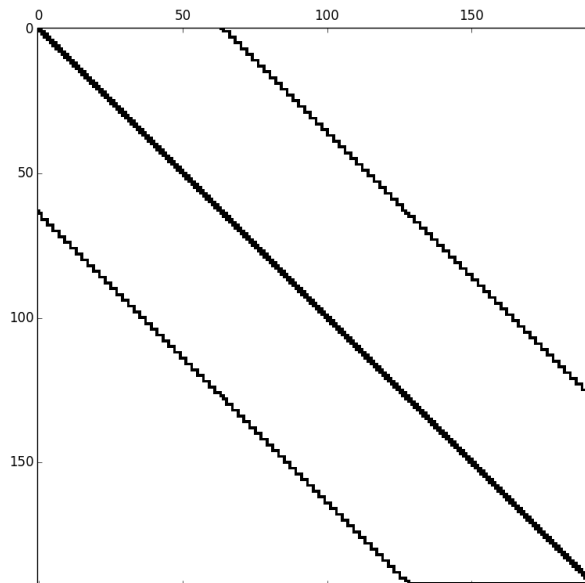


Figura 3.8: Estructura de matriz  $W$ , creada con 64 nodos en la frontera. Cada electrodo consta de 3 vértices y hay espacio de un vértice entre electrodos contiguos en la frontera de la malla

En virtud de lo expuesto hasta aquí, la matriz  $B$  tiene las siguientes características:

- $B$  es simétrica y rala
- $B$  es definida positiva, en el caso de que la base de funciones continuas lineales a pedazos y con la propiedad (3.16).
- Dado que se necesita una malla con suficientes nodos  $\mathcal{N}$ , la matriz  $B$  es presumiblemente grande.

Para explotar las características de esta matriz a la hora de resolver un sistema lineal de la forma  $Bx = d$ , proponemos un método iterativo basado en multiplicaciones matriz-vector y vector-vector. Dado que  $B$  es simétrica y positiva definida proponemos usar el método de gradiente conjugado. La idea de este método consiste en desplazarse desde un punto inicial en direcciones que son ortogonales con respecto

al producto interior inducido por la matriz del sistema (véase el cuadro **Algoritmo 12**).

---

**Algorithm 12** Algoritmo de gradiente conjugado
 

---

**Data:**  $A \in \mathbb{R}^{\mathcal{N} \times \mathcal{N}}$  matriz definida positiva,  $b \in \mathbb{R}^{\mathcal{N}}$ ,  $tol > 0$

**Result:** Obtiene una aproximación de la solución del sistema  $Ax = b$

- 1: Toma  $x_0 \in \mathbb{R}^{\mathcal{N}}$  ▷ vector de búsqueda inicial
  - 2:  $s_0 = r_0 = b - Ax_0$
  - 3: **while**  $\|r_k\| > tol$  **do**
  - 4:      $\alpha_k = r_k^T r_k / s_k^T A s_k$
  - 5:      $x_{k+1} = x_k + \alpha_k s_k$
  - 6:      $r_{k+1} = r_k - \alpha_k A s_k$
  - 7:      $\beta_{k+1} = r_{k+1}^T r_{k+1} / r_k^T r_k$
  - 8:      $s_{k+1} = r_{k+1} + \beta_{k+1} s_k$
  - 9:      $k = k + 1$
  - 10: **end while**
- 

### 3.8.1.2. Matriz $C$

Las entradas de esta matriz han sido determinadas como

$$C(i, j) = - \left( \frac{1}{z_1} \int_{e_1} \varphi_i dS - \frac{1}{z_{j+1}} \int_{e_{j+1}} \varphi_i dS \right);$$

en donde  $i = 1, \dots, \mathcal{N}, j = 1, \dots, L - 1$

Recordemos que en la sección 3.7, la malla se construyó de modo que los vértices que determinan cada electrodo  $e_l$  son parte del conjunto de los nodos 1 hasta el  $n_b$ . De este hecho se sigue que

$$\int_{e_l} \varphi_i dS = 0 \text{ si } i > n_b \text{ y } 1 \leq l \leq L$$

Con base en la observación de los párrafos anteriores tenemos que

- La entrada  $C(i, j) = 0$  si  $i > n_b$ , pues las integrales  $\int_{e_1} \varphi_i dS$  y  $\int_{e_{j+1}} \varphi_i dS$  se anulan.
- Fijemos un índice  $j$  tal que  $1 \leq j \leq L - 1$ .



- Sucede  $\int_{e_{j+1}} \varphi_i dS = 0$  para  $1 \leq i \leq r_1$ . Esto sucede porque los electrodos en los que se integra son  $e_2$  hasta  $e_L$ , cuyos vértices son distintos de  $i$  en el rango especificado. Así

$$C(i, j) = -\frac{1}{z_1} \int_{e_1} \varphi_i dS \text{ si } 1 \leq i \leq r_1$$

Remarcamos que en esta situación, la entrada depende sólo del número de renglón.

- Por otro lado  $\int_{e_1} \varphi_i dS = 0$  si  $r_1 < i$ . Así

$$C(i, j) = \frac{1}{z_{j+1}} \int_{e_{j+1}} \varphi_i dS \text{ si } r_1 < i$$

- El punto anterior implica que, para  $r_1 < i$ ,  $C(i, j)$  se anula cuando  $i$  no es uno de los nodos del electrodo  $e_{j+1}$ .

Dado que los  $n_b$  nodos de la frontera de la malla se han acomodado de tal manera que los primeros  $r_1$  corresponden a  $e_1$ , los siguientes  $s_1$  a un espacio sin electrodos, los siguientes  $r_2$  a vértices que corresponden a  $e_2$  y después  $s_2$  que corresponden a un espacio sin electrodos, y así sucesivamente hasta llegar a los  $r_l$  vértices del electrodo  $e_L$  y después  $s_L$  vértices que separan al electrodo  $e_1$  del  $e_L$ , tenemos que en cada columna se calculará primero  $-\frac{1}{z_1} \int_{e_1} \varphi_i dS$  en las primeras  $r_1$  entradas y después todo se anulará hasta la posición en la que  $i$  no es uno de los nodos del electrodo  $e_{j+1}$ . Esto permite una representación de la matriz  $C$  como sigue



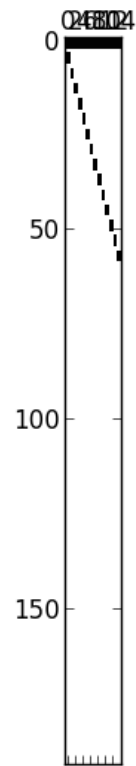


Figura 3.9: Estructura de matriz  $C$ , creada con 64 nodos en la frontera con 16 electrodos. Cada electrodo consta de 3 vértices y hay espacio de un vértice entre electrodos contiguos en la frontera de la malla

### 3.8.2. Estrategia de solución del sistema

Buscamos resolver el sistema  $Af = b$ , cuya expresión es:

$$\begin{bmatrix} B & C \\ C^T & D \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ \tilde{I} \end{bmatrix}.$$

Equivalentemente, este sistema se puede representar como

$$B\alpha + C\beta = \mathbf{0} \quad (3.41)$$

$$C^T\alpha + D\beta = \tilde{I} \quad (3.42)$$

donde  $\mathbf{0} \in \mathbb{R}^N$  es el vector cero (columna).

Multiplicando la ecuación (3.41) por la izquierda con la matriz  $B^{-1}$  y despejando  $\beta$  obtenemos

$$\alpha = -B^{-1}C\beta \quad (3.43)$$

Sustituyendo esta expresión en (3.42) se sigue

$$(D - C^T B^{-1} C)\beta = \tilde{I} \quad (3.44)$$

Por otro lado, si definimos a la matriz  $G := B^{-1}C$ , entonces  $BG = C$ . En consecuencia para cada  $1 \leq i \leq L - 1$  sucede que si  $g_i$  y  $c_i$  son la columna  $i$  de  $G$  y la de  $C$  respectivamente, entonces  $Bg_i = c_i$ . Es decir, las columnas de  $G$  se pueden encontrar mediante la solución de  $L - 1$  sistema lineales. Esto permite plantear un algoritmo para obtener  $G \approx B^{-1}C$ .

Es importante señalar que la solución de cada sistema lineal del ciclo es independiente de la de los demás. Esto abre la posibilidad de implementar en paralelo al **Algoritmo 13**. De hecho, dado que la matriz  $B$  es rala y definida positiva los sistemas  $Bc_i = g_i$  se pueden abordar con procedimientos basados en subespacios de Krylov, es decir, métodos iterativos que exploten multiplicaciones vector-vector y matriz-vector, como el método de gradiente conjugado (véase **Algoritmo 12**).

