

CIMAT

Centro de Investigación en Matemáticas, A.C.

UN OPERADOR DISCRETO PARA LA ECUACIÓN ADVECCIÓN-REACCIÓN-DIFUSIÓN EN UN ESPACIO DE DIMENSION INFINITA

TESIS QUE PRESENTA

Daniel Juárez Robles

PARA OBTENER EL GRADO DE

Maestro en Ciencias

CON ESPECIALIDAD EN

Matemáticas Aplicadas

ASESOR

Dr. Francisco Javier Solís

GUANAJUATO, GUANAJUATO

AGOSTO 2013

Agradecimientos

*A mi padre, Luis Juárez Prieto,
a mi madre, Ma. de Lourdes Robles Pérez,
y a mis hermanos, Alfredo y Roberto,
por apoyarme incondicionalmente.*

*A mis amigos,
les estoy totalmente agradecido
por ser un gran apoyo en distintas situaciones de mi vida
y por motivarme constantemente a tomar nuevos retos
que me ayudarán a superarme en la vida.*

*A los Profesores que me enseñaron en los cursos de maestría
y a todos aquellos con los cuales tuve la oportunidad de interactuar.*

*A mi asesor, Prof. Francisco Javier Solís Lozano,
por ayudarme a conseguir apoyos aún antes de que comenzará la maestría
y por tenerme paciencia en cuanto a mi manera de trabajar.*

*A mis sinodales, Nacho Barradas y José María Cantarero,
por brindarme sus consejos y conocimiento.*

*Quiero agradecer enormemente a CIMAT
por abrazarme dentro de su comunidad
y darme la oportunidad de realizar mi sueño.*

*Toda la vida había soñado con estudiar matemáticas,
hoy despierto y veo que el sueño se ha vuelto realidad.*

Dedicatoria Especial

*A la eterna pelirroja,
Shesy,
por darle completez a mi espacio espiritual.*

Índice

Lista de Figuras	III
Nomenclatura	IV
1 Introducción	1
1.1 Ecuación advección-difusión-reacción	1
1.1.1 Aplicación e importancia de la ecuación ADR	2
1.1.2 Trabajo actual	3
2 Antecedentes	4
2.1 Familia de operadores discretos advección-reacción	4
2.1.1 Caso - dimensión finita	5
2.1.2 Caso - dimensión infinita	6
2.1.3 Una transpuesta de $A_{a,\lambda}$	10
2.1.4 El problema continuo	11
2.2 Familia de operadores discretos advección-reacción con retardo	12
2.2.1 Órbita del operador DARR	14
2.2.2 Condiciones de convergencia	17
2.3 Resumen	19
3 Planteamiento del problema	20
3.1 Operador discreto ADR	20
3.2 Iteradas de $A_{a,b,\lambda}$ - Método directo	21
3.2.1 Polinomios mónicos P , Q y R	21
3.2.2 Potencias de A	23
3.3 Iteradas de A - Factorización $P\Lambda P^{-1}$	37
3.3.1 Caso finito	37
3.3.2 Caso infinito	38
4 Conclusiones	41
4.1 Conclusiones	41
4.2 Trabajo a futuro	41
A Notación - Ejemplos	42

B Polinomios de Lagrange**44****Bibliografía****45**

Lista de Figuras

3.1	Posibles casos para $A^{K+1} = AA^K$	26
3.2	Caso 1 para $A^{K+1} = AA^K$	27
3.3	Posibles casos para $A^{K+1} = AA^K$	34
3.4	Posibles casos para $A^{K+1} = AA^K$	35

Nomenclatura

Notación

a	Elementos de la subdiagonal
b	Elementos de la subsubdiagonal
i	Renglón
j	Columna
n	Dimensión
N	Número de elementos
\mathbb{N}	Números naturales $(0, 1, 2, 3, 4, \dots)$
M	Tamaño de la matriz
\mathfrak{s}	Espacio vectorial de las sucesiones sobre \mathbb{R}

Símbolos griegos

α	Constante de velocidad del campo advectivo
β	Coefficiente reactivo
γ	Constante de difusión
λ	Elementos de la diagonal principal
ω	Funcion escalar, $\omega : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$
Ω	Matriz diagonal
Ψ	Matriz triangular inferior
Φ	Matriz triangular inferior

Capítulo 1

Introducción

1.1 Ecuación advección-difusión-reacción

Muchos problemas físicos pueden ser modelados analizando el balance de tres fenómenos: la difusión, la advección y la reacción [3]. El primero se define como la dispersión de las especies involucradas en el proceso a lo largo del dominio físico del problema. La advección se relaciona con el transporte de especies debido a la presencia de campos de velocidad. Y por último, la reacción es el proceso de interacción mediante la cual se generan o se consumen las especies involucradas en el fenómeno.

Tanto la advección como la difusión pueden causar que especies o partículas que originalmente estaban juntas se separen. En cambio, la advección es, en principio, reversible si se invierten los campos de velocidades, mientras que la difusión no lo es. La advección por remolinos puede causar, por ejemplo, que una mancha de tinte rojo se corte en finos rayos rojos, mientras que la difusión generaría agua pintada de color rosa. El efecto de estos tres procesos (advección, difusión y reacción) se puede modelar por medio de la ecuación de transporte o también conocida como la ecuación advección-difusión-reacción. [1]

El problema de la ecuación Advección-Difusión-Reacción (ADR) consiste en determinar una función de campo escalar $u(x, t)$, la cual debe satisfacer la ecuación diferencial, Ec.(1.1),

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \alpha_1 \cdot \nabla u + \nabla \cdot (\alpha_2 \nabla u) + \beta u = f \quad \text{en } \Omega \times (0, T), \quad (1.1)$$

donde $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ con frontera $\partial\Omega$. Las condiciones de frontera que completan este modelo son de la forma, Ecs.(3.2)-(3.4),

$$u(x, 0) = u^0(x) \quad \text{en } \partial\Omega, \quad (1.2)$$

$$\mu \frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}} = \hat{e}_n u(x) \quad \text{en } \partial\Omega^-, \quad (1.3)$$

$$\mu \frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}} = 0 \quad \text{en } \partial\Omega^+, \quad (1.4)$$

donde $\alpha_1(x)$, en la Ec.(1.1), denota la velocidad del campo advectivo (velocidad del viento, de las corrientes marinas, etc.) que es responsable del transporte de la sustancia en Ω , y para el cual se

supone que cumple la ecuación de continuidad ($\nabla \cdot \alpha_1 = 0$). El parámetro $\beta = \beta(x) > 0$ caracteriza la producción o consumo de $u(x, t)$ debido a diversos procesos físicos o químicos. El parámetro $\alpha_2 = \alpha_2(x) > 0$ es el coeficiente de difusión, y f es el forzamiento determinado por las fuentes de emisión del contaminante o también conocido como término fuente.

Sea $\hat{e}_n = \alpha_1 \cdot \mathbf{n}$ la proyección del campo advectivo, α_1 , en el vector unitario normal exterior, \mathbf{n} , a la frontera $\partial\Omega$. La frontera se puede dividir en dos partes dependiendo de si el flujo entra o sale de Ω . Definimos $\partial\Omega^+$ como los puntos de $\partial\Omega$ tal que $\hat{e}_n \geq 0$, que es donde la especie contaminante fluye hacia afuera del dominio, y $\partial\Omega^-$ se define como el complemento ($\hat{e}_n < 0$), que es donde la especie contaminante fluye hacia adentro del dominio.

La condición de frontera Ec.(3.3) implica que el flujo combinado (difusivo y advectivo) de la especie contaminante es cero en la frontera $\partial\Omega^-$, donde el flujo debería entrar. Lo cual implicaría que no hay una fuente del contaminante fuera de Ω . La condición de frontera Ec.(3.4) implica que en la frontera $\partial\Omega^+$, el flujo difusivo de la especie contaminante, $\mu \frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}}$, es despreciable si se compara con el flujo advectivo saliente, $\hat{e}_n u$, de Ω . En el caso extremo cuando no hay difusión, ($\mu = 0$), la condición Ec.(3.3) se reduce a $u = 0$ (es decir, que no hay especies contaminantes en la frontera de flujo de entrada). De igual manera, en el caso extremo cuando no hay difusión, las condiciones de frontera Ecs.(3.3) y (3.4) aproximan correctamente el problema de advección pura. Por último, la condición de frontera Ec.(3.2) define a u^0 como la distribución espacial de la especie contaminante al tiempo $t = 0$ sobre Ω . Estas condiciones de frontera tienen un adecuado sentido físico y hacen que el problema Ecs.(1.1)-(3.4) esté bien formulado en el sentido de Hadamard, es decir, la solución del modelo es única y depende continuamente de los datos [2].

1.1.1 Aplicación e importancia de la ecuación ADR

La simplificación de la ecuación ADR, Ec.(1.1), permite obtener ciertas ecuaciones específicas de uso amplio y común en distintos campos de la física como los listados a continuación.

- *Ecuación de Helmholtz.* Esta ecuación es utilizada en varios contextos de la física, donde β se interpreta como el número de onda. Esta ecuación es empleada en problemas de acústica, sismología, electromagnetismo, en la teoría del potencial de Yukawa y como caso particular de la ecuación de Klein-Gordon para un campo estacionario. Ésta se obtiene considerando el término de reacción $\beta > 0$ y despreciando los términos advectivo $\alpha_1 = 0$ y fuente $f = 0$.

$$\nabla \cdot (\alpha_2 \nabla u) + \beta u = 0.$$

- *Ecuación de advección-difusión.* Esta ecuación es utilizada ampliamente en problemas de dispersión de gases contaminantes altamente estables, producidos por la combustión de alguna sustancia. Ésta se obtiene considerando que no hay reacción en el medio ($\beta = 0$) ni términos fuente ($f = 0$).

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \alpha_1 \cdot \nabla u + \nabla \cdot (\alpha_2 \nabla u) = 0$$

- *Ecuación de advección-reacción.* Esta ecuación es utilizada en el modelado de dispersión de contaminantes acuíferos en aguas con alta velocidad, en donde el efecto difusivo no guarda la misma escala que los fenómenos de advección y reacción. Ésta se obtiene despreciando el término difusivo $\alpha_2 = 0$.

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \alpha_1 \nabla u + \beta u = f$$

- *Ecuación de difusión-reacción.* Un fenómeno regido por los procesos de difusión y reacción, se caracteriza por la presencia de distribuciones espacio-temporales de las especies involucradas, esta distribución se denomina comúnmente patrón. Esta ecuación tiene diversas aplicaciones en problemas físico-químicos, como en los mecanismos de morfogénesis [3], en donde las moléculas se difunden a través de los tejidos y reaccionan con otras sustancias de manera directa. También se utiliza para modelar la formación de manchas en la piel de algunos animales, el crecimiento de tumores, la distribución de poblaciones de animales, entre otras muchas otras aplicaciones [5]. Ésta se obtiene despreciando el término advectivo ($\alpha_1 = 0$).

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \nabla \cdot (\alpha_2 \nabla u) + \beta u = f$$

1.1.2 Trabajo actual

Las propiedades de convergencia de muchos operadores lineales y no lineales han sido estudiadas extensamente en los últimos años. Una fuente de motivación surge de la definición de nuevos operadores, desde la construcción de puntos fijos y además para la búsqueda de algoritmos iterativos par encontrar soluciones de operadores de ecuaciones, ver por ejemplo [6, 7, 8, 9]

En particular, en trabajos recientes acerca de familias de operadores advección-reacción han sido introducidos y su comportamiento asintótico ha sido analizado [10, 11, 12]. Se ha encontrado que estas familias de operadores proveen una fuerte conexión entre las teorías de interpolación y el análisis numérico, por ejemplo: las diferencias finitas aparecen de manera natural y además cada iteración de una familia de operadores fija corresponde a una serie de problemas de interpolación de la base canónica polinomial bajos las condiciones iniciales adecuadas [11].

En este trabajo se introducirá una familia de operadores para la ecuacion ADR, ver Ec.(1.1), con el fin de analizar sus propiedades dinámicas. Dos características que se buscan en sus iteradas son sus características analíticas y numéricas relacionadas con la teoría de interpolación. Para alcanzar este logro, se encontrarán las iteradas del sistema discreto (órbitas) para establecer una relación con la teoría de interpolación usando los polinomios de Lagrange,[14] y finalmente se darán las condiciones para la convergencia de las iteradas.

Capítulo 2

Antecedentes

El presente trabajo es la continuación de dos trabajos previos, [10] y [12], relacionados con la ecuación ADR, ver Ec.(1.1). A continuación se describirá cada uno de estos trabajos así como otros trabajos previos relacionados con el tema.

2.1 Familia de operadores discretos advección-reacción

La ecuación diferencial parcial lineal de primer orden, Ec.(2.1), es mejor conocida como la ecuación unidimensional de advección-reacción (AR) [10]. Ésta modela la dinámica del transporte de un soluto en un fluido con reacción entre muchas otras aplicaciones. Por ejemplo, si $\beta = 0$ entonces la ecuación modela el comportamiento de un pigmento vertido en una corriente que se mueve a una velocidad $\alpha_1(x)$. Así, el colorante se dispersará corriente abajo debido a la advección y sin distorsión si α_1 fuese una constante,

$$\frac{\partial u(x, t)}{\partial t} + \alpha_1(x) \frac{\partial u(x, t)}{\partial x} = \beta u(x, t). \quad (2.1)$$

Una familia de operadores lineales relacionados a la Ec.(2.1) es definida como sigue. Denotemos por \mathfrak{s} al espacio vectorial consistente de todas las sucesiones reales. Si $\hat{s} \in \mathfrak{s}$, podemos escribir $\hat{s} = \{s_n\}_{n=1}^{\infty}$. Dada $\hat{s} \in \mathfrak{s}$, y dos sucesiones fijas $\hat{a} = \{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ y $\hat{\lambda} = \{\lambda_n\}_{n=1}^{\infty}$, definimos la sucesión $\hat{c} = \{c_n\}_{n=1}^{\infty}$ como

$$c_n \equiv a_{n-1}s_{n-1} + \lambda_n s_n, \quad n \in \mathbb{N}. \quad (2.2)$$

El sistema dinámico, Ec.(2.2), puede ser escrito adecuadamente en la siguiente forma matricial $\hat{s}^{(n+1)} = A_{a,\lambda} \hat{s}^{(n)}$, donde $A_{a,\lambda}$ es la matriz infinita triangular inferior

$$A_{a,\lambda} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots \\ a_1 & \lambda_2 & 0 & 0 & 0 & \cdots \\ 0 & a_2 & \lambda_3 & 0 & 0 & \cdots \\ 0 & 0 & a_3 & \lambda_4 & 0 & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & a_4 & \lambda_5 & \vdots \\ \vdots & 0 & 0 & \ddots & \ddots & \ddots \end{pmatrix}. \quad (2.3)$$

Por lo tanto, el operador lineal

$$A_{a,\lambda} : \mathfrak{s} \rightarrow \mathfrak{s}, \quad (2.4)$$

definido por $A_{a,\lambda}(s) \equiv c$ será el operador discreto AR para \hat{a} y $\hat{\lambda}$. La relación entre la Ec.(2.1) y la Ec.(2.4) se mostrará mas adelante.

2.1.1 Caso - dimensión finita

Primeramente se discute el caso en una dimensión finita para el operador AR. Sea $m = 1, 2, \dots$ y considere \mathbb{R}^m con la norma suprema $\|(s_1, \dots, s_m)\|_\infty \equiv \max\{|s_1|, \dots, |s_m|\}$. Dada $a \in \mathbb{R}^{m-1}$ y $\lambda \in \mathbb{R}^m$, el operador AR toma la forma

$$A_{a\lambda}(s_1, \dots, s_m) \equiv (\lambda_1 s_1, a_1 s_1 + \lambda_2 s_2, \dots, a_{m-1} s_{m-1} + \lambda_m s_m).$$

Note que $A_{a,\lambda}(\mathbb{R}^m) \subset \mathbb{R}^m$. Considere $x = (x_1, \dots, x_m)$ y $y = (y_1, \dots, y_m) \in \mathbb{R}^m$, entonces,

$$\begin{aligned} |a_{j-1}x_{j-1} + \lambda_j x_j - a_{j-1}y_{j-1} - \lambda_j y_j| &= |a_{j-1}(x_{j-1} - y_{j-1}) + \lambda_j(x_j - y_j)| \\ &\leq |a_{j-1}| |x_{j-1} - y_{j-1}| + |\lambda_j| |x_j - y_j| \\ &\leq (|a_{j-1}| + |\lambda_j|) \|x - y\|_\infty. \end{aligned}$$

Por lo tanto,

$$|a_{j-1}x_{j-1} + \lambda_j x_j - a_{j-1}y_{j-1} - \lambda_j y_j| \leq \|x - y\|_\infty \max_j \{|a_{j-1}| + |\lambda_j|\}, \quad 1 \leq j \leq m,$$

de lo cual se sigue que

$$\|A_{a\lambda}(x) - A_{a\lambda}(y)\|_\infty \leq K(a, \lambda) \|x - y\|_\infty, \quad \forall x, y \in \mathbb{R}^m,$$

donde $K(a, \lambda) \equiv \max_j \{|a_{j-1}| + |\lambda_j|\}$, el cual supondremos que es menor que uno. Esto muestra que $A_{a,\lambda}$ es una contracción así que tiene un único punto fijo, el cual es el vector cero. Así se ha probado lo siguiente.

Proposición 2.1.1. *Si $s \in \mathbb{R}^m$, entonces la sucesión $\{A_{a\lambda}^n(s)\}_{n=0}^\infty$ converge uniformemente a cero.*

Observe que para cualesquiera dos normas en \mathbb{R}^m , sus normas inducidas en el espacio de las matrices de $m \times m$ son equivalentes [13]. Por lo tanto, hay una condición del tipo

$$K(a_1, a_2, \dots, a_{m-1}, \lambda_1, \dots, \lambda_m) < 1,$$

para cualquier norma inducida que garantice la convergencia a cero de la sucesión $\{A^n(s)\}_{n=0}^\infty$, la cual se conoce como la órbita de s . Por ejemplo, para la norma l_1 la condición es $\max_j \{|a_j| + |\lambda_{j+1}|\} < 1$, y para la norma Euclidea la condición es que $\max_j \{|\lambda_j|\} < 1$. Una vez hecha esta observación se puede reescribir el resultado previo como:

Proposición 2.1.2. *Sea $\|\cdot\|$ una norma en \mathbb{R}^m , entonces hay una condición sobre los números $\{a_n\}_{n=1}^{m-1}$ y $\{\lambda_n\}_{n=1}^m$ tal que la órbita bajo $A_{a\lambda}$ de cualquier elemento de \mathbb{R}^m converge en la norma inducida a cero.*

2.1.2 Caso - dimensión infinita

Consideremos ahora el caso cuando la dimensión es infinita. Se estudiará la órbita de una sucesión arbitraria, esto es, dada una sucesión $\hat{s} \in \mathfrak{s}$ se encontrará la sucesión $\{\hat{s}, A_{a,\lambda}(\hat{s}), A_{a,\lambda}^2(\hat{s}), \dots\}$.

Con el fin de establecer el siguiente resultado de una forma condensada, se usará la siguiente notación, dados tres números naturales k, m y n , denotaremos a $Q[\lambda_m, \lambda_n]^k$, con $m < n$, como el polinomio homogéneo de grado k consistente de la suma de todos los posibles monomios con coeficientes unitarios en las variables $\lambda_m, \lambda_{m+1}, \dots, \lambda_{n-1}, \lambda_n$. Por convención, $Q[\lambda_m, \lambda_n]^0 = 1$ y $Q[\lambda_m, \lambda_n]^{-k} = 0, \forall k \in \mathbb{N}$. Es importante mencionar que la notación aquí presentada en este trabajo difiere de la notación usada en el trabajo de Solís *et al.*[10]. Sin embargo, éstas tienen la siguiente equivalencia,

$$Q[\lambda_m, \lambda_n]^k = P_k[\lambda_m, \lambda_{m+1}, \dots, \lambda_{n-1}, \lambda_n].$$

Teorema 2.1.1. *Sea $s^{(0)} \in \mathfrak{s}$, entonces $A_{a,\lambda}^n(s^{(0)}) = A_{a,\lambda}^n(s_1^{(0)}, s_2^{(0)}, \dots) = (s_1^{(n)}, s_2^{(n)}, \dots) = s^{(n)}$ donde*

$$s_i^{(n)} = \begin{cases} \lambda_1^n s_1^{(0)} & \text{si } i = 1 \\ \sum_{m=1}^{i-1} \prod_{k=m}^{i-1} a_k Q[\lambda_m, \lambda_i]^{n-i+m} s_m^{(0)} + \lambda_i^n s_i^{(0)} & \text{si } i > 1 \end{cases}.$$

Demostración (Por inducción sobre n).

