

Índice General

1	Los problemas directo e inverso de dispersión	1
1.1	Formulación del problema directo	1
1.2	La matriz de dispersión y sus propiedades	7
1.3	Formulación del problema inverso	17
1.3.1	Existencia y unicidad	24
2	Partición de potenciales	31
2.1	Factorización de la matriz de coeficientes	31
2.2	Cálculo del número de eigenvalores de L	33
3	Potenciales simétricos	41
3.1	Relación entre los datos de dispersión de $u(x)$ y $u(-x)$	41
3.2	Potenciales simétricos	42
4	Conclusiones	49
A	El problema directo para potenciales cuadrados	51
B	Potenciales sin reflexión	57

Introducción

En este trabajo, haremos un estudio de los problemas directo e inverso de Sturm-Liouville para potenciales simétricos.

La motivación física de estudiar el problema se muestra en la figura 1. Al mandar una onda de ∞ hacia un potencial, esperamos que parte de ella sea transmitida hacia $-\infty$, y parte de ella sea reflejada, de tal manera que dicha reflexión se sume a la onda que está siendo mandada hacia el potencial. Para este propósito, estudiamos la ecuación

$$-\frac{d^2}{dx^2}\psi + u(x)\psi = \lambda\psi, \quad (*)$$

y observamos el comportamiento asintótico de sus soluciones.

Un problema común que se presenta en la mecánica cuántica es el de una partícula que se mueve libremente y se adentra en un campo de fuerza. Surgen entonces dos cuestiones: si conocemos el efecto de ese campo de fuerza, ¿podemos predecir que pasará con cualquier partícula que atraviese el campo de fuerza conociendo las características de la onda que describe? o, si sabemos cómo se comportan las partículas antes y después de atravesar el campo de fuerza, ¿podemos describir al campo de fuerza?

En la mecánica cuántica, la función de onda que describe el movimiento de una partícula es:

$$\Psi = Ae^{-\frac{2\pi i}{h}(Et - px)} \quad (1)$$

donde E es la energía, p el momentum de la partícula y h la constante de Planck.

Esta expresión es correcta únicamente para partículas que pueden moverse libremente, pero nosotros estamos más interesados en situaciones donde el movimiento de una partícula está sujeto a varias restricciones. Un análisis importante, por ejemplo, es el de un electrón atraído por un átomo por el campo eléctrico de su núcleo. Lo que debemos hacer es obtener la ecuación diferencial fundamental para Ψ , para después poder resolverla en una situación específica. Primero, diferenciamos (1) dos veces con respecto a x :

$$\frac{\partial^2 \Psi}{\partial x^2} = -\frac{4\pi^2 p^2}{h^2} \Psi \quad (2)$$

y una vez con respecto a t :

$$\frac{\partial \Psi}{\partial t} = -\frac{2\pi i E}{h} \Psi \quad (3)$$

A velocidades pequeñas comparadas con la de la luz, la energía total E de una partícula es la suma de su energía cinética $\frac{p^2}{2m}$ y su energía potencial u , donde u es en general una función de la posición x y el tiempo t :

$$E = \frac{p^2}{2m} + u$$

Multiplicando ambos lados de la ecuación por la función de onda Ψ obtenemos

$$E\Psi = \frac{p^2\Psi}{2m} + u\Psi \quad (4)$$

Manipulando (2) y (3) llegamos a que

$$E\Psi = -\frac{h}{2\pi i} \frac{\partial \Psi}{\partial t}$$

y

$$p^2\Psi = -\frac{h^2}{4\pi^2} \frac{\partial^2 \Psi}{\partial x^2}$$

Sustituyendo ambas expresiones en (4), llegamos a:

$$\frac{h}{2\pi i} \frac{\partial \Psi}{\partial t} = \frac{h^2}{8\pi^2 m} \frac{\partial^2 \Psi}{\partial x^2} - u\Psi \quad (5)$$

Esta última ecuación es la *ecuación de Schrödinger dependiente del tiempo*.

Sin embargo, en una gran cantidad de problemas la energía potencial de la partícula no depende del tiempo explícitamente; las fuerzas que actúan sobre ella, y por lo tanto su energía potencial, varían con la posición de la partícula únicamente. De la ecuación (1) vemos que podemos escribir a la función de onda de una partícula de la siguiente manera:

$$\begin{aligned} \Psi &= A e^{-\frac{2\pi i}{h}(Et - px)} \\ &= A e^{-\frac{2\pi i E}{h}t} e^{\frac{2\pi i p}{h}x} \\ &= \psi e^{-\frac{2\pi i E}{h}t} \end{aligned} \quad (6)$$

Es decir, Ψ es el producto de una función dependiente del tiempo $e^{-\frac{2\pi i E}{h}t}$ y una función dependiente de la posición ψ . Sustituyendo la ecuación (6) en la ecuación de Schrödinger dependiente del tiempo llegamos a:

$$E\psi e^{-\frac{2\pi i E}{h}t} = \frac{h^2}{8\pi^2 m} e^{-\frac{2\pi i E}{h}t} \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} - u\psi e^{-\frac{2\pi i E}{h}t}$$

de donde

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + \frac{8\pi^2 m}{h^2} (E - u) \psi = 0 \quad (7)$$

Esta ecuación es llamada la *ecuación de Schrödinger de estado estacionario o independiente del tiempo*.

Podemos hacer $\lambda = \frac{8\pi^2 m}{h^2} E$, y puesto que hemos eliminado a la variable temporal, podemos cambiar la derivada parcial con respecto a x por una derivada total:

$$-\frac{d^2}{dx^2} \psi + u\psi = \lambda\psi \quad (8)$$

Notamos ahora que la ecuación (8) tiene la forma de un problema de eigenvalores para el operador $-\frac{d^2}{dx^2} + u$, llamado *operador de Sturm-Liouville*.

Generalmente, el problema directo para un operador consiste en encontrar sus eigenvalores, para lo cual, se debe determinar *a priori* el espacio sobre el que actúa dicho operador. Para el operador de Sturm-Liouville, en general, dicho espacio es $L^2(\mathbb{R})$. Como se verá más adelante en este trabajo, en el caso del problema directo de Sturm-Liouville, varios potenciales u pueden generar el mismo espectro para su operador correspondiente, por lo que en el problema directo necesitamos obtener más información que sólo su conjunto de eigenvalores para que podamos decir que existe una biyección, y que el problema inverso tenga sentido. Esta información extra son los coeficientes de reflexión y transmisión y las constantes de normalización, los cuales se definirán más adelante, y son necesarios para el problema inverso.

La importancia del problema inverso salta a la vista, porque quiere decir que si tenemos los eigenvalores y el resto de la información necesaria que mencionamos en el párrafo anterior, podemos reconstruir a la energía potencial u , y de este modo obtener información sobre el tipo de campo de fuerza al que fue sujeta nuestra partícula.

Estos problemas han sido ampliamente estudiados, y todavía son objeto de investigación. En este trabajo queremos ver qué ventajas obtenemos en el problema directo si el potencial u es simétrico, así como también qué ganamos en el problema inverso si sabemos *a priori* que el potencial u es simétrico. Para hacer esto, la tesis contiene un análisis matemático extenso de los problemas directo e inverso para el operador de Sturm-Liouville, así como una breve descripción de ciertos resultados que se han obtenido recientemente, para después aplicar esta teoría al caso particular de que u es simétrico.

Para facilitar el estudio del comportamiento asintótico de las soluciones de (*), nos limitaremos al estudio de los potenciales $u(x)$ que se desvanecen conforme $|x| \rightarrow \infty$, aunque, como se verá en la sección 1.1, pediremos un poco más que esta condición. Físicamente, podemos interpretar este requerimiento en el potencial como una forma de pedir que, tanto en $-\infty$ como en ∞ , podamos recuperar a las tres ondas (la original, la reflejada y la transmitida), sin que éstas sigan siendo afectadas por el potencial de manera significativa. Además de encontrar los coeficientes de reflexión y transmisión, en el problema directo



de dispersión se trata de hallar soluciones a (*) que se encuentren en $L^2(\mathbb{R})$. Este problema es estudiado en la sección 1.1.

En la sección 1.2 hacemos un análisis de los coeficientes de transmisión y reflexión, su continuidad, y su analiticidad.

En el problema inverso de dispersión lo que se busca es reconstruir al potencial a partir de su coeficiente de reflexión asociado y de las soluciones en $L^2(\mathbb{R})$ a (*). Una aplicación de este problema inverso es, por ejemplo, las radiografías. En la sección 1.3 derivamos una ecuación para resolver el problema inverso y asimismo damos las condiciones para que haya existencia y unicidad del potencial.

En el capítulo 2 se enuncian y prueban distintos teoremas que son un reflejo de lo que se hace actualmente para estudiar el problema directo de dispersión. En la sección 2.1 mostramos una forma de "partir" al potencial u en "pedazos" haciendo una partición de \mathbb{R} , y de expresar los coeficientes de dispersión de $u(x)$ en función de los coeficientes correspondientes a cada uno de dichos "pedazos".

En la sección 2.2 se hace un estudio sobre el número N de soluciones de (*) que están en $L^2(\mathbb{R})$. Para hacer esto, se utiliza el número de soluciones de (*) que están en $L^2(\mathbb{R})$ para el potencial particionado, y usando varios resultados que aquí mismo se discuten, obtenemos una expresión para N .

En el capítulo 3 entramos en materia del objetivo de esta tesis: ¿qué ganamos en el problema inverso si nosotros sabemos, *a priori*, que $u(x)$ es simétrico? Hacerse esta pregunta es bastante natural porque los problemas directo e inverso presentan varias simetrías en sus respectivas deducciones, por lo que podría esperarse que el agregarle una simetría más al problema simplifique los cálculos, o al menos nos haga requerir menos información para reconstruir el potencial. En la sección 3.1 hacemos un rápido análisis de la relación que hay entre los datos de dispersión de $u(x)$ y $u(-x)$. En la sección 3.2 hacemos una recopilación de lo estudiado en este reporte para aplicarlo en el caso en que $u(x) = u(-x)$. Los resultados que exponemos en dicha sección son en realidad bastante esperanzadores, y además, al menos para nuestro conocimiento, no han sido publicados aún. Es de mencionar que además exponemos resultados tanto para el problema directo como para el inverso.

Por último, este trabajo contiene dos apéndices. En el primero hacemos un análisis del problema directo para un potencial constante de soporte compacto. En el segundo apéndice analizamos el problema inverso para los potenciales que no tienen reflexión. Estos apéndices se anexaron para dar ejemplos de qué métodos podemos usar para resolver los problemas directo e inverso.

Capítulo 1

Los problemas directo e inverso de dispersión

1.1 Formulación del problema directo

Es conveniente empezar este capítulo comentando que los resultados a continuación expuestos son, en general, bien conocidos, y por lo tanto no daremos todos los detalles. Para más detalles al respecto, se pueden consultar las referencias [1] y [3].

Consideremos el problema de eigenvalores:

$$L\psi = \lambda\psi \tag{1.1}$$

donde L es el operador de Sturm-Liouville:

$$L = -\frac{d^2}{dx^2} + u(x) \tag{1.2}$$

Este operador tiene dos tipos de espectro: uno continuo, que corresponde a soluciones de (*) no normalizables, y uno discreto, que corresponde a soluciones de (*) que están en $\mathcal{L}^2(\mathbb{R})$. Consideramos a L como un operador que actúa sobre $L^2(\mathbb{R})$, de tal manera que las soluciones de (1.1) que caen en este mismo espacio de funciones son eigenfunciones de L . El espectro continuo es el semieje real positivo, mientras que los eigenvalores correspondientes al espectro discreto se encuentran en el semieje negativo. Para evitar que $\lambda = 0$ sea un punto de acumulación para los eigenvalores de L , imponemos la siguiente restricción sobre $u(x)$ [9]:

$$\int_{-\infty}^{\infty} |u(x)|(1+|x|)dx < \infty \quad (1.3)$$

Nos disponemos ahora a estudiar el espectro del operador L . Como es usual, sustituiremos $\lambda = k^2$. La interpretación física de esta sustitución es que estamos pasando de la energía (λ) al momentum (k) de la partícula. De esta manera, el estudio de (1.1) se convierte en analizar la ecuación diferencial:

$$-\frac{d^2}{dx^2}\psi + u(x)\psi = k^2\psi \quad (1.4)$$

Las soluciones de la ecuación (1.4) en las que estamos interesados son funciones C^1 que van de \mathbb{R} a \mathbb{C} .