Por otro lado, podemos replantear la ecuaciones (3.43) y (3.44) usando a la aproximación  $G$  de  $B^{-1}C$ , con las expresiones

$$(D - C^T G)\beta = \tilde{I} \text{ y } \alpha = -G\beta.$$

---

**Algorithm 13** Aproximación de  $B^{-1}C$ 

---

**Data:**  $B \in \mathbb{R}^{\mathcal{N} \times \mathcal{N}}$ ,  $C \in \mathbb{R}^{\mathcal{N} \times L-1}$ **Result:**  $G$  aproximación de  $B^{-1}C$ 

- 1: **for**  $1 \leq i \leq L - 1$  **do**
- 2:     Obtén la  $i$ -ésima columna  $C$ ,  $c_i$
- 3:     Obtén la solución aproximada de  $Bg_i = c_i$  por algún método.
- 4: **end for**
- 5: Forma la matriz  $G \in \mathbb{R}^{\mathcal{N} \times (L-1)}$  que tiene por columnas a los vectores  $g_1, \dots, g_{L-1}$ , i.e.,

$$G = [g_1 \mid \dots \mid g_{L-1}]$$


---

El siguiente algoritmo resume las observaciones expuestas hasta aquí para obtener los valores de la solución del MEF:

---

**Algorithm 14** Coeficientes  $\alpha_i$  y  $\beta_j$ 

---

**Data:**  $B \in \mathbb{R}^{\mathcal{N} \times \mathcal{N}}$ ,  $C \in \mathbb{R}^{\mathcal{N} \times L-1}$  y  $D \in \mathbb{R}^{L-1 \times L-1}$ **Result:** Forma  $B$  usando los algoritmos**Result:** Vectores  $\alpha$  y  $\beta$ 

- 1: Obtén  $G \approx B^{-1}C$  usando el **Algoritmo 13**
  - 2: Resuelve el sistema  $(D - C^T G)\beta = \tilde{I}$
  - 3:  $\alpha \leftarrow -G\beta$
- 

Hay varios puntos que deseamos resaltar sobre lo expuesto hasta aquí:

- El sistema original  $A$  es de  $\mathcal{N} + L - 1$ , constituido por submatrices ralas, a saber  $C$ ,  $C^T$  y  $B$ , pero con  $D$  una submatriz densa.
- El análisis anterior plantea resolver el sistema original mediante la solución de  $L - 1$  sistemas de  $\mathcal{N} \times \mathcal{N}$  y otro de dimensión  $(L - 1) \times (L - 1)$ . Es decir reduce el tamaño del sistema lineal del problema original a costa de aumentar el número de sistemas a resolver pero de tamaño menor.
- Es plausible suponer que el número de electrodos colocados en la superficie del cuerpo es mucho menor al número de nodos necesarios para que la malla nos brinde una aproximación que refleje la física del fenómeno, es decir  $L \ll \mathcal{N}$ .

De modo que todo queda en sistemas lineales que tiene el tamaño de los nodos de la malla y uno que de tamaño considerablemente pequeño.

Dado que tenemos algoritmos para formar las matrices asociadas al MEF y otros respectivos para obtener a los vectores  $\alpha$  y  $\beta$ , podemos plantear como obtener los valores de  $u^h$  en los nodos y el voltaje en electrodos. Para ello recordemos que  $\alpha_j$  corresponden  $u^h(N_j)$  y también que las ecuaciones (3.5) y (3.6) dicen como recuperar  $U_l^h$  a partir de  $\beta$ . El algoritmo propuesto es el siguiente:

---

**Algorithm 15** Solución de problema directo

---

**Data:** Información de la malla, valores de impedancia  $z_l$  y voltaje  $I_l$ , Conductividad  $\sigma$

**Result:** Valores  $u^h(N_1), \dots, u^h(N)$  y  $U_1^h, \dots, U_L^h$

- 1: Forma a la matriz  $C$  usando el **Algoritmo 8**
  - 2: Forma a la matriz  $D$  usando el **Algoritmo 9**
  - 3: Forma a la matriz  $W$  usando el **Algoritmo 10**
  - 4: Forma a la matriz  $M$  usando el **Algoritmo 11**  $\triangleright$  Única matriz que depende de  $\sigma$
  - 5:  $B \leftarrow M + W$
  - 6: Calcula  $\alpha$  y  $\beta$  usando el **Algoritmo 14** y las matrices  $B, C$  y  $D$ .
  - 7: **for**  $1 \leq j \leq \mathcal{N}$  **do**
  - 8:      $u^h(N_j) \leftarrow \alpha_j$
  - 9: **end for**
  - 10: **for**  $1 \leq j \leq L$  **do**
  - 11:     **if**  $j = 1$  **then**
  - 12:          $U_1^h \leftarrow \sum_{i=1}^{L-1} \beta_i$
  - 13:     **else**
  - 14:          $U_j^h \leftarrow -\beta_{j-1}$
  - 15:     **end if**
  - 16: **end for**
- 

En el siguiente capítulo presentaremos algunos resultados numéricos obtenidos basándonos en los esquemas presentados aquí y discutiremos algunos detalles relacionados con la eficiencia del código.

# CAPÍTULO 4

---

## Resultados

---

En esta sección presentamos los resultados obtenidos con la implementación en Python del método de elemento finito para el caso en que el dominio  $\Omega$  es un círculo centrado en el origen.

Nuestro interés es ver los efectos de una inclusión  $\mathcal{D}$ , presente en la sección de estudio. En el contexto del problema de tomografía de impedancia, esta representa una anomalía estructuralmente distinta al tejido circundante  $\mathcal{B} = \Omega \setminus \mathcal{D}$ , la cual puede ser responsable de modificar las propiedades eléctricas del mismo.

Mostraremos los datos obtenidos para diferentes tipos de inclusiones y discutiremos los perfiles de voltaje dentro del cuerpo y en los electrodos.

### 4.1. Datos de la simulación numérica

Supusimos que  $\Omega$  es un círculo de radio  $r = 10$  al que se le colocan 16 electrodos en la superficie. Los detalles de como fue construida la malla se especifican en la sección 3.7. Agregaremos que en este caso de implementación:

- El número de nodos en la frontera se fijo como  $n_b = 64$ . La sucesión  $\{c_j\}_{j=1}^{13}$  se

construyó de modo que

$$c_j = \frac{14-j}{13} \text{ para } 1 \leq j \leq 13$$

- La disposición de los electrodos se tomó como en (3.36). Una representación gráfica de su disposición se muestra en la figura 4.1.

La información de la malla genera se expone en el siguiente cuadro:

Dato	Valor
Nodos	897
Elementos	1728
$h$	1.18510300321
Nodos en la frontera	64
Electrodos	16
Nodos por electrodo	3

Cuadro 4.1: Datos de la malla

Adicionalmente suponemos que el cuerpo en estudio contiene un conjunto  $\mathcal{D}$  llamado inclusión, que es la unión de conjuntos abiertos disjuntos a pares con frontera suave, que se encuentra lejos de  $\partial\Omega$ .



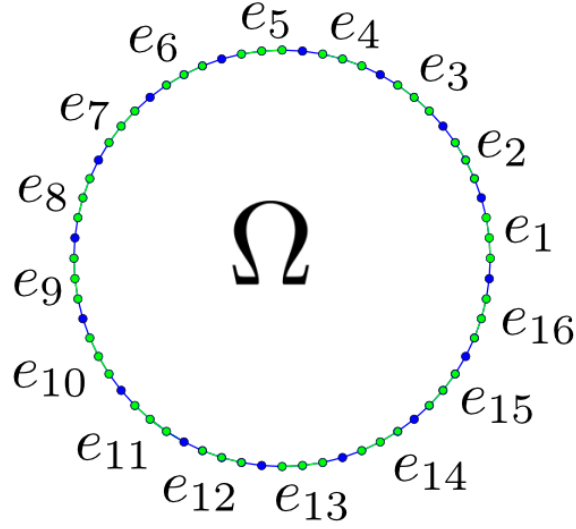


Figura 4.1: Representación de los electrodos alrededor de  $\Omega$

La conductividad eléctrica de la inclusión será representada  $\sigma_{\mathcal{D}} : \mathcal{D} \rightarrow \mathbb{R}_+$  y la del tejido circundante  $\mathcal{B} := \Omega \setminus \mathcal{D}$  por  $\sigma_{\mathcal{B}} : \mathcal{B} \rightarrow \mathbb{R}_+$ . De este modo, la conductividad de  $\Omega$  queda definida como:

$$\sigma(x) = \begin{cases} \sigma_{\mathcal{D}}(x) & x \in \mathcal{D} \\ \sigma_{\mathcal{B}}(x) & x \in \Omega \setminus \mathcal{D} \end{cases} \quad (4.1)$$

Las funciones  $\sigma_{\mathcal{D}}$  y  $\sigma_{\mathcal{B}}$  son supuestasas suficiente suaves sobre sus dominios y en las fronteras de estos para garantizar que  $\sigma$  se encuentre del conjunto de conductividades admisible, i.e.,  $\sigma \in \mathcal{A}$ .

Con el fin de ilustrar el funcionamiento del código implementado, los datos de corriente e impedancia de contacto se generaron aleatoriamente dentro de ciertos rangos, ambos de manera que los puntos elegidos fueran uniformes dentro de dos umbrales. Para los valores de corriente eléctrica estos fueron tomados como  $5 \times 10^{-4}$  y  $1.5 \times 10^{-3}$ . Los umbrales para la impedancia de contacto se tomaron como 1 y 5. Estos datos se ofrecen en los cuadros:

Índice $l$	Valor de $z_l$	Índice $l$	Valor de $z_l$
1	1.04425522584	9	1.09765152705
2	2.19371103731	10	1.7696807857
3	3.77698032413	11	2.61071300997
4	3.72136527528	12	3.02821309917
5	4.85481984315	13	2.81407967545
6	2.40996999014	14	1.89399752608
7	2.45479029997	15	3.5232839059
8	2.67025522789	16	3.54565288178

Cuadro 4.2: Impedancias de contacto

Índice $l$	Valor de $I_l$	Índice $l$	Valor de $I_l$
1	0.00102412613371	9	0.000826283617905
2	0.00148846941716	10	0.00145417313788
3	0.00085136458016	11	0.000970426135568
4	0.00134017956689	12	0.000998324543899
5	0.000848991510851	13	0.000643628270112
6	0.000928652752532	14	0.00125179063638
7	0.00146061280082	15	0.000954287012545
8	0.00147620467685	16	0.00122205428338

Cuadro 4.3: Intensidades de corriente

Los datos de impedancia de contacto y corriente eléctrica en los electrodos se mantienen fijos en los ejemplos que se discuten en este capítulo.