Cuando $n = 1$ se tiene

$$s_i^{(1)} = \lambda_i s_i^{(0)} + a_{i-1} s_{i-1}^{(0)} = \sum_{m=1}^{i-1} \prod_{k=m}^{i-1} a_k Q[\lambda_m, \lambda_m]^{1-i+m} s_m^{(0)} + \lambda_i s_i^{(0)} \quad \forall i \in \mathbb{N}.$$

Suponga que la fórmula es válida para un valor fijo $n \in \mathbb{N}$ y para toda $i \in \mathbb{N}$, entonces

$$\begin{aligned} s_i^{(n+1)} &= \lambda_i s_i^{(n)} + a_{i-1} s_{i-1}^{(n)} \\ &= \lambda_i \left[\sum_{m=1}^{i-1} \prod_{k=m}^{i-1} a_k Q[\lambda_m, \lambda_i]^{n-i+m} s_m^{(0)} + \lambda_i^n s_i^{(0)} \right] + \\ &\quad a_{i-1} \left[\sum_{m=1}^{i-2} \prod_{k=m}^{i-2} a_k Q[\lambda_m, \lambda_{i-1}]^{n-i+1+m} s_m^{(0)} + \lambda_{i-1}^n s_{i-1}^{(0)} \right] \\ &= \sum_{m=1}^{i-1} \prod_{k=m}^{i-1} a_k \lambda_i Q[\lambda_m, \lambda_i]^{n-i+m} s_m^{(0)} + \lambda_i^{n+1} s_i^{(0)} + \\ &\quad \sum_{m=1}^{i-2} \prod_{k=m}^{i-1} a_k Q[\lambda_m, \lambda_{i-1}]^{n-i+1+m} s_m^{(0)} + \sum_{m=i-1}^{i-1} \prod_{k=m}^{i-1} a_k Q[\lambda_m, \lambda_{i-1}]^{n-i+1+m} s_m^{(0)} \\ &= \sum_{m=1}^{i-1} \prod_{k=m}^{i-1} a_k \left[\lambda_i Q[\lambda_m, \lambda_i]^{n-i+m} + Q[\lambda_m, \lambda_{i-1}]^{n-i+1+m} \right] s_m^{(0)} + \lambda_i^{n+1} s_i^{(0)} \\ &= \sum_{m=1}^{i-1} \prod_{k=m}^{i-1} a_k Q[\lambda_m, \lambda_i]^{n-i+1+m} s_m^{(0)} + \lambda_i^{n+1} s_i^{(0)}. \quad \square \end{aligned}$$

Del Teorema 2.1.1 se deduce el siguiente resultado.

Corolario 2.1.1. *Sea $\hat{a}, \hat{\lambda} \in \mathfrak{s}$, $n \in \mathbb{N}$. Si definimos a $A_{a,\lambda}$ como en la Ec.(2.3), entonces*

$$(A_{a,\lambda}^n)_{i,j} = \begin{cases} \lambda_i^n, & \text{si } i = j; \\ \prod_{k=j}^{i-1} a_k Q[\lambda_j, \lambda_i]^{n-i+j}, & \text{si } i > j. \end{cases} \quad (2.5)$$

Supongamos a partir de ahora que todos los elementos en la sucesión $\hat{\lambda} = \{\lambda_n\}_{n=1}^\infty$ son diferentes. Se calculará $A_{a,\lambda}^n(s^{(0)})$ usando dos aproximaciones diferentes y los siguientes dos operadores lineales, D_λ y $P_{a,\lambda}$, definidos en \mathfrak{s} , los cuales jugarán un papel esencial en este proceso

$$D_\lambda(s) \equiv (\lambda_1 s_1, \lambda_2 s_2, \dots, \lambda_i s_i, \dots), \quad P_{a,\lambda}(s) \equiv \left(s_1, c_{2,m} s_2, \dots, \sum_{m=1}^{i-1} c_{i,m} s_m, \dots \right),$$

donde

$$c_{i,m} = \frac{\prod_{k=m}^{i-1} a_k}{\prod_{k=m+1}^i (\lambda_m - \lambda_k)}.$$

En las siguientes pruebas, se hará uso del polinomio de interpolación de Lagrange [14] en los puntos $(\lambda_m, f(\lambda_m)), (\lambda_{m+1}, f(\lambda_{m+1})), \dots, (\lambda_i, f(\lambda_i))$, con $m < i$ e $i - m + 1 \geq n$, para el polinomio $p(\lambda) = \lambda^n$, con $n \in \mathbb{N}$, así

$$\lambda^n = \sum_{w=m}^i \lambda_w^n \frac{\prod_{k=m, k \neq w}^i (\lambda - \lambda_k)}{\prod_{k=m, k \neq w}^i (\lambda_w - \lambda_k)}. \quad (2.6)$$

Lema 2.1.1. *El operador lineal $P_{a,\lambda}$ es invertible con $P_{a,\lambda}^{-1}$ dado por*

$$P_{a,\lambda}^{-1}(s) \equiv \left(s_1, d_{2,m} s_2, \dots, \sum_{m=1}^{i-1} d_{i,m} s_m, \dots \right),$$

donde

$$d_{i,m} = \frac{\prod_{k=m}^{i-1} a_k}{\prod_{k=m}^i (\lambda_i - \lambda_k)}.$$

Demostración Sea R el operador lineal definido en \mathfrak{s} por

$$R(s) \equiv \left(s_1, d_{2,m} s_2, \dots, \sum_{m=1}^{i-1} d_{i,m} s_m, \dots \right) \quad \text{con} \quad d_{i,m} = \frac{\prod_{k=m}^{i-1} a_k}{\prod_{k=m}^i (\lambda_i - \lambda_k)},$$

entonces

$$P_{a,\lambda} \circ R(s) \equiv \left(s_1, s_2 + e_{2,1} s_1, \dots, s_i + \sum_{m=1}^{i-1} e_{i,m} s_m, \dots \right),$$

donde

$$e_{i,m} = \left(\prod_{k=m}^{i-1} a_k \right) \sum_{l=m}^i \frac{1}{\prod_{k=m, k \neq l}^i (\lambda_l - \lambda_k)}.$$

Lo único que se necesita mostrar es que $e_{i,m} = 0$, esto es,

$$\sum_{l=m}^i \frac{1}{\prod_{k=m, k \neq l}^i (\lambda_l - \lambda_k)} = 0, \quad \forall i, m \in \mathbb{N}.$$

Usando el polinomio de Lagrange para $p(\lambda) = 1$, en los nodos apropiados, Ec.(B), con $n = 0$ ó bien $i \geq m - 1$, se obtiene que

$$1 = \sum_{l=m}^i \frac{\prod_{k=m, k \neq l}^i (\lambda - \lambda_k)}{\prod_{k=m, k \neq l}^i (\lambda_l - \lambda_k)}. \quad (2.7)$$

Tomando la $(i - m)$ -ésima derivada de la Ec.(2.7) con respecto a λ se obtendrá que $e_{i,m} = 0$. \square

Lema 2.1.2. $A_{a,\lambda} = P_{a,\lambda} \circ D_\lambda \circ P_{a,\lambda}^{-1}$.

Demostración De los resultados previos se tiene que

$$P_{a,\lambda} \circ D_\lambda \circ P_{a,\lambda}^{-1}(s) = \left(\lambda_1 s_1, \lambda_2 s_2 + f_{2,1} s_1, \dots, \lambda_i s_i + \sum_{m=1}^{i-1} f_{i,m} s_m, \dots \right),$$

donde

$$f_{i,m} = \left(\prod_{k=m}^{i-1} a_k \right) \sum_{l=m}^i \frac{\lambda_l}{\prod_{k=m, k \neq l}^i (\lambda_l - \lambda_k)}.$$

Usando el polinomio de Lagrange para $p(\lambda) = \lambda$, en los nodos apropiados, Ec.(B), con $n = 1$ ó bien $i \geq m$, se obtiene que

$$\lambda = \sum_{l=m}^i \lambda_l \frac{\prod_{k=m, k \neq l}^i (\lambda - \lambda_k)}{\prod_{k=m, k \neq l}^i (\lambda_l - \lambda_k)}. \quad (2.8)$$

Tomando la $(i - m)$ -ésima derivada de la Ec.(2.8) con respecto a λ se obtiene que si $i = m + 1$ entonces $f_{m+1,m} = a_m$ y $f_{i,m} = 0$ para $i > m + 1$. \square

Teorema 2.1.2. $A_{a,\lambda}^n : \mathfrak{s} \rightarrow \mathfrak{s}$ es un operador lineal y para $\hat{s} \in \mathfrak{s}$

$$A_{a,\lambda}^n(\hat{s}) = P_{a,\lambda} \circ D_\lambda^n \circ P_{a,\lambda}^{-1}(\hat{s}) = \left(\lambda_1^n s_1, \lambda_2^n s_2 + f_{2,1} s_1, \dots, \lambda_i^n s_i + \sum_{m=1}^{i-1} f_{i,m} s_m, \dots \right)$$

donde

$$f_{i,m} = \left(\prod_{k=m}^{i-1} a_k \right) \sum_{l=m}^i \frac{\lambda_l^n}{\prod_{k=m, k \neq l}^i (\lambda_l - \lambda_k)}.$$

Del Teorema 2.1.2 y del Corolario 2.1.1 se deduce el siguiente resultado.

Corolario 2.1.2. *Sea $\hat{\lambda} = \{\lambda_n\}_{n=1}^\infty$ una sucesión con todos sus elementos distintos, entonces*

$$Q[\lambda_m, \lambda_i]^{n-i+m} = \sum_{l=m}^i \frac{\lambda_l^n}{\prod_{k=m, k \neq l}^i (\lambda_l - \lambda_k)}, \quad \forall i \in \mathbb{N}.$$

También, del Teorema 2.1.1, se sigue que una condición necesaria para que las iteradas, $A_{a,\lambda}^n(\hat{s})$, de una sucesión arbitraria $\hat{s} \in \mathfrak{s}$ converjan es que $|\lambda_i| \leq 1$ para todo i . De otra manera, algunos de los términos de $A_{a,\lambda}^n(\hat{s})$ tenderían exponencialmente a infinito. En otras palabras, la sucesión $\hat{\lambda}$ debe estar al menos en la bola unitaria en el espacio de Banach l^∞ de sucesiones acotadas dotado con la norma suprema $\|\hat{s}\|_\infty = \sup\{s_i\}$. Sin embargo, esta condición no es suficiente, tal y como se mostrará a continuación.

De hecho, si se considera la familia de sucesiones $\{\hat{e}_i, i \in \mathbb{N}\}$ entonces, el Teorema 2.1.1 muestra que hay sólo $n + 1$ entradas posibles distintas de cero en $\{A_{a,\lambda}^n(\hat{e}_i)\}$ para toda $i \in \mathbb{N}$. Además, las últimas dos entradas distintas de cero son simplemente

$$(A_{a,\lambda}^n(\hat{e}_i))_{n+i-1} = \left(\prod_{k=i+1}^{n+i-1} a_k \right) (\lambda_i + \dots + \lambda_{i+n}) \quad y \quad (A_{a,\lambda}^n(\hat{e}_i))_{n+i} = \prod_{k=i+1}^{i+n} a_k. \quad (2.9)$$

Así, la última fórmula muestra que la existencia del $\lim_{n \rightarrow \infty} A_{a,\lambda}^n(\hat{s})$ además requiere que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \prod_{k=1}^n a_k \quad (2.10)$$

exista. En particular, para evitar la oscilación de los productos, se considerara de aquí en adelante que $a_i > 0$ para todo $i \in \mathbb{N}$. Ahora, el producto definido en la Ec.(2.10) puede converger en dos diferentes escenarios. El primer caso, si $\sup\{a_i\} < 1$, entonces el producto siempre converge a cero. El segundo caso, si $\limsup a_i = 1$, entonces el límite existe si y solo si $\sum \log a_i$ existe. En particular, esto implica que $\lim \log a_m = 0$ y por lo tanto $\lim a_m = 1$. Aún más, dado que esto implica que todos los productos parciales de a_i son acotados, de la Ec.(2.9) podemos concluir además $\sum_{i=0}^\infty \lambda_i$ debe existir. Recordando la definición del espacio de Banach l^1 ,

$$l^1 = \left\{ \hat{s} = (s_0, s_1, \dots) \mid \sum_{n=0}^\infty |s_n| < \infty, n \in \mathbb{N} \right\},$$

dotado con la norma $\|\hat{s}\|_1 = \sum_{n=0}^\infty |s_n|$, [15].

Lema 2.1.3. *Sea $\hat{\lambda} \in l^1$. Para cualquier segmento $\lambda_j, \dots, \lambda_i$, y para cualquier n tal que $n > i - j$,*

$$|Q[\lambda_j, \lambda_i]^{n-(i-j)}| \leq |Q[|\lambda_j|, |\lambda_i|]^{n-(i-j)}| \leq \|\hat{\lambda}\|_1^{n-(i-j)}.$$

En particular, si $\|\lambda\|_1 \leq 1$, entonces $|Q[\lambda_j, \lambda_i]^{n-(i-j)}| \leq 1$.

La demostración es directa, y de los argumentos previos se puede obtener el siguiente resultado:

Teorema 2.1.3. Sea $\hat{s} \in \mathfrak{s}$ y dos sucesiones fijas $\hat{a} = \{a_n\}_{n=0}^\infty$ y $\hat{\lambda} = \{\lambda_n\}_{n=1}^\infty$ tal que

1. $\prod_{k=1}^\infty a_k$ existe.
2. $\|\hat{\lambda}\|_1 \leq 1$

el límite en cada una de las entradas de las iteradas $A_{a,\lambda}^n(s)$ conforme $n \rightarrow \infty$ existe. Aún más, si $\|\hat{\lambda}\|_1 < 1$ este límite es cero.

Demostración Notemos que el Lema 2.1.3 implica que para todo i, j , $Q[|\lambda_j|, |\lambda_i|]^{n-(i-j)}$ es una suma de términos positivos acotados por 1. \square

El contenido de esta proposición parece ser solo algebraico, dado que solo se está usando convergencia puntual. Sin embargo, ésta provee un candidato natural para entender el comportamiento asintótico de las soluciones de la Ec.(2.1) tal y como se mostrará mas adelante. Por otra parte, el mismo tipo de argumento provee el siguiente resultado:

Teorema 2.1.4. Sea $A_{a,\lambda}$ definido de la misma forma que en el Teorema 2.1.1, entonces toda iterada $A_{a,\lambda}^n$ define un operador continuo de $l^1 \rightarrow l^\infty$.

Demostración Sea \hat{s} cualquier sucesión en l^1 , y $M = \prod_{k=1}^\infty a_k$. Del Teorema 2.1.1, se tiene que para toda i y n

$$\left| (A_{a,\lambda}^n(\hat{s}))_i \right| = \left| \sum_j \left(\prod_{k=j}^{i-1} a_k \right) Q[\lambda_j, \lambda_i]^{n-(i-j)} s_j \right| \leq M \|\hat{\lambda}\|_1^{n-(i-j)} \sum_{j=1}^n |s_j| \leq M \|\hat{\lambda}\|_1 \|\hat{s}\|_1. \quad (2.11)$$

Por lo tanto, $\|A_{a,\lambda}^n(s)\|_\infty \leq M \|\hat{\lambda}\|_1 \|\hat{s}\|_1$ como se esperaba. \square

2.1.3 Una transpuesta de $A_{a,\lambda}$

Dada $\hat{s} = \{s_n\}_{n=0}^\infty \in \mathfrak{s}$ y dos sucesiones fijas $\hat{a} = \{a_n\}_{n=0}^\infty$ y $\hat{\lambda} = \{\lambda_n\}_{n=1}^\infty$, sea \hat{c} la sucesión definida por

$$c_n = \lambda_n s_n + \lambda_{n+1} a_{n-1}, \quad n \in \mathbb{N}, \quad (2.12)$$

el operador lineal

$$A_{\lambda,a}^T : \mathfrak{s} \rightarrow \mathfrak{s} \quad (2.13)$$

por $A_{\lambda,a}^T(\hat{s}) \equiv \hat{c}$ es el operador transpuesto del operador discreto $A_{a,\lambda}$, [16]. Un resultado explícito similar al Teorema 2.1.1 es el siguiente:

Teorema 2.1.5. Sea $\hat{s}^{(0)} \in \mathfrak{s}$, entonces $A_{\lambda,a}^T{}^n(\hat{s}^{(0)}) = (s_1^{(n)}, s_2^{(n)}, s_3^{(n)}, \dots)$ donde

$$s_j^{(n)} = \lambda_j^n s_j + \sum_{m=j}^{n+j} \left(\prod_{k=m}^{m-1} a_k \right) Q[\lambda_m, \lambda_j]^{n+m-j} s_j^{(0)}. \quad (2.14)$$

La demostración de este resultado es similar a la demostración del Teorema 2.1.1. De este resultado se puede concluir que las propiedades de convergencia de $A_{\lambda,a}^T$ pueden ser derivadas directamente de las propiedades de convergencia de $A_{a,\lambda}$.

2.1.4 El problema continuo

Considere el siguiente problema de valor inicial en la frontera para la ecuación diferencial parcial lineal advección - reacción

$$u_t + \alpha(x)u_x = \beta(x)u, \quad x > 0, t > 0 \quad (2.15)$$

$$u(x, 0) = f(x), \quad (2.16)$$

$$u(0, t) = g(t), \quad (2.17)$$

donde $\alpha(x)$, $\beta(x)$, $f(x)$ y $g(t)$ son funciones suaves. Si $\alpha(x) > 0$, entonces un esquema de diferencias finitas adecuado para aproximar la solución del Problema definido por las Ecs.(2.15)-(2.17) está dado por

$$\frac{v(x, t+k) - v(x, t)}{k} + \alpha(x) \frac{v(x, t) - v(x-h, t)}{h} = \beta(x)v(x, t). \quad (2.18)$$

Si se satisface $\alpha(x) \frac{k}{h} \leq 1$, entonces la Ec.(2.18) satisface la prueba Courant-Friedrichs-Lewy [17] y $v(x, t) \rightarrow u(x, t)$ conforme $k, h \rightarrow 0$.

Sea (mh, nk) con $m, n \in \mathbb{N}$, y $h, k > 0$ una malla rectangular. Se definirá $v_m^n = v(mh, nk)$, $\alpha_m = \alpha(mh)$, $\beta_m = \beta(mh)$, $\lambda_m = 1 - \alpha_m \frac{k}{h} + \beta_m k$ y $a_m = \alpha_m \frac{k}{h}$, entonces la Ec.(2.18) es equivalente a

$$v_m^{n+1} = \lambda_m v_m^n + a_m v_{m-1}^n. \quad (2.19)$$

Una condición de frontera, Ec.(2.17) consistente con la Ec.(2.19) es $u(0, t) = 0$. Así, las Ecs.(2.18) y (2.19) sugieren que una iteración del operador advección - reacción discreto corresponde a un paso de tiempo en el esquema de diferencias finitas para la ecuación diferencial parcial lineal advección - reacción.

Finalmente, se harán algunas observaciones en la solución de la ecuación de advección continua. Para empezar, recordemos que la solución general a la ecuación de advección homogénea puede ser escrita de la siguiente forma,

$$u(x, t) = \psi \left(t - \int_0^x \frac{1}{\alpha} \right),$$

ψ es arbitraria. Ahora, con el fin de satisfacer la condición de frontera, se debe tener que $u(0, t) = \psi(t) = g(t)$. En otras palabras, para $y > 0$, se tiene la condición $\psi(y) = g(y)$, y esto fija la función ψ en la línea media.