Empezamos estudiando el espectro continuo. Este espectro, como ya mencionamos, está definido $\forall k \in \mathbb{R}$. Puesto que sabemos que $u(x)$ satisface (1.3), podemos definir una base de soluciones de la ecuación (1.4) usando su comportamiento asintótico cuando $x \rightarrow -\infty$ (véase el lema 3 de la siguiente sección):

$$\begin{aligned} \varphi_1(x, k) &= e^{-ikx} + o(1), \\ \varphi_2(x, k) &= e^{ikx} + o(1) \end{aligned} \quad (1.5)$$

De la misma manera, podemos definir otra base de soluciones por su conducta asintótica cuando $x \rightarrow \infty$:

$$\begin{aligned} \psi_1(x, k) &= e^{-ikx} + o(1), \\ \psi_2(x, k) &= e^{ikx} + o(1) \end{aligned} \quad (1.6)$$

Estos comportamientos asintóticos son esperados porque, como $u(x)$ cumple (1.3), tenemos que $u(x) \rightarrow 0$ cuando $|x| \rightarrow \infty$, de donde $-\frac{d^2}{dx^2}\psi + u(x)\psi \sim -\frac{d^2}{dx^2}\psi$ cuando $|x| \rightarrow \infty$. Como $u(x)$ es real, tenemos que:

$$\varphi_1(x, k) = \bar{\varphi}_2(x, k), \quad \psi_1(x, k) = \bar{\psi}_2(x, k) \quad (1.7)$$

Además:

$$\varphi_1(x, k) = \varphi_2(x, -k), \quad \psi_1(x, k) = \psi_2(x, -k) \quad (1.8)$$

En vista de estas simetrías, omitimos el subíndice 1 de φ_1 y ψ_1 .

Ahora bien, como (1.5) y (1.6) son bases del mismo espacio, entonces podemos expresar a los elementos de una base como combinación lineal de los elementos de la otra. Es decir, existen coeficientes $a(k)$ y $b(k)$ tales que:

$$\varphi(x, k) = a(k)\psi(x, k) + b(k)\bar{\psi}(x, k) \quad (1.9)$$

y

llegamos entonces a la expresión:

$$\begin{bmatrix} \varphi \\ \bar{\varphi} \end{bmatrix} = T(k) \begin{bmatrix} \psi \\ \bar{\psi} \end{bmatrix} \quad (1.10)$$

donde

$$T(k) = \begin{bmatrix} a(k) & b(k) \\ \bar{b}(k) & \bar{a}(k) \end{bmatrix} \quad (1.11)$$

Definición 1 A la matriz

$$T(k) = \begin{bmatrix} a(k) & b(k) \\ \bar{b}(k) & \bar{a}(k) \end{bmatrix}$$

se le llama matriz de transición.

Tenemos que el wronskiano W de cualesquiera dos soluciones de (1.4) no depende de x , porque (1.4) es una ecuación de segundo orden sin término de primer orden. Ahora bien, calculando $W(\varphi, \bar{\varphi})$ cuando $x \rightarrow -\infty$ obtenemos:

$$W(\varphi, \bar{\varphi}) = \varphi \frac{d\bar{\varphi}}{dx} - \bar{\varphi} \frac{d\varphi}{dx} = e^{-ikx}(ike^{ikx}) - e^{ikx}(-ike^{-ikx}) = 2ik \quad (1.12)$$

Si ahora hacemos el cálculo cuando $x \rightarrow \infty$:

$$\begin{aligned} W(\varphi, \bar{\varphi}) &= \varphi \frac{d\bar{\varphi}}{dx} - \bar{\varphi} \frac{d\varphi}{dx} \\ &= (a(k)e^{-ikx} + b(k)e^{ikx})(-ik\bar{b}(k)e^{-ikx} + ik\bar{a}(k)e^{ikx}) \\ &\quad - (\bar{b}(k)e^{-ikx} + \bar{a}(k)e^{ikx})(-ika(k)e^{-ikx} + ikb(k)e^{ikx}) \\ &= -ika(k)\bar{b}(k)e^{-2ikx} + ik|a(k)| - ik|b(k)| + ik\bar{a}(k)b(k)e^{2ikx} \\ &\quad + ika(k)\bar{b}(k)e^{-2ikx} - ik|b(k)| + ik|a(k)| - ik\bar{a}(k)b(k)e^{2ikx} \end{aligned}$$

lo que implica que

$$W(\varphi, \bar{\varphi}) = 2ik(|a(k)| - |b(k)|) \quad (1.13)$$

y comparando (1.12) y (1.13), llegamos a que:

$$\det T(k) = |a(k)| - |b(k)| = 1 \quad (1.14)$$

4CAPÍTULO 1. LOS PROBLEMAS DIRECTO E INVERSO DE DISPERSIÓN

Una interpretación alterna y quizá con más sentido físico de $T(k)$, se puede dar como sigue: definamos

$$r(k) = \frac{b(k)}{a(k)}, \quad l(k) = -\frac{\bar{b}(k)}{a(k)}, \quad t(k) = \frac{1}{a(k)} \quad (1.15)$$

y

observemos el comportamiento asintótico de $\frac{\varphi(x,k)}{a(k)}$ y $\frac{\bar{\psi}(x,k)}{a(k)}$:

$$\begin{aligned} \frac{\varphi(x,k)}{a(k)} &= \begin{cases} t(k)e^{-ikx} & \text{cuando } x \rightarrow -\infty \\ e^{-ikx} + r(k)e^{ikx} & \text{cuando } x \rightarrow \infty \end{cases}, \\ \frac{\bar{\psi}(x,k)}{a(k)} &= \begin{cases} l(k)e^{-ikx} + e^{ikx} & \text{cuando } x \rightarrow -\infty \\ t(k)e^{ikx} & \text{cuando } x \rightarrow \infty \end{cases} \end{aligned} \quad (1.16)$$

De este análisis, podemos ver que $t(k)$ es el coeficiente de transmisión, y que $r(k)$ y $l(k)$ son los coeficientes de reflexión por la derecha y por la izquierda, respectivamente. Para ver esto más claramente, notemos que $\frac{\varphi(x,k)}{a(k)}$ se comporta como una onda hacia $-\infty$ (la onda transmitida), y como la suma de dos ondas hacia ∞ (la onda original más la onda reflejada). Análogamente notamos lo mismo para $\frac{\bar{\psi}(x,k)}{a(k)}$. De (1.14), se sigue inmediatamente que:

$$|t(k)| + |r(k)| = 1 \quad (1.17)$$

Este resultado puede interpretarse como una ley de conservación, ya que se espera que la onda transmitida y la onda reflejada sean una descomposición de la onda original, y por lo tanto, la suma de sus módulos debe ser exactamente igual a la unidad.

Es importante que a partir del coeficiente de reflexión, se pueden determinar tanto $a(k)$ como $b(k)$. En efecto, a partir de (1.15) y (1.17), obtenemos que:

$$|a(k)|^2 = \frac{1}{1 - |r(k)|^2}, \quad (1.18)$$

es

decir, el módulo de $r(k)$ determina de manera única al módulo de $a(k)$. Ahora bien, como conocemos los ceros de $a(k)$, la cual es analítica en el semiplano superior de k (véanse las secciones 1.2 y 1.3), podemos determinar de manera única su argumento a partir de su módulo. Sea:

$$a_1(k) = a(k) \prod_{n=1}^N \frac{k + i\mathcal{Z}_n}{k - i\mathcal{Z}_n}, \quad (1.19)$$

donde

$i\mathcal{Z}_n$ es un cero de $a(k) \forall n$ (por ahora, estamos suponiendo que $a(k)$ tiene ceros únicamente sobre el eje imaginario, pero más adelante lo probaremos). Como

$a(k)$ es analítica en el semiplano superior, $a_1(k)$ también lo es, y además no tiene ceros ahí (también probaremos más adelante que los ceros de $a(k)$ son simples). Como $a_1(k)$ es analítica y no tiene ceros en el semiplano superior, entonces $\ln a_1(k)$ es también analítica en el semiplano superior. Sabemos que en el eje real $|a(k)| = |a_1(k)|$.

Veamos ahora que:

$$\ln |a_1(k)| + i \arg a_1(k) = \ln a_1(k) = \ln a(k) + \sum_{n=1}^N \ln \frac{k + i\chi_n}{k - i\chi_n}$$

Usando la transformada de Hilbert[8]:

$$\arg a_1(k) = -\frac{1}{\pi} V.P. \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\ln |a(k')|}{k' - k} dk'$$

De donde:

$$\begin{aligned} \ln |a_1(k)| + i \arg a_1(k) &= \ln a(k) + \sum_{n=1}^N \ln \frac{k + i\chi_n}{k - i\chi_n} \\ &= \ln |a(k)| + i \arg a(k) + \sum_{n=1}^N \ln \frac{k + i\chi_n}{k - i\chi_n}, \end{aligned}$$

Pero:

$$\begin{aligned} \ln |a_1(k)| &= \ln |a(k)| \\ \Rightarrow i \arg a_1(k) &= i \arg a(k) + \sum_{n=1}^N \ln \frac{k + i\chi_n}{k - i\chi_n} \\ \Rightarrow i \arg a(k) &= i \arg a_1(k) - \sum_{n=1}^N \ln \frac{k + i\chi_n}{k - i\chi_n} \\ \Rightarrow \arg a(k) &= \arg a_1(k) - \frac{1}{i} \sum_{n=1}^N \ln \frac{k + i\chi_n}{k - i\chi_n} \\ \Rightarrow \arg a(k) &= \frac{1}{i} \sum_{n=1}^N \ln \frac{k - i\chi_n}{k + i\chi_n} - \frac{1}{\pi} V.P. \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\ln |a(k')|}{k' - k} dk' \quad (1.20) \end{aligned}$$

Hemos hecho un análisis del espectro continuo obteniendo los coeficientes de reflexión y transmisión, y mostrando algunas de sus propiedades.

Ahora estudiaremos el espectro discreto, y lo relacionaremos con los coeficientes definidos anteriormente. Las eigenfunciones para el eigenvalor $\lambda_n = -\chi_n^2$ satisfacen la ecuación:

$$-\frac{d^2}{dx^2}\psi + u(x)\psi = -\varkappa_n^2\psi \quad (1.21)$$

Sabemos que el espectro discreto del operador es simple (véase [10]), i.e., el eigenspacio de funciones correspondiente a cada eigenvalor de L es de dimensión 1.

Las eigenfunciones tienen el siguiente comportamiento asintótico:

$$\psi \rightarrow c_{\pm} e^{\mp \varkappa_n x}, \quad x \rightarrow \pm\infty \quad (1.22)$$

En particular, la eigenfunción tal que $c_- = 1$ la llamamos $\varphi^{(n)}(x)$:

$$\begin{aligned} \varphi^{(n)}(x) &= e^{\varkappa_n x} + o(e^{\varkappa_n x}), \quad x \rightarrow -\infty \\ \varphi^{(n)}(x) &= b_n e^{-\varkappa_n x} + o(e^{-\varkappa_n x}), \quad x \rightarrow \infty \end{aligned} \quad (1.23)$$

donde $b_n \in \mathbb{R}$. Para referirnos de manera particular a cada eigenvalor, les asignaremos los subíndices de tal manera que:

$$\lambda_1 < \lambda_2 < \dots < \lambda_N < 0 \quad (1.24)$$

o bien:

$$\varkappa_N > \dots > \varkappa_2 > \varkappa_1 > 0 \quad (1.25)$$

Es bien sabido (véase [11]) que la función $\varphi^{(1)}(x)$ no tiene ceros, y en general la función $\varphi^{(n)}(x)$ tiene exactamente $n - 1$ ceros, y en particular eso implica que:

$$b_n = |b_n| (-1)^{n-1} \quad (1.26)$$

Mostramos ahora una forma de identificar los eigenvalores de L : Fijémonos en $W(\varphi, \bar{\psi})$:

$$\begin{aligned} W(\varphi, \bar{\psi}) &= \varphi(x, k) \bar{\psi}_x(x, k) - \bar{\psi}(x, k) \varphi_x(x, k) \\ &= (a(k)e^{-ikx} + b(k)e^{ikx}) ik e^{ikx} - e^{ikx} (-ika(k)e^{-ikx} + ikb(k)e^{ikx}) \\ \Rightarrow W(\varphi, \bar{\psi}) &= ika(k) + ikb(k)e^{2ikx} + ika(k) - ikb(k)e^{2ikx} = 2ika(k) \end{aligned} \quad (1.27)$$

Este análisis es válido para $k \in \mathbb{R}$, pero $\bar{\psi}(x, k)$ no es analítica en $\mathbb{C}^+ = \{k \in \mathbb{C} \mid \text{Im } k > 0\}$, así que definimos a la continuación de $a(k)$ hacia \mathbb{C}^+ como

$a(k) = W(\varphi(x, k), \bar{\psi}(x, \bar{k}))$, ya que $\bar{\psi}(x, \bar{k})$ sí es analítica en \mathbb{C}^+ . Ahora, supongamos que $W(\varphi, \bar{\psi}) = 0$ para algún $k = k_0 \neq 0$, $k_0 \in \mathbb{C}^+$. Esto implica que las funciones $\varphi(x, k_0)$ y $\bar{\psi}(x, \bar{k}_0)$ son linealmente dependientes:

$$\varphi(x, k_0) = c\bar{\psi}(x, \bar{k}_0) \quad (1.28)$$

Esto nos lleva a que $\varphi(x, k_0)$ decrece exponencialmente, tanto cuando $x \rightarrow -\infty$ como cuando $x \rightarrow \infty$. Por lo tanto, $\varphi(x, k_0)$ es eigenfunción del espectro discreto de L , y k_0^2 es eigenvalor de L . De la condición de autoconjugación, se sigue que $k_0^2 \in \mathbb{R}$, es decir, todos los ceros de $a(k)$ están sobre el eje imaginario.