La implementación realizada para dar solución al sistema lineal derivado en el MEF, basada en el **Algoritmo 15**, usa el método de gradiente conjugado para obtener una matriz  $G$  tal que  $G \approx B^{-1}C$  (véase el **Algoritmo 13**).

Por otro lado, en los casos presentados exhibimos una representación de la inclusión considerada. Mostramos el perfil del voltaje obtenido a través del MEF dentro de la región en estudio usando una escala de colores asociada al valor obtenido en cada nodo. Un gráfico que indica el porcentaje de discrepancia entre los datos de voltaje de los electrodos para el caso sin inclusión y con ella se anexa para facilitar

comparaciones. También anexamos gráficos relativos a los datos de voltaje en los electrodos.

## 4.2. Inclusiones consideradas y resultados

Por simplicidad, en los casos elegidos se supone que tanto la inclusión  $\mathcal{D}$  como el tejido circundante  $\mathcal{B}$  tienen conductividad constante. Este caso es conocido como homogéneo.

Los valores que fijamos para estos conjuntos, en todos los ejemplos que se presentan a continuación, fueron  $\sigma_{\mathcal{D}} = 100$  y  $\sigma_{\mathcal{B}} = 1$ .

Advertimos al lector que en el primer caso, donde no hay inclusión presente, mostramos los valores de voltaje por electrodo en una gráfica de barras. Estos son tomados como referencia para mostrar los datos de voltaje por electrodo en los casos subsiguientes como sigue: si  $U_l^{ref}$  denota el valor del voltaje en el electrodo  $l$  a cuando no hay inclusión presente y  $U_l$  el mismo dato pero correspondiente al caso en estudio, denominamos *porcentaje de discrepancia de voltaje en electrodo  $e_l$*  al valor:

$$\text{Porcentaje de discrepancia de voltaje } e_l: \quad \frac{U_l - U_l^{ref}}{U_l^{ref}} \times 100\% \quad (4.2)$$

Esta magnitud dice el porcentaje de aumento o disminución de voltaje que hay en el electrodo  $e_l$  con respecto de cuando no hay inclusión. Así pues, un gráfico que muestra el porcentaje de discrepancia de todos los electrodos acompaña los demás casos.

Ahora procederemos a mostrar los resultados de cada caso considerado.

- H.1 *No hay inclusión presente en el cuerpo.* Podemos pensar que esta situación corresponde a que el tejido en estudio se encuentra sano y que su conductividad es uniforme.

El perfil de voltaje obtenido se muestra en la figura 4.2. Hay varios puntos que debemos resaltar a partir de este gráfico:

- Las secciones de  $\Omega$  cercanas a los electrodos presentan valores de voltaje dispares. La parte cercana a la frontera en los cuadrantes inferiores tiene valores negativos bajos y en contraparte la que corresponde con la frontera oeste muestra voltaje positivo alto. Las partes norte y noreste presentan valores ligeramente superiores a cero, mientras que la sur toma los voltajes más bajos del dominio. La disposición de los electrodos, el voltaje aplicado y las características del cuerpo en estudio son responsables, presumiblemente, de este fenómeno.
- En la sección central de círculo se mantienen valores de voltaje próximos a cero. Este es un efecto que puede explicarse en términos de la lejanía de la inclusión respecto a los puntos donde se inyecta corriente.

La distribución de voltaje en los electrodos se aprecia en la figura 4.3. Los electrodos 7, 8, 9 y 10 tienen valores positivos altos, que corresponden a la sección oeste de la frontera del círculo. Similarmente, los electrodos 1 y 11-15, con excepción del 14, tienen valores negativos. La ubicación de estos corresponde con la sección azul del perfil comentado arriba.

Dado que pensamos que este caso representa al tejido sano, los valores de voltaje obtenidos aquí, tanto en el cuerpo como en los electrodos, serán tomados como referentes en el análisis de la presencia de inclusiones. Con esto en mente, más adelante se mostrará una gráfica que exhibe el porcentaje de discrepancia entre los voltajes del caso libre de inclusión y los obtenidos cuando  $\mathcal{D}$  está presente dentro en  $\Omega$ .

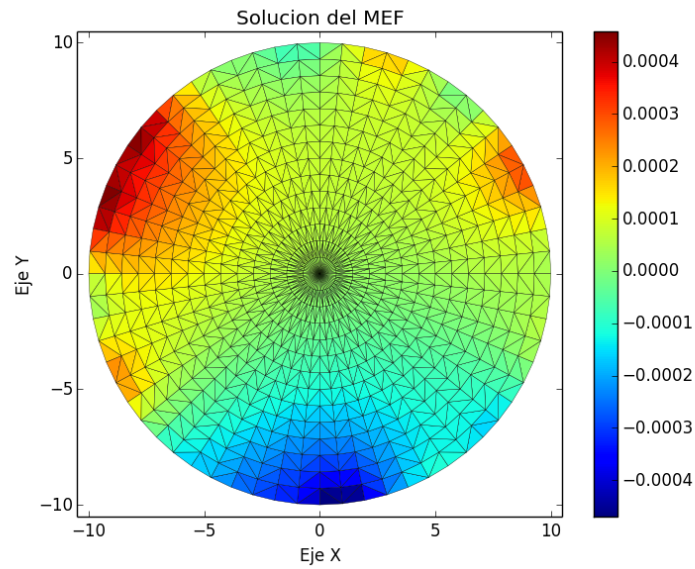


Figura 4.2: Perfil de voltaje sin inclusiones

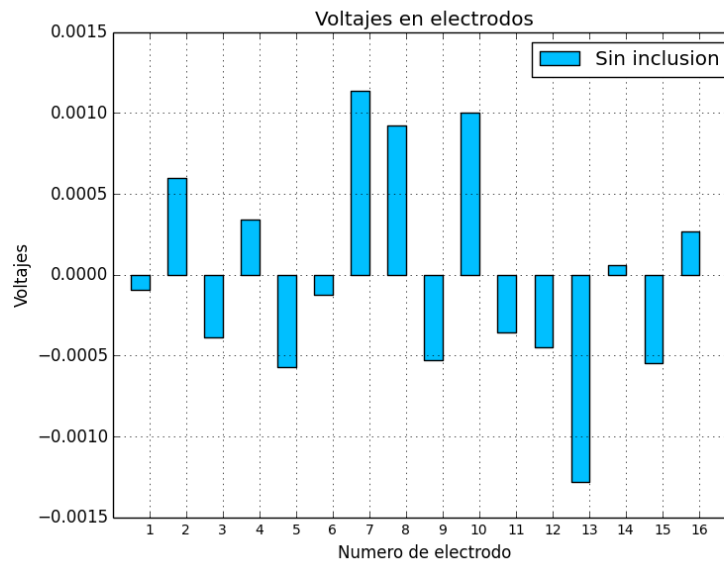


Figura 4.3: Voltajes en los electrodos

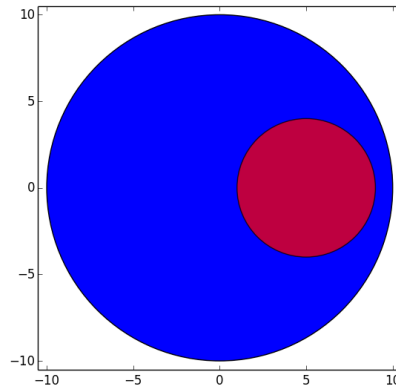


Figura 4.4: Inclusión de un círculo grande

- H.2a *La inclusión es un círculo grande.* En términos precisos, tomamos el valor del radio como 4 y por su centro a (5, 0). Este caso corresponde con la presencia de una anomalía de tejido de tamaño considerable que se encuentra relativamente cerca de la ubicación de algunos electodos y que la conductividad de esta es uniforme, así como la del tejido circundante. Véase la figura 4.4.

Al comparar la gráfica del perfil de voltajes con la del caso en que no hay inclusión presente, se observa que el área donde se encuentra la inclusión y alrededores se ha tornado ligeramente verde claro, lo que corresponde a un descenso sustantivo en el voltaje en la zona donde se ubica.