Por otra parte, si denotamos a $h(x) = -\int_0^x 1/\alpha$, con el fin de satisfacer la condición inicial se debe tener que $u(x, 0) = f(x) = \psi(h(x))$. La consideración $\alpha(x) > 0$ implica que h es monótona decreciente, y en particular, invertible. Por lo tanto, se puede reescribir la última ecuación como:

$$\psi(y) = f(h^{-1}(y)),$$

para $y \in \text{Im } h$. Dado que h es además negativa, $\text{Im } h$ es realmente un intervalo de la forma $(\gamma, 0]$, donde

$$\gamma = \lim_{x \rightarrow \infty} h(x).$$

De esta manera no existe ambigüedad al determinar la función ψ (excepto quizás en el origen), y se puede escribir

$$\psi(y) = \begin{cases} g(y) & y > 0 \\ f(h^{-1}(y)) & \gamma < y \leq 0 \end{cases},$$

para construir la única solución del problema. El mismo método se aplica en el caso no homogéneo. Nuevamente se usa la condición de frontera para obtener $\psi(y) = g(y)$, cuando $y > 0$, como antes; pero ahora, se obtiene una relación ligeramente más complicada para la condición inicial:

$$\psi(x) = e^{-\int_0^x \beta/\alpha} f(x).$$

El lado derecho de la última ecuación involucra sólo datos conocidos, y nuevamente, dado que h es invertible, se pueden cambiar las variables por medio de $y = h(x)$ y reescribir esta ecuación como

$$\psi(y) = e^{-\int_0^{h^{-1}(y)} \beta} f(h^{-1}(y)),$$

la cual determina ahora a ψ en el intervalo $(\gamma, 0]$.

Ahora para relacionar esta información con el problema discreto, observe que en esta descripción de la solución puede haber aún cierta ambigüedad en la forma de determinar ψ , dado que si por ejemplo, $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x)$ existe y es acotado, pudimos haber continuado ψ hasta γ , y por lo tanto continuar la solución del problema de manera continua.

Sin embargo, si la integral $\int_0^x 1/\alpha$ converge, entonces $1/\alpha \rightarrow 0$, o $\alpha \rightarrow \infty$, conforme $x \rightarrow \infty$. Como se ha visto, la convergencia de las iteradas $A_{\lambda\alpha}^n$ requiere que $\prod a_m$ sea convergente, y por lo tanto a_m que sea acotado. Dado que se está definiendo $a_m = \alpha(m) \frac{k}{h}$ y tomando $h = k$, la convergencia del producto claramente requiere la divergencia de la integral.

2.2 Familia de operadores discretos advección-reacción con retardo

En este trabajo se define una familia de operadores discretos advección-reacción con retardo con el fin de analizar sus propiedades dinámicas. Las características que se buscan en sus iteradas son sus características analíticas y numéricas relacionadas con la teoría de interpolación. Para ello, primeramente se obtienen las iteradas del sistema discreto (órbitas) de manera explícita para luego establecer una relación con la teoría de interpolación usando los polinomios de Lagrange. Por último se dan condiciones de convergencia para las iteradas.

Dadas dos sucesiones reales $\hat{\lambda} = \{\lambda_i\}_{i=1}^{\infty}$ y $\hat{b} = \{b_i\}_{i=1}^{\infty}$, se define el siguiente sistema dinámico bidimensional discreto con retardo

$$u_{m,n+1} = \begin{cases} \lambda_m u_{m,n} & \text{si } n \in \mathbb{N} \text{ y } m = 1, 2 \\ \lambda_m u_{m,n} + b_{m-2} u_{m-2,n} & \text{si } m, n \in \mathbb{N} \text{ y } m \geq 3. \end{cases} \quad (2.20)$$

El interés en este sistema va en dos sentidos:

- Primero, intuitivamente, en la mayoría de los casos de convergencia, la aplicación repetida de este sistema conducirá a converger a la sucesión constante cero y la convergencia está totalmente determinada por la sucesión $\{\lambda_i\}_{i=1}^{\infty}$. Este no es el caso, la sucesión $\{b_i\}_{i=1}^{\infty}$, la cual introduce el retardo, jugará un papel importante en la convergencia como se verá más adelante.
- Segundo, debido a que el sistema, Ec.(2.20), es una discretización consistente vía diferencias finitas en una malla rectangular infinita de la ecuación advección-reacción con difusión débil:

$$\frac{\partial u(x, t)}{\partial t} + \alpha_1(x) \frac{\partial u(x, t)}{\partial x} + \alpha_2(x) \frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial x^2} = \beta(x) u(x, t),$$

donde $\epsilon \alpha_1(x) = -2\alpha_2(x)$ y ϵ es un parámetro pequeño [17, 18]. Tal discretización puede ser obtenida haciendo $u_{m,n} = u(mh, nk)$, $\epsilon = h$, $b_{m-2} = -\alpha_2(mh) \frac{k}{h^2}$ y $\lambda_m = -\alpha_1(mh) \frac{k}{h} - \alpha_2(mh) \frac{k}{h^2} + \beta(mh)k$ con h y k siendo el tamaño de paso. Los índices m y n corresponden a la variable espacial x , y a la variable temporal t , respectivamente.

El sistema, Ec.(2.20), puede ser escrito adecuadamente en la siguiente forma matricial $\hat{u}_{n+1} = A_{b,\lambda} \hat{u}_n$, donde $A_{b,\lambda}$ es la matriz infinita triangular inferior

$$A_{b,\lambda} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots \\ 0 & \lambda_2 & 0 & 0 & 0 & \cdots \\ b_1 & 0 & \lambda_3 & 0 & 0 & \cdots \\ 0 & b_2 & 0 & \lambda_4 & 0 & \cdots \\ 0 & 0 & b_3 & 0 & \lambda_5 & \vdots \\ \vdots & 0 & 0 & \ddots & \ddots & \ddots \end{pmatrix}, \quad (2.21)$$

donde \hat{u}_n es una sucesión real $\hat{u}_n = (u_{1,n}, u_{2,n}, \dots)$. Dado que la matriz $A_{b,\lambda}$ tiene solo dos bandas distintas de ceros, dada una sucesión $\hat{s} \in \sim$ el producto $A_{b,\lambda} \hat{s}$ está bien definido, dado que no hay problemas de convergencia, ya que todas las sumas involucradas son finitas. Así, podemos considerar a la matriz $A_{b,\lambda}$ para definirla como un operador lineal en el espacio $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ de las sucesiones infinitas y llamar a este operador, *el operador discreto advección-reacción con retardo* (DARR) para las sucesiones dadas $\hat{b} = \{b_i\}_{i=1}^{\infty}$ and $\hat{\lambda} = \{\lambda_i\}_{i=1}^{\infty}$.

2.2.1 Órbita del operador DARR

La órbita del sistema, Ec.(2.20), para una condición inicial dada $\hat{s}^{(0)} \in \mathfrak{s}$, es una sucesión real

$$\{\hat{s}^{(0)}, A_{b,\lambda}\hat{s}^{(0)}, A_{b,\lambda}^2\hat{s}^{(0)}, \dots\},$$

la cual es la evolución temporal de $\hat{s}^{(0)}$. Dado que las órbitas del sistema dependen de las potencias de $A_{b,\lambda}$, se calculará sus entradas en dos distintos escenarios. En el primero de ellos, se considerará el caso especial donde todos los eigenvalores son distintos y en el segundo caso, se considerará el caso general calculando las potencias de manera directa.

Con el fin de encontrar explícitamente las entradas de las potencias de $A_{b,\lambda}$ cuando todos sus eigenvalores son diferentes se hará uso de la conjugación, esto es, se encontrará una matriz infinita $\Phi_{b,\lambda}$ tal que $A_{b,\lambda} = \Phi_{b,\lambda} \circ \Omega_\omega \circ \Phi_{b,\lambda}^{-1}$, donde Ω_ω es una matriz infinita diagonal con entradas $(\Omega_\omega)_{ii} = \omega(\lambda_i)$, donde $\omega : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ es una función real la cual será elegida a posteriori. Los siguientes lemas ayudaran a alcanzar este objetivo.

Lema 2.2.1. *Supongamos que todos los eigenvalores de $A_{b,\lambda}$ son distintos. Denotemos a $(\Phi_{b,\lambda})_{i,j}$ como la entrada i, j de $\Phi_{b,\lambda}$ con*

$$(\Phi_{b,\lambda})_{i,j} = \begin{cases} 0 & \text{si } i < j \\ 1 & \text{si } i = j \\ 0 & \text{si } i > j \text{ e } i + j \text{ es impar} \\ \frac{1}{(\lambda_j - \lambda_i)} \prod_{k=0}^{q-1} b_{j+2k}^j & \text{si } i > j \text{ e } i + j \text{ es par,} \end{cases}$$

donde

$$q = \frac{i-j}{2} \quad \text{y} \quad b_k^\ell = \begin{cases} \frac{b_k}{\lambda_\ell - \lambda_k} & \text{si } k \neq \ell \\ b_k & \text{si } k = \ell \end{cases}.$$

Sea Ω_ω una matriz diagonal infinita con $(\Omega_\omega)_{ii} = \omega(\lambda_i)$, donde $\omega : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ es una función arbitraria pero fija. Sea $\Psi_{b,\lambda}$ una matriz triangular inferior infinita con

$$(\Psi_{b,\lambda})_{i,j} = \begin{cases} 0 & \text{si } i < j \\ 1 & \text{si } i = j \\ 0 & \text{si } i > j \text{ e } i + j \text{ es impar} \\ \prod_{k=0}^{q-1} \frac{b_{j+2k}}{\lambda_i - \lambda_{j+2k}} & \text{si } i > j \text{ e } i + j \text{ es par.} \end{cases}$$

Entonces, las entradas $(\Phi_{b,\lambda} \circ \Omega_\omega \circ \Psi_{b,\lambda})_{ij}$ están dadas por

$$(\Phi_{b,\lambda} \circ \Omega_\omega \circ \Psi_{b,\lambda})_{i,j} = \begin{cases} 0 & \text{si } i < j \\ \omega(\lambda_i) & \text{si } i = j \\ 0 & \text{si } i > j \text{ e } i + j \text{ es impar} \\ \left(\frac{1}{q} \prod_{k=0}^{q-1} b_{j+2k}\right) \frac{d^q}{d\lambda^q} \mathcal{L}_\omega[\lambda_j, \lambda_{j+2}, \dots, \lambda_i] & \text{si } i > j \text{ e } i + j \text{ es par} \end{cases},$$

donde $\mathcal{L}_\omega[\lambda_j, \lambda_{j+2}, \dots, \lambda_i]$ es el polinomio de Lagrange en λ de grado q en los nodos $\{\lambda_j, \lambda_{j+2}, \dots, \lambda_i\}$ para la función ω .

Demostración

Dado que las matrices, Φ , Ω y Ψ , son triangular inferiores, su producto también es además una matriz triangular inferior. Sea $d_{i,j}$, $e_{i,j}$ y $f_{i,j}$ las entradas de $\Phi_{b,\lambda} \circ \Omega_w \circ \Psi_{b,\lambda}$, $\Phi_{b,\lambda} \circ \Omega_w$ y $\Psi_{b,\lambda}$, respectivamente. Se tienen 3 posibles casos los cuales se analizan a continuación.

Si $i = j$, entonces,

$$d_{i,i} = \sum e_{i,k} f_{k,j} = e_{i,i} f_{i,i} = (1)\omega(\lambda_i) = \omega(\lambda_i).$$

Si $i > j$ e $i + j$ es impar. Supongamos que j es impar (un argumento similar se usa j es par), lo cual implica que i es par. Así para un índice arbitrario k se tiene que: si k es par entonces $e_{i,k} f_{k,j} = e_{i,k} 0 = 0$; si k es impar entonces $e_{i,k} f_{k,j} = 0 f_{i,k} = 0$. Por lo tanto, $e_{i,k} f_{k,j} = 0, \forall k$,

$$d_{i,j} = \sum_{k=j}^i e_{i,k} f_{k,j} = 0.$$

Si $i > j$ e $i + j$ es par. Consideremos que i y j son impares (un argumento similar se usa cuando i y j son pares), y por simplicidad se denotará a $\Lambda_{i,j} = \lambda_i - \lambda_j$, entonces,

$$\begin{aligned} d_{i,j} &= \sum_{k=j}^i e_{i,k} f_{k,j} = \sum_{m=0}^q e_{i,j+2m} f_{j+2m,j} = \omega(\lambda_i) f_{i,j} + e_{i,j} + \sum_{m=1}^{q-1} e_{i,j+2m} f_{j+2m,j} \\ &= \omega(\lambda_i) \prod_{k=0}^{q-1} \frac{b_{j+2k}}{\Lambda_{i,j+2k}} + \frac{\omega(\lambda_j)}{\Lambda_{j,i}} \prod_{k=0}^{q-1} b_{j+2k}^j + \sum_{m=1}^{q-1} \frac{\omega(\lambda_{j+2m})}{\Lambda_{j+2m,i}} \left(\prod_{k=0}^{q-m-1} b_{j+2m+2k}^{j+2m} \right) \left(\prod_{k=0}^{m-1} \frac{b_{j+2k}}{\Lambda_{j+2m,j+2k}} \right) \\ &= \left(\prod_{k=0}^{q-1} b_{j+2k} \right) \left(\omega(\lambda_i) \prod_{k=0}^{q-1} \frac{1}{\Lambda_{i,j+2k}} + \frac{\omega(\lambda_j)}{\Lambda_{j,i}} \prod_{k=1}^{q-1} \frac{1}{\Lambda_{j,j+2k}} \right) + \\ &\quad \sum_{m=1}^{q-1} \frac{\omega(\lambda_{j+2m}) b_{j+2m}}{\Lambda_{j+2m,i}} \left(\prod_{k=1}^{q-m-1} \frac{b_{j+2m+2k}}{\Lambda_{j+2m,j+2m+2k}} \right) \left(\prod_{k=0}^{m-1} \frac{b_{j+2k}}{\Lambda_{j+2m,j+2k}} \right) \\ &= \left(\prod_{k=0}^{q-1} b_{j+2k} \right) \left(\omega(\lambda_i) \prod_{k=0}^{q-1} \frac{1}{\Lambda_{i,j+2k}} + \frac{\omega(\lambda_j)}{\Lambda_{j,i}} \prod_{k=1}^{q-1} \frac{1}{\Lambda_{j,j+2k}} \right) + \\ &\quad \sum_{m=1}^{q-1} \frac{\omega(\lambda_{j+2m}) b_{j+2m}}{\Lambda_{j+2m,i}} \left(\prod_{l=m+1}^{q-1} \frac{b_{j+2k}}{\Lambda_{j+2m,j+2l}} \right) \left(\prod_{l=0}^{m-1} \frac{b_{j+2l}}{\Lambda_{j+2m,j+2l}} \right) \\ &= \left(\prod_{k=0}^{q-1} b_{j+2k} \right) \left[\omega(\lambda_i) \prod_{k=0}^{q-1} \frac{1}{\Lambda_{i,j+2k}} + \frac{\omega(\lambda_j)}{\Lambda_{j,i}} \prod_{k=1}^{q-1} \frac{1}{\Lambda_{j,j+2k}} + \sum_{m=1}^{q-1} \frac{\omega(\lambda_{j+2m})}{\Lambda_{j+2m,i}} \left(\prod_{k=0, k \neq m}^{q-1} \frac{1}{\Lambda_{j+2m,j+2k}} \right) \right] \\ &= \left(\prod_{k=0}^{q-1} b_{j+2k} \right) \left[\sum_{m=0}^q \omega(\lambda_{j+2m}) \left(\prod_{k=0, k \neq m}^q \frac{1}{\Lambda_{j+2m,j+2k}} \right) \right] \\ &= \frac{1}{q} \left(\prod_{k=0}^{q-1} b_{j+2k} \right) \mathcal{L}_\omega^{(q)}[\lambda_j, \lambda_{j+2}, \dots, \lambda_i]. \quad \square \end{aligned}$$

Lema 2.2.2. $\Phi_{b,\lambda}$ es invertible y $(\Phi_{b,\lambda})^{-1} = \Psi_{b,\lambda}$.

Demostración

Si escogemos $\omega(x) \equiv 1$, entonces $\mathcal{L}_\omega[\lambda_j, \lambda_{j+2}, \dots, \lambda_i] \equiv 1$, por lo tanto, todas sus derivadas se anulan y por el Lema 2.2.1 tenemos que $\Phi_{b,\lambda} \circ \Omega \circ \Psi_{b,\lambda} = I$. Por la forma en que se eligió w se tiene que $\Omega = I$, esto implica que $(\Phi_{b,\lambda})^{-1} = \Psi_{b,\lambda}$. \square

Lema 2.2.3. $A_{b,\lambda} = \Phi_{b,\lambda} \circ \Omega_w \circ \Phi_{b,\lambda}^{-1}$, donde $\omega(x) = x$.

Demostración Por los Lemas (2.2.1) y (2.2.2) sólo se necesita probar la igualdad para las entradas $i > j$ con $i+j$ par. Dado que el polinomio $\omega(x) = x$ interpola en los nodos dados por los eigenvalores de $A_{b,\lambda}$ y por la unicidad del polinomio de Lagrange, se puede concluir que $\mathcal{L}_w[\lambda_j, \lambda_{j+2}, \dots, \lambda_i]$ es un polinomio de grado uno. Por lo tanto, su q -derivada es cero excepto cuando $i - j = 2$. Para éstas entradas se tiene que

$$\begin{aligned} (\Phi_{b,\lambda} \circ \Omega \circ \Phi_{b,\lambda}^{-1})_{j+2,j} &= \prod_{k=0}^0 b_{j+2k} \mathcal{L}_\omega^{(1)}[\lambda_j, \lambda_{j+2}] \\ &= b_j \frac{d}{d\lambda} \left(\frac{\lambda_j(\lambda - \lambda_{j+2})}{\lambda_j - \lambda_{j+2}} + \frac{\lambda_{j+2}(\lambda - \lambda_j)}{\lambda_{j+2} - \lambda_j} \right) = b_j \quad \square \end{aligned}$$

Con los lemas previos podemos obtener el siguiente resultado.

Teorema 2.2.1. Dadas dos sucesiones reales arbitrarias $\hat{b} = \{b_i\}_{i=1}^\infty$ y $\hat{\lambda} = \{\lambda_i\}_{i=1}^\infty$ con $\lambda_i \neq \lambda_j, \forall i, j$ y sea $A_{b,\lambda}$ el operador DARR. Si $(A_{b,\lambda}^n)_{i,j}$ denota la entrada i, j de $A_{b,\lambda}^n = \prod_{k=1}^n A_{b,\lambda}$, entonces

$$(A_{b,\lambda}^n)_{i,j} = \begin{cases} 0 & \text{si } i < j \\ \lambda_i^n & \text{si } i = j \\ 0 & \text{si } i > j \text{ e } i+j \text{ es impar} \\ \frac{2}{i-j} \left(\prod_{k=0}^{q-1} b_{j+2k} \right) \mathcal{L}_\omega^{(q)}[\lambda_j, \lambda_{j+2}, \dots, \lambda_i] & \text{si } i > j \text{ e } i+j \text{ es par.} \end{cases}$$

Hasta ahora, sólo se ha encontrado que los eigenvalores de $A_{b,\lambda}$ aparecen en las entradas de $A_{b,\lambda}^n$ como los nodos de un polinomio de interpolación para la función $w(x) = x^n$ y el producto de los elementos de la subdiagonal puede ser interpretado como coeficientes de corrección o pesos. Estos dos hechos muestran una conexión directa con la teoría de interpolación.