Ahora bien, sea $\lambda_n = -\varkappa_n^2$ un eigenvalor de L . Cuando $x \rightarrow -\infty$, la función $\varphi(x, i\varkappa_n)$ tiene la misma conducta asintótica que la eigenfunción $\varphi^{(n)}(x)$, por lo que $\varphi^{(n)}(x) = \varphi(x, i\varkappa_n)$. Cuando $x \rightarrow \infty$, tenemos que $\varphi^{(n)}(x) = b_n e^{-\varkappa_n x} + o(e^{-\varkappa_n x})$:

$$\varphi(x, i\varkappa_n) = b_n \bar{\psi}(x, i\varkappa_n) \quad (1.29)$$

Por lo tanto, hemos encontrado una correspondencia uno a uno entre los ceros de $a(k)$ en el semiplano superior de k y los eigenvalores de L .

Ahora estamos en posición de formular el problema directo:

Definamos $s = \{r(k), \varkappa_n, |b_n|, n = 1, \dots, N\}$. El problema directo de dispersión consiste en encontrar el conjunto s a partir de $u(x)$.

1.2 La matriz de dispersión y sus propiedades

Vamos a retomar algunas de las ideas anteriores desde una perspectiva distinta, con el fin de hacer un estudio de las propiedades analíticas de los coeficientes de reflexión y transmisión, así como del comportamiento asintótica de las soluciones $\varphi(x, k)$ y $\psi(x, k)$.

Empezaremos esta sección con la siguiente

Definición 2 *La matriz*

$$S(k) = \begin{bmatrix} t(k) & r(k) \\ l(k) & \bar{t}(k) \end{bmatrix} \quad (1.30)$$

es llamada la matriz de dispersión para $u(x)$.

Para hacer un análisis de las propiedades de $S(k)$, es conveniente definir las funciones $m_1(x, k) = e^{-ikx}\bar{\psi}(x, k)$ y $m_2(x, k) = e^{ikx}\varphi(x, k)$. Estas funciones satisfacen la ecuación de Schrödinger:

$$m_i''(x, k) + 2ikm_i'(x, k) = u(x)m_i(x, k) \quad (1.31)$$

El siguiente lema es importante, porque nos ayudará a hallar expresiones para $a(k)$ y $b(k)$, y de este modo analizar si podemos hacer la continuación de ambas funciones fuera del eje real:

Lema 3 *Sea*

$$D_k(y) = \int_0^y e^{2ikt} dt = \frac{1}{2ik} (e^{2iky} - 1) \quad k \in \mathbb{C}. \quad (1.32)$$

Entonces, para cada k , $\text{Im } k \geq 0$, las ecuaciones integrales

$$m_1(x, k) = 1 + \int_x^\infty D_k(t-x)u(t)m_1(t, k)dt \quad (1.33)$$

$$m_2(x, k) = 1 + \int_{-\infty}^x D_k(x-t)u(t)m_2(t, k)dt \quad (1.34)$$

tienen soluciones $m_1(x, k)$ y $m_2(x, k)$, respectivamente, tales que ambas cumplen la ecuación (1.31), y $m_1(x, k) \rightarrow 1$ cuando $x \rightarrow \infty$ y $m_2(x, k) \rightarrow 1$ cuando $x \rightarrow -\infty$.

Además, $\bar{m}_1(x, k) = m_1(x, -k)$ y $\bar{m}_2(x, k) = m_2(x, -k)$, y ambas tienen las siguientes propiedades:

$$(i) |m(x, k) - 1| \leq e^{\frac{\eta(x)}{|k|}} \frac{\eta(x)}{|k|} \leq e^{\frac{\text{const.}}{|k|}} \frac{\text{const.}}{|k|}, \quad k \neq 0$$

$$(ii) |m(x, k) - 1| \leq K \frac{\int_x^{(1+\max(-x,0))} (1+|t|)|u(t)|dt}{1+|k|} \leq K_1 \left(\frac{1+\max(-x,0)}{1+|k|} \right)$$

$$(iii) |m'(x, k)| \leq K_2 \frac{\int_x^\infty (1+|t|)|u(t)|dt}{1+|k|} \leq \frac{K_3}{1+|k|}, \quad -\infty < x < \infty$$

$$(iv) |m'(x, k)| \leq K_4 \frac{\int_x^\infty |u(t)|dt}{1+|k|}, \quad 0 \leq x < \infty$$

$$\text{donde } \eta(x) = \int_x^\infty |u(t)| dt.$$

Prueba. Mostraremos que las iteraciones de la ecuación integral de Volterra (1.33) convergen. Tenemos (véase [3]):

$$m_1(x, k) = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} g_n(x, k) \quad (1.35)$$

donde

$$g_n(x, k) = \int_{x \leq x_1 \leq \dots \leq x_n} D_k(x_1 - x) \dots D_k(x_n - x_{n-1}) u(x_1) \dots u(x_n) dx_1 \dots dx_n.$$

Ahora bien, como $|D_k(y)| \leq \frac{1}{|k|}$ si $\text{Im } k \geq 0$, se tiene

$$|g_n(x, k)| \leq \int_{x \leq x_1 \leq \dots \leq x_n} \frac{1}{|k|^n} |u(x_1)| \dots |u(x_n)| dx_1 \dots dx_n = \frac{1}{|k|^n} \frac{\left(\int_x^\infty |u(t)| dt \right)^n}{n!}. \quad (1.36)$$

Similarmente, como $|D_k(y)| \leq y$, $k, y \geq 0$, también se tiene

$$\begin{aligned} |g_n(x, k)| &\leq \int_{x \leq x_1 \leq \dots \leq x_n} |u(x_1)| \dots |u(x_n)| (x_1 - x)(x_2 - x_1) \dots (x_n - x_{n-1}) dx_1 \dots dx_n \\ &\leq \int_{x \leq x_1 \leq \dots \leq x_n} |u(x_1)| \dots |u(x_n)| (x_1 - x)(x_2 - x) \dots (x_n - x) dx_1 \dots dx_n \\ &\Rightarrow |g_n(x, k)| \leq \frac{\left(\int_x^\infty (t - x) |u(x)| dt \right)^n}{n!} \end{aligned} \quad (1.37)$$

La prueba de (i) es ahora inmediata de (1.36). Para obtener (ii), notemos que:

$$|m_1(x, k) - 1| \leq e^{\gamma(x)} \gamma(x)$$

donde $\gamma(x) = \int_x^\infty (t - x) |u(x)| dt$.

Sabemos que

$$\begin{aligned} |m_1(x, k)| &\leq 1 + \int_x^\infty (t - x) |u(t)| |m_1(t, k)| dt \\ &= 1 + \int_x^\infty t |u(t)| |m_1(t, k)| dt + \int_x^\infty (-x) |u(t)| |m_1(t, k)| dt \\ &\leq 1 + \int_0^\infty t |u(t)| |m_1(t, k)| dt + \int_x^\infty (-x) |u(t)| |m_1(t, k)| dt \end{aligned}$$

También:

$$1 + \int_0^{\infty} t |u(t)| |m_1(t, k)| dt \leq 1 + e^{\gamma(0)} \gamma(0) \int_0^{\infty} t |u(t)| dt = K < \infty$$

Haciendo $M(x, k) = \frac{m_1(x, k)}{K(1+|x|)}$, $p(x) = (1 + |x|) |u(x)| \in L^1$, obtenemos $|M(x, k)| \leq 1 + \int_x^{\infty} p(t) |M(t, k)|$ que puede ser resuelta iterativamente como arriba para llegar a

$$|M(x, k)| \leq e^{\int_x^{\infty} (1+|t|)|u(t)| dt} \leq K_1 < \infty$$

i.e., $|m_1(x, k)| \leq K_2(1 + |x|)$.

Como arriba,

$$\begin{aligned} |m_1(x, k) - 1| &\leq \int_0^{\infty} t |u(t)| |m_1(t, k)| dt + \int_x^{\infty} (-x) |u(t)| |m_1(t, k)| dt \\ &\leq e^{\gamma(0)} \gamma(0) \int_0^{\infty} t |u(t)| dt + (-x) K_2 \int_x^{\infty} (1 + |t|) |u(t)| dt \end{aligned}$$

que es a lo más

$$K_3(1 + |x|) \int_x^{\infty} (1 + |t|) |u(t)| dt \quad \forall x \leq 0$$

Pero, para $x \geq 0$,

$$|m_1(x, k) - 1| \leq e^{\gamma(0)} \gamma(x) \leq e^{\gamma(0)} \int_x^{\infty} t |u(t)| dt$$

de donde

$$|m_1(x, k) - 1| \leq K_4(1 + \max(-x, 0)) \int_x^{\infty} (1 + |t|) |u(t)| dt \quad (1.38)$$

Combinando (1.38) con (i), obtenemos (ii). Las propiedades (iii) y (iv) salen de sustituir (ii) en

$$m_1'(x, k) = - \int_x^{\infty} e^{2ik(t-x)} u(t) m_1(t, k) dt$$

Haciendo un cálculo directo, llegamos a que $m_1(x, k)$ resuelve la ecuación de Schrödinger con $m_1(x, k) \rightarrow 1$ cuando $x \rightarrow \infty$ y la convergencia uniforme local de la serie (1.35) para $m_1(x, k)$ prueba la analiticidad en $\text{Im } k > 0$ y la continuidad en $\text{Im } k \geq 0$. ■

Usando este lema, vemos que, cuando $x \rightarrow -\infty$:

$$m_1(x, k) = 1 + \int_x^\infty \left(\frac{e^{2ik(t-x)} - 1}{2ik} \right) u(t) m_1(t, k) dt$$

$$\Rightarrow m_1(x, k) = e^{-2ikx} \left(\frac{1}{2ik} \int_{-\infty}^\infty e^{2ikt} u(t) m_1(t, k) dt \right) + \left(1 - \frac{1}{2ik} \int_{-\infty}^\infty u(t) m_1(t, k) dt \right) + o(1) \quad (1.39)$$

Pero

$$m_1(x, k) = -\bar{b}(k) e^{-2ikx} m_2(x, k) + a(k) \bar{m}_2(x, k) = -\bar{b}(k) e^{-2ikx} + a(k) + o(1) \quad (1.40)$$

Comparando (1.39) y (1.40), llegamos a que:

$$-\bar{b}(k) = \frac{1}{2ik} \int_{-\infty}^\infty e^{2ikt} u(t) m_1(t, k) dt \quad (1.41)$$

$$a(k) = 1 - \frac{1}{2ik} \int_{-\infty}^\infty u(t) m_1(t, k) dt \quad (1.42)$$

Haciendo un análisis similar para $m_2(x, k)$, llegamos a:

$$b(k) = \frac{1}{2ik} \int_{-\infty}^\infty e^{-2ikt} u(t) m_2(t, k) dt \quad (1.43)$$

$$a(k) = 1 - \frac{1}{2ik} \int_{-\infty}^\infty u(t) m_2(t, k) dt \quad (1.44)$$

De (1.44) y las propiedades de $m_1(x, k)$ ($|m_1(x, k)| \leq K(1 + |x|)$, $k \geq 0$) vemos que $t(k) = \frac{1}{a(k)}$ es meromorfa en $\text{Im } k > 0$, y $a(k)$ es continua en $\text{Im } k \geq 0$, $k \neq 0$. Usando (1.43) y que $b(k) = \frac{r(k)}{t(k)}$, encontramos que $r(k)$ es continua para $k \in \mathbb{R}$, $k \neq 0$ (nótese que, en general, para $u(x)$ sin restricciones en el soporte, $r(k)$ no tiene una continuación analítica fuera del eje real).

