CIMAT

Centro de Investigación en Matemáticas A. C.

Estabilidad de Chow para curvas algebraicas

T E S I S

Que para obtener el grado de

Doctor en ciencias

con orientación en

Matemáticas Básicas

P R E S E N T A:

Hugo Torres López

Directora de tesis:

Dra. Gloria Leticia Brambila Paz

Guanajuato, Gto., 11 de diciembre 2015

Centro de Investigación en Matemáticas A. C.

CIMAT

Estabilidad de Chow para curvas algebraicas

T E S I S

Doctor en Ciencias

con orientación en

Matemáticas Básicas

P R E S E N T A:

Hugo Torres López

Dra. Gloria Leticia Brambila Paz

(Vocal y Directora de Tesis)

Comité de evaluación:

Dr. Xavier Gómez-Mont Ávalos (Presidente)
Dr. Jesús Ruperto Muciño Raymundo (Secretario)
Dr. Luis Abel Castorena Martínez (Vocal)
Dra. Claudia Estela Reynoso Alcántara (Vocal).
Dra. Gloria Leticia Brambila Paz (Vocal)

Guanajuato, Gto., 11 de diciembre de 2015

Dedicatoria

A mi hijo:
Victor Hugo Torres Martínez.

Con mucho amor y mucho cariño...

Agradecimientos

Quiero agradecer de manera especial a mi asesora la Dra. Gloria Leticia Brambila Paz por aceptarme para realizar esta tesis doctoral bajo su dirección. Por introducirme a este mundo tan hermoso que son los espacios moduli. El apoyo, el tiempo, la paciencia y las sugerencias que me brindó durante mis estudios de doctorado fueron fundamentales para la conclusión de este trabajo.

Quiero también expresar mi más sincero agradecimiento a mis sinodales: Dr. Xavier Gómez-Mont, Dr. Abel Castorena, Dra. Claudia Reynoso y Dr. Jesús Muciño por sus contribuciones, sugerencias, por el tiempo que pacientemente dedicaron en la revisión de este trabajo y sobre todo por su amabilidad al atender todas mis dudas a lo largo de mi formación.

Sin lugar a duda este trabajo no pudo haberse realizado sin la formación que recibí durante mis estudios de maestría y doctorado. Quiero agradecer a mis profesores: Dra. Leticia Brambila Paz, Dr. Xavier Gómez-Mont, Dra. Claudia Reynoso, Dr. Pedro Luis y Dr. Herbert Kanarek; ya que ellos me enseñaron a valorar mis estudios y a superarme cada día, por su tiempo, amistad y por los conocimientos que me han transmitido y me seguirán transmitiendo durante todo mi proyecto de vida.

A un gran ser humano, un profesor, un amigo: Dr. Osbaldo Mata Gutiérrez por el tiempo que me brindó para dudas y sugerencias. Gracias por los cafés matemáticos que nos tomamos por las mañanas con el principal objetivo de platicar sobre matemáticas. Gracias hermano por todos los consejos que me has dado no tanto de matemáticas, si no de la vida.

Quiero agradecer de manera especial a la familia de mi hijo por ayudarme a cuidarlo, educarlo y guiarlo para ser una mejor persona. En especial a sus abuelos: Leticia Martínez y Gustavo Mendoza por el gran apoyo que me han brindado durante estos años. Victor Hugo fuíste el gran motor para terminar este proyecto. Este trabajo está dedicado a ti, nunca olvides que te amo. La vida está llena de momentos difíciles y bellos, gracias por compartirlos conmigo.

A mis amigos: Josa, Javier, Carlos, Lily Alanis y Julio por ayudarme en tiempos difíciles, por su sincera amistad y por compartir conmigo momentos muy agradables. A mis compañeros de oficina: Iván, Saul y Jonny por tolerarme en los momentos de estrés, hacer de la oficina un ambiente agradable y por la convivencia con nuestras familias.

Le doy gracias a mi familia por apoyarme en todo momento, por los valores que me han inculcado, por darme la oportunidad de tener una excelente educación en el transcurso de mi vida. Con cariño, admiración, respeto y eterno agradecimiento por el apoyo moral y estímulos brindados, y por infundir en mi el camino para el término de este proyecto.

A CONACyT por la beca otorgada la cual me permitió sustentar mis necesidades económicas durante mi estancia en el programa de doctorado. Al Centro de Investigación en Matemáticas (CIMAT) por brindarme un lugar cómodo para trabajar, los recursos como libros, computadora y apoyos económicos, los cuales me permitieron la realización de este trabajo.

Índice general

Introducción

Uno de los problemas principales en geometría algebraica es la clasificación de objetos, ya sean polinomios, variedades, haces vectoriales, etc. En 1857, Riemann introdujo el concepto de **espacio moduli** cuando demostró sobre funciones abelianas que las clases de isomorfismos de superficies de Riemann de género g dependen de $3g - 3$ parámetros (ver [44], Sección 12). Las variedades, los esquemas y los grupos algebraicos en el presente trabajo están sobre los números complejos $\mathbb{C}$.

El objetivo principal de la **teoría de invariantes geométricos** (GIT, por sus siglas en inglés) es resolver problemas de clasificación en geometría algebraica. La teoría de invariantes geométricos estudia la acción de un grupo G sobre una variedad algebraica X, y proporciona técnicas para que el cociente de X por G tenga estructura de variedad algebraica.

En las últimas décadas se han introducido varios conceptos de estabilidad para variedades proyectivas, los cuales permitieron construir diferentes espacios moduli de variedades (ver [1], [29], [48]). Particularmente, usando la teoría de invariantes geométricos Mumford introdujo el concepto de estabilidad de Chow para variedades proyectivas, el cual utilizó para construir el espacio moduli $\mathcal{M}_g$ de curvas lisas proyectivas de género $g \geq 2$, salvo isomorfismos, y darle a éste estructura de variedad quasiproyectiva (ver [38], Capítulo 5).

Nosotros estamos interesados en estudiar la estabilidad de Chow de variedades proyectivas. Para una variedad proyectiva $X \subset \mathbb{P}^n$ se le asocia un polinomio multihomogéneo llamado la forma de Chow. El grupo especial lineal $\mathrm{SL}(n+1)$ actúa sobre la variedad que parametriza las formas de Chow. Decimos que $X \subset \mathbb{P}^n$ es **Chow estable** si su forma de Chow es estable en el sentido de la teoría de invariantes geométricos.

En este trabajo, utilizamos los criterios de la teoría de invariantes geométricos para estudiar la estabilidad de Chow de puntos, variedades lineales y curvas degeneradas, y demostramos que son variedades Chow inestables (ver Teoremas 1.2.8, 1.2.12 y 1.2.13). Tal vez para los expertos es conocida la estabilidad de Chow de puntos, variedades lineales y curvas degeneradas, pero en la literatura no encontramos ninguna demostración por lo que incluíremos las demostraciones pertinentes. Después de hacer esto, estudiamos la estabilidad de Chow para hipersuperficies. Recordemos que en el espacio de polinomios homogéneos de grado d en $n + 1$ variables actúa el grupo lineal especial

SL$(n+1)$. Por la teoría de invariantes geométricos existe un concepto de estabilidad a la cual nos referimos como **P-estabilidad**. Esto es, una hipersuperficie es P-estable si su polinomio homogéneo asocidado es GIT-estable. Nuestro resultado original del capítulo 1 fue publicado en [49] (ver Teorema 1.3.6).

Teorema 0.0.1. *Sea una hipersuperficie $X = V(F) \subset \mathbb{P}^n$ de grado d.*

- *X es P-estable (resp. P-semiestable) si, y sólo si, X es Chow estable (resp. Chow semiestable).*

A partir del teorema anterior damos una clasificación completa para la estabilidad de Chow de curvas planas, la cual depende del grado y del tipo de singularidades que posea la curva. En particular; si la curva plana tiene grado 2 todas las curvas con singularidades son P-inestables y por lo tanto son Chow inestables, como la curva lisa es P-semiestable entonces es Chow semiestable.

En general, no existe una manera simple para decidir cuándo una variedad es Chow estable, incluso al usar el criterio de Hilbert-Mumford (ver Criterio 1.2.4) puede ser muy complicado. Mumford demostró que toda curva lisa, proyectiva e irreducible de género g, encajada por un sistema lineal completo de grado mayor a $2g$, es Chow estable (ver [38], Teorema 4.15). En consecuencia tal curva está contenida en el espacio proyectivo $\mathbb{P}^{d-g}$. Partiendo de este resultado de Mumford, nosotros estudiaremos la estabilidad de Chow para curvas $C \subset \mathbb{P}^n$ tal que el grado d, y n son diferentes a $2g$ y $d-g$, respectivamente.

Un **sistema lineal generado** de tipo $(d, n+1)$ es una pareja (L, V), donde L es un haz lineal de grado d sobre C y $V \subset H^0(C, L)$ es un subespacio lineal de dimensión $n+1$ tal que el morfismo evaluación

$$V \otimes \mathcal{O}_C \to L$$

es sobreyectivo (ver [3], Capítulo I). La importancia de los sistemas lineales (L, V) de tipo $(d, n+1)$ es que encajan a la curva C en espacios proyectivos $\mathbb{P}^n$ mediante el morfismo

$$\begin{array}{rcl} \phi_{L,V} : C & \to & \mathbb{P}(V^*) \\ c & \mapsto & \{s \in V \mid s(c) = 0\}. \end{array}$$

Estamos interesados en estudiar la geometría de los sistemas lineales con la estabilididad de Chow de la imagen de la curva mediante $\phi_{L,V}$. Dado un sistema lineal generado (L, V), el kernel del morfismo evaluación define un haz vectorial, denotado por $M_{L,V}$ y es conocido como el **haz de Sysygies** o **haz de Lazarsfeld**. Por la sucesión de Euler tenemos que

$$M_{L,V} = (T\mathbb{P}^n|_C)^* \otimes L.$$

Recordemos que al utilizar GIT, Mumford introdujo el concepto de haz vectorial estable (resp. semiestable) sobre una curva lisa proyectiva irreducible. Como consecuencia, él demostró que las clases de isomorfismos de haces vectoriales estables de rango n y grado d tiene estructura de variedad cuasiproyectiva ([36]).

Para curvas lisas irreducibles y proyectivas, demostramos un criterio relacionando la estabilidad del haz tangente del espacio proyectivo $\mathbb{P}^n$ restringido a la curva con su estabilidad de Chow, y damos ejemplos de curvas lisas las cuales son Chow inestables (ver Teorema 1.2.13). En concreto, el teorema principal del Capítulo 2 fue publicado en [9] (ver Teorema 2.3.1).

Teorema 0.0.2. *Sea una curva $C \subset \mathbb{P}^n$ irreducible, lisa y proyectiva encajada por un sistema lineal (L, V) de tipo $(d, n+1)$. Si la restricción del haz tangente de $\mathbb{P}^n$ a C es estable (resp. semiestable), entonces $C \subset \mathbb{P}^n$ es Chow estable (resp. Chow semiestable).*

El Teorema 0.0.2 proporciona una condición suficiente para la estabilidad de Chow de curvas lisas proyectivas irreducibles. Para la demostración usamos ([38], Teorema 4.12) y la relación entre el haz tangente y el haz de Sysygies. Nuestra contribución es la interpretación de la estabilidad de Chow via la estabilidad de la restricción del haz tangente del espacio proyectivo a la curva.

Una aplicación de este resultado es la existencia de curvas lisas Chow estables para sistemas lineales no completos y de grado diferente a $2g$. Recordemos que para curvas generales de género $g \geq 2$, una cota para la existencia de sistemas lineales de tipo $(d, n+1)$, es que el número de Brill-Noether para haces lineales $\rho(g, d, n+1) := g - (n+1)(n-d+g)$ es no negativo (ver [3], Teorema 5.1). Esto es equivalente a que el grado d satisfaga la cota: $d \geq g + n - \left\lfloor \frac{g}{n+1} \right\rfloor$, y por lo tanto esta cota da la existencia de curvas Chow estables en $\mathbb{P}^n$ de grado d y género g.

Los haces de Sysygies han sido estudiados desde varios puntos de vista, los cuales tienen aplicaciones: con los problemas de sysygies, con la teoría de sistemas coherentes [10], con la conjetura de Green [50] y con la conjetura de la resolución minimal [20]. En particular, la estabilidad del haz de Sysygies está relacionada con las variedades de Brill Noether [10], con la estabilidad del haz tangente del espacio proyectivo restringido a la curva y con los divisores theta ([32], [33]). En un trabajo crucial, Ein y Lazarsfeld utilizaron la estabilidad de $M_{L,V}$ para demostrar la estabilidad de haz de Picard [18].

En general, no existe un criterio simple para decidir cuando el haz de Sysygies es estable. Sin embargo, existe literatura demostrando ciertos casos, los cuales dependen de tipo de la curva, el grado del haz lineal y la dimensión del subespacio de secciones. En ([33], Teorema 7.3), los autores demostraron la estabilidad del haz de Lazarsfeld para toda curva C y todo sistema lineal (L, V) de tipo (d, n) induciendo un morfismo birracional tal que $d \leq 2n + \mathrm{Cliff}(C)$ y $a - h \leq 0$, donde a es la codimensión de V en $H^0(L)$ y $h := h^1(C, L)$. Nosotros demostramos la estabilidad del haz de Lazarsfeld (ver Teorema 2.3.4 para toda curva general y sistema lineal generado (L, V) de tipo (d, n) con $a - h \leq 0$. Las técnicas que usamos en la demostración son diferentes de [33]).

Teorema 0.0.3. *Sean una curva C general de género $g \geq 2$ y un sistema lineal (L, V) generado de tipo $(d, n+1)$ sobre C tal que $n+1 = h^0(C, L) - a$ para algún entero positivo a. Se cumplen las siguientes afirmaciones:*

1. *Si $a - h < 0$, entonces $M_{L,V}$ es estable.*
2. *Si $a - h = 0$, entonces $M_{L,V}$ es semiestable.*
3. *Si $a - h > 0$, $a(n-1) < g$ y (L, V) define un encaje, entonces $M_{L,V}$ es estable.*

Recordemos que si el grado d es mayor a g, entonces el elemento general L en $\mathrm{Pic}^d(C)$ tiene $d+1-g$ secciones, es decir, el $h^1(L)$ es cero. Por lo tanto solo podemos aplicar el Teorema 0.0.3 para el cerrado de Zariski en $\mathrm{Pic}^d(C)$, donde $h = h^1(L)$ tiene que ser diferente de cero. En particular, la estabilidad del haz de Sysygies es equivalente a la estabilidad del haz tangente del espacio proyectivo restringido a la curva (ver sección 2.3). El Teorema 0.0.3 puede ser escrito de la siguiente manera (ver Corolario 2.3.1).

Corolario 0.0.1. *Sean una curva $C \subset \mathbb{P}^n$ general de género g encajada por un sistema lineal $(L, V))$ de tipo $(d, n+1)$ tal que $n+1 = h^0(C, L) - a$, para algún entero positivo a. Si $a - h > 0$ y $g > a(n-1)$, entonces $C \subset \mathbb{P}^n$ es Chow estable.*

Butler demostró que para curvas lisas irreducibles y sistemas lineales completos, $M_{L,H^0(L)}$ es estable si $d > 2g$ y semiestable si $d = 2g$ ([18], Proposición 3.2). Más tarde, Paranjape y Ramanan estudiaron el caso $(K_C, H^0(K_C))$, donde K_C es el haz lineal canónico sobre C y demostraron que $M_{K_C,H^0(K_C)}$ es semiestable, y es estable si C no es hiperelíptica ([42]). Por el Teorema 0.0.2 podemos escribir lo anterior de la siguiente manera y fue publicado en [9] (ver Corolario 2.5.1).

Corolario 0.0.2. *Sea una curva C lisa irreducible de género g encajada por un sistema lineal $(L, H^0(C, L))$ completo. Se cumplen las siguientes afirmaciones:*

1. *Si $d \geq 2g$, entonces $C \subset \mathbb{P}^{d-g}$ es Chow semiestable.*

2. *Si $d > 2g$, entonces $C \subset \mathbb{P}^{d-g}$ es Chow estable.*

3. *Si C es hiperelíptica, entonces $\phi_{K_C,H^0(K_C)}(C) \subset \mathbb{P}^{g-1}$ es Chow semiestable.*

4. *Si C no es hiperelíptica, entonces $\phi_{K_C,H^0(K_C)}(C) \subset \mathbb{P}^{g-1}$ es Chow estable.*

El siguiente corolario es una reformulación de los principales resultados sobre la estabilidad del haz de Sysygies en términos de la estabilidad de Chow para curvas lisas irreducibles, el cual ha sido publicado en [9] (ver Corolario 2.5.3).

Corolario 0.0.3. *Sean una curva C general de género g y un sistema lineal general (L, V) de tipo $(d, n+1)$, entonces $\phi_{L,V}(C) \subset \mathbb{P}^n$ es Chow semiestable. Más aún, $\phi_{L,V}(C) \subset \mathbb{P}^n$ es Chow estable si se satisface una de las siguientes condiciones:*

1. *C es una curva general de género $g \geq 2$ y MCD$(d, n) = 1$.*

2. *C es una curva de género $g = 1$, $d \geq n+1$ y MCD$(d, n) = 1$.*

3. *C es una curva de género $g = 2$, $d \geq n+2$ con $d \neq 2n$.*

4. *C es una curva de Petri de género $g \geq 3$ y $n \leq 4$.*

5. *C es una curva de Petri de género $n \geq 5$ y $g \geq 2(n-2)$.*

E. Mistretta y L. Stoppino introdujeron el concepto de estabilidad lineal para sistemas lineales generados (L, V) sobre una curva lisa irreducible y proyectiva. Ellos estudiaron condiciones necesarias para que la estabilidad lineal implique la estabilidad del haz de Sysygies, con lo cual obtienen resultados parciales sobre el índice de Clifford de la curva ([33]). En el siguiente teorema damos condiciones sobre la codimensión del subespacio de secciones y el género de la curva para que la estabilidad lineal del sistema (L, V) implique la estabilidad de $M_{L,V}$ (ver Teorema 2.4.2), denotamos por $h := h^1(C, L)$.

Teorema 0.0.4. *Sean una curva general C de género $g \geq 2$ y un sistema lineal generado (L, V) de tipo $(d, n+1)$ sobre C tal que $n+1 = h^0(C, L) - a$, para algún entero positivo a. Supongamos que $a - h > 0$ y $a(n-1) < g$. Entonces $M_{L,V}$ es estable (resp. semiestable) si, y sólo si, (L, V) es linealmente estable (resp. linealmente semiestable).*

Para entender la geometría de una variedad X, es importante estudiar sus subvariedades. Por lo tanto, estamos interesados en estudiar los esquemas de Hilbert de X y los esquemas de morfismos a la variedad X, los cuales son denotados por $\mathrm{Hilb}(X)$ y $\mathrm{Hom}(-, X)$, respectivamente. Específicamente, el esquema de Hilbert parametriza subesquemas cerrados de un espacio proyectivo con cierto polinomio de Hilbert, y éstos se han utilizado para la construcción de espacios moduli como cocientes de un esquema de Hilbert por la acción de un grupo algebraico, tal como fue el espacio moduli de curvas lisas proyectivas de género $g \geq 2$. Por lo general, estos esquemas son complicados de entender, pueden tener componentes de dimensión arbitraria y singularidades terribles.

Denotamos por $\mathrm{Hilb}_{n,P(t)}$ al esquema de Hilbert del espacio proyectivo $\mathbb{P}^n$ con polinomio de Hilbert $P(t) = dt + 1 - g$. Este esquema parametriza curvas en $\mathbb{P}^n$ de grado d y género g. En el Capítulo 3 describimos un abierto liso de una componente $\mathrm{Hilb}_{n,P(t)}^{Ch}$ del esquema de Hilbert, haciendo uso de las variedades de Brill-Noether moviendo la curva.

Sea una familia $p : \mathcal{C} \to S$ de curvas lisas proyectivas irreducibles de género $g \geq 2$ parametrizada por un esquema S, supongamos que p tiene una sección. Para cada par de enteros positivos d, n existe un esquema sobre S, denotado por $\mathcal{G}_d^n(p)$ representando al funtor

$$
\begin{array}{rcl}
G_d^n : Sch/S & \longrightarrow & Sets \\[1ex]
T & \longmapsto & \left\{ \begin{array}{l} \text{clases de equivalencias de familias } g_d^n\text{'s sobre} \\ \text{p:}\mathcal{C}\to S \text{ parametrizadas por } T \end{array} \right\}.
\end{array}
$$

(ver [4], Capítulo XXI, Teorema 3.13). El esquema $\mathcal{G}_d^n(p)$ parametriza sistemas lineales sobre la familia de curvas p. Más aún, existe un morfismo $\mathcal{G}_d^n(p) \xrightarrow{f} S$ tal que la fibra en un punto $s \in S$ es la variedad de sistemas lineales $G_d^n(C_s)$.

Consideramos la familia universal, $p_0 : \mathcal{C}_g^0 \to \mathcal{M}_g^0$, de curvas de Petri sin automorfismos. Esta familia no tiene sección pero el esquema de sistemas lineales existe (ver Capítulo 3, Observación 7), y demostramos que $\mathcal{G}_d^n(p_0)$ es irreducible si el número de Brill Noether es positivo (ver Teorema 3.1.4).

Denotamos por $\mathcal{P}_d^n \subset \mathcal{G}_d^n(p_0)$ al conjunto de sistemas lineales sobre curvas de Petri sin automorfismos tales que $\phi_{L,V}$ es un encaje. Es decir, $w = (C, (L, V)) \in \mathcal{P}_d^n$ si, y sólo si, C es una curva de Petri sin automorfismos y (L, V) es un sistema lineal de tipo $(d, n+1)$ sobre C tal que $\phi_{L,V}$ define un encaje. Demostramos que $\mathcal{P}_d^n$ es un subesquema abierto de $\mathcal{G}_d^n(p_0)$, que por lo tanto será irreducible y liso (ver Teorema 3.1.6).

Construímos un $\mathbb{P}\mathrm{GL}(n+1)$-haz principal $\mathcal{B}_d^n$ sobre $\mathcal{P}_d^n$ con fibra

$$\Lambda_w := \{\alpha : \mathbb{P}(V^*) \to \mathbb{P}^n \mid \alpha \text{ es un isomorfismo}\},$$

para cada $w = (C, (L, V)) \in \mathcal{P}_d^n$, y definimos un morfismo algebraico

$$\Phi : \mathcal{B}_d^n \to \mathrm{Hilb}_{n,P(t)},$$

inyectivo (ver Teorema 3.2.6). Dado que $\mathcal{B}_d^n$ es irreducible, definimos por $\mathrm{Hilb}_{n,P(t)}^{Ch}$ la componente del esquema de Hilbert tal que $\Phi(\mathcal{B}_d^n) \subset \mathrm{Hilb}_{n,P(t)}^{Ch}$. El resultado principal del Capítulo 3 fue publicado en [9] (ver Teorema 3.2.7).

Teorema 0.0.5. *Sean enteros positivos g, d y n tales que $g \geq 4$ y $d - g > n - \left\lfloor \frac{g}{n+1} \right\rfloor$. Si una de las condiciones en el Teorema 0.0.3 se satisface, entonces $Hilb_{n,P(t)}^{Ch} \neq \emptyset$. Más aún, se cumple las siguientes afirmaciones:*

1. $\dim Hilb_{n,P(t)}^{Ch} = 3g - 3 + \rho(g, d, n+1) + n(n+2)$.

2. *$Hilb_{n,P(t)}^{Ch}$ es lisa en $\Phi(z)$, para cada $z \in \mathcal{B}_d^n$.*

3. $\dim Hilb_{n,P(t)}^{Ch}/SL(n+1) = \dim \mathcal{P}_d^n = 3g - 3 + \rho(g, d, n+1)$.

4. *Existe un abierto denso liso $U \subset Hilb_{n,P(t)}^{Ch}$ tal que toda curva de U es de Petri Chow estable.*

El esquema de Hilbert puede tener componentes de dimensión arbitraria y singularidades terribles, nuestro Teorema 0.0.5 describe la componente $\mathrm{Hilb}_{n,P(t)}^{Ch}$ del esquema de Hilbert, donde el elemento general es una curva lisa de Petri Chow estable, para $g \geq 4$ y $d - g > n - \left\lfloor \frac{g}{n+1} \right\rfloor$.

El enfoque clásico de la geometría algebraica para estudiar la variedad Y, es investigar las propiedades de familias de curvas sobre la variedad. Entendiendo la geometría sobre las curvas determinaremos propiedades sobre Y, estas familias son morfismos de las curvas a la variedad. En particular, la geometría birracional estudia las familias de curvas racionales, y el esquema $\mathrm{Hom}(\mathbb{P}^1, Y)$ de morfismos de $\mathbb{P}^1$ a Y ha sido utilizado para calcular la cohomología cuántica de Y.

Describiremos una componente $\mathrm{Hom}_d^{Ch}(C, \mathbb{P}^n)$ de esquema $\mathrm{Hom}_d(C, \mathbb{P}^n)$ tal que contiene morfismos Chow estables. Nuestro teorema principal del Capítulo 4 es el siguiente (ver Teorema 4.1.2).

Teorema 0.0.6. *Sean enteros positivos g, d y n tales que $g \geq 4$ y $d - g > n - \left\lfloor \frac{g}{n+1} \right\rfloor$. Si una de las condiciones en el Teorema 2.5.3 se satisface, entonces $Hom_d^{Ch}(X, \mathbb{P}^n) \neq \emptyset$. Más aún, se cumplen las siguientes afirmaciones*

1. *$Hom_d^{Ch}(X, \mathbb{P}^n)$ es liso.*

2. $\dim Hom_d^{Ch}(X, \mathbb{P}^n) = \rho(g, d, n+1) + n(n+2)$.

3. $\dim Hom_d^{Ch}(X, \mathbb{P}^n)/SL(n+1) = \rho(g, d, n+1)$.

A continuación damos una reseña sobre la construcción del espacio moduli de curvas lisas proyectivas irreducibles de género $g \geq 2$ utilizando las estabilidades de Chow y Hilbertz.

Las curvas Deligne-Mumford estables fueron usadas en ([16]) para demostrar la irreducibilidad del espacio de curvas de género $g \geq 2$. Mumford usó la teoría de invariantes geométricos de curvas n-canónicas para construir una compactificación $\overline{\mathcal{M}}_g$ de $\mathcal{M}_g$ con curvas Deligne-Mumford estables. Específicamente, Mumford demostró que si $n \geq 5$, una curva completa C es Chow estable si, y sólo si, C es Deligne-Mumford estable.

Más tarde, Gieseker introdujo el concepto de m-punto de Hilbert para curvas proyectivas $C \subset \mathbb{P}^n$ y estudió la estabilidad de los m-puntos de Hilbert de C, en el sentido de la teoría de invariantes geométricos (ver [22]). Gieseker demostró que si $n \geq 10$, entonces el encaje n-canónico de una curva Deligne-Mumford estable determina la existencia de m-puntos de Hilbert estables para $m \gg 0$. Gieseker utilizó la estabilidad de los m-puntos de Hilbert, para dar una compactificación $\overline{\mathcal{M}_g}$ de $\mathcal{M}_g$, la cual coincide con la compactificación construida por Mumford. Después, Morrison demostró que la estabilidad de Chow implica la estabilidad de los m-puntos de Hilbert para $m \gg 0$ (ver [34]).

Por su parte, Schubert estudió el caso $n = 3$ y $g \geq 3$ obteniendo una nueva compactificación $\overline{\mathcal{M}}_g^{ps}$ que parametriza curvas pseudo-estables ([47]). Una curva completa C es pseudo-estable si se cumplen las siguientes tres condiciones

1. C es conexa, reducida y tiene a lo más nodos y cúspides ordinarios como singularidades,

2. una subcurva de género $g = 1$, intersecta al resto de la curva en dos o más puntos,

3. y una subcurva de género $g = 0$, intersecta el resto de la curva en tres o más puntos.

Schubert demostró que la curva 3-canónica es Chow estable si, y sólo si, es pseudo-estable. Más aún, demostró la equivalencia entre la estabilidad de Chow y la estabilidad de los m-puntos de Hilbert para curvas n-canónicas con $n \geq 5$. Más tarde, Hasset y Hyeon estudiaron el caso de curvas 4-canónicas demostrando que el cociente GIT del esquema de Hilbert por la acción natural de $\mathbb{P}\mathrm{GL}(n+1)$ es isomorfo a $\overline{\mathcal{M}}_g^{ps}$ (ver [26]). En las últimas décadas, el concepto de estabilidad de Chow ha resurgido para el estudio del modelo mínimo de $\mathcal{M}_g$ (ver [2] y [6]).

CAPÍTULO 1

Estabilidad de Chow

En este capítulo damos los resultados principales de la teoría de invariantes geométricos, (GIT por sus siglas en inglés). La teoría GIT estudia la acción de un grupo algebraico G sobre una variedad algebraica X; su objetivo es hallar condiciones para que el espacio cociente de X por G tenga estructura de variedad algebraica. Su principal motivación está en la construcción de espacios moduli que inicia con Riemann y continua con la escuela italiana.

En la sección 1.2 recordamos el concepto de estabilidad de Chow para variedadades proyectivas introducido por Mumford, el cual fue utilizado para la construcción del espacio moduli de curvas lisas proyectivas de género $g \geq 2$. En este capítulo utilizamos el criterio de Hilbert-Mumford de la teoría de invariantes geométricos para estudiar la estabilidad de Chow de puntos, variedades lineales y curvas degeneradas en $\mathbb{P}^n$. Tal vez para los expertos es conocida la estabilidad de Chow de puntos, variedades lineales y curvas degenaradas (ver Teoremas 1.2.6, 1.2.12, 1.2.13), pero en la literatura no encontramos ninguna demostración por lo que incluiremos las demostraciones pertinentes.

En la sección 1.3 recordamos el concepto de P-estabilidad para una hipersuperficie $X = V(F) \subset \mathbb{P}^n$ y demostramos que coindice con su estabilidad de Chow. Ello nos permite dar una clasificación completa para la estabilidad de Chow de curvas planas la cual depende del grado y del tipo de singularidades que tiene la curva.

1.1. Teoría de invariantes geométricos

La teoría de invariantes geométricos estudia cuando es posible dar estructura de variedad al espacio de órbitas de la acción de un grupo en una variedad proyectiva. Las principales ideas en la teoría de invariantes clásicos provienen de David Hilbert, pero después fueron desarrolladas por David Mumford (ver [17], [21], [35], [38], [39], [43] y [45]).