Encontrar una fórmula cuando la multiplicidad algebraica de alguno de los eigenvalores de $A_{b,\lambda}$ es mayor que uno, no es una tarea fácil, aún con el uso de la conjugación. Por lo tanto, en ese caso se calculará las entradas del operador de una manera directa. Con el fin de establecer el siguiente resultado de una forma condensada, se usará la siguiente notación. Dados tres números naturales k, m y n , denotaremos a $P[\lambda_m, \lambda_n]^k$ como el polinomio homogéneo de grado de grado k consistente de la suma de todas las posibles monomios con coeficientes unitarios en las variables $\lambda_m, \lambda_{m+2}, \lambda_{m+4}, \dots, \lambda_{n-2}, \lambda_n$. Por convención $P[\lambda_m, \lambda_n]^0 = 1$ y $P[\lambda_m, \lambda_n]^{-k} = 0, \forall k \in \mathbb{N}$. Es importante mencionar que la notación aquí presentada en este trabajo difiere de la notación usada en el trabajo de Solís [12]. Sin embargo, éstas tienen la siguiente equivalencia,

$$P[\lambda_m, \lambda_n]^k = P_k[\lambda_m, \lambda_{m+2}, \dots, \lambda_{n-2}, \lambda_n].$$

Teorema 2.2.2. *Dadas dos sucesiones arbitrarias reales $\{\lambda_i\}_{i=1}^{\infty}$ y $\{b_i\}_{i=1}^{\infty}$, sea $A_{b,\lambda}$ el operador DARR. Si $(A_{b,\lambda}^n)_{i,j}$ denota la entrada i, j de $A_{b,\lambda}^n = \prod_{j=1}^n A_{b,\lambda}$, entonces*

$$(A_{b,\lambda}^n)_{i,j} = \begin{cases} 0 & \text{si } i < j \\ \lambda_i^n & \text{si } i = j \\ 0 & \text{si } i > j \text{ e } i+j \text{ es impar} \\ \left(\prod_{k=0}^{q-1} b_{j+2k}\right) P[\lambda_j, \lambda_i]^{n-q} & \text{si } i > j \text{ e } i+j \text{ es par.} \end{cases}$$

Demostración El caso cuando $i \leq j$, la demostración es directa. Para $i > j$, la demostración se puede hacer por inducción sobre n . Cuando $n = 1$ se tiene que

$$P[\lambda_j, \lambda_i]^{1-\frac{i-j}{2}} = \begin{cases} 0 & \text{if } \frac{i-j}{2} > 1 \\ 1 & \text{if } \frac{i-j}{2} = 1 \end{cases}.$$

Por lo tanto, si $\frac{i-j}{2} > 1$ entonces $(A_{b,\lambda}^n)_{i,j} = 0$. Para $\frac{i-j}{2} = 1$ se tiene que

$$(A_{b,\lambda}^n)_{j+2,j} = \left(\prod_{k=0}^0 b_{j+2k}\right) P[\lambda_j, \lambda_{j+2}]^0 = b_j.$$

Suponga que la fórmula es válida para un valor fijo $n \in \mathbb{N}$ y para todo $i, j \in \mathbb{N}$, entonces

$$\begin{aligned} (A_{b,\lambda}^{n+1})_{i,j} &= \lambda_i (A_{b,\lambda}^n)_{i,j} + b_{i-2} (A_{b,\lambda}^n)_{i-2,j} \\ &= \lambda_i \left(\left(\prod_{k=0}^{q-1} b_{j+k}\right) P[\lambda_j, \lambda_i]^{n-\frac{1}{2}(i-j)} \right) + \\ &\quad b_{i-2} \left(\left(\prod_{k=0}^{\left(\frac{i-2-j}{2}-1\right)} b_{j+k}\right) P[\lambda_j, \lambda_{i-2}]^{n-\frac{1}{2}(i-2-j)} \right) \\ &= \left(\prod_{k=0}^{q-1} b_{j+k}\right) \left(\lambda_i P[\lambda_j, \lambda_i]^{n-\frac{1}{2}(i-j)} + P[\lambda_j, \lambda_{i-2}]^{n+1-\frac{1}{2}(i-j)} \right) \\ &= \left(\prod_{k=0}^{q-1} b_{j+k}\right) P[\lambda_j, \lambda_i]^{n+1-\frac{1}{2}(i-j)} \quad \square \end{aligned}$$

Note que a partir de los Teoremas anteriores se puede obtener la siguiente identidad.

Corolario 2.2.1. *Si $\hat{\lambda} = \{\lambda_j\}_{j=1}^{\infty}$ es una sucesión con elementos distintos y $\omega(\lambda) = \lambda$, entonces $\forall i, j, n \in \mathbb{N}$ con $i > j$ e $i+j$ par,*

$$P[\lambda_j, \lambda_i]^{n-\frac{1}{2}(i-j)} = \frac{1}{q} \mathcal{L}_{\omega}^{(q)}[\lambda_j, \lambda_{j+2}, \dots, \lambda_{i-2}, \lambda_{i-2}].$$

2.2.2 Condiciones de convergencia

Una vez que se han calculado las entradas del operador DARR para cualquier potencia arbitraria con dos sucesiones dadas $\hat{b} = \{b_j\}_{j=0}^{\infty}$ y $\hat{\lambda} = \{\lambda_j\}_{j=1}^{\infty}$, se puede obtener del Teorema 2.2.2 condiciones necesarias y suficientes para la convergencia de la órbita de una sucesión arbitraria.

Corolario 2.2.2. *Dada una sucesión real $\hat{s} \in \mathfrak{s}$, la sucesión $A_{b,\lambda}^n(\hat{s})$, converge, conforme $n \rightarrow \infty$, si y sólo si*

$$\left(\prod_{k=0}^{q-1} b_{j+2k} \right) P[\lambda_j, \lambda_i]^{n-\frac{1}{2}(i-j)} < \infty,$$

para todo $i > j$ con $i + j$ par.

Las condiciones suficientes para la convergencia de $A_{b,\lambda}^n(\hat{s})$ pueden ser obtenidas considerando unas sucesiones especiales $\hat{b} = \{b_j\}_{j=0}^\infty$, las cuales serán aquellas que cumplan $\prod_{k=0}^\infty b_k < \infty$. En este caso solo se requiere que

$$P[\lambda_j, \lambda_i]^{n-\frac{1}{2}(i-j)} < \infty, \tag{2.22}$$

para todo $i > j$ con $i + j$ par. Para garantizar la Ec.(2.22), se hará uso del siguiente lema, el cual puede ser probado de una manera directa, donde ℓ^1 denota el espacio de sucesiones cuyas series son absolutamente convergentes.

Lema 2.2.4. *Sea $\lambda = \{\lambda_j\}_{j=1}^\infty \in \ell^1$. Para cualquier n tal que $n > \frac{i-j}{2}$,*

$$|P[\lambda_j, \lambda_{j+2}, \dots, \lambda_i]^{n-\frac{1}{2}(i-j)}| \leq P[|\lambda_j|, |\lambda_{j+2}|, \dots, |\lambda_i|]^{n-\frac{1}{2}(i-j)} \leq \|\lambda\|_1^{n-\frac{1}{2}(i-j)}.$$

En particular, si $\|\lambda\|_1 \leq 1$, entonces $|P(\lambda_j, \dots, \lambda_i)^{n-\frac{1}{2}(i-j)}| \leq 1$.

Así se obtiene

Teorema 2.2.3. *Sean $\hat{b} = \{b_j\}_{j=0}^\infty$ y $\hat{\lambda} = \{\lambda_j\}_{j=1}^\infty \in \ell^1$ tal que $\prod_{k=0}^\infty b_k < \infty$. Si $\|\lambda\|_1 \leq 1$ entonces, el límite para cada una de las entradas de las iteradas $A_{b,\lambda}^n(s)$ conforme $n \rightarrow \infty$ existe. Aún más, si $\|\lambda\|_1 < 1$ este límite es cero.*

Consideremos algunos ejemplos particulares que ilustren el comportamiento de una simple sucesión bajo la acción del operador DARR. Se escoge primero $\hat{\lambda}$ dada por $\{\frac{1}{n^2}\}_{n=2}^\infty$ y la sucesión \hat{b} dada por la sucesión unitaria constante. La condición inicial está dada por $\hat{s}^{(0)} = (1, 0, 0, \dots)$, la cual puede ser considerada como una condición de perturbación inicial para la ecuación advección-reacción-difusión. Note que $\prod_{k=0}^\infty b_k = 1$ y $\|\lambda\|_1 = \frac{\pi^2}{6} - 1$, así que del Teorema 2.2.3 se tiene que el sistema, Ec.(2.20), converge a cero.

Si modificamos el primer ejemplo eligiendo ahora a $\hat{\lambda}$ como $\{\frac{1}{n^2}\}_{n=1}^\infty$. En este caso, el sistema definido por la Ec.(??) converge a una sucesión distinta de cero. En este caso, $\|\lambda\|_1 = \frac{\pi^2}{6} > 1$, lo cual muestra que la condición Ec.(2.22) es suficiente pero no necesaria. Vale la pena recalcar que la ecuación advección-reacción-difusión en dominios acotados no tiene convergencia a cero.

Por último, un ejemplo donde no se tiene convergencia, es escogiendo $\hat{\lambda}$ como $\{\frac{1}{n}\}_{n=1}^\infty$ y la sucesión \mathbf{b} dada por la misma sucesión constante de arriba. Aunque todos los eigenvalores del operador DARR están dentro de la bola unitaria, la convergencia no puede ser alcanzada debido a la divergencia en la Norma ℓ^1 de la sucesión $\hat{\lambda}$. Estos simples ejemplos muestran algunas de las sutiles diferencias en cuanto a definir el operador DARR en un dominio acotado y en uno no acotado.

Uno de los objetivos en este trabajo fue introducir el operador DARR. Este operador aparece de manera natural en las ecuaciones diferenciales parciales tal y como se mostró en la Sección 2.2.

Además, sus iteradas pueden ser interpretadas como un problema de interpolación. El segundo objetivo fue obtener la forma explícita de las iteradas de estos operadores y sus propiedades de convergencia. Se mostrarán varios ejemplos en donde se ilustró lo fácil que la convergencia y la no convergencia pueden o no ser obtenida.

2.3 Resumen

Los trabajos descritos en esta sección son la base para el desarrollo del presente trabajo. En el siguiente capítulo se introducirá una nueva familia de operadores la cual considerará los tres fenómenos ya mencionados, advección, reacción y difusión. La diferencia más importante con los trabajos aquí analizados será que este nuevo operador será aun más general. Por lo cual, dentro de los resultados obtenidos se espera que bajo ciertas suposiciones en el nuevo operador se llegue a los mismos resultados que en estos trabajos.

Capítulo 3

Planteamiento del problema

3.1 Operador discreto ADR

En este capítulo se introducirá un operador lineal relacionado a la ecuación advección-reacción-difusión, Ec.(3.1)

$$\frac{\partial u(x, t)}{\partial t} + \alpha_1(x) \frac{\partial u(x, t)}{\partial x} + \alpha_2(x) \frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial x^2} = \beta(x)u(x, t) + f. \quad (3.1)$$

A continuación se describe como se obtiene este operador lineal. Primeramente, supondremos que $f = 0$ en la Ec.(3.1), es decir, no se está considerando el término fuente en el problema. Si se discretiza la ecuación diferencial con un esquema de diferencias finitas hacia atrás se obtiene,

$$\frac{u_i^{j+1} - u_i^j}{\Delta t} + \alpha_1(x) \frac{u_i^j - u_{i-1}^j}{\Delta x} + \alpha_2(x) \frac{u_{i-2}^j - 2u_{i-1}^j + u_i^j}{\Delta x^2} = \beta u_i^j, \quad (3.2)$$

donde los subíndices están asociados a la variable espacial y los superíndices a la variable temporal. Si reordenamos los términos y suponemos que $k = \Delta t$ y $h = \Delta x$ se obtiene:

$$u_{i-2}^j \left(-\frac{k\alpha_2}{h^2} \right) + u_{i-1}^j \left(\frac{k\alpha_1}{h} - \frac{2k\alpha_2}{h^2} \right) + u_i^j \left(1 - \frac{k\alpha_1}{h} - \frac{k\alpha_2}{h^2} + \beta k \right) = u_i^{j+1}. \quad (3.3)$$

Por otra parte, sea \mathfrak{s} el espacio vectorial de todas las secuencias reales. Si $s \in \mathfrak{s}$, definimos $s = \{s_n\}_{n=0}^{\infty}$. Dadas tres secuencias reales $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$, $\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$ y $\{\lambda_n\}_{n=1}^{\infty}$, se define el siguiente sistema discreto dinámico bidimensional

$$b_{n-2}u_{m-2}^n + a_{n-1}u_{m-1}^n + \lambda_n u_m^n = u_m^{n+1} \quad n, m \in \mathbb{N} \quad (3.4)$$

Para poder relacionar el sistema dinámico, definido por la Ec.(3.3), con la discretización obtenida para la ecuación diferencial ADR, Ec.(3.4) escogemos a a_n , b_n y λ_n como sigue,

$$a_n = \frac{k\alpha_1(x_n)}{h} - \frac{2k\alpha_2(x_n)}{h^2}, \quad b_n = -\frac{k\alpha_2(x_n)}{h^2} \quad \text{y} \quad \lambda_n = 1 - \frac{k\alpha_1(x_n)}{h} - \frac{k\alpha_2(x_n)}{h^2} + \beta(x_n)k.$$

Entonces, el operador lineal,

$$A_{a,b,\lambda} : \mathfrak{s} \rightarrow \mathfrak{s},$$

será el operador discreto ADR para \hat{a} , \hat{b} y $\hat{\lambda}$.

El sistema (3.4) puede ser escrito en la siguiente forma matricial como, $\hat{s}_{n+1} = A_{a,b,\lambda}\hat{s}_n$, donde $A_{a,b,\lambda}$ es una matriz tridiagonal infinita inferior

$$A_{a,b,\lambda} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 & 0 & \dots \\ a_1 & \lambda_2 & 0 & 0 & \dots \\ b_1 & a_2 & \lambda_3 & 0 & \dots \\ 0 & b_2 & a_3 & \lambda_4 & \dots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \ddots \end{pmatrix} \quad (3.5)$$

La órbita del sistema (3.4) para una condición inicial dada $\hat{s}^{(0)} \in \mathfrak{s}$ es la sucesión

$$\left\{ \hat{s}^{(0)}, A_{a,b,\lambda}\hat{s}^{(0)}, A_{a,b,\lambda}^2\hat{s}^{(0)}, \dots \right\},$$

la cual será la evolución de $\hat{s}^{(0)}$ en el tiempo.

3.2 Iteradas de $A_{a,b,\lambda}$ - Método directo

De aquí en adelante, fijaremos las sucesiones $\hat{a}, \hat{b}, \hat{\lambda} \in \mathfrak{s}$ y denotaremos, por simplicidad de notación, a las matrices $A_{a,b,\lambda}$, $\Psi_{a,b,\lambda}$ y $\Phi_{a,b,\lambda}$ por A , Ψ y Φ , las cuales se definirán mas adelante.

3.2.1 Polinomios mónicos P , Q y R

Antes de obtener una expresión para las potencias de A definiremos tres clases de polinomios mónicos en las constantes $\lambda \in \mathbb{R}$. Dados $i, j, i_k, n, \in \mathbb{N}$, donde $j \leq i_k < i$ e $k = 1, \dots, m$

$$Q[\lambda_j, \lambda_i]^n = \sum \lambda_j^{\alpha_j} \lambda_{j+1}^{\alpha_{j+1}} \dots \lambda_{i-1}^{\alpha_{i-1}} \lambda_i^{\alpha_i}, \quad (3.6)$$

$$P[\lambda_j, \lambda_i]^n = \sum \lambda_j^{\alpha_j} \lambda_{j+2}^{\alpha_{j+2}} \dots \lambda_{i-2}^{\alpha_{i-2}} \lambda_i^{\alpha_i}, \quad (3.7)$$

$$R[\lambda_j, \lambda_i, \{\lambda_{i_1}, \dots, \lambda_{i_m}\}]^n = \sum \lambda_j^{\alpha_j} \lambda_{j+1}^{\alpha_{j+1}}, \dots, \hat{\lambda}_{i_1}^{\alpha_{i_1}} \dots \hat{\lambda}_{i_m}^{\alpha_{i_m}} \dots \lambda_{i-1}^{\alpha_{i-1}} \lambda_i^{\alpha_i}, \quad (3.8)$$

donde $\sum_{k=j}^i \alpha_k = n$ y la notación $\hat{\lambda}_{i_k}^{\alpha_{i_k}}$ se utiliza para excluir los términos $\lambda_{i_k}^{\alpha_{i_k}}$.

Observación 3.2.1. Casos especiales.

- Si $n = 0$, entonces $Q[\lambda_j, \lambda_i]^0 = 1$, $P[\lambda_j, \lambda_i]^0 = 1$ y $R[\lambda_j, \lambda_i, \{\lambda_{i_1}, \dots, \lambda_{i_m}\}]^0 = 1$.
- Si $n < 0$, entonces $Q[\lambda_j, \lambda_i]^n = 0$, $P[\lambda_j, \lambda_i]^n = 0$ y $R[\lambda_j, \lambda_i, \{\lambda_{i_1}, \dots, \lambda_{i_m}\}]^n = 0$.
- Si $i - j$ es impar, entonces $P[\lambda_j, \lambda_i]^n = 0$.

Lema 3.2.1. *Propiedades de los polinomios Q , P , R .*

$$Q[\lambda_j, \lambda_i]^n = Q[\lambda_j, \lambda_{i-1}]^n + \lambda_i Q[\lambda_j, \lambda_i]^{n-1} \quad (3.9)$$

$$P[\lambda_j, \lambda_i]^n = P[\lambda_j, \lambda_{i-2}]^n + \lambda_i P[\lambda_j, \lambda_i]^{n-1} \quad (3.10)$$

$$R[\lambda_j, \lambda_i, \{\lambda_{i_1}, \dots, \lambda_{i_m}\}]^n = R[\lambda_j, \lambda_{i-1}, \{\lambda_{i_1}, \dots, \lambda_{i_m}\}]^n + \lambda_i R[\lambda_j, \lambda_i, \{\lambda_{i_1}, \dots, \lambda_{i_m}\}]^{n-1} \quad (3.11)$$

Demostración

$$\begin{aligned} Q[\lambda_j, \lambda_i]^n &= \sum_{r=0}^n \lambda_i^r Q[\lambda_j, \lambda_{i-1}]^{n-r} \\ &= Q[\lambda_j, \lambda_{i-1}]^n + \sum_{r=1}^n \lambda_i^r Q[\lambda_j, \lambda_{i-1}]^{n-r} \\ &= Q[\lambda_j, \lambda_{i-1}]^n + \lambda_i \sum_{r=1}^n \lambda_i^{r-1} Q[\lambda_j, \lambda_{i-1}]^{n-r} \\ &= Q[\lambda_j, \lambda_{i-1}]^n + \lambda_i \sum_{r=0}^{n-1} \lambda_i^r Q[\lambda_j, \lambda_{i-1}]^{n-r-1} \\ &= Q[\lambda_j, \lambda_{i-1}]^n + \lambda_i Q[\lambda_j, \lambda_i]^{n-1} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} P[\lambda_j, \lambda_i]^n &= \sum_{r=0}^n \lambda_i^r P[\lambda_j, \lambda_{i-2}]^{n-r} \\ &= P[\lambda_j, \lambda_{i-2}]^n + \sum_{r=1}^n \lambda_i^r P[\lambda_j, \lambda_{i-2}]^{n-r} \\ &= P[\lambda_j, \lambda_{i-2}]^n + \lambda_i \sum_{r=1}^n \lambda_i^{r-1} P[\lambda_j, \lambda_{i-2}]^{n-r} \\ &= P[\lambda_j, \lambda_{i-2}]^n + \lambda_i \sum_{r=0}^{n-1} \lambda_i^r P[\lambda_j, \lambda_{i-2}]^{n-r-1} \\ &= P[\lambda_j, \lambda_{i-2}]^n + \lambda_i P[\lambda_j, \lambda_i]^{n-1} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} R[\lambda_j, \lambda_i, \{\lambda_{i_1}, \dots, \lambda_{i_m}\}]^n &= \sum_{r=0}^n \lambda_i^r R[\lambda_j, \lambda_{i-1}, \{\lambda_{i_1}, \dots, \lambda_{i_m}\}]^{n-r} \\ &= R[\lambda_j, \lambda_{i-1}, \{\lambda_{i_1}, \dots, \lambda_{i_m}\}]^n + \sum_{r=1}^n \lambda_i^r R[\lambda_j, \lambda_{i-1}, \{\lambda_{i_1}, \dots, \lambda_{i_m}\}]^{n-r} \\ &= R[\lambda_j, \lambda_{i-1}, \{\lambda_{i_1}, \dots, \lambda_{i_m}\}]^n + \lambda_i \sum_{r=1}^n \lambda_i^{r-1} R[\lambda_j, \lambda_{i-1}, \{\lambda_{i_1}, \dots, \lambda_{i_m}\}]^{n-r} \\ &= R[\lambda_j, \lambda_{i-1}, \{\lambda_{i_1}, \dots, \lambda_{i_m}\}]^n + \lambda_i \sum_{r=0}^{n-1} \lambda_i^r R[\lambda_j, \lambda_{i-1}, \{\lambda_{i_1}, \dots, \lambda_{i_m}\}]^{n-r-1} \\ &= R[\lambda_j, \lambda_{i-1}, \{\lambda_{i_1}, \dots, \lambda_{i_m}\}]^n + \lambda_i R[\lambda_j, \lambda_i, \{\lambda_{i_1}, \dots, \lambda_{i_m}\}]^{n-1} \quad \square \end{aligned}$$

Observación 3.2.2. Identidades entre polinomios.