Fácilmente se ve que si $u(x)$ tiene soporte restringido a la semirecta, entonces $t(k)$ es meromorfa en todo el plano k , y $r(k)$ y $l(k)$ son meromorfas en semiplanos opuestos, y de hecho, si el soporte de $u(x)$ es compacto, entonces $r(k)$ y $l(k)$ son meromorfas para todo k . Si $u(x) = 0 \forall x \geq b \in \mathbb{R}$, entonces $r(k)$ es meromorfa en $\text{Im } k > 0$. Estos resultados serán importantes más adelante.

Antes de enunciar otra proposición importante, es conveniente hacer la siguiente

Definición 4 Sea $h(k)$ analítica en $\text{Im } k > 0$. Decimos que $h(k) \in H^{2+}$ (el espacio de Hardy) si

$$\sup_{b>0} \int_{-\infty}^{\infty} |h(a+ib)|^2 da < \infty$$

Es decir, si una función $h(k) \in H^{2+}$, entonces, si hacemos $k = a + ib$, entonces $\forall b_0 > 0$, tenemos que $h(k)|_{k=a+ib_0} = h_{b_0}(a) \in L^2(\mathbb{R})$.

Hecha esta definición, estamos listos para enunciar la siguiente proposición, en la cual describimos el comportamiento de los coeficientes de transmisión y reflexión cuando $|k| \rightarrow \infty$:

Proposición 5 (i) $t(k) = 1 + O(1/k)$ cuando $|k| \rightarrow \infty$, $\text{Im } k \geq 0$

(ii) $r(k) = O(1/k)$, $l(k) = O(1/k)$ cuando $|k| \rightarrow \infty$, $k \in \mathbb{R}$

(iii) Si L no tiene eigenvalores, entonces $t(k) - 1 \in H^{2+}$ y $|t(k)| \leq 1 \forall k \in \text{Im } k \geq 0$.

Prueba. Usando el lema 3 y las ecuaciones (1.43) y (1.44), llegamos a que:

$$a(k) = 1 - \frac{\int_{-\infty}^{\infty} u(t)dt}{2ik} + O\left(\frac{1}{k^2}\right)$$

de donde

$$t(k) = 1 + \frac{\int_{-\infty}^{\infty} u(t)dt}{2ik} + O\left(\frac{1}{k^2}\right)$$

y

$$r(k) = \frac{t(k)}{2ik} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-2ikt} u(t)dt + O\left(\frac{1}{k^2}\right), \quad l(k) = \frac{t(k)}{2ik} \int_{-\infty}^{\infty} e^{2ikt} u(t)dt + O\left(\frac{1}{k^2}\right)$$

de donde $t(k) = 1 + O(1/k)$ cuando $|k| \rightarrow \infty$, $\text{Im } k \geq 0$ y $r(k) = l(k) = O(1/k)$ cuando $|k| \rightarrow \infty$, $k \in \mathbb{R}$.

Supongamos que $u(x)$ no tiene eigenvalores. Sea $u^{(n)}(x) = \chi(-n, n)u(x)$. Sabemos que

$$\int_{-\infty}^{\infty} (1+|t|) |u^{(n)}(t) - u(t)| dt \rightarrow 0 \text{ cuando } n \rightarrow \infty$$

Ahora, sea $L^{(n)} = -\frac{d^2}{dx^2} + u^{(n)}(x)$. $L^{(n)}$ tiene N_n eigenvalores $0 > -\varkappa_{n,N_n} > \dots > -\varkappa_{n,1}$. Como $(\phi, L^{(n)}\phi) \rightarrow (\phi, L\phi)$ cuando $n \rightarrow \infty \forall \phi \in C_0^\infty(\mathbb{R})$, y como H no tiene eigenvalores, entonces $\varkappa_{n,j} \rightarrow 0$ cuando $n \rightarrow \infty$ por el principio minimax (teorema de Weiertrass). Sean $t^{(n)}(k)$ el coeficiente de transmisión correspondiente a $u^{(n)}(x)$, y $m^{(n)}$ la función m_1 correspondiente a $u^{(n)}(x)$ como se definió antes. Como $u^{(n)}(x)$ tiene soporte compacto y $t^{(n)}(k)$ tiene polos simples en $k = i\varkappa_{n,j}$, $j = 1, \dots, N_n$,

$$g^{(n)}(k) = (t^{(n)}(k) - 1) \prod_{j=1}^{N_n} \frac{k - i\varkappa_{n,j}}{k + i\varkappa_{n,j}}$$

es continua en $\text{Im } k \geq 0$ y por (i), tenemos que $g^{(n)}(k) \in H^{2+}$. Ahora, mostraremos que $g^{(n)}(k) \rightarrow t(k) - 1$ en $L^2(-\infty < k < \infty)$. Esto implica que $t(k) - 1 \in H^{2+}$.

Sea

$$K_0 = \int_{-\infty}^{\infty} (1 + |t|) |u(t)| dt$$

entonces,

$$\int_{-\infty}^{\infty} (1 + |t|) |u^{(n)}(t)| dt \leq K_0 \quad \forall n.$$

y

$$\begin{aligned} m^{(n)} - m &= \int_x^\infty D_k(t-x)(u^{(n)}(t) - u(t))m(t,k)dt \\ &+ \int_x^\infty D_k(t-x)u^{(n)}(t)(m^{(n)}(t,k) - m(t,k))dt \end{aligned}$$

Iterando como en la prueba de (iii) en el lema 3, vemos que

$$\begin{aligned} |m^{(n)}(x,k) - m(x,k)| &\leq K(1 + |x|) \int_x^\infty (1 + |t|) |u^{(n)}(t) - u(t)| dt, \quad n \geq n_0, \\ &\leq 2KK_0(1 + |x|), \end{aligned}$$

14CAPÍTULO 1. LOS PROBLEMAS DIRECTO E INVERSO DE DISPERSIÓN

donde K depende de K_0 . También, usando que $|m| \leq K_1(1 + |x|)$ se tiene:

$$\begin{aligned} \left| \frac{1}{t(k)} - \frac{1}{t^{(n)}(x)} \right| &= \left| \frac{1}{2ik} \int_{-\infty}^{\infty} u^{(n)}(t)(m^{(n)}(t, k) - m(t, k))dt \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{2ik} \int_{-\infty}^{\infty} (u^{(n)}(t) - u(t))m(t, k)dt \right| \\ &\leq \frac{KK_0}{2|k|} \int_{-\infty}^{\infty} (1 + |t|) |u^{(n)}(t) - u(t)| dt \\ &\quad + \frac{K_1}{2|k|} \int_{-\infty}^{\infty} (1 + |t|) |u^{(n)} - u(t)| dt \end{aligned}$$

Por lo tanto, $g^{(n)}(k) \rightarrow t(k) - 1 \forall k \neq 0$. Ahora bien, usando convergencia dominada, tenemos que $g^{(n)}(k) \rightarrow t(k) - 1$ si podemos encontrar una función $h(k) \in L^2$ tal que $|t^{(n)}(k) - 1| \leq h(k)$ para n suficientemente grande.

Tenemos que $|m^{(n)}(x, k)| \leq K_2(1 + |x|)$. Ahora escogemos k tal que $|k| > K_0K_2$. Entonces,

$$\left| \frac{1}{t^{(n)}} - 1 \right| \leq \frac{K_2}{2|k|} \int_{-\infty}^{\infty} |u^{(n)}(t)| (1 + |t|) dt \leq \frac{K_0K_2}{2|k|}$$

y, en consecuencia,

$$\left| t^{(n)}(k) - 1 \right| \leq \frac{\left| \frac{1}{t^{(n)}(k)} - 1 \right|}{1 - \left| \frac{1}{t^{(n)}(k)} - 1 \right|} \leq \frac{2K_0K_2}{2|k|} = \frac{K_0K_2}{|k|}$$

Combinando esto con esto con la estimación $|t^{(n)}(k) - 1| \leq 2$ (véase (1.17)) para $|k| \leq K_0K_2$ obtenemos $|t^{(n)}(k) - 1| \leq \frac{K_3}{(1+|k|)} = h(k)$, donde K_3 depende

de $\int_{-\infty}^{\infty} (1 + |t|) |u(t)| dt$. Entonces, $t - 1 \in H^{2+}$.

Para concluir, hagamos $g = t - 1$ y sea $k = a + ib$. Entonces:

$$\begin{aligned} g(k) &= \frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{g(\omega)}{\omega - k} d\omega = \frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{g(\omega)}{\omega - k} d\omega - \frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{g(\omega)}{\omega - \bar{k}} d\omega \\ &= \frac{b}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{g(\varpi)}{(\omega - a)^2 + b^2} d\omega, \end{aligned}$$

i.e.,

$$|t(k)| = \left| \frac{b}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{t(\varpi)}{(\varpi-a)^2+b^2} d\varpi \right| \leq 1 \text{ ya que } t(\varpi) \leq 1 \text{ para } \varpi \in \mathbb{R}. \blacksquare$$

Físicamente, esta proposición nos sugiere que entre más crezca la energía ($\lambda = k^2$), mayor será el coeficiente de transmisión ($t(k) \rightarrow 1$ cuando $|k| \rightarrow \infty$) y menor el coeficiente de reflexión ($r(k) \sim l(k) \rightarrow 0$ cuando $|k| \rightarrow \infty$).

El teorema más importante de esta sección, en el que afirmamos que podemos reconstruir por completo a la matriz de dispersión $S(k)$ a partir del coeficiente de reflexión y los eigenvalores es:

Teorema 6 $S(k)$ puede ser reconstruida a partir de $r(k)$ y los eigenvalores $-\varkappa_1^2 < \dots < -\varkappa_n^2$.

Prueba. Por (1.15), $l(k) = -\frac{\bar{r}(k)t(k)}{t(k)}$, así que sólo nos queda obtener $t(k)$. Reconstruiremos $t(k)$ de una a partir de su módulo sobre el eje real, donde $|t(k)| = \sqrt{1 - |r(k)|^2}$. De hecho, tenemos la formula:

$$t(k) = \begin{cases} \prod_{n=1}^N \frac{k+i\varkappa_n}{k-i\varkappa_n} e^{\frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\ln(1-|r(\omega)|^2)}{\omega-k} d\varpi}, & \text{Im } k > 0 \\ \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} t(k+i\varepsilon), & \text{Im } k = 0 \end{cases} \quad (1.45)$$

Vamos a probar esta representación. Usando la proposición 5, veamos que:

$$h(k) = t(k) \prod_{n=1}^N \frac{k-i\varkappa_n}{k+i\varkappa_n}$$

es analítica en $\text{Im } k > 0$ con $|h(k)| \leq 1$. Se sigue inmediatamente que $\forall k = a + ib, b > 0$:

$$\ln |h(k)| \leq \frac{b}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\ln |h(\omega)|}{(\omega-a)^2+b^2} d\omega$$

Pero $h(k) \neq 0$ en $\text{Im } k > 0$, así que

$$-\infty \leq \frac{b}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\ln |h(\omega)|}{(\omega-a)^2+b^2} d\omega$$

y de hecho, $|h(\omega)| \leq 1$ para $\omega \in \mathbb{R}$. Entonces,

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{|\ln |h(\omega)||}{(\omega-a)^2+b^2} d\omega < \infty$$

y, en particular, $\ln|h(\omega)|$ es localmente integrable. De hecho, mostraremos que:

$$\ln|h(k)| = \frac{b}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\ln|h(\omega)|}{(\omega-a)^2 + b^2} d\omega \quad (1.46)$$

Supongamos que (1.46) es cierto, y definamos

$$g(k) = e^{-\frac{1}{\pi i} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\ln|t\omega|}{\omega-k} d\omega}, \operatorname{Im} k > 0$$

$g(k)$ está definida y es analítica en $\operatorname{Im} k > 0$ porque $\ln|t(\omega)|$ es localmente integrable y $\ln|t(\omega)| = O(\frac{1}{|\omega|})$ cuando $\omega \rightarrow \infty$ por la proposición 5. Entonces:

$$\ln|g(k)| = \frac{b}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\ln|t(\omega)|}{(\omega-a)^2 + b^2} d\omega, k = a + ib$$

así que $|g(k)| = |h(k)|$ por (1.46). Por lo tanto, $\frac{g(k)}{h(k)}$ es una función analítica con módulo constante. Se sigue que

$$h(k) = \operatorname{const}.g(k) = \operatorname{const}. \exp\left(\frac{1}{\pi i} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\ln|t\omega|}{\omega-k} d\omega\right)$$

Como $h(k) \rightarrow 1$ cuando $k \rightarrow \infty$, la constante debe ser 1, y la fórmula (1.45) es inmediata.

