



CENTRO DE INVESTIGACIÓN EN MATEMÁTICAS  
CENTRO INTERNACIONAL DE MÉTODOS NUMÉRICOS EN  
INGENIERÍA

TESIS DE MAESTRÍA

# Formulación de elementos finitos y elementos discretos

*Autor:*

Marcela MORALES QUISPE

*Asesores:*

Dr. Salvador BOTELLO RIONDA

Dr. José Francisco ZÁRATE ARAIZA

*Tesis presentada en cumplimiento de los requisitos para obtener el grado de  
Maestro en Ciencias con especialidad en computación y matemáticas industriales.*

Noviembre 6, 2013

# Formulación de elementos finitos y elementos discretos

Marcela MORALES QUISPE

*A mis padres...*

## *Resumen*

Se considera el problema dinámico de estructuras deformables en 2D, este tipo de problemas suele ser modelado sin problemas con el método de elementos finitos (FEM) hasta que ocurre una fragmentación o fractura en el sólido de estudio, en esta transición no se considera la deformación plástica. En la mayoría de estos problemas dichas fracturas aparecen sólo en ciertas partes del dominio y el resto tiene un comportamiento que puede ser representado como continuo, de ahí el interés de modelar este tipo de problemas con el método de elementos discretos (DEM) para modelar las fracturas y FEM para el resto del dominio, aprovechando de esta forma las bondades que ofrecen ambos métodos.

Se parte de la formulación de FEM sobre el dominio de estudio donde se calculan los desplazamientos, tensiones, deformaciones y todas aquellas variables de interés; luego, las aristas de la discretización pueden ser dañadas de acuerdo a un criterio de tensión o deformación para reproducir fracturas; cuando las aristas son dañadas se incorpora DEM a la simulación y se modela la fuerza de contacto entre partículas con base en la rigidez de cada arista. Cuando se incorpora DEM a la simulación surgen algunos problemas, tales como: búsqueda de contactos eficiente, asignación de radios a las partículas cuando una arista sufre cierto daño; entre otros problemas propios de la naturaleza del problema considerado, por ejemplo: el esquema de integración para encontrar los desplazamientos, velocidades y aceleraciones que sufren los nodos de la discretización del dominio.

Para la formulación FEM-DEM que se presenta, se desarrolló una aplicación en el lenguaje de programación Fortran 90. Finalmente, se presentan los resultados numéricos obtenidos de algunos ensayos de esfuerzos aplicados a estructuras sometidas a tensión plana.



## *Agradecimientos*

Quiero expresar mi gratitud a mis asesores Dr. Salvador Botello Rionda y Dr. José Francisco Zárate Araiza por permitirme realizar esta tesis bajo su supervisión y por la oportunidad de trabajar en este proyecto de investigación conjunto entre el Centro de Investigación en Matemáticas (CIMAT) y el Centro Internacional de Métodos Numéricos en Ingeniería (CIMNE).

Agradecer también a los doctores que me impartieron cátedra durante mis estudios de maestría en CIMAT: Dr. Salvador Botello Rionda, Dr. Jean Bernard Hayet, Dr. Salvador Ruiz Correa, Dr. Miguel Ángel Moreles, Dr. Arturo Hernández Aguirre y Dr. José Luis Marroquin.

Agradezco a los M.C. Miguel Vargas Félix y M.C. Víctor Eduardo Cardoso Nungaray por tomarse el tiempo de leer esta tesis y enviarme valiosas correcciones, los cuales fueron de gran ayuda.

También quiero agradecer al Consejo Nacional de Ciencia y Tecnología (CONACyT), por haberme elegido como becaria de su Programa Nacional de Posgrados de Calidad (PNPC) y haber aportado el financiamiento para la realización de mis estudios de posgrado.

Quiero agradecer de manera muy especial a mis padres: Julio Morales Flores y Margarita Quispe Guzmán, quienes con esfuerzo, dedicación y cariño supieron brindarme su apoyo incondicional a lo largo de mis estudios en México. A mis hermanos: Verónica, Marco Antonio, María Fernanda, Nátali, Julio César, Cristian Gonzalo y Milka, por todo el apoyo que me brindaron a pesar de la distancia y por la confianza que me inspiraron.

A mi amado esposo Arturo Treviño Ayala por la compañía, el apoyo y la paciencia que me expresó en estos años de formación académica.

Finalmente quiero agradecer a mis compañeros de generación : Cristóbal García, Rafael Robledo, Carlos Zubieta, Ángel Rojas, Lázaro Lesmes, David Jacobo, Guillermo Laguna y Mario Canul por todas las experiencias agradables que compartimos en estos años de formación.



# Índice general

Dedicación	ii
Resumen	iii
Agradecimientos	v
Índice general	vii
Índice de figuras	ix
Índice de tablas	xi
Abreviaciones	xii
Lista de símbolos	xiii
<b>1 Introducción</b>	<b>1</b>
1.1 Motivación y Objetivo . . . . .	1
1.2 Distribución de los capítulos . . . . .	3
1.3 Estado del arte . . . . .	3
<b>2 Bases Teóricas</b>	<b>7</b>
2.1 Teoría de Elasticidad . . . . .	7
2.1.1 Elasticidad . . . . .	7
2.1.2 Tensión . . . . .	7
2.1.3 Componentes de tensión y deformación . . . . .	8
2.2 Elasticidad Bidimensional . . . . .	10
2.2.1 Campo de desplazamientos . . . . .	12
2.2.2 Campo de deformaciones y tensiones . . . . .	12
2.2.3 Relación tensión-deformación . . . . .	13
2.2.4 Principio de Trabajos Virtuales . . . . .	14
2.3 Método de Elementos Finitos . . . . .	15
2.3.1 Discretización del campo de desplazamientos . . . . .	15
2.3.2 Discretización del campo de deformaciones . . . . .	18
2.3.3 Discretización del campo de tensiones . . . . .	19

2.3.4	Ecuaciones de equilibrio de la discretización . . . . .	19
2.4	Método de Elementos Discretos . . . . .	22
2.4.1	Ecuaciones de movimiento . . . . .	22
2.4.2	Fuerzas de contacto . . . . .	23
2.5	Esquema de Integración . . . . .	25
2.5.1	Colocación mediante serie truncada de Taylor . . . . .	27
2.5.2	Algoritmo Newmark . . . . .	27
<b>3</b>	<b>Formulación FEM-DEM</b>	<b>29</b>
3.1	Formulación . . . . .	31
3.1.1	Criterio de ruptura . . . . .	33
3.1.2	Fuerzas de contacto . . . . .	35
3.2	Algoritmo General . . . . .	37
<b>4</b>	<b>Implementación de Módulos</b>	<b>39</b>
4.1	RK4-Newmark . . . . .	39
4.1.1	Formulación . . . . .	39
4.1.2	Verificación . . . . .	40
4.2	Cálculo del paso de tiempo . . . . .	43
4.3	Búsqueda de contactos . . . . .	46
4.3.1	Bounding Box . . . . .	47
4.3.2	Grid . . . . .	47
4.3.3	Estructura de Bins . . . . .	49
4.3.4	Búsqueda de contactos . . . . .	50
4.3.5	Criterios para el grid . . . . .	52
4.4	Asignación de radios iniciales . . . . .	54
<b>5</b>	<b>Resultados</b>	<b>59</b>
5.1	Ensayos . . . . .	59
5.1.1	Ensayo de tracción normalizado . . . . .	59
5.1.2	Resistencia a tracción indirecta . . . . .	63
<b>6</b>	<b>Conclusiones y Trabajo Futuro</b>	<b>69</b>
6.1	Conclusiones . . . . .	69
6.2	Trabajo Futuro . . . . .	70
<b>A</b>	<b>Ensamblar el sistema de ecuaciones</b>	<b>71</b>
	<b>Bibliografía</b>	<b>74</b>

# Índice de figuras

1.1	Modelo y modo de fractura del BTST . . . . .	2
1.2	Contacto entre un elemento discreto y cara de un elemento finito . . . . .	4
1.3	Proceso de corte de roca utilizando DEM/FEM . . . . .	4
1.4	Representación del modelo DEM/FEM . . . . .	5
1.5	Proceso de corte de roca utilizando DEM/FEM . . . . .	5
1.6	Proceso de transición de FEM a DEM . . . . .	6
2.1	Cuerpo en equilibrio. . . . .	8
2.2	Componentes de tensión . . . . .	9
2.3	Tipología de un sólido sometido a tensión plana. . . . .	10
2.4	Ejemplos de problemas de tensión plana. . . . .	11
2.5	Tipología de un sólido sometido a deformación plana. . . . .	11
2.6	Ejemplos de problemas de deformación plana. . . . .	11
2.7	Elemento triangular aislado . . . . .	15
2.8	Funciones de forma . . . . .	17
2.9	Fuerzas sobre un elemento triangular . . . . .	19
2.10	Descomposición de la fuerza de contacto . . . . .	23
2.11	Modelo de la interfaz de contacto . . . . .	24
3.1	Discretización de un dominio continuo con FEM . . . . .	30
3.2	Discretización de un dominio continuo con DEM . . . . .	30
3.3	Elementos virtuales . . . . .	31
3.4	Relación entre los modelos FEM y DEM . . . . .	32
3.5	Fuerzas de contacto en las aristas . . . . .	33
3.6	Evaluación de tensión . . . . .	34
3.7	Proceso del criterio de ruptura . . . . .	35
3.8	Evaluación del contacto . . . . .	36
3.9	Configuración para la evaluación de la fuerza de contacto . . . . .	36
4.1	Problema propuesto . . . . .	41
4.2	Discretización del problema propuesto . . . . .	42
4.3	Posibles configuraciones entre partículas . . . . .	44
4.4	Conjunto de partículas en el plano . . . . .	46
4.5	Bounding Box . . . . .	47

4.6	Grid . . . . .	48
4.7	Grid reajustado . . . . .	49
4.8	Ejemplo de rango de <i>bins</i> . . . . .	50
4.9	Estructura de <i>bins</i> . . . . .	51
4.10	Posibles configuraciones entre partículas . . . . .	51
4.11	Grid con base en $r_{min}$ . . . . .	53
4.12	Estructura de <i>bins</i> del grid con base en $r_{min}$ . . . . .	53
4.13	Posibles configuraciones cuando una arista se <i>rompe</i> . . . . .	55
4.14	Dist. de partículas luego de dañar $\overline{p_1p_6}$ y $\overline{p_6p_4}$ . . . . .	56
4.15	Dist. de partículas por promedios . . . . .	57
4.16	Dist. de partículas por promedios y distancia mínima . . . . .	57
4.17	Dist. de partículas por promedios y distancia mínima en un rango . . . . .	58
5.1	Tipos de probetas . . . . .	59
5.2	Geometría y mallado de la probeta de estudio . . . . .	60
5.3	Relación fuerza-desplazamiento con $G = 0.0 J/m^2$ . . . . .	61
5.4	Geometría dañada de la probeta . . . . .	62
5.5	Relación fuerza-desplazamiento con $G = 75 \times 10^{-6} J/m^2$ . . . . .	63
5.6	Configuraciones típicas para aplicar cargas en el BTST . . . . .	64
5.7	Geometría y condiciones iniciales del cilindro . . . . .	65
5.8	Diferentes discretizaciones para el BTST . . . . .	65
5.9	Geometría dañada del BTST . . . . .	67
5.10	Relación fuerza-desplazamiento del BTST con $G = 0.0 J/m^2$ . . . . .	68
A.1	Discretización del dominio con elementos triangulares . . . . .	71
A.2	Sistema elemental con numeración global y local . . . . .	72

# Índice de tablas

4.1	Tabla comparativa ( $\Delta t = 1 \times 10^{-6}$ ).	42
4.2	Tabla comparativa ( $\Delta t = 1 \times 10^{-5}$ ).	43
5.1	Propiedades del material de la probeta	61
5.2	Propiedades del material del cilindro	66
5.3	Tensiones de ruptura obtenidos con la simulación	68

# Abreviaciones

<b>FEM</b>	<b>F</b> inite <b>E</b> lement <b>M</b> ethod
<b>DEM</b>	<b>D</b> iscrete <b>E</b> lement <b>M</b> ethod
<b>PTV</b>	<b>P</b> rincipio de <b>T</b> rabajos <b>V</b> irtuales
<b>BTST</b>	<b>B</b> razilian <b>T</b> ensil <b>S</b> trength <b>T</b> est

# Lista de símbolos

$x, y, z$	coordenadas rectangulares
$u, v, w$	componentes de desplazamiento
$\sigma$	tensión normal
$\tau$	tensión tangencial
$\varepsilon$	deformación longitudinal
$\gamma$	deformación tangencial
$\mathbf{u}(x, y)$	vector de desplazamientos en un punto
$\boldsymbol{\varepsilon}$	vector de deformaciones significativas
$\boldsymbol{\sigma}$	vector de tensiones significativas
$\mathbf{D}$	matriz de constantes elásticas
$\boldsymbol{\varepsilon}_0$	vector de deformaciones iniciales
$\boldsymbol{\sigma}_0$	vector de tensiones iniciales
$E$	módulo de Young
$\nu$	coeficiente de Poisson
$\mathbf{a}_i$	vector de desplazamientos del nodo $i$
$\mathbf{a}^e$	vector de desplazamientos nodales
$\mathbf{N}$	matriz de funciones de forma
$\mathbf{B}$	matriz de deformación del elemento
$\mathbf{b}$	vector de fuerzas másicas
$\mathbf{t}$	vector de fuerzas de superficie
$\delta\mathbf{a}^e$	vector de desplazamientos nodales virtuales
$\mathbf{q}^e$	vector de fuerzas nodales de equilibrio

---

$\mathbf{K}$	matriz de rigidez global
$\mathbf{a}$	vector de desplazamientos nodales global
$\mathbf{f}$	vector de fuerzas nodales equivalentes global
$m_i$	masa de la partícula $i$
$I_i$	momento de inercia de la partícula $i$
$\mathbf{F}_i$	vector de fuerza total en la partícula $i$
$\mathbf{T}_i$	vector de momentos en la partícula $i$
$\mathbf{u}_i$	desplazamiento del centro de la partícula $i$
$\boldsymbol{\omega}_i$	velocidad angular del centro de la partícula $i$
$F_n$	componente normal de la fuerza total
$F_t$	componente tangencial de la fuerza total
$\mu$	coeficiente de Coulomb
$c_n$	coeficiente de amortiguamiento
$k_n$	rigidez de contacto en la dirección normal
$k_t$	rigidez de contacto en la dirección tangencial



# Capítulo 1

## Introducción

### 1.1 Motivación y Objetivo

En la actualidad, el claro desarrollo acelerado de las computadoras, el estudio más cuidadoso del comportamiento de materiales, estructuras y de técnicas numéricas que permiten resolver problemas cada vez más complejos ha conducido a la simulación numérica de una infinidad de problemas de muchas ramas de interés con aproximaciones cada vez mejores.

El método de los elementos finitos FEM (por sus siglas en inglés Finite Element Method) es una herramienta muy útil para estudiar el comportamiento de sólidos en general, tales como: placas, láminas, vigas, sólidos de revolución, etc. FEM discretiza el dominio de estudio en un número finito de elementos los cuales se encuentran conectados por nodos. Para el problema de análisis de estructuras, la variable principal del problema es el desplazamiento que sufren estos nodos, con FEM es posible encontrar una buena aproximación a la solución exacta de los desplazamientos en los nodos para luego interpolar estos resultados al resto del dominio, claro está que esta aproximación mejora conforme la discretización se hace más fina.

Por otra parte, el método de los elementos discretos DEM (por sus siglas en inglés Discrete Element Method) es una herramienta que es usada ampliamente en muchos problemas de ingeniería, por ejemplo: fractura en sólidos, procesos de excavación; por mencionar algunos. DEM permite la simulación de problemas a diferentes escalas. Este método supone que un dominio puede ser representado por un conjunto rígido de elementos (los cuales pueden ser cilindros en 2D o esferas en 3D; en adelante nos referiremos a los elementos cilíndricos como partículas) que interactúan entre sí, el comportamiento general del sistema es determinado

por las leyes de contacto, por cohesión y fricción; los enlaces de cohesión pueden romperse, lo que permite simular fracturas y su propagación. Pero DEM tiene ciertos inconvenientes, por ejemplo; el cálculo de la interacción entre cada par de partículas que se encuentran en contacto requiere de un alto esfuerzo computacional. Muchas veces una simulación puede tardar muchos días, con esta restricción en las simulaciones se limita el número de partículas en la discretización. Otro inconveniente es la estimación de los parámetros del modelo de contacto, ya que éstos, en la mayoría de los casos, no se pueden obtener de forma directa.

Es de nuestro interés el estudio del problema dinámico de estructuras elásticas en 2D, este tipo de problemas puede ser muy bien modelado con FEM hasta que ocurre una fragmentación o fractura en el sólido de estudio. En la mayoría de estos problemas, dichas fracturas aparecen sólo en ciertas partes de nuestro dominio, y el resto tiene un comportamiento que puede ser representado como continuo, de ahí el interés de modelar este tipo de problemas con DEM para modelar las fracturas, y FEM para el resto del dominio. Por ejemplo, el conocido *Brazilian tensile strength test* (BTST) se utiliza para el estudio de la resistencia a tracción indirecta; en este ensayo se simula la compresión de un cilindro mediante la aplicación de fuerzas (figura 1.1(a)), éste sufre una fractura localizada durante el ensayo en laboratorio como el que se muestra en la figura 1.1(b).

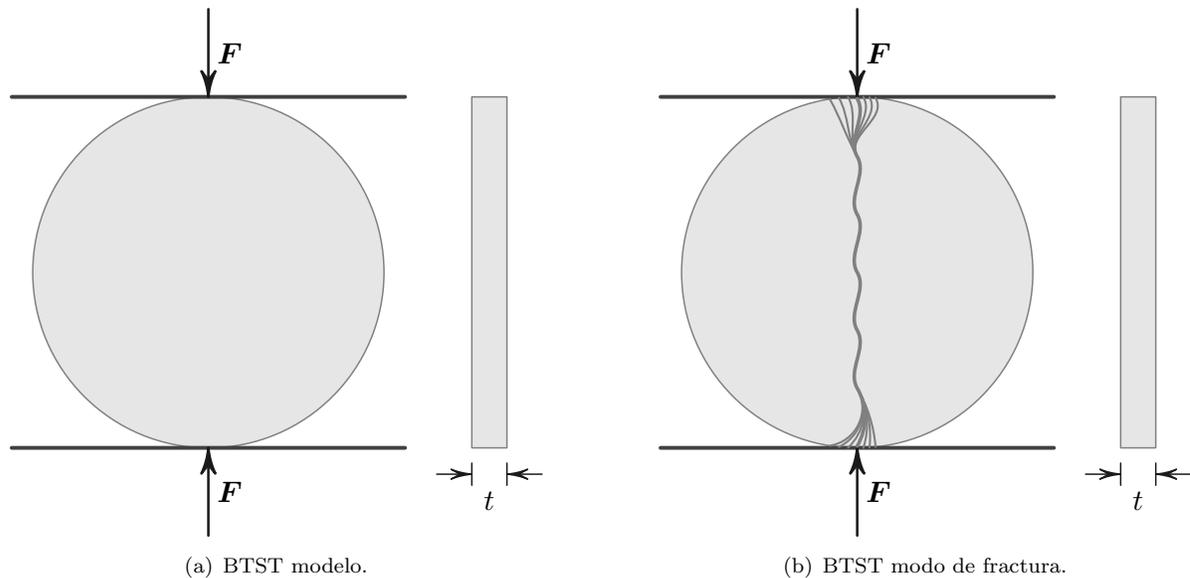


FIGURA 1.1: Modelo y modo de fractura del *Brazilian tensile strength test*.

## 1.2 Distribución de los capítulos

La organización de esta tesis se presenta a continuación: en el capítulo 2 se describe de forma breve la teoría de elasticidad y, puesto que en este trabajo sólo se analizan problemas en 2D, se incluye la teoría de elasticidad bidimensional. Además se incluye de forma detallada la formulación de elementos finitos utilizando triángulos de tres nodos para el problema de análisis de estructuras continuas y la formulación de elementos discretos para modelar materiales discontinuos. También se describe el esquema Newmark para encontrar los desplazamientos, velocidades y aceleraciones de los nodos en la discretización del dominio de estudio.

En el capítulo 3 se describe la formulación FEM-DEM empleada, además se incluye el algoritmo para calcular la fuerza de contacto entre partículas a partir de las tensiones en los nodos de la discretización de FEM y el algoritmo general para resolver el problema dinámico de estructuras mediante la formulación planteada.

Cuando el sólido de estudio sufre alguna fractura durante la simulación, empiezan a aparecer partículas en la discretización, luego es necesario calcular la fuerza de contacto; pero antes es necesario determinar que partículas están en contacto; la búsqueda de estos contactos se describe en forma detallada en el capítulo 4. Además, en este capítulo, se describe el esquema de integración explícito que se usa en el algoritmo general, como también el cálculo del paso de tiempo crítico  $\Delta t_{cr}$ .

En el capítulo 5 se presentan los resultados numéricos obtenidos por la formulación FEM-DEM de algunos ensayos de esfuerzos aplicados a estructuras sometidas a tensión plana; se explica la relación que existe entre los desplazamientos y la fuerza total que actúa en cada estructura (probeta).

Finalmente, en el capítulo 6 se listan las conclusiones de este trabajo y se incluye un apéndice en el que se detalla la operación: *ensamblar* el sistema de ecuaciones global.

## 1.3 Estado del arte

En la actualidad existen muchos trabajos en los que se hace uso de ambas metodologías (FEM y DEM). A continuación se presentan tres (de los muchos) trabajos que combinan FEM y DEM:

1. En [1] se presenta una combinación de los modelos de FEM y DEM, en éste se modela el contacto entre una partícula circular y el contorno del subdominio continuo discretizado mediante elementos finitos. De manera similar al caso de contacto entre dos partículas, el contacto entre una partícula y la cara exterior  $\mathbf{F}$  de un elemento finito se descompone en las direcciones normal y tangencial,  $\mathbf{F}_n$  y  $\mathbf{F}_t$  respectivamente (figura 1.2).

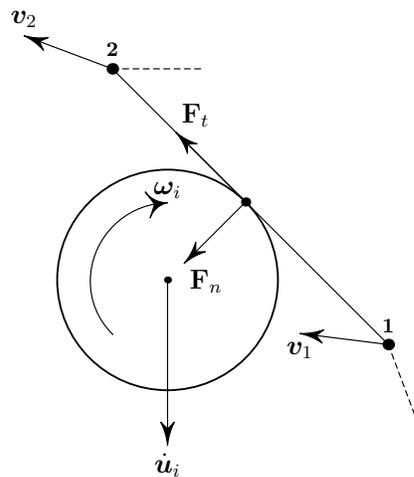


FIGURA 1.2: Contacto entre un elemento discreto y la cara de un elemento finito, con:  $\mathbf{v}_1$  y  $\mathbf{v}_2$  las velocidades nodales,  $\boldsymbol{\omega}_i$  la velocidad angular y  $\mathbf{u}_i$  la velocidad del centro de la partícula.

En el caso general, el modelo de contacto entre un elemento discreto y la cara de un elemento finito puede incluir cohesión, amortiguación, desgaste, generación e intercambios de calor, entre otros. Se tienen bien identificados los dominios continuos y discretos, y se discretiza los subdominios con los elementos correspondientes, por ejemplo; para el problema de corte de roca se modela un dominio de roca con elementos discretos y la herramienta que se usa para hacer el corte se modela con elementos finitos. Los resultados de la simulación para este problema se muestran en la figura 1.3; los parámetros usados para esta simulación, así como otras simulaciones interesantes pueden ser consultados con más detalle en [1].

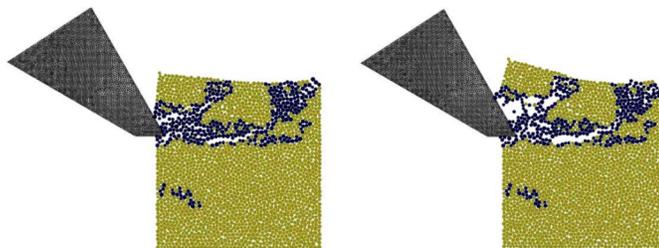


FIGURA 1.3: Proceso de corte de roca utilizando DEM/FEM. Figura tomada de [1].

2. En [2] el modelo DEM/FEM multiescala se obtiene empleando FEM y DEM a diferentes subdominios del mismo cuerpo (figura 1.4(b)). Se hace uso de un algoritmo de acoplamiento para imponer restricciones a los subdominios en diferentes escalas del modelo. Los subdominios de DEM y FEM pueden traslaparse, en esta zona las contribuciones de cada uno de los dos métodos a la rigidez global varía gradualmente.

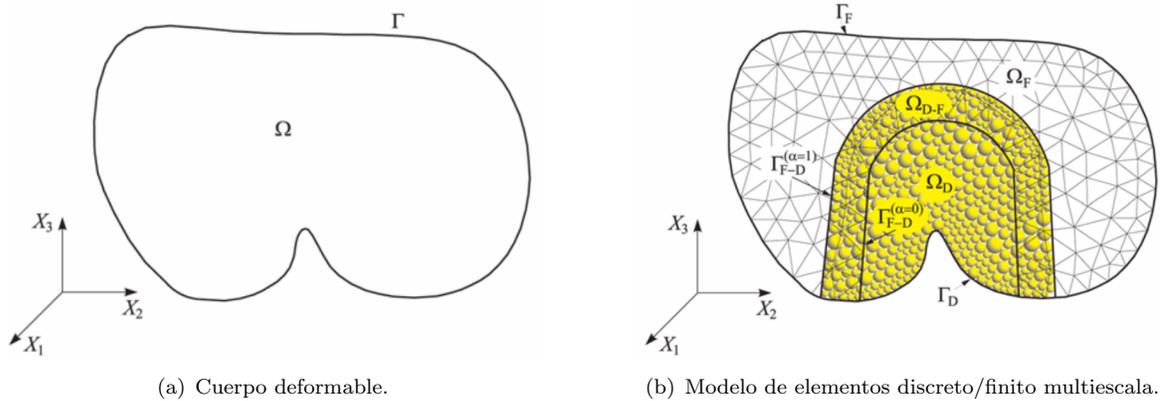


FIGURA 1.4: Representación del modelo DEM/FEM. Figura tomada de [2].

El ejemplo de aplicación que se presenta en [2], consiste en la simulación del proceso de corte de roca por un repunte de una rozadora (figura 1.5). Las rozadoras son ampliamente utilizadas en excavaciones subterráneas, en ingeniería de minas, así como en la excavación de las diferentes estructuras subterráneas.