Las dos siguientes identidades serán útiles al momento de probar el Teorema 3.2.1

- $Q[\lambda_j, \lambda_{i-1}]^n = R[\lambda_j, \lambda_i, \{\lambda_i\}]^n$,
- $P[\lambda_j, \lambda_i]^n = R[\lambda_j, \lambda_i, \{\lambda_{j+1}, \lambda_{j+3}, \dots, \lambda_{i-3}, \lambda_{i-1}\}]^n$

Observación 3.2.3. Número de elementos en los polinomios Q, R, P

Sean $N_P = \frac{i-j}{2} + 1$, $N_Q = i - j + 1$, $N_R = i - j + 1 - n_p$ donde n_p representa la cardinalidad del conjunto de λ 's omitidas en el polinomio R . Sea $N \in \{N_P, N_Q, N_R\}$ y n el grado del polinomio entonces el número de términos que tendrán los polinomios será

$$E = C(N + n - 1, N - 1) = \frac{(N + n - 1)!}{(N - 1)! n!}$$

El hecho de saber el número de elementos en cada uno de los polinomios mónicos se incluyó ya que puede ser un dato útil al momento de analizar condiciones de convergencia.

3.2.2 Potencias de A

Teorema 3.2.1. Sea A una matriz de dimensión infinita, definida como en la Ec.(3.5), y \hat{a}, \hat{b} y $\hat{\lambda} \in \mathfrak{s}$. Denotemos por $c_{i,j}^n$ a la entrada i, j de la n -ésima potencia de $A = \{c_{i,j}^n\}$, es decir, $A^n = A_{a,b,\lambda}^n = \{c_{i,j}^n\}$, $i, j = 1, 2, \dots$, la cual está dada por la siguiente expresión.

$$c_{i,j}^n = \begin{cases} 0 & \text{si } i < j \\ \lambda_i^n & \text{si } i = j \\ \prod_{k=j}^{i-1} a_k Q[\lambda_j, \lambda_i]^{n-i+j} + \prod_{k=0}^{q-1} b_{j+2k} P[\lambda_j, \lambda_i]^{n-q} + \\ \prod_{k=j}^{i-1} a_k \sum_{s=1}^{[q-1]} \sum_{\substack{i_r=i_{r-1}+2 \\ r=1,s}}^{i-2} \frac{b_{i_k}}{a_{i_k} a_{i_k+1}} R[\lambda_j, \lambda_i, \{\lambda_{i_1+1}, \dots, \lambda_{i_s+1}\}]^{n-i+j+s} & \text{si } i > j \end{cases} \quad (3.12)$$

donde $q = \frac{i-j}{2}$, $i_0 = j - 2$.

Observación 3.2.4. Es importante mencionar que el producto de las a 's en el tercer término de la Ec.3.12 se debe entender de la siguiente manera:

$$\prod_{k=j}^{i-1} a_k \prod_{k=1}^s \frac{b_{i_k}}{a_{i_k} a_{i_k+1}} = \prod_{k=1}^s b_{i_k} \prod_{\substack{\ell=j \\ \ell \neq a_{i_k}, a_{i_k+1}}}^{i-1} a_\ell \quad ,$$

por lo cual, no existirá ninguna indeterminación, en el caso cuando \hat{a} sea la sucesión idénticamente cero.

Antes de dar la demostración al Teorema 3.2.1 enunciaremos el siguiente lema que servirá en su demostración.

Lema 3.2.2. *El producto de matrices triangulares inferiores es una matriz triangular inferior.*

Demostración Sean $T_1 = \{a_{i,j}\}$ y $T_2 = \{b_{i,j}\}$, dos matrices triangulares inferiores. Sea $C = T_1 T_2 = \{c_{i,j}\}$, donde

$$c_{i,j} = \sum_{k=1}^{\infty} a_{i,k} b_{k,j}.$$

Como T_1 y T_2 son matrices triangulares inferiores $a_{i,\ell} = 0$ y $b_{i,\ell} = 0$, $\forall i > \ell$. Supongamos que $i > j$

$$c_{i,j} = \sum_{k=1}^{i-1} a_{i,k} b_{k,j} + \sum_{k=i}^{\infty} a_{i,k} b_{k,j}.$$

En el primer término, $i > k$, entonces $a_{i,k} = 0$. En el segundo término, $k > i > j$, entonces $b_{k,j} = 0$, luego $\forall i > j$, $c_{i,j} = 0$. Es decir, la matriz C es también triangular inferior.

Notemos además que $(T_1 T_2)_{i,i} = a_{i,i} b_{i,i}$, es decir, los elementos diagonales del producto de dos matrices triangulares inferiores es el producto de los elementos diagonales correspondientes.

Demostración La prueba del Teorema se hará por medio de inducción sobre n . Para ello, se considerarán los tres posibles casos obtenidos con i y j .

Si $i < j$ y como A es una matriz triangular inferior, entonces por el Lema 3.2.2, $c_{i,j}^n = 0$.

Si $i = j$ y $n = 1$, entonces $c_{i,j}^1 = c_{i,i}^1 = \lambda_i = \lambda_i^1$. Supongamos que es válido para $n = K$, es decir, $c_{i,j}^K = c_{i,i}^K = \lambda_i^K$. Nuevamente aplicando el resultado del Lema 3.2.2 cuando $i = j$, entonces se estarán multiplicando elementos de las diagonales y

$$c_{i,i}^{K+1} = c_{i,i} c_{i,i}^K = \lambda_i^{K+1}.$$

Prueba por inducción sobre n cuando $i > j$.

Cuando $i > j$ y $n = 1$, queremos probar la siguiente igualdad

$$\begin{aligned} c_{i,j}^1 &= \prod_{k=j}^{i-1} a_k Q[\lambda_j, \lambda_i]^{1-i+j} + \prod_{k=0}^{q-1} b_{j+2k} P[\lambda_j, \lambda_i]^{1-q} \\ &+ \prod_{k=j}^{i-1} a_k \sum_{s=1}^{[q-1]} \sum_{\substack{i_r=i_{r-1}+2 \\ r=1,s}}^{i-2} \prod_{k=1}^s \frac{b_{i_k}}{a_{i_k} a_{i_k+1}} R[\lambda_j, \lambda_i, \{\lambda_{i_1+1}, \dots, \lambda_{i_s+1}\}]^{1-i+j+s}. \end{aligned}$$

Para simplificar el lado derecho en la expresión anterior, veamos bajo qué condiciones alguno de los tres polinomios en el lado derecho tiene exponente entero no negativo. La única hipótesis con que contamos es que $i > j$.

Para el polinomio Q queremos que,

$$\begin{aligned} 1 - i + j &\geq 0, \\ j + 1 &\geq i > j, \\ i &= j + 1, \\ q &= \frac{i - j}{2} = \frac{1}{2}, \end{aligned}$$

dado que q no es entero, $P = 0$ y $\lceil q - 1 \rceil = 0$,

$$\begin{aligned} c_{j+1,j}^1 &= \prod_{k=j}^j a_k Q[\lambda_j, \lambda_i]^0 + \prod_{k=j}^{i-1} a_k \sum_{s=1}^0 \sum_{\substack{i_r=i_{r-1}+2 \\ r=1,s}}^{i-2} \frac{b_{i_k}}{a_{i_k} a_{i_k+1}} R[\lambda_j, \lambda_i, \{\lambda_{i_1+1}, \dots, \lambda_{i_s+1}\}]^s \\ c_{j+1,j}^1 &= a_j. \end{aligned}$$

Para el polinomio P queremos que q sea entero o bien que $i - j$ sea par:

$$\begin{aligned} 1 - q &\geq 0, \\ 1 - \frac{i - j}{2} &\geq 0, \\ 2 - i + j &\geq 0, \\ 2 + j &\geq i > j, \\ i &= j + 2 \\ q &= 1 \end{aligned}$$

sustituyendo los valores obtenidos en la Ec.(3.12)

$$\begin{aligned} c_{j+2,j}^1 &= \prod_{k=j}^{j+1} a_k Q[\lambda_j, \lambda_i]^{-1} + \prod_{k=0}^0 b_{j+2k} P[\lambda_j, \lambda_i]^0 + \\ &+ \prod_{k=j}^{i-1} a_k \sum_{s=1}^{[0]} \sum_{\substack{i_r=i_{r-1}+2 \\ r=1,s}}^{i-2} \frac{b_{i_k}}{a_{i_k} a_{i_k+1}} R[\lambda_j, \lambda_i, \{\lambda_{i_1+1}, \dots, \lambda_{i_s+1}\}]^{-1+s}, \\ c_{j+2,j}^1 &= b_j. \end{aligned}$$

Para el polinomio R queremos que:

$$\begin{aligned} 1 - i + j + s &\geq 0, \\ \frac{1 + s}{2} &\geq \frac{i - j}{2} = q, \\ \frac{1 + s}{2} - 1 &\geq q - 1, \\ \frac{s}{2} &\geq \frac{s - 1}{2} \geq q - 1. \end{aligned}$$

De los límites de la primera suma del tercer término tenemos que $\lceil q - 1 \rceil \geq s \geq 1$,

$$\left\lceil \frac{s}{2} \right\rceil \geq \lceil q - 1 \rceil \geq s,$$

entonces, el único caso posible es $s = 1$, luego $q = 2$ de la expresión anterior y $q = 1$ de la segunda desigualdad, lo cual sería una contradicción. Esto significa que para $n = 1$ aún no hay ni polinomio R , ni productos de a 's con b 's. Por lo cual, la fórmula es válida para $n = 1$.

Supongamos que la fórmula es válida para $n = K$, es decir,

$$c_{i,j}^K = \prod_{k=j}^{i-1} a_k Q[\lambda_j, \lambda_i]^{K-i+j} + \prod_{k=0}^{q-1} b_{j+2k} P[\lambda_j, \lambda_i]^{K-q} \quad (3.13)$$

$$+ \prod_{k=j}^{i-1} a_k \sum_{s=1}^{\lceil q-1 \rceil} \sum_{\substack{i_r=i_{r-1}+2 \\ r=1,s}}^{i-2} \frac{b_{i_k}}{a_{i_k} a_{i_k+1}} R[\lambda_j, \lambda_i, \{\lambda_{i_1+1}, \dots, \lambda_{i_s+1}\}]^{K-i+j+s} \quad (3.14)$$

Veamos que se cumple para $n = K + 1$.

Para ello analizaremos los 3 casos mostrados en la Figura 3.1.

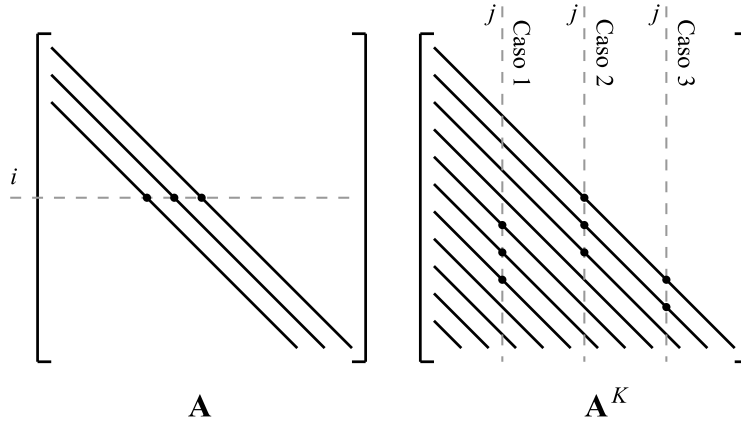
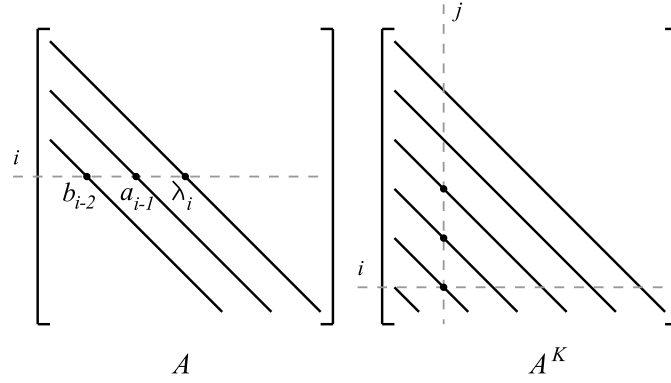


Figura 3.1: Posibles casos para $A^{K+1} = AA^K$.

donde el caso 1 tendrá dos subcasos, uno donde $\frac{i-j}{2}$ es entero y otro donde no.

Caso 1

La demostración para el caso 1, ver Fig.3.2, se dividirá en dos partes dependiendo si el valor de q en $c_{i,j}^K$ es entero o no. El producto a realizarse es el mismo, $A^{K+1} = AA^K$, lo que cambia es el valor de las 3 entradas de la matriz A^K .

Figura 3.2: Caso 1 para $A^{K+1} = AA^K$.**Caso 1 a)**

Supongamos que q es entero. Dado que q depende de los valores de i y de j entonces necesitamos definir 3 valores de q para cada una de las 3 entradas que se están multiplicando en la matriz, A^K ,

$$q = \frac{i-j}{2}, \quad q^+ = \frac{i-1-j}{2}, \quad q^- = \frac{i-2-j}{2} = q-1,$$

además, $c_{i,i} = \lambda_i$, $c_{i,i-1} = a_{i-1}$, $c_{i,i-2} = b_{i-2}$. Realizando el producto de las matrices, $A^{K+1} = AA^K$, se obtiene

$$c_{i,j}^{K+1} = \sum_{m=1}^{\infty} c_{i,m} c_{m,j}^K = c_{i,i-2} c_{i-2,j}^K + c_{i,i-1} c_{i-1,j}^K + c_{i,i} c_{i,j}^K = b_{i-2} c_{i-2,j}^K + a_{i-1} c_{i-1,j}^K + \lambda_i c_{i,j}^K.$$

Usando la hipótesis de inducción junto con la notación de q , q^+ y q^- se tiene,

$$\begin{aligned} c_{i,j}^{K+1} &= b_{i-2} \prod_{k=j}^{i-3} a_k Q[\lambda_j, \lambda_{i-2}]^{K-i+2+j} + b_{i-2} \prod_{k=0}^{q^- - 1} b_{j+2k} P[\lambda_j, \lambda_{i-2}]^{K-q^-} \\ &+ b_{i-2} \prod_{k=j}^{i-3} a_k \sum_{s=1}^{[q^- - 1]} \sum_{i_r = i_{r-1} + 2}^{i-4} \prod_{k=1}^s \frac{b_{i_k}}{a_{i_k} a_{i_{k+1}}} R[\lambda_j, \lambda_{i-2}, \{\lambda_{i_1+1}, \dots, \lambda_{i_s+1}\}]^{K-i+2+j+s} \\ &+ a_{i-1} \prod_{k=j}^{i-2} a_k Q[\lambda_j, \lambda_{i-1}]^{K-i+1+j} + a_{i-1} \prod_{k=0}^{q^+ - 1} b_{j+2k} P[\lambda_j, \lambda_{i-1}]^{K-q^+} \\ &+ a_{i-1} \prod_{k=j}^{i-2} a_k \sum_{s=1}^{[q^+ - 1]} \sum_{i_r = i_{r-1} + 2}^{i-3} \prod_{k=1}^s \frac{b_{i_k}}{a_{i_k} a_{i_{k+1}}} R[\lambda_j, \lambda_{i-1}, \{\lambda_{i_1+1}, \dots, \lambda_{i_s+1}\}]^{K-i+1+j+s} \\ &+ \lambda_i \prod_{k=j}^{i-1} a_k Q[\lambda_j, \lambda_i]^{K-i+j} + \lambda_i \prod_{k=0}^{q-1} b_{j+2k} P[\lambda_j, \lambda_i]^{K-q} \\ &+ \lambda_i \prod_{k=j}^{i-1} a_k \sum_{s=1}^{[q-1]} \sum_{i_r = i_{r-1} + 2}^{i-2} \frac{b_{i_k}}{a_{i_k} a_{i_{k+1}}} R[\lambda_j, \lambda_i, \{\lambda_{i_1+1}, \dots, \lambda_{i_s+1}\}]^{K-i+j+s}. \end{aligned}$$

Dado que q es entero entonces q^+ no lo es y $[q^+ - 1] = [q - 1]$ y $[q^- - 1] = [q - 2]$. Por lo tanto, el quinto sumando se anula y nos queda

$$\begin{aligned}
 c_{i,j}^{K+1} &= b_{i-2} \prod_{k=j}^{i-3} a_k Q[\lambda_j, \lambda_{i-2}]^{K-i+2+j} + b_{i-2} \prod_{k=0}^{q-2} b_{j+2k} P[\lambda_j, \lambda_{i-2}]^{K-q+1} \\
 &+ b_{i-2} \prod_{k=j}^{i-3} a_k \sum_{s=1}^{[q-2]} \sum_{\substack{i_r=i_{r-1}+2 \\ r=1,s}}^{i-4} \prod_{k=1}^s \frac{b_{i_k}}{a_{i_k} a_{i_k+1}} R[\lambda_j, \lambda_{i-2}, \{\lambda_{i_1+1}, \dots, \lambda_{i_s+1}\}]^{K-i+2+j+s} \\
 &+ \prod_{k=j}^{i-1} a_k Q[\lambda_j, \lambda_{i-1}]^{K-i+1+j} + \\
 &+ \prod_{k=j}^{i-1} a_k \sum_{s=1}^{[q-1]} \sum_{\substack{i_r=i_{r-1}+2 \\ r=1,s}}^{i-3} \prod_{k=1}^s \frac{b_{i_k}}{a_{i_k} a_{i_k+1}} R[\lambda_j, \lambda_{i-1}, \{\lambda_{i_1+1}, \dots, \lambda_{i_s+1}\}]^{K-i+1+j+s} \\
 &+ \lambda_i \prod_{k=j}^{i-1} a_k Q[\lambda_j, \lambda_i]^{K-i+j} + \lambda_i \prod_{k=0}^{q-1} b_{j+2k} P[\lambda_j, \lambda_i]^{K-q} + \\
 &+ \lambda_i \prod_{k=j}^{i-1} a_k \sum_{s=1}^{[q-1]} \sum_{\substack{i_r=i_{r-1}+2 \\ r=1,s}}^{i-2} \prod_{k=1}^s \frac{b_{i_k}}{a_{i_k} a_{i_k+1}} R[\lambda_j, \lambda_i, \{\lambda_{i_1+1}, \dots, \lambda_{i_s+1}\}]^{K-i+j+s}.
 \end{aligned}$$