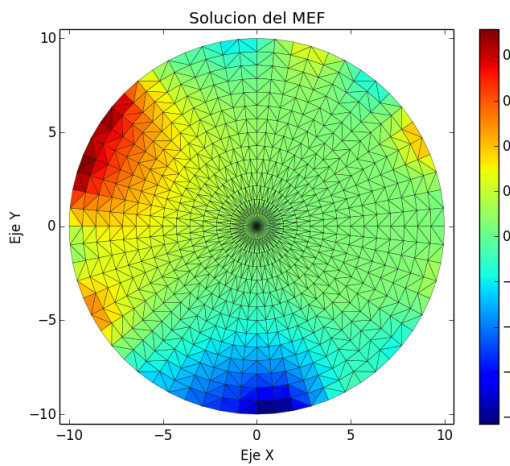


Figura 4.5: Perfil de voltaje en  $\Omega$

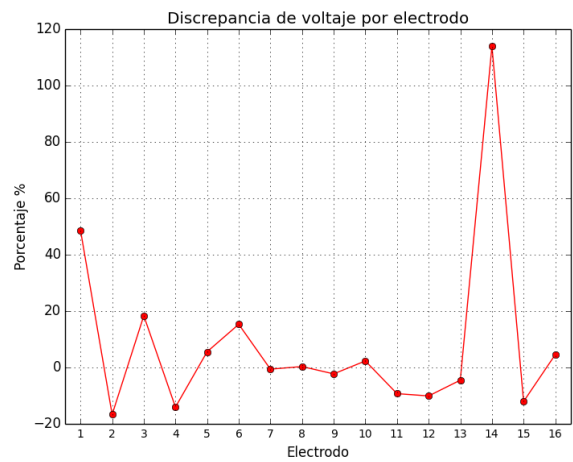


Figura 4.6: Voltajes en los electodos

Este hecho se confirma en la figura 4.6, al menos para los electrodos, pues los que corresponden a los índices desde el 2, 4, 7, 8, 0, 11, 12, 13 y 15 muestran porcentajes de discrepancia negativos respecto a los del tejido sano, esto es, han decrecido en sus valores moderadamente. Por otro lado, el porcentaje correspondiente a los demás electrodos es considerablemente elevado.

Este caso muestra que el modelo (2.13) permite observar cambios de la información eléctrica de  $\Omega$  ante la presencia de una anomalía  $\mathcal{D}$ . Más aún, dado que hemos observado un cambio importante entre los voltajes del tejido sano y con una inclusión dentro de sí, parece plausible diferenciar entre ambos por medio de los datos recabados en electrodos. Esto exhibe que, al menos en este caso particular, la física del problema es reproducida de manera fidedigna por el modelo.

- H.2b *La inclusión es un cuadrado grande.* En este caso vamos a considerar un cuadrado que mide 3.3 unidades por lado y cuyo centro (de masas) está en el punto  $(5, 0)$ . Esencialmente aquí la inclusión tiene aproximadamente las mismas dimensiones que en el caso H.2a, se localiza en la misma zona pero su forma es distinta: un cuadrado (véase figura 4.7).

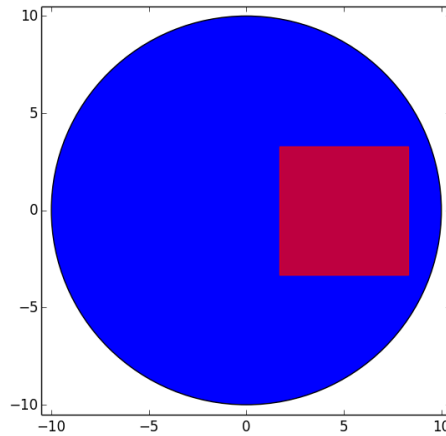


Figura 4.7: Inclusión de un cuadrado

Similarmente a lo que sucede en el caso anterior, si comparamos la gráfica del perfil de voltajes con la del caso en que no hay inclusión presente, el área donde

se encuentra la inclusión y alrededores se ha tornado ligeramente verde claro. Esto es, hubo un descenso sustantivo en el voltaje en la parte donde esta se encuentra.

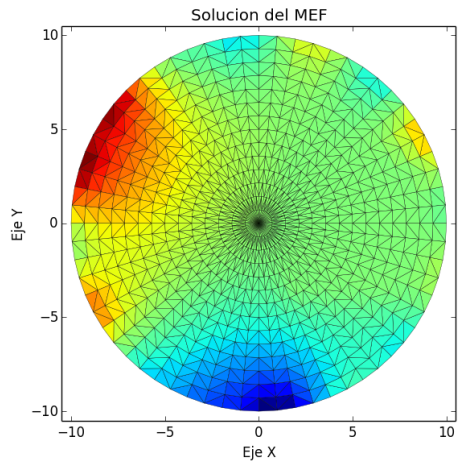


Figura 4.8: Perfil de voltaje en  $\Omega$

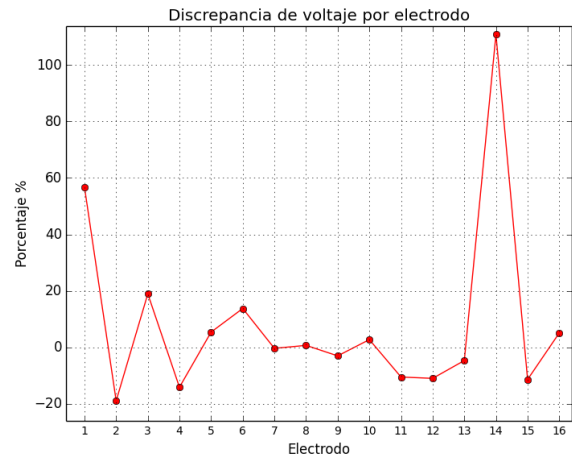


Figura 4.9: Voltajes en los electrodos

Subrayamos que los valores de discrepancia de voltaje que se obtienen con el cuadrado son muy similares a los obtenidos en el caso H.2a. Este hecho puede corroborarse en la figura 4.10.

Lo observado aquí es relevante para la solución del problema inverso pues dice que inclusiones cuyas formas no son muy similares podrían dar datos de voltaje en electrodos cuantitativamente parecidos.



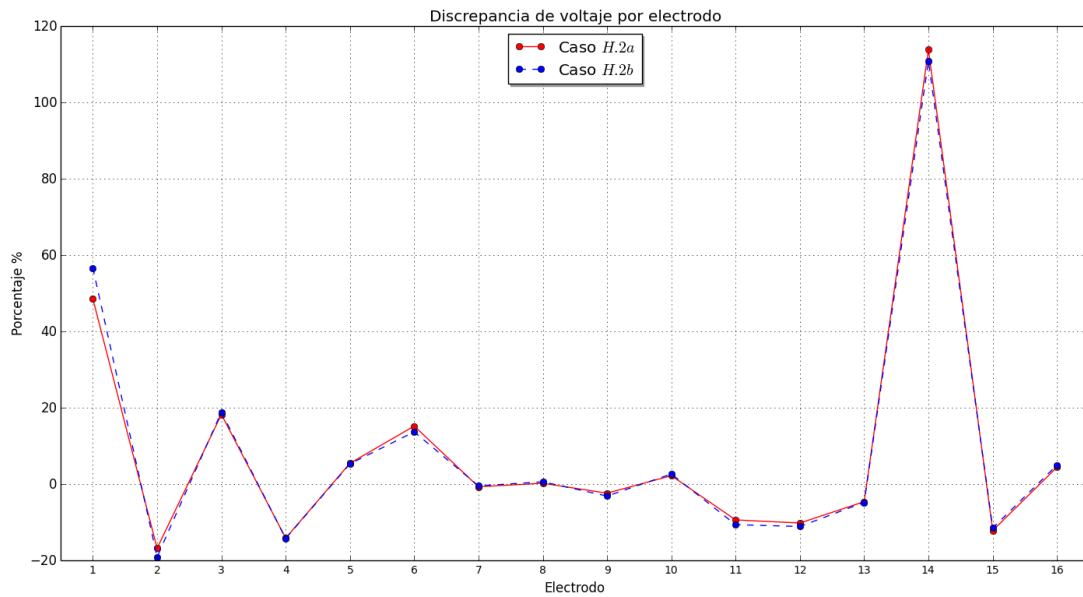


Figura 4.10: Discrepancia de voltaje para H.2a y H.2b

- H.3a *La inclusión es un círculo grande en el centro del dominio* Aquí consideramos un círculo de radio 4 centrado en el origen. Básicamente hemos desplazado más hacia el centro a la inclusión del caso H.2a.

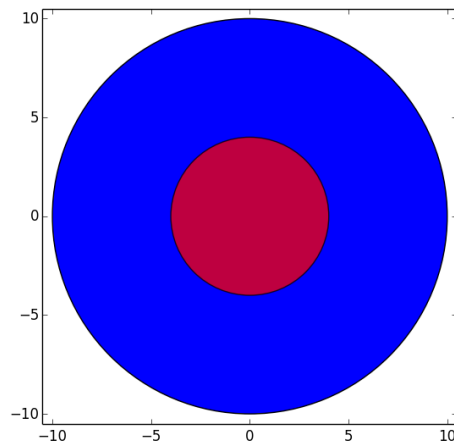


Figura 4.11: Inclusión de un cuadrado

Si comparamos el perfil de voltaje obtenido en este caso (figura 4.12) con el del caso sin inclusión (figura 4.2), notamos que el área central del dominio se ha tornado ligeramente verde, lo que corresponde a que el valor de voltaje ahí es cercano a cero. Esto difiere a lo ocurrido en el caso H.2a, donde la parte este de  $\Omega$  se tornaba verde. Lo que indica que hay un efecto notable de la ubicación de la inclusión sobre el perfil del voltaje obtenido.