Ahora probaremos (1.46). Sea $\beta > 0$ y $h_\beta(k) = h(k + i\beta)$, $\operatorname{Im} k \geq 0$; $h_\beta(k)$ es analítica en $\operatorname{Im} k \geq 0$ y además $\inf_{\operatorname{Im} k > 0} |h_\beta(k)| > 0$. Por la fórmula integral de Cauchy, y como $h_\beta(k) = 1 + O(\frac{1}{k})$, tenemos:

$$\ln h_\beta(k) = \frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\ln h_\beta(\omega)}{\omega - k} d\omega, \operatorname{Im} k > 0$$

Igualmente, tenemos:

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\ln h_\beta(\omega)}{\omega - \bar{k}} d\omega = 0.$$

Entonces,

$$\begin{aligned} \ln h_\beta(k) &= \frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\ln h_\beta(\omega)}{\omega - k} d\omega + \frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\overline{\ln h_\beta(\omega)}}{\omega - k} d\omega \\ &= \frac{1}{\pi i} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\ln|h_\beta(\omega)|}{\omega - k} d\omega \end{aligned}$$

y en consecuencia, si $k = a + ib$, $b > 0$,

$$\ln h_\beta(k) = \frac{b}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\ln |h_\beta(\omega)|}{(\omega - a)^2 + b^2} d\omega,$$

Ahora, de (1.42) y (1.15), tenemos que para $k \neq 0$, $|t(k)| > 0$ y

$$|2k| \leq |t(k)| (|2k| + K \int_{-\infty}^{\infty} u(t)(1 + |t|) dt),$$

de donde $|k| \leq \text{const.} |t(k)|$ para k chica (véase [3]), así que $|h_\beta(\omega)| \geq A |\omega + ib|$, para alguna $A > 0$, $|\omega + ib| \leq 2\delta$ para alguna δ suficientemente chica. Entonces, $\ln |h_\beta(\omega)| \geq \ln A + \ln |\omega + ib| \geq \ln A + \ln |\omega|$. Pero $|h_\beta(\omega)| \leq 1$, entonces:

$$|\ln |h_\beta(\omega)|| \leq -\ln A - \ln |\omega| \quad \text{para } |\omega| \leq \delta, |\beta| \leq \delta$$

Además, $h_\beta(\omega) \rightarrow h(\omega)$ cuando $\beta \rightarrow 0$ para $\omega \neq 0$ y $\ln |h(\omega)|$ es localmente integrable, así que:

$$\lim_{\beta \rightarrow 0} \frac{b}{\pi} \int_{-\delta}^{\delta} \frac{\ln |h_\beta(\omega)|}{(\omega - a)^2 + b^2} d\omega = \frac{b}{\pi} \int_{-\delta}^{\delta} \frac{\ln |h(\omega)|}{(\omega - a)^2 + b^2} d\omega$$

Como $|h_\beta(\omega)| \geq \text{const.} > 0$ para $|\omega| > \delta$, se sigue que:

$$\lim_{\beta \rightarrow 0} \frac{b}{\pi} \int_{|\omega| > \delta} \frac{\ln |h_\beta(\omega)|}{(\omega - a)^2 + b^2} d\omega = \frac{b}{\pi} \int_{|\omega| > \delta} \frac{\ln |h(\omega)|}{(\omega - a)^2 + b^2} d\omega.$$

■

1.3 Formulación del problema inverso

El problema inverso de dispersión consiste en encontrar $u(x)$ a partir del conjunto s . En su solución aprovecharemos las propiedades analíticas de las soluciones definidas en (1.5) y (1.6). En efecto, se tiene que $\forall x$, la función $\varphi(x, k)e^{ikx}$ es analítica en el semiplano superior de k y tiene el comportamiento asintótico:

$$\varphi(x, k)e^{ikx} = 1 + O\left(\frac{1}{k}\right), |k| \rightarrow \infty, \text{Im } k > 0 \quad (1.47)$$

Similarmente, la solución $\psi(x, k)e^{ikx}$ es analítica en el semiplano inferior de k y tiene el comportamiento asintótico:

$$\psi(x, k)e^{ikx} = 1 + O\left(\frac{1}{k}\right), |k| \rightarrow \infty, \text{Im } k < 0 \quad (1.48)$$

Una manera de verificar estas afirmaciones, es transformar la ecuación (1.4) en una ecuación integral equivalente para $\varphi(x, k)$, usando la función de Green para L :

$$\varphi(x, k) = e^{-ikx} - \int_{-\infty}^{\infty} G(x, x', k)u(x')\varphi(x', k)dx' \quad (1.49)$$

Luego, del comportamiento asintótico de $\varphi(x, k)$ cuando $x \rightarrow \infty$, vemos que:

$$G(x, x', k) = \begin{cases} -\frac{\sin k(x-x')}{k}, & x > x' \\ 0, & x < x' \end{cases} \quad (1.50)$$

Entonces, la función $\chi_+ = \varphi(x, k)e^{ikx}$ satisface:

$$\chi_+(x, k) = 1 + \int_{-\infty}^x \frac{e^{2ik(x-x')} - 1}{2ik} u(x')\chi_+(x', k)dx' \quad (1.51)$$

En el semiplano superior de k , la exponencial del integrando en (1.51) está acotada; por esta razón $\chi_+(x, k)$ admite una continuación analítica al dominio $\text{Im } k > 0$. Podemos proceder de manera similar para la función $\chi_-(x, k) = \psi(x, k)e^{-ikx}$, y encontrar que:

$$\chi_-(x, k) = 1 - \int_x^{\infty} \frac{e^{2ik(x-x')} - 1}{2ik} u(x')\chi_-(x', k)dx' \quad (1.52)$$

De igual manera, $\chi_-(x, k)$ puede ser continuada analíticamente hacia el semiplano inferior de k , y cuando $|k| \rightarrow \infty$,

$$\chi_-(x, k) = 1 - \frac{1}{2ik} \int_x^{\infty} u(x')dx' + O\left(\frac{1}{k^2}\right) \quad (1.53)$$

Por último, notemos que la función $\bar{\psi}(x, \bar{k})$ es analítica en el semiplano superior de k , lo que se sigue de la analiticidad de $\psi(x, k)$ en el semiplano inferior.

Multiplicando (1.9) por $\frac{e^{ikx}}{a(k)}$, tenemos que:

$$\frac{\chi_+(x, k)}{a(k)} = \chi_-(x, k) + r(k)\bar{\chi}_-(x, k)e^{2ikx} \quad (1.54)$$

Tenemos, además, que $\frac{\chi_+(x, k)}{a(k)}$ es analítica en el plano superior de k , excepto en $k = i\mathcal{I}_n$, $n = 1, \dots, N$, en los cuales $a(k)$ tiene ceros simples. Probaremos esto, ya que más adelante necesitaremos que $a'(i\mathcal{I}_n) \neq 0$. Diferenciemos (1.4) con respecto a k en $k = i\mathcal{I}_n$:

$$(L + \varkappa_n^2)\varphi'(x, i\varkappa_n) = 2i\varkappa_n\varphi(x, i\varkappa_n) \quad (1.55)$$

Multiplicando (1.53) por $\varphi(x, i\varkappa)$, y luego integrando con respecto a x tenemos:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \left(-\frac{d^2}{dx^2} + u(x) + \varkappa_n^2\right)\varphi(x, i\varkappa_n)\varphi'(x, i\varkappa_n)dx = \int_{-\infty}^{\infty} 2i\varkappa_n\varphi^2(x, i\varkappa_n)dx \quad (1.56)$$

Desarrollando el lado izquierdo de (1.56):

$$\begin{aligned} & \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(x, i\varkappa_n)\left(-\frac{d^2}{dx^2} + u(x) + \varkappa_n^2\right)\varphi'(x, i\varkappa_n)dx = \\ &= - \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(x, i\varkappa_n)\frac{d^2}{dx^2}\varphi'(x, i\varkappa_n)dx + \int_{-\infty}^{\infty} u(x)\varphi(x, i\varkappa_n)\varphi'(x, i\varkappa_n)dx \\ & \quad + \int_{-\infty}^{\infty} \varkappa_n^2\varphi(x, i\varkappa_n)\varphi'(x, i\varkappa_n)dx \\ &= -\varphi(x, i\varkappa_n)\frac{d}{dx}\varphi'(x, i\varkappa_n)\Big|_{x=-\infty}^{x=\infty} + \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d}{dx}\varphi(x, i\varkappa_n)\frac{d}{dx}\varphi'(x, i\varkappa_n)dx \\ & \quad + \int_{-\infty}^{\infty} u(x)\varphi(x, i\varkappa_n)\varphi'(x, i\varkappa_n)dx \\ & \quad + \int_{-\infty}^{\infty} \varkappa_n^2\varphi(x, i\varkappa_n)\varphi'(x, i\varkappa_n)dx \\ &= -\varphi(x, i\varkappa_n)\frac{d}{dx}\varphi'(x, i\varkappa_n)\Big|_{x=-\infty}^{x=\infty} + \varphi'(x, i\varkappa_n)\frac{d}{dx}\varphi(x, i\varkappa_n)\Big|_{x=-\infty}^{x=\infty} \\ & \quad - \int_{-\infty}^{\infty} \varphi'(x, i\varkappa_n)\frac{d^2}{dx^2}\varphi(x, i\varkappa_n)dx \\ & \quad + \int_{-\infty}^{\infty} u(x)\varphi(x, i\varkappa_n)\varphi'(x, i\varkappa_n)dx + \int_{-\infty}^{\infty} \varkappa_n^2\varphi(x, i\varkappa_n)\varphi'(x, i\varkappa_n)dx \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= -\varphi(x, i\kappa_n) \frac{d}{dx} \varphi'(x, i\kappa_n) \Big|_{x=-\infty}^{x=\infty} + \varphi'(x, i\kappa_n) \frac{d}{dx} \varphi(x, i\kappa_n) \Big|_{x=-\infty}^{x=\infty} \\
 &\quad + \int_{-\infty}^{\infty} \varphi'(x, k) (L + \kappa_n^2) \varphi(x, i\kappa_n) dx
 \end{aligned}$$

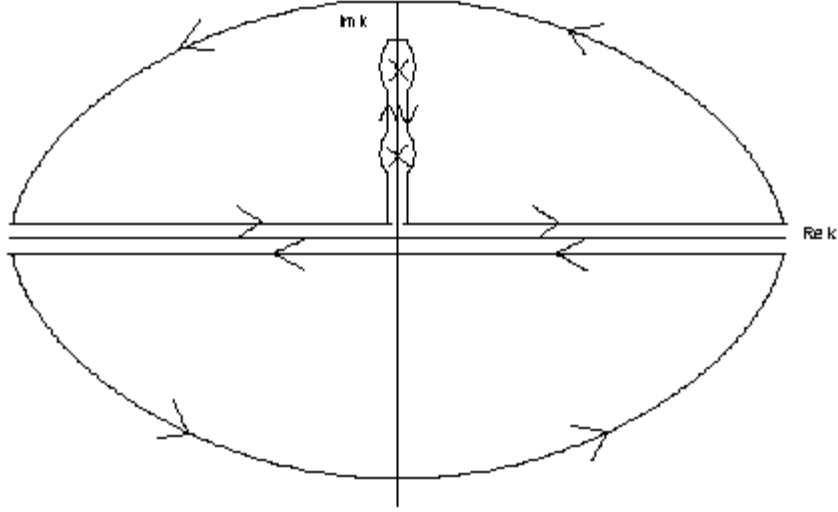
Como φ es eigenfunción de L tenemos que todo esto es igual a:

$$\begin{aligned}
 &-\varphi(x, i\kappa_n) \frac{d}{dx} \varphi'(x, i\kappa_n) \Big|_{x=-\infty}^{x=\infty} + \varphi'(x, i\kappa_n) \frac{d}{dx} \varphi(x, i\kappa_n) \Big|_{x=-\infty}^{x=\infty} \\
 = &-b_n e^{-\kappa_n x} \frac{d}{dx} (a'(i\kappa_n) e^{\kappa_n x} + xa(i\kappa_n) e^{\kappa_n x} + b'(i\kappa_n) e^{-\kappa_n x} - xb(i\kappa_n) e^{-\kappa_n x}) \Big|_{x=\infty} \\
 &+ e^{\kappa_n x} \frac{d}{dx} (x e^{\kappa_n x}) \Big|_{x=-\infty} \\
 &+ (a'(i\kappa_n) e^{\kappa_n x} + xa(i\kappa_n) e^{\kappa_n x} + b'(i\kappa_n) e^{-\kappa_n x} - xb(i\kappa_n) e^{-\kappa_n x}) \frac{d}{dx} (b_n e^{-\kappa_n x}) \Big|_{x=\infty} \\
 &- x e^{\kappa_n x} \frac{d}{dx} (e^{\kappa_n x}) \Big|_{x=-\infty} \\
 = &-b_n e^{-\kappa_n x} (\kappa_n a'(i\kappa_n) e^{\kappa_n x} - \kappa_n b'(i\kappa_n) e^{-\kappa_n x} - \kappa_n x b(i\kappa_n) e^{-\kappa_n x} - b(i\kappa_n) e^{-\kappa_n x}) \Big|_{x=\infty} \\
 &+ e^{\kappa_n x} (\kappa_n x e^{\kappa_n x} + e^{\kappa_n x}) \Big|_{x=-\infty} \\
 &+ (a'(i\kappa_n) e^{\kappa_n x} + xa(i\kappa_n) e^{\kappa_n x} + b'(i\kappa_n) e^{-\kappa_n x} - xb(i\kappa_n) e^{-\kappa_n x}) (-\kappa_n b_n e^{-\kappa_n x}) \Big|_{x=\infty} \\
 &- x e^{\kappa_n x} (\kappa_n e^{\kappa_n x}) \Big|_{x=-\infty} \\
 = &-\kappa_n a'(i\kappa_n) b_n - \kappa_n a'(i\kappa_n) b_n = -2\kappa_n a'(i\kappa_n) b_n \tag{1.57}
 \end{aligned}$$

de donde:

$$\begin{aligned}
 \int_{-\infty}^{\infty} 2i\kappa_n \varphi^2(x, i\kappa_n) dx &= -2\kappa_n a'(i\kappa_n) b_n \\
 \int_{-\infty}^{\infty} \varphi^2(x, i\kappa_n) dx &= i\kappa_n a'(i\kappa_n) b_n \tag{1.58}
 \end{aligned}$$

Como $\varphi(x, i\kappa_n) \in \mathcal{L}^2(\mathbb{R})$, entonces $a'(i\kappa_n) \neq 0$, y de hecho $ia'(i\kappa_n) \in \mathbb{R}$ y tiene el mismo signo que b_n .



Regresando a la ecuación (1.54), la función $\chi_-(x, k)$ es analítica en $\text{Im } k \leq 0$, luego si consideramos la función:

$$\Phi(x, k) = \begin{cases} \frac{\chi_+(x, k)}{a(k)}, & \text{Im } k > 0 \\ \chi_-(x, k), & \text{Im } k < 0 \end{cases}, \quad (1.59)$$

esta función tiene polos simples en el semiplano superior y, de (1.54), tiene una discontinuidad en el eje real igual a $r(k)\bar{\chi}_-(x, k)e^{2ikx}$. En todos los demás puntos del plano complejo $\Phi(x, k)$ es analítica y tiende a 1 cuando $|k| \rightarrow \infty$.

$\Phi(x, k)$ también puede ser expresada de la siguiente manera:

$$\Phi(x, k) = 1 + \sum_{n=1}^N \frac{\Gamma_n(x)}{k - i\chi_n} + \frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{r(k')\bar{\chi}_-(x, k)e^{2ik'x} dk'}{k' - k} \quad (\text{Im } k \neq 0) \quad (1.60)$$

donde $\Gamma_n(x)$ es el residuo de $\Phi(x, k)$ en $k = i\chi_n$; esta expresión no es más que el desarrollo de la fórmula de Cauchy:

$$\Phi(x, k) - 1 = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{\Phi(x, k') - 1}{k' - k} dk' \quad (1.61)$$

donde γ se ha tomado como se muestra en la figura 1.1 (En esta figura, los puntos marcados sobre el eje imaginario son los ceros de $a(k)$, $i\chi_1, \dots, i\chi_N$).

El residuo $\Gamma_n(x)$ puede ser relacionado con el valor de $\Phi(x, k)$ en $k = -i\chi_n$, y de hecho, por la ecuación (1.28), obtenemos:

$$\Gamma_n(x) = \frac{\varphi(x, i\kappa_n)e^{-\kappa_n x}}{a'(i\kappa_n)} = \frac{b_n\psi(x, i\kappa_n)e^{-\kappa_n x}}{a'(i\kappa_n)} = \frac{b_n}{a'(i\kappa_n)}\chi_-(x, -i\kappa_n)e^{-2\kappa_n x} \quad (1.62)$$

Con un procedimiento parecido al de (1.60) con $\chi_-(x, -i\kappa_n)$, llegamos a:

$$\Gamma_n(x) = \frac{b_n e^{-2\kappa_n x}}{a'(i\kappa_n)} \left\{ 1 + i \sum_{m=1}^N \frac{\Gamma_m(x)}{\kappa_n + \kappa_m} + \frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{r(k')\bar{\chi}_-(x, k')e^{2ik'x} dk'}{k' + i\kappa_n} \right\} \quad (1.63)$$

Ahora supongamos que en (1.60) k se aproxima al eje real por abajo. Ya que, por (1.59), $\Phi(x, k - i0) = \chi_-(x, k)$, tenemos

$$\chi_-(x, k) = 1 + \sum_{n=1}^N \frac{\Gamma_n(x)}{k - i\kappa_n} + \frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{r(k')\bar{\chi}_-(x, k')e^{2ik'x} dk'}{k' - k + i0} \quad (1.64)$$

Las relaciones (1.63) y (1.64) forman un sistema de ecuaciones lineales para $\chi_-(x, k)$ y para los residuos $\Gamma_n(x)$, $n = 1, \dots, N$. Ahora, podemos expresar el potencial $u(x)$ en términos de las soluciones del sistema (1.63) y (1.64), comparando la expansión asintótica de $\chi_-(x, k)$ en potencias de $\frac{1}{k}$ con (1.53):

$$u(x) = -\frac{d}{dx} \left(2i \sum_{n=1}^N \Gamma_n(x) - \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} r(k)\bar{\chi}_-(x, k)e^{2ikx} dk \right)$$

Esta no es todavía la ecuación más conocida para resolver el problema inverso: la ecuación más conocida es la llamada ecuación de Gelfand-Levitan-Marchenko, y a continuación la derivaremos.

El primer paso es notar que la transformada de Fourier de la función $\chi_-(x, k)$, que es analítica en el semiplano inferior de k , se anula en la semirrecta, es decir, $\chi_-(x, k)$ se puede representar de la siguiente manera:

$$\chi_-(x, k) = 1 + \int_0^{\infty} A(x, y)e^{-iky} dy$$

Para $\psi(x, k)$, esta condición implica que existe una función $K(x, y)$ tal que

$$\psi(x, k) = e^{-ikx} + \int_x^{\infty} K(x, y)e^{-iky} dy \quad (1.65)$$

de donde $K(x, y) = A(x, y - x)$. De la ecuación (1.65) concluimos que existe un

operador lineal que transforma la solución de la ecuación (1.4) con potencial igual a cero en la solución de (1.4) con el potencial $u(x)$. La función $K(x, y)$ es el kernel del operador de la transformación.

Puesto que $\psi(x, -k) = \psi(x, k)$, $\text{Im } k = 0$, entonces $K(x, y)$ es real. Multiplicando (1.9) por $\frac{e^{iky}}{a(k)}$ y luego integrando sobre k real, obtenemos:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \left(\frac{\varphi(x, k)e^{iky}}{a(k)} - e^{ik(x-y)} \right) dk = \int_{-\infty}^{\infty} e^{iky} \left[\psi(x, k) - e^{-ikx} + r(k)\bar{\psi}(x, k) \right] dk \quad (1.66)$$

La integral del lado izquierdo de (1.66) tiene un integrando con un número finito de polos simples en el semiplano superior, y decrece cuando $|k| \rightarrow \infty$. Por lo tanto, dicha integral puede ser escrita en la forma

$$2\pi i \sum_{n=1}^N \frac{\varphi(x, i\kappa_n) e^{-\kappa_n y}}{a'(i\kappa_n)}$$

Usando (1.28) y (1.64), para $k = i\kappa_n$, $n = 1, \dots, N$, obtenemos la expresión para el lado izquierdo de (1.66):

$$2\pi i \sum_{n=1}^N \frac{b_n e^{-\kappa_n(x+y)}}{a'(i\kappa_n)} + 2\pi i \int_x^{\infty} K(x, z) \sum_{n=1}^N \frac{b_n e^{-\kappa_n(z+y)}}{a'(i\kappa_n)} dz$$

Ahora, sea

$$F(x) = \sum_{n=1}^N \frac{b_n e^{-\kappa_n x}}{ia'(i\kappa_n)} + \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} r(k) e^{ikx} dk \quad (1.67)$$

y

sustituamos (1.65) en (1.66), entonces

$$K(x, y) + F(x+y) + \int_x^{\infty} K(x, z) F(z+y) dz = 0 \quad (1.68)$$

La ecuación (1.68) es la ecuación de Gelfand-Levitan-Marchenko.

Usando (1.64) obtenemos la expansión asintótica de $\chi_-(x, k)$:

$$\chi_-(x, k) = 1 + \frac{K(x, x)}{ik} + O\left(\frac{1}{k^2}\right), \quad |k| \rightarrow \infty$$

y comparando esta expresión con (1.53), obtenemos la siguiente fórmula para el potencial $u(x)$, en términos del kernel del operador de transformación:

$$u(x) = -2 \frac{d}{dx} K(x, x) \quad (1.69)$$

1.3.1 Existencia y unicidad

Para que el problema inverso esté bien definido necesitamos probar que dado un conjunto s definido como en la sección 1.3, existe un único $u(x)$ que cumple (1.3) y cuyos datos de dispersión coinciden con s .

Con este objetivo, daremos un método para modificar a $u(x)$ de tal manera que obtengamos otro potencial con los mismos eigenvalores menos uno, o bien con uno más, para al final demostrar la unicidad de $u(x)$ dado s .

Para esto conviene usar normalización distinta, a saber:

$$c_n = \left(\int_{-\infty}^{\infty} \bar{\psi}^2(x, i\kappa_n) dx \right)^{-1}$$

Primero enunciaremos un teorema cuya prueba puede ser consultada en la referencia [12]:

Teorema 7 *Sea A un operador cerrado en un espacio de Hilbert con operador adjunto A^* . Entonces $\sigma(A^*A) \setminus \{0\} = \sigma(AA^*) \setminus \{0\}$. Más aún, si $-\lambda \neq 0$ es un eigenvalor de A^*A (respectivamente AA^*) con eigenfunción f (respectivamente g), entonces $-\lambda$ es un eigenvalor de AA^* (respectivamente A^*A) con eigenfunción Af (respectivamente A^*g).*

En este teorema $\sigma(A)$ denota al espectro del operador A . Usando esto, podemos enunciar el siguiente resultado, que da una forma sencilla para modificar el potencial u y agregar un eigenvalor a la ecuación (1.2), dejando intactos a los anteriores (aunque $r(k)$ y las constantes de normalización son alteradas):

Teorema 8 *Sean $\varkappa > \varkappa_N$ y $\alpha > 0$. Sean*

$$g_\alpha(x) = \bar{\psi}(x, i\varkappa) + \alpha\varphi(x, i\varkappa),$$

y

$$u(x, +1) = u(x) - 2 \frac{d^2}{dx^2} \ln g_\alpha(x).$$

Entonces $u(x, +1)$ cumple (1.3) y tiene $N + 1$ eigenvalores $-\varkappa^2 < -\varkappa_N^2 < \dots < -\varkappa_1^2$ con las siguientes constantes de normalización

$$c_n(+1) = \frac{\varkappa + \varkappa_n}{\varkappa - \varkappa_n} c_n, \quad n = 1, \dots, N,$$

$$c_{N+1} = \frac{2\varkappa}{\alpha} t(i\varkappa),$$

coeficiente de transmisión

$$t(k, +1) = \frac{k + i\varkappa}{k - i\varkappa} t(k),$$

y coeficiente de reflexión

$$r(k, +1) = -\frac{k + i\mathcal{I}}{k - i\mathcal{I}}r(k).$$

Además, g_α^{-1} es la eigenfunción correspondiente a $-\mathcal{I}^2$.