Para simplificar observe que si $i - 2 = j + 2k$, entonces $k = q - 1$. Agrupando el cuarto sumando con el sexto, y el séptimo con el segundo

$$\begin{aligned}
 c_{i,j}^{K+1} &= \prod_{k=j}^{i-1} a_k \left(Q[\lambda_j, \lambda_{i-1}]^{K-i+1+j} + \lambda_i Q[\lambda_j, \lambda_i]^{K-i+j} \right) \\
 &+ \prod_{k=0}^{q-1} b_{j+2k} \left(\lambda_i P[\lambda_j, \lambda_i]^{K-q} + P[\lambda_j, \lambda_{i-2}]^{K-q+1} \right) \\
 &+ \frac{b_{i-2}}{a_{i-2} a_{i-1}} \prod_{k=j}^{i-1} a_k \sum_{s=1}^{[q-2]} \sum_{\substack{i_r=i_{r-1}+2 \\ r=1,s}}^{i-4} \prod_{k=1}^s \frac{b_{i_k}}{a_{i_k} a_{i_k+1}} R[\lambda_j, \lambda_{i-2}, \{\lambda_{i_1+1}, \dots, \lambda_{i_s+1}\}]^{K-i+2+j+s} \\
 &+ \prod_{k=j}^{i-1} a_k \sum_{s=1}^{[q-1]} \sum_{\substack{i_r=i_{r-1}+2 \\ r=1,s}}^{i-3} \prod_{k=1}^s \frac{b_{i_k}}{a_{i_k} a_{i_k+1}} R[\lambda_j, \lambda_{i-1}, \{\lambda_{i_1+1}, \dots, \lambda_{i_s+1}\}]^{K-i+1+j+s} \\
 &+ \frac{b_{i-2}}{a_{i-2} a_{i-1}} \prod_{k=j}^{i-1} a_k Q[\lambda_j, \lambda_{i-2}]^{K-i+2+j} \\
 &+ \lambda_i \prod_{k=j}^{i-1} a_k \sum_{s=1}^{[q-1]} \sum_{\substack{i_r=i_{r-1}+2 \\ r=1,s}}^{i-2} \prod_{k=1}^s \frac{b_{i_k}}{a_{i_k} a_{i_k+1}} R[\lambda_j, \lambda_i, \{\lambda_{i_1+1}, \dots, \lambda_{i_s+1}\}]^{K-i+j+s}
 \end{aligned}$$

Reordenando términos y aplicando las propiedades de los polinomios P , Ec.(3.10), y Q , Ec.(3.9). Reescribiendo $Q[\lambda_j, \lambda_{i-2}]^{K-i+2+j} = R[\lambda_j, \lambda_{i-1}, \lambda_{i-1}]^{K-i+2+j}$ y factorizando el producto de las a 's se tiene

$$\begin{aligned}
 c_{i,j}^{K+1} &= \prod_{k=j}^{i-1} a_k Q[\lambda_j, \lambda_i]^{K-i+1+j} + \prod_{k=0}^{q-1} b_{j+2k} P[\lambda_j, \lambda_i]^{K-q+1} \\
 &+ \prod_{k=j}^{i-1} a_k \left\{ \frac{b_{i-2}}{a_{i-2} a_{i-1}} R[\lambda_j, \lambda_{i-1}, \lambda_{i-1}]^{K-i+2+j} \right. \\
 &+ \frac{b_{i-2}}{a_{i-2} a_{i-1}} \sum_{s=1}^{q-2} \sum_{\substack{i_r=i_{r-1}+2 \\ r=1,s}}^{i-4} \prod_{k=1}^s \frac{b_{i_k}}{a_{i_k} a_{i_{k+1}}} R[\lambda_j, \lambda_{i-2}, \{\lambda_{i_1+1}, \dots, \lambda_{i_s+1}\}]^{K-i+2+j+s} \\
 &+ \sum_{s=1}^{q-1} \sum_{\substack{i_r=i_{r-1}+2 \\ r=1,s}}^{i-3} \prod_{k=1}^s \frac{b_{i_k}}{a_{i_k} a_{i_{k+1}}} R[\lambda_j, \lambda_{i-1}, \{\lambda_{i_1+1}, \dots, \lambda_{i_s+1}\}]^{K-i+1+j+s} \\
 &\left. + \sum_{s=1}^{q-1} \sum_{\substack{i_r=i_{r-1}+2 \\ r=1,s}}^{i-2} \prod_{k=1}^s \frac{b_{i_k}}{a_{i_k} a_{i_{k+1}}} \lambda_i R[\lambda_j, \lambda_i, \{\lambda_{i_1+1}, \dots, \lambda_{i_s+1}\}]^{K-i+j+s} \right\}
 \end{aligned}$$

A continuación se simplifica los primeros tres términos dentro de las llaves. Se omiten los detalles de como se simplifican estos tres términos para hacer mas corta la demostración.

$$\begin{aligned}
 c_{i,j}^{K+1} &= \prod_{k=j}^{i-1} a_k Q[\lambda_j, \lambda_i]^{K-i+1+j} + \prod_{k=0}^{q-1} b_{j+2k} P[\lambda_j, \lambda_i]^{K-q+1} + \prod_{k=j}^{i-1} a_k \left\{ \right. \\
 &\sum_{s=1}^{q-1} \sum_{\substack{i_r=i_{r-1}+2 \\ r=1,s}}^{i-2} \prod_{k=1}^s \frac{b_{i_k}}{a_{i_k} a_{i_{k+1}}} R[\lambda_j, \lambda_{i-1}, \{\lambda_{i_1+1}, \dots, \lambda_{i_s+1}\}]^{K-i+1+j+s} \\
 &\left. + \sum_{s=1}^{q-1} \sum_{\substack{i_r=i_{r-1}+2 \\ r=1,s}}^{i-2} \prod_{k=1}^s \frac{b_{i_k}}{a_{i_k} a_{i_{k+1}}} \lambda_i R[\lambda_j, \lambda_i, \{\lambda_{i_1+1}, \dots, \lambda_{i_s+1}\}]^{K-i+j+s} \right\}.
 \end{aligned}$$

Agrupando el segundo y tercer término se tiene,

$$\begin{aligned}
 c_{i,j}^{K+1} &= \prod_{k=j}^{i-1} a_k Q[\lambda_j, \lambda_i]^{K-i+1+j} + \prod_{k=0}^{q-1} b_{j+2k} P[\lambda_j, \lambda_i]^{K-q+1} \\
 &+ \prod_{k=j}^{i-1} a_k \sum_{s=1}^{q-1} \sum_{\substack{i_r=i_{r-1}+2 \\ r=1,s}}^{i-2} \prod_{k=1}^s \frac{b_{i_k}}{a_{i_k} a_{i_{k+1}}} \left\{ \right. \\
 &\left. R[\lambda_j, \lambda_{i-1}, \{\lambda_{i_1+1}, \dots, \lambda_{i_s+1}\}]^{K-i+1+j+s} + \lambda_i R[\lambda_j, \lambda_i, \{\lambda_{i_1+1}, \dots, \lambda_{i_s+1}\}]^{K-i+j+s} \right\}
 \end{aligned}$$

Aplicando las propiedades del polinomio R , Ec.(3.11), y teniendo en cuenta que $q - 1 = \lceil q - 1 \rceil$,

$$\begin{aligned} c_{i,j}^{K+1} &= \prod_{k=j}^{i-1} a_k Q[\lambda_j, \lambda_i]^{K+1-i+j} + \prod_{k=0}^{\lceil q-1 \rceil} b_{j+2k} P[\lambda_j, \lambda_i]^{K+1-q} \\ &+ \prod_{k=j}^{i-1} a_k \sum_{s=1}^{\lceil q-1 \rceil} \sum_{\substack{i_r=i_{r-1}+2 \\ r=1,s}}^{i-2} \prod_{k=1}^s \frac{b_{i_k}}{a_{i_k} a_{i_k+1}} R[\lambda_j, \lambda_i, \{\lambda_{i_1+1}, \dots, \lambda_{i_s+1}\}]^{K+1-i+j+s}, \end{aligned}$$

con esto queda probado la hipótesis de inducción para $n = K + 1$, en el Caso 1 a).

Caso 1 b)

Supongamos ahora que q^+ , que es el valor de q asociado a la entrada $c_{i,j}^K$, no es entero. Nuevamente, dado que q depende de los valores de i y de j entonces necesitamos definir 3 valores de q para cada una de las 3 entradas que se están multiplicando en la matriz, A^K . Por cuestión de simplicidad se hará una pequeña variación en cuanto a la notación usada en el Caso 1 a). Definimos,

$$q^+ = \frac{i-j}{2}, \quad q = \frac{i-1-j}{2}, \quad q^- = \frac{i-2-j}{2} = q-1,$$

entonces $\lceil q^+ - 1 \rceil = q$, $\lceil q - 1 \rceil = q - 1$ y $\lceil q^- - 1 \rceil = q - 1$. Además, $c_{i,i} = \lambda_i$, $c_{i,i-1} = a_{i-1}$, $c_{i,i-2} = b_{i-2}$. Como ya se mencionó antes, el producto de las matrices, $A^{K+1} = AA^K$, es el mismo, lo que cambiara será el valor de las entradas. Por lo tanto,

$$c_{i,j}^{K+1} = \sum_{m=1}^{\infty} c_{i,m} c_{m,j}^K = c_{i,i-2} c_{i-2,j}^K + c_{i,i-1} c_{i-1,j}^K + c_{i,i} c_{i,j}^K = b_{i-2} c_{i-2,j}^K + a_{i-1} c_{i-1,j}^K + \lambda_i c_{i,j}^K.$$

Usando la hipótesis de inducción junto con la notación de q , q^+ y q^- se tiene,

$$\begin{aligned} c_{i,j}^{K+1} &= b_{i-2} \prod_{k=j}^{i-3} a_k Q[\lambda_j, \lambda_{i-2}]^{K-i+2+j} + b_{i-2} \prod_{k=0}^{q^- - 1} b_{j+2k} P[\lambda_j, \lambda_{i-2}]^{K-q^-} \\ &+ b_{i-2} \prod_{k=j}^{i-3} a_k \sum_{s=1}^{\lceil q^- - 1 \rceil} \sum_{\substack{i_r=i_{r-1}+2 \\ r=1,s}}^{i-4} \prod_{k=1}^s \frac{b_{i_k}}{a_{i_k} a_{i_k+1}} R[\lambda_j, \lambda_{i-2}, \{\lambda_{i_1+1}, \dots, \lambda_{i_s+1}\}]^{K-i+2+j+s} \\ &+ a_{i-1} \prod_{k=j}^{i-2} a_k Q[\lambda_j, \lambda_{i-1}]^{K-i+1+j} + a_{i-1} \prod_{k=0}^{q-1} b_{j+2k} P[\lambda_j, \lambda_{i-1}]^{K-q} \\ &+ a_{i-1} \prod_{k=j}^{i-2} a_k \sum_{s=1}^{\lceil q-1 \rceil} \sum_{\substack{i_r=i_{r-1}+2 \\ r=1,s}}^{i-3} \prod_{k=1}^s \frac{b_{i_k}}{a_{i_k} a_{i_k+1}} R[\lambda_j, \lambda_{i-1}, \{\lambda_{i_1+1}, \dots, \lambda_{i_s+1}\}]^{K-i+1+j+s} \\ &+ \lambda_i \prod_{k=j}^{i-1} a_k Q[\lambda_j, \lambda_i]^{K-i+j} + \lambda_i \prod_{k=0}^{q^+ - 1} b_{j+2k} P[\lambda_j, \lambda_i]^{K-q^+} \\ &+ \lambda_i \prod_{k=j}^{i-1} a_k \sum_{s=1}^{\lceil q^+ - 1 \rceil} \sum_{\substack{i_r=i_{r-1}+2 \\ r=1,s}}^{i-2} \prod_{k=1}^s \frac{b_{i_k}}{a_{i_k} a_{i_k+1}} R[\lambda_j, \lambda_i, \{\lambda_{i_1+1}, \dots, \lambda_{i_s+1}\}]^{K-i+j+s} \end{aligned}$$

Dado que q es entero entonces q^+ y q^- no lo son. Por lo tanto, se anulan el segundo y el octavo sumando. Además, si sustituimos el valor de $[q^+ - 1] = q$, $[q - 1] = q - 1$ y $[q^- - 1] = q - 1$, entonces se tiene

$$\begin{aligned}
c_{i,j}^{K+1} &= b_{i-2} \prod_{k=j}^{i-3} a_k Q[\lambda_j, \lambda_{i-2}]^{K-i+2+j} \\
&+ b_{i-2} \prod_{k=j}^{i-3} a_k \sum_{s=1}^{q-1} \sum_{\substack{i_r=i_{r-1}+2 \\ r=1,s}}^{i-4} \prod_{k=1}^s \frac{b_{i_k}}{a_{i_k} a_{i_k+1}} R[\lambda_j, \lambda_{i-2}, \{\lambda_{i_1+1}, \dots, \lambda_{i_s+1}\}]^{K-i+2+j+s} \\
&+ a_{i-1} \prod_{k=j}^{i-2} a_k Q[\lambda_j, \lambda_{i-1}]^{K-i+1+j} + a_{i-1} \prod_{k=0}^{q-1} b_{j+2k} P[\lambda_j, \lambda_{i-1}]^{K-q} \\
&+ a_{i-1} \prod_{k=j}^{i-2} a_k \sum_{s=1}^{q-1} \sum_{\substack{i_r=i_{r-1}+2 \\ r=1,s}}^{i-3} \prod_{k=1}^s \frac{b_{i_k}}{a_{i_k} a_{i_k+1}} R[\lambda_j, \lambda_{i-1}, \{\lambda_{i_1+1}, \dots, \lambda_{i_s+1}\}]^{K-i+1+j+s} \\
&+ \lambda_i \prod_{k=j}^{i-1} a_k Q[\lambda_j, \lambda_i]^{K-i+j} \\
&+ \lambda_i \prod_{k=j}^{i-1} a_k \sum_{s=1}^q \sum_{\substack{i_r=i_{r-1}+2 \\ r=1,s}}^{i-2} \prod_{k=1}^s \frac{b_{i_k}}{a_{i_k} a_{i_k+1}} R[\lambda_j, \lambda_i, \{\lambda_{i_1+1}, \dots, \lambda_{i_s+1}\}]^{K-i+j+s}
\end{aligned}$$

Si agrupamos el tercer y el sexto sumando y por otra parte, multiplicamos y dividimos el primer y segundo sumando por $a_{i-2}a_{i-1} \neq 0$, entonces

$$\begin{aligned}
c_{i,j}^{K+1} &= \prod_{k=j}^{i-1} a_k \left(Q[\lambda_j, \lambda_{i-1}]^{K-i+1+j} + \lambda_i Q[\lambda_j, \lambda_i]^{K-i+j} \right) \\
&+ \frac{b_{i-2}}{a_{i-2}a_{i-1}} \prod_{k=j}^{i-1} a_k Q[\lambda_j, \lambda_{i-2}]^{K-i+2+j} + a_{i-1} \prod_{k=0}^{q-1} b_{j+2k} P[\lambda_j, \lambda_{i-1}]^{K-q} \\
&+ \frac{b_{i-2}}{a_{i-2}a_{i-1}} \prod_{k=j}^{i-1} a_k \sum_{s=1}^{q-1} \sum_{\substack{i_r=i_{r-1}+2 \\ r=1,s}}^{i-4} \prod_{k=1}^s \frac{b_{i_k}}{a_{i_k} a_{i_k+1}} R[\lambda_j, \lambda_{i-2}, \{\lambda_{i_1+1}, \dots, \lambda_{i_s+1}\}]^{K-i+2+j+s} \\
&+ \prod_{k=j}^{i-1} a_k \sum_{s=1}^{q-1} \sum_{\substack{i_r=i_{r-1}+2 \\ r=1,s}}^{i-3} \prod_{k=1}^s \frac{b_{i_k}}{a_{i_k} a_{i_k+1}} R[\lambda_j, \lambda_{i-1}, \{\lambda_{i_1+1}, \dots, \lambda_{i_s+1}\}]^{K-i+1+j+s} \\
&+ \lambda_i \prod_{k=j}^{i-1} a_k \sum_{s=1}^q \sum_{\substack{i_r=i_{r-1}+2 \\ r=1,s}}^{i-2} \prod_{k=1}^s \frac{b_{i_k}}{a_{i_k} a_{i_k+1}} R[\lambda_j, \lambda_i, \{\lambda_{i_1+1}, \dots, \lambda_{i_s+1}\}]^{K-i+j+s}
\end{aligned}$$

Aplicamos las propiedades de Q , Ec.(3.9), a los primeros dos sumandos. Por otra parte, reescribimos el polinomio Q , del tercer sumando, y el polinomio P , del cuarto sumando, como polinomios R , tan sólo agregando y quitando λ 's. Para agregar las a 's en el cuarto sumando considere que si $k = 1$ entonces $j - 2 + 2k = j$ y además si $k = q$, donde $q = \frac{i-1-j}{2}$, entonces $j - 2 + 2k = j - 2 + 2q = j - 2 + (i - 1 - j) = i - 3$,

$$\begin{aligned}
c_{i,j}^{K+1} &= \prod_{k=j}^{i-1} a_k Q[\lambda_j, \lambda_i]^{K-i+1+j} \\
&+ \frac{b_{i-2}}{a_{i-2}a_{i-1}} \prod_{k=j}^{i-1} a_k R[\lambda_j, \lambda_{i-1}, \lambda_{i-1}]^{K-i+2+j} \\
&+ \prod_{k=j}^{i-1} a_k \prod_{k=1}^q \frac{b_{j-2+2k}}{a_{j-2+2k}a_{j-2+2k+1}} R[\lambda_j, \lambda_{i-1}, \{\lambda_{j+1}, \lambda_{j+2+1}, \dots, \lambda_{i-5+1}, \lambda_{i-3+1}\}]^{K-2q+q} \\
&+ \frac{b_{i-2}}{a_{i-2}a_{i-1}} \prod_{k=j}^{i-1} a_k \sum_{s=1}^{q-1} \sum_{\substack{i_r=i_{r-1}+2 \\ r=1,s}}^{i-4} \prod_{k=1}^s \frac{b_{i_k}}{a_{i_k}a_{i_k+1}} R[\lambda_j, \lambda_{i-2}, \{\lambda_{i_1+1}, \dots, \lambda_{i_s+1}\}]^{K-i+2+j+s} \\
&+ \prod_{k=j}^{i-1} a_k \sum_{s=1}^{q-1} \sum_{\substack{i_r=i_{r-1}+2 \\ r=1,s}}^{i-3} \prod_{k=1}^s \frac{b_{i_k}}{a_{i_k}a_{i_k+1}} R[\lambda_j, \lambda_{i-1}, \{\lambda_{i_1+1}, \dots, \lambda_{i_s+1}\}]^{K-i+1+j+s} \\
&+ \prod_{k=j}^{i-1} a_k \sum_{s=1}^q \sum_{\substack{i_r=i_{r-1}+2 \\ r=1,s}}^{i-2} \prod_{k=1}^s \frac{b_{i_k}}{a_{i_k}a_{i_k+1}} \lambda_i R[\lambda_j, \lambda_i, \{\lambda_{i_1+1}, \dots, \lambda_{i_s+1}\}]^{K-i+j+s}.
\end{aligned}$$

El grado del polinomio en el tercer término lo reescribimos considerando que $-2q = -i + 1 + j$. Además reescribimos el tercer término con la notación de sumas anidadas.

$$\begin{aligned}
c_{i,j}^{K+1} &= \prod_{k=j}^{i-1} a_k Q[\lambda_j, \lambda_i]^{K-i+1+j} + \prod_{k=j}^{i-1} a_k \left\{ \frac{b_{i-2}}{a_{i-2}a_{i-1}} R[\lambda_j, \lambda_{i-1}, \lambda_{i-1}]^{K-i+2+j} \right. \\
&+ \sum_{\substack{i_r=i_{r-1}+2 \\ r=1,q}}^{i-3} \prod_{k=1}^q \frac{b_{i_k}}{a_{i_k}a_{i_k+1}} R[\lambda_j, \lambda_{i-1}, \{\lambda_{i_1+1}, \dots, \lambda_{i_q+1}\}]^{K-i+1+j+q} \\
&+ \frac{b_{i-2}}{a_{i-2}a_{i-1}} \sum_{s=1}^{q-1} \sum_{\substack{i_r=i_{r-1}+2 \\ r=1,s}}^{i-4} \prod_{k=1}^s \frac{b_{i_k}}{a_{i_k}a_{i_k+1}} R[\lambda_j, \lambda_{i-2}, \{\lambda_{i_1+1}, \dots, \lambda_{i_s+1}\}]^{K-i+2+j+s} \\
&+ \sum_{s=1}^{q-1} \sum_{\substack{i_r=i_{r-1}+2 \\ r=1,s}}^{i-3} \prod_{k=1}^s \frac{b_{i_k}}{a_{i_k}a_{i_k+1}} R[\lambda_j, \lambda_{i-1}, \{\lambda_{i_1+1}, \dots, \lambda_{i_s+1}\}]^{K-i+1+j+s} \\
&+ \left. \sum_{s=1}^q \sum_{\substack{i_r=i_{r-1}+2 \\ r=1,s}}^{i-2} \prod_{k=1}^s \frac{b_{i_k}}{a_{i_k}a_{i_k+1}} \lambda_i R[\lambda_j, \lambda_i, \{\lambda_{i_1+1}, \dots, \lambda_{i_s+1}\}]^{K-i+j+s} \right\}
\end{aligned}$$