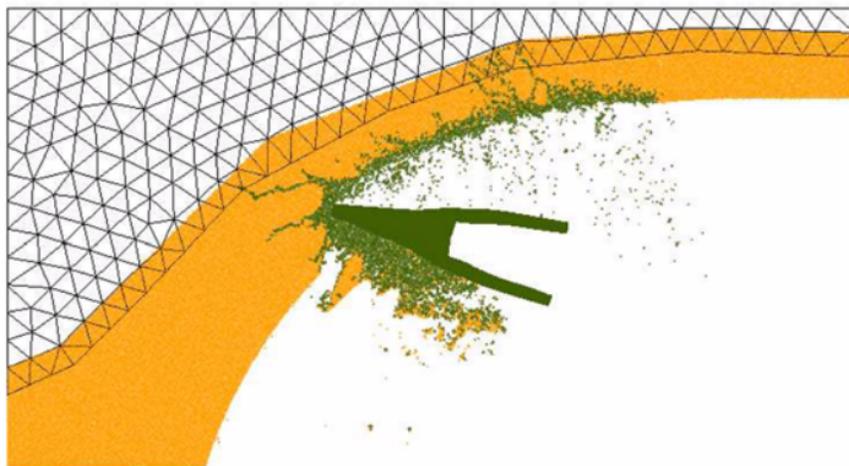


FIGURA 1.5: Proceso de corte de roca utilizando DEM/FEM. Figura tomada de [2].

3. En problemas reales, la zona del dominio que se discretiza con DEM puede variar durante la simulación. Con la formulación presentada en [2], los subdominios se predefinen durante el proceso de discretización. Esto requiere tener conocimiento previo exacto de dónde aparecerá la fractura. Con el propósito de hacer más eficiente el uso de DEM durante la simulación, en [3] se presenta un algoritmo para cambiar los subdominios usados. La idea es empezar la simulación usando FEM, cuando alguna área cumple con la tensión de rotura se reemplaza FEM por DEM con una nueva interfaz. Este cambio progresivo hace más eficiente el uso de ambos métodos. En la figura 1.6 se muestra gráficamente el proceso de transición de FEM a DEM cuando para un elemento finito se cumple la tensión de rotura.

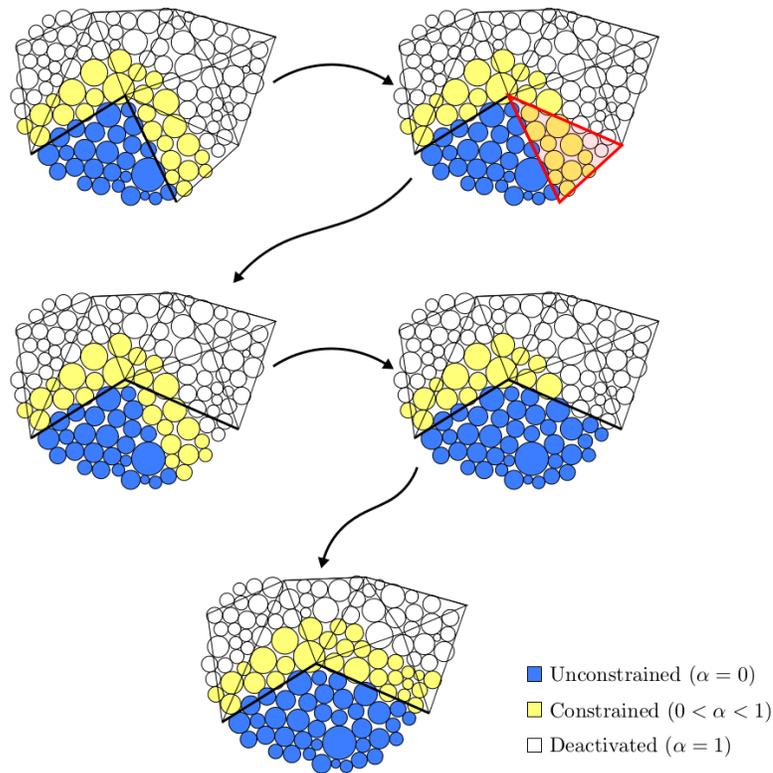


FIGURA 1.6: Proceso de transición de FEM a DEM. Figura tomada de [3].

# Capítulo 2

## Bases Teóricas

### 2.1 Teoría de Elasticidad

#### 2.1.1 Elasticidad

Todos los materiales estructurales presentan en cierto grado la propiedad de *elasticidad*, es decir, si las fuerzas exteriores que deforman la estructura no rebasan un determinado límite, la deformación desaparece cuando se suprimen dichas fuerzas si el dominio de estudio es *perfectamente elástico*. Cuando las fuerzas exteriores rebasan este límite, el dominio de estudio puede sufrir alguna fractura. Se supondrá que el material de la estructura es *homogéneo*, distribuyéndose con continuidad en su volumen, de forma que cualquier elemento extraído de él, posee sus mismas propiedades físicas. También se supondrá que el cuerpo es *isótropo*, es decir, las propiedades elásticas son las mismas en todas las direcciones [4].

#### 2.1.2 Tensión

Dado un cuerpo en equilibrio (figura 2.1); bajo la acción de fuerzas externas  $P_1, \dots, P_8$  se producen fuerzas internas en el mismo. Para estudiar la magnitud de éstas en cualquier punto  $O$ , imaginemos que el cuerpo se divide en dos partes:  $A$  y  $B$  por la sección transversal  $mm$  a través de  $O$ . Consideremos una parte, digamos  $A$ , y se establece que ésta se encuentra en equilibrio bajo la acción de las fuerzas externas  $P_1, \dots, P_8$  y las fuerzas internas distribuidas en la sección transversal  $mm$ , las cuales representan las reacciones del material de la parte  $A$  a las acciones del material de la parte  $B$ . Se asumirá que estas fuerzas se distribuyen uniformemente

en el área de la sección  $mm$ . La magnitud de estas fuerzas se define como la cantidad de fuerza por unidad de área de la superficie en la que éstas actúan; estas fuerzas internas reciben el nombre de *tensión*.

En el caso general la tensión no es distribuida uniformemente sobre  $mm$ . Para obtener la magnitud de la tensión que actúa en un área pequeña  $\delta A$ , que es un recorte de la sección transversal en cualquier punto  $O$ , se asume que las fuerzas que actúan a través de esta área elemental debido a la acción del material de la parte  $B$  sobre el material de la parte  $A$  pueden ser reducidos a la resultante  $\delta P$ . Si se contrae  $\delta A$  de forma continua, el valor en el límite de  $\delta P/\delta A$  corresponde a la magnitud de la tensión que actúa sobre la sección transversal  $mm$  en el punto  $O$ . En el caso general la dirección de la tensión es inclinada hacia el área  $\delta A$  y usualmente se resuelven en dos componentes: la *tensión normal* perpendicular al área y la *tensión de corte* o *tensión tangencial* que actúa en el plano del área  $\delta A$  [4].

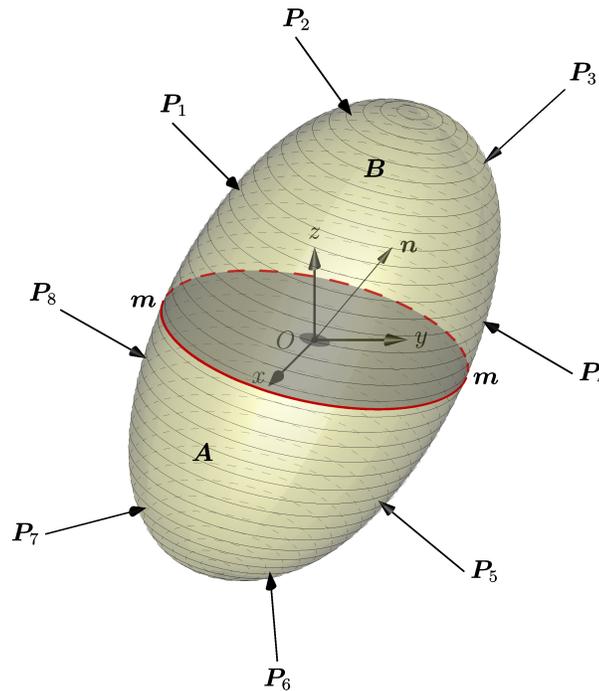


FIGURA 2.1: Cuerpo en equilibrio.

### 2.1.3 Componentes de tensión y deformación

Usaremos la letra  $\sigma$  para designar la tensión normal y  $\tau$  para la tensión tangencial. Si consideramos un pequeño elemento cúbico en el punto  $O$ , con sus aristas paralelas a los ejes coordenados las componentes tensionales que actúan sobre las caras del cubo es la indicada

en la figura 2.2. Para cada par de caras paralelas del elemento cúbico se necesita un símbolo

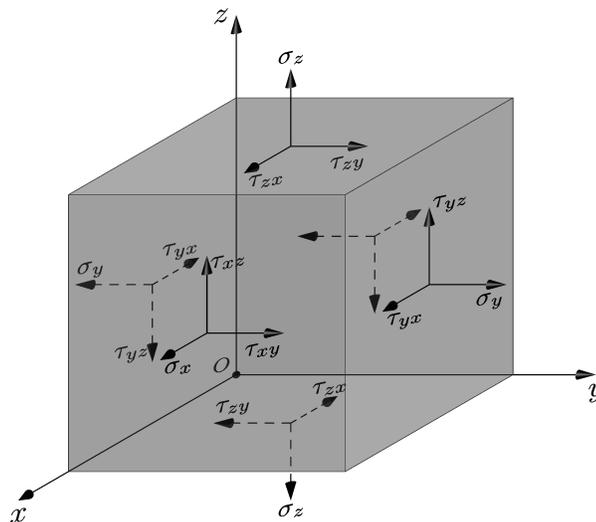


FIGURA 2.2: Componentes de tensión.

para representar la componente de tensión normal y dos más para las componentes de tensión tangencial. Se requieren, por lo tanto, tres símbolos para describir las tensiones normales que actúan sobre las caras de un cubo elemental, a saber:  $\sigma_x$ ,  $\sigma_y$ ,  $\sigma_z$  y seis  $\tau_{xy}$ ,  $\tau_{yx}$ ,  $\tau_{xz}$ ,  $\tau_{zx}$ ,  $\tau_{yz}$ ,  $\tau_{zy}$  para las tensiones tangenciales.

De la consideración del equilibrio del elemento, se deduce que el número de tensiones tangenciales puede ser reducido a tres ya que para cada dos caras perpendiculares entre sí, las componentes de tensión tangencial perpendiculares a la línea de intersección de esas caras, son iguales [4]. Por lo tanto, el sistema de tensiones está definido por las seis cantidades:  $\sigma_x$ ,  $\sigma_y$ ,  $\sigma_z$ ,  $\tau_{xy} = \tau_{yx}$ ,  $\tau_{xz} = \tau_{zx}$ ,  $\tau_{yz} = \tau_{zy}$ .

Representaremos mediante la letra  $\varepsilon$  la deformación longitudinal o simplemente deformación y mediante  $\gamma$  la deformación tangencial. El pequeño desplazamiento de las partículas de un cuerpo deformado, es descompuesto generalmente en sus componentes  $u$ ,  $v$ ,  $w$  paralelas a los ejes  $x$ ,  $y$ ,  $z$ , respectivamente. Entonces las componentes de deformación son definidas como [4]

$$\begin{aligned} \varepsilon_x &= \frac{\partial u}{\partial x}, & \varepsilon_y &= \frac{\partial v}{\partial y}, & \varepsilon_z &= \frac{\partial w}{\partial z}, \\ \gamma_{xy} &= \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}, & \gamma_{xz} &= \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x}, & \gamma_{yz} &= \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y}. \end{aligned}$$

## 2.2 Elasticidad Bidimensional

Existe en la actualidad una gran variedad de estructuras de interés práctico dentro de la ingeniería en las que se puede hacer uso de la hipótesis de la elasticidad bidimensional. Dichas estructuras se caracterizan por tener una forma aproximada de prisma recto. No obstante, según la proporción que guarden las dimensiones de dicho prisma y la disposición de las cargas sobre éste, pueden clasificarse en uno de los dos tipos siguientes:

**Tensión plana:** Una estructura prismática se encuentra en estado de tensión plana si una de sus dimensiones (espesor) es mucho menor que las otros dos (figura 2.3), y sobre ella actúan únicamente cargas contenidas en su plano medio. Los problemas de estructuras que se pueden citar en esta categoría son los de análisis de vigas de gran peralte, placas con cargas en su plano medio, presas de contrafuertes, etc (figura 2.4) [5].

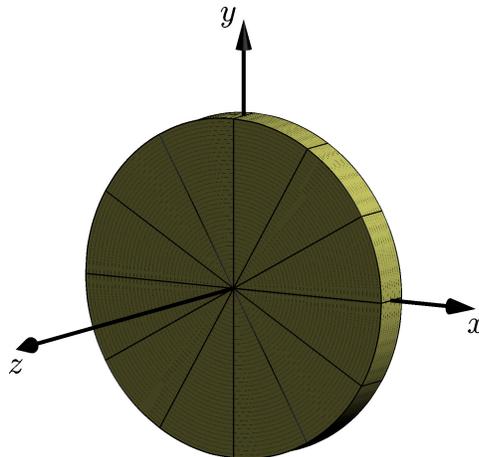


FIGURA 2.3: Tipología de un sólido sometido a tensión plana.

**Deformación plana:** Una estructura prismática se encuentra en estado de deformación plana si una de sus dimensiones (longitud) es mucho mayor que las otras dos (figura 2.5), y sobre ella actúan únicamente cargas uniformemente distribuidas a lo largo de toda su longitud y contenidas en planos ortogonales al eje que une los centros de gravedad de sus distintas secciones transversales [5]. Dentro de esta clasificación se pueden incluir entre otros, los problemas de muros de contención sometidos a una presión lateral, presas de gravedad, tuberías bajo presión interna como túneles o alcantarillas (figura 2.5) y diversos problemas de ingeniería del terreno [4].

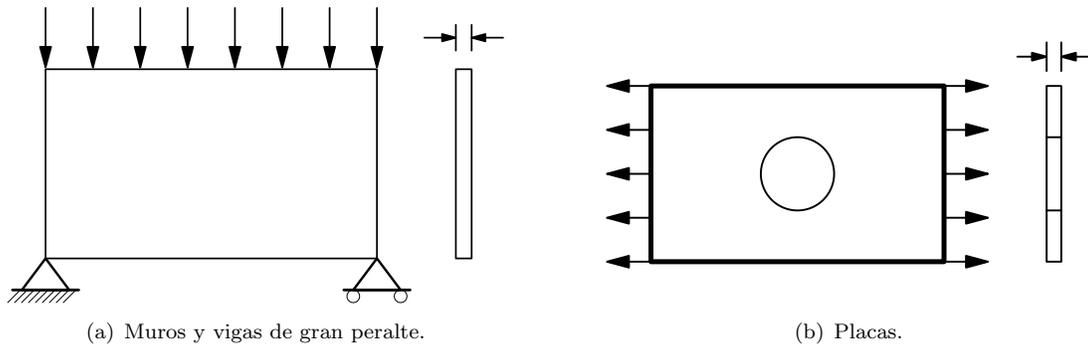


FIGURA 2.4: Ejemplos de problemas de tensión plana.

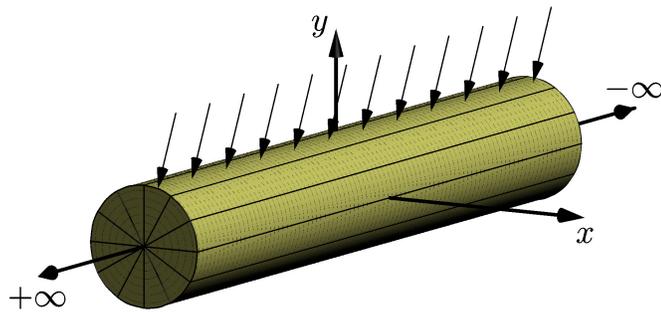


FIGURA 2.5: Tipología de un sólido sometido a deformación plana.

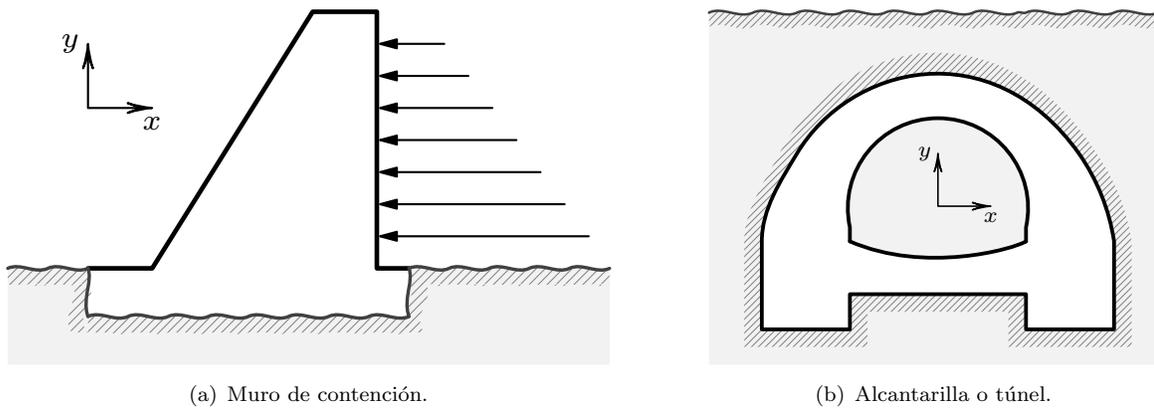


FIGURA 2.6: Ejemplos de problemas de deformación plana.

Una de las principales ventajas de la teoría de la elasticidad bidimensional es que permite el estudio de los problemas de tensión y deformación plana de forma unificada, aunque, de hecho, cada uno de estos problemas presente una serie de tipologías estructurales que funcionalmente no guardan ninguna relación entre sí [5].

### 2.2.1 Campo de desplazamientos

Las características geométricas y de cargas de una estructura en estado de tensión o deformación plana permiten establecer la hipótesis de que todas las secciones perpendiculares al eje prismático  $z$  se deforman en su plano y de manera idéntica. Por consiguiente, basta con conocer el comportamiento de cualquiera de dichas secciones. Así, consideremos una sección genérica contenida en el plano  $x - y$  de cualquiera de las estructuras de las figuras 2.4 y 2.6. El campo de desplazamientos de la sección queda perfectamente definido si se conocen los desplazamientos en las direcciones  $x$  e  $y$  de todos los puntos. El vector de desplazamientos en un punto se define como

$$\mathbf{u}(x, y) = \begin{Bmatrix} u \\ v \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} u(x, y) \\ v(x, y) \end{Bmatrix}, \quad (2.1)$$

donde  $u(x, y)$  y  $v(x, y)$  representan los desplazamientos del punto en direcciones a los ejes  $x$  e  $y$  respectivamente [5].

### 2.2.2 Campo de deformaciones y tensiones

Del campo de desplazamientos (2.1) se deducen las deformaciones haciendo uso de la teoría general de la elasticidad [4]. Así

$$\begin{aligned} \varepsilon_x &= \frac{\partial u}{\partial x}, \\ \varepsilon_y &= \frac{\partial v}{\partial y}, \\ \gamma_{xy} &= \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y}, \\ \gamma_{xz} &= \gamma_{yz} = 0. \end{aligned} \quad (2.2)$$

Con respecto a la deformación longitudinal  $\varepsilon_z$  hay que señalar que en el caso de deformación plana se hace la hipótesis de que es nula. Por otra parte, en un estado de tensión plana dicha

deformación no es nula, pero se supone que lo es la tensión  $\sigma_z$ . Por consiguiente, en ninguno de los dos casos hay que considerar la deformación  $\varepsilon_z$ , ya que no interviene en la ecuaciones del trabajo de deformación al ser el producto  $\sigma_z \varepsilon_z$  nulo. Así pues, *el vector de deformaciones significativas* de un punto se define para tensión y deformación plana como

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} \\ \frac{\partial v}{\partial y} \\ \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & 0 \\ 0 & \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial x} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u \\ v \end{Bmatrix}. \quad (2.3)$$

Se deduce de las ecuaciones (2.2) que las tensiones tangenciales  $\tau_{xz}$  y  $\tau_{zx}$  son nulas. Por otra parte, por los mismos motivos expuestos anteriormente para la deformación  $\varepsilon_z$ , la tensión  $\sigma_z$  no trabaja y *el vector de tensiones significativas* se deduce como [5]

$$\boldsymbol{\sigma} = \begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix}. \quad (2.4)$$

### 2.2.3 Relación tensión-deformación

La relación entre las componentes de tensión y deformación, ha sido establecida experimentalmente y se conoce bajo el nombre de *ley de Hooke*, por tanto la relación matricial resultante es

$$\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{D}\boldsymbol{\varepsilon}, \quad (2.5)$$

donde  $\mathbf{D}$  es la conocida matriz constitutiva o matriz de constantes elásticas [4]. El caso más general de la relación (2.5) es la que considera tensiones y deformaciones iniciales debidos a cambios de temperatura, retracciones, tensiones residuales iniciales, entre otros [6]. Así pues la relación más general es

$$\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{D}(\boldsymbol{\varepsilon} - \boldsymbol{\varepsilon}_0) + \boldsymbol{\sigma}_0, \quad (2.6)$$

donde  $\boldsymbol{\varepsilon}_0$  es el vector de deformaciones iniciales y  $\boldsymbol{\sigma}_0$  es el vector de tensiones iniciales. Del teorema de Maxwell-Betti se deduce que  $\mathbf{D}$  es siempre simétrica [7], y si consideramos materiales

isótropos; para tensión plana  $\mathbf{D}$  esta dado por:

$$\mathbf{D} = \frac{E}{1-\nu^2} \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & (1-\nu)/2 \end{bmatrix}, \quad (2.7)$$

y para deformación plana  $\mathbf{D}$  esta dado por:

$$\mathbf{D} = \frac{E}{(1+\nu)(1-2\nu)} \begin{bmatrix} 1-\nu & \nu & 0 \\ \nu & 1-\nu & 0 \\ 0 & 0 & (1-2\nu)/2 \end{bmatrix}, \quad (2.8)$$

donde  $E$  es el módulo de Young y  $\nu$  el coeficiente de Poisson [6].

## 2.2.4 Principio de Trabajos Virtuales

La expresión integral de equilibrio en problemas de elasticidad bidimensional puede obtenerse haciendo uso del Principio de Trabajos Virtuales (PTV) así, teniendo en cuenta las tensiones y deformaciones que contribuyen al trabajo virtual de la estructura, la expresión del PTV en forma matricial puede escribirse como

$$\underbrace{\iint_A \delta \boldsymbol{\varepsilon}^T \boldsymbol{\sigma} t dA}_{T.V.I} = \underbrace{\iint_A \delta \mathbf{u}^T \mathbf{b} t dA + \int_l \delta \mathbf{u}^T \mathbf{t} t ds + \sum_i \delta \mathbf{u}_i^T \mathbf{q}_i}_{T.V.E}, \quad (2.9)$$

donde:

$$\begin{aligned} \delta \boldsymbol{\varepsilon} &= [\delta \varepsilon_x, \delta \varepsilon_y, \delta \gamma_{xy}]^T, & \delta \mathbf{u} &= [\delta u, \delta v]^T, & \mathbf{b} &= [b_x, b_y]^T, \\ \mathbf{t} &= [t_x, t_y]^T, & \delta \mathbf{u}_i &= [\delta u_i, \delta v_i]^T, & \mathbf{q}_i &= [U_i, V_i]^T. \end{aligned}$$

La primera parte de la ecuación (2.9) representa el trabajo que el vector de esfuerzos significativos  $\boldsymbol{\sigma}$  realiza sobre las deformaciones virtuales  $\delta \boldsymbol{\varepsilon}$ . A la derecha de la igualdad tenemos: fuerzas repartidas por unidad de volumen  $\mathbf{b}$ , fuerzas repartidas sobre el contorno  $\mathbf{t}$  y finalmente las fuerzas puntuales  $\mathbf{q}_i$  sobre los desplazamientos virtuales  $\delta \mathbf{u}$ .  $A$  y  $l$  son el área y el contorno de la sección transversal del sólido y  $t$  su espesor. En problemas de tensión plana el valor de  $t$  coincide con el espesor real, mientras que en problemas de deformación plana es usual considerar  $t = 1$  [5].

## 2.3 Método de Elementos Finitos

Se estudiará a detalle el comportamiento del elemento triangular con 3 nodos en coordenadas cartesianas. Se considera un elemento triangular aislado de nodos  $i, j, m$  tal como se muestra en la figura 2.7.

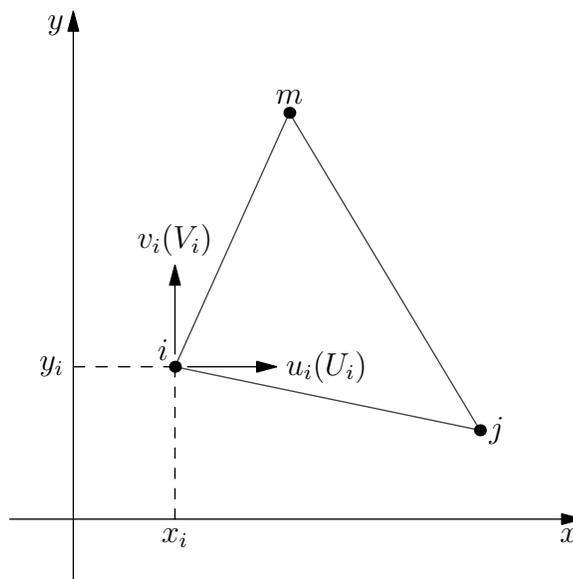


FIGURA 2.7: Elemento aislado de un medio continuo bajo tensión o deformación plana, donde  $x_i$  y  $y_i$  son las coordenadas cartesianas del nodo  $i$ .