Por último,

$$\begin{aligned}\bar{\psi}(x, k; +1) &= \frac{1}{ik - \beta} g_\alpha \frac{d}{dx} g_\alpha^{-1} \bar{\psi}(x, k), \\ \varphi(x, k; +1) &= -\frac{1}{ik - \beta} g_\alpha \frac{d}{dx} g_\alpha^{-1} \varphi(x, k).\end{aligned}$$

Prueba. Dividiremos la prueba en cuatro partes

I. Veamos primero que $u(x, +1)$ cumple (1.3), y $g_\alpha^{-1} \in L^2(\mathbb{R})$:

$$\begin{aligned}u(x, +1) &= u(x) - 2\frac{g_\alpha''}{g_\alpha} + 2\left(\frac{g_\alpha'}{g_\alpha}\right)^2 \\ &= -u(x) - 2\mathcal{I}^2 + 2\left(\frac{g_\alpha'}{g_\alpha}\right)^2.\end{aligned}$$

Tomamos ahora $g_\alpha = e^{-\mathcal{I}x} m_1(x, i\beta) + \alpha e^{\mathcal{I}x} m_2(x, i\mathcal{I})$; entonces

$$\frac{g_\alpha'}{g_\alpha} = \frac{m_2'(x, i\mathcal{I})}{m_2(x, i\mathcal{I})} + \mathcal{I} + O(e^{-\mathcal{I}x}) \text{ cuando } x \rightarrow \infty$$

de donde

$$2\left(\frac{g_\alpha'}{g_\alpha}\right)^2 = 2\mathcal{I}^2 + 4\mathcal{I}\left(\frac{m_2'(x, i\mathcal{I})}{m_2(x, i\mathcal{I})}\right) + 2\left(\frac{m_2'(x, i\mathcal{I})}{m_2(x, i\mathcal{I})}\right)^2 + O(e^{-\mathcal{I}x}).$$

Ahora bien, $\int_a^\infty |x| |m_2'(x, i\mathcal{I})| dx < \infty$, $a > 0$ y $0 < k_1 \leq m_2(x, i\mathcal{I}) \leq k_2$,

entonces, $\int_a^\infty |x| |u(x, +1)| dx < \infty$, $a > 0$, y $\int_{-\infty}^a |x| |u(x, +1)| dx < \infty$, $a < 0$.

Por lo tanto, $u(x, +1)$ cumple (1.3), ya que g_α es continua. También,

$$g_\alpha = \begin{cases} \frac{\alpha e^{\mathcal{I}x}}{t(i\mathcal{I})} (1 + o(1)) & \text{cuando } x \rightarrow \infty \\ \frac{e^{\mathcal{I}x}}{t(i\mathcal{I})} (1 + o(1)) & \text{cuando } x \rightarrow -\infty \end{cases}$$

de tal manera que la función $g_\alpha^{-1} \in L^2(\mathbb{R})$.

II Ahora veamos que $-\frac{d^2}{dx^2} + u + \mathcal{I}^2 = A^*A$, $A = g_\alpha \frac{d}{dx} g_\alpha^{-1}$:

$-\frac{d^2}{dx^2} + u + \mathcal{I}^2$ es el operador autoadjunto asociado con la clausura de la forma cuadrática

$$\int |\phi'|^2 + (u + \mathcal{I}^2) |\phi|^2, \quad \phi \in C_0^\infty(\mathbb{R}).$$

Consideremos la forma

$$\int \left| g_\alpha \frac{d}{dx} \frac{\phi}{g_\alpha} \right|^2, \quad \phi \in C_0^\infty(\mathbb{R}).$$

Veamos que $g_\alpha \frac{d}{dx} \frac{\phi}{g_\alpha} = \phi' - \left(\frac{g'_\alpha}{g_\alpha}\right)\phi \in L^2(\mathbb{R})$ porque $\frac{g'_\alpha}{g_\alpha} \in L$, de tal manera que la forma está bien definida. Para $\phi \in C_0^\infty(\mathbb{R})$ tenemos

$$\begin{aligned} \int (g_\alpha \frac{d}{dx} \frac{\bar{\phi}}{g_\alpha})(g_\alpha \frac{d}{dx} \frac{\phi}{g_\alpha}) &= - \int \bar{\phi} g_\alpha^{-1} \frac{d}{dx} g_\alpha^2 \frac{d}{dx} \frac{\phi}{g_\alpha} \\ &= - \int \bar{\phi}(\phi'' - (u + \varkappa^2)\phi) = \int |\phi'|^2 + (u + \varkappa^2)|\phi|^2. \end{aligned}$$

Se sigue que $\int |A\psi|^2$ es la forma cerrada asociada con $-\frac{d^2}{dx^2} + u + \varkappa^2$ dado que A está definido como $\overline{(g_\alpha \frac{d}{dx} g_\alpha^{-1})}$. Entonces, $-\frac{d^2}{dx^2} + u + \varkappa^2 = A^*A$, donde $D(A^*A) = \{f \in D(A) | Af \in D(A^*)\}$. Es claro que $D(A) = D(\overline{\frac{d}{dx}}) = \{\gamma \in L^2 | \gamma \text{ es absolutamente continua y } \gamma' \in L^2\}$ y

$$A\gamma = \gamma' - \left(\frac{g'_\alpha}{g_\alpha}\right)\gamma, \quad \gamma \in D(A).$$

III. Probemos ahora que $-\frac{d^2}{dx^2} + u(x, +1) + \varkappa^2 = AA^*$:

Como antes, $D(A^*) = D(\overline{\frac{d}{dx}})$ y

$$A^*\gamma = -g_\alpha^{-1} \frac{d}{dx} g_\alpha \gamma = -\gamma' - \left(\frac{g'_\alpha}{g_\alpha}\right)\gamma, \quad \gamma \in D(A^*) = D(A).$$

Consideremos el operador autoadjunto AA^* con $D(AA^*) = \{\gamma \in D(A^*) | A^*\gamma \in D(A)\}$. AA^* es el operador asociado con la clausura de la forma

$$\int \left| g_\alpha^{-1} \frac{d}{dx} g_\alpha \phi \right|^2 = \int |\phi'|^2 + (u(+1) + \varkappa^2)|\phi|^2, \quad \phi \in C_0^\infty,$$

donde

$$\begin{aligned} u(+1) + \varkappa^2 &= g_\alpha(g_\alpha^{-1})'' \\ &= [g_\alpha(g_\alpha^{-1})'' - (g_\alpha^{-1})g_\alpha''] + u + \varkappa^2 \\ &= [g_\alpha(g_\alpha^{-1})' - (g_\alpha^{-1})g_\alpha']' + u + \varkappa^2, \end{aligned}$$

es decir, $u(x, +1) = u(x) - 2\frac{d^2 \ln g_\alpha(x)}{dx^2}$. Esto quiere decir que AA^* es la extensión de Friedrichs para $-\frac{d^2}{dx^2} + u(+1) + \varkappa^2$, y III queda probada.

IV. Finalmente, obtengamos el espectro y datos de dispersión de $-\frac{d^2}{dx^2} + u(+1)$

Por II y III, $-\frac{d^2}{dx^2} + u + \varkappa^2 = A^*A$, $-\frac{d^2}{dx^2} + u(+1) + \varkappa^2 = AA^*$. Entonces, por el teorema 7,

$$b\sigma\left(-\frac{d^2}{dx^2} + u\right) \setminus \{-\varkappa^2\} = \sigma\left(-\frac{d^2}{dx^2} + u(+1)\right) \setminus \{-\varkappa^2\}$$

y $-\varkappa_N^2 < \dots < -\varkappa_1^2$ son eigenvalores de $-\frac{d^2}{dx^2} + u(+1)$ con eigenfunciones correspondientes $A\bar{\psi}(x, i\varkappa_n)$, $n = 1, \dots, N$.

Obtenemos que

$$\begin{aligned} A\bar{\psi}(x, i\varkappa_n) &= \bar{\psi}'(x, i\varkappa_n) - \left(\frac{g'_\alpha}{g_\alpha}\right) \bar{\psi}(x, i\varkappa_n) \\ &\sim -(\varkappa_n + \varkappa)e^{-\varkappa_n x} \text{ cuando } x \rightarrow \infty \end{aligned}$$

i.e., $A\bar{\psi}(x, i\varkappa_n) \rightarrow -(\varkappa_n + \varkappa)e^{-\varkappa_n x}$ cuando $x \rightarrow \infty$.

Entonces,

$$\bar{\psi}(x, i\varkappa_n, +1) = -\frac{1}{\varkappa_n + \varkappa} A\bar{\psi}(x, i\varkappa_n). \quad (1.70)$$

También

$$\begin{aligned} c_n(+1) &= \left(\int \bar{\psi}^2(x, i\varkappa_n, +1)\right)^{-1} \\ &= (\varkappa + \varkappa_n)^2 \left(\int [A\bar{\psi}(x, i\varkappa_n)] [A\bar{\psi}(x, i\varkappa_n)]\right)^{-1} \\ &= (\varkappa + \varkappa_n)^2 \left(\int \bar{\psi}(x, i\varkappa_n) A^* A \bar{\psi}(x, i\varkappa_n)\right)^{-1} \\ &= (\varkappa + \varkappa_n)^2 \left(\int \bar{\psi} \left[\left(-\frac{d^2}{dx^2} + u + \varkappa^2\right) \bar{\psi} \right]\right)^{-1} \\ &= \frac{\varkappa + \varkappa_n}{\varkappa - \varkappa_n} \left(\int \bar{\psi}^2\right)^{-1} = \frac{\varkappa + \varkappa_n}{\varkappa - \varkappa_n} c_n, \quad n = 1, \dots, N. \end{aligned}$$

Por I, $g_\alpha^{-1} \in L^2$. Además,

$$\left(-\frac{d^2}{dx^2} + u(+1) + \varkappa^2\right) g_\alpha^{-1} = -(g_\alpha \frac{d}{dx} g_\alpha^{-2} \frac{d}{dx} g_\alpha) g_\alpha^{-1} = 0.$$

de donde $-\varkappa^2$ es un eigenvalor para $-\frac{d^2}{dx^2} + u(+1)$ con eigenfunción g_α^{-1} .

Podemos ver que $g_\alpha^{-1} \sim \frac{t(i\varkappa)}{\alpha} e^{-\varkappa x}$ cuando $x \rightarrow \infty$, de donde $\bar{\psi}(x, i\varkappa, +1) = \frac{\alpha}{t(i\varkappa)} g_\alpha^{-1}$. Entonces $[g_\alpha, \varphi] = \left[\bar{\psi}, \varphi\right] = -\frac{2\varkappa}{t(i\varkappa)} = \text{const.}$ y

$$\begin{aligned} c_{N+1}^{-1}(+1) &= \int \bar{\psi}^2(x, i\varkappa, +1) = \frac{\alpha^2}{[t(i\varkappa)]^2} \int g_\alpha^{-2} \\ &= -\frac{\alpha^2}{2\varkappa t(i\varkappa)} \int \frac{[g_\alpha, \varphi]}{g_\alpha^2} = \frac{\alpha^2}{2\varkappa t(i\varkappa)} \int \frac{d}{dx} \left(\frac{\varphi}{g_\alpha}\right) \\ &= \frac{\alpha^2}{2\varkappa t(i\varkappa)} (\alpha^{-1} - 0), \end{aligned}$$

de donde $c_{N+1}(+1) = 2\frac{\varkappa}{\alpha}t(i\varkappa)$.

Para k arbitraria, (1.70) se vuelve

$$\bar{\psi}(x, k, +1) = (ik - \varkappa)^{-1}g_\alpha \frac{d}{dx}g_\alpha^{-1}\bar{\psi}(x, k),$$

y por consiguiente

$$\varphi(x, k, +1) = -(ik - \varkappa)^{-1}g_\alpha \frac{d}{dx}g_\alpha^{-1}\varphi(x, k).$$

Entonces,

$$\bar{\psi}(x, k, +1) \sim \frac{1}{t}\left(\frac{ik + \varkappa}{ik - \varkappa}\right)e^{ikx} + \left[-\frac{l}{t}\right]e^{-ikx} \text{ cuando } x \rightarrow \infty,$$

de tal manera que

$$t(k, +1) = \frac{k + i\varkappa}{k - i\varkappa}t(k),$$

$$r(k, +1) = -\frac{k + i\varkappa}{k - i\varkappa}r(k).$$

■

El siguiente teorema nos dice cómo disminuir el número eigenvalores.