Simplificamos el segundo y cuarto sumando. Obsérvese que el segundo sumando corresponde al término $s = q$ del cuarto sumando.

$$\begin{aligned}
 c_{i,j}^{K+1} &= \prod_{k=j}^{i-1} a_k Q[\lambda_j, \lambda_i]^{K-i+1+j} + \prod_{k=j}^{i-1} a_k \left\{ \frac{b_{i-2}}{a_{i-2}a_{i-1}} R[\lambda_j, \lambda_{i-1}, \lambda_{i-1}]^{K-i+2+j} \right. \\
 &+ \frac{b_{i-2}}{a_{i-2}a_{i-1}} \sum_{s=1}^{q-1} \sum_{\substack{i_r=i_{r-1}+2 \\ r=1,s}}^{i-4} \prod_{k=1}^s \frac{b_{i_k}}{a_{i_k}a_{i_k+1}} R[\lambda_j, \lambda_{i-2}, \{\lambda_{i_1+1}, \dots, \lambda_{i_s+1}\}]^{K-i+2+j+s} \\
 &+ \sum_{s=1}^q \sum_{\substack{i_r=i_{r-1}+2 \\ r=1,s}}^{i-3} \prod_{k=1}^s \frac{b_{i_k}}{a_{i_k}a_{i_k+1}} R[\lambda_j, \lambda_{i-1}, \{\lambda_{i_1+1}, \dots, \lambda_{i_s+1}\}]^{K-i+1+j+s} \\
 &\left. + \sum_{s=1}^q \sum_{\substack{i_r=i_{r-1}+2 \\ r=1,s}}^{i-2} \prod_{k=1}^s \frac{b_{i_k}}{a_{i_k}a_{i_k+1}} \lambda_i R[\lambda_j, \lambda_i, \{\lambda_{i_1+1}, \dots, \lambda_{i_s+1}\}]^{K-i+j+s} \right\}
 \end{aligned}$$

A continuación se simplifica los primeros tres términos dentro de las llaves. Nuevamente, se omiten los detalles de como se simplifican estos tres términos para hacer mas corta la demostración.

$$\begin{aligned}
 c_{i,j}^{K+1} &= \prod_{k=j}^{i-1} a_k Q[\lambda_j, \lambda_i]^{K-i+1+j} + \prod_{k=j}^{i-1} a_k \left\{ \right. \\
 &\sum_{s=1}^q \sum_{\substack{i_r=i_{r-1}+2 \\ r=1,s}}^{i-2} \prod_{k=1}^s \frac{b_{i_k}}{a_{i_k}a_{i_k+1}} R[\lambda_j, \lambda_{i-1}, \{\lambda_{i_1+1}, \dots, \lambda_{i_s+1}\}]^{K-i+1+j+s} \\
 &\left. + \sum_{s=1}^q \sum_{\substack{i_r=i_{r-1}+2 \\ r=1,s}}^{i-2} \prod_{k=1}^s \frac{b_{i_k}}{a_{i_k}a_{i_k+1}} \lambda_i R[\lambda_j, \lambda_i, \{\lambda_{i_1+1}, \dots, \lambda_{i_s+1}\}]^{K-i+j+s} \right\}
 \end{aligned}$$

Agrupando el segundo y tercer término se tiene,

$$\begin{aligned}
 c_{i,j}^{K+1} &= \prod_{k=j}^{i-1} a_k Q[\lambda_j, \lambda_i]^{K-i+1+j} + \prod_{k=j}^{i-1} a_k \sum_{s=1}^q \sum_{\substack{i_r=i_{r-1}+2 \\ r=1,s}}^{i-2} \prod_{k=1}^s \frac{b_{i_k}}{a_{i_k}a_{i_k+1}} \left\{ \right. \\
 &R[\lambda_j, \lambda_{i-1}, \{\lambda_{i_1+1}, \dots, \lambda_{i_s+1}\}]^{K-i+1+j+s} + \lambda_i R[\lambda_j, \lambda_i, \{\lambda_{i_1+1}, \dots, \lambda_{i_s+1}\}]^{K-i+j+s} \left. \right\}.
 \end{aligned}$$

Aplicando las propiedades del polinomio R , Ec.(3.11) se tiene,

$$\begin{aligned}
 c_{i,j}^{K+1} &= \prod_{k=j}^{i-1} a_k Q[\lambda_j, \lambda_i]^{K-i+1+j} \\
 &+ \prod_{k=j}^{i-1} a_k \sum_{s=1}^q \sum_{\substack{i_r=i_{r-1}+2 \\ r=1,s}}^{i-2} \prod_{k=1}^s \frac{b_{i_k}}{a_{i_k}a_{i_k+1}} R[\lambda_j, \lambda_i, \{\lambda_{i_1+1}, \dots, \lambda_{i_s+1}\}]^{K-i+1+j+s}
 \end{aligned}$$

Considerando que $q = [q^+ - 1]$ se tiene que,

$$c_{i,j}^{K+1} = \prod_{k=j}^{i-1} a_k Q[\lambda_j, \lambda_i]^{K+1-i+j} + \prod_{k=j}^{i-1} a_k \sum_{s=1}^{[q^+-1]} \sum_{\substack{i_r=i_{r-1}+2 \\ r=1,s}}^{i-2} \prod_{k=1}^s \frac{b_{i_k}}{a_{i_k} a_{i_k+1}} R[\lambda_j, \lambda_i, \{\lambda_{i_1+1}, \dots, \lambda_{i_s+1}\}]^{K+1-i+j+s}$$

Con esto queda probada la hipótesis de inducción, para $n = K + 1$, en el Caso 1 b).

Caso 2

En el Caso 2 una de las entradas de la matriz A multiplica a la diagonal de la matriz A^K , tal y como se muestra en la Figura 3.3.

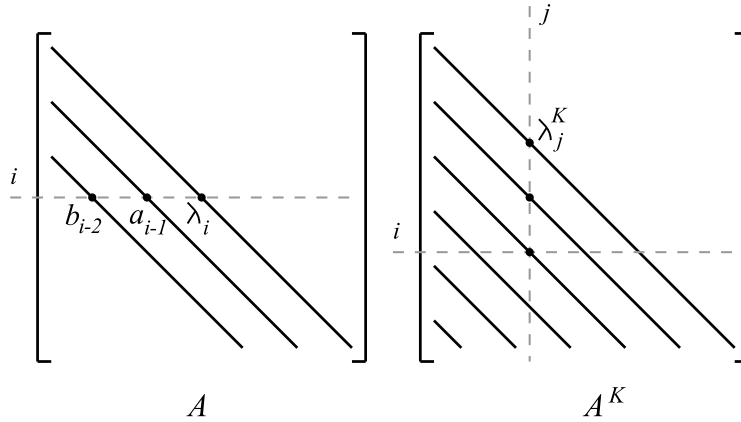


Figura 3.3: Posibles casos para $A^{K+1} = AA^K$.

En este caso $j = i - 2$, entonces el valor de q para cada una de las tres entradas de A^K es,

$$q = \frac{i-j}{2} = 1, \quad q^+ = \frac{i-1-j}{2} = \frac{1}{2}, \quad q^- = \frac{i-2-j}{2} = 0, \quad [q-1] = 0, \quad [q^+-1] = 0.$$

Como $[q-1] = 0$, entonces el tercer término de la hipótesis de inducción, ver Ec.(3.13), se anula reduciéndose a

$$c_{i,j}^K = \prod_{k=j}^{i-1} a_k Q[\lambda_j, \lambda_i]^{K-i+j} + b_j P[\lambda_j, \lambda_i]^{K-1}$$

Además, $c_{i,i} = \lambda_i$, $c_{i,i-1} = a_{i-1}$, $c_{i,i-2} = b_{i-2}$.

Una vez definidos estos valores se realizará el producto de las matrices,

$$\begin{aligned}
 c_{i,j}^{K+1} &= c_{i,i-2}c_{i-2,j}^K + c_{i,i-1}c_{i-1,j}^K + c_{i,i}c_{i,j}^K \\
 &= b_{i-2}a_{i-2,j}^K + a_{i-1}a_{i-1,j}^K + \lambda_i a_{i,j}^K \\
 &= b_{i-2}\lambda_j^K + a_{i-1} \prod_{k=j}^{i-2} a_k Q[\lambda_j, \lambda_{i-1}]^{K-i+1+j} + \lambda_i \left\{ \prod_{k=j}^{i-1} a_k Q[\lambda_j, \lambda_i]^{K-i+j} + b_j P[\lambda_j, \lambda_i]^{K-1} \right\} \\
 &= \prod_{k=j}^{i-1} a_k Q[\lambda_j, \lambda_{i-1}]^{K-i+1+j} + \lambda_i \prod_{k=j}^{i-1} a_k Q[\lambda_j, \lambda_i]^{K-i+j} + b_{i-2}\lambda_j^K + \lambda_i b_j P[\lambda_j, \lambda_i]^{K-1} \\
 &= \prod_{k=j}^{i-1} a_k \left(Q[\lambda_j, \lambda_{i-1}]^{K-i+1+j} + \lambda_i Q[\lambda_j, \lambda_i]^{K-i+j} \right) + b_j \lambda_j^K + \lambda_i b_j P[\lambda_j, \lambda_i]^{K-1},
 \end{aligned}$$

usando las propiedades del polinomio Q , Ec.(3.9) se tiene

$$\begin{aligned}
 c_{i,j}^{K+1} &= \prod_{k=j}^{i-1} a_k Q[\lambda_j, \lambda_i]^{K-i+1+j} + b_j \left(\lambda_j^K + \lambda_i P[\lambda_j, \lambda_i]^{K-1} \right) \\
 &= \prod_{k=j}^{i-1} a_k Q[\lambda_j, \lambda_i]^{K-i+1+j} + b_j \left(P[\lambda_j, \lambda_{i-2}]^K + \lambda_i P[\lambda_j, \lambda_i]^{K-1} \right) \\
 &= \prod_{k=j}^{i-1} a_k Q[\lambda_j, \lambda_i]^{K+1-i+j} + b_j P[\lambda_j, \lambda_i]^K.
 \end{aligned}$$

Por lo tanto, con esto queda probado el Caso 2.

Caso 3

En este caso sólo dos de los elementos de la matriz tridiagonal A multiplican a entradas no nulas de la matriz A^K , tal y como se muestra en la Figura 3.4.

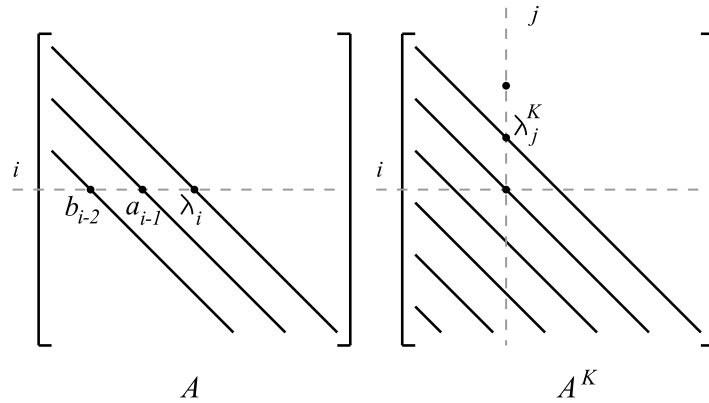


Figura 3.4: Posibles casos para $A^{K+1} = AA^K$.

En este caso $j = i - 1$ entonces

$$q = \frac{i-j}{2} = \frac{i-i+1}{2} = \frac{1}{2}, \quad [q-1] = \left[-\frac{1}{2} \right] = 0$$

Además, $c_{i,i} = \lambda_i$, $c_{i,i-1} = a_{i-1}$, $c_{i,i-2} = b_{i-2}$ y $c_{i-1,j}^K = \lambda_j^K$. Teniendo en cuenta que $P = 0$ dado que q no es entero y que $[q-1] = 0$ entonces la Ec.(3.13) se simplifica en la siguiente expresión, la cual sera la hipótesis de inducción,

$$c_{i,j}^K = \prod_{k=j}^{i-1} a_k Q[\lambda_j, \lambda_i]^{K-i+j}.$$

Una vez definido lo anterior procedemos a realizar el producto de las matrices

$$\begin{aligned} c_{i,j}^{K+1} &= c_{i,i-1}c_{i-1,j}^K + c_{i,i}c_{i,j}^K \\ &= a_{i-1}\lambda_j^K + \lambda_i \prod_{k=j}^{i-1} a_k Q[\lambda_j, \lambda_i]^{K-i+j} \\ &= a_j\lambda_j^K + \lambda_i \prod_{k=j}^{i-1} a_k Q[\lambda_j, \lambda_i]^{K-i+j} \\ &= \prod_{k=j}^j a_k Q[\lambda_j, \lambda_j]^{K-i+j+1} + \lambda_i \prod_{k=j}^{i-1} a_k Q[\lambda_j, \lambda_i]^{K-i+j} \\ &= \prod_{k=j}^{i-1} a_k \left(Q[\lambda_j, \lambda_{i-1}]^{K-i+j+1} + \lambda_i Q[\lambda_j, \lambda_i]^{K-i+j} \right) \\ &= \prod_{k=j}^{i-1} a_k Q[\lambda_j, \lambda_i]^{K-i+j+1} \end{aligned}$$

Con esto queda probada la hipótesis del Caso 3 y queda terminada la demostración. \square

Corolario 3.2.1. *Sea A la representación matricial del operador ADR , definido como en la Ec.(3.12), y $\hat{a}, \hat{b}, \hat{\lambda} \in \mathfrak{s}$. Si tomamos a \hat{b} como la sucesión idénticamente cero entonces A se convierte en la representación matricial del operador AR , ver Ec.(2.5).*

Demostración Si $\hat{b} \equiv 0$ entonces la Ec.(3.12) toma la forma,

$$c_{i,j}^n = \begin{cases} 0 & \text{si } i < j \\ \lambda_i^n & \text{si } i = j \\ \prod_{k=j}^{i-1} a_k Q[\lambda_j, \lambda_i]^{n-i+j} & \text{si } i > j \end{cases}$$

Corolario 3.2.2. *Sea A la representación matricial del operador ADR , definido como en la Ec.(3.12), y $\hat{a}, \hat{b}, \hat{\lambda} \in \mathfrak{s}$. Si tomamos a \hat{a} como la sucesión idénticamente cero entonces A se convierte en la representación matricial del operador $DARR$, ver Ec.(2.2.2).*

Demostración Si $\hat{a} \equiv 0$ entonces la Ec.(3.12) toma la forma,

$$a_{i,j}^n = \begin{cases} 0 & \text{si } i < j \\ \lambda_i^n & \text{si } i = j \\ \prod_{k=0}^{q-1} b_{j+2k} P[\lambda_j, \lambda_i]^{n-q} & \text{si } i > j \end{cases},$$

donde $q = \frac{i-j}{2}$. La condición de que $P = 0$ si q no es entero es equivalente a la condición impuesta en el operador $DARR$ de que $P = 0$ cuando $i+j$ es impar para $i > j$. Es importante, mencionar que no existe una indeterminación en la Ec.(3.12) al hacer $\hat{a} \equiv 0$ por las razones que ya anteriormente se explicaron. \square

3.3 Iteradas de A - Factorización $P\Lambda P^{-1}$

3.3.1 Caso finito

Conjetura 3.3.1. *Sea A una matriz de dimensión finita, definida como en la Ec.(3.5), y sea $\hat{\lambda} = \{a_k\}_{k=1}^M$, $\hat{a} = \{a_k\}_{k=1}^{M-1}$ y $\hat{b} = \{b_k\}_{k=1}^{M-2}$. Supongamos que todos los valores propios de la matriz A son distintos entre sí entonces, la matriz A es diagonalizable y A^n , la n -ésima potencia de A , la podemos obtener como,*

$$A^n = P_{i,j} \cdot \Lambda_{i,j} \cdot P_{i,j}^{-1}, \quad (3.15)$$

donde $\Lambda_{i,j} = \lambda_i^n \delta_{i,j}$

$$P_{i,j} = \prod_{k=j}^{i-1} a_k \prod_{r=i+1}^M (\lambda_j - \lambda_r) \left(1 + \sum_{s=1}^{\lfloor q \rfloor} \sum_{\substack{i_r=i_{r-1}+2 \\ r=1,s}}^{i-2} \prod_{k=1}^s \frac{b_{i_k} (\lambda_j - \lambda_{i_k+1})}{a_{i_k} a_{i_k+1}} \right)$$

$$P_{i,j}^{-1} = \prod_{k=j}^{i-1} a_k \prod_{r=j, r \neq i}^M \frac{1}{(\lambda_i - \lambda_r)} \left(1 + \sum_{s=1}^{\lfloor q \rfloor} \sum_{\substack{i_r=i_{r-1}+2 \\ r=1,s}}^{i-2} \prod_{k=1}^s \frac{b_{i_k} (\lambda_i - \lambda_{i_k+1})}{a_{i_k} a_{i_k+1}} \right)$$

3.3.2 Caso infinito

Conjetura 3.3.2. *Sea A una matriz de dimensión infinita, definida como en la Ec.(3.5), donde \hat{a} , \hat{b} y $\hat{\lambda} \in \mathfrak{s}$. Supongamos que todos los valores propios de la matriz A son distintos entre sí entonces, la matriz A es diagonalizable y A^n , la n -ésima potencia de A , la podemos obtener como,*

$$A^n = Q_{i,j} \cdot \Lambda_{i,j} \cdot Q_{i,j}^{-1}, \quad (3.16)$$

donde $\Lambda_{i,j} = \lambda_i^n \delta_{i,j}$

$$\begin{aligned} Q_{i,j} &= \prod_{k=j}^{i-1} a_k \prod_{r=j+1}^i \frac{1}{(\lambda_j - \lambda_r)} + \frac{1}{(\lambda_j - \lambda_i)} \prod_{k=0}^{[q-1]} \frac{b_{j+2k}}{(\lambda_j - \lambda_{j+2k})} \\ &+ \prod_{k=j}^{i-1} a_k \prod_{r=j+1}^i \frac{1}{(\lambda_j - \lambda_r)} \sum_{s=1}^{[q-1]} \sum_{\substack{i_r=i_{r-1}+2 \\ r=1,s}}^{i-2} \prod_{k=1}^s \frac{b_{i_k} (\lambda_j - \lambda_{i_k+1})}{a_{i_k} a_{i_k+1}} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} Q_{i,j}^{-1} &= \prod_{k=j}^{i-1} \frac{a_k}{(\lambda_i - \lambda_k)} + \prod_{k=0}^{[q-1]} \frac{b_{j+2k}}{(\lambda_i - \lambda_{j+2k})} \\ &+ \prod_{k=j}^{i-1} a_k \prod_{r=j}^{i-1} \frac{1}{(\lambda_i - \lambda_r)} \sum_{s=1}^{[q-1]} \sum_{\substack{i_r=i_{r-1}+2 \\ r=1,s}}^{i-2} \prod_{k=1}^s \frac{b_{i_k} (\lambda_i - \lambda_{i_k+1})}{a_{i_k} a_{i_k+1}} \end{aligned}$$

Tanto en el caso finito como en el caso infinito sólo se está dando una manera de obtener la matriz A^n que nos permitirá obtener la órbita para una condición inicial $s^{(0)} \in \mathfrak{s}$. Sin embargo, en ninguno de los dos casos se da una expresión explícita de como se calcularán cada una de las entradas. El siguiente Lema resuelve esta cuestión.