### 2.3.1 Discretización del campo de desplazamientos

Es posible expresar los desplazamientos cartesianos de un punto cualquiera del interior del elemento en función de los desplazamientos de sus nodos como

$$\mathbf{u} = \begin{Bmatrix} u \\ v \end{Bmatrix} = \sum_k \mathbf{N}_k \mathbf{a}_k^e = [\mathbf{N}_i \ \mathbf{N}_j \ \mathbf{N}_m] \begin{Bmatrix} \mathbf{a}_i \\ \mathbf{a}_j \\ \mathbf{a}_m \end{Bmatrix}^e = \mathbf{N} \mathbf{a}^e, \quad (2.10)$$

donde  $\mathbf{u}$  es el vector de desplazamientos de un punto del elemento,  $\mathbf{a}_i$  representa los desplazamientos de un nodo y tiene dos componentes:

$$\mathbf{a}_i = \begin{Bmatrix} u_i \\ v_i \end{Bmatrix}, \quad (2.11)$$

y los seis componentes de los desplazamientos del elemento se agrupan en el vector

$$\mathbf{a}^e = \begin{Bmatrix} \mathbf{a}_i \\ \mathbf{a}_j \\ \mathbf{a}_m \end{Bmatrix}. \quad (2.12)$$

Las funciones  $\mathbf{N}_i$ ,  $\mathbf{N}_j$ ,  $\mathbf{N}_m$  han de escogerse de manera que, al sustituir en la ecuación (2.10) las coordenadas de los nodos, se obtengan los correspondientes desplazamientos nodales. Es claro que:

$$\mathbf{N}_i = \begin{bmatrix} N_i & 0 \\ 0 & N_i \end{bmatrix}, \quad (2.13)$$

es posible obtener  $N_i$  de (2.10), teniendo en cuenta que  $N_i = 1$  para  $x_i$  e  $y_i$  y cero en los otros vértices. Las funciones de prueba  $\mathbf{N}$  son las *funciones de forma*. Los desplazamientos de cualquier punto deben de quedar bien definidos por los valores de  $\mathbf{a}^e$ . La representación más sencilla viene dada por dos polinomios de primer grado

$$\begin{aligned} u &= \alpha_1 + \alpha_2 x + \alpha_3 y, \\ v &= \alpha_4 + \alpha_5 x + \alpha_6 y. \end{aligned} \quad (2.14)$$

Se pueden calcular fácilmente las seis constantes  $\alpha$  resolviendo los dos sistemas de tres ecuaciones simultáneas que se obtienen al sustituir las coordenadas de los nodos e igualar las expresiones resultantes a los desplazamientos correspondientes a los nodos. Si suponemos que la interpolación de  $u$  y  $v$  se efectúa de forma idéntica, basta con obtener la expresión de las funciones de forma para uno de los dos desplazamientos. Así por ejemplo, para el desplazamiento horizontal  $u$  tenemos:

$$\begin{aligned} u_i &= \alpha_1 + \alpha_2 x_i + \alpha_3 y_i, \\ u_j &= \alpha_1 + \alpha_2 x_j + \alpha_3 y_j, \\ u_m &= \alpha_1 + \alpha_2 x_m + \alpha_3 y_m, \end{aligned} \quad (2.15)$$

resolviendo el sistema de ecuaciones (2.15) para  $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$  en función de los desplazamientos nodales  $u_i, u_j$  y  $u_m$  se obtiene

$$u = \frac{1}{2\Delta} [(a_i + b_i x + c_i y)u_i + (a_j + b_j x + c_j y)u_j + (a_m + b_m x + c_m y)u_m], \quad (2.16)$$

donde

$$\begin{aligned} a_i &= x_j y_m - x_m y_j, \\ b_i &= y_i - y_m, \\ c_i &= x_m - x_j, \end{aligned} \tag{2.17}$$

los coeficientes restantes se obtienen mediante permutación cíclica de los subíndices  $i, j, m$  y donde

$$2\Delta = \det \begin{vmatrix} 1 & x_i & y_i \\ 1 & x_j & y_j \\ 1 & x_m & y_m \end{vmatrix} = 2 * (\text{área del triángulo } ijm), \tag{2.18}$$

comparando las ecuaciones (2.16) y (2.10) se deduce que

$$N_i = \frac{(a_i + b_i x + c_i y)}{2\Delta}. \tag{2.19}$$

La representación gráfica de las funciones de forma se muestra en la figura 2.8.

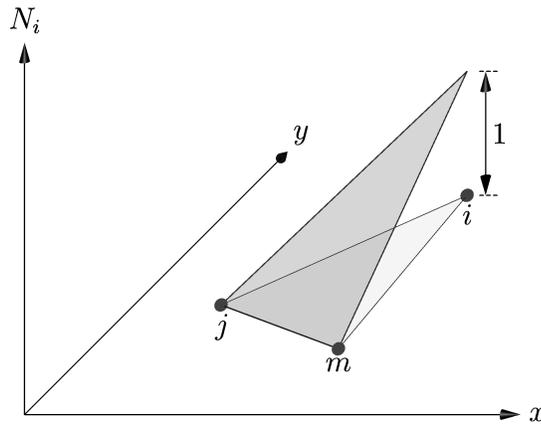


FIGURA 2.8: Funciones de forma.

Estas funciones de forma automáticamente garantizan desplazamientos continuos entre elementos adyacentes por que los desplazamientos varían linealmente a lo largo de cualquier lado de los triángulos en la discretización [6].

### 2.3.2 Discretización del campo de deformaciones

Sustituyendo (2.10) y (2.19) en (2.3) se obtiene las tres deformaciones significativas en cualquier punto del elemento como:

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \begin{Bmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} \\ \frac{\partial v}{\partial y} \\ \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial N_i}{\partial x} & 0 & \frac{\partial N_j}{\partial x} & 0 & \frac{\partial N_m}{\partial x} & 0 \\ 0 & \frac{\partial N_i}{\partial y} & 0 & \frac{\partial N_j}{\partial y} & 0 & \frac{\partial N_m}{\partial y} \\ \frac{\partial N_i}{\partial y} & \frac{\partial N_i}{\partial x} & \frac{\partial N_j}{\partial y} & \frac{\partial N_j}{\partial x} & \frac{\partial N_m}{\partial y} & \frac{\partial N_m}{\partial x} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_i \\ v_i \\ u_j \\ v_j \\ u_m \\ v_m \end{Bmatrix}, \quad (2.20)$$

reescribiendo (2.20) tenemos

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \mathbf{B}\mathbf{a}^e = [\mathbf{B}_i \ \mathbf{B}_j \ \mathbf{B}_m] \begin{Bmatrix} \mathbf{a}_i \\ \mathbf{a}_j \\ \mathbf{a}_m \end{Bmatrix}, \quad (2.21)$$

donde  $\mathbf{B}$  es la matriz de deformaciones del elemento y  $\mathbf{B}_i$  es la matriz de deformaciones del nodo  $i$ , la cual está dada por:

$$\mathbf{B}_i = \begin{bmatrix} \frac{\partial N_i}{\partial x} & 0 \\ 0 & \frac{\partial N_i}{\partial y} \\ \frac{\partial N_i}{\partial y} & \frac{\partial N_i}{\partial x} \end{bmatrix}, \quad (2.22)$$

sustituyendo las funciones de forma (2.19),  $\mathbf{B}$  tiene los siguientes valores:

$$\mathbf{B} = \frac{1}{2\Delta} \begin{bmatrix} b_i & 0 & \vdots & b_j & 0 & \vdots & b_m & 0 \\ 0 & c_i & \vdots & 0 & c_j & \vdots & 0 & c_m \\ c_i & b_i & \vdots & c_j & b_j & \vdots & c_m & b_m \end{bmatrix} \quad (2.23)$$

de (2.23) vemos que la matriz  $\mathbf{B}$  es independiente de la posición del punto dentro del elemento, esto implica que las deformaciones son constantes en todo el elemento [6].

### 2.3.3 Discretización del campo de tensiones

La expresión discretizada del vector de tensiones en el interior del elemento se obtiene mediante la sustitución directa de la ecuación (2.21) en (2.5)

$$\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{D}\boldsymbol{\varepsilon} = \mathbf{DB}\mathbf{a}^e. \quad (2.24)$$

Nuevamente, como la matriz de deformación  $\mathbf{B}$  es constante, las tensiones también lo son en todo el elemento. Esto es consecuencia directa del campo de desplazamientos lineal escogido, cuyos gradientes son, obviamente, constantes. Por consiguiente, en zonas de la discretización donde se tenga alta concentración de tensiones será necesario utilizar una discretización más fina para aproximar la solución de tensiones con suficiente precisión [5].

### 2.3.4 Ecuaciones de equilibrio de la discretización

Para la obtención de las ecuaciones de equilibrio de la discretización partiremos de la expresión del PTV (2.9) aplicada al equilibrio de un elemento aislado, como el de la figura 2.9.

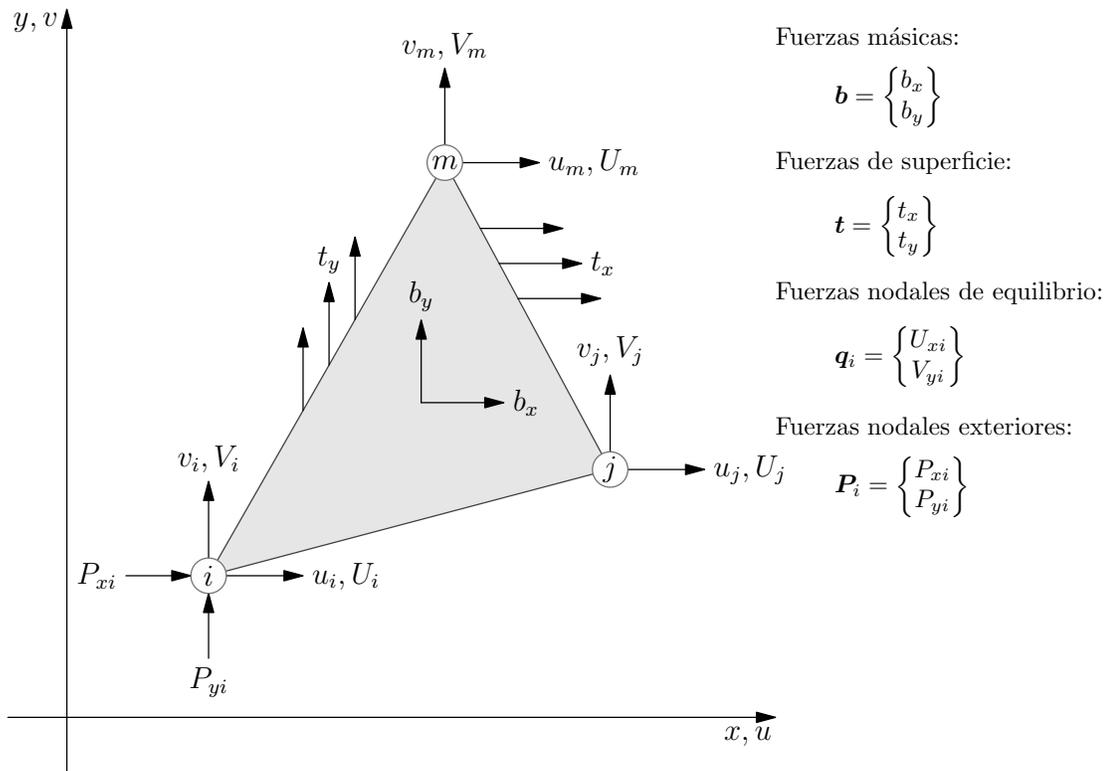


FIGURA 2.9: Fuerzas sobre un elemento triangular de nodos  $i, j, m$ .

Vamos a suponer que sobre el elemento aislado, actúan fuerzas repartidas por unidad de área (fuerzas máscas)  $\mathbf{b}$ , y en sus lados fuerzas repartidas por unidad de longitud (fuerzas de superficie)  $\mathbf{t}$  (figura 2.9). Las fuerzas de superficie pueden ser de dos tipos: debidas a fuerzas exteriores que actúan sobre los lados del elemento que forman parte del contorno exterior de la estructura o debidas a las fuerzas de interacción entre elementos que se transmite a través de sus lados comunes. Éstas últimas pueden ignorarse desde un principio, debido a que se anulan cuando se *ensambla* la matriz de rigidez de toda la estructura a partir de las matrices de rigidez elementales.

Partiendo del supuesto de que el equilibrio del elemento se establece únicamente en los nodos, podemos definir unas fuerzas puntuales que actúen sobre los nodos (denominadas fuerzas nodales de equilibrio) y que equilibren las fuerzas debidas a la deformación del elemento y al resto de las fuerzas que actúan sobre el mismo.

Para el cálculo de las fuerzas nodales de equilibrio haremos uso de la expresión del PTV aplicada al elemento, que se escribe como

$$\iint_{A^e} \delta \boldsymbol{\varepsilon}^T \boldsymbol{\sigma} t dA^e = \iint_{A^e} \delta \mathbf{u}^T \mathbf{b} t dA^e + \int_{l^e} \delta \mathbf{u}^T \mathbf{t} t ds^e + \sum_{k=i,j,m} \delta u_k U_k + \sum_{k=i,j,m} \delta v_k V_k, \quad (2.25)$$

donde  $\delta u_k$  y  $\delta v_k$  son los desplazamientos virtuales de los nodos del elemento,  $U_k$  y  $V_k$  las fuerzas nodales de equilibrio que corresponden a dichos desplazamientos. El trabajo virtual de dichas fuerzas puede despejarse de la ecuación (2.25) como

$$\iint_{A^e} \delta \boldsymbol{\varepsilon}^T \boldsymbol{\sigma} t dA^e - \iint_{A^e} \delta \mathbf{u}^T \mathbf{b} t dA^e - \int_{l^e} \delta \mathbf{u}^T \mathbf{t} t ds^e = [\delta \mathbf{a}^e]^T \mathbf{q}^e, \quad (2.26)$$

donde para el elemento triangular de tres nodos

$$\begin{aligned} \delta \mathbf{a}^e &= [\delta u_i, \delta v_i, \delta u_j, \delta v_j, \delta u_m, \delta v_m]^T, \\ \mathbf{q}^e &= [U_i, V_i, U_j, V_j, U_m, V_m]^T. \end{aligned}$$

De (2.10) y (2.21) podemos escribir

$$\delta \mathbf{u}^T = [\delta \mathbf{a}^e]^T \mathbf{N}^T, \quad \delta \boldsymbol{\varepsilon}^T = [\delta \mathbf{a}^e]^T \mathbf{B}^T. \quad (2.27)$$

Sustituyendo (2.27) en (2.26) y factorizando  $\delta \mathbf{a}^e$  en el primer miembro finalmente se obtiene

$$[\delta \mathbf{a}^e]^T \left[ \iint_{A^e} \mathbf{B}^T \boldsymbol{\sigma} t dA^e - \iint_{A^e} \mathbf{N}^T \mathbf{b} t dA^e - \int_{l^e} \mathbf{N}^T \mathbf{t} t ds^e \right] = [\delta \mathbf{a}^e]^T \mathbf{q}^e, \quad (2.28)$$

teniendo en cuenta que los desplazamientos virtuales son arbitrarios, se deduce que

$$\iint_{A^e} \mathbf{B}^T \boldsymbol{\sigma} t dA^e - \iint_{A^e} \mathbf{N}^T \mathbf{b} t dA^e - \int_{l^e} \mathbf{N}^T \mathbf{t} t ds^e = \mathbf{q}^e. \quad (2.29)$$

La ecuación (2.29) expresa el equilibrio entre las fuerzas nodales de equilibrio y las fuerzas debidas a la deformación del elemento (la primer integral), las fuerzas másicas (segunda integral) y las de superficie (tercera integral). Sustituyendo el vector de tensiones  $\boldsymbol{\sigma}$  en función de los desplazamientos nodales utilizando la forma general (2.6) se obtiene

$$\iint_{A^e} \mathbf{B}^T (D\mathbf{B}\mathbf{a}^e - D\boldsymbol{\varepsilon}_0 + \boldsymbol{\sigma}_0) t dA^e - \iint_{A^e} \mathbf{N}^T \mathbf{b} t dA^e - \int_{l^e} \mathbf{N}^T \mathbf{t} t ds^e = \mathbf{q}^e, \quad (2.30)$$

separando las integrales

$$\underbrace{\iint_{A^e} \mathbf{B}^T D\mathbf{B} t dA^e}_{\mathbf{K}^e} \mathbf{a}^e = \underbrace{\iint_{A^e} \mathbf{B}^T D\boldsymbol{\varepsilon}_0 t dA^e}_{\mathbf{f}_\varepsilon^e} - \underbrace{\iint_{A^e} \mathbf{B}^T \boldsymbol{\sigma}_0 t dA^e}_{\mathbf{f}_\sigma^e} + \underbrace{\iint_{A^e} \mathbf{N}^T \mathbf{b} t dA^e}_{\mathbf{f}_b^e} + \underbrace{\int_{l^e} \mathbf{N}^T \mathbf{t} t ds^e}_{\mathbf{f}_t^e} + \mathbf{q}^e, \quad (2.31)$$

donde  $\mathbf{K}^e$  es la matriz de rigidez del elemento y tenemos un conjunto de fuerzas nodales equivalentes debidas a: deformaciones iniciales  $\mathbf{f}_\varepsilon^e$ , tensiones iniciales  $\mathbf{f}_\sigma^e$ , fuerzas másicas  $\mathbf{f}_b^e$  y a fuerzas en la superficie  $\mathbf{f}_t^e$ . Se define el vector de fuerzas nodales equivalentes del elemento como

$$\mathbf{f}^e = \mathbf{f}_\varepsilon^e - \mathbf{f}_\sigma^e + \mathbf{f}_b^e + \mathbf{f}_t^e;$$

es posible expresar la ecuación (2.31) como un sistema de ecuaciones para cada elemento [8]

$$\mathbf{K}^e \mathbf{a}^e = \mathbf{f}^e + \mathbf{q}^e. \quad (2.32)$$

La ecuación de equilibrio total de la malla se obtiene estableciendo que la suma de las fuerzas nodales de equilibrio en cada nodo debe ser igual a la fuerza nodal exterior, es decir

$$\sum_e \mathbf{q}_j^e = \mathbf{P}_j,$$

ésta es la suma de las contribuciones de los vectores de fuerzas nodales de equilibrio de los distintos elementos que comparten el nodo con numeración global  $j$  y  $\mathbf{P}_j$  representa el vector de fuerzas puntuales actuando en dicho nodo.

Las ecuaciones de equilibrio de la malla se obtienen a partir de las contribuciones de las matrices de rigidez elementales y de los vectores de fuerzas nodales equivalentes, también elementales,

siguiendo las mismas reglas que en el caso de estructuras de barras. Así pues, tras el ensamblaje, la ecuación matricial global se puede escribir como

$$\mathbf{K}\mathbf{a} = \mathbf{f}, \quad (2.33)$$

donde  $\mathbf{K}$  es la matriz de rigidez,  $\mathbf{a}$  es el vector de desplazamientos nodales y  $\mathbf{f}$  el vector de fuerzas nodales equivalentes de toda la malla.

Recordemos de nuevo que las fuerzas nodales de equilibrio debidas a las fuerzas de interacción entre los contornos de los elementos adyacentes se anulan en el ensamblaje, debido a que dichas fuerzas tienen igual magnitud y dirección, pero sentidos opuestos en cada elemento. A efectos prácticos, solamente hay que considerar el efecto de las fuerzas de superficie cuando se trate de fuerzas exteriores actuantes sobre lados de elementos que pertenezcan al contorno de la estructura [5].

## 2.4 Método de Elementos Discretos

La formulación del método de los elementos discretos DEM (por sus siglas en inglés Discrete Element Method) fue introducido por Cundall [9], en esta sección se presenta la formulación desarrollada por Rojek et al. en [10].

DEM asume que el material sólido puede ser representado por un conjunto de partículas rígidas (esferas en 3D y cilindros en 2D) que interactúan entre sí mediante fuerzas normales y tangenciales. Esta ley de contacto puede ser vista como una formulación de un modelo a nivel microscópico. Las uniones cohesivas pueden romperse, simulando así la fractura del material y su posible propagación.

### 2.4.1 Ecuaciones de movimiento

DEM se basa en las ecuaciones de movimiento rotacional y traslacional de las partículas cilíndricas en 2D o esféricas en 3D, estas ecuaciones corresponden a la dinámica de cuerpos rígidos. En adición, DEM considera fuerzas de amortiguamiento para evitar vibraciones de las partículas sin contacto para así disipar la energía cinética [1]. Para el  $i$ -ésimo elemento se tiene

$$m_i \ddot{\mathbf{u}}_i = \mathbf{F}_i, \quad (2.34)$$

$$I_i \ddot{\boldsymbol{\omega}}_i = \mathbf{T}_i, \quad (2.35)$$

donde  $\mathbf{u}$  es el desplazamiento del centro del elemento y  $\ddot{\mathbf{u}}$  su aceleración,  $\boldsymbol{\omega}$  la velocidad angular y  $\dot{\boldsymbol{\omega}}$  su aceleración angular,  $m$  la masa del elemento,  $I$  el momento de inercia, los vectores  $\mathbf{F}$  y  $\mathbf{T}$  corresponden a las sumas de todas las fuerzas y momentos aplicados al elemento, respectivamente.

## 2.4.2 Fuerzas de contacto

Una vez que se ha detectado el contacto entre un par de partículas, se calculan las fuerzas que ocurren en el punto de contacto. La interacción entre dos partículas  $i, j$  puede ser representado por las fuerzas de contacto  $\mathbf{F}_i$  y  $\mathbf{F}_j$ , las cuales por la tercer ley de Newton satisfacen que  $\mathbf{F}_i = -\mathbf{F}_j$ . Tomando  $\mathbf{F} = \mathbf{F}_i$  y descomponiendo  $\mathbf{F}$  en sus direcciones normal y tangencial  $\mathbf{F}_n$  y  $\mathbf{F}_t$ , respectivamente (figura 2.10) se obtiene

$$\mathbf{F} = \mathbf{F}_n + \mathbf{F}_t = f_n \mathbf{n} + \mathbf{F}_t, \quad (2.36)$$

donde  $\mathbf{n}$  es el vector unitario normal que une los centros de las partículas, con dirección exterior a la partícula  $i$ . Las fuerzas de contacto  $f_n$  y  $\mathbf{F}_t$  se obtienen utilizando un modelo constitutivo

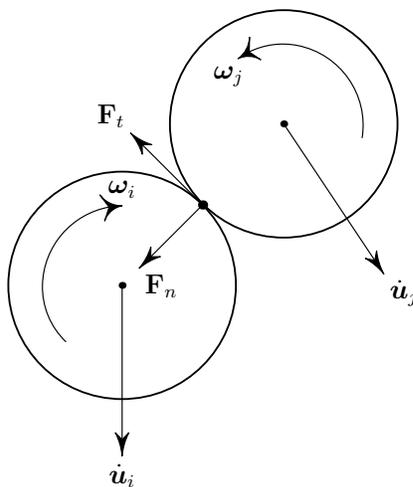


FIGURA 2.10: Descomposición de la fuerza de contacto en sus componentes normal y tangencial para dos partículas en contacto.

para el contacto entre dos esferas rígidas (o cilindros en 2D) como el presentado en la figura 2.11. La interface de contacto es caracterizada por la rigidez normal y tangencial,  $k_n$  y  $k_t$  respectivamente, el coeficiente de Coulomb  $\mu$  y el coeficiente de amortiguamiento de contacto  $c_n$ . La fuerza de contacto normal se descompone en una parte elástica  $f_{ne}$  y una parte de

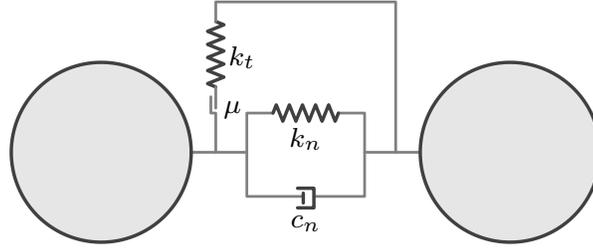


FIGURA 2.11: Modelo de la interfaz de contacto.

amortiguamiento  $f_{nd}$ ;  $f_{ne}$  es proporcional a la rigidez normal  $k_n$  y a la penetración de las superficies de las partículas  $u_{rn}$

$$f_{ne} = k_n u_{rn} = k_n (d - r_i - r_j), \quad (2.37)$$

donde  $d$  es la distancia entre los centros de las partículas y  $r_i$ ,  $r_j$  sus radios. Si no existe cohesión entre partículas, no existirá fuerza normal de tensión, esto significa que cuando  $u_{rn} \leq 0$  se establece el valor nulo a la fuerza normal  $f_{ne} = 0$ . La fuerza de amortiguamiento se utiliza para disminuir oscilaciones de las fuerzas de contacto y disipar la energía cinética. Si se supone ésta de tipo viscoso, se obtiene que

$$f_{nd} = c_n v_{rn}, \quad (2.38)$$

donde  $v_{rn}$  es la velocidad relativa normal entre los centros de las partículas

$$v_{rn} = (\dot{\mathbf{u}}_j - \dot{\mathbf{u}}_i) \cdot \mathbf{n}. \quad (2.39)$$

El coeficiente de amortiguamiento  $c_n$  puede considerarse como una parte del amortiguamiento crítico  $C_{cr}$  para el sistema de dos partículas [11],  $C_{cr}$  está dado por

$$C_{cr} = 2 \sqrt{\frac{m_i m_j k_n}{m_i + m_j}}. \quad (2.40)$$

En ausencia de cohesión, ya sea por no existencia de adhesión o por los posibles enlaces rotos entre las partículas, la fuerza de contacto tangencial  $\mathbf{F}_t$  aparece por fricción que se opone al movimiento relativo en el punto de contacto. La velocidad relativa tangencial en el punto de contacto  $\mathbf{v}_{rt}$  se calcula a partir de la relación

$$\mathbf{v}_{rt} = \mathbf{v}_r - (\mathbf{v}_r \cdot \mathbf{n}) \mathbf{n}, \quad (2.41)$$

donde la velocidad relativa  $\mathbf{v}_r$  entre partículas está dado por

$$\mathbf{v}_r = (\dot{\mathbf{u}}_j + \boldsymbol{\omega}_j \times \mathbf{r}_{cj}) - (\dot{\mathbf{u}}_i + \boldsymbol{\omega}_i \times \mathbf{r}_{ci}), \quad (2.42)$$

donde  $\dot{\mathbf{u}}_i$ ,  $\dot{\mathbf{u}}_j$  y  $\boldsymbol{\omega}_i$ ,  $\boldsymbol{\omega}_j$  son las velocidades de traslación y rotación para las partículas  $i$ ,  $j$  y  $\mathbf{r}_{ci}$ ,  $\mathbf{r}_{cj}$  son los vectores que conectan los centros con el punto de contacto [10].