Dado un grupo algebraico afín G, existe un único subgrupo maximal, normal, unipotente y conexo de G, el cual es llamado el **radical** de G (ver [27], página 125). Recordemos que G es **reductivo** si su radical es trivial. Los ejemplos más comunes de grupos reductivos son: $\mathrm{SL}(n), \mathrm{GL}(n)$ y $\mathbb{P}\mathrm{GL}(n)$; y un ejemplo de un grupo no reductivo es $\mathbb{C}$.

Sea una acción $G \times X \to X$ de G sobre una variedad algebraica X. Definimos **la órbita de** x como

$$\mathcal{O}(x) := \{\ gx \mid g \in G\}.$$

En este trabajo supondremos siempre que G es un grupo reductivo que está actuando en una variedad X. Sea un abierto de Zariski $U \subset X$, denotamos por $A(U)$ al anillo de funciones regulares en U y por

$$A(U)^G := \{f \in A(U) \mid f(gx) = f(x) \text{ para todo } g \in G,\ x \in X\},$$

al anillo de funciones regulares invariantes. La teoría de invariantes geométricos estudia bajo qué condiciones $A(X)^G$ es una $\mathbb{C}$-álgebra finitamente generada. En general $A(X)^G$ no es finitamente generada. Nagata dió un ejemplo (ver [17], Capítulo 4.3) de una acción donde $A(X)^G$ no es finitamente generada y después demostró que si G es un grupo reductivo actuando linealmente en una variedad afín X, entonces $A(X)^G$ es finitamente generada (ver [21], Teorema 5.56).

Recordemos que existe una equivalencia de categorías entre las $\mathbb{C}$-álgebras finitamente generadas y las variedades afines (ver [25], Corolario 3.18). En el caso X afín, el siguiente teorema es una consecuencia del Teorema de Nagata.

Teorema 1.1.1 ([45], Teorema 3.5)**.** *Si G es un grupo reductivo actuando sobre una variedad afín X, entonces existe una pareja (Y, ϕ), donde Y es una variedad afín y $\phi : X \to Y$ es un morfismo, tal que:*

1. *ϕ es G-invariante.*

2. *ϕ es sobreyectiva.*

3. *Si $U \subset Y$ es un abierto de Zariski, entonces*

$$\phi^* : A(U) \to A(\phi^{-1}(U))^G$$

   es un isomorfismo.

4. *Si $W_1, W_2 \subset X$ son subconjuntos cerrados, invariantes y disjuntos, entonces*

$$\phi(W_1) \cap \phi(W_2) = \emptyset.$$

5. *Si W es un conjunto cerrado invariante de X, entonces $\phi(W)$ es cerrado en Y.*

A la pareja (Y, ϕ) del teorema anterior se le llama un **buen cociente** para la acción de G en X.

Si X es una variedad proyectiva en $\mathbb{P}^n$, el cociente de una acción lineal de G sobre X no necesariamente tiene estructura de variedad proyectiva. Mumford demostró que después de eliminar ciertos puntos de la variedad, llamados inestables, existe un buen cociente. A continuación damos más detalles sobre lo hecho por Mumford.

Sea una acción $G \times X \to X$ de G sobre una variedad algebraica X. Decimos que es **lineal**, o que G **actúa linealmente** sobre X, si existe un homomorfismo de grupos

$$\rho : G \to \mathrm{GL}(n+1) \tag{1.1}$$

tal que la acción de G en X está dada por $(g, x) = \rho(g)(x)$. Definimos una acción de G sobre el anillo de polinomios de $n+1$ variables de la siguiente forma

$$\begin{array}{rcl} G \times \mathbb{C}[x_0, \dots, x_n] & \to & \mathbb{C}[x_0, \dots, x_n] \\ (g, f) & \mapsto & f_g, \end{array}$$

donde $f_g(x_0, \dots, x_n) = f(g^{-1}(x_0, \dots, x_n))$. Decimos que f es un **polinomio invariante** por la acción, si $f = f_g$ para todo $g \in G$.

Definición 1.1.2. Sea un grupo reductivo G actuando linealmente en una variedad proyectiva X y un punto $x \in X$.

1. x es **semiestable** si existe un polinomio invariante homogéneo f no constante tal que $f(x) \neq 0$.
2. x es **estable** si
   a) es semiestable,
   b) la órbita de x restringida a $X_h := \{y \in X | h(y) \neq 0\}$ es cerrada en X_h, con h polinomio homogéneo invariante y
   c) dim(G)=dim($\mathcal{O}(x)$).
3. x es **inestable** si no es semiestable.

Observación 1. Si un punto $x \in X$ es semiestable, entonces todo punto en la órbita de x es también semiestable; ya que para todo f polinomio homogéneo invariante

$$f(gx) = f(x) \text{ para todo } g \in G.$$

Más aún, si un punto $x \in X$ es estable, entonces todo punto en la órbita de x es también estable; ya que

$$\mathcal{O}(x) = \mathcal{O}(gx) \text{ para todo } g \in G.$$

Denotamos por X^{ss} y X^s a los conjuntos de puntos semiestables y estables respectivamente. El teorema fundamental de la teoría de invariantes geométricos es el siguiente.

Teorema 1.1.3 ([45], Teorema 3.14)**.** *Sea un grupo reductivo G actuando linealmente sobre una variedad proyectiva X. Se cumple las siguientes afirmaciones*

1. Existe un buen cociente (Y, ϕ) de X^{ss} por G para una variedad proyectiva Y.

2. Existe un abierto de Zariski $Y^s \subset Y$ tal que

a) $\phi^{-1}(Y^s) = X^s$,

b) (Y^s, ϕ) *es un espacio de órbitas.*

3. *Sean* $x_1, x_2 \in X^{ss}$ *se cumple lo siguiente*

$$\phi(x_1) = \phi(x_2) \text{ si, y sólo si, } \overline{\mathcal{O}(x_1)} \cap \overline{\mathcal{O}(x_2)} \cap X^{ss} \neq \emptyset.$$

4. *Sea* $x \in X^{ss}$ *se cumple lo siguiente*

$$x \in X^s \text{ si, y sólo si, } \dim \mathcal{O}(x) = \dim G \text{ y } \mathcal{O}(x) \text{ es cerrada en } X^{ss}.$$

La parte más interesante del teorema anterior es el hecho de que Y es un variedad proyectiva. Esto nos permite pensar en Y como una compactificación del cociente $X^s//G$. Donde nos estamos refiriendo a una compactificación natural con una interpretación geométrica para los puntos añadidos como órbitas de puntos estrictamente semiestables.

En general, es difícil calcular los polinomios invariantes y decidir cuáles puntos de la variedad son estables y semiestables. Enseguida enunciamos un criterio que evita el cálculo de todos los polinomios invariantes. La idea básica es la de reducir la acción de G a la acción de sus subgrupos a un parámetro.

Definición 1.1.4. Un subgrupo a un parámetro de G es un homomorfismo $\lambda : \mathbb{C}^* \to G$ de grupos algebraicos no trivial.

Sean un grupo reductivo G actuando linealmente en una variedad proyectiva $X \subset \mathbb{P}^n$ y un subgrupo a un parámetro $\lambda : \mathbb{C}^* \to G$ de G. Por la ecuación 1.1, definimos una representación de $\mathbb{C}^*$ en $\mathbb{C}^{n+1}$ de la siguiente forma

$$\begin{aligned} \lambda : \mathbb{C}^* &\to \mathrm{GL}(n+1) \\ t &\mapsto \lambda(t) : \mathbb{C}^{n+1} \to \mathbb{C}^{n+1} \\ & \qquad\qquad v \mapsto \lambda(t)v. \end{aligned}$$

Por abuso de notación, denotamos por λ a la representación.

Proposición 1.1.5. *La representación* $\lambda : \mathbb{C}^* \to GL(n+1)$ *es diagonalizable, es decir, existe una base* $\{v_0, v_1, \ldots, v_n\}$ *de* $\mathbb{C}^{n+1}$ *tal que*

$$\lambda(t)v_i = t^{r_i} v_i \qquad i \in \{0, 1, \ldots, n\},$$

donde $r_i \in \mathbb{Z}$.

Consideremos un punto $x \in X$ y un subgrupo a un parámetro $\lambda : \mathbb{C}^* \to G$ de G. Definimos el **peso de** x **en** v_i como el entero r_i tal que

$$\lambda(t)v_i = t^{r_i} v_i.$$

Sea la base $\{v_0, v_1, \ldots, v_n\}$ que diagonaliza al subgrupo a un parámetro. Dado que la acción de G es lineal, si $\bar{x} = \sum_{i=0}^{n} a_i v_i$, entonces

$$\lambda(t)\bar{x} = \sum_{i=0}^{n} a_i t^{r_i} v_i. \tag{1.2}$$

Consideremos un punto $x \in X$ y un subgrupo a un parámetro λ de G. Definimos

$$\mu(x, \lambda) := \min\{r_i | a_i \neq 0\}.$$

A continuación mencionamos el siguiente lema, cuya demostración es una consecuencia inmediata de la definición de la función μ. Dada una variedad proyectiva $X \subset \mathbb{P}^n$ y un punto $x \in X$, denotamos por $\widetilde{X}$ al cono afín de X y por $\bar{x} \in \tilde{X}$ a un elemento tal que $\bar{x} \in x$.

Lema 1.1.6. *Sean un grupo reductivo G actuando en una variedad proyectiva $X \subset \mathbb{P}^n$ y un subgrupo a un parámetro λ de G. Se cumple las siguientes afirmaciones*

1. $\mu(x, \lambda) < 0$ *si, y sólo si,* $\lim_{t\to 0} \lambda(t)\bar{x}$ *no existe.*
2. $\mu(x, \lambda) > 0$ *si, y sólo si,* $\lim_{t\to 0} \lambda(t)\bar{x} = 0$.
3. $\mu(gx, \lambda) = \mu(x, g^{-1}\lambda g)$, *para todo* $g \in G$.

Demostración.

1. $\mu(x, \lambda) \geq 0$ si, y sólo si, $r_i \geq 0$ para todo i tal que $a_i \neq 0$ si, y sólo si,

$$\lim_{t\to 0} \lambda(t)\bar{x} = \lim_{t\to 0} \sum_{i=0}^{n} a_i t^{r_i} v_i$$

existe. Se concluye la primera parte.

2. $\mu(x, \lambda) > 0$ si, y sólo si, $r_i > 0$ para todo i tal que $a_i \neq 0$ si, y sólo si,

$$\lim_{t\to 0} \lambda(t)\bar{x} = \lim_{t\to 0} \sum_{i=0}^{n} a_i t^{r_i} v_i = 0.$$

3. Supongamos que $\{gv_0, gv_1, \ldots, gv_n\}$ es una base que diagonaliza a λ, es decir, existen $r_i \in \mathbb{Z}$ tal que

$$\lambda(t)gv_i = t^{r_i} gv_i.$$

Por lo tanto

$$\begin{aligned} (g^{-1}\lambda(t)g)(v_i) &= g^{-1}(\lambda(t)gv_i) \\ &= g^{-1}t^{r_i} gv_i \\ &= t^{r_i} v_i. \end{aligned}$$

Esto significa que $\{v_0, v_1, \ldots, v_n\}$ es una base que diagonaliza a $g^{-1}\lambda(t)g$. Entonces $\mu(gx, \lambda) = \mu(x, g^{-1}\lambda(t)g)$.

$\square$

Es claro que si existe un subgrupo a un parámetro λ tal que

$$\lim_{t\to 0} \lambda(t)\bar{x} = 0,$$

entonces x es un punto inestable, esto debido a que el límite pertenece a $\overline{\mathcal{O}(\bar{x})}$. El siguiente teorema conocido como el criterio de Hilbert-Mumford es muy útil para obtener los puntos estables y semiestables de la acción.

Teorema 1.1.7 ([45], Teorema 4.9). *Sean un grupo reductivo G actuando linealmente en una variedad proyectiva X y un punto $x \in X$. Se cumplen las siguientes afirmaciones:*

1. *x es semiestable si, y sólo si, $\mu(x,\lambda) \leq 0$ para todo subgrupo a un parámetro λ de G.*

2. *x es estable si, y sólo si, $\mu(x,\lambda) < 0$ para todo subgrupo a un parámetro λ de G.*

3. *x es inestable si, y sólo si, existe un subgrupo a un parámetro λ de G tal que $\mu(x,\lambda) > 0$.*

La siguiente proposición clasifica los subgrupos a un parámetro de $\mathrm{SL}(n+1)$.

Proposición 1.1.8 ([45], Remark 4.10). *Los subgrupos a un parámetro de* $\mathrm{SL}(n+1)$ *son de la forma*

$$\begin{array}{rcl} \lambda : \mathbb{C}^* & \to & \mathrm{SL}(n+1) \\ t & \mapsto & g \begin{pmatrix} t^{r_0} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & t^{r_1} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & t^{r_n} \end{pmatrix} g^{-1}, \end{array}$$

donde $r_i \in \mathbb{Z}$, $r_0 \geq r_1 \geq \ldots \geq r_n$, $r_0 + \ldots + r_n = 0$ y $g \in SL(n+1)$.

Por el Teorema 1.1.7 y la Proposición 1.1.8, se concluye el siguiente teorema.

Teorema 1.1.9 ([45], Proposición 4.11). *Si $SL(n+1)$ actúa linealmente sobre una variedad proyectiva X. El punto $x \in X$ es estable (resp. semiestable) si, y sólo si, para todo subgrupo a un parámetro λ de la forma*

$$\begin{array}{rcl} \lambda : \mathbb{C}^* & \to & \mathrm{SL}(n+1) \\ t & \mapsto & \begin{pmatrix} t^{r_0} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & t^{r_1} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & t^{r_n} \end{pmatrix}, \end{array}$$

donde $r_i \in \mathbb{Z}$, $r_0 \geq r_1 \geq \ldots \geq r_n$, $r_0 + \ldots + r_n = 0$ y para todo $g \in SL(n+1)$

$$\mu(gx, \lambda) < 0 \quad (\textit{resp.} \leq).$$

1.1.1. Ejemplos de GIT-estabilidad

En esta sección damos ejemplos conocidos de estabilidad para hipersuperficies usando la teoría de invariantes geométricos. Estamos interesados en la estabilidad de Chow para variedades proyectivas (ver Definición 1.2.2), la razón de recordar estos ejemplos es que en la sección 1.3 demostramos que ambos conceptos coinciden.

Consideremos una hipersuperficie $X = V(F) \subset \mathbb{P}^n$ de grado d. X está deteminada por los ceros de un polinomio homogéneo

$$F(Y_0, Y_1, \ldots, Y_n) = \sum a_I Y_0^{d-i_1-\ldots-i_n} Y_1^{i_1} \ldots Y_n^{i_n}$$

de grado d y F es único salvo múltiplos escalares. El conjunto de polinomios de grado d en $n+1$ variables forman un espacio vectorial $H^0(\mathbb{P}^n, \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(d))$. Definimos la acción de $\mathrm{SL}(n+1)$ sobre la $H^0(\mathbb{P}^n, \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(d))$ de la siguiente forma

$$\begin{array}{rcl} \beta : \mathrm{SL}(n+1) \times \mathbb{P}(H^0(\mathbb{P}^n, \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(d))) & \to & \mathbb{P}(H^0(\mathbb{P}^n, \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(d))) \\ (A, F(Y_0, \ldots, Y_n)) & \mapsto & F(A^{-1}(Y_0, \ldots, Y_n)). \end{array}$$

Mediante esta acción definimos los puntos estables y semiestables de la siguiente manera.

Definición 1.1.10. Sea una hipersuperficie $X = V(F) \subset \mathbb{P}^n$ de grado d en $\mathbb{P}^n$. Decimos X es **P-estable** (resp. P-semiestable) si F es $\mathrm{SL}(n+1)$-estable (resp. SL(n+1)-semiestable) en el sentido de teoría de invariantes geométricos.

El siguiente teorema determina los pesos del polinomio con respecto a subgrupos a un parámetro.

Lema 1.1.11. *Sean una hipersuperficie $X = V(F) \subset \mathbb{P}^n$ de grado d definida por*

$$F = \sum a_I Y_0^{d-i_1-\ldots-i_n} Y_1^{i_1} \ldots Y_n^{i_n},$$

y un subgrupo a un parámetro $\lambda : \mathbb{C}^* \to \mathrm{SL}(n+1)$ definido por $\lambda(t) = \mathrm{diag}\{t^{r_0}, \ldots, t^{r_n}\}$. El peso de F en a_I está dado por

$$-dr_0 - i_1(r_1 - r_0) - \cdots - i_n(r_n - r_0).$$

Demostración. La acción está definida por

$$\begin{array}{rcl} (\lambda(t), F) & = & F(\lambda(t)^{-1}(Y_0, \ldots, Y_n)) \\ & = & F(t^{-r_0}Y_0, \ldots, t^{-r_n}Y_n) \\ & = & \sum a_I (t^{-r_0}Y_0)^{d-i_1-\ldots-i_n} (t^{-r_1}Y_1)^{i_1} \ldots (t^{-r_n}Y_n)^{i_n} \\ & = & \sum a_I t^{(d-i_1-\ldots-i_n)(-r_0)-i_1r_1-\ldots-i_nr_n} Y_0^{d-i_1-\ldots-i_n} Y_1^{i_1} \ldots Y_n^{i_n}. \end{array}$$

Entonces los pesos están dados por

$$-dr_0 - i_1(r_1 - r_0) - \cdots - i_n(r_n - r_0),$$

y es lo que queriamos demostrar.

□

Nuestro objetivo es estudiar las condiciones de P-estabilidad de hipersuperficies cuando $n = 2$. Éstas son llamadas **curvas planas**. La curva plana de grado 2 es llamada **cuadrática** y la de grado 3, es conocida como **cúbica**.

El siguiente teorema determina la P-estabilidad para curvas planas cuadráticas.

Teorema 1.1.12 ([38], Sección 1.10)**.** *Sea una curva plana cuadrática* $C \subset \mathbb{P}^2$.

- C *es lisa si, y sólo si,* C *es* P*-semiestable.*

El siguiente teorema determina la P-estabilidad para curvas planas cúbicas lisas.

Teorema 1.1.13 ([45], Proposición 4.15)**.** *Sea una curva plana cúbica* $C \subset \mathbb{P}^2$.

- $C \subset \mathbb{P}^2$ *es* P*-estable si, y sólo si,* $C \subset \mathbb{P}^2$ *es lisa.*

El siguiente teorema determina la P-semiestabilidad para curvas planas cúbicas, la cual depende del tipo de singularidades que tiene la curva. Para esto, repasaremos cuándo $(1 : 0 : 0)$ no es un punto lisa, después esta información se translada a todo punto de la curva para determinar la P-semiestabilidad.

- $(1 : 0 : 0)$ no es un punto lisa si, y sólo si, $a_{00} = a_{10} = a_{01} = 0$.
- $(1 : 0 : 0)$ es un punto triple si, y sólo si, $a_{00} = a_{10} = a_{01} = a_{20} = a_{02} = a_{11} = 0$.
- $(1 : 0 : 0)$ es un punto doble con una sola tangente $z = 0$ si, y sólo si, $a_{00} = a_{10} = a_{01} = a_{20} = a_{11} = 0$, $a_{02} \neq 0$.

Teorema 1.1.14 ([45], Proposición 4.15)**.** *Sea una curva plana cúbica* $C \subset \mathbb{P}^2$*. Se cumple las siguiente afirmaciones*

- $C \subset \mathbb{P}^2$ *es* P*-semiestable si, y sólo si,*
  - C *no tiene punto triples, y*
  - C *no tiene puntos dobles con una sola tangente.*

1.2. Estabilidad de Chow

En esta sección recordamos el concepto de estabilidad de Chow introducida por Mumford (ver [38], Página 53) para variedades proyectivas $X \subset \mathbb{P}^n$. Denotamos por $\mathcal{H}_n$ al conjunto de hiperplanos en $\mathbb{P}^n$ y por $\mathcal{H}_n^k$ el producto de k copias de $\mathcal{H}_n$. Sea una variedad proyectiva $X \subset \mathbb{P}^n$ de dimensión r y de grado d. Definimos

$$Y_X = \{(H_0, \ldots, H_r) \in \mathcal{H}_n^{r+1} | X \cap H_0 \cap \ldots \cap H_r \neq \emptyset\}.$$

Teorema 1.2.1. *([38], Página* 53*) El conjunto* Y_X *es una hipersuperficie en* $\mathcal{H}_n^{r+1}$.

Demostración. Consideramos la variedad de incidencia

$$\Gamma := \{(p, H_0, \ldots, H_r) \in X \times \mathcal{H}_n^{r+1} | \ p \in H_i, \text{ para todo } i\} \subset \mathbb{P}^n \times \mathcal{H}_n^{r+1}.$$

Sea la proyección

$$\begin{array}{rcl} \pi : \mathbb{P}^n \times \mathcal{H}_n^{r+1} & \to & \mathcal{H}_n^{r+1} \\ (p, H_0, \ldots, H_r) & \mapsto & (H_0, \ldots, H_r) \end{array}$$

a los últimos $r+1$ factores. Como $\Gamma \subset \mathbb{P}^n \times \mathcal{H}_n^{r+1}$ es una variedad y $\mathbb{P}^n$ es una variedad completa, tenemos que $\pi(\Gamma) = Y_X$ es una variedad. Vamos a calcular la dimensión de Γ. Consideremos $p \in X$, el conjunto de hiperplanos $H \in \mathcal{H}_n$ tal que $p \in H$ forman otro hiperplano en $\mathcal{H}_n$. Entonces el conjunto

$$\Gamma_p = \{(H_0, \ldots, H_r) \in \mathcal{H}_n^{r+1} |\ p \in H_i \text{ para todo } i\}$$

es una variedad de dimensión $(r+1)(n-1)$. Por lo tanto Γ tiene dimensión

$$r + (r+1)(n-1) = (r+1)n - 1 = \dim(\mathcal{H}_n^{r+1}) - 1.$$

Sea $(H_0, \ldots, H_r) \in Y_X$ tal que r hiperplanos están en posición general, es decir, $X \cap H_{i_1} \cap \ldots \cap H_{i_r}$ es un conjunto finito. Entonces la dimensión de la fibra de π en $(H_0, \ldots, H_r)$ es cero. Por lo tanto,

$$\begin{array}{rcl} \dim(\mathcal{H}_n^{r+1}) - 1 & = & \dim(\Gamma) \\ & = & \dim(Y_X) + \dim(\pi^{-1}(H_0, \ldots, H_r)) \\ & = & \dim(Y_X). \end{array}$$

Como $Y_X \subset \mathcal{H}_n^{r+1}$ es una variedad proyectiva de codimensión 1, entonces existe un polinomio F_X homogéneo que define a Y_X. $\square$

A la hipersuperficie Y_X se le asocia un polinomio homogéneo multigraduado $F_X \in \mathbb{C}[X_0; X_1; \ldots; X_r]$ conocido como, la **forma de Chow** de X, donde $X_i = (X_{i,0}, \ldots, X_{i,n})$ denotan $n+1$ variables. Consideremos la matriz P definida por

$$P = \begin{pmatrix} X_{0,0} & X_{0,1} & \ldots & X_{0,n} \\ X_{1,0} & X_{1,1} & \ldots & X_{1,n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ X_{r,0} & X_{r,1} & \ldots & X_{r,n} \end{pmatrix}.$$

Para $i_0 < i_1 < \ldots < i_r$ con $i_l \in \{0, 1, \ldots, n\}$. Definimos los polinomios $P_{i_0, i_1, \ldots, i_r}$ como el determinante del menor de las filas de P con sus columnas $P_{i_0}, \ldots, P_{i_r}$. Sea $W \subset \mathbb{C}[X_0; X_1; \ldots; X_r]$ el subanillo generado por $P_{i_0, \ldots, i_r}$. Como $P_{i_0, i_1, \ldots, i_r}$ son polinomios homogéneos entonces W es un anillo graduado y $F_X \in W_d$, donde d es el grado de X. La forma de Chow F_X de X está determinada de manera única salvo múltiplos escalares. Definimos la acción de $\mathrm{SL}(n+1)$ sobre $\mathbb{P}(W_d)$ de la siguiente forma:

$$\begin{array}{rcl} \alpha : \mathrm{SL}(n+1) \times \mathbb{P}(W_d) & \to & \mathbb{P}(W_d) \\ (A, F(X_0; \ldots; X_r)) & \mapsto & F(A^{-1}X_0; \ldots; A^{-1}X_r). \end{array}$$

Dada la acción α, la teoría de invariantes geométricos determina puntos estables y semiestables (ver definición 1.1.2), la cual motiva la siguiente definición.

Definición 1.2.2. Decimos que una variedad proyectiva $X \subset \mathbb{P}^n$ es **Chow estable** (resp. **Chow semiestable**) si su forma de Chow F_X es $\mathrm{SL}(n+1)$-estable (resp. SL(n+1)-semiestable) en el sentido de la teoría de invariantes geométricos.

1.2.1. Criterio de Hilbert-Mumford para la estabilidad de Chow

Consideremos un polinomio $f(a)$. Decimos que f es **racional** si $f(a) \in \mathbb{Z}$ para todo número positivo $a \gg 0$. Supongamos que f está representado por un polinomio racional de grado r. Definimos **el coeficiente principal normalizado de** f, denotado por c.p.n.(f), como el entero e tal que

$$f(n) = e\frac{n^r}{r!} + a_{r-1}n^{r-1} + \ldots + a_0.$$

Sean una variedad X de dimensión r, un haz lineal L sobre X y una gavilla $\mathcal{I} \subset \mathcal{O}_X$ de ideales tal que $Z := \mathrm{Supp}(\mathcal{O}_X/\mathcal{I})$ es propio sobre $\mathbb{C}$. Por ([38], Proposición 2.1) existe un polinomio $p(n,m)$ de grado menor o igual a r tal que

$$\mathcal{X}(X, L^n/\mathcal{I}^m L^n) = p(n,m) \qquad \text{para } m \gg 0,$$

donde $\mathcal{X}(X,L)$ es la característica de Euler de L. Esto es,

$$\mathcal{X}(X,L) := \sum_{i=0}^{r}(-1)^i \dim H^i(X,L).$$

La **multiplicidad de $\mathcal{I}$ medida vía** L, denotada por $e_L(\mathcal{I})$, es el coeficiente principal normalizado c.p.n. $(\mathcal{X}(L^n/\mathcal{I}^n L^n))$.

A continuación se dará una interpretación geométrica de la multiplicidad (ver [38], página).

Sean una curva $X \subset \mathbb{P}^n$ irreducible lisa proyectiva y el haz $L = \mathcal{O}_X(1)$. Dado un subespacio lineal $\Gamma \subset H^0(\mathbb{P}^n, \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(1))$ denotamos por L_Γ el subespacio lineal de $\mathbb{P}^n$

$$L_\Gamma := \{x \in \mathbb{P}^n | s(x) = 0 \text{ para todo } s \in \Gamma\}.$$

Consideremos la gavilla $\mathcal{F}_\Gamma$ de ideales generada por las secciones $s \in \Gamma$ y $Z = \mathrm{Supp}(\mathcal{O}_X/\mathcal{F}_\Gamma) = X \cap L_\Gamma$ es el conjunto de puntos base de Γ. Sea

$$P_\Gamma : (\mathbb{P}^n - L_\Gamma) \to \mathbb{P}(\Gamma) = \mathbb{P}^m$$

la proyección canónica. Existe un morfismo birracional

$$\pi : B_{\mathcal{F}}(X) \to X,$$

donde $B_{\mathcal{F}}(X)$ es la explosión de X a lo largo de $\mathcal{F}_\Gamma$. Más aún, existe un único morfismo

$$q : B_{\mathcal{F}}(X) \to \mathbb{P}^m, \tag{1.3}$$

haciendo el siguiente diagrama conmutativo

$$\begin{tikzcd} B_{\mathcal{F}}(X) \arrow[d, "\pi"'] \arrow[dr, "q"] & \\ X \arrow[r, "P_\Gamma"'] & \mathbb{P}^m, \end{tikzcd} \tag{1.4}$$

tal que

$$q^*(\mathcal{O}_{\mathbb{P}^m}(1)) = (\pi^* L)(-E), \tag{1.5}$$

donde E es el divisor excepcional. Definimos **la imagen de X bajo la proyección** P_Γ, denotada por $P_\Gamma(X)$, como el ciclo $[q(B_{\mathcal{F}}(X))]$, es decir,

$$P_\Gamma(X) = \begin{cases} deg(q)\; q(B_{\mathcal{F}}(X)) & \text{si } \dim q(B_{\mathcal{F}}(X)) = \dim X \\ 0 & \text{de otra forma} \end{cases}$$

Proposición 1.2.3. *([38],Proposición 2.5) Sean una curva $X \subset \mathbb{P}^n$ lisa irreducible proyectiva, el haz $L = \mathcal{O}_X(1)$ y un subespacio lineal $\Gamma \subset H^0(\mathbb{P}^n, \mathcal{O}_X(1))$. Entonces*

$$e_L(\mathcal{F}_\Gamma) = \deg(X) - \deg P_\Gamma(X).$$

Demostración. Para $n \gg 0$,

$$\begin{aligned} \mathcal{X}(\mathcal{O}_X(n)) &= h^0(\mathcal{O}_X(n)) \\ &= \deg(\mathcal{O}_X(n)) + 1 - g \\ &= n \cdot \deg(\mathcal{O}_X(1)) + 1 - g \\ &= n \cdot \deg(X) + 1 - g. \end{aligned}$$

Entonces

$$\deg(X) = \text{c.p.n. } \mathcal{X}(\mathcal{O}_X(n)).$$

Consideremos la explosión $B_{\mathcal{F}}(X)$ de X a lo largo de $\mathcal{F}$ y el morfismo $q : B_{\mathcal{F}}(X) \to X$ (ver diagrama 1.4).

$$\begin{aligned} \deg P_\Gamma(X) &= \deg\,(q) \cdot \deg q(B) && \text{Por definición} \\ &= \deg q^*(\mathcal{O}_{\mathbb{P}^m}(1)) && \text{Por ecuación 2.9} \\ &= \deg \pi^*(\mathcal{O}_X(1))(-E) && \text{Por 1.5} \\ &= \deg \pi^*(\mathcal{F} \cdot \mathcal{O}_X(1)) && \\ &= \deg\,(\pi) \cdot \deg(\mathcal{F} \cdot \mathcal{O}_X(1)) && \text{Por ecuación 2.9} \\ &= \deg\,(\mathcal{F} \cdot \mathcal{O}_X(1)) && \pi \text{ es birracional} \\ &= \deg(\mathcal{F}) && \text{Por definición} \\ &= \text{c.p.n. } \mathcal{X}(\mathcal{F}^n \mathcal{O}_X(n)). && \end{aligned}$$

Utilizando la definición de $e_L(\mathcal{F}_\Gamma)$ tenemos que

$$\begin{aligned} e_L(\mathcal{F}_\Gamma) &= \text{c.p.n. } \mathcal{X}(\mathcal{O}(n)/\mathcal{F}^n \mathcal{O}_X(n)) \\ &= \text{c.p.n. } \mathcal{X}(\mathcal{O}_X(n)) - \text{c.p.n. } \mathcal{X}(\mathcal{F}^n \mathcal{O}_X(n)) \\ &= \deg(X) - \deg P_\Gamma(X) \end{aligned}$$

□

Sea una variedad proyectiva $X \subset \mathbb{P}^n$ de dimensión r sobre $\mathbb{C}$. Fijamos coordenadas $X_0, X_1, \ldots, X_n$ de $\mathbb{P}^n$ y consideramos la forma de Chow F_X de X. Sea

$$\begin{aligned} \lambda : \mathbb{C}^* &\to \mathrm{GL}(n+1) & (1.6)\\ t &\mapsto \begin{pmatrix} t^{\rho_0} & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & t^{\rho_1} & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 0 & t^{\rho_3} & \ldots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & t^{\rho_n} \end{pmatrix} \cdot t^{-k}, & (1.7) \end{aligned}$$

donde $\rho_0 \geq \rho_1 \geq \ldots \geq \rho_n = 0$, $\rho_i \in \mathbb{Z}$ y k es escogido de tal forma que λ es un subgrupo a un parámetro de $\mathrm{SL}(n+1)$. Lo cual es equivalente a tener $k = \sum_{i=0}^{n} \frac{\rho_i}{n+1}$. Definimos la subgavilla de ideales $\mathcal{I} \subset \mathcal{O}_{X \times \mathbb{A}^1}$ por

$$\mathcal{I} \cdot [\mathcal{O}_X(1) \otimes \mathcal{O}_{\mathbb{A}^1}] := \text{ subgavilla generada por } \{t^{\rho_i} X_i,\ i = 0, 1. \ldots, n\}.$$

A continuación damos el criterio de Hilbert-Mumford para determinar la estabilidad de Chow de una variedad proyectiva.