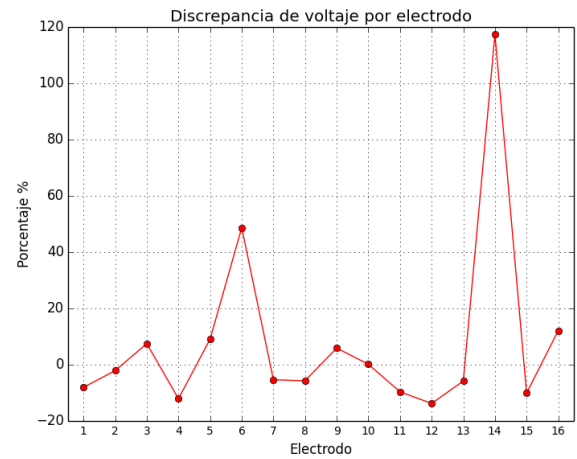
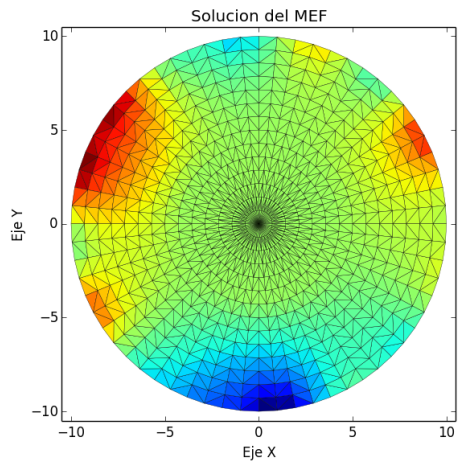


Figura 4.12: Perfil de voltaje en  $\Omega$       Figura 4.13: Voltajes en los electrodos

Lo anterior se corrobora en la figura 4.14, que compara los valores de discrepancia de voltaje para los casos H.2a y H.3a. En tal gráfico se observa como la misma inclusión, pero en diferente lugar, genera datos de voltaje en los electrodos que son cualitativamente distintos en casi cada uno de ellos.

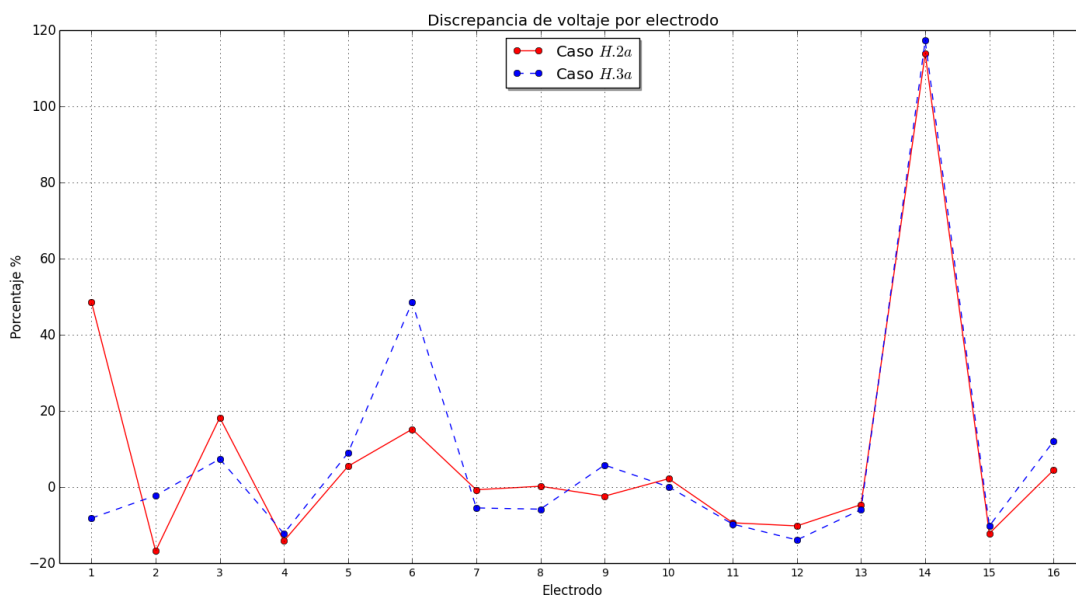


Figura 4.14: Discrepancia de voltaje para H.2a y H.3a

- H.3b *La inclusión es un círculo pequeño en el centro del dominio.* El círculo en cuestión tiene radio 0.9 y su centro es el origen. La representación de ésta se puede ver en la figura 4.15.

Esta situación puede representar la presencia de un anomalía uniforme de tamaño minúsculo que se encuentra profundamente dentro de un tejido en estudio.

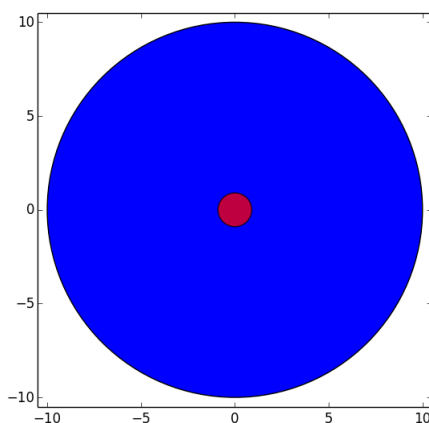


Figura 4.15: Inclusión de un círculo pequeño

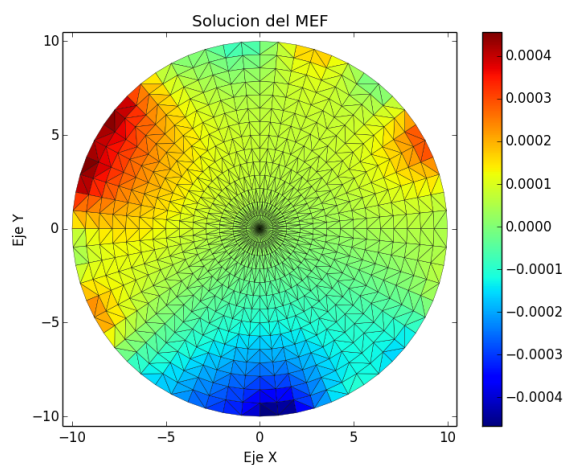


Figura 4.16: Perfil de voltaje en  $\Omega$

Si comparamos el perfil de voltaje de la figura 4.16 con el descrito en el problema sin inclusión, véase figura 4.2, se observa que son similares en regiones que se alejan del centro, área donde se localiza la inclusión.

De hecho los porcentajes de discrepancia entre los datos de voltaje de los electrodos para el caso sin inclusión y con  $\mathcal{D}$  presente se encuentran todos en la banda de  $-5\%$  y  $5\%$ . Es decir, ambos perfiles son muy similares aunque no iguales (véase la gráfica 4.17). Este efecto es debido presumiblemente al tamaño de la inclusión y a su lejanía respecto de la zona de inyección de corriente.

Lo mostrado anteriormente es relevante para el problema inverso, pues exhibe que los datos recabados en los electrodos deben analizarse con cautela en virtud de que los que corresponden a ciertas anomalías pueden parecerse a los de un tejido sano, sobre todo por el efecto de ruido en las mediciones.

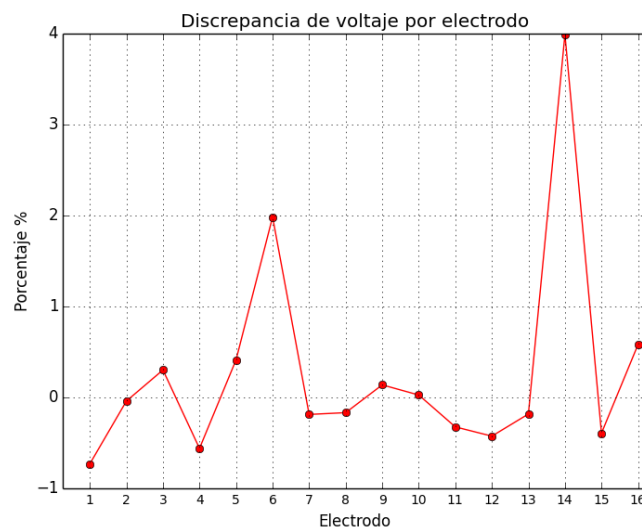


Figura 4.17: Voltajes en los electrodos

En particular nuestra discusión anterior muestra que los perfiles de voltaje para este caso y el H.3a son muy diferentes, véase las figuras 4.12 y 4.16. De hecho si se comparan las discrepancias de voltaje obtenidas en cada caso, observamos patrones completamente distintos (véase figura 4.18). Esto nos lleva

a presumir un efecto destacado del tamaño de la inclusión para los resultados del problema directo y que deben ser tomados en cuenta para la solución del problema inverso.

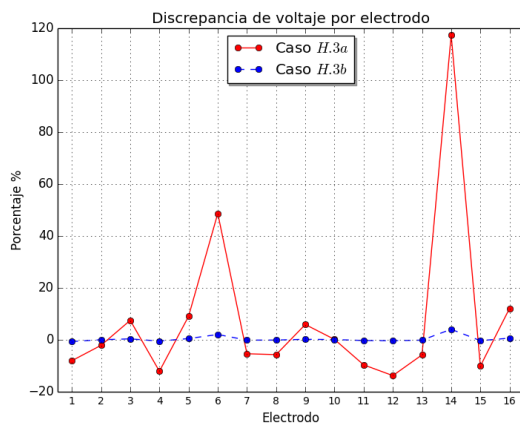


Figura 4.18: Discrepancia de voltaje para H.3a y H.3b

- H.4 *Dos inclusiones circulares grandes* . La inclusión aquí fue considerada como dos círculos de radio 4 cuyos centros se localizan en los puntos  $(-5, 0)$  y  $(5, 0)$ .

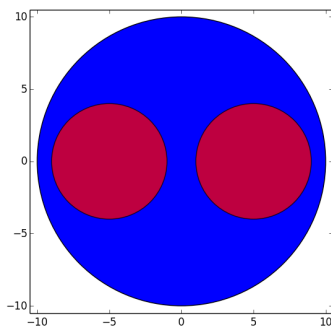


Figura 4.19: Inclusión de dos círculos

Al comparar las figuras 4.2 con 4.20 observamos que el perfil de voltaje del tejido sin inclusión ha sido profundamente alterado. Las áreas donde se localizan las inclusiones muestran ahora valores positivos y también sus alrededores.