La relación entre la fuerza de fricción  $f_t$  y el desplazamiento tangencial relativo  $u_{rt}$  está dado por el modelo clásico de Coulomb. Al existir la posibilidad de oscilaciones no-físicas en la fuerza de fricción para la solución numérica es necesario utilizar un modelo regularizado, mediante la descomposición de la velocidad tangencial relativa en sus partes reversible e irreversible. Este proceso es equivalente a formular el contacto por fricción como un problema análogo al de elasto-plasticidad, lo que permite calcular la fuerza de fricción utilizando un algoritmo de retorno radial estándar [3]. Primero se calcula un estado de prueba de la forma

$$\mathbf{F}_t^{\text{trial}} = \mathbf{F}_t^{\text{n-1}} - k_t \mathbf{v}_{rt} \Delta t, \quad (2.43)$$

y se comprueba la condición de deslizamiento

$$\phi^{\text{trial}} = \|\mathbf{F}_t^{\text{trial}}\| - \mu |f_n|. \quad (2.44)$$

Si  $\phi^{\text{trial}} \leq 0$ , la fuerza de fricción es la del estado de prueba, es decir  $\mathbf{F}_t^{\text{n}} = \mathbf{F}_t^{\text{trial}}$ , de lo contrario la fuerza de fricción queda expresada por

$$\mathbf{F}_t^{\text{n}} = \mu |f_n| \frac{\mathbf{F}_t^{\text{trial}}}{\|\mathbf{F}_t^{\text{trial}}\|}. \quad (2.45)$$

## 2.5 Esquema de Integración

Para este trabajo se considera el problema dinámico de estructuras partiendo de una discretización de FEM, la justificación y el cómo se incluye la formulación de DEM se detallan en el siguiente capítulo; así la ecuación diferencial matricial que gobierna este problema inicialmente es<sup>1</sup>:

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{a}} + \mathbf{C}\dot{\mathbf{a}} + \mathbf{K}\mathbf{a} + \mathbf{f} = \mathbf{0}, \quad (2.46)$$

---

<sup>1</sup>Ver el desarrollo detallado en [12]

con

$$\dot{\mathbf{a}} = \frac{d}{dt}\mathbf{a} \quad \text{y} \quad \ddot{\mathbf{a}} = \frac{d^2}{dt^2}\mathbf{a}, \quad (2.47)$$

donde  $\mathbf{K}$  es la matriz de rigidez global,  $\mathbf{a}$  el vector de desplazamientos nodales,  $\mathbf{f}$  el vector de fuerzas obtenidos por adición de los coeficientes de rigidez de los elementos  $\mathbf{K}^e$ , y por adición de las fuerzas nodales debidas a cargas exteriores, tensiones iniciales, etc. Las nuevas matrices  $\mathbf{C}$  y  $\mathbf{M}$  se ensamblan de forma usual a partir de las submatrices elementales dadas por

$$\mathbf{C}_{ij}^e = \int_{V^e} \mathbf{N}^T \boldsymbol{\mu} \mathbf{N} dV, \quad (2.48)$$

$$\mathbf{M}_{ij}^e = \int_{V^e} \mathbf{N}^T \rho \mathbf{N} dV. \quad (2.49)$$

Como puede apreciarse en las ecuaciones (2.48) y (2.49) volvemos a encontrar matrices simétricas. La matriz  $\mathbf{M}^e$  se conoce con el nombre de *matriz de masa elemental* y la matriz ensamblada  $\mathbf{M}$  como la matriz de masa del sistema. Las matrices  $\mathbf{C}^e$  y  $\mathbf{C}$  se conocen como *matriz de amortiguamiento elemental* y matriz de amortiguamiento del sistema, respectivamente.

En la práctica, el empleo de la matriz de masa concentrada (o diagonal) presenta muchas ventajas de tipo numérico, actualmente hay quienes utilizan exclusivamente estas matrices y los resultados obtenidos son a menudo precisos [12]. En la actualidad, existen muchas formas del proceso de *concentración* o *diagonalización* y el que se usa en este trabajo es el conocido método de la suma por filas.

La determinación de la matriz de amortiguamiento  $\mathbf{C}$  es difícil en la práctica, ya que se desconoce la matriz de viscosidad  $\boldsymbol{\mu}$ . A menudo se asume que la matriz de amortiguamiento es una combinación lineal de las matrices de rigidez y de masa, es decir

$$\mathbf{C} = \alpha \mathbf{M} + \beta \mathbf{K}, \quad (2.50)$$

donde  $\alpha$  y  $\beta$  se determinan experimentalmente [13]. Esta forma de expresar el amortiguamiento se conoce como *amortiguamiento de Rayleigh*, en ocasiones se define  $\mathbf{C}$  de manera más explícita y no es necesario emplear estas formas aproximadas para definir el amortiguamiento; por esto, la definición tomada para el cálculo de la matriz de amortiguamiento concentrada (o diagonal) para el programa desarrollado es

$$\mathbf{C}_{ii} = \alpha \sqrt{\mathbf{K}_{ii} \mathbf{M}_{ii}}, \quad (2.51)$$

donde  $\alpha$  es un parámetro elegido por el usuario y  $\alpha \in [1 \times 10^{-3}, 5 \times 10^{-3}]$ .

### 2.5.1 Colocación mediante serie truncada de Taylor

Se aproxima de forma separada  $\mathbf{a}_{n+1}$  y  $\dot{\mathbf{a}}_{n+1}$  mediante una serie truncada de Taylor. Podemos escribir, suponiendo que  $\mathbf{a}_n$  y  $\dot{\mathbf{a}}_n$  son conocidas:

$$\mathbf{a}_{n+1} \approx \mathbf{a}_n + \Delta t \dot{\mathbf{a}}_n + \Delta t \beta (\dot{\mathbf{a}}_{n+1} - \dot{\mathbf{a}}_n) \quad (2.52)$$

y usar colocación para satisfacer la ecuación dinámica de gobierno en  $t_{n+1}$ , reescribiendo:

$$\mathbf{M} \ddot{\mathbf{a}}_{n+1} + \mathbf{C} \dot{\mathbf{a}}_{n+1} + \mathbf{K} \mathbf{a}_{n+1} + \mathbf{f}_{n+1} = \mathbf{0}. \quad (2.53)$$

Si se considera un desarrollo en serie truncada de Taylor para la función  $\mathbf{a}$  y sus derivadas, se puede escribir

$$\begin{aligned} \mathbf{a}_{n+1} &= \mathbf{a}_n + \Delta t \dot{\mathbf{a}}_n + \cdots + \frac{\Delta t^p}{p!} \mathbf{a}_n^{(p)} + \beta_p \frac{\Delta t^p}{p!} (\mathbf{a}_{n+1}^{(p)} - \mathbf{a}_n^{(p)}), \\ \dot{\mathbf{a}}_{n+1} &= \dot{\mathbf{a}}_n + \Delta t \ddot{\mathbf{a}}_n + \cdots + \frac{\Delta t^{p-1}}{(p-1)!} \dot{\mathbf{a}}_n^{(p)} + \beta_{p-1} \frac{\Delta t^{p-1}}{(p-1)!} (\dot{\mathbf{a}}_{n+1}^{(p)} - \dot{\mathbf{a}}_n^{(p)}), \\ &\vdots \\ \mathbf{a}_{n+1}^{(p-1)} &= \mathbf{a}_n^{(p-1)} + \Delta t \mathbf{a}_n^{(p)} + \beta_1 \Delta t (\mathbf{a}_{n+1}^{(p)} - \mathbf{a}_n^{(p)}) \quad (\text{utilizando } \beta_0 = 1) \end{aligned} \quad (2.54)$$

La sustitución de los tres desarrollos de la ecuación (2.54) en la ecuación de gobierno (2.53) da una única ecuación de la cual puede calcularse  $\mathbf{a}_{n+1}^{(p)}$ . Cuando éste ha sido determinado, pueden evaluarse  $\mathbf{a}_{n+1}$  a  $\mathbf{a}_{n+1}^{(p-1)}$  utilizando las ecuaciones (2.54). El miembro más importante de esta familia es, naturalmente, el *algoritmo de Newmark* [12].

### 2.5.2 Algoritmo Newmark

Este algoritmo es uno de los más populares para análisis dinámico y se conoce como el esquema de Newmark. Se usa una serie cuadrática ( $p = 2$ ), siendo este el mínimo requerido para problemas de segundo orden. El desarrollo de la serie de Taylor (2.54) es:

$$\begin{aligned} \mathbf{a}_{n+1} &= \mathbf{a}_n + \Delta t \dot{\mathbf{a}}_n + \frac{\Delta t^2}{2} (1 - \beta_2) \ddot{\mathbf{a}}_n + \frac{\Delta t^2}{2} \beta_2 \ddot{\mathbf{a}}_{n+1} \\ \dot{\mathbf{a}}_{n+1} &= \dot{\mathbf{a}}_n + \Delta t (1 - \beta_1) \ddot{\mathbf{a}}_n + \Delta t \beta_1 \ddot{\mathbf{a}}_{n+1} \end{aligned} \quad (2.55)$$

Esto, conjuntamente con la ecuación dinámica (2.53) permiten determinar las tres incógnitas  $\ddot{\mathbf{a}}_{n+1}$ ,  $\dot{\mathbf{a}}_{n+1}$  y  $\mathbf{a}_{n+1}$ .

Es cómodo proceder resolviendo primero  $\ddot{\mathbf{a}}_{n+1}$ , sustituyendo las ecuaciones (2.55) en (2.53), lo que resulta en

$$\begin{aligned} \ddot{\mathbf{a}}_{n+1} = & - \left( \mathbf{M} + \mathbf{C}\beta_1\Delta t + \frac{\mathbf{K}\beta_2\Delta t^2}{2} \right)^{-1} \times \left\{ \mathbf{f}_{n+1} + \mathbf{C} \left[ \dot{\mathbf{a}}_n + \Delta t(1 - \beta_1)\ddot{\mathbf{a}}_n \right] \right. \\ & \left. + \mathbf{K} \left[ \mathbf{a}_n + \Delta t\dot{\mathbf{a}}_n + \frac{\Delta t^2}{2}(1 - \beta_2)\ddot{\mathbf{a}}_n \right] \right\}. \end{aligned} \quad (2.56)$$

Después de este paso los valores  $\dot{\mathbf{a}}_{n+1}$  y  $\mathbf{a}_{n+1}$  pueden encontrarse mediante sencillas operaciones vectoriales utilizando las ecuaciones (2.55).

Como en el caso general,  $\beta_2 = 0$  produce un algoritmo explícito y la solución es muy sencilla si  $\mathbf{M}$  y  $\mathbf{C}$  se suponen diagonales y  $\beta_1 = \frac{1}{2}$  [12].

## Capítulo 3

# Formulación FEM-DEM

Se listan las principales características de los métodos de elementos finitos y discretos presentados en el capítulo 2. Para FEM tenemos:

- Un método de aproximación que garantiza la solución de la ecuación diferencial en los nodos de la discretización del dominio.
- La aproximación mejora considerablemente cuando los elementos de la discretización son *muy pequeños*, esto implica que el tiempo de cómputo puede incrementarse considerablemente cuando se tiene una discretización muy fina.
- En principio no es posible simular/modelar fracturas.
- El comportamiento no lineal es muy complejo.
- No existen microparámetros.

Dentro de las características principales para DEM podemos listar:

- Es posible simular/modelar fracturas y su propagación.
- Los contactos internos están bien definidos.
- En muchas ocasiones no converge a la solución.
- La precisión de los resultados es altamente dependiente de la discretización.

- Es un tanto difícil encontrar los microparámetros que se usan para definir la fuerza de contacto entre dos partículas, a saber:  $c_n$ ,  $k_n$ ,  $\mu$  y  $k_t$ .
- Se requiere de un alto esfuerzo computacional en simulaciones que consideran un gran número de partículas.

A continuación se presenta un medio continuo discretizado con FEM y DEM en las figuras 3.1(a) y 3.2(a), respectivamente.

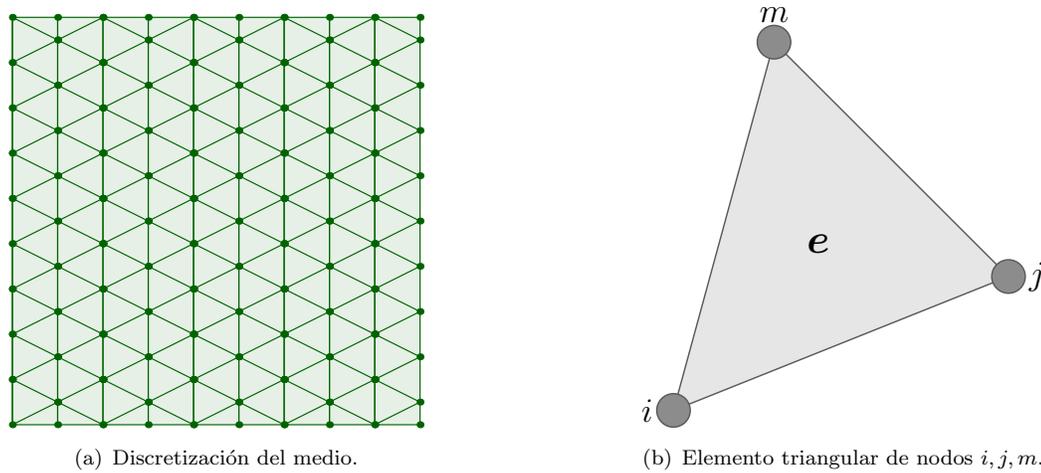


FIGURA 3.1: Discretización de un dominio continuo con FEM.

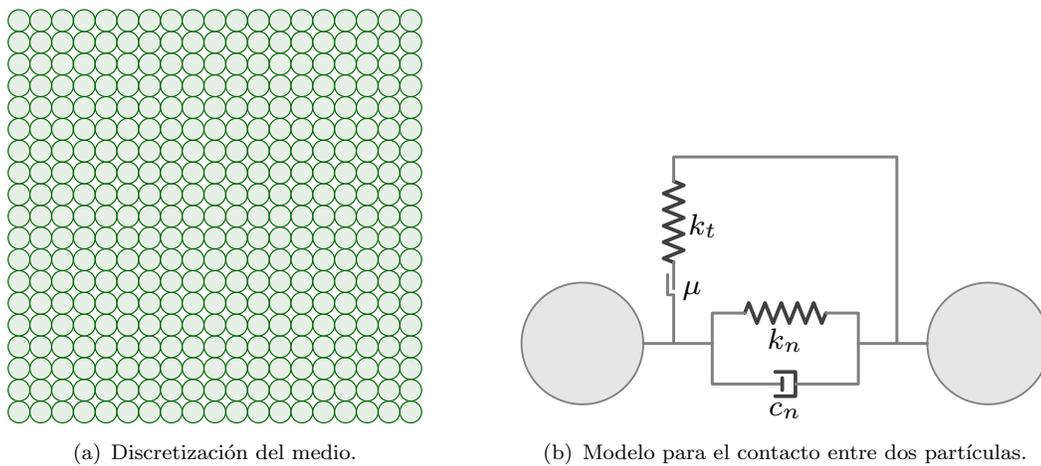


FIGURA 3.2: Discretización de un dominio continuo con DEM.

### 3.1 Formulación

Un medio continuo discretizado con FEM puede ser visto como una discretización con DEM con *elementos virtuales* de FEM como se aprecia en la figura 3.3.

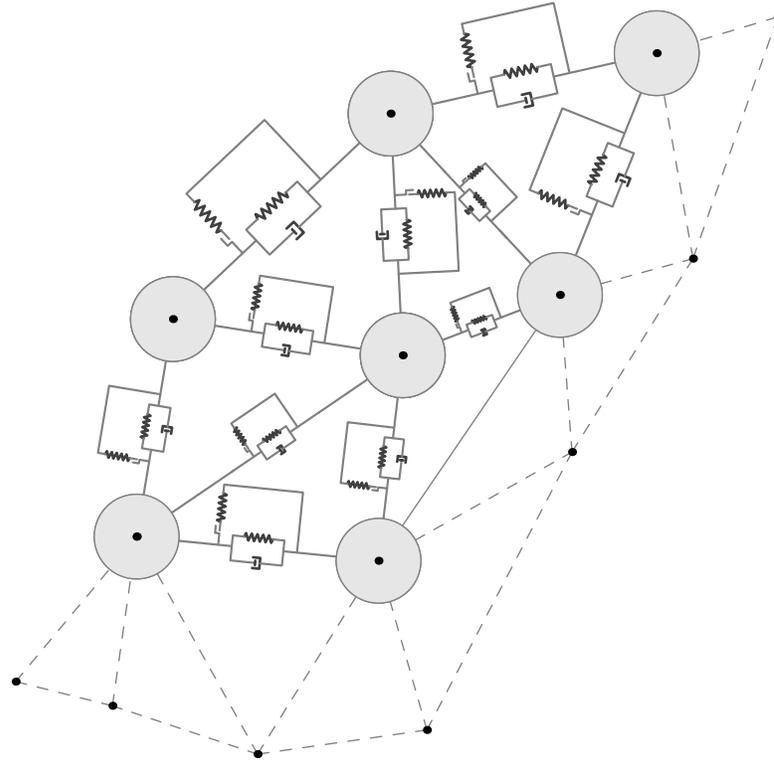


FIGURA 3.3: Elementos virtuales de DEM sobre la discretización de FEM.

Dadas las características principales de ambas metodologías, es conveniente partir con la formulación de FEM encontrando desplazamientos, tensiones, deformaciones y todas aquellas variables de interés; luego, es necesario responder a preguntas como:

- ¿Es posible heredar las propiedades de FEM a DEM?
- ¿Cuáles y cómo heredar estas propiedades?

Para responder estas preguntas de forma intuitiva observemos la figura 3.4, en ésta se considera un elemento triangular aislado de nodos  $i$ ,  $j$ ,  $m$ ; éste se relaciona con DEM si asignamos partículas con centro en los nodos  $i$ ,  $j$ ,  $m$  y sus respectivos radios  $r_i$ ,  $r_j$ ,  $r_m$ , luego resta relacionar la fuerza de contacto entre cada par de partículas; es decir, modelaremos la fuerza

de contacto de DEM en cada arista del elemento triangular de FEM.

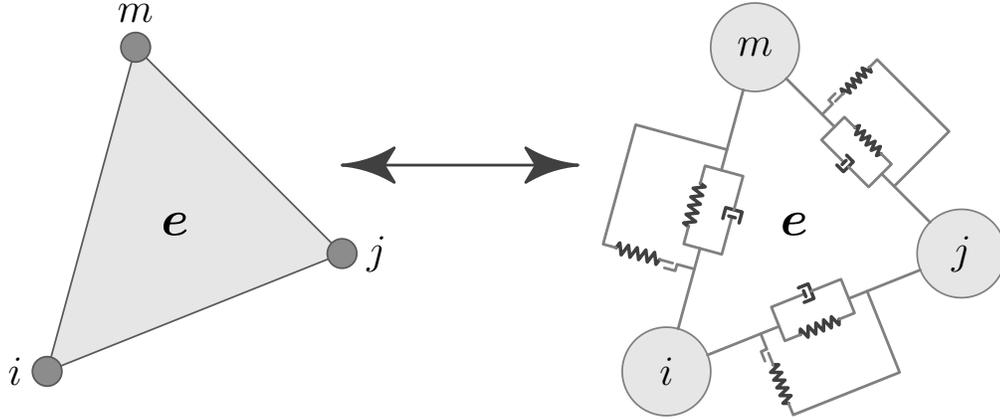


FIGURA 3.4: Relación entre los modelos FEM y DEM.

Una de las variables principales es la rigidez de la resistencia entre cada par de partículas, adviértase que se considera solamente la fuerza normal para modelar la fuerza de contacto entre partículas con base en la rigidez de las aristas, de este modo se evita la tarea de encontrar los microparámetros  $c_n$ ,  $k_n$ ,  $\mu$  y  $k_t$ .

Para modelar esta fuerza de contacto a partir de las propiedades de FEM recordemos que como se explicó en el capítulo 2, cada elemento de la discretización de FEM tiene asociado una matriz de rigidez elemental

$$\mathbf{K}^e = \begin{bmatrix} \mathbf{K}_{ii} & \mathbf{K}_{ij} & \mathbf{K}_{im} \\ \mathbf{K}_{ji} & \mathbf{K}_{jj} & \mathbf{K}_{jm} \\ \mathbf{K}_{mi} & \mathbf{K}_{mj} & \mathbf{K}_{mm} \end{bmatrix} \quad (3.1)$$

donde  $\mathbf{K}^e$  es la matriz de rigidez elemental sin considerar los grados de libertad de los nodos del elemento, a partir de ésta podemos asignar una rigidez parcial a cada arista del elemento.

Cada arista que comparte dos nodos como se aprecia en la figura 3.5 será denotada con un superíndice entre paréntesis. Las matrices de rigidez parciales de cada arista quedan definidas como

$$\mathbf{K}^{(i)} = \frac{1}{3}\mathbf{K}^e, \quad \mathbf{K}^{(j)} = \frac{1}{3}\mathbf{K}^e, \quad \mathbf{K}^{(m)} = \frac{1}{3}\mathbf{K}^e, \quad (3.2)$$

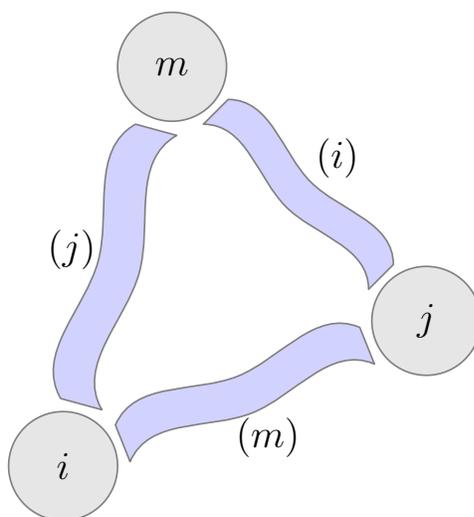


FIGURA 3.5: Modelo de fuerzas de contacto en las aristas.

y se comprueba que

$$\mathbf{K}^e = \mathbf{E} \mathbf{K}^{(l)}, \quad (3.3)$$

donde  $\mathbf{E}$  indica la operación *ensamblar*<sup>1</sup>. Teniendo la rigidez que aporta cada arista a la formulación de FEM estamos en condiciones de modelar la fuerza de contacto en éstas.

Ahora bien, siguiendo la aproximación de DEM un elemento virtual puede ser dañado usando un criterio de *tensión o deformación* para reproducir fracturas siguiendo el modelo de Rankine [14]. Viendo esto desde la perspectiva de FEM tenemos

$$\mathbf{K}^e = \mathbf{E} (1 - d_l) \mathbf{K}^{(l)}, \quad (3.4)$$

donde  $d_l$  es un índice de la proporción de daño en las aristas que puede tomar valores en el intervalo  $[0, 1]$ ; donde  $d_l = 0$  indica que la arista no ha sido dañada mientras que  $d_l = 1$  indica que la arista ha sido dañada por completo (*se rompe*), por lo que la contribución de dicha arista a la rigidez elemental es nula; es decir, el dominio de estudio tendrá una fractura donde las aristas sean dañadas por completo.

### 3.1.1 Criterio de ruptura

Para determinar cuáles serán las aristas que sufrirán cierto daño adoptaremos un criterio de ruptura basados en las tensiones y deformaciones evaluadas en todas aristas de la discretización

<sup>1</sup>En el anexo A se muestran los detalles de esta operación.

de FEM siguiendo el modelo de fractura de Rankine, también conocido como el criterio del máximo esfuerzo normal.

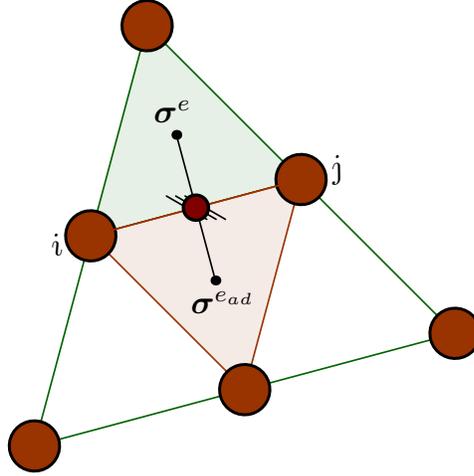


FIGURA 3.6: Evaluación de tensión en la arista de nodos  $i, j$ .

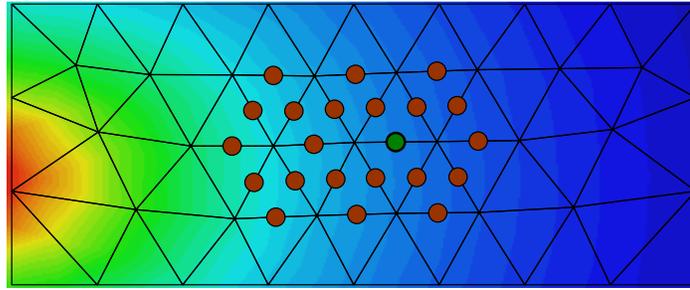
El campo de tensiones principales se evalúa en las aristas como el valor promedio de los dos elementos adyacentes

$$\sigma^{ij} = \frac{\sigma^e + \sigma^{ead}}{2}, \quad (3.5)$$

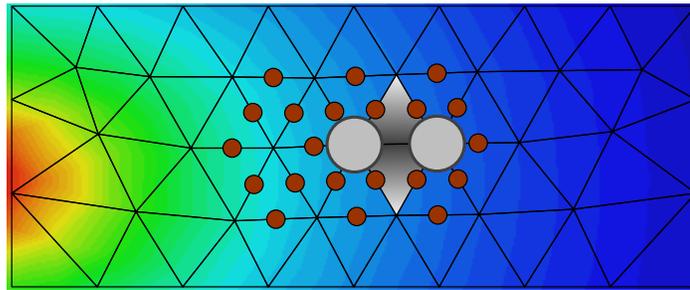
donde  $\sigma^{ij}$  es la mayor tensión principal en la arista de nodos  $i, j$ ,  $\sigma^e$  es la tensión principal elemental y  $\sigma^{ead}$  es la tensión principal elemental adyacente (figura 3.6). Si  $\sigma^{ij} > \sigma^*$ , decimos que el criterio de ruptura se alcanza para la arista de nodos  $i, j$ , es decir; la arista sufrirá un cierto daño, y  $\sigma^*$  corresponde a la tensión de Rankine o a la tensión máxima de ruptura.

Cuando el criterio de ruptura se alcanza, digamos para la arista marcada con verde en la figura 3.7(a), se crean partículas en sus nodos y se asignan sus correspondientes radios; luego, es necesario eliminar la contribución que aporta esta arista a las matrices de rigidez de aquellos elementos que la comparten o de aquel elemento que la contiene cuando esta arista se encuentra en la frontera del dominio de estudio (figura 3.7(b)).

Finalmente, se ensamblan las matrices elementales cuyas aristas han sufrido cierto daño en la matriz de rigidez global, con esto pasamos el daño que sufre cada arista al sistema global de tal forma que en la siguiente iteración del proceso de simulación se considera un dominio con un daño localizado o en el caso de que  $d_l = 1$  el dominio sufre una fractura, también localizada. Las técnicas de asignación de radios a las partículas se explicará a detalle en el siguiente capítulo.