Teorema 1.2.4 (Criterio de Hilbert-Mumford). *([38], Proposición 2.9) Bajo las hipótesis de arriba. La variedad proyectiva $X \subset \mathbb{P}^n$ de dimensión r es Chow estable (resp. Chow semiestable) si, y sólo si,*

$$e_{\mathcal{O}_X(1) \otimes \mathcal{O}_{\mathbb{A}^1}}(\mathcal{I}) < \frac{r+1}{n+1} \deg(X) \sum_{i=0}^{n} \rho_i \quad (\textit{resp. } \leq),$$

para todo subgrupo a un párametro $\lambda : \mathbb{C}^* \to SL(n+1)$.

En general es difícil utilizar el criterio de Hilbert-Mumford para decidir cuando una variedad es Chow estable. Para curvas se tiene la siguiente cota.

Proposición 1.2.5. *([38], Proposición 4.10 y Corolario 4.11) Sea una curva $C \subset \mathbb{P}^n$ con $L = \mathcal{O}_C$ y la gavilla de ideales $\mathcal{I} = (t^{\rho_i} X_i) \subset \mathcal{O}_{C \times \mathbb{A}^1}$ correspondientes a $\rho_0 \geq \rho_1 \geq \ldots \geq \rho_n = 0$. Si $\mathcal{I}_k = \{a \in \mathcal{O}_C |\ \ t^{\rho_k} a \in \mathcal{I}\}$, entonces $\mathcal{I}_k \subset (X_k, \ldots, X_n)$ y $\mathcal{I}_0 \subset \mathcal{I}_1 \subset \ldots \subset \mathcal{I}_n = \mathcal{O}_C$. Para cada sucesión de enteros positivos $0 = r_0 < r_1 < \cdots < r_l = n$, tenemos que*

$$e_{\mathcal{O}_X(1) \otimes \mathcal{O}_{\mathbb{A}^1}}(\mathcal{I}) \leq \sum_{k=0}^{l-1} (\rho_{r_{k+1}} - \rho_{r_k})(e_L(\mathcal{I}_{r_k}) + e_L(\mathcal{I}_{r_{k+1}})).$$

1.2.2. Ejemplos de estabilidad de Chow

En esta sección demostramos que los puntos $p \in \mathbb{P}^n$, variedades lineales y curvas degeneradas son Chow inestables. Tal vez para los expertos es conocida la estabilidad de Chow de puntos, variedades lineales y curvas degeneradas, pero en la literatura no encontramos ninguna demostración por lo que las incluiremos. Primero demostramos que un punto es Chow inestable, para esto, empezamos con la siguiente proposición.

Proposición 1.2.6. *Sea un punto $p = (p_0 : p_1 : \ldots : p_n) \in \mathbb{P}^n$. Si $p_0 = 0$, entonces p es Chow inestable.*

Demostración. La forma de Chow de p está dada por

$$F_p(X_0, \ldots, X_n) = p_0 X_0 + \ldots + p_n X_n.$$

Consideremos el subgrupo a un parámetro $\lambda : \mathbb{C}^* \to \mathrm{SL}(n+1)$ definido por $\lambda(t) = \mathrm{diag}\{t^n, t^{-1}, \ldots, t^{-1}\}$. Vamos a calcular los pesos de F_p con respecto a λ. La acción está definida por

$$\begin{aligned}(\lambda(t), F_p(X_0, \ldots, X_n)) &= F_p(\lambda(t)^{-1}(X_0, \ldots, X_n)) \\ &= F_p(t^{-n}X_0, tX_1, \ldots, tX_n) \\ &= p_0 t^{-n} + p_1 t X_1 + \ldots + p_n t X_n,\end{aligned}$$

por lo tanto los pesos en p_i están dados por $-n$ si $i = 0$, y 1 si $i \in \{1, \ldots, n\}$. Si $p_0 = 0$, $\mu(F_p, \lambda) = \min\{\text{pesos} \mid p_i \neq 0\} = 1 > 0$. Por Teorema 1.1.7 concluimos que el punto es Chow inestable.

$\square$

El siguiente lema demuestra que las formas de Chow de puntos son transitivas, es decir, para todo $p, q \in \mathbb{P}^n$ existe $A \in \mathrm{SL}(n+1)$ tal que

$$(A, F_p) = F_q.$$

Lema 1.2.7. *Sea un punto $p = (p_0 : p_1 : \ldots : p_n) \in \mathbb{P}^n$. Si $p_0 \neq 0$, entonces existe una matriz $B \in \mathrm{SL}(n+1)$ tal que $(A, F_p) = F_q$, donde $q = (q_0 : q_1 : \ldots : q_n) \in \mathbb{P}^n$ con $q_0 = 0$.*

Demostración. Si $n = 1$, consideramos la matriz

$$B = \begin{pmatrix} 0 & -\frac{1}{p_0} \\ p_0 & p_1 \end{pmatrix} \in \mathrm{SL}(2).$$

La acción está dada por

$$\begin{aligned}(B, F_p(X_0, X_1)) &= F_p(B^{-1}(X_0, X_1)) \\ &= F_p(p_1 X_0 + \frac{1}{p_0}, -p_0 X_0) \\ &= p_0(p_1 X_0 + \frac{1}{p_0} X_1) + p_1(-p_0 X_0) \\ &= X_1 \\ &= F_q,\end{aligned}$$

donde $q = (0 : 1)$. Si $n \geq 2$, sea

$$B = \begin{pmatrix} 0 & -\frac{1}{p_0} & 0 \\ p_0 & p_1 & 0 \\ 0 & 0 & I_{n-1} \end{pmatrix} \in \mathrm{SL}(n+1),$$

donde I_{n-1} es la matriz identidad. La acción está dada por

$$\begin{aligned}
(B, F_p(X_0,\ldots,X_n)) &= F_p(B^{-1}(X_0,\ldots,X_n)) \\
&= F_p(p_1X_0 + \frac{1}{p_0}X_1, -p_0X_0, X_2,\ldots,X_n) \\
&= p_0p_1X_0 + X_1 - p_1p_0X_0 + p_2X_2 + \ldots + p_nX_n \\
&= X_1 + p_2X_2 + \ldots + p_nX_n \\
&= F_q(X_0, X_1, \ldots, X_n),
\end{aligned}$$

donde $q = (0:1:p_2:\ldots:p_n)$.

□

Teorema 1.2.8. *Todo punto $p \in \mathbb{P}^n$ es Chow inestable.*

Demostración. Si $p_0 = 0$, entonces por la Proposición 1.2.6 el punto es Chow inestable. Si $p_0 \neq 0$, por el Lema 1.2.7, la forma de Chow de p está en la misma órbita que la forma de Chow del punto $(0:1:p_2:\ldots:p_n)$. Por la observación 1, el punto es Chow inestable.

□

La siguiente variedad de la que estudiaremos su estabilidad de Chow es el hiperplano en $\mathbb{P}^2$. Para esto, empezaremos con la siguiente proposición.

Proposición 1.2.9. *Sea un hiperplano $Z = V(a_0Z_0 + a_1Z_1 + a_2Z_2) \subset \mathbb{P}^2$. Si $a_2 = 0$, entonces $Z \subset \mathbb{P}^n$ es Chow inestable.*

Demostración. La forma de Chow de Z está dada por

$$\begin{aligned}
F_Z(X,Y) &= \det\begin{pmatrix} a_0 & a_1 & a_2 \\ X_0 & X_1 & X_2 \\ Y_0 & Y_1 & Y_2 \end{pmatrix} \\
&= a_0(X_1Y_2 - X_2Y_1) + a_1(X_2Y_0 - X_0Y_2) + a_2(X_0Y_1 - X_1Y_0).
\end{aligned}$$

Consideremos el subgrupo a un parámetro $\lambda : \mathbb{C}^* \to \mathrm{SL}(3)$ definido por $\lambda(t) = \mathrm{diag}\{t^3, t^1, t^{-4}\}$. Vamos a calcular los pesos de F_Z con respecto a λ. La acción está definida por

$$\begin{aligned}
(\lambda(t), F_Z(X;Y)) &= F_Z(\lambda(t)^{-1}X; \lambda(t)^{-1}Y) \\
&= F_Z(t^{-3}X_0, t^{-1}X_1, t^4X_2; t^{-3}Y_0, t^{-1}Y_1, t^4Y_2) \\
&= a_0t^3[X_1Y_2 - X_2Y_1] + a_1t[X_2Y_0 - X_0Y_2] + a_2t^{-4}[X_0Y_1 - X_1Y_0],
\end{aligned}$$

por lo tanto los pesos de F_Z con respecto a λ son $3, 1$ y -4. Si $a_2 = 0$, entonces $\mu(F_Z, \lambda) = \min\{3, 1\} = 1 > 0$, por el Teorema 1.1.7 el hiperplano es Chow inestable.

□

El siguiente lema demuestra que las formas de Chow de hiperplanos son transitivas, es decir, para todo $Z_1, Z_2 \subset \mathbb{P}^2$ hiperplanos existe $A \in \mathrm{SL}(n+1)$ tal que

$$(A, F_{Z_1}) = F_{Z_2}.$$

Lema 1.2.10. *Sea un hiperplano $Z = V(a_0Z_0 + a_1Z_1 + a_2Z_2) \subset \mathbb{P}^2$. Si $a_2 \neq 0$, entonces existe una matriz $A \in SL(3)$ tal que $(A, F_Z) = F_{Z'}$, donde $Z' = V(a_0Z_0 - Z_1)$.*

Demostración. Consideremos la matriz

$$A \ = \ \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{a_2} \\ 0 & a_2 & -a_1 \end{pmatrix} \in \mathrm{SL}(3).$$

La acción está determinada por

$$\begin{aligned} (A, F_Z) &= F_Z(A^{-1}X, A^{-1}Y) \\ &= F(X_0, -a_1X_1 + \frac{1}{a_2}X_2, a_2X_1, Y_0, -a_1Y_1 + \frac{1}{a_2}Y_2, a_2Y_1) \\ &= a_0(X_1Y_2 - X_2Y_1) + (X_0Y_2 - X_2Y_0) \\ &= F_{Z'}, \end{aligned}$$

donde $F_{Z'}$ es la forma de Chow del hiperplano $Z' = V(a_0Z_0 - Z_1) \subset \mathbb{P}^2$.

□

Teorema 1.2.11. *Todo hiperplano en $\mathbb{P}^2$ es Chow inestable.*

Demostración. Sea un hiperplano $Z = V(a_0Z_0 + a_1Z_1 + a_2Z_2) \subset \mathbb{P}^2$. Si $a_2 = 0$, por la Proposición 1.2.9 Z es Chow inestable. Si $a_2 \neq 0$, por el Lema 1.2.10 la forma de Chow $F_{Z'}$ está en la misma órbita que el hiperplano dado por $Z^{'} = V(a_0Z_0 - Z_1)$. Por la observación 1 el hiperplano es Chow inestable.

□

El siguiente teorema determina la estabilidad de Chow de una variedad lineal.

Teorema 1.2.12. *Toda variedad lineal $X \subset \mathbb{P}^n$ de dimensión k es Chow inestable.*

Demostración. Haciendo cambio de coordenadas podemos suponer que X está determinada por $V(F_1, \ldots, F_{n-k})$, donde $F_i = Z_{k+i}$ para $i = 1, \ldots, n-k$. La forma de Chow de X está dada por

$$F_X = \det \begin{pmatrix} A & B \\ 0 & I_{n-k} \end{pmatrix},$$

donde

$$A = \begin{pmatrix} X_{0,0} & X_{0,1} & \ldots & X_{0,k} \\ X_{1,0} & X_{1,1} & \ldots & X_{1,k} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ X_{k,0} & X_{k,1} & \ldots & X_{k,k} \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} X_{0,k+1} & X_{0,k+2} & \ldots & X_{0,n} \\ X_{1,k+1} & X_{1,k+2} & \ldots & X_{1,n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ X_{k,k+1} & X_{k,k+2} & \ldots & X_{k,n} \end{pmatrix}$$

y I_{n-k} es la matriz identidad de $n-k$. Entonces $F_X = P_{0,1,2,\ldots,k}$. Consideramos el subgrupo a un parámetro $\lambda : \mathbb{C}^* \to \mathrm{SL}(n+1)$ definido por $\lambda(t) = \mathrm{diag}\{t^{-1}, \ldots, t^{-1}, t^n\}$. En $P_{0,1,2,\ldots,k}$ las variables $X_{i,j}$ no aparecen para $j = k+1, \ldots, n$. Entonces

$$\begin{aligned} (\lambda(t), F_X) &= F_X(\lambda(t)^{-1}X_0; \ldots; \lambda(t)^{-1}X_k) \\ &= t^{k+1}P_{0,1,2,\ldots,k}, \end{aligned}$$

tenemos que $\mu(F_X, \lambda) = (k+1) > 0$. Por el Teorema 1.1.7 un subespacio lineal en $\mathbb{P}^n$ es Chow inestable.

$\square$

Decimos que una curva $C \subset \mathbb{P}^n$ es **degenerada** si existe un hiperplano H tal que $C \subset H$. El siguiente teorema demuestra la existencia de curvas lisas Chow inestables.

Teorema 1.2.13. *Si $C \subset \mathbb{P}^n$ es una curva proyectiva degenerada, entonces C es Chow inestable.*

Demostración. Sean las coordenadas $X_0, X_1, \ldots, X_n$ de $\mathbb{P}^n$. Haciendo un cambio de coordenadas supongamos que $C \subset V(X_n)$. Consideremos la forma de Chow F_C de C entonces $F_C \in \mathbb{C}[Y_0, Y_1]$, donde $Y_i = (Y_{i,0}, \ldots, Y_{i,n})$ para $i = 0, 1$. Sea la matriz P definida por

$$P \quad = \quad \begin{pmatrix} Y_{0,0} & Y_{0,1} & \ldots & Y_{0,n} \\ Y_{1,0} & Y_{1,1} & \ldots & Y_{1,n} \end{pmatrix}.$$

Denotamos por P_{ij} el menor obtenido de tomar la i-ésima y la j-ésima columna. Entonces $F_C \in \mathbb{C}[P_{ij}]$ con $i < j$ y $j \neq n$, es decir, las variables $Y_{i,n}$ no aparece en F_C para $i = 0, 1$; ya que $C \subset V(X_n)$. Consideremos el subgrupo a un parámetro $\lambda : \mathbb{C}^* \to \mathrm{SL}(n+1)$ definido por $\lambda(t) = \mathrm{diag}\{t^{-1}, \ldots, t^{-1}, t^n\}$. Los pesos de F_C con respecto a λ son positivos. Por lo tanto $\mu(F_C, \lambda) > 0$ y por el Teorema 1.1.7, $C \subset \mathbb{P}^n$ es Chow inestable.

$\square$

1.3. Estabilidad de Chow para hipersuperficies

En esta sección estudiamos la estabilidad de Chow cuando $X = V(F) \subset \mathbb{P}^n$ es una hipersuperficie de grado d. Si $d = 1$, entonces X es un hiperplano, por el Teorema 1.2.12 es Chow inestable. Entonces supongamos que $d \geq 2$ y que X está determinada por un polinomio homogéneo

$$F(Y_0, \ldots, Y_n) = \sum a_I Y_0^{d-i_1-\ldots-i_n} Y_1^{i_1} \ldots Y_n^{i_n}.$$

de grado d. Dado $I = (i_0, i_1, \ldots, i_n)$, denotamos por $\sum I = \sum_{j=0}^n i_j$ y por $\tilde{I} = \sum_{j=0}^n (-1)^j j \cdot i_j$. Sea la matriz P dada por

$$P = \begin{pmatrix} X_{0,0} & X_{0,1} & \ldots & X_{0,n} \\ X_{1,0} & X_{1,1} & \ldots & X_{1,n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ X_{n-1,0} & X_{n-1,1} & \ldots & X_{n-1,n} \end{pmatrix}.$$

Denotamos por P_j el determinante del menor obtenido de eliminar la $(j+1)$-ésima columna. La forma de Chow de X está determinada por

$$\begin{aligned} F_X(X_0; X_1; \ldots; X_{n-1}) &= F(P_0, -P_1, \ldots, (-1)^n P_n) \\ &= \sum a_I P_0^{d-i_1-\ldots-i_n} (-P_1)^{i_1} \ldots ((-1)^n P_n)^{i_n} \\ &= \sum (-1)^{\tilde{I}} a_I P_0^{d-i_1-\ldots-i_n} P_1^{i_1} \ldots P_n^{i_n}. \end{aligned}$$

Esto demuestra que los coeficientes a_I diferentes de 0 en F son los coeficientes de F_X multiplicados por números complejos diferentes de cero. A continuación damos un ejemplo explícito de como calcular la forma de Chow para una hipersuperficie en $\mathbb{P}^2$.

Ejemplo 1.3.1. Sea $X = V(F) \subset \mathbb{P}^2$, donde $F = F(X, Y, Z) = a_1X + a_2Y + a_3Z$. Utilizando la notación de arriba, P es la matriz determinada por

$$P = \begin{pmatrix} X_{0,0} & X_{0,1} & X_{0,2} \\ X_{1,0} & X_{1,1} & X_{1,2} \end{pmatrix}.$$

Por lo tanto, $P_0 = X_{0,1}X_{1,1} - X_{0,2}X_{1,0}$, $P_1 = X_{0,0}X_{1,2} - X_{0,2}X_{1,0}$ y $P_2 = X_{0,0}X_{1,1} - X_{0,1}X_{1,0}$. La forma de Chow de X está determinada por

$$\begin{aligned} F_X(X_0; X_1) &= F(P_0, -P_1, P_2) \\ &= a_0P_0 + a_1(-P_1) + a_2P_2. \end{aligned}$$

Para calcular los pesos de la forma de Chow con respecto a subgrupos a un parámetro tenemos el siguiente teorema.

Lema 1.3.2. *Sean una hipersuperficie $X = V(F) \subset \mathbb{P}^n$ de grado d definida por*

$$F = \sum a_I Y_0^{d-i_1-\ldots-i_n} Y_1^{i_1} \ldots Y_n^{i_n},$$

y un subgrupo a un parámetro $\lambda : \mathbb{C}^* \to \mathrm{SL}(n+1)$ definido por $\lambda(t) = \mathrm{diag}\{t^{r_0}, \ldots, t^{r_n}\}$. El peso de la forma de Chow F_X de X en a_I es

$$dr_0 + i_1(r_1 - r_0) + \ldots + i_n(r_n - r_0).$$

Demostración. Consideremos un subgrupo a un parámetro $\lambda : \mathbb{C}^* \to \mathrm{SL}(n+1)$ definido por $\lambda(t) = \mathrm{diag}\{t^{r_0}, \ldots, t^{r_n}\}$, donde $r_i \in \mathbb{Z}$ y $r_0 + r_1 + \ldots + r_n = 0$. Primero vamos a calcular los pesos de P_j con respecto a λ; ya que estos nos ayudarán a calcular los pesos de F_X. La acción está dada por

$$\begin{aligned} (\lambda(t), P_j) &= P_j(\lambda(t)^{-1}X_0; \ldots; \lambda(t)^{-1}X_{n-1}) \\ &= P_j(t^{-r_0}X_{0,0} \ldots, t^{-r_n}X_{0,n}; \ldots; t^{-r_0}X_{n-1,0}, \ldots, t^{-r_n}X_{n-1,n}). \end{aligned}$$

Recordemos que el polinomio P_j se obtiene de calcular el determinante del menor eliminando la $(j+1)$-ésima columna, entonces las variables $X_{i,j}$ no aparecen en P_j para $i = 0, 1, \ldots, n$.

$$\begin{aligned} P_j(t^{-r_0}X_{0,0}, \ldots, t^{-r_n}X_{0,n}; \quad \ldots \quad &; t^{-r_0}X_{n-1,0}, \ldots, t^{-r_n}X_{n-1,n}) \\ &= t^{-r_0-r_1-\ldots-r_{j-1}-r_{j+1}-\ldots-r_n} P_j(X_0, \ldots, X_{n-1}) \\ &= t^{r_j} P_j(X_0, \ldots, X_{n-1}). \end{aligned}$$

El peso de P_j es r_j. Ahora vamos a calcular los pesos de F_X:

$$
\begin{aligned}
(\lambda(t), F_X) &= (\lambda(t), \sum (-1)^{\tilde{I}} a_I P_0^{d-i_1-\ldots-i_n} P_1^{i_1} \ldots P_n^{i_n}) \\
&= \sum (-1)^{\tilde{I}} a_I (\lambda(t), P_0)^{d-i_1-\ldots-i_n} (\lambda(t), P_1)^{i_1} \ldots (\lambda(t), P_n)^{i_n} \\
&= \sum (-1)^{\tilde{I}} a_I (t^{r_0} P_0)^{d-i_1-\ldots-i_n} (t^{r_1} P_1)^{i_1} \ldots (t^{r_n} P_n)^{i_n} \\
&= \sum (-1)^{\tilde{I}} a_I t^{(d-i_1-\ldots-i_n)r_0+i_1r_1+\ldots i_nr_n} P_0^{d-i_1-\ldots-i_n} P_1^{i_1} \ldots P_n^{i_n},
\end{aligned}
$$

Por lo tanto el peso de F_X en el coeficiente a_I es

$$dr_0 + i_1(r_1 - r_0) + \ldots + i_n(r_n - r_0).$$

$\square$

La estabilidad de Chow para hipersuperficies no lisas de grado 2 está determinada por el siguiente teorema.

Teorema 1.3.3. *Sea una hipersuperficie $X = V(F) \subset \mathbb{P}^n$ de grado 2. Si X no es lisa, entonces X es Chow inestable.*

Demostración. Consideremos el polinomio $F = \sum a_I Y_0^{2-i_1-\ldots-i_n} Y_1^{i_1} \ldots Y_n^{i_n}$ que define la hipersuperficie. Haciendo un cambio de coordenadas podemos suponer que $(1 : 0 \ldots : 0) \in F$ y no es lisa en este punto. Esto implica que $a_I = 0$ para todo I tal que $\sum I$ es igual a 0 ó 1. Sea un subgrupo a un parámetro $\lambda : \mathbb{C} \to \mathrm{SL}(n+1)$ definido por $\lambda(t) = \mathrm{diag}\{t^{r_0}, \ldots, t^{r_n}\}$ tal que $r_i \in \mathbb{N}$ para $i = 1, \ldots, n$. Analizamos los pesos definidos en a_I tal que $\sum a_i = 2$. Supongamos que $i_{s_1} = i_{s_2} = 1$ para $s_1 \geq s_2$ con $s_j \in \{1, \ldots, n\}$. Por el Lema 1.3.2, el peso de F_X en a_I es

$$2r_0 + (r_{s_1} - r_0) + (r_{s_2} - r_0) = r_{s_1} + r_{s_2},$$

entonces $\mu(F_X, \lambda) = \min\{\text{pesos} \,|a_I \neq 0\} > 0$. Por el Teorema 1.1.7, $X = V(F) \subset \mathbb{P}^n$ es Chow inestable.

$\square$

El siguiente teorema clasifica las curvas planas Chow estables de grado 2.

Teorema 1.3.4. *Sea una curva plana $X = V(F) \subset \mathbb{P}^2$ de grado 2.*

- *X lisa si, y sólo si, X es Chow semiestable.*

Demostración.
$\Leftarrow$) Se sigue del Teorema. 1.3.3.

$\Rightarrow$) Consideramos el polinomio $F = \sum a_I Y_0^{2-i-j} Y_1^i Y_2^j$ que define la curva plana. Haciendo cambio de coordenadas podemos suponer que $(1 : 0 : 0) \in F$ y su única tangente en este punto está dada por $Y_2 = 0$. Esto implica que $a_{00} = a_{10} = 0$ y $a_{01} \neq 0$. Consideremos un subgrupo a un parámetro $\lambda : \mathbb{C}^* \to \mathrm{SL}(3)$ definido por $\lambda(t) = \mathrm{diag}\{t^{r_0}, t^{r_1}, t^{r_2}\}$, donde $r_i \in \mathbb{Z}$ y $r_0 + r_1 + r_2 = 0$. Vamos a demostrar que $\mu(F_X, \lambda) \leq 0$. Por el Lema 1.3.2, el peso de F_X en a_{01} es

$$2r_0 + (r_2 - r_0) = r_0 + r_2 = -r_1.$$

Si $r_1 \geq 0$, entonces $\mu(F_X, \lambda) \leq 0$ y es lo que queremos demostrar. Supongamos que $r_1 < 0$. Si $a_{20} = 0$, podemos escribir a F como

$$\begin{aligned} F(X,Y,Z) &= a_{01}XZ + a_{11}YZ + a_{02}Z^2 \\ &= Z(a_{01}X + a_{11}Y + a_{02}Z), \end{aligned}$$

lo anterior implica que F no es lisa y lo cual es una contradicción. Por lo tanto $a_{20} \neq 0$, el peso de F_X en a_{20} es

$$2r_0 + 2(r_1 - r_0) = 2r_1,$$

pero $r_1 < 0$ lo cual implica que $\mu(F_X, \lambda) < 0$. Por lo tanto X es Chow semiestable.

□

El siguiente teorema determina la estabilidad de Chow para curvas planas lisas de grado 3.

Teorema 1.3.5. *Sea una curva $X = V(F) \subset \mathbb{P}^2$ de grado* 3.

- *Si X es lisa, entonces X es Chow estable.*

Demostración. Consideremos el polinomio homogéneo $F = \sum a_{ij} X^{3-i-j} Y^i Z^j$ que determina la curva plana. Haciendo cambio de coordenadas podemos suponer que $(1 : 0 : 0) \in F$ y su única tangente en este punto está dada por $Z = 0$, esto implica que $a_{00} = a_{10} = 0$ y $a_{01} \neq 0$. Sea un subgrupo a un parámetro $\lambda : \mathbb{C}^* \to \mathrm{SL}(3)$ definido por $\lambda(t) = \mathrm{diag}\{t^{r_0}, t^{r_1}, t^{r_2}\}$, donde $r_i \in \mathbb{Z}$ y $r_0 + r_1 + r_2 = 0$. Vamos a demostrar que $\mu(F_X, \lambda) < 0$. Por el Lema 1.3.2, el peso de F_X en a_{01} está dado por

$$3r_0 + 0 \cdot (r_1 - r_0) + (r_2 - r_0) = 2r_0 + r_2 = r_0 - r_1 = l,$$

donde $l \in \mathbb{Z}$. Si $l < 0$, no hay nada que demostrar ya que $\mu(F_X, \lambda) = \min\{ \text{ pesos } | a_{ij} \neq 0\} < 0$. Sin pérdida de generalidad supongamos que $l \geq 0$. Si $r_0 \geq 0$, hay dos casos para l: $0 \leq l \leq r_0$ ó $l > r_0$. Supongamos $l \leq r_0$, entonces $r_0 \geq r_1 \geq 0$. Si $\mu(F_X, \lambda) \geq 0$, los coeficientes $a_{02} = a_{03} = a_{12} = 0$, entonces podemos escribir a F de la siguiente forma

$$F(X,Y,Z) = a_{01}X^2Z + a_{20}XY^2 + a_{11}XYZ + a_{30}Y^3 + a_{21}Y^2Z,$$

pero $(0 : 0 : 1)$ no es un punto lisa de F, lo cual es una contradicción. Ahora supongamos que $l > r_0$ esto implica que $r_1 \leq 0$. Si $\mu(F_X, \lambda) \geq 0$, entonces $a_{30} = a_{03} = a_{21} = a_{12} = 0$ y los coeficientes a_{20} y a_{02} no pueden ser ambos diferentes de cero. Si $a_{20} = 0$, F puede ser escrito de la forma

$$F = a_{01}X^2Z + a_{02}XZ^2 + a_{11}XYZ,$$

pero $(0 : 1 : 0)$ no es un punto lisa de F, lo cual es una contradicción. Si $a_{02} = 0$, F puede ser escrito de la forma

$$F = a_{01}X^2Z + a_{20}XY^2 + a_{11}XYZ,$$

pero $(0:0:1)$ no es un punto lisa, lo cual es una contradicción. Por lo tanto $\mu(F_X,\lambda)<0$ para todos subgrupo a un parámetro λ y por lo tanto X es Chow semiestable. El caso $r_0<0$ se obtiene de forma similar.

□

La relación entre la P-estabilidad y la estabilidad de Chow para hipersuperficies está dado por el siguiente teorema.