Del mismo modo, la gráfica de porcentaje de discrepancia entre los datos de voltaje de los electrodos para el caso sin inclusión y con  $\mathcal{D}$  presente muestra grandes incrementos en los electrodos 3,5,6 y 14 y descensos moderados en aquellos cuyos índices son 2,7,8,11,12,13 y 15.

De nuevo podemos concluir que el perfil eléctrico ha sido modificado por la presencia de la inclusión y que los datos de los electrodos son un reflejo de la alteración del tejido sano.

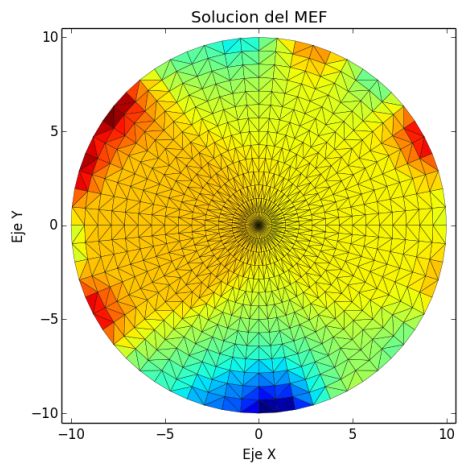


Figura 4.20: Perfil de voltaje en  $\Omega$

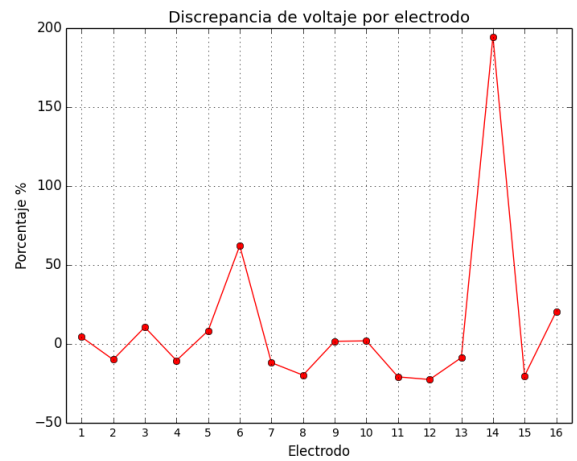


Figura 4.21: Voltajes en los electrodos

- H.5 *Diez inclusiones en forma de círculos pequeños.* Esto corresponde físicamente con que el cuerpo presentara un enfermedad que le provocara presencia de muchas anomalías de tejido, pero que todas ellas de tamaño pequeño a comparación de donde se localizan.

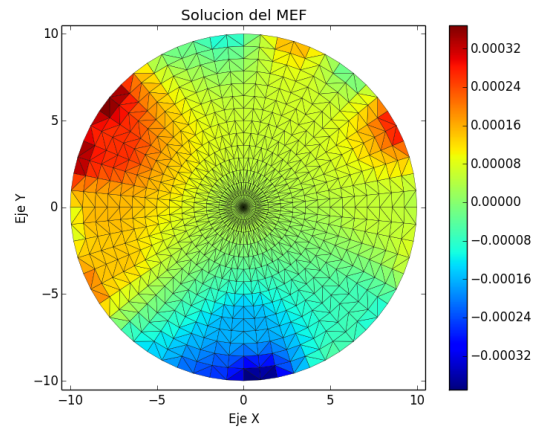
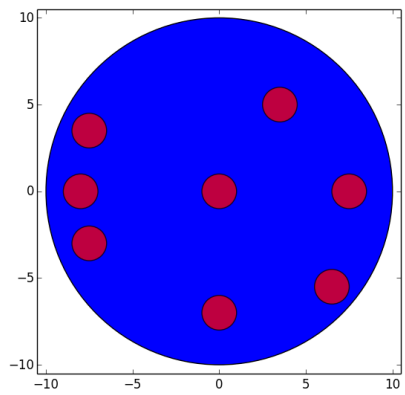


Figura 4.22: Inclusión de ocho círculos      Figura 4.23: Perfil de voltaje en  $\Omega$

En este caso las regiones de voltaje alto y bajo se encuentran más definidas que para el tejido sano. Esto ocurre en las zonas cercanas a donde localizan los círculos pequeños que conforman a  $\mathcal{D}$ . De hecho las regiones próximas a algunos electrodos, que originalmente tenían valores de voltaje positivos altos, muestran aumentos considerables de esta magnitud. En el caso de los electrodos 1, 3, 5, 6 y 14 hubo una disminución moderada.

Nuevamente, este ejemplo muestra como la presencia de la inclusión modifica el perfil de voltaje y las mediciones en los electrodos. Además de que hay una dependencia presumiblemente asociada al tamaño y localización de las anomalías.

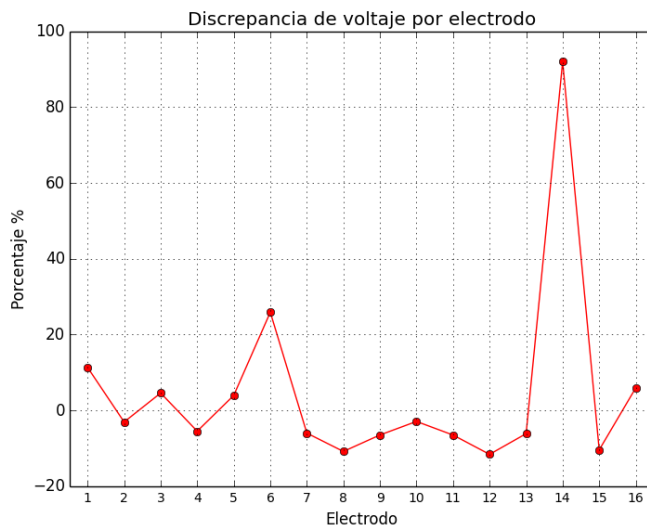


Figura 4.24: Voltajes en los electrodos

### 4.3. Datos de ejecución del programa implementado

En esta parte del capítulo brindaremos información acerca de la ejecución del código implementado en Python para resolver el problema directo. Nos centraremos en los tiempos de ejecución de distintas partes del algoritmo, el número de iteraciones del método de gradiente conjugado y las llamadas a función realizadas.

Recordemos que las especificaciones de la malla usada han sido detalladas previamente en el cuadro 4.1. Para describirla, es necesario armar un par matrices que dan la información de sus nodos y elementos. El tiempo necesario para producir estos datos fue de  $0.074s$ . Cabe destacar que, aunque nuestro programa integró la generación de estas matrices en cada caso, es posible hacer el proceso previamente y proveer los datos al programa de manera independiente.

Otra parte importante de la implementación son las estrategias para formar a las matrices asociadas al método de elemento finito  $M$ ,  $W$ ,  $B$ ,  $C$  y  $D$ . La sección 3.6 muestra a detalle nuestro procedimiento. La idea es usar aproximaciones numéricas de las integrales de las funciones base asociadas, explotando la simetría algunas de



estas las matrices y la estructura intrínseca del mallado.

Los tiempos que toma formar a las matrices en cuestión se reportan a continuación:

Caso	$M$	$W$	$B$	$C$	$D$	Total
H1	0.126 s	0.160 s	0.286 s	0.013 s	$\leq 10^{-3}$ s	0.299 s
H2a	0.121 s	0.206 s	0.327 s	0.013 s	$\leq 10^{-3}$ s	0.340 s
H2b	0.124 s	0.178 s	0.302 s	0.013 s	$\leq 10^{-3}$ s	0.315 s
H3a	0.125 s	0.215 s	0.340 s	0.014 s	$\leq 10^{-3}$ s	0.354 s
H3b	0.118 s	0.202 s	0.320 s	0.012 s	$\leq 10^{-3}$ s	0.332 s
H4	0.121 s	0.240 s	0.261 s	0.013 s	$\leq 10^{-3}$ s	0.274 s
H5	0.115 s	0.441 s	0.556 s	0.012 s	$\leq 10^{-3}$ s	0.568 s

Cuadro 4.4: Tiempos de formación de las matrices del sistema

Podemos notar que los tiempos que corresponden a la matriz  $M$  en los cinco casos son muy parecidos. Esto sucede también para  $C$  y  $D$ . La razón de este hecho se encuentra en que las entradas que las definen no son dependientes de la conductividad  $\sigma$ , sino que quedan en términos de integrales asociadas a las funciones  $\{\varphi_i\}_{i=1}^N$  sobre los electrodos y elementos. En consecuencia la generación de estas matrices debe hacerse antes de llevar a cabo la solución sistema lineal, independientemente de la expresión de la conductividad considerada.

En contraste, los tiempos de formación de la matriz de rigidez  $W$  son diferentes entre sí. De hecho la complejidad de la inclusión considerada se ve reflejada en el aumento del tiempo necesario para ensamblar esta matriz. Esto es consecuencia de que la regla de cuadratura usada para aproximar las integrales que definen sus entradas requiere evaluar la función  $\sigma$  en el centroide de los elementos, invirtiendo mayor cantidad de tiempo cuando la expresión de la conductividad es muy elaborada, aunado por supuesto a la complejidad de la estructura de la malla subyacente.

Al par de los comentarios anteriores, debemos remarcar que la formación de todas estas matrices toma apenas décimas de segundos; lo que refleja la eficiencia de los algoritmos planteados en la sección 3.6.