(a) Discretización con tensiones en las aristas.



(b) Ruptura de la arista que alcanza el umbral de tensión.

FIGURA 3.7: Proceso del criterio de ruptura.

### 3.1.2 Fuerzas de contacto

Como vimos en la sección anterior, cuando una arista sufre cierto daño se asignan partículas en los nodos que la forman, los radios de estas partículas determinarán si éstas se encuentran en contacto o no. Para calcular la fuerza de contacto inicialmente se procede a determinar si algún par de partículas se encuentra en contacto y después se calcula la magnitud de esta fuerza, es importante remarcar que las fuerzas de contacto que se calculan pasan a formar parte de las fuerzas puntuales en el principio de trabajos virtuales.

Consideremos que se evalúa una arista dañada por completo a la que se asignó partículas en sus nodos  $i, j$  con sus respectivos radios  $r_i$  y  $r_j$ . Las partículas que comparten dicha arista sufren un desplazamiento  $\mathbf{a}_i$ ,  $\mathbf{a}_j$ ; los vectores de posición que se consideran para determinar si las partículas están en contacto y para calcular la magnitud de la fuerza de contacto son los que han sufrido estos desplazamientos, denotaremos éstos como  $\{x_i, y_i\}^T$  y  $\{x_j, y_j\}^T$  (figura 3.8). De la expresión

$$gap_{ij} = \left\| \begin{Bmatrix} x_j \\ y_j \end{Bmatrix} - \begin{Bmatrix} x_i \\ y_i \end{Bmatrix} \right\| - (r_i + r_j), \quad (3.6)$$

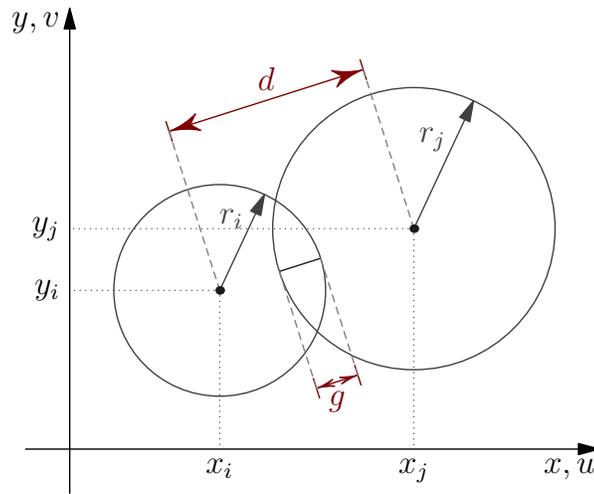


FIGURA 3.8: Evaluación del contacto para las partículas en los nodos  $i, j$ .

si  $gap_{ij} \leq 0$  las partículas están sobrepuestas o en contacto. Se realiza la búsqueda de contactos con base en esta condición, y la estructura usada para esta búsqueda se explica a detalle en el siguiente capítulo. Luego, es necesario encontrar la rigidez del contacto en la dirección normal, para esto partimos de la configuración que se presenta en la figura 3.9.

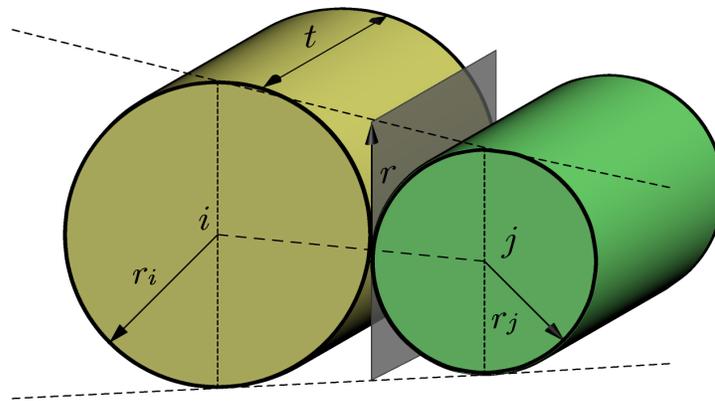


FIGURA 3.9: Configuración para la evaluación de la fuerza de contacto.

A continuación se presenta el algoritmo para encontrar la magnitud de las fuerzas de contacto entre partículas de aristas dañadas por completo, claro está que ésta se calcula solamente para aquellas partículas que se encuentran en contacto o sobrepuestas y cuya aportación a la rigidez global sea nula.

**Algoritmo 3.1** Fuerza de contacto

---

```

1: Compute bins
2: Search contacts
3: Reduced contacts
4: if  $npart > 0$  then ▷ Existen partículas en la discretización
5:   while over each  $c_i$  do
6:     while  $c_j \neq \text{NULL}$  do
7:        $gap \leftarrow gap(i, j)$ 
8:        $r \leftarrow gap / (r_i + r_j)$ 
9:        $F_{cx} \leftarrow [r * E(x_j - x_i) * t] / d$  ▷  $E$  es el módulo Young
10:       $F_{cy} \leftarrow [r * E(y_j - y_i) * t] / d$ 
11:       $\mathbf{f}_c^{ed} \leftarrow \{F_{cx}, F_{cy}\}$ 
12:       $\mathbf{f}_c(i) \leftarrow \mathbf{f}_c(i) + \mathbf{E}(\mathbf{f}_c^{ed} * 2 * r_i)$  ▷  $\mathbf{E}$  indica la operación ensamblar
13:       $\mathbf{f}_c(j) \leftarrow \mathbf{f}_c(j) - \mathbf{E}(\mathbf{f}_c^{ed} * 2 * r_j)$ 
14:     end while
15:   end while
16: end if

```

---

Para mayores detalles en la formulación y cálculo de la magnitud de la fuerza de contacto refiérase a [15].

## 3.2 Algoritmo General

En esta sección se muestra el algoritmo general para resolver el problema dinámico de estructuras en 2D haciendo uso de la formulación FEM-DEM.

**Paso 1** Cálculo de radios iniciales  $\mathbf{r}_0 = \{r_{0_1}, r_{0_2}, \dots, r_{0_n}\}$

**Paso 2** Cálculo de  $\Delta t_{cr}$

$$\Delta t = \begin{cases} \beta \Delta t_{cr} & \text{if } \Delta t > \Delta t_{cr} \\ \Delta t & \text{if } \Delta t \leq \Delta t_{cr} \end{cases}$$

**Paso 3** Cálculo de la matriz de amortiguamiento  $\mathbf{C}$

$$\mathbf{C}_{ii} = \alpha \sqrt{\mathbf{K}_{ii} \mathbf{C}_{ii}}$$

**Paso 4** Cálculo de las aceleraciones nodales, con  $\beta_1 = \frac{1}{2}$

$$\mathbf{F} = \mathbf{f} + \mathbf{f}_c - \mathbf{C} \left[ \dot{\mathbf{a}}_n + \frac{\Delta t}{2} \ddot{\mathbf{a}}_n \right] - \mathbf{K} \left[ \mathbf{a}_n + \Delta t \dot{\mathbf{a}}_n + \frac{\Delta t^2}{2} \ddot{\mathbf{a}}_n \right]$$

$$\ddot{\mathbf{a}}_{n+1} = \frac{\mathbf{F}}{\mathbf{M} + \frac{\Delta t}{2} \mathbf{C}}$$

**Paso 5** Cálculo de las velocidades nodales

$$\dot{\mathbf{a}}_{n+1} = \dot{\mathbf{a}}_n + \frac{\Delta t}{2} (\ddot{\mathbf{a}}_{n+1} + \ddot{\mathbf{a}}_n)$$

**Paso 6** Cálculo de los desplazamientos nodales

$$\mathbf{a}_{n+1} = \mathbf{a}_n + \Delta t \dot{\mathbf{a}}_n + \frac{\Delta t^2}{2} \ddot{\mathbf{a}}_{n+1}$$

**Paso 7** Aplicación del criterio de ruptura a las aristas de la discretización

**Paso 8\*** Cálculo de la fuerza de contacto  $\mathbf{f}_c$

Regresar al paso 4.

Donde  $\alpha$  es el coeficiente de amortiguamiento de la estructura de estudio y  $\beta$  es el parámetro que indica la fracción a considerar del paso de tiempo crítico  $\Delta t_{cr}$ . El cálculo del paso de tiempo crítico  $\Delta t_{cr}$  se explicará a detalle en el siguiente capítulo.

Para encontrar las aceleraciones, velocidades y desplazamientos de los nodos de la discretización se emplea un esquema conjunto entre el método de *Runge-Kutta de cuarto orden* y el esquema de *Newmark* que se presentó en el capítulo precedente. Los detalles de este esquema conjunto se presentan en el siguiente capítulo.

Cabe resaltar que el cálculo de la fuerza de contacto no se realiza en cada iteración de la simulación, si no mas bien en cada intervalo de iteraciones, este intervalo es ingresado por el usuario antes de empezar la simulación; esto debido a que los desplazamientos que sufren los nodos de la discretización son *muy pequeños*, por lo que no es necesario evaluar la fuerza de contacto en cada iteración de la simulación.

# Capítulo 4

## Implementación de Módulos

### 4.1 RK4-Newmark

El método de *Runge-Kutta de cuarto orden* (**RK4**) es uno de los métodos numéricos más usados para resolver ecuaciones diferenciales. Existen en la actualidad otros métodos numéricos que son especialmente diseñados para algún tipo de problema en particular, pero este método ha servido como un *solver* de propósito general por décadas [16]. El esquema de integración usado en este trabajo es una combinación entre el método de Runge-Kutta de cuarto orden y el esquema Newmark presentado en la sección 2.5.2.

#### 4.1.1 Formulación

Sustituyendo  $\beta_1 = \frac{1}{2}$  y  $\beta_2 = 0$  en el sistema (2.55) del esquema de Newmark se obtiene

$$\mathbf{a}_{n+1} = \mathbf{a}_n + \Delta t \dot{\mathbf{a}}_n + \frac{\Delta t^2}{2} \ddot{\mathbf{a}}_n, \quad (4.1)$$

$$\dot{\mathbf{a}}_{n+1} = \dot{\mathbf{a}}_n + \frac{\Delta t}{2} \ddot{\mathbf{a}}_n + \frac{\Delta t}{2} \ddot{\mathbf{a}}_{n+1}. \quad (4.2)$$

Para resolver primero  $\ddot{\mathbf{a}}_{n+1}$  es necesario sustituir las ecuaciones (4.1) y (4.2) en la ecuación dinámica (2.53), lo que resulta en

$$\ddot{\mathbf{a}}_{n+1} = - \left( \mathbf{M} + \frac{\Delta t}{2} \mathbf{C} \right)^{-1} \times \left\{ \mathbf{f}_{n+1} + \mathbf{C} \left[ \dot{\mathbf{a}}_n + \frac{\Delta t}{2} \ddot{\mathbf{a}}_n \right] + \mathbf{K} \left[ \mathbf{a}_n + \Delta t \dot{\mathbf{a}}_n + \frac{\Delta t^2}{2} \ddot{\mathbf{a}}_n \right] \right\}. \quad (4.3)$$

Para encontrar los valores de  $\dot{\mathbf{a}}_{n+1}$  y  $\mathbf{a}_{n+1}$  con base en el método **RK4** conjuntamente con el esquema Newmark (ecuaciones (4.2) y (4.3)) es necesario definir

$$\begin{aligned} \mathbf{f}(\dot{\mathbf{a}}_n, \mathbf{a}_n, t) &= - \left( \mathbf{M} + \frac{\Delta t}{2} \mathbf{C} \right)^{-1} \times \left\{ \mathbf{f}_{n+1} + \mathbf{C} \left[ \dot{\mathbf{a}}_n + \frac{\Delta t}{2} \ddot{\mathbf{a}}_n \right] + \mathbf{K} \left[ \mathbf{a}_n + \Delta t \dot{\mathbf{a}}_n + \frac{\Delta t^2}{2} \ddot{\mathbf{a}}_n \right] \right\} \\ \mathbf{g}(\dot{\mathbf{a}}_n, \mathbf{a}_n, t) &= \dot{\mathbf{a}}_n + \frac{\Delta t}{2} \ddot{\mathbf{a}}_n + \frac{\Delta t}{2} \ddot{\mathbf{a}}_{n+1} \end{aligned} \quad (4.4)$$

a partir de las ecuaciones (4.4) se encuentran los valores de  $\dot{\mathbf{a}}_{n+1}$  y  $\mathbf{a}_{n+1}$  como

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{a}}_{n+1} &= \dot{\mathbf{a}}_n + \frac{1}{6} (\mathbf{k}_1 + 2\mathbf{k}_2 + 2\mathbf{k}_3 + \mathbf{k}_4) \\ \mathbf{a}_{n+1} &= \mathbf{a}_n + \frac{1}{6} (\mathbf{l}_1 + 2\mathbf{l}_2 + 2\mathbf{l}_3 + \mathbf{l}_4) \end{aligned} \quad (4.5)$$

donde

$$\begin{aligned} \mathbf{k}_1 &= \mathbf{f}(\dot{\mathbf{a}}_n, \mathbf{a}_n, t) \Delta t & \mathbf{l}_1 &= \mathbf{g}(\dot{\mathbf{a}}_n, \mathbf{a}_n, t) \Delta t \\ \mathbf{k}_2 &= \mathbf{f} \left( \dot{\mathbf{a}}_n + \frac{\mathbf{k}_1}{2}, \mathbf{a}_n + \frac{\mathbf{l}_1}{2}, t + \frac{\Delta t}{2} \right) \Delta t & \mathbf{l}_2 &= \mathbf{g} \left( \dot{\mathbf{a}}_n + \frac{\mathbf{k}_1}{2}, \mathbf{a}_n + \frac{\mathbf{l}_1}{2}, t + \frac{\Delta t}{2} \right) \Delta t \\ \mathbf{k}_3 &= \mathbf{f} \left( \dot{\mathbf{a}}_n + \frac{\mathbf{k}_2}{2}, \mathbf{a}_n + \frac{\mathbf{l}_2}{2}, t + \frac{\Delta t}{2} \right) \Delta t & \mathbf{l}_3 &= \mathbf{g} \left( \dot{\mathbf{a}}_n + \frac{\mathbf{k}_2}{2}, \mathbf{a}_n + \frac{\mathbf{l}_2}{2}, t + \frac{\Delta t}{2} \right) \Delta t \\ \mathbf{k}_4 &= \mathbf{f}(\dot{\mathbf{a}}_n + \mathbf{k}_3, \mathbf{a}_n + \mathbf{l}_3, t + \Delta t) \Delta t & \mathbf{l}_4 &= \mathbf{g}(\dot{\mathbf{a}}_n + \mathbf{k}_3, \mathbf{a}_n + \mathbf{l}_3, t + \Delta t) \Delta t \end{aligned} \quad (4.6)$$

de acuerdo a la formulación propuesta es claro ver que para empezar con el algoritmo es necesario conocer  $\mathbf{a}_0$ ,  $\dot{\mathbf{a}}_0$  y  $\ddot{\mathbf{a}}_0$ .

#### 4.1.2 Verificación

Para validar el algoritmo propuesto, se presenta un problema con solución analítica, así es posible comparar los resultados obtenidos por el esquema de integración propuesto.

**El problema:** un cuadrado de longitud  $l = 2m$  se encuentra en reposo, las propiedades del material de éste son la densidad  $\rho = 7800 \text{ kg/m}^3$  y su espesor  $esp = 0.1m$ ; se le aplica una fuerza horizontal  $\mathbf{F} = \{100t, 0\}^T$  y no se consideran fuerzas de fricción entre las superficies (figura 4.1). Encontrar los valores de  $\mathbf{a}(t)$ ,  $\dot{\mathbf{a}}(t)$  y  $\ddot{\mathbf{a}}(t)$  al cabo de cierto tiempo  $t = 5, 10, 30, 50 \text{ s}$ .

**Solución:** se aplica la segunda ley de Newton para obtener el valor de la aceleración en función del tiempo, luego basta con integrar en el tiempo para encontrar los valores de la velocidad y

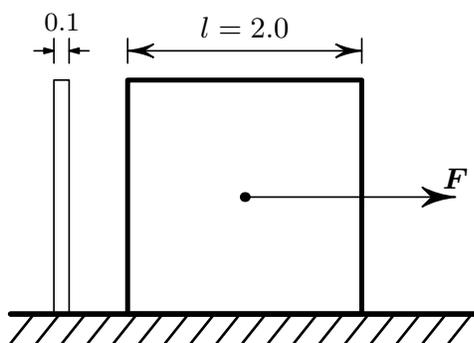


FIGURA 4.1: Problema propuesto.

el desplazamiento, ambas en función del tiempo; pero antes es necesario encontrar el volumen  $V$  del cuadrado para luego encontrar su masa  $m$ , así:

$$V = l^2 * esp = 2.0^2 * 0.1 = 0.4,$$

$$\rho = \frac{m}{V} \Rightarrow m = \rho * V = 7800 * 0.4 = 3120,$$

$$\mathbf{F} = m * \ddot{\mathbf{a}}(t) \Rightarrow \ddot{\mathbf{a}}(t) = \frac{\mathbf{F}}{m} = \left\{ \frac{5}{156}t, 0 \right\}^T.$$

Por lo tanto, las funciones de interés quedan definidas como:

$$\ddot{\mathbf{a}}(t) = \left\{ \frac{5}{156}t, 0 \right\}^T,$$

$$\dot{\mathbf{a}}(t) = \int_0^t \left\{ \frac{5}{156}t, 0 \right\} dt = \left\{ \frac{5}{312}t^2, 0 \right\},$$

$$\mathbf{a}(t) = \int_0^t \left\{ \frac{5}{312}t^2, 0 \right\} dt = \left\{ \frac{5}{936}t^3, 0 \right\}.$$

Una vez definidas nuestras funciones  $\mathbf{a}(t)$ ,  $\dot{\mathbf{a}}(t)$  y  $\ddot{\mathbf{a}}(t)$  resulta fácil encontrar los valores puntuales teóricos requeridos por simple sustitución.

Ahora bien, para obtener estos resultados mediante el esquema de integración RK4-Newmark, partimos de una discretización con 8 elementos y 9 nodos tal como se muestra en la figura 4.2; como el cuerpo parte del reposo los desplazamientos, velocidades y aceleraciones nodales son conocidos en  $t = 0$ , a saber:  $\mathbf{a}_0 = \mathbf{0}$ ,  $\dot{\mathbf{a}}_0 = \mathbf{0}$  y  $\ddot{\mathbf{a}}_0 = \mathbf{0}$ .

Luego se distribuye la magnitud de la fuerza aplicada a los nodos de la discretización, para esto; primeramente se distribuye la fuerza aplicada a los elementos en función del área que ocupan en la discretización, para nuestro ejemplo como todos los elementos tienen la misma

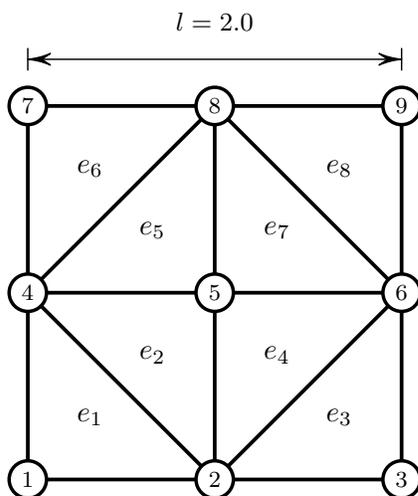


FIGURA 4.2: Discretización del problema propuesto.

área la fuerza aplicada a éstos es  $\mathbf{F}_{e_i} = \{12.5t, 0\}^T$ ; con esto, resulta fácil distribuir  $\mathbf{F}_{e_i}$  a cada nodo del elemento  $e_i$ ; cabe señalar que es necesario que cada nodo reciba la aportación de todos los elementos que lo comparten si es el caso, así por ejemplo; la fuerza aplicada a los nodos 1 y 5 corresponden a  $\mathbf{F}_1 = \{4.166t, 0\}^T$  y  $\mathbf{F}_5 = \{16.66t, 0\}^T$  respectivamente, de tal forma que  $\sum_{i=1}^9 \mathbf{F}_i = \mathbf{F}$ .

Los resultados obtenidos se presentan en la tabla 4.1; en la segunda columna se presentan los resultados teóricos obtenidos por simple sustitución; en la tercera, se presentan los obtenidos por el esquema de integración propuesto. Todos los nodos sufren los mismos desplazamientos, velocidades y aceleraciones; con  $\Delta t = 1 \times 10^{-6}$  el paso de tiempo usado en la simulación.

$t$	V. Teórico	V. RK-4	Error porcentual %
$\ \ddot{\mathbf{a}}(t = 5)\ $	0.16025	0.1602	0.0312
$\ \dot{\mathbf{a}}(t = 5)\ $	0.40064	0.4005	0.0349
$\ \mathbf{a}(t = 5)\ $	0.66773	0.6675	0.0344
$\ \ddot{\mathbf{a}}(t = 10)\ $	0.32051	0.3204	0.0343
$\ \dot{\mathbf{a}}(t = 10)\ $	1.60256	1.602	0.0349
$\ \mathbf{a}(t = 10)\ $	5.34188	5.34	0.0351
$\ \ddot{\mathbf{a}}(t = 30)\ $	0.96153	0.96125	0.0291
$\ \dot{\mathbf{a}}(t = 30)\ $	14.42307	14.418	0.0351
$\ \mathbf{a}(t = 30)\ $	144.2307	144.18	0.0351
$\ \ddot{\mathbf{a}}(t = 50)\ $	1.60256	1.6021	0.0287
$\ \dot{\mathbf{a}}(t = 50)\ $	40.0641	40.05	0.0351
$\ \mathbf{a}(t = 50)\ $	667.735	667.49	<b>0.0366</b>

TABLA 4.1: Tabla comparativa ( $\Delta t = 1 \times 10^{-6}$ ).

Como se aprecia en la tabla 4.1 el error porcentual es significativo sólo para intervalos de tiempo *muy grandes*.

Claro está que la precisión de los resultados varía si se tuviese una discretización más burda o más fina del dominio y también si se varía el paso de tiempo  $\Delta t$  usado en la simulación, por ejemplo si se usa  $\Delta t = 1 \times 10^{-5}$  los resultados obtenidos se muestran en la tabla 4.2, se aprecia que para  $t = 50$  el error porcentual disminuye con  $\Delta t = 1 \times 10^{-5}$ .

$t$	V. Teórico	V. RK-4	Error porcentual %
$\ \ddot{\mathbf{a}}(t = 50)\ $	1.60256	1.6021	0.0287
$\ \dot{\mathbf{a}}(t = 50)\ $	40.0641	40.05	0.0351
$\ \mathbf{a}(t = 50)\ $	667.735	667.5	<b>0.0351</b>
$\ \ddot{\mathbf{a}}(t = 100)\ $	3.20512	3.2042	0.0287
$\ \dot{\mathbf{a}}(t = 100)\ $	160.256	160.2	0.0349
$\ \mathbf{a}(t = 100)\ $	5341.88	5340	<b>0.0351</b>

TABLA 4.2: Tabla comparativa ( $\Delta t = 1 \times 10^{-5}$ ).

La desventaja conocida de este tipo de esquemas de integración explícito es su estabilidad numérica, ya que se encuentra condicionada por la limitación del paso de tiempo  $\Delta t$  usado en las simulaciones. La justificación de los valores de  $\Delta t$  usados en las simulaciones que se reportan en el capítulo 5 se presenta en la siguiente sección.

En la figura 4.3 se muestra la evolución de  $\mathbf{a}(t)$ ,  $\dot{\mathbf{a}}(t)$  y  $\ddot{\mathbf{a}}(t)$  del nodo 5 de la discretización obtenidos con el esquema propuesto en los intervalos  $t \in [0, 5]$  y  $t \in [0, 50]$ . Para visualizar los resultados obtenidos se hace uso del software Gid<sup>1</sup>.

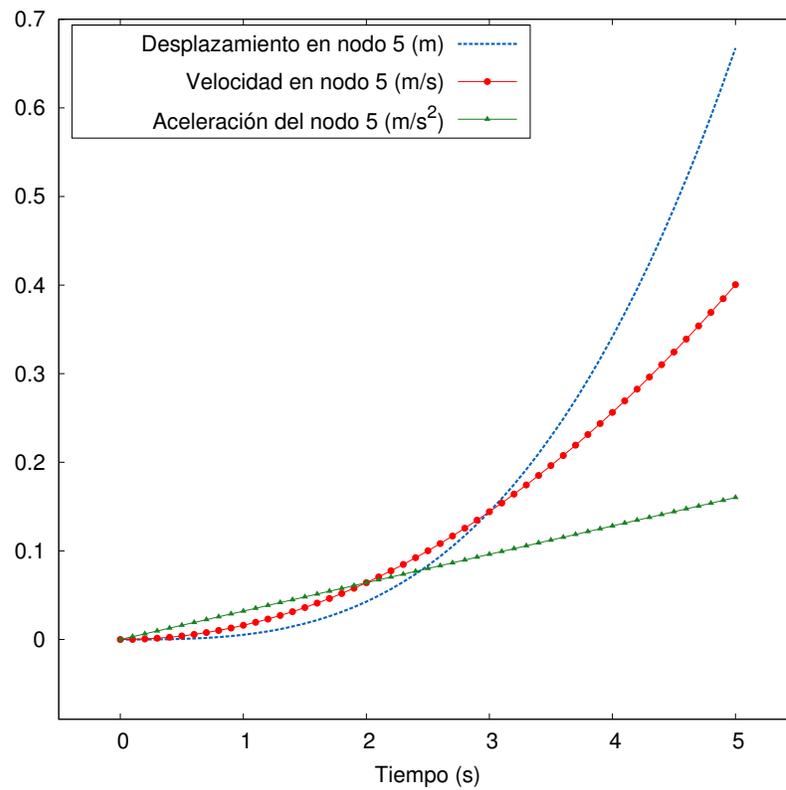
## 4.2 Cálculo del paso de tiempo

El hacer uso de un esquema de integración explícito en el tiempo permite tener alta eficiencia computacional y por esto es posible analizar y simular problemas en un intervalo de tiempo relativamente grande.