Teorema 1.3.6. *Sea una hipersuperficie $X=V(F)\subset\mathbb{P}^n$ de grado d.*

- *X es P-estable (resp. P-semiestable) si, y sólo si, X es Chow estable (resp. Chow semiestable).*

Demostración. Consideremos un subgrupo a un parámetro $\lambda:\mathbb{C}^*\to \mathrm{SL}(n+1)$ definido por $\lambda(t)=\mathrm{diag}\{t^{r_0},\ldots,t^{r_n}\}$ con $r_i\in\mathbb{Z}$ y $r_0+\ldots+r_n=0$. Por los Lemas 1.1.11 y 1.3.2 tenemos que

$$\mu(F_X,\lambda)=\mu(F,\lambda^{-1}) \text{ y } \mu(F,\lambda)=\mu(F_X,\lambda^{-1}). \tag{1.8}$$

$\Leftarrow$) Si X es Chow estable (resp. Chow semiestable), entonces $\mu(F_X,\beta)<0$ para todo subgrupo a un parámetro β. Por la ecuación (1.8), $\mu(F,\lambda)=\mu(F_X,\lambda^{-1})<0$ (resp. $\leq$). Por el Teorema 1.1.7, X es P-estable (resp. P-semiestable).

$\Rightarrow$) Si X es P-estable (resp. P-semiestable), entonces $\mu(F,\beta)<0$ (resp. $\leq$) para todo subgrupo a un parámetro β. Por la ecuación (1.8), $\mu(F_X,\lambda)=\mu(F,\lambda^{-1})<0$ (resp. $\leq$). Por el Teorema 1.1.7 X es Chow estable (resp. Chow semiestable).

□

En particular, la P-estabilidad de hipersuperficies ha sido estudiada (ver [39], Capítulo 4, Sección 2) y (ver [17], Capítulo 10). Ésta nos permite determinar su estabilidad de Chow. Cuando $n=2$, las hipersuperficies son curvas planas, como se demostró en el Teorema 1.1.12 su P-estabilidad depende del grado y del tipo de singularidades que tiene la curva. La curva plana cuadrática es Chow semiestable si, y sólo si, es lisa (ver Teorema 1.3.4). Para la curva plana cúbica tenemos el siguiente resultado.

Teorema 1.3.7. *Sea una curva $C\subset\mathbb{P}^2$ plana de grado 3. Se cumple las siguientes afirmaciones*

1. *C es Chow semiestable si, y sólo si,*
   - *C no tiene puntos triples.*
   - *C no tiene puntos dobles con una única tangente.*
2. *C es Chow estable si, y sólo si, C lisa.*

Demostración. El teorema se sigue por 1.3.6, 1.1.14 y 1.1.13.

□

Observación 2. En general, el Teorema 1.3.6 también implica la estabilidad de Chow para curvas con valores de d más grandes. Por ejemplo, para las curvas planas de grado 4, las curvas cuspidales son P-semiestables (ver [24], Página 206) por lo tanto estas serán Chow semiestables. Cuando $d\geq 4$ en $\mathbb{P}^2$, la Chow semiestabilidad estará permitiendo singularidades más complicadas (ver [38], Página 13).

Para terminar este capítulo consideremos superficies en $\mathbb{P}^3$ de grado d. Si $d = 1$, hemos demostrado que son Chow inestables (ver Teorema 1.2.12). Si $d = 2$ es estrictamente Chow semiestable si, y sólo si, la superficie es lisa.

Consideremos una superficie $S = V(F) \subset \mathbb{P}^3$ de grado 3. Decimos que S tiene un **punto doble ordinario de tipo** A_n si sus singularidades tienen ecuaciones locales de tipo

$$x^2 + y^2 + z^{n+1}.$$

Para superficies de grado 3 tenemos el siguiente teorema.

Teorema 1.3.8. *Sea una superficie $S = V(F) \subset \mathbb{P}^3$ de grado 3. Se cumple las siguientes afirmaciones*

1. *S es Chow estable si, y sólo si, S es lisa o tiene puntos dobles ordinarios de tipo A_1.*
2. *S es Chow semiestable si, y sólo si, S tiene puntos dobles ordinarios de tipo A_2.*

Demostración. En ([38], Página 15) demostraron la P-estabilidad (P-semiestabilidad) bajo las hipótesis del Teorema, por el Teorema 1.3.6 tenemos que S es Chow estable (Chow semiestable). $\square$

Observación 3. Para la P-estabilidad de superficies en $\mathbb{P}^3$ de grado 4, las condiciones de Mumford (ver [38], Página 15) se obtiene para la estabilidad de Chow.

CAPÍTULO 2

Estabilidad de Chow para curvas algebraicas

En ([38], Teorema 4.15), Mumford demostró que toda curva C lisa proyectiva irreducible de género g, encajada por un sistema lineal completo de grado mayor a $2g$, es Chow estable. En el caso de Mumford, C está contenida en el espacio proyectivo $\mathbb{P}^{d-g}$, por lo tanto en este capítulo estudiamos la estabilidad de Chow para curvas $C \subset \mathbb{P}^n$ tal que el grado d y n son diferentes a $2g$ y $d-g$ respectivamente. En este capítulo damos un criterio para decidir la estabilidad de Chow de la curva lisa. Concretamente, demostramos que si el haz tangente $T\mathbb{P}^n$ restringido a la curva C es estable entonces la curva $C \subset \mathbb{P}^n$ es Chow estable (ver Teorema 2.3.1). En el capítulo 1, demostramos la existencia de curvas lisas las cuales son Chow inestables (ver Teorema 1.2.13).

2.1. Construcción del moduli de curvas

En esta sección recordamos la construcción del espacio moduli $\mathcal{M}_g$ de curvas lisas proyectivas irreducibles de género g y explicamos una de las compactificaciones para $\mathcal{M}_g$ haciendo uso de la teoría de invariantes geométricos (GIT, por sus siglas en inglés). Sea

$$\mathcal{M}_g := \{ \text{ Curvas lisas proyectivas irreducibles}\}/\cong .$$

Nuestro objetivo es dar estructura de variedad y una compactificación para $\mathcal{M}_g$.

Si $g=0$, la única curva lisa es $\mathbb{P}^1$, por lo tanto $\mathcal{M}_0 = \{\text{pto}\}$. Si $g=1$, la función j-invariante de curvas elípticas parametriza clases de isomorfismos de curvas lisas proyectivas de género 1. Entonces $\mathcal{M}_1 = \mathbb{A}^1$ y $\overline{\mathcal{M}_1} = \mathbb{P}^1$, la cual se obtiene al agregar la curva racional con un nodo ([25] Capítulo 4, Sección 4).

Sean un entero $n \geq 3$ y una curva C lisa irreducible proyectiva de género $g \geq 2$. La n-potencia del haz lineal canónico, K_C^n, es muy amplio y tiene grado $d = n(2g-2)$. Por el Teorema de Riemann Roch

$$\begin{aligned} h^0(C, K_C^n) &= \deg(K_C^n) + 1 - g \\ &= n(2g-2) + 1 - g \\ &= (g-1)(2n-1). \end{aligned}$$

Cada base de $H^0(C, K_C^n)$ determina un encaje de C en $\mathbb{P}(H^0(C, K_C^n)^*) = \mathbb{P}^{d-g}$ como una curva de grado $d = 2n(g-1)$. La curva imagen es conocida como el **modelo n-canónico de** C y su polinomio de Hilbert está dado por $P(t) = dt + 1 - g$. Los automorfismos de $\mathbb{P}^{d-g}$ actúan en el esquema de Hilbert de la siguiente forma

$$\begin{aligned} \mathbb{P}\mathrm{GL}(d-g) \times \mathrm{Hilb}_{d-g,P(t)} &\to \mathrm{Hilb}_{d-g,P(t)} \\ (\Phi, C) &\mapsto \Phi C. \end{aligned}$$

Sean $C, D \in \mathrm{Hilb}_{d-g,P(t)}$. Decimos que C es equivalente a D, si existe un automorfismo Φ de $\mathbb{P}^{d-g}$ tal que $C = \Phi D$. Es fácil ver que si C_n y D_n son dos modelos n-canónicos en la misma órbita entonces C y D son isomorfas. Más aún, si $C \xrightarrow{\phi} D$ es un isomorfismo, entonces ϕ induce un isomorfismo $\mathbb{P}(\phi) : \mathbb{P}(H^0(C, K_C^n)^*) \to \mathbb{P}(H^0(D, K_D^n)^*)$ tal que $\mathbb{P}(\phi)(C_n) = (D_n)$. Por lo tanto si C y D son dos curvas lisas de género g y C_n, D_n sus n-modelos canónicos respectivamente, entonces C y D son isomorfas si, y sólo si, C_n y D_n se encuentran en la misma órbita en $\mathrm{Hilb}_{d-g,P(t)}$. Sea el lugar geométrico

$$\mathcal{K} \subset \mathrm{Hilb}_{d-g,P(t)}$$

de curvas lisas n-canónicas en $\mathbb{P}^{d-g}$ con polinomio de Hilbert $P(t) = dt+1-g$. Entonces $\mathcal{K}$ parametriza curvas lisas de género g encajadas con K_C^n en $\mathbb{P}^{d-g}$, es decir,

$$\mathcal{K} := \{C \overset{\phi}{\hookrightarrow} \mathbb{P}^{d-g} \text{ y } \phi^*(\mathcal{O}_{\mathbb{P}^{d-g}}(1)) = K_C^n\}.$$

El conjunto $\mathcal{K}$ es localmente cerrado debido que el lugar geométrico de curvas lisas en $\mathrm{Hilb}_{d-g,P(t)}$ es abierto y la condición de $\phi^*(\mathcal{O}_{\mathbb{P}^{d-g}}(1)) = K_C^n$ es cerrada. Recordemos, que existe $M > 0$ (ver Apéndice, Sección 5.4.2) tal que para cada $m > M$

$$i_m : \mathcal{K} \subset \mathrm{Hilb}_{d-g,P(t)} \hookrightarrow G(P(m), H^0(\mathbb{P}^{d-g}, \mathcal{O}_{\mathbb{P}^{d-g}}(m))) \hookrightarrow \mathbb{P}(\wedge^{P(m)} H^0(\mathbb{P}^{d-g}, \mathcal{O}_{\mathbb{P}^{d-g}}(m)).$$

Sabemos que los automorfismos de $\mathbb{P}^{d-g}$ mandan curvas lisas n-canónicas a curvas lisas n-canónicas, es decir, $\mathcal{K}$ es invariante mediante la acción de $\mathbb{P}\mathrm{GL}(d-g)$ y sus órbitas corresponden a clases de equivalencia de curvas lisas de género g. Por lo tanto tenemos una acción

$$\mathbb{P}\mathrm{GL}(d-g) \times \mathcal{K} \to \mathcal{K} \tag{2.1}$$

Decimos que $[C] \in \mathcal{K}$ es **m-estable** (resp. m-semiestable) si es $\mathbb{P}\mathrm{GL}(d-g)$-estable (resp. $\mathbb{P}\mathrm{GL}(d-g)$-semiestable) por la acción (2.1).

Mumford demostró que para toda curva C lisa proyectiva irreducible de género g encajada por un sistema lineal completo de grado mayor a $2g$, existe $M_1 > 0$ tal que $[C]_m$ es m-estable para cada $m > M_1$ (ver [24], Teorema 4.34). Fijemos $m_0 > \mathrm{Max}\{M, M_1\}$. Entonces todo punto en $\mathcal{K}$ es m_0-estable y existe el cociente

$$\mathcal{M}_g := \mathcal{K} // \mathbb{P}\mathrm{GL}(d-g). \tag{2.2}$$

Por el teorema fundamental de la teoría de invariantes geométricos, existe una correspondencia biyectiva entre los puntos de $\mathcal{K}/\mathbb{P}\mathrm{GL}(d-g)$ y las órbitas de $\mathbb{P}\mathrm{GL}(d-g)$ sobre $\mathcal{K}$ y éstas corresponden a clases de curvas lisas de género g. Más aún, como $\mathcal{K}$ es localmente cerrado en el esquema de Hilbert, entonces $\mathcal{M}_g$ es un esquema quasi-proyectivo.

Nuestro objetivo es explicar las ideas principales de la construcción de $\overline{\mathcal{M}_g}$ para $g \geq 2$, utilizando la teoría de invariantes geométricos. Mumford compactifica a $\mathcal{M}_g$ con curvas nodales. Una curva **Deligne-Mumford estable** es una curva conexa, reducida tal que cada componente lisa racional intersecta a las demás componentes al menos tres veces.

Similar a la construcción de $\mathcal{M}_g$. Fijemos enteros $g \geq 2$ y $n \geq 5$. Sea una curva X Deligne-Mumford estable y su gavilla dualizante ω_X. La n-potencia de la gavilla dualizante, ω_X^n, es muy amplia y tiene grado $d = 2n(g-1)$. Por el Teorema de Riemann Roch

$$\begin{aligned} h^0(X, \omega_X^n) &= \deg(\omega_X^n) + 1 - g \\ &= n(2g-2) + 1 - g \\ &= (2n-1) \cdot (g-1). \end{aligned}$$

Cada base de $H^0(X, \omega_X^n)$ determina un encaje de X en $\mathbb{P}(H^0(X, \omega_X^n)^*) = \mathbb{P}^{d-g}$, como una curva de grado $d = 2n(g-1)$. Fijemos el esquema de Hilbert de $\mathbb{P}^{d-g}$ con polinomio de Hilbert $P(t) = dt + 1 - g$. Recordemos que los automorfismos de $\mathbb{P}^{d-g}$ actúan linealmente en el esquema de Hilbert y existe el concepto de m-punto de Hilbert estable (ver Apéndice, Sección 5.4.2).

El Teorema principal para la construcción de $\overline{\mathcal{M}_g}$ es el Teorema de estabilidad potencial (ver [24], Capítulo 4, Teorema 4.45), el cual afirma que para $d > 9(g-1)$ existe $M \in \mathbb{N}$ que sólo depende de d y g, tal que si $m \geq M$ y para cada $X \subset \mathbb{P}^{d-g}$ conexa con su m-punto de Hilbert semiestable es Deligne-Mumford estable.

Sea el lugar geométrico $\mathcal{K}_D$ en $\mathrm{Hilb}_{d-g,P(t)}$ de curvas Deligne-Mumford estables de género g encajadas en $\mathbb{P}^{d-g}$ por la n-potencia de su gavilla dualizante. Consideremos el lugar geométrico $\mathcal{K}_{ss}$ de Hilbert semiestables en $\mathrm{Hilb}_{d-g,P(t)}$. Sea

$$\widetilde{\mathcal{K}} := \mathcal{K}_D \cap \mathcal{K}_{ss}.$$

Tenemos las siguientes propiedades (ver [24], Capítulo 4, Sección C):

1. Todos los puntos de $\widetilde{\mathcal{K}}$ son Hilbert estables.

2. $\widetilde{\mathcal{K}}$ es cerrado en $\mathcal{K}_{ss}$.

3. Para toda curva X Deligne-Mumford estable, existe una única órbita en $\widetilde{\mathcal{K}}$ parametrizando encajes de X en $\mathbb{P}^{d-g}$.

4. Todos los puntos de $\widetilde{\mathcal{K}}$ parametrizan curvas Deligne-Mumford estables.

Como todo punto de $\widetilde{\mathcal{K}}$ es GIT-semiestable, entonces existe el cociente

$$\overline{\mathcal{M}_g} = \widetilde{\mathcal{K}} // \mathbb{P}\mathrm{GL}(d-g).$$

Por el teorema fundamental de la teoría de invariantes geométricos, existe una correspondencia biyectiva entre los puntos de $\widetilde{\mathcal{K}}/\mathbb{P}\mathrm{GL}(d-g)$ y las órbitas de $\mathbb{P}\mathrm{GL}(d-g)$ sobre $\widetilde{\mathcal{K}}$ y corresponden a clases de curvas Deligne-Mumford estables de género g. Más aún, como $\widetilde{\mathcal{K}}$ es cerrado en el esquema de Hilbert, entonces $\overline{\mathcal{M}_g}$ es una esquema proyectivo.

2.2. Linealmente estable

En esta sección recordamos el concepto de linealmente estable introducido por Mumford para variedades proyectivas (ver [38], Definición 2.16). Para el caso de curvas proyectivas, ésta es una manera de determinar si la curva es Chow estable.

Sea una variedad proyectiva $X \subset \mathbb{P}^n$ de dimensión r. **El grado reducido de** X, denotado por red. deg(X), es el cociente

$$\mathrm{red}\,.\,\mathrm{deg}(X) := \frac{\mathrm{deg}(X)}{n+1-r}.$$

Definición 2.2.1 ([38], Definición 2.16)**.** Una variedad proyectiva $X \subset \mathbb{P}^n$ de dimensión r es **linealmente estable** (resp. **linealmente semiestable**) si para todo subespacio lineal $U^{n-m-1} \subset \mathbb{P}^n$ de dimensión $n-m-1$, tal que la imagen de X bajo la proyección $P_U : \mathbb{P}^n - U \to \mathbb{P}^m$ tiene dimensión r, tenemos que

$$\mathrm{red.deg}(X) < \mathrm{red.deg}([P_U(X)]) \quad (\text{ resp. } \leq).$$

En [38], Mumford demuestra el siguiente teorema, el cual es usado en el teorema principal por lo que damos su demostración.

Teorema 2.2.2. *([38], Teorema 4.12) Si $C \subset \mathbb{P}^n$ una curva linealmente estable (resp. linealmente semiestable), entonces $C \subset \mathbb{P}^n$ es Chow estable (resp. Chow semiestable).*

Demostración. Demostramos el caso estable, el caso semiestable se sigue de forma similar. Supongamos que C es linealmente estable. Consideremos un subgrupo a un parámetro $\rho : \mathbb{C}^* \to \mathrm{SL}(n+1)$. Sean $X_0, \ldots, X_n$ las coordenadas de $\mathbb{P}^n$ tal que ρ puede ser escrito de la siguiente forma

$$\begin{array}{rcl} \rho : \mathbb{C}^* & \to & \mathrm{SL}(n+1) \\ t & \mapsto & \begin{pmatrix} t^{\rho_0} & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & t^{\rho_1} & \ldots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \ldots & t^{\rho_n} \end{pmatrix} \cdot t^{-k}, \end{array}$$

con $\rho_0 \geq \rho_1 \geq \ldots \geq \rho_n = 0$ y $k = \sum_{i=0}^{n} \frac{\rho_i}{n+1}$. Denotamos las gavillas de ideales $\mathcal{I} = (t^{\rho_i} X_i) \subset \mathcal{O}_{C \times \mathbb{A}^1}$ y $\mathcal{I}_k = (X_k, \ldots, X_n) \subset \mathcal{O}_C$. Notemos que $\mathcal{I} = \sum_{i=1}^{n} t^{\rho_k} \mathcal{I}_k$. Consideremos la proyección desde el subespacio lineal $\Gamma_k = (X_0, \ldots, X_{k-1})$

$$P_{\Gamma_k} : \mathbb{P}^n - \Gamma_k \to \mathbb{P}^{n-k}.$$

Por hipótesis $C \subset \mathbb{P}^n$ es linealmente estable, entonces

$$\frac{\deg(P_{\Gamma_k}(C))}{n-k} > \frac{\deg(C)}{n}. \tag{2.3}$$

Por la Proposición 1.2.3, $e(\mathcal{I}_k) = \deg(C) - \deg(P_{\Gamma_k}(C))$, entonces la expresión 2.3 puede ser escrita como

$$\frac{\deg(C) - e(\mathcal{I}_k)}{n-k} > \frac{\deg(C)}{n}.$$

Equivalente a

$$e(\mathcal{I}_k) < \frac{k}{n}\deg(C).$$

Por la Proposición 1.2.5

$$\begin{aligned}
e_{\mathcal{O}_X(1)\otimes\mathcal{O}_{\mathbb{A}^1}}(\mathcal{I}) &< \min_{0=r_0<r_1<\cdots<r_l=N}\left(\sum_{k=0}^{l-1}(r_{k+1}-r_k)(e_L(\mathcal{I}_{r_k})+e_L(\mathcal{I}_{r_{k+1}})\right) \\
&< \frac{2\deg C}{n}\left(\min_{0=r_0<r_1<\cdots<r_l=n}\big(\sum_{k=0}^{l-1}(\rho_{r_k}-\rho_{r_{k+1}})(\frac{r_k+r_{k+1}}{2})\big)\right).
\end{aligned}$$

El mínimo de lado derecho de la expresión anterior es obtenido precisamente para

$$0 = r_0 < r_1 < \ldots < r_l = n$$

tal que (r_k, ρ_{r_k}) son los vértices del polígono de Newton de los puntos (k, ρ_k). Los puntos (k, ρ_k) que no son vértices, se encuentran por arriba del polígono de Newton y dado que estos no afectan en el área del polígono. Mas aún, esta expresión puede crecer entonces podemos suponer que los puntos están sobre el polígono. Entonces el mínimo puede ser calculado cuando $r_k = k$ por lo tanto

$$\begin{aligned}
\min_{0=r_0<r_1<\cdots<r_l=n}\big(\sum_{k=0}^{l-1}(\rho_k-\rho_{k+1})(\frac{r_k+r_{k+1}}{2})\big) &= \sum_{k=0}^{n}(\rho_k-\rho_{k+1})(\frac{2k+1}{2}) \\
&= \frac{1}{2}\rho_0+\rho_1+\cdots\rho_{n-1}+\frac{1}{2}\rho_n \\
&= \rho_0+\cdots\rho_n-\frac{1}{2}(\rho_0+\rho_n) \\
&\leq \rho_0+\cdots\rho_n-\frac{1}{n+1}(\rho_0+\cdots+\rho_n) \\
&= \frac{n}{n+1}(\rho_0+\cdots+\rho_n).
\end{aligned}$$

La última expresión, $\frac{1}{2}(\rho_0+\rho_n) \geq \frac{1}{n+1}(\rho_0+\ldots+\rho_n)$, la cual se sigue de la convexidad del polígono de Newton. Por lo tanto obtenemos la desigualdad

$$e_{\mathcal{O}_X(1)\otimes\mathcal{O}_{\mathbb{A}^1}}(\mathcal{I}) < \frac{2\deg(C)}{n+1}\sum_{i=0}^{n}\rho_i.$$

Por el Teorema 1.2.4, $C \subset \mathbb{P}^n$ es Chow estable.

$\square$

Sea un punto $p \in X \subset \mathbb{P}^n$ en una variedad proyectiva X de dimensión r. Para un subespacio lineal $N \subset \mathbb{P}^n$ de dimensión $n-r$, sea el subespacio lineal $M \subset N$ de dimensión $n-r-1$ tal que $p \notin M$. Definimos

$$\mathrm{Mult}_p(\mathrm{res}_X P_M) := \#(X \cap P_M^{-1}(y) \cap V),$$

donde $y \in V$ una vecindad de $P_M(p)$ y $P_M : (\mathbb{P}^n - M) \to \mathbb{P}^r$ es la proyección canónica con respecto al subespacio M.

Definición 2.2.3. Sean una variedad $X \subset \mathbb{P}^n$ de dimensión r y un punto $p \in X$. La multiplicidad de X en p, denotada por $\mathrm{Mult}_p(X)$, está definida por

$$\mathrm{Mult}_p(X) = \min_{N \subset \mathbb{P}^n} \mathrm{Mult}_p(res_X P_M),$$

para todo subespacio lineal $N \subset \mathbb{P}^n$ de dimensión $n-r$ tal que $\{p\}$ es una componente de $X \cap N$.

El siguiente teorema nos permite clasificar las curvas planas linealmente estables.

Teorema 2.2.4 ([37],Teorema 5.11)**.** *Sea una curva $C \subset \mathbb{P}^n$ irreducible no degenerada y un punto p en $\mathbb{P}^n$. Entonces*

$$Mult_p(C) = \begin{cases} deg(C) - deg[P_p(C)] & si\ p \in C \\ 0 & si\ p \notin C \end{cases}.$$

El siguiente teorema da la clasificación de curvas planas linealmente estables de grado d.

Teorema 2.2.5. *Sea una curva $C \subset \mathbb{P}^2$ plana de grado d.*

- *C es linealmente estable si, y sólo si, $Mult_p(C) < \frac{d}{2}$, (resp. $\leq$) para todo $p \in C$.*

Demostración. En $\mathbb{P}^2$, únicamente podemos proyectar a $\mathbb{P}^1$ con respecto a un punto $p \in \mathbb{P}^2$. Supongamos que $p \notin C$, entonces $\deg([P_p(C)]) = \deg(C) = d$, la condición de ser linealmente estable siempre se satisface. Ahora, si $p \in C$ entonces $\deg([P_p(C)]) = d - \mathrm{Mult}_p(C)$. Por lo tanto, C es linealmente estable si, y sólo si,

$$d - \mathrm{Mult}_p(C) = \deg([P_p(C)]) > \frac{\deg(C)}{2} = \frac{d}{2}$$

si, y sólo si, $\mathrm{Mult}_p(C) < \frac{d}{2}$. □

Recordemos que existe una relación entre la estabilidad lineal y la estabilidad de Chow, por lo tanto tenemos el siguiente corolario.

Corolario 2.2.1. *Sea una curva $C \subset \mathbb{P}^2$ plana de grado d. Si $Mult_p(X) < \frac{d}{2}$ (resp. $\leq \frac{d}{2}$) para todo $p \in C$, entonces C es Chow estable (resp. Chow semiestable).*

Demostración. Por el Teorema 2.2.5, C es linealmente estable y por el Teorema 2.2.2, C es Chow estable. □

2.3. Criterio para la estabilidad de Chow

Sea una curva C lisa proyectiva irreducible de género g. Un sistema lineal (L, V) de tipo $(d, n+1)$ es **generado** si el morfismo evaluación

$$V \otimes \mathcal{O}_C \to L$$

es sobreyectivo, es decir, para todo punto $x \in C$ existe una sección $s \in V$ tal que $s(x) \neq 0$. Consideremos el haz vectorial, $M_{L,V}$, definido por el kernel del morfismo evaluación. Esto es, existe la siguiente sucesión exacta

$$0 \to M_{L,V} \to V \otimes \mathcal{O} \to L \to 0 \tag{2.4}$$

de haces vectoriales. El haz $M_{L,V}$ es conocido como el **haz de Sysygies o el haz de Lazarsfeld**. La estabilidad de los haces vectoriales $M_{L,V}$ y $M_{L,V}^*$ ha sido estudiada de varios puntos desde vista, los cuales están relacionados con las variedades de Brill Noether y con la estabilidad de $T\mathbb{P}^n|_C$.

Si (L, V) es un sistema lineal generado, entonces define un morfismo $\phi_{L,V}$ de la siguiente forma

$$\begin{aligned} \phi_{L,V} : C &\to \mathbb{P}(V^*) && (2.5)\\ c &\mapsto \{s \in V \mid s(c) = 0\}. && (2.6) \end{aligned}$$

La sucesión de Euler está definida por

$$0 \to \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n} \to V \otimes \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(1) \to T\mathbb{P}^n \to 0,$$

dualizando y tensorizando por $\mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(1)$. Obtenemos

$$0 \to (T\mathbb{P}^n)^* \otimes \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(1) \to V \otimes \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n} \to \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(1) \to 0,$$

haciendo el pull-back con respecto a $\phi_{L,V}$ obtenemos

$$0 \to \phi_{L,V}^*(T\mathbb{P}^n)^* \otimes L \to V \otimes \mathcal{O}_C \to L \to 0.$$

Entonces

$$M_{L,V} = \phi_{L,V}^*(T\mathbb{P}^n)^* \otimes L. \tag{2.7}$$

Si $\phi_{L,V}$ es un encaje, entonces existen isomorfismos de haces vectoriales entre

$$T\mathbb{P}^n|_{\phi_{L,V}(C)} \cong \phi_{L,V}^*(T\mathbb{P}^n) \text{ y } \mathcal{O}_{\phi_{L,V}(C)}(1) \cong L.$$

Por lo tanto

$$M_{L,V} = (T\mathbb{P}^n|_C)^* \otimes L. \tag{2.8}$$

De la sucesión 2.4, se obtiene la siguiente información acerca de $M_{L,V}$.

- $M_{L,V}^*$ tiene rango n.
- $\det(M_{L,V}^*) = L$, por lo tanto el grado de $M_{L,V}^*$ es d.
- $h^0(M_{L,V}^*) \geq h^0(L)$.

- $M^*_{L,V}$ es generado por sus secciones globales.
- Sea un cociente Q de $M^*_{L,V}$ entonces Q está generado por sus secciones; ya que tenemos el siguiente diagrama conmutativo.

$$\begin{array}{ccccc} V^* \otimes \mathcal{O}_C & \to & M^*_{L,V} & \to & 0 \\ \downarrow & & \downarrow & & \\ H^0(Q) \otimes \mathcal{O}_C & \to & Q & & \\ & & \downarrow & & \\ & & 0 & & \end{array}$$

Estudiamos la relación que existe entre los grados de $\phi_{L,V}$ (ver definición 2.5) y el grado de la curva imagen $\phi_{L,V}(C)$. Recordemos que si $f : X \to Y$ es un morfismo finito entre curvas lisas irreducibles proyectivas y L es un haz lineal sobre Y. Entonces ([25], Capítulo II, Proposición 6.9)

$$\deg(f^* L) = \deg(f) \cdot \deg(L). \tag{2.9}$$

Supongamos que la curva imagen, $\phi_{L,V}(C)$, es lisa. Consideremos la siguiente factorización

$$C \to \phi_{L,V}(C) \xrightarrow{i} \mathbb{P}(V^*).$$

Tenemos que

$$L = \phi^*_{L,V}(\mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(1)).$$

Entonces

$$\begin{aligned} \deg(L) &= \deg(\phi^*_{L,V}(\mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(1))) \\ &= \deg(\phi_{L,V}) \cdot \deg(\mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(1)|_{\phi(C)}) \\ &= \deg(\phi_{L,V}) \cdot \deg(\phi_{L,V}(C)). \end{aligned}$$

Por lo tanto

$$\deg(L) = \deg(\phi_{L,V}) \cdot \deg(\phi_{L,V}(C)). \tag{2.10}$$

Si el sistema lineal (L, V) define un encaje, entonces $\deg(\phi_{L,V}) = 1$ y por la ecuación 2.10 tenemos que

$$\deg(L) = \deg(\phi_{L,V}(C)). \tag{2.11}$$

El criterio de Hilbert-Mumford para determinar la estabilidad de Chow puede ser muy complicado por lo cual damos el siguiente criterio para determinar la estabilidad de Chow para curvas lisas proyectivas.