Lema 3.3.1. *Supongamos que todos los eigenvalores de A son distintos. Denotemos a $(\Phi)_{i,j}$ la entrada i, j de Φ como*

$$(\Phi)_{i,j} = \begin{cases} 0 & \text{si } i < j, \\ 1 & \text{si } i = j, \\ \prod_{k=j}^{i-1} a_k \prod_{r=j+1}^i \frac{1}{(\lambda_j - \lambda_r)} + \frac{b_j}{(\lambda_j - \lambda_i)} \prod_{k=1}^{q-1} \frac{b_{j+2k}}{(\lambda_j - \lambda_{j+2k})} + & \text{si } i > j, q \in \mathbb{Z}, \\ \prod_{k=j}^{i-1} a_k \prod_{r=j+1}^i \frac{1}{(\lambda_j - \lambda_r)} \sum_{s=1}^{\lfloor q-1 \rfloor} \sum_{i_r=i_{r-1}+2}^{i-2} \prod_{k=1}^s \frac{b_{i_k} (\lambda_j - \lambda_{i_k+1})}{a_{i_k} a_{i_k+1}} & \end{cases},$$

donde $q = \frac{i-j}{2}$. Si $q \notin \mathbb{Z}$ entonces, el segundo término se anula. Sea Ω_ω una matriz diagonal infinita con $(\Omega_\omega)_{ii} = \omega(\lambda_i)$, donde $\omega : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ es una función arbitraria pero fija. Sea Ψ una matriz triangular inferior infinita con

$$(\Psi)_{i,j} = \begin{cases} 0 & \text{si } i < j, \\ 1 & \text{si } i = j, \\ \prod_{k=j}^{i-1} a_k \prod_{r=j}^{i-1} \frac{1}{(\lambda_i - \lambda_r)} + \prod_{k=0}^{q-1} \frac{b_{j+2k}}{(\lambda_i - \lambda_{j+2k})} & \text{si } i > j, q \in \mathbb{Z}, \\ \prod_{k=j}^{i-1} a_k \prod_{r=j}^{i-1} \frac{1}{(\lambda_i - \lambda_r)} \sum_{s=1}^{\lfloor q-1 \rfloor} \sum_{i_r=i_{r-1}+2}^{i-2} \prod_{k=1}^s \frac{b_{i_k} (\lambda_i - \lambda_{i_k+1})}{a_{i_k} a_{i_k+1}} & \end{cases},$$

donde nuevamente si $q \notin \mathbb{Z}$ entonces el segundo término se anula. Entonces, las entradas $(\Psi \cdot \Omega_\omega \cdot \Phi)_{i,j}$ están dadas por

$$\begin{cases} 0 & \text{si } i < j \\ \omega(\lambda_i) & \text{si } i = j \\ \left(\frac{1}{q} \prod_{k=0}^{q-1} b_{j+2k} \right) \frac{d^q}{d\lambda^q} \mathcal{L}_\omega[\lambda_j, \lambda_{j+2}, \dots, \lambda_i] + & \text{si } i > j \\ \left(\frac{1}{2q} \prod_{k=j}^{i-1} a_k \right) \frac{d^{2q}}{d\lambda^{2q}} \mathcal{L}_\omega[\lambda_j, \lambda_{j+1}, \dots, \lambda_{i-1}, \lambda_i] + & \text{y } q \in \mathbb{Z} \\ \sum_{s=1}^{\lfloor q-1 \rfloor} \left(\frac{1}{q+s} \prod_{i_r=i_{r-1}+2}^{i-2} \prod_{k=1}^s b_{i_k} \prod_{\substack{\ell=j \\ \ell \neq a_{i_k}, a_{i_k+1}}}^{i-1} a_\ell \right) \frac{d^{q+s}}{d\lambda^{q+s}} \mathcal{L}_\omega[\lambda_j, \lambda_i, \{\lambda_{i_1+1}, \dots, \lambda_{i_s+1}\}] & \end{cases}$$

donde,

- $\mathcal{L}_\omega[\lambda_j, \lambda_{j+2}, \dots, \lambda_i]$ es el polinomio de Lagrange en λ de grado q en los nodos $\{\lambda_j, \lambda_{j+2}, \dots, \lambda_i\}$ para la función ω .

- $\mathcal{L}_\omega[\lambda_j, \lambda_{j+1}, \dots, \lambda_{i-1}, \lambda_i]$ es el polinomio de Lagrange en λ de grado $2q$ en los nodos $\{\lambda_j, \lambda_{j+2}, \dots, \lambda_{i-1}, \lambda_i\}$ para la función ω ,
- $\mathcal{L}_\omega[\lambda_j, \lambda_i, \{\lambda_{i_1+1}, \dots, \lambda_{i_s+1}\}]$ es el polinomio de Lagrange en λ de grado $q + s$ en los nodos $\{\lambda_j, \lambda_{j+1}, \dots, \lambda_{i-1}, \lambda_i\}$ con excepción de los nodos $\lambda_{i_1+1}, \dots, \lambda_{i_s+1}$ para la función ω ,

La importancia de este lema radica en el hecho de que permitirá probar los siguientes dos lemas. La prueba de este Lema 3.3.1 queda como trabajo a futuro junto con la demostración de los siguientes tres lemas.

Lema 3.3.2. Φ es invertible y $\Phi^{-1} = \Psi$.

La prueba de este lema es casi directa, tan sólo hay que considerar el caso cuando $\omega(x) = 1$.

Lema 3.3.3. $A = \Phi \cdot \Omega_\omega \cdot \Psi$ cuando $\omega(x) = x$.

Lema 3.3.4. $A^n = \Phi \cdot \Omega_\omega \cdot \Psi$ cuando $\omega(x) = x^n$.

Las expresiones que se han mostrado hasta ahora se han usado para mostrar la relación que surge del operador discreto ADR con la teoría de interpolación lineal. Sin embargo, esto será el punto de partida para poder dar las condiciones de convergencia para cada uno de los términos en el operador ADR.

Capítulo 4

Conclusiones

4.1 Conclusiones

En el presente trabajo se introdujo una nueva familia de operadores discretos relacionados a la ecuación ADR. Este operador mostró tener una gran relación con los operadores AR, ver Ec. , y DARR, ver Ec., definidos en trabajos previos. La novedad del presente operador es que muestra ser una generalización de los otros dos operadores. Esto conlleva una gran ventaja ya que cada uno de los operadores, AR y DARR, representan fenómenos físicos diferentes. Por lo cual, el operador ADR permitirá dilucidar como es que estos dos fenomenos actuan cuando se encuentran presentes en un mismo fenomeno como suele ocurrir la mayoría de las veces.

Desde el punto de vista numérico, el nuevo operador ADR, permite obtener la solución directa a la ecuación ADR al tiempo $t = T$ con una condición inicial dada. Esto representa una gran ventaja ya que se esta evitando el tener que resolver un sistema de ecuaciones o el tener que hacer multiples iteraciones para alcanzar la solución. La solución al problema se puede obtener con una simple evaluación de las dos expresiones obtenidas.

Por otra parte, el hecho de tener dos expresiones para la misma solución dará pauta para determinar la relación entre ambas expresiones. Y más aún permitirá obtener un vínculo entre la teoría de interpolación y el análisis numérico.

Finalmente, este trabajo servira como punto de partida para poder obtener condiciones de convergencia de este operador. Y más aún permitirá obtener bajo que condiciones físicas se pueden dar esta situación de convergencia y explicar en que condiciones físicas se podrá usar esta solución.

4.2 Trabajo a futuro

El trabajo que aún queda pendiente es la implementación de este operador de manera numérica para poder comparar su funcionamiento con los métodos ya tradicionales empleados para resolver esta ecuación. Tambien queda como trabajo a futuro dar las condiciones de convergencia necesarias para este operador.

Apéndice A

Notación - Ejemplos

Ejemplo

Calcular la entrada $a^{11}(10, 4)$. Como se puede observar, la fórmula solo necesita de 3 datos para calcular el valor de la entrada $a(i, j)$ en la potencia n . En este caso, $i = 10$, $j = 4$, $n = 11$ con estos datos calculamos $q = \frac{10-4}{2} = 3$ e $i_0 = j - 2 = 4 - 2 = 2$. Como q es entero entonces $P \neq 0$.

$$\begin{aligned}
 a^n(i, j) &= \prod_{k=j}^{i-1} a_k Q[\lambda_j, \lambda_i]^{n-i+j} + \prod_{k=0}^{q-1} b_{j+2k} P[\lambda_j, \lambda_i]^{n-q} \\
 &+ \prod_{k=j}^{i-1} a_k \sum_{s=1}^{[q-1]} \sum_{\substack{i_r = i_{r-1} + 2 \\ r=1, s}}^{i-2} \prod_{k=1}^s \frac{b_{i_k}}{a_{i_k} a_{i_k+1}} R[\lambda_j, \lambda_i, \{\lambda_{i_1+1}, \dots, \lambda_{i_s+1}\}]^{n-i+j+s}
 \end{aligned}$$

sustituyendo valores

$$\begin{aligned}
 a^{11}(10, 4) &= \prod_{k=4}^9 a_k Q[\lambda_4, \lambda_{10}]^5 + \prod_{k=0}^2 b_{4+2k} P[\lambda_4, \lambda_{10}]^8 \\
 &+ \prod_{k=4}^9 a_k \sum_{s=1}^{[2]} \sum_{\substack{i_r = i_{r-1} + 2 \\ r=1, s}}^8 \prod_{k=1}^s \frac{b_{i_k}}{a_{i_k} a_{i_k+1}} R[\lambda_4, \lambda_{10}, \{\lambda_{i_1+1}, \dots, \lambda_{i_s+1}\}]^{5+s}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 a^{11}(10, 4) &= a_4 a_5 a_6 a_7 a_8 a_9 Q[\lambda_4, \lambda_{10}]^5 + b_4 b_6 b_8 P[\lambda_4, \lambda_{10}]^8 \\
 &+ a_4 a_5 a_6 a_7 a_8 a_9 \sum_{i_1=i_0+2}^8 \prod_{k=1}^1 \frac{b_{i_k}}{a_{i_k} a_{i_k+1}} R[\lambda_4, \lambda_{10}, \{\lambda_{i_1+1}, \dots, \lambda_{i_1+1}\}, 5+1] \\
 &+ a_4 a_5 a_6 a_7 a_8 a_9 \sum_{i_1=i_0+2}^8 \sum_{i_2=i_1+2}^8 \prod_{k=1}^2 \frac{b_{i_k}}{a_{i_k} a_{i_k+1}} R[\lambda_4, \lambda_{10}, \{\lambda_{i_1+1}, \dots, \lambda_{i_2+1}\}]^{5+2}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
a^{11}(10, 4) &= a_4 a_5 a_6 a_7 a_8 a_9 Q [\lambda_4, \lambda_{10}]^5 + b_4 b_6 b_8 P [\lambda_4, \lambda_{10}]^8 \\
&+ a_4 a_5 a_6 a_7 a_8 a_9 \sum_{i_1=2+2}^8 \frac{b_{i_1}}{a_{i_1} a_{i_1+1}} R [\lambda_4, \lambda_{10}, \{\lambda_{i_1+1}\}, 6] \\
&+ a_4 a_5 a_6 a_7 a_8 a_9 \sum_{i_1=2+2}^8 \sum_{i_2=i_1+2}^8 \frac{b_{i_1}}{a_{i_1} a_{i_1+1}} \frac{b_{i_2}}{a_{i_2} a_{i_2+1}} R [\lambda_4, \lambda_{10}, \{\lambda_{i_1+1}, \lambda_{i_2+1}\}]^7
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
a^{11}(10, 4) &= a_4 a_5 a_6 a_7 a_8 a_9 Q [\lambda_4, \lambda_{10}]^5 \\
&+ a_6 a_7 a_8 a_9 b_4 R [\lambda_4, \lambda_{10}, \{\lambda_5\}]^6 + a_4 a_7 a_8 a_9 b_5 R [\lambda_4, \lambda_{10}, \{\lambda_6\}]^6 \\
&+ a_4 a_5 a_8 a_9 b_6 R [\lambda_4, \lambda_{10}, \{\lambda_7\}]^6 + a_4 a_5 a_6 a_9 b_7 R [\lambda_4, \lambda_{10}, \{\lambda_8\}]^6 \\
&+ a_4 a_5 a_6 a_7 b_8 R [\lambda_4, \lambda_{10}, \{\lambda_9\}]^6 \\
&+ a_6 a_7 a_8 a_9 b_4 \frac{b_6}{a_6 a_7} R [\lambda_4, \lambda_{10}, \{\lambda_5, \lambda_7\}]^7 + a_6 a_7 a_8 a_9 b_4 \frac{b_7}{a_7 a_8} R [\lambda_4, \lambda_{10}, \{\lambda_5, \lambda_8\}]^7 \\
&+ a_6 a_7 a_8 a_9 b_4 \frac{b_8}{a_8 a_9} R [\lambda_4, \lambda_{10}, \{\lambda_5, \lambda_9\}]^7 + a_4 a_7 a_8 a_9 b_5 \frac{b_7}{a_7 a_8} R [\lambda_4, \lambda_{10}, \{\lambda_6, \lambda_8\}]^7 \\
&+ a_4 a_7 a_8 a_9 b_5 \frac{b_8}{a_8 a_9} R [\lambda_4, \lambda_{10}, \{\lambda_6, \lambda_9\}]^7 + a_4 a_5 a_8 a_9 b_6 \frac{b_8}{a_8 a_9} R [\lambda_4, \lambda_{10}, \{\lambda_7, \lambda_9\}]^7 \\
&+ b_4 b_6 b_8 P [\lambda_4, \lambda_{10}]^8
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
a^{11}(10, 4) &= a_4 a_5 a_6 a_7 a_8 a_9 Q [\lambda_4, \lambda_{10}]^5 \\
&+ a_6 a_7 a_8 a_9 b_4 R [\lambda_4, \lambda_{10}, \{\lambda_5\}]^6 + a_4 a_7 a_8 a_9 b_5 R [\lambda_4, \lambda_{10}, \{\lambda_6\}]^6 \\
&+ a_4 a_5 a_8 a_9 b_6 R [\lambda_4, \lambda_{10}, \{\lambda_7\}]^6 + a_4 a_5 a_6 a_9 b_7 R [\lambda_4, \lambda_{10}, \{\lambda_8\}]^6 \\
&+ a_4 a_5 a_6 a_7 b_8 R [\lambda_4, \lambda_{10}, \{\lambda_9\}]^6 \\
&+ a_8 a_9 b_4 b_6 R [\lambda_4, \lambda_{10}, \{\lambda_5, \lambda_7\}]^7 + a_6 a_9 b_4 b_7 R [\lambda_4, \lambda_{10}, \{\lambda_5, \lambda_8\}]^7 \\
&+ a_6 a_7 b_4 b_8 R [\lambda_4, \lambda_{10}, \{\lambda_5, \lambda_9\}]^7 + a_4 a_9 b_5 b_7 R [\lambda_4, \lambda_{10}, \{\lambda_6, \lambda_8\}]^7 \\
&+ a_4 a_7 b_5 b_8 R [\lambda_4, \lambda_{10}, \{\lambda_6, \lambda_9\}]^7 + a_4 a_5 b_6 b_8 R [\lambda_4, \lambda_{10}, \{\lambda_7, \lambda_9\}]^7 \\
&+ b_4 b_6 b_8 P [\lambda_4, \lambda_{10}]^8
\end{aligned}$$

Apéndice B

Polinomios de Lagrange

El polinomio de interpolación de Lagrange, es una reformulación del polinomio de Newton que evita los cálculos de las diferencias divididas. Este se puede representar concretamente como:

$$f_n(x) = \sum_{i=m}^n L_i(x) f(x_i)$$

en donde

$$L_i(x) = \prod_{j=m, j \neq i}^n \frac{x - x_j}{x_i - x_j}$$

Ejemplo 1. la versión de segundo orden ($n = 2$) es:

$$\begin{aligned} f_2(x) &= \sum_{i=0}^2 L_i(x) f(x) \\ &= \sum_{i=0}^2 \prod_{j=0, j \neq i}^2 \frac{(x - x_j)}{(x_i - x_j)} f(x_i) \\ &= \prod_{j=0, j \neq 0}^2 \frac{(x - x_j)}{(x_0 - x_j)} f(x_0) + \prod_{j=0, j \neq 1}^2 \frac{(x - x_j)}{(x_1 - x_j)} f(x_1) + \prod_{j=0, j \neq 2}^2 \frac{(x - x_j)}{(x_2 - x_j)} f(x_2) \\ &= \frac{(x - x_1)(x - x_2)}{(x_0 - x_1)(x_0 - x_2)} f(x_0) + \frac{(x - x_0)(x - x_2)}{(x_1 - x_0)(x_1 - x_2)} f(x_1) + \frac{(x - x_0)(x - x_1)}{(x_2 - x_0)(x_2 - x_1)} f(x_2) \end{aligned}$$

Ejemplo 2: Si $f(x) = x^k$ entonces

$$\begin{aligned} f_n(x) &= \sum_{i=m}^n \prod_{j=m, j \neq i}^n \frac{x - x_j}{x_i - x_j} f(x_i) \\ x^k &= \sum_{i=m}^n \prod_{j=m, j \neq i}^n \frac{x - x_j}{x_i - x_j} x_i^k \end{aligned}$$

Bibliografía

- [1] M. L. Sámano Celorio, *Desarrollo e integración de modelos numéricos de calidad del agua en un sistema de información geográfica*, Tesis doctoral, Universidad de Cantabria, 2011.
- [2] J. Hadamard, *Sur les problèmes aux dérivées partielles et leur signification physique*, Princeton University Bulletin, pp. 49-52. 1902.
- [3] D. Garzón Alvarado, *Simulación de procesos de reacción difusión: Aplicación a la morfogénesis del tejido óseo*, Tesis doctoral, Universidad de Zaragoza, 2007.
- [4] Y. N. Skiba, D. Parra-Guevara, *Industrial pollution transport. Part 1. Formulation of the problem and air pollution estimates*, Environmental Modelling and Assessment, vol.5, pp. 169175, 2000.
- [5] H. Meinhardt. *Models of biological pattern formation*, Ed. Academic Press, 1982.
- [6] F.E. Browder, *Convergence theorems for sequences of nonlinear operators in Banach spaces*, Math. Z., Volume 100 pp. 201-225, 1967.
- [7] R.E. Bruck, *On the convex approximation property and the asymptotic behavior of nonlinear contractions in Banach spaces*, Isr. J. Math. 38 (1981), 304-314.
- [8] S. Reich, *Asymptotic behavior of contractions in Banach spaces*, J. Math. Anal. Appl., Volume 44, pp. 57-70, 1973.
- [9] N.I. Akhiezer, I. M. Glazman, *Theory of linear operators in Hilbert space*, Pitman, Boston-London, 1981.
- [10] F. Solis, F. Ongay, S. Jerez, M. Capistran, *Convergence for a family of discrete advection-reaction operators*, Computers and Mathematics with Applications, Volume 59, Issue 1, pp. 499-505, 2010.
- [11] F. Solis, *Families of discrete advection-reaction operators via divided differences*, Applied Mathematics Letters, Volume 25, Issue 4, pp. 775778, 2012.
- [12] F. Solis, *Dynamical properties of families of discrete delay advection-reaction operators*, Journal of Difference Equations and Applications, Volume 19, Issue 8, pp. 1218-1226, 2013.
- [13] K. Stromberg, *An introduction to classical real analysis*, Wadsworth International Group, Belmont, California, 1981.

-
- [14] R. L. Burden, *Numerical analysis*, Beooks/Cole, Australia, 2001.
- [15] N.I. Akhiezer, I. M. Glazman, *Theory of linear operators in Hilbert space*. Pitman, Boston-London, 1981.
- [16] A. Wouk, *A course of applied functional analysis*. John Wiley & Sons, New York, 1979.
- [17] R. Courant, K.O. Friedrichs, H. Lewi, 'Über die partiellen Differenzgleichungen der mathematischen Physik', *Mathematische Annalen*, Volume 100, Issue 1, pp. 3274, 1928.
- [18] J. Fritz. *Partial differential equations*, Applied Mathematical Sciences, Springer-Verlag, New York, 1982.