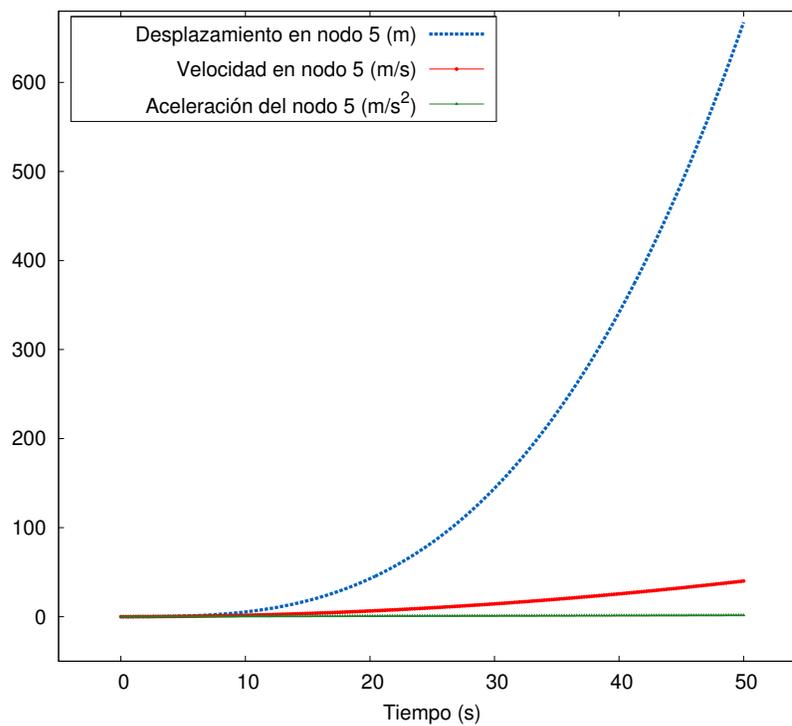
Como el tiempo es infinito, inevitablemente se restringe a un incremento de tiempo finito  $\Delta t$ , ésta es la desventaja principal de este tipo de esquemas de integración, ya que la estabilidad numérica se ve condicionada por el paso de tiempo  $\Delta t$ . El paso de tiempo  $\Delta t$  no debe de ser más grande que el paso de tiempo crítico  $\Delta t_{cr}$

$$\Delta t \leq \Delta t_{cr}, \quad (4.7)$$

<sup>1</sup>Sitio oficial <http://www.gidhome.com/>



(a) Comportamiento en el intervalo  $0 \leq t \leq 5$ .



(b) Comportamiento en el intervalo  $0 \leq t \leq 50$ .

FIGURA 4.3: Resultados obtenidos con el esquema RK4-Newmark con  $\Delta t = 1 \times 10^{-6}$ .

que se determina por la frecuencia natural más alta del sistema  $\omega_{max}$

$$\Delta t_{cr} = \frac{2}{\omega_{max}}. \quad (4.8)$$

La determinación exacta de la frecuencia máxima  $\omega_{max}$  requeriría la solución del problema de eigenvalores definido por todo el sistema (2.46). Afortunadamente, resulta que nunca es necesario obtener los eigenvalores de todo el sistema gracias a un útil teorema establecido por vez primera por Irons y Treharne [17].

El teorema establece simplemente que los eigenvalores del sistema pueden ser acotados por los valores propios de los elementos individuales  $\omega^e$ . De esta forma

$$\omega_{min}^2 \geq (\omega^e)_{min}^2, \quad (4.9)$$

$$\omega_{max}^2 \leq (\omega^e)_{max}^2. \quad (4.10)$$

Los límites de estabilidad pueden, por lo tanto, relacionarse con la ecuación (2.46) escrita para un elemento aislado [12]; con base en esta ecuación se define la frecuencia natural para cada elemento como

$$\omega^e = \sqrt{\frac{\mathbf{K}^e}{\mathbf{M}^e}} \iff (\omega^e)^2 = \mathbf{K}^e \mathbf{M}^{e-1}, \quad (4.11)$$

donde  $\mathbf{M}^{e-1}$  es fácil de calcular, ya que la matriz de masa elemental es una matriz diagonal; ahora bien, reescribiendo la definición del paso de tiempo crítico  $\Delta t_{cr}$  tenemos

$$\Delta t_{cr} = \frac{2}{\max (\omega^e)^2}. \quad (4.12)$$

Se hace uso del método iterativo de la potencia para aproximar el mayor eigenvalor de  $\mathbf{K}^e \mathbf{M}^{e-1}$ , con una tolerancia de  $1 \times 10^{-6}$ .

Para el ejemplo presentado en la sección anterior el paso de tiempo crítico calculado es  $\Delta t_{cr} = 7.772 \times 10^{-9}$ . El error porcentual del mayor eigenvalor aproximado es del 0.03%; para encontrar este error se calculó el valor propio más grande de todos los elementos con la herramienta octave<sup>2</sup>.

---

<sup>2</sup>Sitio oficial <http://www.gnu.org/software/octave/>

### 4.3 Búsqueda de contactos

Como se vió en el capítulo precedente para calcular las fuerzas de contacto; una vez que se tengan partículas en la discretización, primero es necesario determinar cuales son las partículas que se encuentran en contacto. En esta sección se explica de forma detallada el proceso de la búsqueda de contactos entre partículas.

Dado un conjunto de  $n$  partículas  $\mathbf{p} = \{\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2, \dots, \mathbf{p}_n\}$  distribuidas en el plano, donde  $\mathbf{p}_i = \{x_i, y_i\}^T$  es el centro de la partícula  $\mathbf{p}_i$  (figura 4.4) con sus respectivos radios  $\mathbf{r} = \{r_1, r_2, \dots, r_n\}$ , se determina el conjunto de contactos  $\mathbf{c}_i = \{c_1, c_2, \dots, c_k\}$  para cada partícula  $\mathbf{p}_i \in \mathbf{p}$ , para encontrar estos conjuntos de contactos se hace uso del método de *búsqueda por bins*.

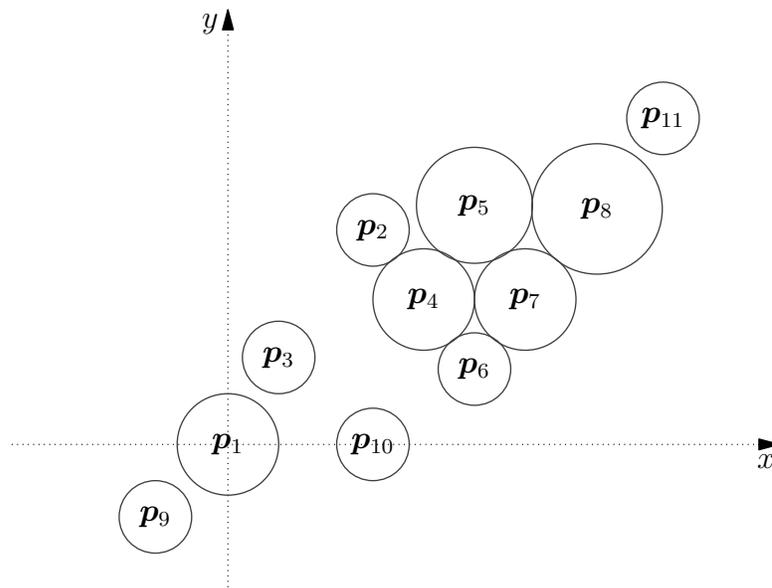


FIGURA 4.4: Conjunto de partículas en el plano.

Este método se basa en realizar una búsqueda geométrica a partir de una tabla de apuntadores, cada apuntador representa un *bin*, éste a su vez apunta a una lista ligada en la que se encuentran las partículas ligadas a sus vecinos más cercanos, teniendo así en cada lista ligada los posibles contactos entre partículas. De esta manera, si se desea buscar los contactos  $\mathbf{c}_i$  para  $\mathbf{p}_i$ , se realiza una búsqueda de contactos sólo en aquellos *bins* donde se encuentra  $\mathbf{p}_i$ , reduciendo así considerablemente el espacio de búsqueda.

Se describirán los pasos a seguir para construir la estructura de *bins* y el cómo se realiza la búsqueda de contactos con esta estructura, las fases a seguir son:

- Bounding Box: delimitar el espacio de búsqueda.
- Grid: dividir el espacio de búsqueda.
- Estructura de Bins: crear la estructura de búsqueda.
- Búsqueda de contactos: encontrar los conjuntos  $c_i$  de contactos.

### 4.3.1 Bounding Box

Como la estructura se basa en una búsqueda geométrica es necesario delimitar el espacio de búsqueda, a aquel espacio más pequeño que contenga a todas las partículas. Este espacio reducido es el llamado *bounding box*.

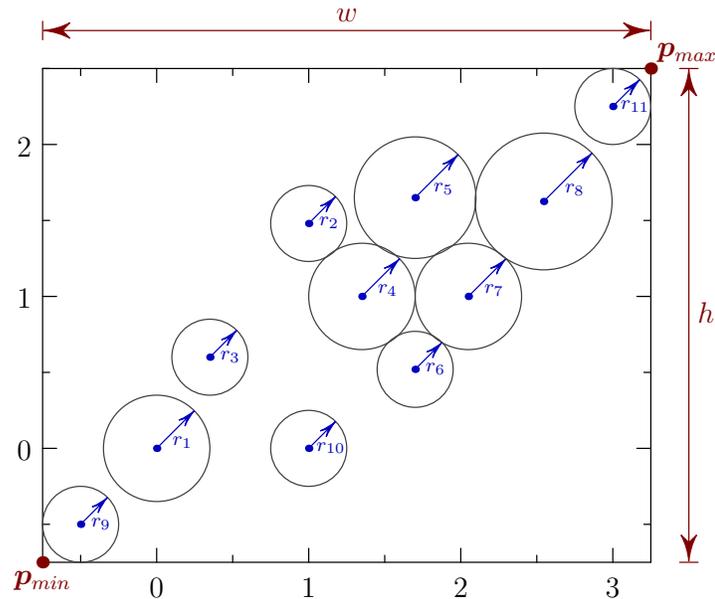


FIGURA 4.5: Bounding Box para el conjunto de partículas  $p$ .

En la figura 4.5 se observa que los puntos  $p_{min} = \{x_{min}, y_{min}\}^T$  y  $p_{max} = \{x_{max}, y_{max}\}^T$  delimitan el bounding box, una vez encontrados  $p_{min}$  y  $p_{max}$  es posible determinar el alto y ancho del bounding box  $h = y_{max} - y_{min}$  y  $w = x_{max} - x_{min}$ , respectivamente.

### 4.3.2 Grid

Una vez determinados  $h$  y  $w$  se crea una cuadrícula (grid) en el bounding box; para esto podemos basarnos en varios criterios que se discuten más adelante. El criterio usado para este

trabajo establece que, las dimensiones iniciales de las celdas del grid se calculan como

$$d_{min} = 2(r_{min} + \delta * r_{min}), \quad (4.13)$$

donde  $r_{min} = \mathbf{min} \mathbf{r}$ , este criterio adoptado tiene base en el radio mínimo de todas las partículas  $\mathbf{min} \mathbf{r}$  y un  $\delta$ , esto para asegurar que se encuentren todos los contactos de aquellas partículas que están contenidas únicamente en un *bin*; para la implementación realizada se tomó  $\delta = 0.1$ . Se realizan las divisiones horizontales y verticales del bounding box a partir de  $\mathbf{p}_{min}$  haciendo uso de  $d_{min}$ .

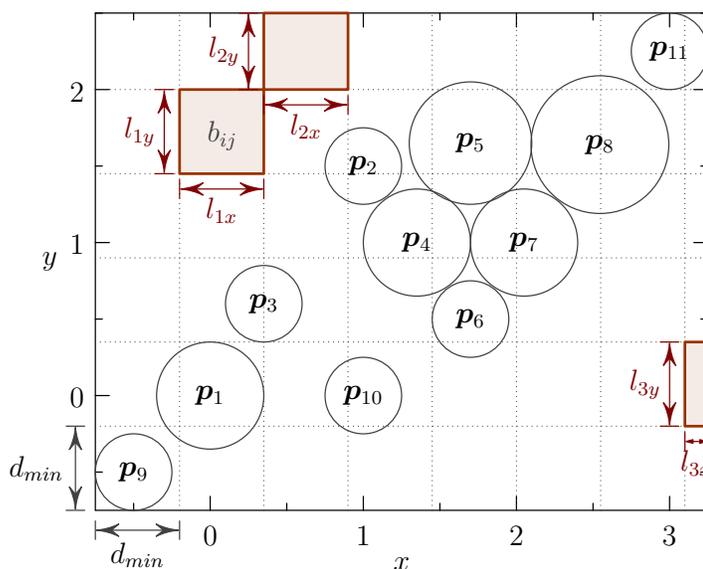


FIGURA 4.6: División del bounding box. Es claro ver que podemos tener *bins* de diferentes dimensiones, a saber:  $l_{1x}, l_{1y}, l_{2x}, l_{2y}, l_{3x}$  y  $l_{3y}$ .

Cada celda del grid representa un *bin* denotado como  $b_{ij}$  (figura 4.6), los índices  $i \in [1, 2, \dots, r]$ ,  $j \in [1, 2, \dots, c]$  servirán para identificar cada *bin*, y donde las variables

$$r = \left\lfloor \frac{h}{d_{min}} \right\rfloor, \\ c = \left\lfloor \frac{w}{d_{min}} \right\rfloor,$$

representan el número de renglones y columnas respectivamente, estos índices crecen en sentido positivo a los ejes  $x$  y  $y$ . Como se aprecia en la figura 4.6 es posible tener *bins* de diferentes dimensiones, y por practicidad, se manejará la misma dimensión para todos los *bins*. Para esto se definen  $\mathbf{L} = \begin{pmatrix} l_x & 0 \\ 0 & l_y \end{pmatrix}$ ,  $\mathbf{resi} = \{r_x, r_y\}^T$ ; donde  $\mathbf{L}$  y  $\mathbf{resi}$  denotan la matriz de longitud de los

$bins$  y el vector de residuos respectivamente; además  $r_x = w \bmod d_{min}$ ,  $r_y = h \bmod d_{min}$ . Si el número de divisiones en los ejes  $x$ ,  $y$  no es entero, esto es  $r_x \neq 0$  ó  $r_y \neq 0$ , entonces es necesario realizar un reajuste en  $\mathbf{L}$  de lo contrario  $l_x = d_{min}$  y  $l_y = d_{min}$ .

Para realizar este reajuste es necesario usar las siguientes expresiones:

$$l_x = d_{min} + \frac{r_x d_{min}}{w - r_x}, \quad (4.14)$$

$$l_y = d_{min} + \frac{r_y d_{min}}{h - r_y}. \quad (4.15)$$

La figura 4.7 muestra el reajuste realizado en los ejes  $x$ ,  $y$  del bounding box de nuestro ejemplo.

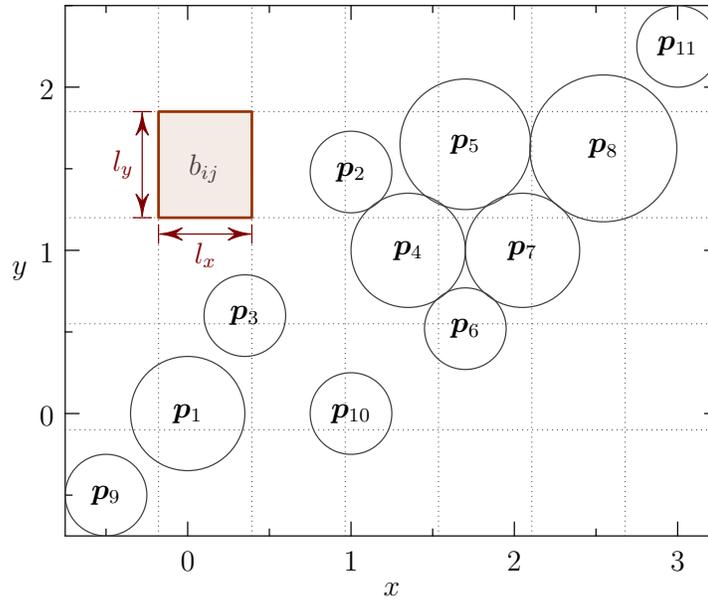
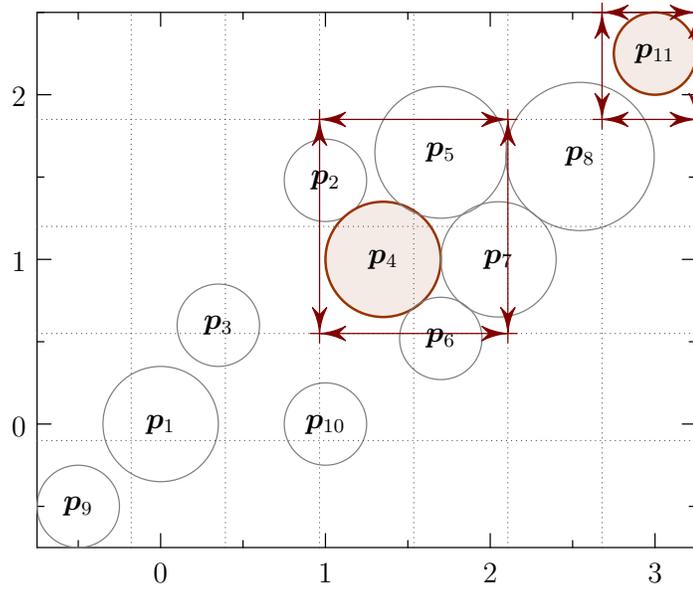


FIGURA 4.7: División del bounding box reajustado.

### 4.3.3 Estructura de Bins

Una vez delimitado el espacio geométrico de cada  $bin$ , pasamos cada  $b_{ij}$  a una estructura lineal de apuntadores, donde cada  $b_{ij}$  apuntará a una lista ligada de partículas que estén contenidos geoméricamente en  $b_{ij}$ , luego es preciso determinar el rango de  $bins$  para cada partícula  $\mathbf{p}_i$ . Se definen los vectores  $\mathbf{R}_{min} = \{r_{xm}, r_{ym}\}^T$  y  $\mathbf{R}_{max} = \{r_{xM}, r_{yM}\}^T$  los cuales sirven para identificar el rango horizontal y vertical de cada partícula (figura 4.8).


 FIGURA 4.8: Rango de *bins* para las partículas  $\mathbf{p}_4$  y  $\mathbf{p}_{11}$ .

Para una correcta manipulación matricial es necesario definir el vector  $\mathbf{r}_i = \{r_i, r_i\}^T$ , entonces los rangos quedan definidos como:

$$\mathbf{R}_{min}^T = [\mathbf{p}_i - \mathbf{r}_i - \mathbf{p}_{min}]^T \mathbf{L}^{-1}, \quad (4.16)$$

$$\mathbf{R}_{max}^T = [\mathbf{p}_i + \mathbf{r}_i - \mathbf{p}_{min}]^T \mathbf{L}^{-1}, \quad (4.17)$$

con los rangos bien definidos es posible asignar cada partícula  $\mathbf{p}_i$  a los *bins* que la contienen, por ejemplo  $\mathbf{p}_4 \in \{b_{34}, b_{35}, b_{44}, b_{45}\}$ ,  $\mathbf{p}_{11} \in \{b_{57}\}$  (figura 4.8); los rangos para la partícula  $\mathbf{p}_4$  son  $\mathbf{R}_{min} = \{3, 4\}^T$  y  $\mathbf{R}_{max} = \{4, 5\}^T$ . La figura 4.9 contiene una parte de la estructura de *bins* resultante.

#### 4.3.4 Búsqueda de contactos

Luego de construir la estructura de *bins* nos encontramos en condiciones de buscar los posibles contactos o sobreposiciones entre partículas, la figura 4.10 muestra las posibles configuraciones entre partículas, las cuales listamos a continuación:

- Partículas en contacto:  $\|\mathbf{p}_j - \mathbf{p}_i\| = r_i + r_j$ .
- Partículas sobrepuestas:  $\|\mathbf{p}_j - \mathbf{p}_i\| < r_i + r_j$ .

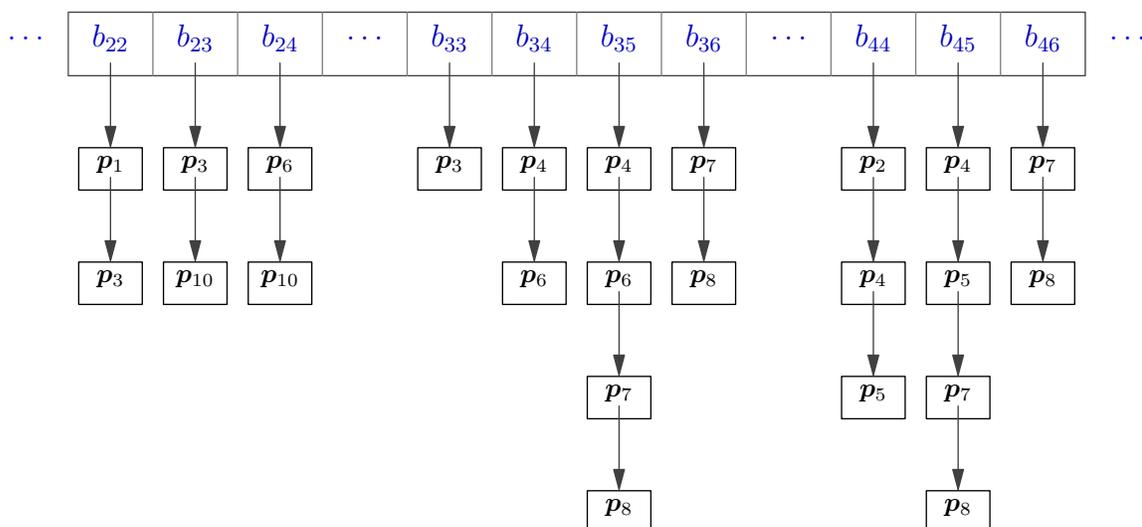


FIGURA 4.9: Parte de la estructura de *bins* resultante.

- Partículas sin contacto:  $\|\mathbf{p}_j - \mathbf{p}_i\| > r_i + r_j$ .

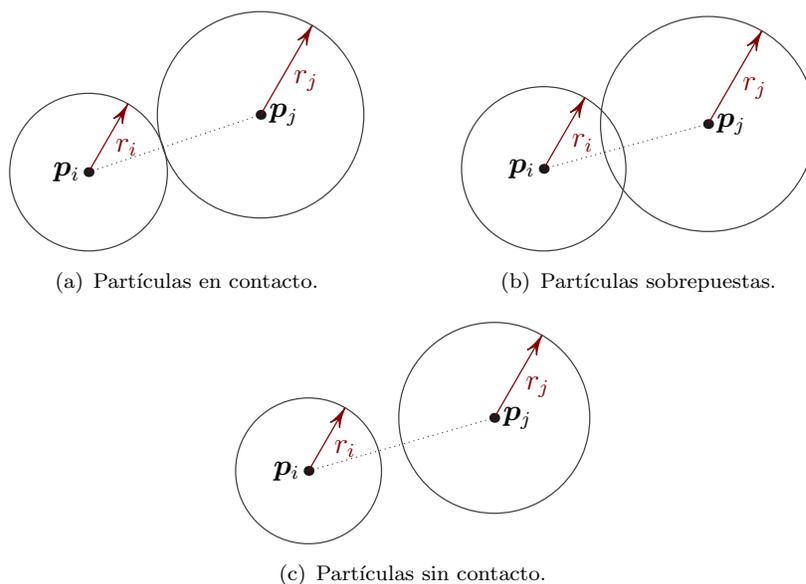


FIGURA 4.10: Posibles configuraciones entre partículas.

Las configuraciones de interés son las que se muestran en las figuras 4.10(a) y 4.10(b); hasta este punto se cuenta con todas las herramientas necesarias para identificar el conjunto de contactos  $\mathbf{c}_i = \{c_1, c_2, \dots, c_k\}$  de cada partícula  $\mathbf{p}_i$ ; para esto se calcula nuevamente  $\mathbf{R}_{min}$  y  $\mathbf{R}_{max}$  de  $\mathbf{p}_i$ , para iterar sobre las listas ligadas que contienen los contactos potenciales de  $\mathbf{p}_i$ , si se verifica contacto o sobreposición se agrega dicha partícula al conjunto de contactos  $\mathbf{c}_i$  de

$\mathbf{p}_i$ . Adviértase que es posible agregar contactos repetidos a  $\mathbf{c}_i$  por lo que es necesario validar la existencia de un contacto antes de agregar éste al conjunto de contactos  $\mathbf{c}_i$ .

Para nuestro ejemplo particular, los conjuntos de contactos de partículas  $\mathbf{c}_i$  contendrán la información que se presenta en las ecuaciones (4.18), adviértase que éstos pueden tener información desordenada lo que; para la aplicación desarrollada, carece de importancia. Los conjuntos de partículas  $\mathbf{c}_i$  que no aparecen en la lista (4.18) son conjuntos vacíos.

$$\begin{aligned}
\mathbf{c}_2 &= \{\mathbf{p}_4\}, \\
\mathbf{c}_4 &= \{\mathbf{p}_6, \mathbf{p}_7, \mathbf{p}_2, \mathbf{p}_5\}, \\
\mathbf{c}_5 &= \{\mathbf{p}_4, \mathbf{p}_7, \mathbf{p}_8\}, \\
\mathbf{c}_6 &= \{\mathbf{p}_4, \mathbf{p}_7\}, \\
\mathbf{c}_7 &= \{\mathbf{p}_4, \mathbf{p}_6, \mathbf{p}_8, \mathbf{p}_5\}, \\
\mathbf{c}_8 &= \{\mathbf{p}_7, \mathbf{p}_5\}.
\end{aligned} \tag{4.18}$$

Lo que no es posible pasar por alto, es calcular la magnitud de la fuerza de contacto entre un par de partículas  $\mathbf{f}_c^{ed}$  más veces de lo necesario, para aclarar esto, pensemos por ejemplo en el contacto que existe entre las partículas  $\mathbf{p}_2$  y  $\mathbf{p}_4$ , es claro que  $\mathbf{f}_c^{24} = -\mathbf{f}_c^{42}$  por esto sólo se necesita calcular  $\mathbf{f}_c^{24}$  o  $\mathbf{f}_c^{42}$ , de ahí la necesidad de reducir la información de los conjuntos de contactos, de tal forma que si existe contacto o sobreposición entre  $\mathbf{p}_i$  y  $\mathbf{p}_j$  se tenga este registro sólo en algún conjunto de contactos, es decir  $\mathbf{c}_i = \{\mathbf{p}_j\}$  o  $\mathbf{c}_j = \{\mathbf{p}_i\}$ ; haciendo esta reducción a  $\mathbf{c}_i$  se obtiene finalmente:

$$\begin{aligned}
\mathbf{c}_2 &= \{\mathbf{p}_4\}, \\
\mathbf{c}_4 &= \{\mathbf{p}_6, \mathbf{p}_7, \mathbf{p}_5\}, \\
\mathbf{c}_5 &= \{\mathbf{p}_7, \mathbf{p}_8\}, \\
\mathbf{c}_6 &= \{\mathbf{p}_7\}, \\
\mathbf{c}_7 &= \{\mathbf{p}_8\}.
\end{aligned} \tag{4.19}$$

### 4.3.5 Criterios para el grid

Como se mencionó, existen muchos criterios para realizar el grid en el espacio de búsqueda; en esta subsección se presentan algunos criterios y el efecto que causarían en la estructura de *bins*.