Teorema 2.3.1. *Sea una curva $C \subset \mathbb{P}^n$ irreducible lisa proyectiva encajada por un sistema lineal (L, V) de tipo $(d, n+1)$. Si la restricción del haz tangente de $\mathbb{P}^n$ a C es estable (resp. semiestable), entonces $C \subset \mathbb{P}^n$ es Chow estable (resp. Chow semiestable).*

Demostración. Vamos a demostrar el caso estable, el caso semiestable es similar solo modificando desigualdades estrictas por desigualdades. Por la ecuación 2.8 tenemos que

$$T\mathbb{P}^n|_C = M_{L,V}^* \otimes L.$$

Entonces la estabilidad de $T\mathbb{P}^n|_C$ es equivalente a la estabilidad de $M_{L,V}$. Sea un subespacio lineal $W \subset V$, tenemos el siguiente diagrama

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 & \to & M_{L',W} & \to & W \otimes \mathcal{O}_C & \to & L' & \to & 0 \\ & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\ 0 & \to & M_{L,V} & \to & V \otimes \mathcal{O}_C & \to & L & \to & 0, \end{array}$$

donde L' es el haz lineal generado por W. Como $M_{L,V}$ es estable entonces

$$-\frac{\deg(L')}{\dim W - 1} = \mu(M_{L',W}) < \mu(M_{L,V}) = -\frac{\deg(L)}{n}.$$

Dado que el grado de C es igual al grado de L y $\deg P_{\mathbb{P}(\mathrm{Ann}(W^*))}(C) = \deg(L')$. Entonces

$$\text{red. } \deg(P_{\mathbb{P}(\mathrm{Ann}\ W^*)}(C)) > \text{red. } \deg(C),$$

esto implica que $C \subset \mathbb{P}^n$ es linealmente estable. Por el Teorema 1.2.4, $C \subset \mathbb{P}^n$ es Chow estable. □

Paranjape en su tesis demostró el siguiente lema, el cual nos ayudará en el estudio de la estabilidad de $M_{L,V}^*$.

Lema 2.3.2 ([41], Lema 3.1)**.** *Sea un haz vectorial E sobre C. Si E está generado por sus secciones globales, entonces existe un subespacio $V \subset H^0(E)$ con $dim(V) = rk(E)+1$ tal que V genera a E.*

Consideremos un subhaz $S \subset M_{L,V}$, entonces existen F_S y un subespacio $W \subset V$ en el siguiente diagrama conmutativo

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & S \arrow[r] \arrow[d, hook] & W \otimes \mathcal{O}_C \arrow[r] \arrow[d, hook] & F_S \arrow[r] \arrow[d, "\alpha"] & 0 \\ 0 \arrow[r] & M_{L,V} \arrow[r] & V \otimes \mathcal{O}_C \arrow[r] & L \arrow[r] & 0. \end{tikzcd}$$

En efecto, definimos $W \hookrightarrow V$ por $W^* := \mathrm{Im}(V^* \to H^0(S^*))$, tenemos que W^* genera a S^*. Por lo tanto definimos $F_S^* := \mathrm{Ker}(W^* \otimes \mathcal{O} \to S^*)$.

Observación 4. Algunas propiedades de estos objetos son las siguientes (ver [12])

1. La gavilla F_S es generada y $h^0(F_S^*) = 0$.

2. El morfismo inducido $\alpha : F_S \to L$ es diferente de cero.

   Demostración. Si α es cero, entonces tenemos que $W \otimes \mathcal{O}_C$ es un subhaz vectorial de $M_{L,V}$. Lo cual es una contradicción ya que $M_{L,V}$ no tiene sumandos triviales. □

3. Si S es un haz vectorial maximal que desestabiliza a $M_{L,V}$,
   - entonces $\deg(F_S) \leq \deg(I)$ donde I es $\mathrm{Im}(\alpha)$.
   - $\mathrm{rk}(F_S) = 1$ si, y sólo si, $\deg(F_S) = \deg(I)$.

Demostración. Supongamos que S es un subhaz de $M_{L,V}$ de pendiente maximal. Sea $I := \mathrm{Im}(\alpha)$. Podemos formar el siguiente diagrama

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 & \to & S & \to & W \otimes \mathcal{O}_C & \to & F_S & \to & 0 \\ & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\ 0 & \to & M_{I,W} & \to & W \otimes \mathcal{O}_C & \to & I & \to & 0 \\ & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\ 0 & \to & M_{L,V} & \to & V \otimes \mathcal{O}_C & \to & L & \to & 0, \end{array} \tag{2.12}$$

donde $M_{I,W}$ es el haz de Sysygies del sistema lineal (I, W). Dado que S es un subhaz de $M_{L,V}$ de pendiente maximal y está contenido en $M_{I,W}$, el cual es un subhaz de $M_{L,V}$, tenemos que

$$\mu(S) \geq \mu(M_{I,W}).$$

Por el diagrama 2.12, tenemos que

$$\mu(S) = -\frac{\deg(F_S)}{\dim W - \mathrm{rk}(F_S)} \quad \text{y} \quad \mu(M_{I,W}) = -\frac{\deg(I)}{\dim W - 1}. \tag{2.13}$$

Por la ecuación 2.13

$$\deg(F_S) \leq \frac{\dim W - \mathrm{rk}(F_S)}{\dim W - 1} \cdot \deg(I).$$

Si $\mathrm{rk}(F_S) > 1$, obtenemos que

$$\deg(F_S) < \deg(I).$$

Si $\deg(F_S) = \deg(I)$, entonces $S = M_{I,W}$ ya que S es un subhaz de $M_{I,W}$ y S es de pendiente maximal. Por lo tanto $F_S = I$. $\square$

Lema 2.3.3. *Sean una curva C lisa proyectiva irreducible y un sistema lineal (L, V) generado sobre C de tipo $(d, n+1)$. Supongamos que $M^*_{L,V}$ no es estable. Consideremos un cociente estable Q de $M^*_{L,V}$ de pendiente minimal. Si rk$(Q) = n-1$, entonces existen un subespacio lineal $W \subset V$ de dimensión n y el siguiente diagrama conmutativo*

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 & \to & Q^* & \to & W \otimes \mathcal{O}_C & \to & F & \to & 0 \\ & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\ 0 & \to & M_{L,V} & \to & V \otimes \mathcal{O}_C & \to & L & \to & 0, \end{array}$$

con deg$(F) =$ deg(I), donde I es el haz lineal generado por W.

Demostración. Como Q es un cociente estable de $M^*_{L,V}$ de pendiente minimal entonces Q^* es un subhaz estable de $M_{L,V}$ de pendiente maximal. Sea $\widetilde{W}^* := \mathrm{Im}(V^* \to H^0(Q))$, como V^* genera a Q entonces la dimensión de $\widetilde{W}$ es n o $n+1$. Supongamos que la dimensión de $\widetilde{W}$ es n, definimos a $F^* := \mathrm{Ker}(\widetilde{W}^* \otimes \mathcal{O}_C \to Q)$ tenemos el siguiente diagrama conmutativo

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 & \to & Q^* & \to & \widetilde{W} \otimes \mathcal{O}_C & \to & F & \to & 0 \\ & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\ 0 & \to & M_{L,V} & \to & V \otimes \mathcal{O}_C & \to & L & \to & 0, \end{array}$$

donde F es un haz lineal. Utilizando la observación 4 inciso 3) tenemos que $\deg(F) = \deg(\widetilde{I})$, donde $\widetilde{I}$ es el haz lineal generado por $\widetilde{W}$.

Si la dimensión de $\widetilde{W}$ es $n+1$, entonces la transformación lineal

$$V^* \to H^0(Q)$$

es inyectiva. Por el Lema 2.3.2, existe un subespacio $W \subset V$ de dimensión n tal que W^* genera a Q. Consideremos $F^* := \mathrm{Ker}(W^* \otimes \mathcal{O}_C \to Q)$, tenemos el siguiente diagrama conmutativo

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 & \to & Q^* & \to & W \otimes \mathcal{O}_C & \to & F & \to & 0 \\ & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\ 0 & \to & M_{L,V} & \to & V \otimes \mathcal{O}_C & \to & L & \to & 0, \end{array}$$

donde F es un haz lineal. Utilizando la observación 4 inciso 3) tenemos que $\deg(F) = \deg(I)$, donde I es el haz lineal generado por W. Que es lo queriamos demostrar.

□

En el siguiente teorema damos condiciones para la estabilidad de $M_{L,V}$, denotamos por $h = h^1(C, L)$.

Teorema 2.3.4. *Sean una curva general C de género $g \geq 2$ y un sistema lineal generado (L, V) de tipo $(d, n+1)$ sobre C tal que $n+1 = h^0(C, L) - a$ para algún entero positivo a. Se cumplen las siguientes afirmaciones:*

1. *Si $a - h < 0$, entonces $M_{L,V}$ es estable.*

2. *Si $a - h = 0$, entonces $M_{L,V}$ es semiestable.*

3. *Si $a - h > 0$, $a(n-1) < g$ y (L, V) define un encaje, entonces $M_{L,V}$ es estable.*

Demostración. Supongamos que $d = g + s$, $s \in \mathbb{Z}$. Tenemos que

$$\deg(M^*_{L,V}) = d := g + s, \ \ para \ \ s \in \mathbb{Z}$$

Por el Teorema de Riemann Roch

$$\begin{aligned} n+1 &= h^0(C, L) - a \\ &= d + 1 - g + h - a \\ &= s + h - a + 1, \end{aligned}$$

entonces $\mathrm{rk}(M_{L,V}) = n = s + h - a$.

1. Supongamos que $M^*_{L,V}$ no es estable, entonces existe un cociente estable Q de $M^*_{L,V}$ tal que

$$\mu(Q) \leq \mu(M^*_{L,V}),$$

lo cual es equivalente a

$$\deg(Q) \leq \mathrm{rk}(Q)(\frac{g+s}{s-a+h}). \tag{2.14}$$

Afirmamos que $h^0(\det(Q)) \geq \mathrm{rk}(Q)+1$. En efecto, $M^*_{L,V}$ es generado y Q es un cociente entonces Q es generado y por el Lema 2.3.2 existe un subespacio lineal $W \subset H^0(Q)$ de dimensión $\mathrm{rk}(Q)+1$ que genera a Q. Tenemos la siguiente sucesión exacta

$$0 \to Q^* \to W^* \otimes \mathcal{O}_C \to \det(Q) \to 0,$$

la cual induce una sucesión exacta en cohomología

$$0 \to H^0(Q^*) \to W^* \otimes H^0(\mathcal{O}_C) \to H^0(\det(Q)) \to H^1(Q^*).$$

Como Q^* es estable y de grado negativo entonces $H^0(Q^*) = 0$. Por lo tanto $h^0(\det(Q)) \geq \mathrm{rk}(Q)+1$. Dado que C es una curva general y $\det(Q)$ es un haz lineal de grado $\deg(Q)$ con al menos $\mathrm{rk}(Q)+1$ secciones, entonces el número de Brill-Noether

$$\begin{aligned} \rho(g, \deg(Q), \mathrm{rk}(Q)+1) &= g - (\mathrm{rk}(Q)+1)(g - \deg(Q) + \mathrm{rk}(Q)) \\ &= (\mathrm{rk}(Q)+1)\deg(Q) - \mathrm{rk}(Q)) \cdot (\mathrm{rk}(Q)+1) - \mathrm{rk}(Q) \cdot g, \end{aligned}$$

es no negativo. Esto es

$$\begin{aligned} 0 \leq \rho &= (\mathrm{rk}(Q)+1) \cdot \deg(Q) - \mathrm{rk}(Q) \cdot (\mathrm{rk}(Q)+1) - \mathrm{rk}(Q) \cdot g && (2.15) \\ &\leq \mathrm{rk}(Q) \cdot [(\mathrm{rk}(Q)+1) \cdot (\frac{g+s}{s-a+h}) - (\mathrm{rk}(Q)+1) - g] && (2.16) \\ &= \mathrm{rk}(Q) \cdot [(\mathrm{rk}(Q)+1) \cdot (\frac{g+a-h}{s-a+h}) - g] && (2.17) \\ &= \mathrm{rk}(Q) \cdot [(\mathrm{rk}(Q)+1) \cdot (\frac{g+a-h}{n}) - g], && (2.18) \end{aligned}$$

Si $a-h>0$, tenemos que la expresión 2.18 es estrictamente menor a cero. Contradiciendo que el número de Brill Noether es no negativo. Por lo tanto $M^*_{L,V}$ es estable.

2. Si $M^*_{L,V}$ no es semiestable, existe un cociente Q de $M^*_{L,V}$ tal que la desigualdad 2.14 es estricta. Similarmente que en 1), tenemos que la desigualdad 2.16 es estricta. Entonces

$$0 \leq \rho \quad < \quad \mathrm{rk}(Q) \cdot [(\mathrm{rk}(Q)+1) \cdot (\frac{g+a-h}{n}) - g], \tag{2.19}$$

Si $a-h=0$, la expresión 2.19 es menor o igual a cero. Contradiciendo que el número de Brill Noether es no negativo. Por lo tanto $M^*_{L,V}$ es semiestable.

3. Supongamos que $M_{L,V}^*$ no es estable, entonces existe un cociente estable Q de $M_{L,V}^*$ tal que

$$\mu(Q) \leq \mu(M_{L,V}^*).$$

Similar a 1), tenemos que

$$0 \leq \rho \quad \leq \quad \mathrm{rk}(Q) \cdot [(\mathrm{rk}(Q)+1) \cdot (\frac{g+a-h}{n}) - g], \tag{2.20}$$

Si $\mathrm{rk}(Q) \leq n-2$ y $a(n-1) < g$, la expresión 2.20 es estrictamente menor a cero. Esto es una contradicción; ya que el número de Brill Noether es no negativo. Por lo tanto

$$\mu(Q) > \mu(M_{L,V}^*) \tag{2.21}$$

para todo cociente Q de $M_{L,V}^*$ con $\mathrm{rk}(Q) \leq n-2$.

Supongamos que $\mathrm{rk}(Q) = n-1$. La siguiente observación nos ayudará a demostrar lo deseado. Por hipótesis C es una curva Brill-Noether y L es una haz lineal de grado d con al menos $n+1$ secciones entonces el número de Brill Noether

$$\rho(g,d,n+1) = g - (n+1) \cdot (g-d+n)$$

es no negativo. Equivalente a

$$d \geq n + g - \left\lfloor \frac{g}{n+1} \right\rfloor > n. \tag{2.22}$$

Por el Lema 2.3.3, existe el siguiente diagrama conmutativo

$$\begin{array}{ccccccccc}
0 & \to & Q^* & \to & W \otimes \mathcal{O}_C & \to & F & \to & 0 \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\
0 & \to & M_{L,V} & \to & V \otimes \mathcal{O}_C & \to & L & \to & 0,
\end{array}$$

donde $W \hookrightarrow V$ está definido por $W^* := \mathrm{Im}(V^* \to H^0(Q))$ y $F^* := \mathrm{Ker}(W^* \otimes \mathcal{O}_C \to Q)$. Más aún, F es lineal y por observación 4 inciso 3, $\deg(F) = \deg(I)$, donde I es el haz lineal generado por W. Tenemos que $\deg(I) = \deg[P_p(\phi_{L,V}(C))]$, donde P_p es la proyección de $\phi_{L,V}(C)$ para algún $p \in \phi_{L,V}(C)$.

Dado que (L,V) define un encaje, por la ecuación 2.11 $\deg(L) = \deg(\phi_{L,V}(C))$ y $\phi_{L,V}(C)$ es lisa entonces $\mathrm{Mult}_p(\phi_{L,V}(C)) = 1$ para todo $p \in \phi_{L,V}(C)$. Por lo tanto

$$\begin{array}{rcll}
\deg[P_p(\phi_{L,V}(C))] & = & \deg(\phi_{L,V}(C)) - \mathrm{Mult}_p(\phi_{L,V}(C)) & \text{Por el Teorema 2.2.4} \\
 & = & \deg(\phi_{L,V}(C)) - 1 & \mathrm{Mult}_p = 1 \\
 & = & \deg(L) - 1 & \text{Por ecuación 2.11} \\
 & = & d - 1. &
\end{array}$$

Entonces

$$\begin{array}{rcl}
\deg(F) & = & \deg(I) \\
 & = & \deg[P_p(\phi_{L,V}(C))] \\
 & = & d-1.
\end{array}$$

Por la ecuación 2.22, tenemos que

$$\mu(Q) = \frac{\deg(Q)}{n-1} = \frac{\deg(F)}{n-1} = \frac{d-1}{n-1} > \frac{d}{n} = \mu(M^*_{L,V}), \tag{2.23}$$

Por ecuaciones 2.21 y 2.23 tenemos que $\mu(Q) > \mu(M^*_{L,V})$ para todo cociente Q de $M^*_{L,V}$. Por lo tanto $M^*_{L,V}$ es estable.

□

Corolario 2.3.1. *Sea una curva general $C \subset \mathbb{P}^n$ encajada por un sistema lineal (L, V) de tipo $(d, n+1)$. Supongamos que $n+1 = h^0(C, L) - a$, donde a es un entero positivo y sea $h := h^1(C, L)$ Si $a - h > 0$ y $g > a(n-1)$, entonces C es Chow estable.*

Sea una curva C lisa proyectiva. Decimos que C es de **Petri** si para cada haz lineal L sobre C, el morfismo producto

$$\mu : H^0(C, L) \otimes H^0(C, L^* \otimes K_C) \to H^0(C, K_C) \tag{2.24}$$

es inyectivo. La condición de Petri es una propiedad abierta (ver [4], Capítulo XXI, Proposición 3.20), es decir, para toda familia $p : \mathcal{C} \to S$ de curvas lisas proyectivas parametrizadas por S, el conjunto

$$\{s \in S | p^{-1}(s) = C_s \text{ es Petri}\}$$

es abierto en S. Esto implica que el conjunto de curvas de Petri determinan un abierto no vacio en el espacio moduli $\mathcal{M}_g$ de curvas lisas proyectivas. En [11], U.N. Bhosle, L. Brambila-Paz y P.E. Newstead dieron condiciones para la estabilidad de $M_{L,V}$ sobre una curva de Petri.

Teorema 2.3.5. *([11], Teorema 6.1) Sea una curva C de Petri de género g. Supongamos que (L, V) es un sistema lineal general de tipo $(d, n+1)$ con $n \geq 5$ y $g \geq 2n-4$. Entonces $M_{L,V}$ es estable.*

2.4. Estabilidad lineal vs estabilidad

En esta sección definimos el concepto de linealmente estable para sistemas lineales generados y lo relacionamos con la estabilidad lineal de la curva imagen.

Definición 2.4.1. Sean una curva C irreducible lisa proyectiva de género $g \geq 2$ y un sistema lineal generado (L, V). Decimos que (L, V) es linealmente estable (resp. linealmente semiestable) si para todo subespacio lineal $W \subset V$ tenemos que

$$\frac{\deg(L')}{\dim(W) - 1} > \frac{\deg(L)}{n} \quad (\textit{resp.} \geq),$$

donde L' es el haz lineal generado por W. Esto es, tenemos el siguiente diagrama conmutativo

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 & \to & M_{L',W} & \to & W \otimes \mathcal{O}_C & \to & L' & \to & 0 \\ & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\ 0 & \to & M_{L,V} & \to & V \otimes \mathcal{O}_C & \to & L & \to & 0, \end{array}$$

Se han definido dos conceptos de linealmente estable: el primero para curvas $C \subset \mathbb{P}^n$ y el segundo para sistemas lineales (L, V) sobre la curva. El siguiente corolario da la relación que existen entre ambas definiciones.

Corolario 2.4.1. *Sean una curva C irreducible proyectiva lisa y un sistema lineal (L, V) definiendo un encaje $\phi_{L,V}$. Si (L, V) es linealmente estable, entonces $\phi_{L,V}(C) \subset \mathbb{P}^n$ es linealmente estable.*

Demostración. Ver Teorema 2.3.1. □

En [33], E. Mistretta y L. Stoppino estudiaron condiciones para que la estabilidad lineal de un sistema lineal (L, V) implique la estabilidad de $M_{L,V}$ obteniendo resultados parciales sobre el índice de Clifford. En el siguiente teorema damos condiciones sobre la codimensión del subespacio de secciones y el género de la curva para que la estabilidad lineal del sistema (L, V) implique la estabilidad de $M_{L,V}$, denotamos por $h := h^1(C, L)$.

Teorema 2.4.2. *Sean una curva general C de género $g \geq 2$ y un sistema lineal generado (L, V) de tipo $(d, n + 1)$ sobre C tal que $n + 1 = h^0(C, L) - a$, para algún $a \in \mathbb{N}$. Supongamos que $a - h > 0$ y $a(n - 1) < g$. Entonces $M_{L,V}$ es estable (resp. semiestable) si, y sólo si, (L, V) es linealmente estable (resp. linealmente semiestable).*

Demostración.

- $\Rightarrow$) Si $M_{L,V}$ es estable (resp. semiestable), entonces (L, V) es linealmente estable (resp. semiestable).
- $\Leftarrow$) Razonaremos por contradicción. Supongamos que $M^*_{L,V}$ no es estable, entonces existe un cociente estable Q de $M^*_{L,V}$ tal que

  $$\mu(Q) \leq \mu(M^*_{L,V}).$$

  Similar a el Teorema 2.3.4, tenemos que

  $$0 \leq \rho \quad \leq \quad \mathrm{rk}(Q) \cdot [(\mathrm{rk}(Q) + 1) \cdot (\frac{g + a - h}{n}) - g], \tag{2.25}$$

  Si $\mathrm{rk}(Q) \leq n - 2$ y $a(n - 1) < g$, la expresión 2.25 es estrictamente menor a cero. Esto es una contradicción ya que el número de Brill Noether es no negativo. Por lo tanto

  $$\mu(Q) > \mu(M^*_{L,V}) \tag{2.26}$$

  para todo cociente Q de $M^*_{L,V}$ con $\mathrm{rk}(Q) \leq n - 2$.

  Si Q es de rango $n-1$. Por el Lema 2.3.3, existe el siguiente diagrama conmutativo

  $$\begin{array}{ccccccccc} 0 & \to & Q^* & \to & W \otimes \mathcal{O}_C & \to & F & \to & 0 \\ & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\ 0 & \to & M_{L,V} & \to & V \otimes \mathcal{O}_C & \to & L & \to & 0, \end{array}$$

  donde W está definido por $W^* := \mathrm{Im}(V^* \to H^0(Q))$ y $F^* := \mathrm{Ker}(W^* \otimes \mathcal{O}_C \to Q)$. Más aún, F es lineal y por la observación 4 insiso 3, $\deg(F) = \deg(I)$, donde I es el haz lineal generado por W. Como (L, V) es linealmente estable entonces

  $$\mu(Q) = \frac{\deg(F)}{n - 1} = \frac{\deg(I)}{n - 1} > \frac{\deg(L)}{n} = \mu(M^*_{L,V}),$$

  lo cual es una contradicción. Por lo tanto $M^*_{L,V}$ es estable.

□

2.5. Aplicaciones de estabilidad de Chow para curvas algebraicas

Sea una curva C irreducible proyectiva lisa de género $g \geq 1$. Existen dos conceptos definidos sobre la curva y los sistemas lineales relacionados con la estabilidad del haz de Sysygies como lo son: el índice de Clifford de la curva y el encaje de Clifford. En esta sección damos un repaso al material relevante sobre la estabilidad del haz de Sysygies sobre la curva, el Teorema 2.3.1 nos permite determinar la estabilidad de Chow de la curva.

Es bien conocido que para curvas lisas irreducibles y sistemas lineales completos, M_L es estable si $d > 2g$ y semiestable si $d = 2g$ ([18], Proposición 3.2). Más aún, en [42] Paranjape y Ramanan consideran el caso $(K_C, H^0(K_C))$, donde K_C es el haz lineal canónico sobre C y demuestran que M_{K_C} es semiestable, y es estable si C no es hiperelíptica.

Usando el Teorema 2.3.1, podemos escribir los resultados anteriores de la siguiente manera:

Corolario 2.5.1. *Sea una curva C lisa irreducible encajada por un sistema lineal $(L, H^0(C, L))$ completo. Se cumple las siguientes afirmaciones:*

1. *Si $d \geq 2g$, entonces $C \subset \mathbb{P}^{d-g}$ es Chow semiestable.*

2. *Si $d > 2g$, entonces $C \subset \mathbb{P}^{d-g}$ es Chow estable.*

3. *Si C es hiperelíptica, entonces $\phi_{K_C,H^0(K_C)}(C) \subset \mathbb{P}^{g-1}$ es Chow semiestable.*

4. *Si C no es hiperlíptica, entonces $\phi_{K_C,H^0(K_C)}(C) \subset \mathbb{P}^{g-1}$ es Chow estable.*

2.5.1. Curvas de Petri y generales

En el caso de una curva general, Schneider demostró la semiestabilidad de M_L para el caso completo.

Corolario 2.5.2. *Sean una curva general C de género $g \geq 2$ y un haz lineal L generado por sus secciones globales entonces C es Chow semiestable.*

Demostración. En ([46]) se demostró que M_L es semiestable entonces por el Teorema 2.3.1 C es Chow semiestable.

□

Corolario 2.5.3. *Sean una curva Brill Noether C y un sistema lineal general (L, V) de tipo $(d, n+1)$. Entonces $\phi_{L,V}(C) \subset \mathbb{P}^n$ es Chow semiestable. Más aún, $\phi_{L,V}(C) \subset \mathbb{P}^n$ es Chow estable si una de las siguientes condiciones se satisface:*

1. *C es una curva general de género $g \geq 2$ y $MCD(d, n) = 1$.*

2. *C es una curva de género $g = 1$, $d \geq n+1$ y $MCD(d, n) = 1$.*

3. *C es una curva de género $g = 2$, $d \geq n+2$ con $d \neq 2n$.*

4. *C es una curva de Petri de género $g \geq 3$ y $n \leq 4$.*

5. C es una curva de Petri de género $n \geq 5$ y $g \geq 2(n-2)$.

Demostración. Por el Teorema 2.3.1, únicamente tenemos que demostrar que bajo nuestras hipótesis el haz vectorial $M_{L,V}$ es estable. La semiestabilidad de $M_{L,V}$ fue demostrada en ([11],Teorema 5.1) para curvas generales C con (L,V) general. El Caso (1) se sigue inmediatamente de la igualdad $\mathrm{MCD}(d,n) = 1$ y la semiestabilidad de $M_{L,V}$. Para (2) y (3), la semiestabilidad de $M_{L,V}$ fue demostrada en [40]. Para (2), la semiestabilidad de $M_{L,V}$ y la condición $\mathrm{MCD}(d,n) = 1$ se obtiene la estabilidad de $M_{L,V}$. En ([7],Proposición 6.5) y ([10],Teorema 8.2) demostraron que $M_{L,V}$ es estable si C es una curva de género $g = 2, d \geq n+2$ con $d \neq 2n$. Si C es una curva de Petri de género $g \geq 3$, la estabilidad de $M_{L,V}$ fue demostrada en ([10]) cuando $n \leq 4$, esto demuestra (4). Para (5), la estabilidad de $M_{L,V}$ fue demostrada en ([11],Teorema 6.1) cuando $n \geq 5$ y $g \geq 2(n-2)$ sobre una curva de Petri. □

2.5.2. Curvas Especiales

En esta sección damos ejemplos de curvas tal que existen sistemas lineales de tipo $(d, n+1)$, pero el número de Brill-Noether $\rho(g,d,n+1)$ es negativo. Sea una curva C proyectiva irreducible de género $g \geq 2$. Denotamos por $\gamma := \mathrm{Cliff}(C)$ el índice de Clifford de la curva. Para cada $k \geq 2$, en ([8]) se define un número positivo, denotado por $d_u(k,g,\gamma)$, de la siguiente forma

$$d_u(k,g,\gamma) := \begin{cases} k+g-1+\frac{g-1}{k-1} & \text{si } \gamma \geq g-k \\ 2k+\gamma+\frac{\gamma}{k-1} & \text{si } \gamma < g-k. \end{cases}$$

Notemos que si $g \leq k$, entonces $d_u(k,g,\gamma) \leq 2k$. También definieron un número positivo, denotado por $d_l(k,g,\gamma)$, como sigue

$$d_l(k,g,\gamma) := \begin{cases} k+g-1 & \text{si } \gamma \geq g-k \\ 2k+\gamma & \text{si } \gamma < g-k. \end{cases}$$

El siguiente corolario es un criterio para decidir la estabilidad de Chow para curvas especiales.

Corolario 2.5.4. *Sea una curva C de género $g \geq 2$ con índice de Clifford γ y un sistema lineal (L,V) de tipo $(d,n+1)$. Si $d_l(n,g,\gamma) \leq d \leq d_u(n,g,\gamma)$, entonces C es Chow estable.*

Demostración. En ([8], Teorema 4.3) demostraron bajo las condiciones del teorema que $\phi^*_{L,V}(T\mathbb{P}^n)$ es estable. Por el Teorema 2.3.1, C es Chow estable. □

2.5.3. Casos particulares: Índice de Clifford y dimensión de Clifford

En esta sección estudiamos los haces lineales que calculan el índice de Clifford y los relacionaremos con la estabilidad de Chow de la curva.

El **índice de Clifford de un haz lineal** L sobre C está definido por

$$\mathrm{Cliff(L)} := \deg(L) - 2(h^0(L)-1),$$

y el **índice de Clifford de la curva** está definido como

$$\text{Cliff(C)} := \min\{\text{Cliff(L)}|\ h^0(L), h^1(L) \geq 2\}.$$

El Teorema de Clifford afirma que:

- Cliff(C) ≥ 0 para toda curva lisa.
- Cliff(C) $= 0$ si, y sólo si, C es hiperelíptica.
- Si C es general, el índice de Clifford es $\left\lfloor \frac{g-1}{2} \right\rfloor$.

Corolario 2.5.5. *Sea una curva C lisa proyectiva de género $g \geq 2$ y un haz lineal L sobre C generado por sus secciones globales:*

1. *Si Cliff(C) $\geq$ Cliff(L), entonces C es Chow semiestable.*
2. *Si $h^1(C, L) = 1$ y Cliff(C) > 0 ó Cliff(C) $>$ Cliff(L), entonces C es Chow estable.*

Demostración. En ([13], Proposición 1.2) se demostró bajo las condiciones del teorema que M_L es semiestable (estable), por el Teorema 2.3.1 C es Chow semiestable (estable). □

Observación 5. Sea un haz lineal L sobre C. Decimos que L **calcula el índice de Clifford** si

$$\text{Cliff}(L) = \text{Cliff}(C),$$

y $h^0(L), h^1(L) \geq 2$. Por la Proposición 2.5.5 podemos afirmar que si L es un haz lineal generado por sus secciones globales que calcula el índice de Clifford entonces la curva es Chow semiestable.