Otra punto esencial de la implementación es obtener una aproximación de la

matriz  $B^{-1}C$  mediante la solución de una serie de sistemas lineales de la forma

$$Bg_i = c_i \text{ para } 1 \leq i \leq 15$$

Este procedimiento es englobado en el **Algoritmo 13**. El proceso de solución de estos fue hecho usando el método de gradiente conjugado, con un valor de tolerancia  $tol = 10^{-6}$  para detener el proceso iterativo.

El cuadro 4.5 nos da el tiempo de ejecución del **Algoritmo 13** en su segunda columna. La tercera de estas nos muestra el tiempo total que el método de gradiente conjugado ha usado en la solución de los sistemas asociados. Este valor es dividido entre 15 para brindar, en la última columna, un promedio del tiempo invertido para resolver cada sistema.

Caso	Tiempo			Caso	GC
	Algoritmo 13	GC	GC por sistema		Iteraciones promedio
H1	3.418 s	3.417 s	0.213 s	H1	206.133
H2a	19.640 s	19.639 s	1.227 s	H2a	1258.266
H2b	17.151 s	17.150 s	1.071 s	H2a	1082.733
H3a	19.218 s	19.217 s	1.201 s	H3a	1235.2
H3b	10.290 s	10.289 s	0.643 s	H3b	678.933
H4	16.080 s	16.079 s	1.004 s	H4	1009.0
H5	21.600 s	21.599 s	1.350 s	H5	1431.733

Cuadro 4.5: Algunos tiempos de ejecución    Cuadro 4.6: Iteraciones promedio del método GC

El hecho de que el lapso para llevar a cabo el **Algoritmo 13** sea mayor a 13 segundos en casi todos los casos tiene su explicación en el tiempo que toma al método de gradiente conjugado aproximar la solución de cada sistema  $Bg_i = c_i$ . Cabe destacar nuestro programa resuelve un sistema lineal a la vez y esto genera una cola de  $L - 1$  procesos. Aún cuando el método iterativo se encarga de cada sistema en un lapso por debajo del segundo y décimas, esto hecho hace más lenta la obtención de la aproximación.

Respecto al número de iteraciones que el gradiente conjugado necesita para alcanzar la tolerancia dada, el cuadro 4.3 muestra que en todos los casos el número de iteraciones promedio siempre es menor que el doble de dimensión de la matriz  $B$ .

A la luz de lo expuesto en los párrafos anteriores, es necesario adoptar estrategias para que permitan realizar el proceso de forma más eficiente. Algunas ideas que se pueden explotar en trabajo posterior son:

- Modificar el método de gradiente conjugado para incluir un preconditionador, cautelosamente diseñado, con el objetivo de mejorar el número de iteraciones en que se obtiene convergencia.
- Paralelizar el proceso de solución de los sistemas  $Bg_i = c_i$ , dado que cada uno es independiente de los otros.

El tiempo total de la ejecución del programa para los cinco casos considerados se muestra en el cuadro 4.7. Este refleja una dependencia directa entre la complejidad de la inclusión y el tiempo necesario para obtener la solución del sistema lineal asociado al MEF. Como fue comentado anteriormente, gran parte del tiempo total es invertido en el Algoritmo 13, mediante el método de gradiente conjugado.

Finalmente, el cuadro 4.8 nos muestra en su primera columna el número de llamadas a funciones que requirió el programa excluyendo llamadas a subfunciones, es decir, la cantidad de funciones primitivas. La segunda muestra el número total de llamadas a función.

Ejecución total	
Caso	Tiempo
H1	3.939 s
H2a	20.211 s
H2b	17.690 s
H3a	19.797 s
H3b	10.865 s
H4	16.694 s
H5	22.447 s

Cuadro 4.7: Tiempos totales de ejecución

Llamadas a funciones		
Caso	Primitivas	Totales
H1	185892	187255
H2a	228274	229637
H2b	216630	217993
H3a	227526	228889
H3b	210496	211859
H4	233634	234997
H5	317628	318991

Cuadro 4.8: Llamadas a función de la implementación

# CAPÍTULO 5

---

## Discusión

---

En este capítulo unificaremos todos los conceptos expuestos previamente con el objetivo de plantear una estrategia de cuantificación de incertidumbre para el problema de tomografía de impedancia eléctrica.

### 5.1. Sobre la estrategia propuesta

Supongamos que  $d \in \mathbb{R}^L$  representa las mediciones de voltaje en los electrodos y que un vector de parámetros  $\Theta \in \mathbb{R}^n$  describe la conductividad eléctrica de la sección en estudio,  $\sigma = \sigma(\Theta)$ . Este vector modela la información de la conductividad del cuerpo que tenemos disponible para caracterizar a la función  $\sigma$ . Usando lo anterior, podemos definir al mapeo  $\Psi : \Theta \rightarrow u^h$  que relaciona a  $\Theta$  con la aproximación de la solución  $u^h$  del problema directo que tiene por coeficiente de conductividad a  $\sigma(\Theta)$ . Esta asociación es llamada "mapeo hacia adelante".

Suponiendo que el ruido  $\varepsilon$  en los datos es aditivo, tenemos la relación

$$d = \Psi(\Theta) + \varepsilon \tag{5.1}$$

Según describimos en la sección 3.1, en el enfoque Bayesiano del problema inverso todas las variables del modelo (datos, parámetros y ruido) son representadas como variables aleatorias absolutamente continuas y la cantidad  $d$  corresponde a una realización de la variable aleatoria asociada a las mediciones.

Es importante señalar que para obtener una expresión de la distribución posterior asociada,  $\pi(\Theta|d)$ , la cual es solución del problema inverso, debemos:

1. Proponer una densidad de probabilidad a priori,  $\pi_{prior}(\Theta)$ , que refleje juiciosamente toda la información previa que tenemos acerca de la conductividad eléctrica de la región estudiada.
2. Establecer un modelo observacional  $\pi(d|\Theta)$  que represente la relación entre datos e incógnita.

Estos dos puntos son cruciales para el enfoque pretendido pues permiten reunir el conocimiento previo y la evidencia disponible sobre  $\Theta$  de modo que puede garantizarse

$$\pi(\Theta|d) \propto \pi(d|\Theta) \cdot \pi_{prior}(\Theta) \quad (5.2)$$

por medio del Teorema de Bayes.

Para obtener información de la conductividad eléctrica  $\sigma$  es necesario hacer inferencia sobre el vector de parámetros  $\Theta$  dados los datos. Esto es posible usando la relación (5.2) y los métodos MCMC.

Antes de seguir esta discusión, observemos que suponiendo independencia mutua en la variable aleatoria que modela al ruido y  $\Theta$  la relación (5.1) implica que la verosimilitud tiene la expresión:

$$\pi(d|\Theta) = \pi_{ruido}(d - \Psi(\Theta)) \quad (5.3)$$

En consecuencia, para evaluar  $\pi(d|\Theta)$  es necesario calcular la solución del problema directo (usando como coeficiente de conductividad a  $\sigma(\Theta)$ ). Más aún, la observación anterior implica que

$$\pi(\Theta|d) \propto \pi_{ruido}(d - \Psi(\Theta)) \cdot \pi_{prior}(\Theta) \quad (5.4)$$

Hay que meditar un poco el significado de esta expresión. Sabemos que bajo el enfoque Bayesiano la incertidumbre se interpreta a través de probabilidad y, de

acuerdo a lo expuesto en la sección 2.2, ésta tiene su origen en tres fuentes: error de modelación, error de observación y error computacional. Todos estos se encuentran presentes en (5.4), respectivamente, a través del modelo teórico del problema de tomografía de impedancia, las mediciones y el mapeo directo, donde la incertidumbre es representada en términos de las distribuciones.

Debemos también remarcar que el modelo matemático es clave para todo el proceso de hacer predicciones. Su papel es definir la manera en que los parámetros  $\Theta$  son asociados a los datos experimentales  $d$ . La incertidumbre acerca de la capacidad del modelo matemático para hacer predicción dados los datos, es codificada en la verosimilitud.

Ahora bien, nosotros deseamos hacer calibración vía inferencia Bayesiana para actualizar las distribuciones involucradas en orden de hacer la teoría (modelo) consistente con las observaciones particulares (datos  $d$ ). Este es el papel que juegan los métodos MCMC, pues en nuestro enfoque del problema de tomografía de impedancia tales algoritmos generan una secuencia de parámetros  $\Theta_1, \Theta_2, \dots$  que describen diferentes conductividades  $\sigma_1, \sigma_2, \dots$  que asintóticamente se aproximan a la descripción de la distribución posterior (vía un vector de parámetros).

Aunque existen gran cantidad de estrategias sobre como generar la secuencia  $\Theta_1, \Theta_2, \dots$ , esencialmente involucran proponer un candidato  $\Theta_k$  en el paso  $k$  de la iteración, que puede depender del anterior  $\Theta_{k-1}$ , y evaluarlo en las distribuciones a priori y verosimilitud. Tras este proceso una prueba es aplicado al candidato  $\Theta_k$  para integrarlo a la muestra generada o rechazarlo y comenzar de nuevo.

Desde el punto de vista computacional este proceso implica un gran costo pues evaluar la verosimilitud en un punto candidato  $\Theta_k$  representa la solución del problema directo con la conductividad  $\sigma_k = \sigma(\Theta_k)$ . El método puede rechazar muchos candidatos antes de considerar un punto como representativo y continuar con el armado de la muestra. Es decir, una cantidad considerablemente grande de versiones del problema directo deberán ser resueltos al usar métodos tipo MCMC.