Para el problema que nos atañe, es deseable que las listas ligadas de cada *bin* no contengan demasiada información, de lo contrario se invertiría mucho tiempo verificando los contactos entre partículas, también es deseable que la lista de *bins* no sea muy extensa. A continuación se presentan tres criterios:

1. Grid con base en  $r_{min}$ : supongamos que se tiene una distribución de partículas con el mismo radio como se muestra en la figura 4.11, es posible tener una distribución de este tipo si se trabaja con discretizaciones estructuradas del dominio; las dimensiones iniciales de cada celda se definen como  $d_{min} = 2 * r_{min}$ , con este criterio se tendría un *bin* por cada partícula (figura 4.12) con lo que no sería posible encontrar los contactos entre partículas. Pensemos, por ejemplo, en la partícula  $p_5$ ; la lista de contactos para ésta debe de contener  $c_5 = \{p_4, p_2, p_6, p_8\}$ ; ahora bien, si hacemos uso de la estructura de *bins* se verifica que los contactos potenciales de  $p_5$  se encuentran en  $b_{22}$ , verificando los contactos con las partículas que se encuentran en  $b_{22}$  se tiene que  $c_5 = \{\}$ , por lo anterior este criterio no es recomendable, más aún; aunque no se tengan este tipo de distribuciones de partículas la lista de *bins* sería muy extensa.

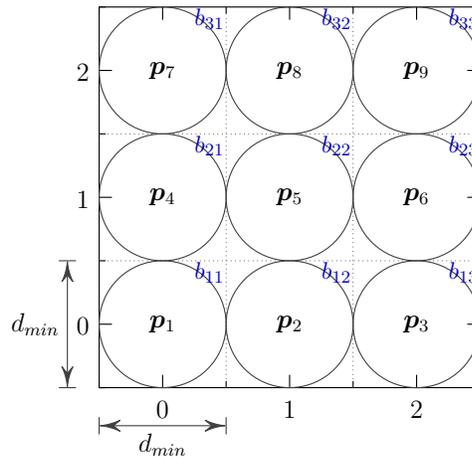


FIGURA 4.11: Grid con base en  $r_{min}$ .

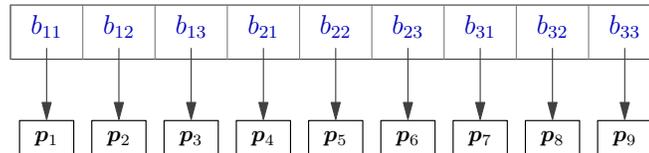


FIGURA 4.12: Estructura de *bins* del grid con base en  $r_{min}$ .

2. Grid con base en  $r_{max}$ : para este criterio las dimensiones iniciales de cada celda se definen como  $d_{min} = 2*r_{max}$ , donde  $r_{max} = \mathbf{max} \mathbf{r}$ ; con este criterio se garantiza encontrar todos los contactos y la lista de *bins* sería pequeña pero la información que contendrá cada *bin* sería extensa lo cual no es deseable.
3. Grid con base en  $r_{min} + \delta$ : las dimensiones iniciales de cada celda quedan definidas como  $d_{min} = 2(r_{min} + \delta*r_{min})$ , con este criterio se garantiza encontrar todos los contactos y el número de *bins* dependerá del valor de  $\delta$ , éste es el criterio usado en la implementación desarrollada.

## 4.4 Asignación de radios iniciales

Como se explicó en el capítulo anterior, si se determina que una arista de nodos  $i$  y  $j$  debe de *romperse* se procede a asignar partículas con centro en los nodos  $i$  y  $j$ , como también sus respectivos radios  $r_i$  y  $r_j$ ; en esta sección hacemos referencia a las coordenadas cartesianas de los nodos como  $\mathbf{p}_i = \{x_i, y_i\}^T$ . Con esto se tiene bien identificado el centro de las futuras partículas en la discretización y nos resta determinar el valor de los radios de éstas de tal forma que si la arista de nodos  $i, j$  se *rompe* las partículas en sus nodos se encuentren en contacto o sobreposición. Cuando el criterio de ruptura se alcanza para una arista de nodos  $i, j$  se tienen tres casos:

- Los nodos  $i, j$  no tienen asignados partículas, por lo que es necesario asignar los radios  $r_i$  y  $r_j$ ; una primer idea de esta asignación resulta intuitiva al asignar

$$r_i = r_j = \frac{\|\mathbf{p}_j - \mathbf{p}_i\|}{2}. \quad (4.20)$$

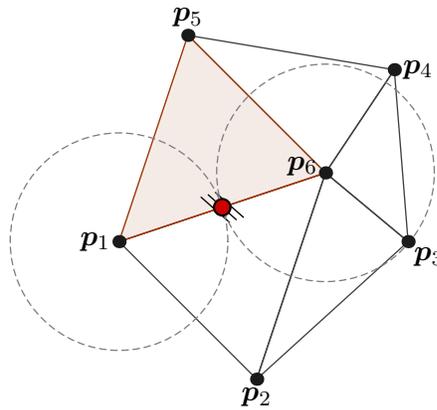
- Cualquiera de los nodos  $i, j$  tiene asignado una partícula, es decir;  $r_i \neq 0$  o  $r_j \neq 0$ , en este caso sólo resta asignar el radio de una partícula, a saber:  $r_i$  o  $r_j$ . Nuevamente, de forma intuitiva asignamos

$$r_i = \|\mathbf{p}_j - \mathbf{p}_i\| - r_j \quad \text{si } r_j \neq 0, \quad (4.21)$$

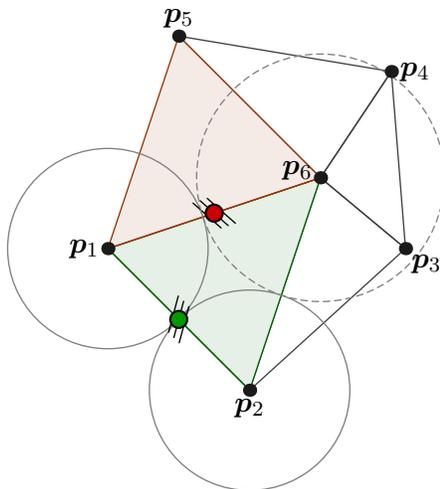
$$r_j = \|\mathbf{p}_j - \mathbf{p}_i\| - r_i \quad \text{si } r_i \neq 0. \quad (4.22)$$

- Los nodos  $i, j$  ya tienen asignados partículas, es decir;  $r_i \neq 0$  y  $r_j \neq 0$ , en este caso no es posible modificar los radios asignados, adviértase que las partículas en estos nodos pueden o no estar en contacto.

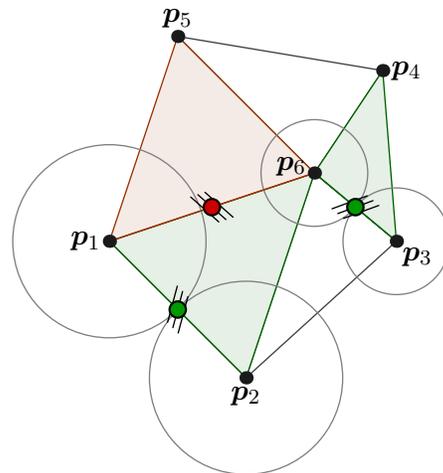
Para ejemplificar estos casos pensemos en una discretización pequeña de 6 nodos y 5 elementos, si el criterio de ruptura se alcanza para la arista de nodos  $\overline{p_1 p_6}$ , es posible tener los casos presentados en la figura 4.13.



(a) Se asignan ambos radios  $r_1$  y  $r_6$ .



(b) Se asigna el radio  $r_6$ .



(c) No se reasignan los radios  $r_1$  y  $r_6$ .

FIGURA 4.13: Si la arista de nodos  $\overline{p_1 p_6}$  se rompe se tienen tres configuraciones. Los círculos verdes y rojos indican que la arista cumplió y cumple el criterio de ruptura, respectivamente.

En una simulación es posible determinar el área de fractura que sufrirá cierta estructura, esto por condiciones iniciales y propiedades de los materiales; y aún teniendo la discretización de la misma no es posible determinar el orden en que las aristas empiezan a dañarse, con este tipo

de asignación de radios el orden en que las aristas se van dañando determinan la distribución final de los radios de las partículas en la discretización. Para aclarar esto, pensemos en que durante la simulación se determina que las aristas  $\overline{p_1p_6}$  y  $\overline{p_6p_4}$  se rompen en ese orden, luego de asignar los radios a los nodos de la discretización usando las ecuaciones (4.20), (4.21) y (4.22) la distribución de partículas resultante se muestra en la figura 4.14, en ésta se aprecia que el radio  $r_4$  asignado es pequeño en comparación con los radios  $r_1$  y  $r_6$ , con esto la distribución final de los radios de las partículas no será uniforme, o lo que es peor, en algunos casos no será posible asignar partículas a algún nodo por que existe una o más partículas vecinas muy grandes como resultado de asignaciones anteriores.

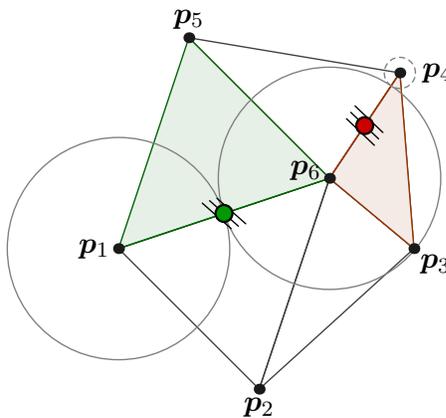


FIGURA 4.14: Distribución de partículas luego de dañar las aristas  $\overline{p_1p_6}$  y  $\overline{p_6p_4}$ .

Nuevamente, con las asignaciones del tipo (4.20), (4.21) y (4.22) la distribución de las partículas en la discretización se ve muy afectada por el orden en que las aristas son dañadas; para evitar este tipo de problemas se propone calcular los radios a priori para toda la discretización suponiendo que, en el peor de los casos, toda la discretización de FEM desaparece, es decir; al final de la simulación se tendrán solamente partículas.

Para asignar los radios a priori nos valemos de las conectividades de los nodos, como partimos de la discretización de FEM cada nodo  $i$  tiene asociado un conjunto finito de nodos a los que se encuentra conectado; si el nodo  $i$  se conecta con  $k$  nodos se define el conjunto de distancias euclidianas a cada nodo como  $\mathbf{d}_i = \{d_{i1}, d_{i2}, \dots, d_{ik}\}$ , luego el radio de la partícula  $i$  puede definirse como alguna de las siguientes propuestas:

1. Asignación por **promedios**, donde el radio de la partícula  $i$  queda definida como  $r_i = \frac{\bar{d}_i}{2}$ , con  $\bar{d}_i = \frac{1}{k} \sum_{j=1}^k d_{ij}$ . Con este tipo de asignación las partículas se sobreponen demasiado (figura 4.15).

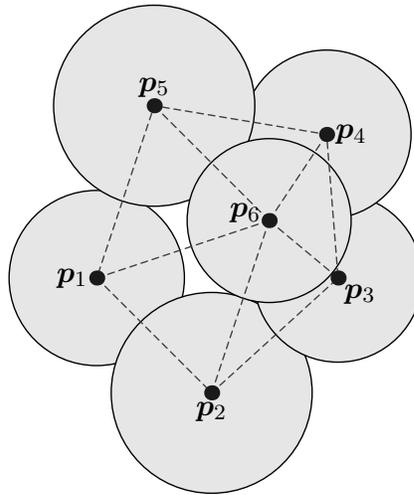


FIGURA 4.15: Distribución de partículas de acuerdo a **promedios**.

2. Asignación por **promedios y distancia mínima**, el radio de la partícula  $i$  se define como

$$r_i = \begin{cases} \frac{\bar{d}_i}{2} & \text{si } \frac{\bar{d}_i}{2} < \frac{d_{min}}{2} \\ \frac{d_{min}}{2} & \text{en otro caso,} \end{cases}$$

donde  $d_{min} = \mathbf{min} d_i$ . Adviértase que con este tipo de asignación es posible que muchas de las partículas en la discretización no se encuentren en contacto (figura 4.16), lo cual no es deseable.

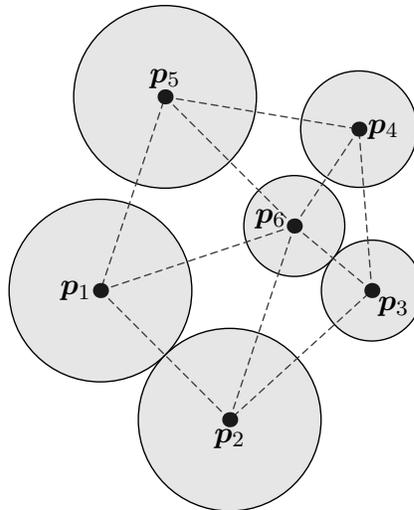


FIGURA 4.16: Distribución de partículas de acuerdo a **promedios y distancia mínima**.

3. Asignación por **promedios y distancia mínima en un rango**, el radio de la partícula  $i$  se define como

$$r_i = \begin{cases} \frac{\bar{d}_i}{2} & \text{si } \frac{d_{min}}{2}(1 - \alpha) \leq \frac{\bar{d}_i}{2} \leq \frac{d_{min}}{2}(1 + \alpha) \\ \frac{d_{min}}{2} & \text{en otro caso,} \end{cases}$$

donde  $\alpha$  es una variable que determina el rango en el que se acepta el radio mínimo, con este tipo de asignación se obtienen más contactos o sobreposición entre partículas (figura 4.17).

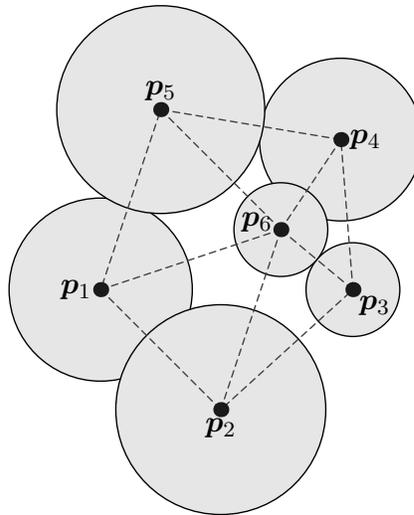


FIGURA 4.17: Distribución de partículas de acuerdo a **promedios y distancia mínima en un rango**, con  $\alpha = 0.1$ .

El uso de alguna asignación de radios que se propone en este trabajo dependerá fuertemente del tipo de discretización del dominio de estudio, se recomienda el uso de la asignación por promedios para mallas estructuradas, y para mallas no estructuradas cualquiera de las dos asignaciones restantes.

# Capítulo 5

## Resultados

En este capítulo se presenta una serie de ensayos realizados. El pre y post-proceso se realiza con GID, desarrollado en el Centro Internacional de Métodos Numéricos en la Ingeniería (CIMNE).

### 5.1 Ensayos

#### 5.1.1 Ensayo de tracción normalizado

Se lleva a cabo en la máquina universal de ensayos y consiste en sostener una probeta normalizada a un esfuerzo creciente, hasta provocar la rotura. Las probetas pueden ser de dos tipos: rectangulares y cilíndricas (figura 5.1).

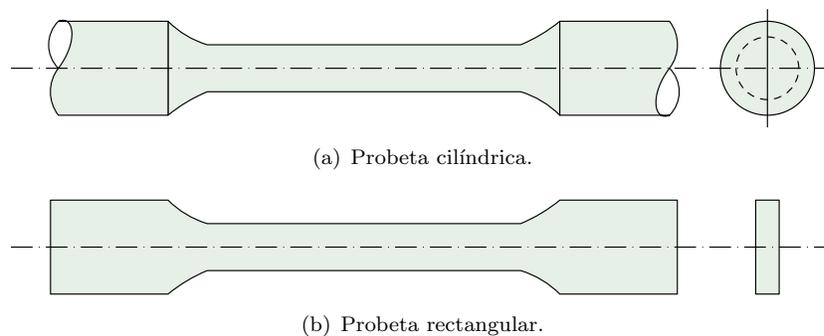


FIGURA 5.1: Tipos de probetas.

Este ensayo provoca en la probeta dos fenómenos:

- Un alargamiento axial hasta llegar a la rotura.
- Una disminución de la sección, perpendicular al eje, en la zona próxima a la rotura.

Para este ensayo particular, los resultados presentados son el producto de modelar el primer fenómeno. Para nuestro primer ejemplo se hace uso de una probeta en tensión plana sujeta a tracción. La geometría se define según la norma ASTM D638 como se muestra en la figura 5.2 en donde también se observan las mallas utilizadas y las condiciones de contorno, indicando que en toda la zona empotrada se impone una velocidad y desplazamiento constante.

A manera de poder localizar la fractura, sólo una banda de elementos tendrá la tensión de rotura correspondiente al material ensayado, mientras que el resto tendrá un valor muy alto. Los resultados se analizarán mediante el desplazamiento de los puntos PA y PB mostrados en la misma figura 5.2.

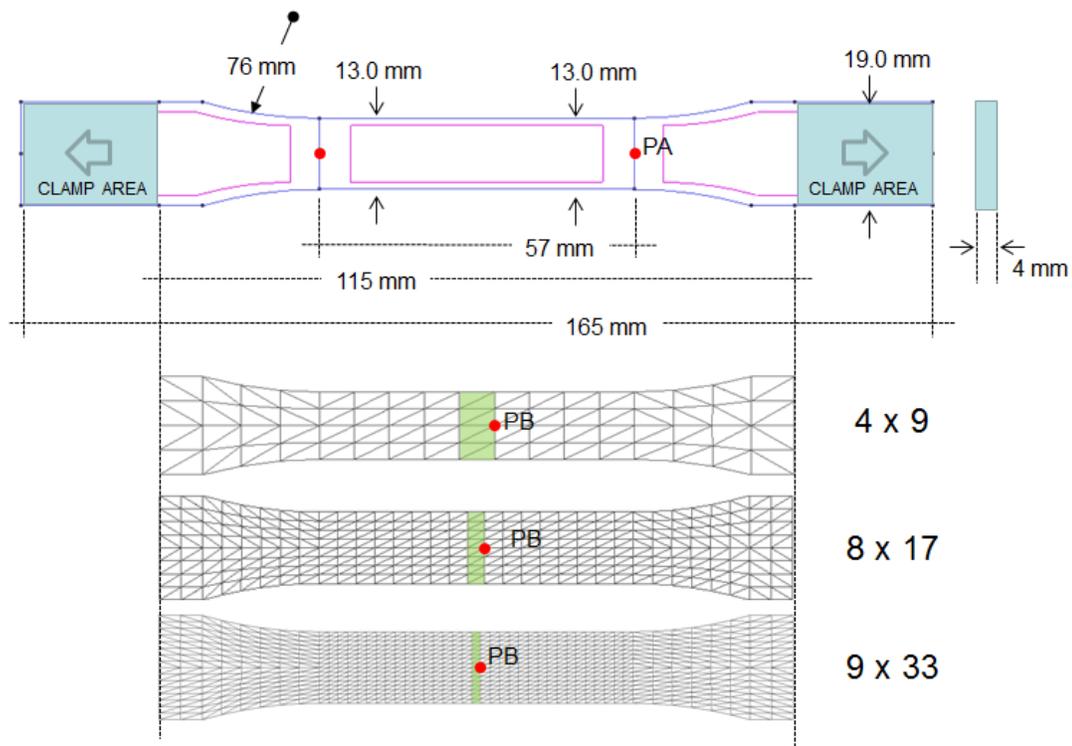


FIGURA 5.2: Geometría y mallado de la probeta de estudio.

Las propiedades del material a ensayar se presentan en la tabla 5.1.

Nombre	Variable	Valor	Unidad
Módulo de Young	$E_0$	$30 \times 10^9$	$Pa$
Coefficiente de Poisson	$\nu$	0.2	–
Peso específico	$\gamma$	$1.0 \times 10^3$	$N/m^3$
Tensión de ruptura	$\sigma^*$	$10 \times 10^3$	$Pa$

TABLA 5.1: Propiedades del material de la probeta de estudio.

Se ensaya el material con una energía de fractura  $G = 0.0 J/m^2$  y  $G = 75 \times 10^{-6} J/m^2$ . Se analizan tres mallas de  $4 \times 9$ ,  $8 \times 17$  y  $9 \times 33$  elementos, como se muestra en la figura 5.2. La carga de la probeta se realiza mediante un desplazamiento impuesto en el extremo derecho con una velocidad de  $0.5 \times 10^{-6} m/s$ .

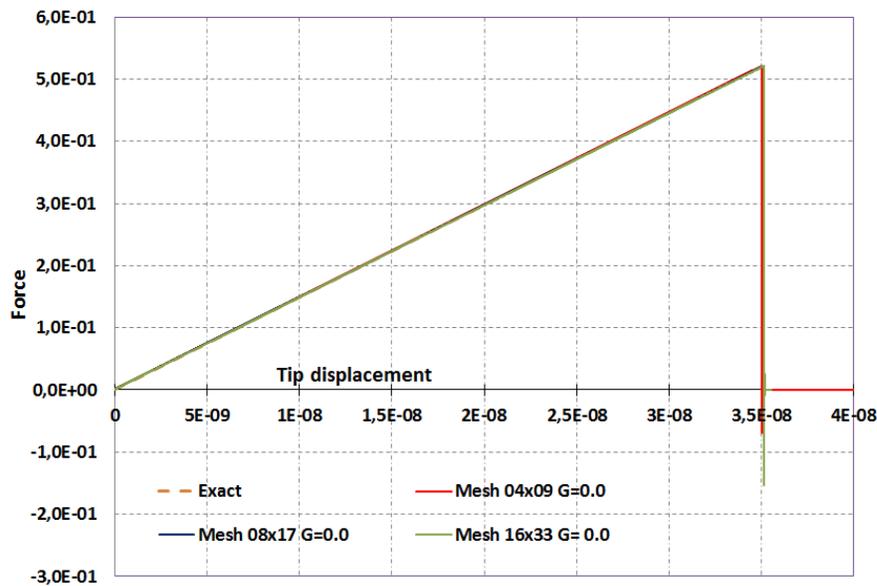


FIGURA 5.3: Relación fuerza-desplazamiento con  $G = 0.0 J/m^2$ .

La figura 5.3 muestra la relación entre el desplazamiento impuesto respecto el nivel de carga para una fractura frágil ( $G = 0.0 J/m^2$ ). Se puede observar que en las tres mallas el comportamiento es totalmente similar y acorde con los resultados esperados.

La figura 5.4 corresponde a la geometría dañada durante el proceso de simulación, en donde se puede apreciar que al generarse la grieta se crean elementos discretos en el borde. Igualmente

es importante observar que únicamente existe una fila de elementos dañados, mientras que sus vecinos no presentan daño, como ocurre con otras formulaciones [18].

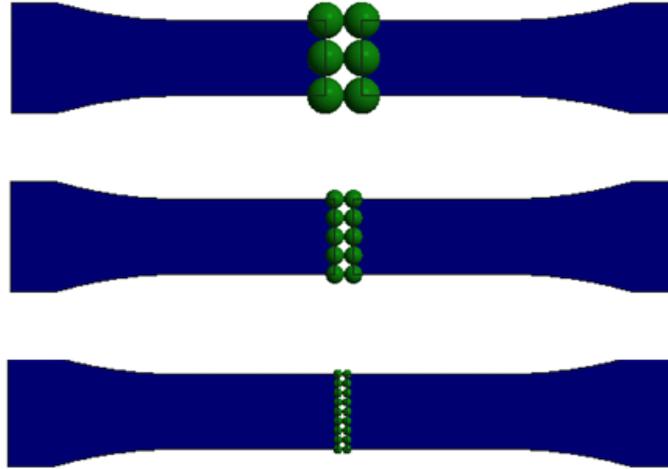


FIGURA 5.4: Geometría dañada.

En el caso en el que se considera la energía de fractura de  $G = 75 \times 10^{-6} \text{ J/m}^2$  se analiza el desplazamiento de los puntos PA y PB con el objeto de poder cuantificar adecuadamente el comportamiento de abertura de la grieta. En la Figura 5.5 se muestra el comportamiento de dichos puntos y en donde se puede observar que en todos los casos el desplazamiento último coincide, lo que era de esperar.

Dado que el elemento fracturado tiene un tamaño diferente en cada malla, el movimiento del punto PB en la zona elástica es más pequeño cuanto más pequeño sea el elemento, sin embargo, una vez iniciada la fractura, el desplazamiento del punto PB se debe principalmente a la energía elástica acumulada en la probeta; que una vez descargada, continúa por la rama teórica del problema estático. Al tratarse de un problema dinámico, el cambio de pendiente es gradual e incluso presenta pequeñas oscilaciones alrededor del resultado teórico.

Respecto al comportamiento del punto PA, éste sigue la forma observada en los experimentos de laboratorio. La energía adicional que se observa en las curvas proviene del comportamiento dinámico del problema al contabilizar la energía cinética de la probeta.

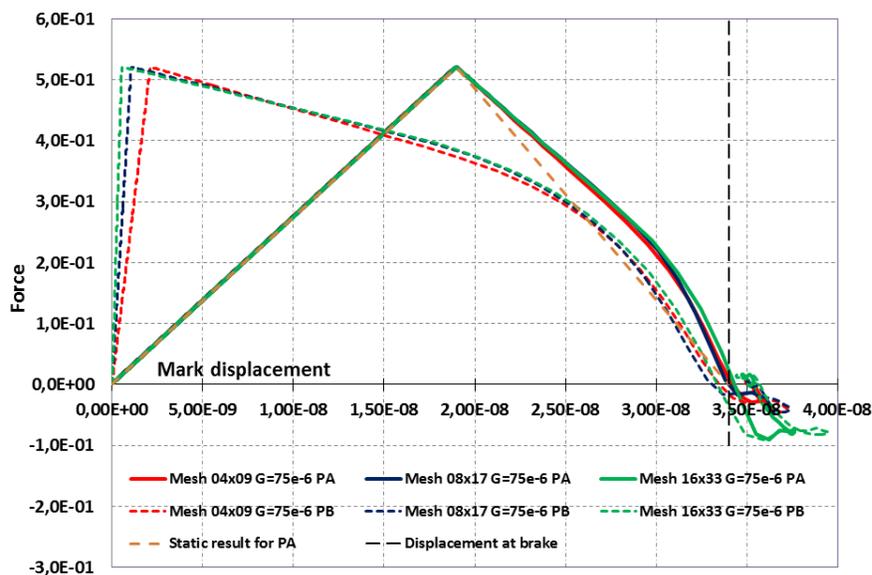


FIGURA 5.5: Relación fuerza-desplazamiento con  $G = 75 \times 10^{-6} \text{ J/m}^2$ .