Corolario 2.5.6. *Sean una curva C lisa proyectiva de género $g \geq 2$ y un haz lineal L sobre C generado por sus secciones globales tal que deg(L) $\geq 2g -$ Cliff(C). Entonces*

1. *C es Chow semiestable*
2. *C es Chow estable excepto cuando deg(L) $= 2g$ con C hiperelíptica o $L \cong K(p+q)$, $p, q \in C$.*

Demostración. En ([13], Teorema 1.3) se demostró la estabilidad (semiestabilidad) de M_L bajo estas condiciones, por el Teorema 2.3.1 C es Chow estable (semiestble). □

La dimensión de Clifford de C está definida por

$$n := \min\{h^0(C, L) - 1|\ \text{L calcula el índice de Clifford de C}\ \}.$$

Si $n \geq 2$, entonces cada haz lineal L que calcula la dimensión de Clifford es muy amplio, es decir, define un encaje

$$\phi_L : C \to \mathbb{P}(H^0(C, L)^*)$$

de C en $\mathbb{P}(H^0(C, L)^*)$. El morfismo ϕ_L es llamado un **encaje de Clifford**.

Corolario 2.5.7. *Sea una curva C proyectiva lisa con dimensión de Clifford $n \geq 3$, índice de Clifford $\gamma = 2n - 3$ y género $g = 4n - 2$ entonces C es Chow estable.*

Demostración. En ([8], Corolario 5.2) demostraron que el haz tangente, $\phi_L^*(T\mathbb{P}^n)$, es estable entonces por el Teorema 2.3.1 $C \subset \mathbb{P}^n$ es Chow estable. □

CAPÍTULO 3

Esquema de Hilbert de curvas Chow estables

Consideremos el esquema de Hilbert $\mathrm{Hilb}_{n,P(t)}$ de $\mathbb{P}^n$ con polinomio de Hilbert $P(t) = dt + 1 - g$. Para enteros positivos d, g y n tales que $d - g > n - \left\lfloor \frac{g}{n+1} \right\rfloor$, describimos un abierto liso de una componente, denotada por $\mathrm{Hilb}^{Ch}_{n,P(t)}$, del esquema de Hilbert $\mathrm{Hilb}_{n,P(t)}$ tal que toda curva en el abierto es una curva de Petri sin automorfismos Chow estable.

3.1. Variedades de Brill Noether moviendo la curva

En esta sección recordamos las propiedades de los haces lineales de Poincaré y las variedades de Brill Noether para una familia de curvas lisas de género g. En este capítulo, $p : \mathcal{C} \to S$ será una familia de curvas lisas irreducibles proyectivas de género $g \geq 2$ parametrizadas por un esquema o espacio analítico S. Denotamos por C_s la curva representada por el punto $s \in S$, esto es, $C_s := p^{-1}(s)$.

Sea un entero positivo d. Supongamos que la familia p tiene una sección entonces existen un esquema sobre S (ver [4], Capítulo XXI, Teorema 2.1)

$$\mathrm{Pic}^d(p) \to S$$

y un haz lineal $\mathcal{L}_d = \mathcal{L}_d(p)$ sobre $\mathcal{C} \times_S \mathrm{Pic}^d(p)$ de grado d sobre las fibras de p satisfaciendo la siguiente propiedad universal:

Para cada morfismo $f : T \to S$ y haz lineal $\mathcal{L}$ sobre $\mathcal{C} \times_S T$ de grado d sobre las fibras de p, existe un único levantamiento $\phi : T \to \mathrm{Pic}^d(p)$ de f tal que

$$\mathcal{L} = (id \times \phi)^* \mathcal{L}_d \otimes q^*(\mathcal{Q}),$$

donde $\mathcal{Q}$ es un haz lineal sobre T (ver [4], Capítulo XXI, Teorema 2.1). El haz lineal $\mathcal{L}_d$ es llamado un **haz de Poincaré** de grado d.

Los puntos de $\mathrm{Pic}^d(p)$ son parejas (s, L_s) con $s \in S$ y L_s es un haz lineal de grado d sobre la curva C_s.

Una familia de sistemas lineales, g_d^n, sobre $p : \mathcal{C} \to S$ parametrizada por un esquema $f : T \to S$ sobre S, es una pareja $(\mathcal{L}, \mathcal{H})$, donde $\mathcal{L}$ es un haz lineal sobre $\mathcal{C}_T = \mathcal{C} \times_S T$ de grado d sobre las fibras de p y un subhaz vectorial $\mathcal{H}$ de $P_{*T}(\mathcal{L})$ de rango $n+1$ tal que $\mathcal{H}_t$ es un subespacio vectorial de $H^0(P_T^{-1}(t), \mathcal{L}_t)$, para $t \in T$ ([4], Capítulo XXI, Definición 3.12).

Dos familias $(\mathcal{L}, \mathcal{H})$ y $(\mathcal{L}', \mathcal{H}')$ parametrizadas por un esquema T sobre S **son equivalentes**, si existe un haz lineal $\mathcal{Q}$ sobre T y un isomorfismo $\mathcal{L}' \overset{\cong}{\to} \mathcal{L} \otimes P_T^*(\mathcal{Q})$, el cual induce un isomorfismo de haces vectoriales

$$\mathcal{H}' \overset{\cong}{\to} \mathcal{H} \otimes \mathcal{Q}.$$

El funtor

$$\begin{array}{ccc} G_d^n : Sch/S & \longrightarrow & Sets \\ T & \longmapsto & \left\{ \begin{array}{l} \text{clases de equivalencias de familias } g_d^n\,'s \text{ sobre} \\ \text{p:}\mathcal{C}\to S \text{ parametrizadas por } T \end{array} \right\}. \end{array}$$

es representable (ver [4], Capítulo XXI, Teorema 3.13) por un esquema $\mathcal{G}_d^n(p)$. Esto es, existe una pareja $(\mathcal{L}, \mathcal{H})$, donde $\mathcal{L}$ es un haz lineal sobre $\mathcal{C}_{\mathcal{G}} := \mathcal{G}_d^n(p) \times_S \mathcal{C}$ y un subhaz vectorial $\mathcal{H} \subset P_{*\mathcal{G}}(\mathcal{L})$ sobre $\mathcal{G}_d^n(p)$ de rango $n+1$.

El soporte de $\mathcal{G}_d^n(p)$ está dado por

$$\mathrm{Supp}(\mathcal{G}_d^n(p)) = \{(C_s, (L_s, V_s)) | L_s \in \mathrm{Pic}^d(C_s), V_s \in G(n+1, H^0(C_s, L_s))\}.$$

Teorema 3.1.1 ([4])**.** *El morfismo* $\mathcal{G}_d^n(p) \overset{f}{\to} S$ *es propio.*

Demostración. El morfismo f se factoriza de la siguiente forma

$$\mathcal{G}_d^n(p) \overset{\mathcal{X}}{\to} \mathrm{Pic}^d(p) \to S.$$

donde $\mathcal{X}$ está dado por

$$\begin{tikzcd} \mathcal{G}_d^n(p) \arrow[r, "i"] \arrow[dr, "\mathcal{X}"'] & G(n+1, E^0) \arrow[d, "\pi"] \\ & \mathrm{Pic}^d(p), \end{tikzcd}$$

donde E^0 es un haz vectorial sobre $\mathrm{Pic}^d(p)$ (ver [4], Capítulo XXI, Página 789). Ya que $\mathcal{G}_d^n(p)$ es un subesquema cerrado de $G(n+1, E^0)$ entonces el morfismo i es proyectivo. π es proyectivo por que el haz grasmaniano $G(n+1, E^0)$ es una variedad proyectiva, por lo tanto $\mathcal{X}$ es proyectivo. Por (ver [4], Capítulo XXI, Teorema 2.8) $\mathrm{Pic}^d(p) \to S$ es proyectivo. Por lo tanto f es proyectivo. En particular, f es propio (ver [25], Capítulo 2, Teorema 4.9).

□

Observación 6. Si la familia $p : \mathcal{C} \to S$ consiste de una sola curva C, es decir, S es únicamente un punto, entonces las variedades $\mathcal{G}_d^n(p)$ son las variedades $G_d^n(C)$.

Observación 7. Es bien conocido que el funtor $G^n_d(p)$ es representable únicamente cuando la familia $p : \mathcal{C} \to S$ parametrizada por S tiene una sección. Sin embargo, si p no tiene sección siempre existen los esquemas $\mathcal{G}^n_d(p)$ sobre S parametrizando sistemas lineales de tipo $(d, n+1)$ sobre p. En la categoría analítica existe una cubierta abierta $\{U_\alpha\}$ de S tal que las familias $p_\alpha : \mathcal{C}_\alpha \to U_\alpha$ tienen una sección analítica. Por ([4], Capítulo XXI, Teorema 3.13), existen espacios analíticos $\mathcal{G}^n_d(p_\alpha)$ y por la propiedad universal podemos pegar $\{\mathcal{G}^n_d(p_\alpha)\}$ para obtener un espacio analítico $\mathcal{G}^n_d(p)$.

Para probar la existencia de $\mathcal{G}^n_d(p)$ en la categoría de esquemas usamos el siguiente lema.

Lema 3.1.2. *([4], Capítulo XXI, Lema 2.12)*

Sean morfismos $Z \xrightarrow{\pi} Y' \xrightarrow{f} Y$ de esquemas tal que f es étale y finito. Denotamos por Z_{an}, Y'_{an}, Y_{an} los espacios analíticos asociados a Z, Y', Y respectivamente. Consideremos π'_{an} y f_{an} los morfismos analíticos asociados a π' y f. Supongamos que existe el diagrama

$$\begin{tikzcd} Z_{an} \arrow[r] \arrow[d, "\pi'_{an}"'] & \tilde{X} \arrow[d, "\pi"] \\ Y'_{an} \arrow[r, "f_{an}"] & Y_{an}, \end{tikzcd} \tag{3.1}$$

de espacios analíticos. Entonces existen un esquema X y un morfismo $Z \xrightarrow{F} X \to Y$ de esquemas tal que el diagrama

$$\begin{tikzcd} Z \arrow[r, "F"] \arrow[d, "\pi'"'] & X \arrow[d, "\pi"] \\ Y' \arrow[r, "f"] & Y \end{tikzcd} ,$$

es cartesiano y tiene al diagrama 3.1 como el diagrama subyacente de espacios analíticos. Más aún X es único salvo isomorfismos.

Sean una cubierta $\{U_\alpha\}$ de S y morfismos $f_\alpha : U'_\alpha \to U_\alpha$ étales, finitos de cambio de base

$$\begin{tikzcd} \mathcal{C}'_\alpha := U'_\alpha \times_{U_\alpha} \mathcal{C}_\alpha \arrow[r] \arrow[d, "p'_\alpha"'] & \mathcal{C}_\alpha \arrow[d, "p_\alpha"] \\ U'_\alpha \arrow[r, "f_\alpha"] & U_\alpha, \end{tikzcd} \tag{3.2}$$

tal que las familias p'_α tienen una sección. Para cada α, existe una proyección natural de espacios analíticos

$$\mathcal{G}^n_d(p'_\alpha) \to \mathcal{G}^n_d(p_\alpha).$$

Por el Lema 3.1.2 $\mathcal{G}^n_d(p_\alpha)$ tiene estructura de esquema. Más aún, por la unicidad del mismo Lema, $\mathcal{G}^n_d(p)$ tiene estructura de esquema.

Denotamos por $\mathcal{M}_g$ el espacio móduli de curvas lisas proyectivas de género g. Sea

$$S := \mathcal{M}^0_g \cap \mathcal{P}_g,$$

donde $\mathcal{M}^0_g$ es el sublugar geométrico de $\mathcal{M}_g$ de curvas lisas sin automorfismos y $\mathcal{P}_g$ el sublocus abierto de $\mathcal{M}_g$ de curvas de Petri [ver [4], Capítulo XXI, Proposición 3.20].

$\mathcal{M}_g$ es un esquema entero y S es un abierto no vacio de $\mathcal{M}_g$ debido a que $\mathcal{M}_g^0$ y $\mathcal{P}_g$ son abiertos entonces S es un esquema entero.

Dado que $\mathcal{M}_g^0$ es un espacio moduli fino (ver [24]), y $S \subset \mathcal{M}_g^0$ es un abierto entonces existe una familia universal que parametriza los objetos de S. Esto es, existe un esquema $\mathcal{C}$ y un morfismo

$$p_0 : \mathcal{C} \to S \tag{3.3}$$

plano y propio tal que para cada $s \in S$, $p^{-1}(s) = C_s$ es una curva de Petri sin automorfismos. Utilizaremos las construcciones de las variedades de Brill-Noether moviendo la curva para la familia 3.3 y denotamos por

$$\mathrm{Pic}^d := \mathrm{Pic}^d(p_0) \quad \text{y} \quad \mathcal{G}_d^n := \mathcal{G}_d^n(p_0).$$

Proposición 3.1.3. *$\mathcal{G}_d^n$ es un esquema noetheriano, separado y de tipo finito.*

Demostración. S es un esquema noetheriano, separado y de tipo finito. Por el Teorema 3.1.1, $\mathcal{G}_d^n \xrightarrow{f} S$ es un morfismo propio y por el Teorema 5.1.4 en el apéndice $\mathcal{G}_d^n$ es noetheriano, separado y de tipo finito.

□

Teorema 3.1.4.

1. *Si el número de Brill-Noether $\rho(g, d, n+1) = g - (n+1)(n-d+g)$ es negativo, entonces $\mathcal{G}_d^n$ es vacía. Si $\rho \geq 0$, entonces $\mathcal{G}_d^n$ es no vacía.*

2. *Si $\rho(g, d, n+1) > 0$, entonces $\mathcal{G}_d^n$ es irreducible y lisa de dimensión $3g - 3 + \rho$.*

Para la demostación del Teorema 3.1.4 se hará uso de los siguientes lemas y el Teorema de conexidad de Lazarsfeld. Demostraremos el siguiente lema ya que en la literatura no encontramos ninguna demostración.

Lema 3.1.5. *Sea un morfismo $h : X \to Y$ cerrado (abierto) y sobreyectivo. Si Y es conexo y todas las fibras de h son conexas, entonces X es conexo.*

Demostración. Razonaremos por contradicción. Supongamos que X no es conexo, entonces existen cerrados no vacíos $A, B \subset X$ tal que $X = A \cup B$ y $A \cap B = \emptyset$. Sean $\widetilde{A} = h(A)$ y $\widetilde{B} = h(B)$. Por hipótesis h es cerrada entonces $\widetilde{A}, \widetilde{B}$ son conjuntos cerrados no vacíos de Y. Dado que h es sobreyectiva tenemos que

$$Y = \widetilde{A} \cup \widetilde{B}.$$

Como Y es conexo entonces $\widetilde{A} \cap \widetilde{B} \neq \emptyset$. Sea $y \in \widetilde{A} \cap \widetilde{B}$, existen $a \in A$ y $b \in B$ tal que $h(a) = h(b) = y$. Tenemos que

$$h^{-1}(y) \subset A \cup B;$$
$$h^{-1}(y) \cap A \neq \emptyset;$$
$$h^{-1}(y) \cap B \neq \emptyset;$$

Sin embargo $A \cap B = \emptyset$, entonces la fibra de h en cada punto de $\widetilde{A} \cap \widetilde{B}$ no es conexa, lo cual es una contradicción. Por lo tanto X es conexo.

□

Lema 3.1.6. *Si el número de Brill-Noether es positivo, entonces $\mathcal{G}_d^n$ es conexa.*

Demostración. Por el Lema 3.1.1, el morfismo $\mathcal{G}_d^n \xrightarrow{f} S$ es un propio. En particular, f es cerrado y las fibras de f en los puntos $s \in S$ son la variedad de sistemas lineales $G_d^n(C_s)$. Si el número de Brill-Noether ρ es positivo, entonces $G_d^n(C_s)$ es conexa (ver [3], Capítulo 5, Teorema 1.4). Por el Lema 3.1.6, $\mathcal{G}_d^n$ es conexa.

□

Teorema 3.1.7. *[Conexidad de Lazarsfeld] Sea X un esquema localmente noetheriano, conexo y lisa entonces X es irreducible.*

Demostración del Teorema 3.1.4:

1. Si el número de Brill-Noether ρ es negativo, entonces sobre una curva C de Brill-Noether las variedades $G_d^n(C)$ son vacías entonces $\mathcal{G}_d^n$ es vacía. Si el número de Brill-Noether es no negativo, entonces para toda curva lisa de género g existen sistemas lineales. Por lo tanto $\mathcal{G}_d^n$ es diferente del vacío.

2. Sea un punto $z = (C, (L, V)) \in \mathcal{G}_d^n$. La dimensión del espacio tangente de $\mathcal{G}_d^n$ (ver [4], Capítulo XXI, Proposición 5.26) en el punto z está dada por

$$\dim(T_z\mathcal{G}_d^n) = 3g - 3 + \rho(g, d, n + 1) + \dim(\mathrm{Ker}\mu_V),$$

donde μ_V está definida como

$$\mu_V : V \otimes H^0(L^* \otimes K) \to H^0(K \otimes \Sigma_L^*),$$

y Σ_L es el haz vectorial de rango 2 donde las secciones son operadores diferenciales de orden menores a 1 actuando en las secciones de L. Más aún, existe un diagrama de la siguiente forma

$$\begin{tikzcd} V \otimes H^0(L^* \otimes K) \arrow[r, "\mu_{0,V}"] \arrow[d, "\mu_V"'] & H^0(K) \\ H^0(K \otimes \Sigma_L^*). \arrow[ur] & \end{tikzcd} \tag{3.4}$$

Como C es una curva de Petri, entonces $\mu_{0,V}$ es inyectiva. Por lo tanto μ_V es inyectiva. Entonces

$$\begin{aligned} \dim(T_z\mathcal{G}_d^n) &= 3g - 3 + \rho(g, d, n + 1) + \dim(\mathrm{Ker}\mu_V), \\ &= 3g - 3 + \rho(g, d, n + 1). \end{aligned}$$

Por lo tanto $\mathcal{G}_d^n$ es lisa de dimensión $3g - 3 + \rho(g, d, n + 1)$. Por el Lema 3.1.5, $\mathcal{G}_d^n$ es conexo. Entonces por Teorema 3.1.7 $\mathcal{G}_d^n$ es irreducible.

□

Lema 3.1.8. *$\mathcal{G}_d^n$ es un esquema reducido.*

Demostración. $\mathcal{G}_d^n$ es un esquema liso irreducible, separado y de tipo finito. Por la Proposición 3.1.4 $\mathcal{G}_d^n$ es liso entonces $\mathcal{G}_d^n$ es reducido (ver [25], Capítulo 2, Teorema 8.15). □

3.2. Morfismo al esquema de Hilbert

El objetivo de esta sección es definir un morfismo algebraico al esquema de Hilbert $\mathrm{Hilb}_{n,P(t)}$ y describir un abierto liso de una componente de $\mathrm{Hilb}_{n,P(t)}$ tal que todo punto en el abierto es una curva Petri sin automorfismos Chow estable.

Denotamos por $\mathcal{P}_d^n \subset \mathcal{G}_d^n$ al conjunto de sistemas lineales sobre curvas de Petri sin automorfismos tal que $\phi_{L,V}$ es un encaje. Es decir, $w = (C,(L,V)) \in \mathcal{P}_d^n$ si, y sólo si, C es una curva Petri sin automorfismos y (L,V) es un sistema lineal de tipo $(d, n+1)$ tal que $\phi_{L,V}$ define un encaje.

La siguiente proposición nos permite demostrar que $\mathcal{P}_d^n$ es un conjunto abierto.

Proposición 3.2.1. *([19],Proposición 5.6) Si*

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "g"] \arrow[d, "\pi"'] & Z \\ Y & \end{tikzcd} \tag{3.5}$$

es un diagrama de esquemas noetherianos y separados tal que π es propio, entonces el conjunto

$$Y_0 := \{y \in Y | g_y : \pi^{-1}(y) \to Z \quad \textit{define un encaje cerrado}\ \}$$

es un abierto.

El siguiente teorema le da estructura de esquema abierto a $\mathcal{P}_d^n$.

Teorema 3.2.2. *Sean enteros positivos d, g y n tales que $d - g > n - \left\lfloor \frac{g}{n+1} \right\rfloor$, entonces $\mathcal{P}_d^n$ es un subesquema abierto entero lisa de $\mathcal{G}_d^n$ de dimensión $3g - 3 + \rho(g, d, n+1)$.*

Demostración. La condición $d - g > n - \left\lfloor \frac{g}{n+1} \right\rfloor$ es equivalente a que el número de Brill-Noether es positivo, por el Teorema 3.1.4 $\mathcal{G}_d^n$ es entero y liso. Recordemos que todo subconjunto abierto de un esquema entero y liso tiene estructura de esquema entero y lisa de la dimensión del esquema. Por lo tanto solo demostramos que $\mathcal{P}_d^n$ es un conjunto abierto. En $\mathcal{C} \times_S \mathcal{G}_d^n$, definimos la variedad de incidencia

$$X := \{(c, (C, (L, V))) | c \in C, \ \ (C, (L, V)) \in \mathcal{G}_d^n\} \subset \mathcal{C} \times_S \mathcal{G}_d^n.$$

La variedad X es el producto fibrado de

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r] \arrow[d, "\pi"'] & \mathcal{C} \arrow[d, "p"] \\ \mathcal{G}_d^n \arrow[r] & S. \end{tikzcd} \tag{3.6}$$

Por definición de familia de curvas lisas proyectivas parametrizadas por S tenemos que $p : \mathcal{C} \to S$ es un morfismo propio. La propiedad de ser propio es estable bajo cambio de base (ver Teorema 5.1.3) por lo tanto el morfismo

$$\pi : X \to \mathcal{G}_d^n$$

es propio. Más aún, Por el Teorema 5.1.4, X es un esquema Noetheriano y separado. Tenemos el siguiente diagrama

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "g"] \arrow[d, "\pi"'] & \mathbb{P}^n \\ \mathcal{G}_d^n, & \end{tikzcd} \tag{3.7}$$

donde g está definida de la siguiente forma

$$\begin{array}{rcl} g : X & \to & \mathbb{P}^n \\ (c, (C, (L, V))) & \mapsto & \phi_{L,V}(c). \end{array}$$

Por la Proposición 3.2.1, el conjunto

$$Y_0 := \{w = (C, (L, V)) \in \mathcal{G}_d^n \;\mid\; g_w : \pi^{-1}(w) \to \mathbb{P}^n \quad \text{define un encaje cerrado } \}$$

es abierto en $\mathcal{G}_d^n$. Como

$$Y_0 = \mathcal{P}_d^n,$$

entonces $\mathcal{P}_d^n$ es un subesquema abierto entero y liso de $\mathcal{G}_d^n$.

□

Sea un haz vectorial E de rango $n+1$ sobre X. Un **marco proyectivo** en un punto $x \in X$, es un isomorfismo

$$q : \mathbb{P}(E_x) \to \mathbb{P}(\mathbb{C}^{n+1}).$$

El conjunto de todos los marcos proyectivos en x, denotado por $\mathbb{P}\mathrm{GL}(E)_x$, tiene una acción natural por derecha por el grupo lineal general $\mathbb{P}\mathrm{GL}(n+1)$ de la siguiente manera: para cada punto $g \in \mathbb{P}\mathrm{GL}(n+1)$ actúa sobre el marco vía composición

$$g \circ q : E_x \to \mathbb{P}(\mathbb{C}^{n+1}).$$

El haz de marcos de E, denotado por $\mathbb{P}\mathrm{GL}(E)$, es la unión disjunta de todas las fibras $\mathbb{P}\mathrm{GL}(E)_x$

$$\mathbb{P}\mathrm{GL}(E) = \bigcup_{x \in X} \mathbb{P}\mathrm{GL}(E)_x.$$

Cada punto en $\mathbb{P}\mathrm{GL}(E)$ es una pareja (x, q), donde x es un punto de X y q es un marco proyectivo en x. El grupo $\mathbb{P}\mathrm{GL}(n+1)$ actúa sobre $\mathbb{P}\mathrm{GL}(E)$ de la siguiente forma

$$\begin{array}{rcl} \mathbb{P}\mathrm{GL}(E) \times \mathbb{P}\mathrm{GL}(n+1) & \to & \mathbb{P}\mathrm{GL}(E) \\ ((x, q), g)) & \mapsto & (x, g \circ q). \end{array}$$

La proyección natural

$$\begin{array}{rcl} \pi : \mathbb{P}\mathrm{GL}(E) & \to & X \\ (x, q) & \mapsto & x, \end{array}$$

da estructura a $\mathbb{P}\mathrm{GL}(E)$ de $\mathbb{P}\mathrm{GL}(n+1)$-haz principal sobre X. Consideremos las trivializaciones locales (U_i, ϕ_i) de E, entonces para cada punto $x \in U_i$, tenemos un isomorfismo $\phi_{i,x} : \mathbb{P}(E_x) \to \mathbb{P}(\mathbb{C}^{n+1})$. Definimos la siguiente biyección

$$\begin{array}{rcl} \Phi_i : \pi^{-1}(U_i) & \to & U_i \times \mathbb{P}\mathrm{GL}(n+1) \\ (x,q) & \mapsto & (x, q \circ \phi_{i,x}). \end{array}$$

Entonces $\{U_i, \Phi_i\}$ da estructura a $\mathbb{P}\mathrm{GL}(E)$ de $\mathbb{P}\mathrm{GL}(n+1)$-haz principal sobre X.

La familia de curvas $p_0 : \mathcal{C} \to S$ parametrizadas por S no tiene sección. Esto es, no existe una familia universal $(\mathcal{L}, \mathcal{H})$. Sin embargo, si existe el $\mathbb{P}\mathrm{GL}(n+1)$-haz principal sobre $\mathcal{P}_d^n$.

Teorema 3.2.3. *Existe el $\mathbb{P}GL(n+1)$-haz principal $\mathcal{B}_d^n \xrightarrow{h} \mathcal{P}_d^n$ sobre $\mathcal{P}_d^n$ con fibra*

$$\Lambda_w := \{\alpha : \mathbb{P}(V^*) \to \mathbb{P}^n \ | \ \alpha \quad \textit{es un isomorfismo}\}$$

en $w = (C,(L,V)) \in \mathcal{P}_d^n$. En particular, $\mathcal{B}_d^n$ es liso, entero, separado y de tipo finito.

Demostración. Sea una familia de curvas $p : \mathcal{C} \to S$ lisas proyectivas irreducibles de género $g \geq 2$ parametrizadas por un esquema S. Vamos a demostrar que existe el $\mathbb{P}\mathrm{GL}(n+1)$-haz principal $\mathcal{B}_d^n(p) \to \mathcal{G}_d^n(p)$ sobre $\mathcal{G}_d^n(p)$ con fibra Λ_w en $w = (C,(L,V)) \in \mathcal{G}_d^n(p)$.

Primero demostramos su existencia en la categoría de espacios analíticos. Supongamos que existe una cubierta abierta $\{U_\alpha\}$de S tal que la familia $p_\alpha : \mathcal{C}_\alpha \to U_\alpha$ restringida de p tiene una sección. Entonces existen parejas $(\mathcal{L}_\alpha, H_\alpha)$, donde $\mathcal{L}_\alpha$ es un haz lineal sobre $\mathcal{C}_\alpha \times_{U_\alpha} \mathcal{G}_d^n(p_\alpha)$ y un subhaz vectorial $H_\alpha \subset P_{*\mathcal{G}_d^n(p_\alpha)}(\mathcal{L}_\alpha)$ sobre $\mathcal{G}_d^n(p_\alpha)$ de rango $n+1$. Sea los $\mathbb{P}\mathrm{GL}(n+1)$-haces principales

$$\mathbb{P}\mathrm{GL}(H_\alpha) \to \mathcal{G}_d^n(p_\alpha)$$

sobre $\mathcal{G}_d^n(p_\alpha)$. Vamos a pegar los espacios analíticos $\mathbb{P}\mathrm{GL}(H_\alpha)$ para obtener un $\mathbb{P}\mathrm{GL}(n+1)$-haz principal sobre $\mathcal{G}_d^n(p)$. Si $U_\alpha \cap U_\beta \neq \emptyset$, denotamos por $U_{\alpha\beta} := U_\alpha \cap U_\beta$, y por $p_{\alpha\beta} : \mathcal{C}_{\alpha\beta} \to U_{\alpha\beta}$ la restricción de la familia p a $U_{\alpha\beta}$. Tenemos el siguiente diagrama

$$\begin{tikzcd} \mathcal{C}_{\alpha\beta} \arrow[r] \arrow[d, "p_{\alpha\beta}"'] & \mathcal{C} \arrow[d, "p"] \\ U_{\alpha\beta} \arrow[r] & S, \end{tikzcd}$$

Si restringimos las familias universales $(\mathcal{L}_\alpha, H_\alpha)$ y $(\mathcal{L}_\beta, H_\beta)$ parametrizadas por $\mathcal{G}_d^n(p_\alpha)$ y $\mathcal{G}_d^n(p_\beta)$ respectivamente a $\mathcal{G}_d^n(p_{\alpha\beta})$ obtenemos dos familias universales $(\mathcal{L}_\alpha^{\alpha\beta}, H_\alpha^{\beta\alpha})$ y $(\mathcal{L}_\beta, H_\beta)$ parametrizadas por $\mathcal{G}_d^n(p_{\alpha\beta})$. Por lo tanto estas familias son equivalentes, esto quiere decir que existen un haz lineal $\mathcal{Q}_{\alpha\beta}$ sobre $\mathcal{G}_d^n(p_{\alpha\beta})$ y un isomorfismo

$$\mathcal{L}_\alpha^{\alpha\beta} \xrightarrow{\cong} \mathcal{L}_\beta^{\alpha\beta} \otimes P^*_{\mathcal{G}_d^n(p_{\alpha\beta})}(\mathcal{Q}_{\alpha\beta})$$

induciendo un isomomorfismo natural de haces vectoriales

$$\mathcal{H}_{\alpha\beta}^\alpha \xrightarrow{\cong} \mathcal{H}_{\alpha\beta}^\beta \otimes \mathcal{Q}_{\alpha\beta}.$$

Esto implica que

$$\begin{aligned} \mathbb{P}\mathrm{GL}(H_\alpha^{\alpha\beta}) &\cong \mathbb{P}\mathrm{GL}(H_\beta^{\alpha\beta} \otimes \mathcal{Q}_{\alpha\beta}) \\ &\cong \mathbb{P}\mathrm{GL}(H_\beta^{\alpha\beta}). \end{aligned}$$

Por lo tanto existe el espacio analítico $\mathcal{B}_d^n(p)$ induciendo el $\mathbb{P}\mathrm{GL}(n+1)$-haz principal sobre $\mathcal{G}_d^n(p)$.