Lo anterior exhibe que es necesario diseñar un método de solución para el problema directo que sea computacionalmente eficiente. La estrategia de solución que nosotros proponemos es descrita por el **Algoritmo 15**, basándonos en el método de elemento finito y gradiente conjugado. Como parte de esta propuesta, también incluimos a la malla estructurada que ha sido descrita en la sección 3.7.

Teniendo esto en mente, vamos a remarcar varios puntos expuestos en capítulos anteriores:

■ **Sobre la malla:**

- La numeración propuesta para la malla del dominio circular y la elección de la familia  $\varphi_i$  induce una estructura de bandas sobre la matriz  $B$ , que facilita, numéricamente hablando, las multiplicaciones matriz-vector. La matriz  $C$  tiene una estructura de bloques, que reduce su formación a un bloque pequeño, pues la mayoría de sus entradas son nulas (véase sección 3.8.1.1). Es decir, ambos tiene estructuras que pueden ser fuertemente aprovechadas en la implementación para el ensamblado las matrices del sistema y operaciones con ellas, como consecuencia, en parte, de la malla.
- Mediante una adecuada elección de los coeficientes

$$0 < c_k < \dots < c_2 < c_1$$

es posible modificar la posición de los puntos de la malla (por nivel). Esto es deseable para definir muchos nodos cerca de frontera donde es conocido que el voltaje sufre más variaciones debido a su cercanía con los electrodos.

- Para describir a los electrodos basta especificar la sucesión de índices contiguos que definen a los nodos que los representan como poligonales, los cuales se encuentran dentro del conjunto de los primeros  $n_b$  puntos de la malla. Aunque nosotros hicimos en la implementación que su longitud fuese uniforme, esto puede ser cambiado cambiando la descripción de los nodos de las poligonales que los forman de manera sencilla. Es decir, se puede modificar el número de electrodos y su longitud en la malla de manera accesible.
- La propuesta de estructura de la malla puede ser trasladada a dominios más generales usando transformaciones del círculo. Además, menos elementos pueden ser formados en el último nivel, uniendo los lados del polígono inscrito en el círculo de radio  $r * c_1$  con el origen, sin alterar la estructura esencial de las matrices del sistema.



■ **Sobre las matrices y los algoritmos:**

- De entre las matrices asociadas al MEF la única que depende de la conductividad  $\sigma$  la matriz de rigidez  $W$ . Por ello las matrices  $D$ ,  $C$  y  $M$  pueden generarse previamente al MCMC para ser usadas en la solución del problema directo y actualizar  $W$  en función de la descripción de  $\sigma_k$  dada por el vector de parámetros propuesto  $\Theta_k$ .
- El algoritmo de formación de la matriz  $W$ , **Algoritmo 11**, es considerablemente rápido, pues no se encarga de llenar entrada por entrada, sino calcular las integrales no nulas sobre elementos y repartirlas usando funciones que relacionan la numeración local de los triángulos con la global.
- Las entradas de  $W$  son aproximadas numéricamente usando la regla de cuadratura de un punto, esto es

$$W_{ij} \approx \sum_{T \in \mathcal{T}} |T| \cdot \sigma(x_T) \cdot (b_i^T b_j^T + c_i^T c_j^T)$$

donde  $x_T$  es el centroide del triángulo  $T$  y  $\mathcal{T}$  es el conjunto de elementos de la malla. Por ello, sus valores quedan sólo en función de la conductividad de las evaluaciones de la conductividad descrita por el punto propuesto como candidato,  $\Theta_k$ , en los centroides de los triángulos de la malla.

- Como resultado de usar la base  $\{\varphi_i\}$  de funciones continuas lineales a pedazos sobre la malla, la matriz  $B$  es rala, bandeda, simétrica y definida positiva. De hecho se demostró que es posible cambiar base a funciones cuadráticas continuas y lineales a pedazos o de orden mayor, manteniendo la de simetría, positividad y estructura rala bandeda de  $B$ .
- El hecho de que  $B$  sea positiva definida es aprovechado para construir una aproximación  $G$  de la matriz  $B^{-1}C$  usando el **Algoritmo 13**. Este representa un punto clave de la solución del sistema lineal derivado en el MEF, **Algoritmo 15**.
- La clave para obtener  $G$  es la solución de una serie de  $L$  sistemas lineales de la forma

$$B g_i = c_i$$

mediante el método de gradiente conjugado. La solución individual del conjunto de sistemas es considerablemente rápida, como se muestra en la sección 4.3, pero puede acelerarse aún más diseñando juiciosamente un preconditionador.

- Aunque fue mostrado que la implementación de el **Algoritmo 15** se alenta como resultado de resolver los  $L$  problemas lineales  $Bg_i = c_i$ , esto puede sortearse implementando los procesos en paralelo.

Otro punto a remarcar es que las propiedades anteriores no dependen de la representación explícita de  $\sigma$ , sino de que es positiva y se encuentra dentro del conjunto de funciones admisibles  $\mathcal{A}$ . Por ello nuestra estrategia puede ser usada en múltiple escenarios de representación de  $\sigma$ , en términos de vectores de parámetros.

# CAPÍTULO 6

---

## Conclusiones

---

El punto central de este trabajo fue el diseño de una estrategia computacionalmente eficiente para resolver el problema directo asociado a tomografía de impedancia eléctrica. Un algoritmo como tal es necesario para explorar la distribución posterior del problema inverso, en búsqueda de información estadísticamente significativa mediante métodos MCMC, de manera eficiente hablando en términos de cómputo, en virtud de que el enfoque bayesiano fue adoptado para la cuantificación de incertidumbre.

Para ello consideramos un modelo matemático que describe con eficacia aceptable la física subyacente del problema y que permite aproximar sus soluciones mediante el método de elemento finito.

El algoritmo propuesto está basado fundamentalmente en reducir el sistema lineal inducido y, aprovechando las propiedades de las matrices de rigidez y masas, resolver un número mayor sistemas lineales que son más pequeños, usando gradiente conjugado.

Esta estrategia numérica fue implementada considerando un dominio circular que contiene diferentes tipos de inclusiones donde la conductividad tiene valores específicos, buscando probar su efectividad. Los datos obtenidos fueron mostrados. Estos

evidenciaron en particular que para el problema inverso, hay que tener presente que los datos de voltaje en electrodos, obtenidos al resolver problemas directos, son afectados por el tamaño, forma y posición de las anomalías. Y que no pueden interpretarse a la ligera, sobretodo por que entre ellos puede haber similitud debido a los efectos del ruido.

Como trabajo futuro, deseamos usar de nuestro algoritmo en casos concretos de este problema y bajo distintos métodos MCMC. Además se contempla modificar la implementación para aumentar su velocidad de ejecución.

Este problema es motivo de estudio activo y el campo de investigación en él es amplio. En esta tesis mostramos un enfoque desde un panorama actual de esta teoría.

---

# Bibliografía

---

- [1] BERA, T. K. Bioelectrical impedance methods for noninvasive health monitoring: A review. *Journal of Medical Engineering. Hindawi Publishing Corporation* (2013).
- [2] CHENG, K.-S., ISAACSON, D., NEWELL, J. C., AND GISSER, D. G. Electrode models for electric current computed tomography. *Biomedical Engineering, IEEE Transactions on* 36, 9 (1989), 918–924.
- [3] HALTER, R. J., HARTOV, A., HEANEY, J. A., PAULSEN, K. D., AND SCHNED, A. R. Electrical impedance spectroscopy of the human prostate. *IEEE Trans. Biomed. Engineering* 54, 7 (2007), 1321–1327.
- [4] ISAKOV, V. *Inverse problems for partial differential equations*, vol. 127. Springer, 1998.
- [5] KAIPIO, J. P., KOLEHMAINEN, V., SOMERSALO, E., AND VAUHKONEN, M. Statistical inversion and monte carlo sampling methods in electrical impedance tomography. *Inverse problems* 16, 5 (2000), 1487.
- [6] KAIPIO, J. P., AND SOMERSALO, E. *Statistical and computational inverse problems*, vol. 160. Springer, 2005.

- [7] KOLEHMAINEN, V., LASSAS, M., OLA, P., AND SILTANEN, S. Recovering boundary shape and conductivity in electrical impedance tomography. *Inverse Problems and Imaging* (2012).
- [8] LARSON, M. G., AND BENGZON, F. *The Finite Element Method: Theory, Implementation, and Practice*. Springer, 2010.
- [9] PAULSON, K., BRECKON, W., AND PIDCOCK, M. Electrode modelling in electrical impedance tomography. *SIAM J. Appl. Math.* 52 (1992), 1012–22.
- [10] SOMERSALO, E., CHENEY, M., AND ISAACSON, D. Existence and uniqueness for electrode models for electric current computed tomography. *SIAM J. Appl. Math.* 52 (1992), 1023–40.
- [11] TINSLEY, O., MOSER, R., AND GHATTAS, O. Computer Predictions with Quantified Uncertainty, Part I. *SIAM News* 36 (2010).
- [12] VAUHKONEN, P. *Image Reconstruction in Three-dimensional Electrical Impedance Tomography*. PhD thesis, University of Kuopio, Kuopio, Finland, 2004.
- [13] WATZENIG, D., AND FOX, C. A review of statistical modelling and inference for electrical capacitance tomography. *Measurement Science and Technology* 20, 5 (2009), 052002.