### 5.1.2 Resistencia a tracción indirecta

Un ensayo de resistencia a tracción indirecta, también conocido como *Brazilian Tensile Strength Test* (BTST) [19], proporciona una alternativa a las pruebas de resistencia a la tracción directa de algún material frágil como el hormigón, rocas y materiales similares a las rocas; la resistencia a la tracción se mide de manera indirecta, en lugar de hacerlo directamente, debido a las dificultades en la aplicación del ensayo de tracción directa, entre los que podemos listar: sujeción del cilindro, dificultad de asegurar la estabilidad del ensayo, entre otros.

En este ensayo, un cilindro regular delgado es diametralmente comprimido hasta que llega a la fractura. En la figura 5.6 se muestran cuatro configuraciones típicas de carga para este ensayo. La compresión induce tensiones de tracción normales al diámetro vertical, que son esencialmente constantes sobre una región alrededor del centro del cilindro.

La resistencia a la tracción indirecta es típicamente calculada con base en la suposición de que se produce una fractura en el punto de tensión de tracción máxima, es decir, en el centro del cilindro. La fórmula sugerida para el cálculo de la tensión de ruptura  $\sigma^*$  (MPa) es

$$\sigma^* = \frac{2P}{\pi Dt}, \quad (5.1)$$

donde  $P$  es la carga hasta la fractura ( $N$ ),  $D$  es el diámetro de la muestra de ensayo ( $mm$ ), y  $t$  es el espesor del mismo ( $mm$ ) [20].

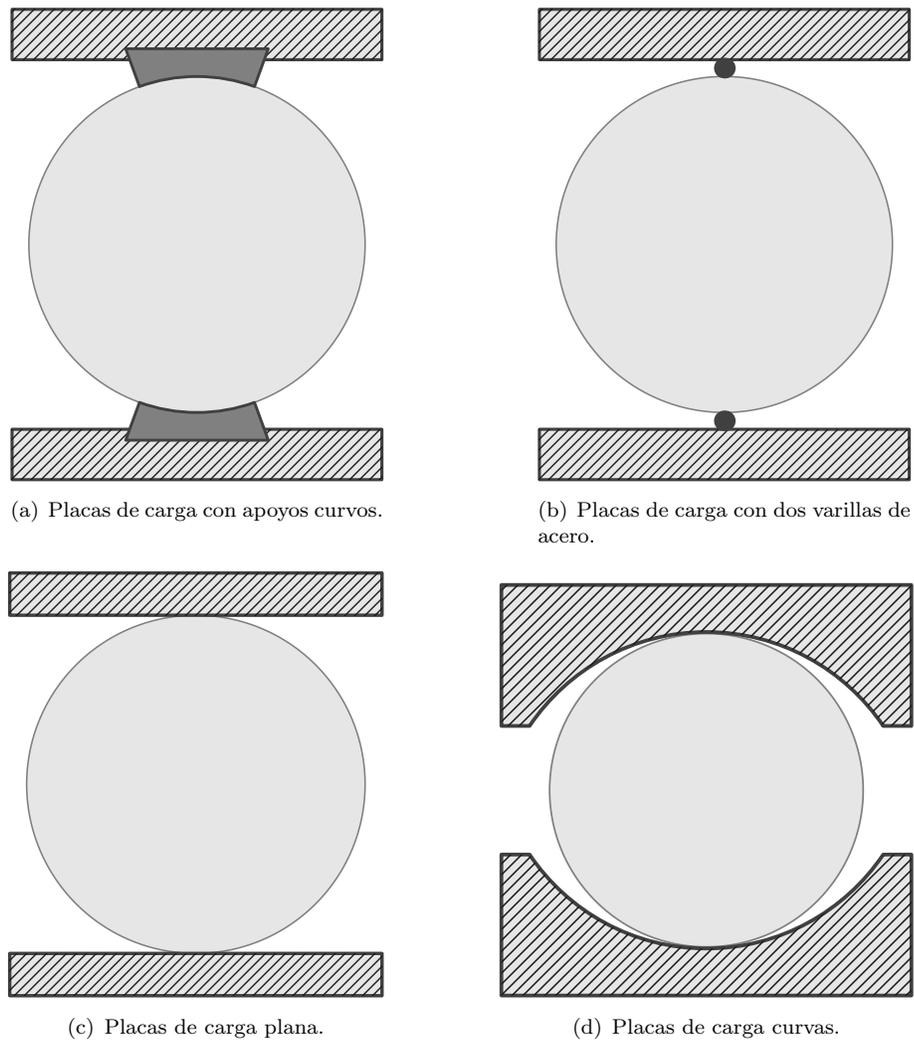


FIGURA 5.6: Configuraciones típicas para aplicar cargas en el BTST.

La geometría utilizada para este ensayo se muestra en la figura 5.7; la carga del cilindro se realiza mediante un desplazamiento impuesto en la placa de carga de apoyo curvo superior con una velocidad constante de  $0.5 \times 10^{-6} \text{ m/s}$  y la placa de apoyo curvo inferior queda empotrada.

Se ensaya el material con una energía de fractura  $G = 0.0 \text{ J/m}^2$ . Se analizan tres mallas de 480, 1048 y 4083 nodos y de 890, 1989 y 7956 elementos, como se muestran en las figuras 5.8(a), 5.8(b) y 5.8(c), respectivamente.

Las propiedades del material del cilindro se presentan en la tabla 5.2.

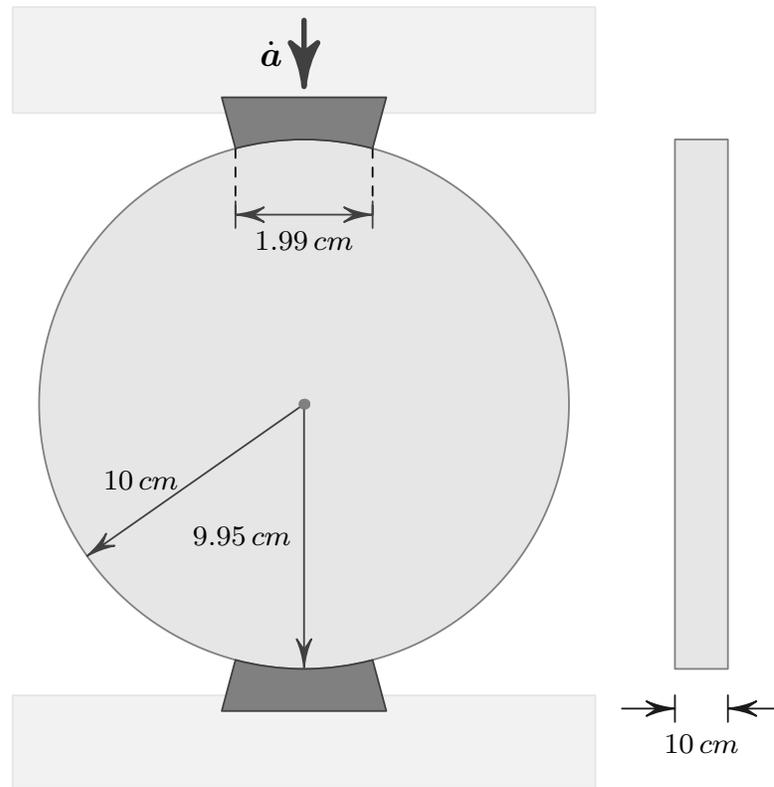
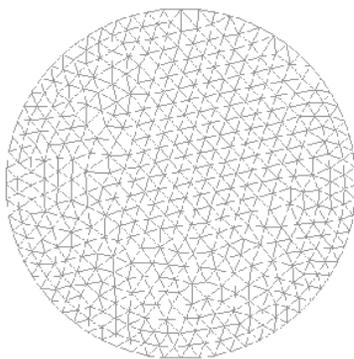
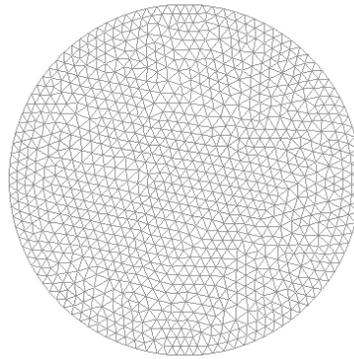


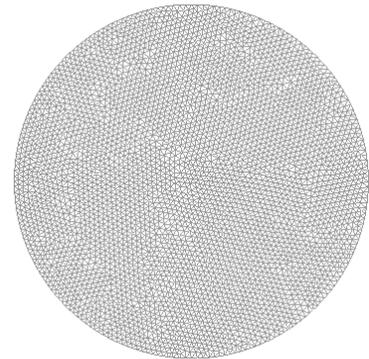
FIGURA 5.7: Geometría y condiciones iniciales del cilindro.



(a) Malla A, con 480 nodos y 890 elementos.



(b) Malla B, con 1048 nodos y 1989 elementos.



(c) Malla C, con 4083 nodos y 7956 elementos.

FIGURA 5.8: Diferentes discretizaciones para el BTST.

Nombre	Variable	Valor	Unidad
Módulo de Young	$E_0$	$21 \times 10^9$	$Pa$
Coefficiente de Poison	$\nu$	0.2	–
Peso específico	$\gamma$	$7.8 \times 10^3$	$N/m^3$
Tensión de ruptura	$\sigma^*$	$10 \times 10^3$	$Pa$

TABLA 5.2: Propiedades del material del cilindro.

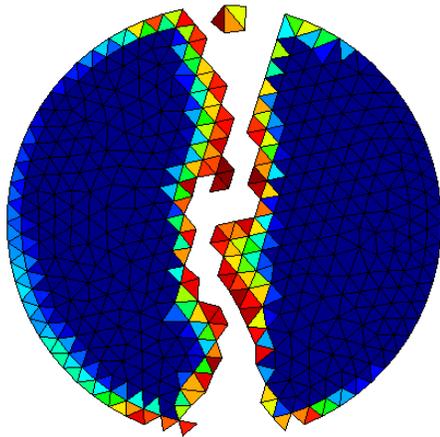
La figura 5.9 muestra el daño en las distintas geometrías consideradas para la simulación, en las que es posible apreciar un patrón de fractura aceptable según las diferentes discretizaciones. En la primer columna de la figura 5.9 se aprecian los dominios resultantes solamente con elementos finitos, mientras que en la segunda se tienen los dominios resultantes con elementos finitos y discretos.

La figura 5.10 muestra la relación entre el desplazamiento que sufre la placa de carga de apoyo curvo superior respecto el nivel de carga total para una fractura frágil ( $G = 0.0 J/m^2$ ).

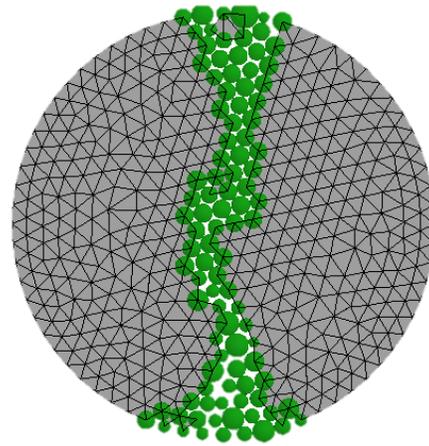
Se puede observar que para las tres mallas la suma de fuerzas sufre una disminución drástica que indica que el disco sufrió una fractura. Para las tres mallas el disco sufre una fractura cuando la placa de carga tiene un desplazamiento alrededor de  $5.0 \times 10^{-07} m$ , y el desplazamiento máximo converge a la solución exacta a medida que la discretización de la probeta (cilindro) aumenta.

Terminada la simulación es posible tener la relación fuerza-desplazamiento (figura 5.10), con esto es posible determinar la carga  $P$  que produce la fractura con la expresión (5.1), así es posible encontrar la tensión de ruptura en la simulación  $\sigma_s$  para luego compararla con la tensión de ruptura preestablecida  $\sigma^* = 10 \times 10^3 Pa$ .

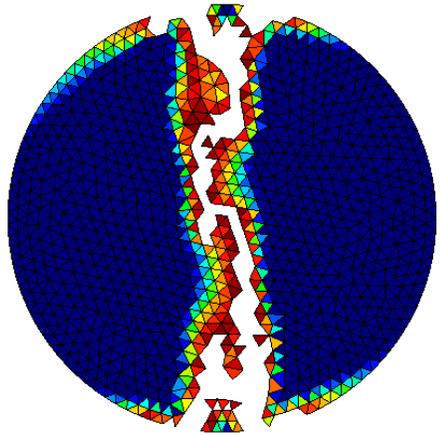
En la tabla 5.3 se muestra las tensiones de ruptura obtenidas para las diferentes discretizaciones, como también el error porcentual comparado con la tensión de ruptura preestablecida.



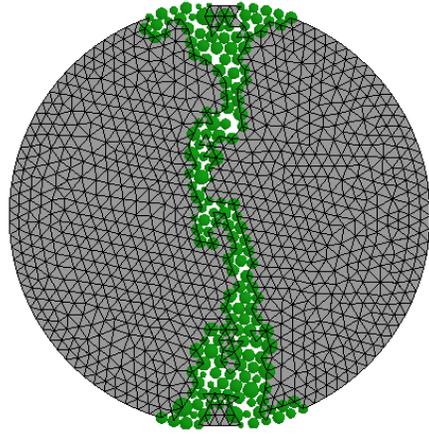
(a) Geometría dañada sin elementos discretos (Malla A).



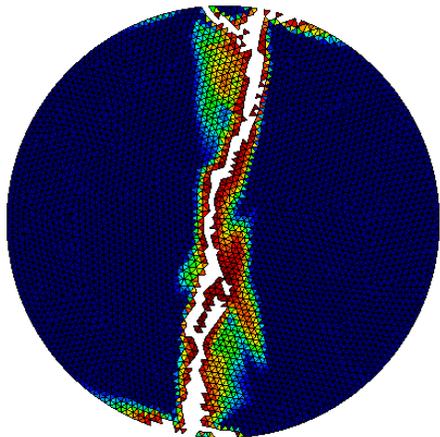
(b) Geometría dañada con elementos finitos y discretos (Malla A).



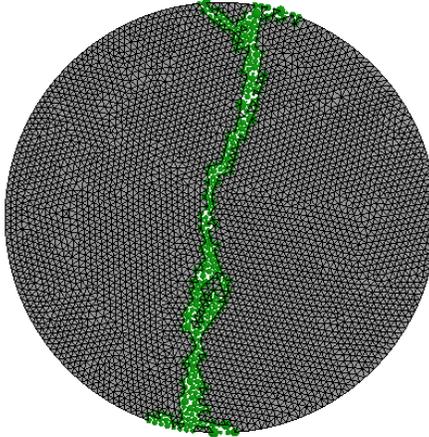
(c) Geometría dañada sin elementos discretos (Malla B).



(d) Geometría dañada con elementos finitos y discretos (Malla B).



(e) Geometría dañada sin elementos discretos (Malla C).



(f) Geometría dañada con elementos finitos y discretos (Malla C).

FIGURA 5.9: Geometría dañada del BTST para diferentes discretizaciones.

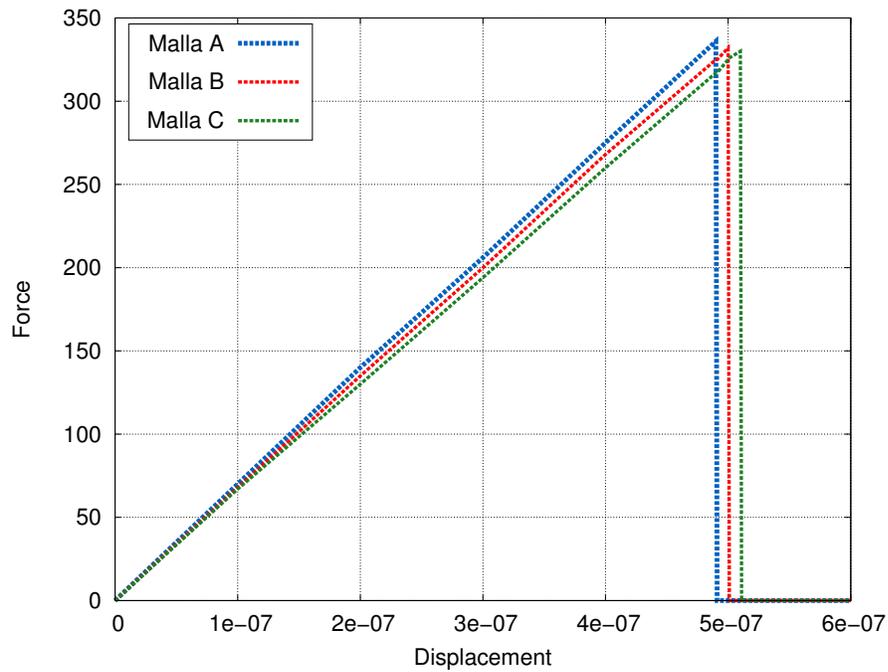


FIGURA 5.10: Relación fuerza-desplazamiento del BTST con  $G = 0.0 \text{ J/m}^2$ .

Discretización	$\sigma_s$	Error porcentual
Malla A	$10.58 \times 10^3 \text{ Pa}$	5.8 %
Malla B	$10.50 \times 10^3 \text{ Pa}$	5.0 %
Malla C	$10.48 \times 10^3 \text{ Pa}$	4.8 %

TABLA 5.3: Tensiones de ruptura obtenidos con la simulación.

Como se esperaba, el error porcentual y el tipo de discretización están correlacionados de forma inversa, es decir; entre menos fina sea la discretización el error porcentual es más grande en comparación a que si se tuviese una discretización más fina, pues con ésta el error porcentual es más pequeño.

## Capítulo 6

# Conclusiones y Trabajo Futuro

### 6.1 Conclusiones

A continuación se listan las conclusiones y observaciones derivadas del desarrollo de este trabajo:

- La asignación de radios a las partículas, cuando ocurre alguna fractura en el dominio de estudio; es muy crítica, ya que está muy ligada al patrón de fractura que puede sufrir un sólido deformable; si no se asignan los radios de forma *correcta* en las simulaciones pueden apreciarse patrones de fractura poco usuales o que éstos no se asemejan a las fracturas que sufre un sólido en un laboratorio.
- No es recomendable usar una asignación de radios con base en promedios si la discretización del dominio es no estructurada, de ser el caso, se tendría mucha sobreposición entre partículas provocando que las simulaciones regresen resultados erróneos.
- El esquema de integración presentado es estable, incluso para tiempos de simulación *muy grandes*, lo cual es deseable en comparación a otros esquemas de integración. Esta estabilidad se debe, en parte, al valor correcto o recomendable del paso de tiempo  $\Delta t$  usado en las simulaciones, esto de acuerdo al paso de tiempo crítico  $\Delta t_{cr}$  calculado.
- La búsqueda de contactos entre partículas mediante la estructura de *bins* es muy eficiente y altamente paralelizable.

## 6.2 Trabajo Futuro

A continuación se listan las posibles mejoras o soluciones a algunos problemas que se mencionaron en los capítulos 3 y 4 de este documento:

- Modelar la asignación de radios de partículas como un problema de optimización, teniendo como objetivo principal asignar los radios de tal forma que todas las partículas estén en contacto, como se propone en [3].
- Migrar la aplicación desarrollada en Fortran 90 al lenguaje de programación C++, de esta forma será posible tener una aplicación más robusta, portable y eficiente, ya que se puede aplicar cómputo paralelo en computadoras con más de un procesador (OpenMP), en *cluster* de computadoras (MPI) y en tarjetas gráficas (CUDA), debido a que se tienen muchos módulos los cuales son altamente paralelizables. Con esto, será posible realizar otros ensayos con dominios más grandes en los que el número de elementos en la discretización de FEM sea muy elevado con un tiempo de cómputo reducido en comparación al tiempo de cómputo si se tuviese solamente programación secuencial.

## Apéndice A

# Ensamblar el sistema de ecuaciones

Se explica de forma breve como ensamblar el sistema de ecuaciones global a partir de los sistemas elementales. Se parte de la discretización del dominio y se identifican los nodos y sus respectivas conectividades.

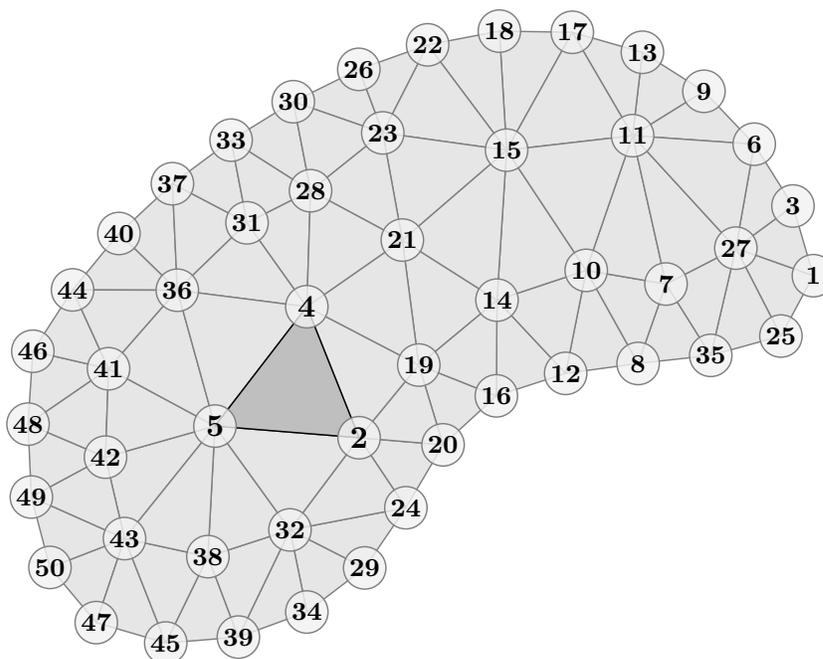


FIGURA A.1: Discretización del dominio con elementos triangulares de 3 nodos.

Se calcula el sistema elemental  $\mathbf{K}^e \mathbf{a}^e = \mathbf{f}^e$  para todos los elementos de la discretización como se explicó en el capítulo 2, por ejemplo para el elemento de nodos 5, 2, 4 de la figura A.1, el sistema elemental con numeración local y global es el que se muestra en la figura A.2.



Para ahorrar tanto memoria como tiempo de procesamiento, sólo almacenaremos los elementos de la matriz de coeficientes que sean distintos de cero. El método usado es el conocido *Compressed Row/Column Storage*, de esta forma, la multiplicación matriz-vector se realizará de forma eficiente, se destaca esta operación, ya que en la aplicación desarrollada se utiliza con bastante frecuencia.

# Bibliografía

- [1] E. Oñate, C. Labra, F. Zárate, J. Rojek, and J. Miquel. Avances en el desarrollo de los métodos de elementos discretos y de elementos finitos para el análisis de problemas de fractura. *Anales de la mecánica de la fractura*, 22:27–34, 2005.
- [2] J. Rojek and E. Oñate. Multiscale analysis using a coupled discrete/finite element model. *Interaction and Multiscale Mechanics*, 1(1):1–31, 2007.
- [3] Carlos Andrés Labra González. *Advances in the development of the discrete element method for excavation processes*. PhD thesis, International Center of Numerical Methods in Engineering, may 2012.
- [4] S.P. Timoshenko and J.N. Goodier. *Teoría de la Elasticidad*. 1951. ISBN 2194-1972.
- [5] Eugenio Oñate Ibáñez de Navarra. *Cálculo de Estructuras por el Método de Elementos Finitos: Análisis Estático Lineal*. Centro Internacional de Métodos Numéricos en Ingeniería, second edition, 1995. ISBN 9788487867002.
- [6] O.C. Zienkiewicz and R.L. Taylor. *The Finite Element Method: The Basis*. Fifth edition, 2000. ISBN 0 7506 5049 4.
- [7] H.A. Eschenauer, N.A. Olhoff, and W. Schnell. *Applied Structural Mechanics: Fundamentals of Elasticity, Load-Bearing Structures, Structural Optimization*. Springer Berlin Heidelberg, 1997. ISBN 9783540612322.
- [8] S. Botello, H. Esqueda, F. Gómez, M. A. Moreles, and E. Oñate. *Módulo de Aplicaciones del Método de Elementos Finitos*. Octubre 2003.
- [9] P. Cundall and O. Strack. A discrete numerical method for granular assemblies. *Geotechnique*, 29:47–65, 1979.

- 
- [10] J. Rojek, E. Oñate, F. Zárata, and J. Miquel. Modelling of rock, soil and granular materials using spherical elements. In *2nd European Conference on Computational Mechanics ECCM-2001*, June 2001.
- [11] L.M. Taylor and D.S. Preece. Simulation of blasting induced rock motion. *Engineering Computations*, 9(2):243–252, 1992.
- [12] O.C. Zienkiewicz and R.L. Taylor. *El Método de los Elementos Finitos: Mecánica de Sólidos y Fluidos*. Cuarta edition, 1994. ISBN 84-481-1760-3.
- [13] R.W. Clough and J. Penzien. *Dynamics of structures*. McGraw-Hill, 1975. ISBN 9780070113923.
- [14] W.J.M. Rankine. *A Manual of Applied Mechanics*. Read Books, 1858. ISBN 9781443718158.
- [15] F. Zárata and E. Oñate. A FEM-DEM technique for prediction multi-fracture in materials and structures. *COMPLAS XII, 3-5 September, Barcelona, Spain*, 2013.
- [16] S. Smale, M.W. Hirsch, and R.L. Devaney. *Differential Equations, Dynamical Systems, and an Introduction to Chaos*. Pure and applied mathematics. Elsevier Science, 2003. ISBN 9780080491141.
- [17] B.M. Irons and C. Treharne. A bound theorem for eigen values and its practical applications. *2nd Conf. on Matrix Methods in Structural Mechanics*, 1:245–254, 1971.
- [18] M. Cervera, M. Chiumenti, and R. Codina. Mesh objective modeling of cracks using continuous linear strain and displacement interpolations. *INTERNATIONAL JOURNAL FOR NUMERICAL METHODS IN ENGINEERING*, 87:962–987, 2011.
- [19] F. L. L. B. Carniero and A. Barcellos. Concrete tensile strength. *International Association of Testing and Research Laboratories for Materials and Structures*, 13:97–127, March 1953.
- [20] Diyuan Li and Louis Ngai Yuen Wong. The brazilian disc test for rock mechanics applications: Review and new insights. *Rock Mech Rock Engineering*, 46:269287, 2013.
- [21] Stephen J. Chapman. *Fortran 95/2003 for scientists and engineers*. McGraw-Hill Education, Boston, third edition, 2007. ISBN 978-0-07-319157-7.