A continuacón vamos a demostrar que existe el $\mathbb{P}\mathrm{GL}(n+1)$-haz principal en la categoría de esquemas. Sean una cubierta abierta de Zariski $\{U_\alpha\}$ de S y morfismos $f_\alpha : U_\alpha^{'} \to U_\alpha$ de cambios de bases, étales y finitos tal que la familia inducida por el pull-back de f_α tiene una sección. Existe el siguiente diagrama

$$\begin{tikzcd} \mathcal{C}_\alpha^{'} := U_\alpha^{'} \times_{U_\alpha} \mathcal{C}_\alpha \arrow[r] \arrow[d, "p_\alpha^{'}"'] & \mathcal{C}_\alpha \arrow[d, "p_\alpha"] \\ U_\alpha^{'} \arrow[r, "f_\alpha"] & U_\alpha, \end{tikzcd} \tag{3.8}$$

tal que la familia $p_\alpha^{'} : \mathcal{C}_\alpha^{'} \to U_\alpha^{'}$ tiene una sección. Por lo tanto existen parejas $(\mathcal{L}_\alpha^{'}, H_\alpha^{'})$, donde $\mathcal{L}_\alpha^{'}$ es un haz lineal sobre $\mathcal{C}_\alpha^{'} \times_{U_\alpha^{'}} \mathcal{G}_d^n(p_\alpha^{'})$ y un subhaz vectorial $H_\alpha^{'} \subset P_{*\mathcal{G}_d^n(p_\alpha^{'})}(\mathcal{L})$ sobre $\mathcal{G}_d^n(p_\alpha^{'})$ de rango $n+1$. Sea la proyección natural

$$\mathbb{P}\mathrm{GL}(H_\alpha^{'}) \to \mathcal{B}_{d,p_\alpha}^n,$$

de espacios analíticos, donde $\mathcal{B}_{d,p_\alpha}^n$ es el $\mathbb{P}\mathrm{GL}(n+1)$-haz principal sobre $\mathcal{G}_d^n(p_\alpha)$ para la familia restringida $p_\alpha : \mathcal{C}_\alpha \to U_\alpha$. Tenemos el siguiente diagrama

$$\begin{tikzcd} \mathbb{P}\mathrm{GL}(H_\alpha^{'}) \arrow[r] \arrow[d] & \mathcal{B}_{d,p_\alpha}^n \arrow[d] \\ \mathcal{G}_d^n(p_\alpha^{'}) \arrow[r, "g_\alpha"] \arrow[d, "p_\alpha^{'}"'] & \mathcal{G}_d^n(p_\alpha) \arrow[d, "p_\alpha"] \\ U_\alpha^{'} \arrow[r, "f_\alpha"] & U_\alpha. \end{tikzcd} \tag{3.9}$$

Como étale y finito son estables bajo cambio de base tenemos que $g_\alpha : \mathcal{G}_d^n(p_\alpha^{'}) \to \mathcal{G}_d^n(p_\alpha)$ es étale y finito. Por Lema 3.1.2 $\mathcal{B}_{d,p_\alpha}^n$ es un esquema. Más aún, por la unicidad del mismo lema podemos pegar los $\{\mathcal{B}_{d,p_\alpha}^n\}$ para obtener el esquema $\mathcal{B}_d^n(p)$, el cual define el $\mathbb{P}\mathrm{GL}(n+1)$-haz principal sobre $\mathcal{G}_d^n(p)$.

La existencia de $\mathcal{B}_d^n \to \mathcal{P}_d^n$ es aplicar la anterior construcción para la familia 3.3 de curvas de Petri sin automorfismos. Restringiendo $\mathcal{B}_d^n(p_0) \to \mathcal{G}_d^n(p_0)$ a $\mathcal{P}_d^n \subset \mathcal{G}_d^n(p_0)$ definimos $\mathcal{B}_d^n \to \mathcal{P}_d^n$ el $\mathbb{P}\mathrm{GL}(n+1)$-haz principal.

Como $\mathcal{B}_d^n \xrightarrow{h} \mathcal{P}_d^n$ define el $\mathbb{P}\mathrm{GL}(n+1)$-haz principal sobre $\mathcal{P}_d^n$ entonces h es un morfismo propio, liso y plano. Las fibras de h en un punto $z = (C, (L, V)) \in \mathcal{P}_d^n$ son isomorfas al espacio proyectivo $\mathbb{P}\mathrm{GL}(n+1)$, el cual es entero, separado y de tipo finito entonces por el Teorema 5.1.6 en el apéndice tenemos que $\mathcal{B}_d^n$ es un esquema entero, separado y de tipo finito.

Más aún, h es un morfismo liso y su fibra en el punto $z = (C, (L, V)) \in \mathcal{P}_d^n$ es lisa por lo tanto $\mathcal{B}_d^n$ es liso. Sea un punto $z = (C, (L, V)) \in \mathcal{P}_d^n$, la dimensión de $\mathcal{B}_d^n$ está dada por

$$\begin{aligned}
\dim(\mathcal{B}_d^n) &= \dim(\mathcal{P}_d^n) + \dim h^{-1}(z) \\
&= \dim(\mathcal{P}_d^n) + \dim(\mathbb{P}\mathrm{GL}(n+1)) \\
&= 3g - 3 + \rho(g, d, n+1) + n(n+2).
\end{aligned}$$

□

Fijemos enteros positivos d, g y n tales que $d - g > n - \left\lfloor \frac{g}{n+1} \right\rfloor$. Consideremos el polinomio de Hilbert $P(t) = dt + 1 - g$. A continuación definimos un morfismo algebraico de $\mathcal{B}_d^n$ al esquema de Hilbert $\mathrm{Hilb}_{n,P(t)}$. Sea la variedad de incidencia

$$\mathcal{F} := \{(t, (C, (L, V), \alpha : \mathbb{P}(V^*) \to \mathbb{P}^n)) | t \in \alpha(\phi_{L,V}(C))\} \subset \mathbb{P}^n \times \mathcal{B}_d^n.$$

Consideremos la proyección $\pi_2 : \mathcal{F} \to \mathcal{B}_d^n$. Sea un punto $z = (C, (L, V), \alpha) \in \mathcal{B}_d^n$ tenemos que $\pi_2^{-1}(z) = \alpha(\phi_{L,V}(C)) \subset \mathbb{P}^n$ es una curva lisa proyectiva irreducible de grado d y género g. Por lo tanto los polinomios de Hilbert de todas las fibras de π_2 están dados por $dt + 1 - g$. Como $\mathcal{B}_d^n$ es un esquema reducido (ver Teorema 3.2.3) entonces $\pi_2 : \mathcal{F} \to \mathcal{B}_d^n$ es un morfismo plano (ver [4], Capítulo IX, Proposición 2.2), el cual define una familia de curvas parametrizadas por $\mathcal{B}_d^n$. El esquema de Hilbert es un espacio moduli entonces la familia $\pi_2 : \mathcal{F} \to \mathcal{B}_d^n$ parametrizada por $\mathcal{B}_d^n$ induce un morfismo natural

$$\Phi : \mathcal{B}_d^n \to \mathrm{Hilb}_{n,P(t)},$$

definido por

$$z := (C, (L, V), \alpha : \mathbb{P}(V^*) \to \mathbb{P}^n) \longmapsto [\alpha(\phi_{L,V}(C)) \subset \mathbb{P}^n].$$

A continuación demostramos que el morfismo $\mathcal{B}_d^n \overset{\Phi}{\to} \mathrm{Hilb}_{n,P(t)}$ es inyectivo. Para esto, damos un lema, el cual es una aplicación al teorema fundamental de la geometría proyectiva.

Teorema 3.2.4 (Teorema Fundamental de la Geometría Proyectiva)**.** *([14], Teorema 1.1.12) Sean puntos $\{x_0, x_1, \ldots, x_{n+1}\} \subset \mathbb{P}^n$ en posición general y un automorfismo $f : \mathbb{P}^n \to \mathbb{P}^n$. Si $f(x_i) = x_i$ para $i \in \{0, 1, \ldots, n+1\}$, entonces f es el morfismo identidad.*

Lema 3.2.5. *Sean dos automorfismos $\alpha, \beta : \mathbb{P}^n \to \mathbb{P}^n$. Supongamos que existe una curva irreducible no degenerada $C \subset \mathbb{P}^n$ tal que*

$$\alpha|_C = \beta|_C$$

entonces $\alpha = \beta$.

Demostración. Como C es no degenerada, existen $\bar{x}_0, \bar{x}_1, \ldots, \bar{x}_n \in C$ tal que el espacio lineal generado por $\{x_0, x_1, \ldots, x_n\}$ es $\mathbb{C}^{n+1}$. Para cada $i \in \{0, 1, \ldots, n\}$, sea

$$H_i =< x_0, x_1, \ldots, x_{i-1}, x_{i+1}, \ldots, x_n >\subset \mathbb{C}^{n+1}$$

el hiperplano generado por los x_j con $j \neq i$. Como C es irreducible, entonces

$$C \nsubseteq \mathbb{P}(H_0) \cup \mathbb{P}(H_1) \cup \ldots \cup \mathbb{P}(H_n).$$

Por lo tanto existe $\bar{p} \in C$ tal que $\bar{p} \notin \mathbb{P}(H_0) \cup \mathbb{P}(H_1) \cup \ldots \cup \mathbb{P}(H_n)$. Por construcción $\{\bar{x}_0, \bar{x}_1, \ldots, \bar{x}_n, \bar{p}\}$ están en posición general. Sea $f = \alpha \circ \beta^{-1} : \mathbb{P}^n \to \mathbb{P}^n$, como $\alpha|_C = \beta|_C$ entonces $f(\bar{x}_i) = \bar{x}_i$ para $i \in \{0, 1, \ldots, n\}$ y $f(\bar{p}) = \bar{p}$. Por el primer teorema fundamental de la geometría proyectiva, f es la identidad. Por lo tanto $\alpha = \beta$.

□

Teorema 3.2.6. *El morfismo $\Phi : \mathcal{B}_d^n \to Hilb_{n,P(t)}$ es inyectivo.*

Demostración. Sean (x, α), $(y, \beta) \in \mathcal{B}_d^n$, con $x = (C, (L, V)), y = (\widetilde{C}, (\widetilde{L}, \widetilde{V})) \in \mathcal{P}_d^n$, $\alpha \in \Lambda_x, \beta \in \Lambda_y$ tal que

$$\Phi(x, \alpha) = \Phi(y, \beta).$$

Vamos a demostrar que $(x, \alpha) = (y, \beta)$. Tenemos el siguiente diagrama conmutativo

$$\begin{tikzcd}
C \arrow[r, "\phi_{L,V}"] \arrow[d, "h"'] & \mathbb{P}(V^*) \arrow[r, "\alpha"] & \mathbb{P}^n, \\
\widetilde{C} \arrow[r, "\phi_{\widetilde{L},\widetilde{V}}"'] & \mathbb{P}(\widetilde{V}^*) \arrow[ur, "\beta"'] &
\end{tikzcd} \tag{3.10}$$

donde h está definida de la siguiente forma

$$\begin{array}{rcl} h : C & \to & \widetilde{C} \\ x & \mapsto & \phi^{-1}_{\widetilde{L},\widetilde{V}} \circ \beta^{-1} \circ \alpha \circ \phi_{L,V}(x). \end{array}$$

Como h es la composición de isomorfismos entonces h es un isomorfismo, por lo tanto $C \cong \widetilde{C}$. Por el diagrama 3.10 tenemos que

$$(L, V) = \phi^*_{L,V} \alpha^*(\mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(1), H^0(\mathbb{P}^n, \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(1))) \quad \text{y } (\widetilde{L}, \widetilde{V}) = \phi^*_{\widetilde{L},\widetilde{V}} \beta^*(\mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(1), H^0(\mathbb{P}^n, \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(1))).$$

Más aún,

$$h^*(\widetilde{L}, \widetilde{V}) = (L, V).$$

Como el único automorfismo de C es la identidad entonces h es la identidad, $(L, V) = (\widetilde{L}, \widetilde{V})$ y

$$\alpha \circ \phi_{L,V} = \beta \circ \phi_{L,V},$$

esto implica que

$$\alpha|_{\phi_{L,V}(C)} = \beta|_{\phi_{L,V}(C)}.$$

Tenemos que $\phi_{L,V}(C) \subset \mathbb{P}(V^*)$ es una curva irreducible no degenerada. Por el Lema 3.2.5, $\alpha = \beta$. Entonces $(x, \alpha) = (y, \beta)$, y por lo tanto Φ es un morfismo inyectivo.

□

Como $\mathcal{B}_d^n$ es irreducible, definimos $\mathrm{Hilb}_{n,P(t)}^{Ch}$ la componente del esquema de Hilbert tal que $\Phi(\mathcal{B}_d^n) \subset \mathrm{Hilb}_{n,P(t)}^{Ch}$.

Teorema 3.2.7. *Sean enteros positivos g, d y n tales que $g \geq 4$ y $d - g > n - \left\lfloor \frac{g}{n+1} \right\rfloor$. Si una de las condiciones en el Teorema 2.5.3 se satisface, entonces $Hilb_{n,P(t)}^{Ch} \neq \emptyset$. Más aún, se cumple las siguientes afirmaciones:*

1. $\dim Hilb_{n,P(t)}^{Ch} = 3g - 3 + \rho(g, d, n+1) + n(n+2)$.

2. *$Hilb_{n,P(t)}^{Ch}$ es lisa en $\Phi(z)$, para cada $z \in \mathcal{B}_d^n$.*

3. $\dim Hilb_{n,P(t)}^{Ch}/SL(n+1) = \dim \mathcal{P}_d^n = 3g - 3 + \rho(g, d, n+1)$.

4. *Existe un abierto denso liso $U \subset Hilb_{n,P(t)}^{Ch}$ tal que toda curva de U es de Petri sin automorfismos Chow estable.*

Demostración. Bajo las condiciones de teorema, existen sistemas lineales (L, V) de tipo $(d, n+1)$ tal que $\phi_{L,V}$ es un encaje sobre C una curva Petri general. El Teorema 2.5.3 demuestra que para una sistema lineal general (L, V), $\phi_{L,V}(C) \subset \mathbb{P}^n$ es Chow estable, entonces $\mathrm{Hilb}_{n,P(t)}^{Ch} \neq \emptyset$.

Por el Teorema 3.2.6, el morfismo $\Phi : \mathcal{B}_d^n \longrightarrow \mathrm{Hilb}_{n,P(t)}^{Ch}$ es inyectivo. Por el Teorema 3.2.2, $\mathcal{B}_d^n$ es irreducible y lisa de dimensión $3g-3+\rho(g, d, n+1)+n(n+2)$. Afirmamos que $\mathrm{Hilb}_{n,P(t)}^{Ch}$ es lisa en $\Phi(z) = [\alpha(\phi_{L,V}(C)) \subset \mathbb{P}^n]$ de dimensión $\chi(N_{C/\mathbb{P}^n})$, donde $N_{C/\mathbb{P}^n}$ es el haz normal de C en $\mathbb{P}^n$. Para ver esto, es suficiente demostrar que $h^0(C, N_{C/\mathbb{P}^n}) = \chi(N_{C/\mathbb{P}^n})$ o equivalente que $h^1(C, N_{C/\mathbb{P}^n}) = 0$. Demostramos primero que $h^1(C, T\mathbb{P}^n_{|C}) = 0$. Por 2.8, tenemos que

$$T\mathbb{P}^n_{|C} = M_{L,V}^* \otimes L.$$

Equivalente a

$$(T\mathbb{P}^n_{|C})^* \otimes K_C = M_{L,V} \otimes L^* \otimes K_C. \tag{3.11}$$

Tensorizando la sucesión exacta

$$0 \to M_{L,V} \to V \otimes \mathcal{O}_C \to L \to 0$$

con $L^* \otimes K_C$, obtenemos

$$0 \to M_{L,V} \otimes L^* \otimes K_C \to V \otimes \mathcal{O}_C \otimes L^* \otimes K_C \to K_C \to 0. \tag{3.12}$$

Dado que C es una curva de Petri entonces

$$h^0(C, M_{L,V} \otimes L^* \otimes K_C) = 0.$$

Por 3.11, tenemos que

$$h^0(C, (T\mathbb{P}^n_{|C})^* \otimes K_C) = 0,$$

y por dualidad de Serre,

$$h^1(C, T\mathbb{P}^n_{|C}) = 0. \tag{3.13}$$

El haz normal se encuentra en la siguiente sucesión exacta

$$0 \to TC \to T\mathbb{P}^n_{|C} \to N_{C/\mathbb{P}^n} \to 0 \tag{3.14}$$

de haces vectoriales sobre C. Induce una sucesión exacta en cohomología

$$0 \to H^0(TC) \to H^0(T\mathbb{P}^n_{|C}) \to H^0(N_{C/\mathbb{P}^n}) \to H^1(TC) \to H^1(T\mathbb{P}^n_{|C}) \to H^1(N_{C/\mathbb{P}^n}) \to 0. \tag{3.15}$$

Por 3.13, $h^1(C, T\mathbb{P}^n_{|C}) = 0$ entonces

$$h^1(C, N_{C/\mathbb{P}^n}) = 0,$$

por lo tanto $\mathrm{Hilb}^{Ch}_{n,P(t)}$ es lisa en $\Phi(z)$ y $\chi(N_{C/\mathbb{P}^n}) = h^0(C, N_{C/\mathbb{P}^n})$, como habíamos afirmado. Por el Teorema de Riemann Roch, tenemos que

$$\begin{array}{rcl} h^0(C, T\mathbb{P}^n_{|C}) & = & \deg(T\mathbb{P}^n_{|C}) + n(1-g) \\ & = & \deg(M^*_{L,V} \otimes L) + n(1-g) \\ & = & d(n+1) + n(1-g) \\ & = & \rho(g, d, n+1) + n(n+2). \end{array}$$

Como $g \geq 4$, tenemos que

$$h^0(C, TC) = 0 \quad \text{y} \quad h^1(C, TC) = 3g - 3.$$

Por 3.15 concluimos que

$$\begin{array}{rcl} h^0(C, N_{C/\mathbb{P}^n}) & = & \chi(N_{C/\mathbb{P}^n}) \\ & = & \chi(T\mathbb{P}^n|_C) - \chi(TC) \\ & = & \rho(g, d, n+1) + n(n+2) + 3g - 3. \end{array}$$

Por lo tanto

$$\dim \mathrm{Hilb}^{Ch}_{n,P(t)} = h^0(C, N_{C/\mathbb{P}^n}) = 3g - 3 + \rho(g, d, n+1) + n(n+2) = \dim \mathcal{B}^n_d.$$

Tenemos que

$$\dim \mathrm{Hilb}^{Ch}_{n,P(t)}/\mathrm{SL}(n+1) = 3g - 3 + \rho(g, d, n+1).$$

Ya que Φ es inyectivo entonces Φ es genéricamente finito. Más aún, como la dimensión de $\mathcal{B}^n_d$ es igual a la de $\mathrm{Hilb}^{Ch}_{n,P(t)}$ entonces Φ es dominante. Sea

$$Y := \{[h] \in \mathrm{Hilb}^{Ch}_{n,P(t)} | [h] \text{ es un punto liso de } \mathrm{Hilb}^{Ch}_{n,P(t)}\}.$$

Y es un subesquema abierto reducido, separado y de tipo finito tal que $\Phi(\mathcal{B}^n_d) \subset Y$. Por el Teorema 2.3.1 todo punto $\Phi(z) = \alpha \circ \phi_{L,V}(C) \subset \mathbb{P}^n$ es una curva lisa Chow estable. Por ([25], Capítulo II, Ejercicio 3.7) existe un abierto $U \subset Y$ tal que el morfismo

$$\Phi^{-1}(U) \to U$$

es finito. En particular, U es un abierto de $\mathrm{Hilb}^{Ch}_{n,P(t)}$.

□

CAPÍTULO 4

Morfismos Chow estables

Grothendieck estudió familias de curvas dentro de una variedad proyectiva X, o más precisamente morfismos de una curva C lisa proyectiva a una variedad proyectiva X. En particular, la geometría birracional estudia curvas racionales sobre una variedad Y. En este capítulo estamos interesados en estudiar curvas de Petri en $\mathbb{P}^n$. Consideremos una curva X de Petri de género $g \geq 4$ y el esquema de morfismos $\mathrm{Hom}_d(X, \mathbb{P}^n)$ de X a $\mathbb{P}^n$ con polinomio de Hilbert $P(t) = dt + 1 - g$. Para $d - g > n - \left\lfloor \frac{g}{n+1} \right\rfloor$, describimos un abierto liso de una componente $\mathrm{Hom}_d^{Ch}(X, \mathbb{P}^n)$ del esquema de morfismos tal que todo morfismo es Chow estable.

4.1. Hom(X,Y)

Consideremos variedades proyectivas X y Y. El conjunto de morfismos de X a Y es parametrizado por un esquema localmente noetheriano $\mathrm{Hom}(X, Y)$. Fijemos un divisor amplio H sobre Y. El **polinomio de Hilbert de un morfismo** $f : X \to Y$ con respecto a H, está definido como

$$P_H(f)(m) = \mathcal{X}(X, f^*H^m).$$

Sea el esquema de morfismos $\mathrm{Hom}_{P(t)}(X, Y) \subset \mathrm{Hom}(X, Y)$ de X a Y con polinomio de Hilbert $P(t)$. El esquema $\mathrm{Hom}(X, Y)$ es la unión disjunta de $\mathrm{Hom}_{P(t)}(X, Y)$, para todos los polinomios de Hilbert $P(t)$.

Una **familia de morfismos parametrizada por un esquema** S, es un morfismo

$$f : X \times S \to Y \times S,$$

tal que para cada punto $s \in S$, $f_s : X \to Y$ es un morfismo algebraico con polinomio de Hilbert $P(t)$. Grothendieck demostró que el funtor

$$\begin{array}{rccc} \mathcal{H}om_{P(t)}(X,Y) : & Sch & \longrightarrow & Sets \\ & S & \longmapsto & \left\{ \begin{array}{c} \text{familias de morfismos parametrizadas por S} \\ \text{con polinomio de Hilbert p(t)} \end{array} \right\}. \end{array}$$

es representable (ver [15], Capítulo 2). Esto es, existe un esquema $\mathrm{Hom}_{P(t)}(X,Y)$ y una familia universal

$$f^{\mathrm{univ}} : X \times \mathrm{Hom}_{P(t)}(X,Y) \to Y \times \mathrm{Hom}_{P(t)}(X,Y)$$

parametrizada por $\mathrm{Hom}_{P(t)}(X,Y)$ tal que para cada punto $s \in \mathrm{Hom}_{P(t)}(X,Y)$, el morfismo $f_s^{\mathrm{univ}} : X \to Y$ es el morfismo correspondiente a s. Más aún, existe una correspondencia uno a uno entre

1. los morfismos $\phi : S \to \mathrm{Hom}_{P(t)}(X,Y)$ y
2. los S-morfismos $f : X \times S \to Y \times S$

obtenido por

$$\{\phi : S \to \mathrm{Hom}_{P(t)}(X,Y)\} \mapsto \{f : X \times S \to Y \times S\},$$

donde

$$f(x,s) = (\pi_1 \circ f^{\mathrm{univ}}(x,\phi(s)), s).$$

La construcción de Grothendieck del esquema $\mathrm{Hom}(X,Y)$ es una consecuencia de la construcción del esquema de Hilbert $\mathrm{Hilb}(X \times Y)$, el cual parametriza subesquemas cerrados $Z \subset X \times Y$. El identificó un morfismo $X \xrightarrow{f} Y$ con el subesquema definido por la gráfica $\Gamma_f \subset X \times Y$. Concretamente, dado un morfismo $f : X \to Y$, la gráfica

$$\Gamma_f := \{(x,y) | f(x) = y\} \subset X \times Y,$$

es un subesquema cerrado de $X \times Y$ tal que

1. $\pi_1 : \Gamma \to X$ es un isomorfismo.
2. $\pi_2 : \Gamma \to Y$ es igual a f.

Consideremos un morfismo $f : X \to Y$ en $\mathrm{Hom}_{P(t)}(X,Y)$. El espacio tangente (ver [15], Capítulo 2, Proposición 2.4) de $\mathrm{Hom}_{P(t)}(X,Y)$ en $[f]$ está dado por

$$T_{[f]}\mathrm{Hom}_{P(t)}(X,Y) = H^0(X, Hom(f^*\Omega^1_Y, \mathcal{O}_X)).$$

Si Y es una variedad lisa, entonces

$$T_{[f]}\mathrm{Hom}_{P(t)}(X,Y) = H^0(X, f^*(TY)).$$

Más aún, si X es una curva lisa y $h^1(X, f^*(TY)) = 0$, entonces $f : X \to Y$ es un punto liso de $\mathrm{Hom}(X,Y)$. Estamos interesados en estudiar el esquema $\mathrm{Hom}_{P(t)}(X,Y)$: cuando X es una curva de Petri de género g y Y es el espacio proyectivo $\mathbb{P}^n$. En este caso, fijemos la polarización $H := \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(1)$ sobre $\mathbb{P}^n$ y sea $f : X \to \mathbb{P}^n$ un morfismo. El polinomio de Hilbert de f está dado por

$$\begin{aligned} P_H(m) &= \mathcal{X}(X, f^*\mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(m)) \\ &= h^0(X, f^*\mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(m)) \qquad \text{para } m \gg 0 \\ &= dm + 1 - g, \end{aligned}$$

donde d es el grado de $f^*(\mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(1))$. Esto quiere decir que cuando X es una curva, fijar el polinomio de Hilbert es equivalente a fijar el grado del haz lineal $f^*(\mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(1))$. Por lo tanto denotamos por $\mathrm{Hom}_d(X, \mathbb{P}^n)$ a $\mathrm{Hom}_{P(t)}(X, \mathbb{P}^n)$, donde $P(t) = dt + 1 - g$ es el polinomio de Hilbert.

Denotamos por $\mathcal{S}_d^n \subset G_d^n(X)$ al conjunto de sistemas lineales sobre X tal que $\phi_{L,V}$ es un encaje. Existe el $\mathbb{P}\mathrm{GL}(n+1)$-haz principal $\mathcal{A}_d^n \xrightarrow{h} \mathcal{S}_d^n$ sobre $\mathcal{S}_d^n$ con fibra

$$\Lambda_w := \{\alpha : \mathbb{P}(V^*) \to \mathbb{P}^n \mid \alpha \text{ es un isomorfismo}\}$$

en $w = (L, V) \in \mathcal{S}_d^n$. Para cada curva X de Petri sin automorfismos existe $s_x \in S$ tal que $p_0^{-1}(s_x) = X$, por lo tanto solo es restringir a $(X, (L, V))$ el $\mathbb{P}\mathrm{GL}(n+1)$-haz principal del Teorema 3.2.3.

Teorema 4.1.1. *Existe un morfismo $\Omega : \mathcal{A}_d^n \to Hom_d(X, \mathbb{P}^n)$ algebraico inyectivo .*

Demostración. Consideremos el morfismo

$$\begin{array}{rcl} h : X \times \mathcal{A}_d^n & \to & \mathbb{P}^n \times \mathcal{A}_d^n \\ (x, ((L, V), \alpha)) & \mapsto & (\alpha \circ \phi_{L,V}(x), (L, V), \alpha)). \end{array}$$

h define una familia parametrizada por $\mathcal{A}_d^n$. Como $\mathrm{Hom}_d(X, \mathbb{P}^n)$ es un espacio moduli entonces h define un morfismo

$$\begin{array}{rcl} \Omega : \mathcal{A}_d^n & \to & \mathrm{Hom}_d(X, \mathbb{P}^n) \\ ((L, V), \alpha)) & \mapsto & \alpha \circ \phi_{L,V}. \end{array}$$

La inyectividad de Ω es similar a la de Φ (ver Teorema 3.2.6).

□

Consideremos un punto $[f : X \to \mathbb{P}^n] \in \mathrm{Hom}_d(X, \mathbb{P}^n)$. Decimos que f **es un morfismo Chow estable** si $f(X) \subset \mathbb{P}^n$ es una curva Chow estable. Definimos por $\mathrm{Hom}_d^{Ch}(X, \mathbb{P}^n)$ la componente del esquema de morfismos $\mathrm{Hom}_d(X, \mathbb{P}^n)$ tal que $\Omega(\mathcal{A}_d^n) \subset \mathrm{Hom}_d^{Ch}(X, \mathbb{P}^n)$.

Teorema 4.1.2. *Sean enteros positivos g, d y n tales que $g \geq 4$ y $d - g > n - \left\lfloor \frac{g}{n+1} \right\rfloor$. Si una de las condiciones en el Teorema 2.5.3 se satisface, entonces $Hom_d^{Ch}(X, \mathbb{P}^n) \neq \emptyset$. Más aún, se cumple las siguientes afirmaciones*

1. *$Hom_d^{Ch}(X, \mathbb{P}^n)$ es liso.*

2. *$\dim Hom_d^{Ch}(X, \mathbb{P}^n) = \rho(g, d, n+1) + n(n+2)$.*

3. *$\dim Hom_d^{Ch}(X, \mathbb{P}^n)/SL(n+1) = \dim \mathcal{S}_d^n = \rho(g, d, n+1)$.*

Demostración. Bajo las condiciones de teorema, existen sistemas lineales (L, V) de tipo $(d, n+1)$ tal que $\phi_{L,V}$ es un encaje sobre una curva X de Petri. El Teorema 2.5.3 demuestra que para un sistema lineal general (L, V), $\phi_{L,V}(X) \subset \mathbb{P}^n$ es Chow estable, por lo tanto $\mathrm{Hom}_d^{Ch}(X, \mathbb{P}^n) \neq \emptyset$.

Por el Teorema 4.1.1, el morfismo $\Omega : \mathcal{A}_d^n \longrightarrow \mathrm{Hom}_d(X, \mathbb{P}^n)$ es inyectivo. Afirmamos que $\mathrm{Hom}_d^{Ch}(X, \mathbb{P}^n)$ es liso en $\Omega(z) = \alpha \circ \phi_{L,V} := \psi$ de dimensión $\rho(g, d, n+1) + n(n+2)$. Vamos a demostrar que $h^1(X, \psi^*(T\mathbb{P}^n)) = 0$. Por (2.7), tenemos que

$$\psi^*(T\mathbb{P}^n) = M_{L,V}^* \otimes L.$$

Equivalente a

$$\psi^*(T\mathbb{P}^n)^* \otimes K_X = M_{L,V} \otimes L^* \otimes K_X. \tag{4.1}$$

Tenemos la sucesión exacta

$$0 \to M_{L,V} \otimes L^* \otimes K_X \to V \otimes \mathcal{O}_X \otimes L^* \otimes K_X \to K_X \to 0. \tag{4.2}$$

Como X es una curva de Petri entonces

$$h^0(X, M_{L,V} \otimes L^* \otimes K_X) = 0.$$

Por (4.1), tenemos que

$$h^0(X, \psi^*(T\mathbb{P}^n)^* \otimes K_X) = 0,$$

y por dualidad de Serre,

$$h^1(X, \psi^*(T\mathbb{P}^n)) = 0. \tag{4.3}$$

$\mathrm{Hom}_d^{Ch}(X, \mathbb{P}^n)$ es liso en $\Omega(z)$. Por el Teorema de Riemann Roch

$$\begin{aligned} h^0(X, \psi^*(T\mathbb{P}^n)) &= \deg(\psi^*(T\mathbb{P}^n)) + n(1-g) \\ &= d(n+1) + n(1-g) \\ &= \rho(g, d, n+1) + n(n+2). \end{aligned}$$

Por lo tanto

$$\dim \mathrm{Hom}_d^{Ch}(X, \mathbb{P}^n) = h^0(X, \psi^*(T\mathbb{P}^n)) = \rho(g, d, n+1) + n(n+2) = \dim \mathcal{S}_d^n$$

Tenemos que

$$\dim \mathrm{Hom}_d^{Ch}(X, \mathbb{P}^n)/\mathrm{SL}(n+1) = \rho(g, d, n+1).$$

□

CAPÍTULO 5

Apéndice

En este capítulo damos las definiciones y los teoremas que se utilizaron para el desarrollo de este trabajo.

5.1. Morfismos

La condición de Hausdorff para un espacio topológico X es equivalente a que la diagonal $\Delta(X) \subset X \times X$ es un subconjunto cerrado de $X \times X$. Sea $f : X \to Y$ un morfismo de esquemas. El **morfismo diagonal** es el único morfismo $\Delta : X \to X \times_Y X$ tal que la composición con las proyecciones $p_1, p_2 : X \times_Y X \to X$ es el morfismo identidad de $X \to X$. Motivando la definición de espacio de Hausdorff, se tiene la siguiente.

Definición 5.1.1 ([25], Capítulo II, Página 96)**.** Sea un morfismo $f : X \to Y$ de esquemas. Decimos que f **es separado** si el morfismo $\Delta : X \to X \times_Y X$ es cerrado. En este caso decimos que X es separado sobre Y.

En topología general se define una aplicación propia como función continua con la propiedad que preimágenes de compactos son compactos. Los morfismos propios son un análogo en la teoría de esquemas. Los esquemas propios corresponden con los espacios compactos.

Definición 5.1.2 ([25],Capítulo II, Página 100)**.** Sea un morfismo $f : X \to Y$ de esquemas. Decimos que f **es universalmente cerrado** si f es cerrado y para todo morfismo $g : Z \to Y$ de esquemas, el morfismo $Z \times_Y X \to Z$ es cerrado, donde los morfismos se encuentran en el siguiente diagrama conmutativo

$$\begin{tikzcd} Z \times_Y X \arrow[r] \arrow[d] & X \arrow[d, "f"] \\ Z \arrow[r, "g"'] & Y. \end{tikzcd}$$

Decimos que un morfismo $f : X \to Y$ **es propio** si es f es separado, de tipo finito y universalmente cerrado.

Teorema 5.1.3 ([25],Capítulo II, Corolario 4.8)**.**

- *Las inmersiones cerradas son propias.*
- *Una composición de morfismos propios es propio.*
- *Morfismos propios son estables bajo cambio de base.*
- *Productos de propios son propios.*
- *Consideremos dos morfismos $f : X \to Y$ y $g : Y \to Z$ de esquemas. Si $g \circ f$ es propio y g es separado, entonces f es propio.*
- *Un morfismo $f : X \to Y$ es propio si, y sólo si, existe una cubierta abierta $\{V_i\}$ de Y tal que*

$$f^{-1}(V_i) \to V_i$$

  es propio para cada i.

Teorema 5.1.4. *Sea un morfismo $f : X \to Y$ propio de esquemas. Si Y es Noetheriano (separado, tipo finito), entonces X es Noetheriano (separado, de tipo finito).*

Un A-módulo M es **plano** si el funtor $\otimes_A M$ es exacto, es decir, si para toda sucesión exacta de A-módulos

$$0 \to M_1 \to M_2 \to M_3 \to 0,$$

la sucesión de A-módulos

$$M_1 \otimes M \to M_2 \otimes M \to M_3 \otimes M \to 0$$

es exacta. Un homomorfismo de anillos $f : A \to B$ es plano si convierte a B en un A-módulo plano con la operación dada por

$$a \cdot b = f(a)b,$$

con $a \in A$ y $b \in B$. Esta propiedad algebraica da lugar a una propiedad sobre los morfismos de esquemas que resulta una interpretación geométrica. Los morfismos planos presentan cierta uniformidad en sus fibras, en sentido que comparten características en común.

Definición 5.1.5 ([25], Capítulo III, Página 254)**.** Consideremos un morfismo $f : X \to Y$ de esquema. Decimos que f es **plano** en $x \in X$ si el morfismo inducido $f^{'} : \mathcal{O}_{Y,f(x)} \to \mathcal{O}_{X,x}$ es plano. Decimos que f es plano si es plano para todo $x \in X$.

El siguiente teorema nos ayudará a demostrar la irreducibilidad de un esquema

Teorema 5.1.6 ([28], Teorema 4.51)**.**
Sea un morfismo $f : X \to Y$ plano de esquemas

- *Si Y es irreducible, las fibras de f son irreducibles, entonces X es irreducible.*
- *Si Y es reducido y las fibras de f son reducidas, entonces X es reducido.*
- *Si Y es entero y las fibras de f son enteras, entonces X es entero.*

5.2. Estabilidad de haces vectoriales

En ([36]), Mumford introduce el concepto de haz vectorial estable (resp. semiestable) sobre una curva lisa proyectiva irreducible. Más aún, demostró que las clases de isomorfismos de haces vectoriales estables de rango n y grado d tiene estructura de variedad cuasiproyectiva. En esta sección recordamos los principales resultados de haces vectoriales estables.

Definición 5.2.1. Sea un haz vectorial E sobre C. **La inclinación de E** es el cociente entre el grado y rango de E, es decir

$$\mu(E) := \frac{\deg(E)}{\mathrm{rk}(E)}.$$

La siguiente proposición relaciona las inclinaciones de los haces vectoriales en una sucesión.

Proposición 5.2.2. *Consideremos una sucesión exacta*

$$0 \to E \to F \to G \to 0$$

de haces vectoriales. Las siguientes afirmaciones se satisfacen:

1. *Si $\mu(E) < \mu(F)$ (resp. $\leq$), entonces $\mu(F) < \mu(G)$ (resp. $\leq$).*
2. *Si $\mu(E) > \mu(F)$ (resp. $\geq$), entonces $\mu(F) > \mu(G)$ (resp. $\geq$).*

La demostración de esta proposición se obtiene usando las siguientes igualdades:

$$\begin{aligned} \deg(F) &= \deg(E) + \deg(G) \\ \mathrm{rk}(F) &= \mathrm{rk}(E) + \mathrm{rk}(G). \end{aligned}$$

Definición 5.2.3. Sea un haz vectorial E sobre C. Decimos que E es **semiestable** si para todo subhaz vectorial $F \subset E$ no trivial

$$\mu(F) \leq \mu(E).$$

Si la desigualdad es estricta, entonces decimos que E es **estable**.

Veamos las propiedades elementales de haces semiestables y estables .

1. Todo haz lineal es estable.
2. E es estable (resp. semiestable) si, y sólo si, E^* es estable (resp. semiestable).
3. Si E es estable (resp. semiestable) y L un haz lineal, entonces $E \otimes L$ es estable (resp. semiestable).
4. Si el grado y el rango de E son primos relativos, entonces todo haz semiestable es estable.

La estabilidad de haces se puede determinar mediante sus cocientes.

Proposición 5.2.4. *Consideremos un haz vectorial E sobre C. Las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

1. *E es estable (resp. semiestable).*

2. *Si para todo subhaz $F \subset E$ no trivial*

$$\mu(F) < \mu(E) \ \ (resp. \leq).$$

3. *Si para todo cociente Q de E*

$$\mu(E) < \mu(Q) \ \ (resp. \leq)$$

La estabilidad de haces está relacionada con su cohomología.

Proposición 5.2.5. *Sea un haz vectorial E sobre C. Las siguientes afirmaciones se satisfacen:*

1. *Si E es semiestable (resp. estable) y deg$(E) < 0$ (resp. $\leq$), entonces $H^0(C, E) = 0$.*

2. *Si E es semiestable y $\mu(E) \geq 2g - 1$, entonces $H^1(X, E) = 0$.*

3. *Si E es inestable, entonces existe un cociente Q estable de E.*

5.3. Sistemas Lineales

Consideremos una curva C irreducible proyectiva lisa de género $g \geq 2$. Denotamos como $Pic^d(C)$ el espacio moduli de haces lineales de grado d sobre C. Las variedades de Brill-Noether, denotadas por $W_d^n(C)$, en $Pic^d(C)$ son el lugar geométrico de haces lineales de grado d con al menos $n+1$ secciones (ver [3], Capítulo IV, Sección 3, Página 177). Esto es,

$$W_d^n(C) = \{L \in Pic^d(C) | h^0(C, L) \geq n + 1\}.$$

Un **sistema lineal de tipo** $(d, n+1)$ sobre C es una pareja (L, V), donde L es un haz lineal de grado d sobre C y $V \subset H^0(C, L)$ es un subespacio lineal de dimensión $n+1$. Denotamos por $G_d^n(C)$ el espacio moduli de sistemas lineales de tipo $(d, n+1)$ sobre C (ver [3], Capítulo IV, Sección 3). Esto es,

$$G_d^n(C) = \{(L, V) | L \in Pic^d(C), \ \ V \in G(n+1, H^0(C, L))\}.$$

A continuación damos los resultados conocidos sobre las variedades de Brill Noether, existe una gran diferencia entre los resultados que se obtienen para una curva general y para una curva arbitraria.

Teorema 5.3.1 ([3], Capítulo V, Teorema 1.1)**.** *Sea una curva C lisa de género g. Consideremos enteros positivos d y n tales que $d \geq 1$, $n \geq 0$. Supongamos que*

$$\rho(g, d, n) := g - (n+1)(g - d + n) \geq 0,$$

entonces $G_d^n(C)$ y $W_d^n(C)$ son no vacías. Más aún, cada componente de $G_d^n(C)$ tiene al menos dimensión ρ.

El número $\rho(g, d, n)$ es conocido como **el número de Brill-Noether**. El Teorema 5.3.1 demuestra la existencia de las variedades de Brill-Noether si el número de Brill-Noether es positivo, pero existen curvas lisas proyectivas tales que el número de Brill-Noether es negativo con $W_d^n(C)$ diferentes al vacío, estas curvas son llamadas **curvas especiales**.

Teorema 5.3.2 ([3], Capítulo V, Teorema 1.4)**.** *Sea una curva C lisa de género g. Consideremos enteros positivos d y n tales que $d \geq 1$, $n \geq 0$. Si*

$$\rho(g, d, n) = g - (n + 1)(g - d + n) \geq 1,$$

entonces $G_d^n(C)$ y $W_d^n(C)$ son conexas.

Decimos que C es una **curva Brill-Noether** si $W_d^n(C)$ es no vacía entonces el número de Brill-Noether es positivo. El siguiente teorema afirma que las curvas de Brill-Noether son generales. Esto es, forman un abierto denso en el espacio moduli $\mathcal{M}_g$ de curvas lisas proyectivas de género g.

Teorema 5.3.3 ([3], Capítulo V, Teorema 1.5)**.** *Sea una curva C general lisa de género g. Consideremos enteros positivos d y n tales que $d \geq 1$, $n \geq 0$. Si*

$$\rho(g, d, n) = g - (n + 1)(g - d + n) < 0,$$

entonces $G_d^n(C)$ es vacía. Si $\rho \geq 0$, entonces $G_d^n(C)$ es reducida y de dimensión pura ρ.

Teorema 5.3.4 ([3], Capítulo V, Teorema 1.6)**.** *Sea una curva C general lisa de género g. Consideremos enteros positivos d y n tales que $d \geq 1$. Si en número de Brill Noether es positivo, entonces $G_d^n(C)$ es lisa de dimensión ρ.*

Por los Teoremas 5.3.2 ys 5.3.4 se obtiene el siguiente corolario.

Corolario 5.3.1 (Fulton-Lazarsfeld)**.** *([3], Capítulo V, Página 214)*
Si el número de Brill Noether $\rho \geq 1$, entonces $G_d^n(C)$ y $W_d^n(C)$ son irreducibles.

5.4. Esquema de Hilbert

Los espacios moduli tienen un papel importante en la geometría algebraica y uno de los espacios moduli básicos ha sido el espacio de subvariedades de una variedad, éste es llamado el esquema de Hilbert.

Fijemos el espacio proyectivo $\mathbb{P}^n$. Sea un esquema $Z \subset \mathbb{P}^n$ cerrado, la **función de Hilbert de** Z está definida por

$$\begin{aligned} h_Z : \mathbb{N} &\rightarrow \mathbb{N} \\ m &\mapsto \mathcal{X}(Z, \mathcal{O}_Z(m)), \end{aligned}$$

donde $\mathcal{X}(Z, \mathcal{O}_Z(m))$ es la característica de Euler (ver [4], Capítulo IX). Existen un polinomio $p_Z(t)$ y un entero positivo N_0 tal que para $m \geq N_0$

$$p_Z(m) = h_Z(m).$$

El polinomio $p_Z(t)$ es llamado **el polinomio de Hilbert de** Z. Fijemos un polinomio $p(t)$. Una **familia de subesquemas cerrados parametrizada por un esquema** S, es una pareja $(\mathcal{X}, \pi)$, donde $\mathcal{X} \subset \mathbb{P}^n \times S$ es un esquema cerrado y

$$\pi : \mathcal{X} \to S$$

es un morfismo plano tal que para todo $s \in S$, el polinomio de Hilbert de $X_s := \pi^{-1}(s) \subset \mathbb{P}^n$ es $p(t)$.

La condición de que el morfismo π es plano implica que la función $s \mapsto P_{X_s}(m)$ es localmente constante. Si el esquema S es reducido y los polinomios de Hilbert de las fibras de π son constantes, entonces el morfismo π es plano.

Grothendieck demostró que el funtor

$$\begin{array}{rcl} \mathcal{H}ilb_{n,p(t)} : \{\text{ Sch }\} & \to & \{\text{ Sets }\} \\ S & \mapsto & \{\text{ Familias parametrizadas por S }\}, \end{array}$$

es representable (ver [4], Capítulo IX, Sección 4) por un esquema proyectivo $\mathrm{Hilb}_{n,p(t)}$. Esto es, existe un esquema $\mathrm{Hilb}_{n,p(t)}$ y una correspondencia biyectiva entre

- los puntos cerrados de $\mathrm{Hilb}_{n,p(t)}$.
- los subesquemas cerrados de $\mathbb{P}^n$ con polinomio de Hilbert $p(t)$.

y existe una familia universal $\mathbb{P}^n \times \mathrm{Hilb}_{n,p(t)} \supset \mathcal{X} \xrightarrow{\pi} \mathrm{Hilb}_{n,p(t)}$ tal que cada punto $h \in \mathrm{Hilb}_{n,p(t)}$, $\pi^{-1}(h)$ es isomorfo al subesquema parametrizado por h.

5.4.1. Construcción del esquema de Hilbert

En esta sección damos un bosquejo de la construcción del esquema de Hilbert.

Para $Z \subset \mathbb{P}^n$ subesquema. Denotamos por $\mathcal{I}_Z$ la gavilla de ideales generada por Z y $\mathcal{O}_Z$ la gavilla estructural de Z. Existe una sucesión exacta de gavillas

$$0 \to \mathcal{I}_Z \to \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n} \to \mathcal{O}_Z \to 0,$$

Haciendo tensor por $\mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(m)$, obtenemos

$$0 \to \mathcal{I}_Z(m) \to \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(m) \to \mathcal{O}_Z(m) \to 0,$$

induce una sucesión exacta en cohomología

$$0 \to H^0(\mathbb{P}^n, \mathcal{I}_Z(m)) \to H^0(\mathbb{P}^n, \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(m)) \to H^0(Z, \mathcal{O}_Z(m)) \to H^1(\mathbb{P}^n, \mathcal{I}_Z(m)) \to \dots$$

Teorema 5.4.1 (Serre). *Existe $m' \in \mathbb{Z}$, dependiendo únicamente de $p(m)$ tal que para todo $m \geq m'$ y para todo $Z \subset \mathbb{P}^n$ subesquema*

- $H^j(\mathbb{P}^n, \mathcal{I}_Z(m)) = 0$ *para todo* $j \geq 1$.
- Z *está determinado por* $H^0(\mathbb{P}^n, \mathcal{I}_Z(m))$.

Entonces por el Teorema 5.4.1, para $m \gg 0$ tenemos la sucesión exacta en cohomología

$$0 \to H^0(\mathbb{P}^n, \mathcal{I}_Z(m)) \to H^0(\mathbb{P}^n, \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(m)) \stackrel{\phi_m}{\to} H^0(Z, \mathcal{O}_Z(m)) \to 0.$$

Por la definición de polinomio de Hilbert tenemos que

$$h^0(Z, \mathcal{O}_Z(m)) = p(m).$$

Sea

$$q(m) \quad = \quad h^0(\mathbb{P}^n, \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(m)) - p(m)$$

para $m \gg m'$, asociamos a Z el punto

$$H^0(\mathbb{P}^n, \mathcal{I}_Z(m)) = \mathrm{Ker}\ \phi_m \in G := G(q(m), H^0(\mathbb{P}^n, \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(m))).$$

Consideremos H al conjunto de todos los subesquemas cerrados de $\mathbb{P}^n$ con polinomio de Hilbert $p(t)$. La construcción de arriba da un función inyectiva

$$\begin{array}{rcl} H & \to & G(q(m), H^0(\mathbb{P}^n, \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(m))) \\ Z & \mapsto & [H^0(\mathbb{P}^n, \mathcal{I}_Z(m)) \subset H^0(\mathbb{P}^n, \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(m))]. \end{array}$$

Supongamos que

$$\mathbb{P}^n \times S \supseteq Y \stackrel{f}{\to} S$$

es una familia plana de subesquemas cerrados de $\mathbb{P}^n$ parametrizados por un esquema S con polinomio de Hilbert $p(t)$. Si f es un morfismo plano, entonces existe un entero positivo $m \gg 0$ tal que

$$f_*\mathcal{I}_Y(m) \subset H^0(\mathbb{P}^n, \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(m)) \otimes \mathcal{O}_S$$

es un haz vectorial sobre S. Esto es, una familia de espacios vectoriales parametrizados por S. Como la Grassmanniana es un moduli, esta familia induce un morfismo

$$\alpha : S \to G.$$

Más aún, este morfismo se factoriza $\alpha : S \to H \subset G$, para dar un morfismo a H. Ahora explicaremos las construcción de la familia universal. En la Grassmanniana, el subhaz universal está definido por

$$E := \{(x, W) \in \mathbb{P}^n \times G \quad | \quad x \in W\}.$$

E genera una gavilla de ideales sobre $\mathbb{P}^n \times G$, existe una sucesión exacta

$$0 \to \mathcal{I}_E \to \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n \times G} \to \mathcal{O}_E \to 0,$$

$\mathcal{I}_E$ determina una familia de subesquemas cerrados

$$\mathbb{P}^n \times G \supseteq \mathcal{Y} \stackrel{\nabla}{\to} G.$$

La restricción de esta familia a H

$$\mathbb{P}^n \times H \supseteq \mathcal{X} \stackrel{\pi}{\to} H$$

es plana. Por lo tanto H es el esquema de Hilbert y $\mathcal{X} \stackrel{\pi}{\to} H$ es la familia universal.

5.4.2. Linealizaciones del esquema de Hilbert

Sea el esquema de Hilbert $\mathrm{Hilb}_{n,P(t)}$ de $\mathbb{P}^n$ con polinomio de Hilbert $P(t)$. En esta sección recordamos las linealizaciones que existen en el esquema de Hilbert. Por el Teorema de Serre, existe un entero positivo $M > 0$ tal que para cada $m > M$ el morfismo

$$i_m : \mathrm{Hilb}_{n,P(t)} \hookrightarrow G(P(m), H^0(\mathbb{P}^n, \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(m))) \hookrightarrow \mathbb{P}(\wedge^{P(m)} H^0(\mathbb{P}^n, \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(m)).$$

es un encaje. Consideremos un punto $X \in \mathrm{Hilb}_{n,P(t)}$. El m**-punto de Hilbert de** X, denotado por $[X]_m$, está definido por $i_m(X) \subset \mathbb{P}(\wedge^{P(m)} H^0(\mathbb{P}^n, \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(m))$. El grupo de automorfismos de $\mathbb{P}^n$ actúa en el esquema de Hilbert de la siguiente forma

$$\begin{aligned} \mathbb{P}\mathrm{GL}(n) \times \mathrm{Hilb}_{n,P(t)} &\to \mathrm{Hilb}_{n,P(t)} && (5.1)\\ (\Phi, X) &\mapsto \Phi(X). && (5.2) \end{aligned}$$

la cual induce una acción en la Grassmanniana

$$\begin{aligned} \mathbb{P}\mathrm{GL}(n) \times G(P(m), H^0(\mathbb{P}^n, \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(m))) &\to G(P(m), H^0(\mathbb{P}^n, \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(m)))\\ (\Phi, H) &\mapsto \Phi(H). \end{aligned}$$

esta induce una acción en $\mathbb{P}(\wedge^{P(m)} H^0(\mathbb{P}^n, \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(m))$

$$\begin{aligned} \mathbb{P}\mathrm{GL}(n) \times \mathbb{P}(\wedge^{P(m)} H^0(\mathbb{P}^n, \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(m)) &\to \mathbb{P}(\wedge^{P(m)} H^0(\mathbb{P}^n, \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(m))\\ (\Phi, F_1 \wedge F_2 \wedge \ldots \wedge F_{P(m)}) &\mapsto \Phi F_1 \wedge \Phi F_2 \wedge \ldots \wedge \Phi F_{P(m)}. \end{aligned}$$

Por la acción 5.1, existe un concepto GIT-estable para los m-puntos de Hilbert. Por lo tanto decimos que $[X] \in \mathrm{Hilb}_{n,P(t)}$ **es Hilbert estable** (resp. Hilbert semiestable) si existe un entero positivo M tal que para todo $m \geq M$, el m-punto de Hilbert de X es GIT-estable (resp. GIT-semiestable).

Bibliografía

[1] V. Alexeev, *Higher-dimensional analogues of stable curves*, In: Sanz, M., Soria, J., Varona, J., Verdera, J. (eds.) Algebraic and complex geometry. Proceedings of Madrid ICM, European Math. Soc. Publ. House, (2006) pp. 515-536.

[2] J. Alper and D. Hyeon, *GIT construction of log canonical models of $\mathcal{M}_g$*, In: Alexeev, V., Gibney, A., Izadi, E., Kollár, J., Looijenga, E. (eds.) Compact Moduli Spaces and Vector Bundles. Contemp. Math., Amer. Math. Soc., vol. 564, (2012) pp. 87–106.

[3] E. Arbarello, M. Cornalba, P.A. Griffiths and J. Harris, *Geometry of algebraic curves*, Vol. I Springer-Verlag, New York (1985).

[4] E. Arbarello, M. Cornalba, P. A. Griffiths and J. Harris, *Geometry of algebraic curves, with a contribution by Joseph Daniel Harris*, Vol. II, Grundlehren der Mathematischen Wissenschaften, Springer, Heidelberg (2011).

[5] M.F. Atiyah, *K-theory*, Adisson-Wesley, (1989).

[6] G. Bini, F. Felici, M. Melo and F. Viviani, *GIT for polarized curves*, Lecture Notes in Mathematics 2122, Springer, (2014).

[7] L. Brambila-Paz, *Non-emptiness of moduli spaces of coherent systems*, Internat. J. Math. 19, no. **7**, (2008), 779–799.

[8] L. Brambila-Paz and Angela Ortega, *Brill-Noether bundles and coherent systems on special curves*. In: Brambila-Paz, L., Steven, B., Garcia-Prada, O., Ramanan, S., (eds.) Moduli Spaces and Vector Bundles. LMS Lecture Note Series 359, Cambridge (2009), pp. 456–472.

[9] L. Brambila-Paz and H. Torres-López, *On Chow stability of algebraic cruves.* Manuscripta Mathematica , Springer Verlag (2016), 1-16. DOI: 10.1007/s00229-016-0843-1.

[10] U.N. Bhosle, L. Brambila-Paz and P.E. Newstead, *On coherent systems of type $(n, d, n+1)$ on Petri curves*, Manuscripta Math. **126**, (2008), 409–441.

[11] U.N. Bhosle, L. Brambila-Paz and P.E. Newstead, *On linear systems and a conjecture of D. C. Butler*, Internat. J. Math. Vol. **26**, no. 1, (2015), 155–167.

[12] D. C. Butler, *Normal generation of vector bundles over a curve*, J. Differential Geom. **39** no. 1, (1994), 1–34.

[13] C. Camere, *About the stability of the tangent bundle of $\mathbb{P}^n$ restricted to a curve*, C. R. Math. Acad. Sci. Paris, Ser. I 346, (2008), 421–426.

[14] E. Carletti, D. Gallarati and Giacomo Monti Bragadin Mauro C. Beltrametti, *Lectures on Curves, Surfaces and Projective Varieties: A Classical View of Algebraic Geometry* (Ems Textbooks in Mathematics) (2009).

[15] O. Debarre, *Higher-dimensional algebraic geometry*, Springer-Verlag, New York, (2001).

[16] P. Deligne and D. Mumford, *The Irreducibility of the Space of Curves of Given Genus*, Publications Mathematiques, IHES 36, (1969), pp. 75-110.

[17] I. Dolgachev, *Lectures on Invariant Theory*, London Mathematical Society Lectures Note series. 296.

[18] L. Ein and R. Lazarsfeld, *Stability and restrictions of Picard bundles with an application to the normal bundles of elliptic curves*. In: Ellingsrud, G., Peskine, C., Sacchiero, G., Stromme, S.A. (eds.) Complex Projective Geometry (Trieste 1989/Bergen 1989). LMS Lecture Note Series, vol. 179, Cambridge (1992), pp. 149–156.

[19] D. Eisenbud and J. Harris, *Divisor on general curves and cuspidal rational curves*, Invent. math. **74**, (1983), 371–418 .

[20] G. Farkas, M. Mustata and M. Popa, *Divisors on $\mathcal{M}_{g,g+1}$ and the minimal resolution conjecture for points on canonical curves*, Annales Sci. de École Norm. Sup. (4) **36**, (2003), 553–581.

[21] J. Fogarty, *Invariant theory*, New York, (1969).

[22] D. Geiseker, *Lectures on moduli of curves*, Tata Institute of fundamental Research Lectures on Mathematics and Physics, Volume **69**, Bombay, (1982).

[23] R.C. Gunning, *Lectures on Riemann surface*, Princeton University, (1966).

[24] J. Harris and I. Morrison, *Moduli of curves*, Springer-Verlag, Graduate texts in Mathematics 187, New-York Heidelberg, (1998).

[25] R. Hartshorne, *Algebraic Geometry*, Springer-Verlag, (1977).

[26] D. Hyeon and I. Morrison, *Stability of Tails and 4-Canonical Models*, Math. Res. Lett. 17, no. 4, (2010), 721–729.

[27] James E. Humphreys, *Linear Algebraic Group*, Springer-Verlag, New York (1981).

[28] C. Ivorra, *Esquemas*, available on https://www.uv.es/ivorra/Libros/Esquemas.pdf

[29] J. Kollär, *Moduli of varieties of general type*, Handbook of moduli. Adv. Lect. Math. (ALM), 25, Int. Press, Somerville, MA, Vol. II, (2013), 131-157.

[30] T. Mabuchi, *Chow-stability and Hilbert-stability in Mumford's Geometric Invariant Theory*, Osaka J. Math. **45**, (2008), 833–846.

[31] R. Miranda, *Algebraic curves and Riemann surfaces*, American Mathematical Society, (1995).

[32] E. C. Mistretta, *Stability of line bundle transforms on curves with respect to low codimensional subspaces*, J. Lond. Math. Soc. (2) 78, no. 1, (2008), 172–182.

[33] E. C. Mistretta and L. Stoppino, *Linear series on curves: stability and Clifford index*, Internat. J. Math. **23**, no. 12, (2012), 125–151 .

[34] I. Morrison, *Projective Stability of Ruled Surfaces*, Invent. Math. **56**, (1980), 269–304 .

[35] S. Mukai, *An introduction to invariants and moduli*, Cambridge, University Press, (2003).

[36] D. Mumford, *Projective invariants of projective structures and applications*, Proc. Intern. Cong. Math. Stockholm, (1962), 526–530.

[37] D. Mumford, *Algebraic Geometry I Complex Projective Varieties*, Springer Verlag Berlin Heidelberg New York, second edition, (1970).

[38] D. Mumford, *Stablity of Proyective Varieties*, Enseignement Math. (2) **(23)**, (1977), 39-110.

[39] D. Mumford, J. Fogarty, and F. Kirwan. *Geometric invariant theory*, Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete (2), Springer-Verlag, Berlin, third edition, 1994.

[40] H. Lange and P. E. Newstead, *Coherent systems on elliptic curves*, Internat. J. Math. **16**, (2005), 787–805.

[41] K. Paranjape, *PhD. Thesis Paranjape*, available on http://www.imsc.res.in/ kapil/papers/chap1djvu/index.djvu.

[42] K. Paranjape and S. Ramanan, *On the canonical ring of a curve*. In Honor of Masayoshi Nagata, vol. 2, Kinokuniya (1987), pp. 503–516.

[43] J. Le Pottier, *Lectures on vector bundle*, Cambridge University Press, (1997).

[44] B. Riemann, *Theorie der Abel'schen Functionen*, J. reine angew. Math. (Crelle's journal) 54 (1857), 115-155.

[45] P.E. Newstead, *Lectures on introduction to moduli space problems and orbit spaces*, Tata Institute of fundamental research, Bombay, Springer-Verlag, (1978).

[46] O. Schneider, *Stabilité des fibrés $\wedge^p E_L$ et condition de Raynaud*, Ann. Fac. Sci. Toulouse Math. (6) **14**, no. 3, (2005), 515–525 .

[47] D. Schubert, *A new compactification $\overline{\mathcal{M}}_g$ of the moduli space of curves*, Compositio Math. **78** (3), (1991), 297–313.

[48] J. Ross and R. Thomas, *A study of the Hilbert-Mumford criterion for the stability of projective varities* J. Algebraic Geom. **16**, (2007), 201–255.

[49] H. Torres-López, *Sobre la Chow estabilidad.* Aportaciones matemáticas. Memorias 48, , (2014), pág 11-29.

[50] C. Voisin, *Greens generic syzygy conjecture for curves of even genus lying on a K3 surface* , J. European Math. Soc. 4, (2002), 363-404.