Teorema 9 Sea $-\frac{d^2}{dx^2} + u(x)$ como en el teorema 8. Sea $u(x, -1) = u(x) - 2\frac{d^2}{dx^2} \ln \bar{\psi}(x, i\varkappa_N)$. Entonces, $u(x, -1)$ cumple (1.3) y $-\frac{d^2}{dx^2} + u(x, -1)$ tiene $N - 1$ eigenvalores $-\varkappa_{N-1}^2 < \dots < -\varkappa_1^2$ con constantes de normalización

$$c_n(-1) = \frac{\varkappa_N - \varkappa_n}{\varkappa_N + \varkappa_n}c_n, \quad n = 1, \dots, N - 1.$$

Además,

$$t(k, -1) = \frac{k - i\varkappa_N}{k + i\varkappa_N}t(k),$$

$$r(k, -1) = -\frac{k - i\varkappa_N}{k + i\varkappa_N}r(k),$$

$$\bar{\psi}(x, k, -1) = \frac{1}{ik + \varkappa_N}\bar{\psi}(x, i\varkappa_N)\frac{d}{dx}\frac{\bar{\psi}(x, k)}{\bar{\psi}(x, i\varkappa_N)},$$

$$\varphi(x, k, -1) = \frac{1}{ik + \varkappa_N}\bar{\psi}(x, i\varkappa_N)\frac{d}{dx}\frac{\varphi(x, k)}{\bar{\psi}(x, i\varkappa_N)}.$$

Prueba. La prueba de este teorema es análoga al anterior, y sólo tenemos que verificar que $-\varkappa_N^2$ no es un eigenvalor para $u(-1)$, para lo cual veamos que $\bar{\psi}(x, i\varkappa_N) > 0$ porque $-\varkappa_N^2$ es el eigenvalor menor para u . Sabemos que $-\frac{d^2}{dx^2} + u + \varkappa_N^2 = A^*A$ con $A = \bar{\psi}(x, i\varkappa_N)\frac{d}{dx}\bar{\psi}(x, i\varkappa_N)^{-1}$, así que $-\frac{d^2}{dx^2} + u(-1) + \varkappa_N^2 = AA^*$. Si $(-\frac{d^2}{dx^2} + u(-1) + \varkappa_N^2)h = AA^*h = 0$, $h \in L^2(\mathbb{R})$, entonces

$A^*h = \bar{\psi}^{-1}(x, i\kappa_N) \frac{d}{dx} \bar{\psi}(x, i\kappa_N) h = 0$, y $h = \frac{\text{const.}}{\bar{\psi}(x, i\kappa_N)}$. Pero $\bar{\psi}^{-1} \notin L^2(\mathbb{R})$, por lo que la constante es cero, y $h = 0$. ■

Usando el teorema 9, y un teorema de Levinson (véase [14]), podemos ahora probar el teorema más importante de este capítulo:

Teorema 10 *Un potencial u que cumple (1.3) está determinado por su coeficiente de reflexión, sus eigenvalores y sus constantes de normalización.*

Prueba. Sean $-\kappa_N^2 < \dots < -\kappa_1^2$ los eigenvalores y c_1, \dots, c_N las constantes de normalización asociadas. De acuerdo al teorema de Levinson, el resultado es verdadero cuando no hay eigenvalores; ahora supongamos que es válido para $N-1$ eigenvalores, y lo probaremos para N . Por el teorema 9 y la hipótesis de inducción, $u(x, -1)$ está determinado por $r(k, -1) = -\frac{k-i\kappa_N}{k+i\kappa_N} r(k)$, los eigenvalores $-\kappa_{N-1}^2 < \dots < -\kappa_1^2$ y las constantes de normalización $c_n(-1) = \frac{\kappa_N - \kappa_n}{\kappa_N + \kappa_n} c_n$, $n = 1, \dots, N-1$. En particular, $u(x, -1)$ está determinado por $r, \kappa_1, \dots, \kappa_N, c_1, \dots, c_N$. Además,

$$\left(-\frac{d^2}{dx^2} + u(-1) + \kappa_N^2 \right) \bar{\psi}^{-1}(x, i\kappa_N) = \left(-\bar{\psi}(x, i\kappa_N) \frac{d}{dx} \bar{\psi}^{-2}(x, i\kappa_N) \frac{d}{dx} \bar{\psi}^{-1}(x, i\kappa_N) \right) = 0$$

de donde $\bar{\psi}^{-1}(x, i\kappa_N) = \nu \left(\bar{\psi}(x, i\kappa_N, -1) + \alpha \varphi(x, i\kappa_N, -1) \right)$ para ciertas constantes ν y α . Además,

$$\begin{aligned} c_N^{-1} &= \int \left| \bar{\psi}(x, i\kappa_N) \right|^2 = \frac{1}{\nu^2} \int \left(\bar{\psi}(-1) + \alpha \varphi(-1) \right)^{-2} \\ &= \frac{1}{\nu^2 w} \int \frac{\left[\bar{\psi}(-1), \bar{\psi}(-1) + \alpha \varphi(-1) \right]}{\left(\bar{\psi}(-1) + \alpha \varphi(-1) \right)^2} \\ &= \frac{1}{\nu^2 w} \int \frac{d}{dx} \left(\frac{\bar{\psi}(-1)}{\bar{\psi}(-1) + \alpha \varphi(-1)} \right) = \frac{1}{\nu^2 w}, \end{aligned}$$

donde

$$w = \left[\bar{\psi}(-1), \bar{\psi}(-1) + \alpha \varphi(-1) \right] = \alpha \left(\frac{-2\kappa_N}{t(i\kappa_N, -1)} \right) = \text{const.},$$

es decir, $\alpha \nu^2 = \frac{t(i\kappa_N, -1) c_N}{2\kappa_N}$. Más aún, cuando $x \rightarrow \infty$,

$$\bar{\psi}(x, i\kappa_N, -1) \sim e^{-\kappa_N x}, \quad \varphi(x, i\kappa_N, -1) \sim \frac{1}{t(i\kappa_N, -1)} e^{\kappa_N x},$$

$$\bar{\psi}^{-1}(x, i\kappa_N, -1) \sim e^{\kappa_N x}$$

de donde

$$\alpha \nu = t(i\kappa_N, -1).$$

$t(i\kappa_N, -1)$ se calcula $t(i\kappa_N, -1) = \frac{1}{2i\kappa_N} \text{res}(t(k))|_{k=i\kappa_N}$. Podemos ahora resolver para α y ν , que determina $\bar{\psi}(x, i\kappa_N)$ y por lo tanto

$$u(x) = u(x, -1) + 2 \frac{d^2}{dx^2} \ln \bar{\psi}(x, i\kappa_N).$$

Esto completa la inducción. ■

Capítulo 2

Partición de potenciales

2.1 Factorización de la matriz de coeficientes

La idea de hacer una partición del eje real para analizar al potencial $u(x)$ a pedazos tiene relativamente poco tiempo usándose. Haciendo este análisis (véase [5]), se puede llegar a expresar los coeficientes de dispersión de $u(x)$ en función de los coeficientes de dispersión de los "pedazos" de $u(x)$. Ahora bien, estos "pedazos" de $u(x)$ tienen, o bien soporte compacto, o bien soporte en una semirrecta, por lo que podemos reconstruir cada "pedazo" de $u(x)$ con sólo saber su coeficiente de reflexión.

Haremos una partición de \mathbb{R} para analizar el potencial $u(x)$ en el problema de dispersión. Sean $x_1, \dots, x_n \in \mathbb{R}$ con $x_1 < x_2 < \dots < x_n$ y $x_0 = -\infty$, $x_{n+1} = \infty$, y definimos $I_n = (x_{n-1}, x_n)$ y $u_n(x) = u(x)\chi_{(x_{n-1}, x_n)}$, donde χ_I es la función característica del intervalo I , i.e., $\chi_I(x) = 1$ si $x \in I$, y $\chi_I(x) = 0$ si $x \notin I$. De estas definiciones, tenemos que $u(x) = \sum_{n=1}^{N+1} u_n(x)$.

Teorema 11 *Sea $u_n(x)$ definido como arriba y $\{x_n | x_n < x_{n+1} \forall n \in \{1, \dots, N\}\}$ un conjunto de puntos para hacer una partición de \mathbb{R} , y definamos $\Lambda_n(k) = \begin{bmatrix} a_n(k) & -b_n(k) \\ -\bar{b}_n(k) & \bar{a}_n(k) \end{bmatrix}$ donde $a_n(k)$ y $b_n(k)$ son los coeficientes definidos antes para $u_n(x)$, y $\Lambda(k) = \begin{bmatrix} a(k) & -b(k) \\ -\bar{b}(k) & \bar{a}(k) \end{bmatrix}$ donde $a(k)$ y $b(k)$ son los coeficientes antes definidos para $u(x) = u(x) = \sum_{n=1}^N u_n(x)$. Entonces, $\Lambda(k) = \prod_{n=1}^N \Lambda_n(k)$.*

Es conveniente hacer la aclaración de que $\Lambda(k)$ no es la matriz de transición $T(k)$ que definimos en la sección 1.1, ya que $b(k)$ y $\bar{b}(k)$ tienen cambiado el signo, esta nueva matriz se introduce porque es la adecuada para la factorización propuesta en el teorema 11, ya que no se tiene algo análogo para $T(k)$.

Prueba. Sean $\phi_j(x, k)$ y $\xi_j(x, k)$ dos soluciones linealmente independientes en el intervalo I_j . Entonces, podemos expresar a las soluciones:

$$\begin{aligned}\varphi(x, k) &= c_j(k)\phi_j(x, k) + d_j(k)\xi_j(x, k) \\ \bar{\psi}(x, k) &= e_j(k)\phi_j(x, k) + f_j(k)\xi_j(x, k)\end{aligned}\quad (2.1)$$

donde $c_j(k)$, $d_j(k)$, $e_j(k)$ y $f_j(k)$ son los coeficientes a determinar, y $\varphi(x, k)$ y $\bar{\psi}(x, k)$ son las soluciones definidas en el capítulo 1. Ahora, definimos:

$$\Gamma_j(x, k) = \begin{bmatrix} \phi_j(x, k) & \xi_j(x, k) \\ \phi_j'(x, k) & \xi_j'(x, k) \end{bmatrix} \quad (2.2)$$

$$M(x, k) = \begin{bmatrix} e^{ikx} & e^{-ikx} \\ ik e^{ikx} & -ik e^{-ikx} \end{bmatrix} \quad (2.3)$$

$$A_j(k) = \begin{bmatrix} c_j(k) & e_j(k) \\ d_j(k) & f_j(k) \end{bmatrix} \quad (2.4)$$

Por la continuidad de $\varphi(x, k)$, $\varphi'(x, k)$, $\bar{\psi}(x, k)$ y $\bar{\psi}'(x, k)$ en x_{j-1} y x_j , llegamos a que:

$$\Gamma_{j-1}(x_{j-1}, k)A_{j-1}(k) = \Gamma_j(x_{j-1}, k)A_j(k) \quad (2.5)$$

$$\Gamma_j(x_j, k)A_j(k) = \Gamma_{j+1}(x_j, k)A_{j+1}(k) \quad (2.6)$$

De (2.5) y (2.6), obtenemos:

$$A_1(k) = \left[\prod_{j=2}^N \Gamma_{j-1}(x_j, k)^{-1} \Gamma_j(x_j, k) \right] \times A_{N+1}(k) \quad (2.7)$$

Ahora, hagamos que $x_1 \rightarrow -\infty$ y $x_N \rightarrow \infty$, y sean $\phi_1(x, k) = \phi_{N+1}(x, k) = e^{ikx}$ y $\xi_1(x, k) = \xi_{N+1}(x, k) = e^{-ikx}$. Entonces, tenemos que:

$$A_1(k) = \begin{bmatrix} 0 & a(k) \\ 1 & -\bar{b}(k) \end{bmatrix} \quad (2.8)$$

$$A_{N+1}(k) = \begin{bmatrix} b(k) & 1 \\ a(k) & 0 \end{bmatrix} \quad (2.9)$$

De (2.7), (2.8) y (2.9), obtenemos que:

$$\Lambda(k) = \prod_{j=2}^N \Gamma_{j-1}(x_j, k)^{-1} \Gamma_j(x_j, k) \quad (2.10)$$

En particular, para el potencial $u_n(x)$, tenemos:

$$\Delta_{0,n-1}(x, k) = M(x, k)$$

$$\Delta_{n,N+1}(x, k) = M(x, k)$$

donde $\Delta_{i,j}(x, k)$ es la matriz $\Gamma(x, k)$ para el intervalo (x_i, x_j) . Usando que:

$$\Lambda_n(k) = M(x_{n-1}, k)^{-1} \Gamma_{n-1}(x_{n-1}, k) \Gamma_n(x_n, k)^{-1} M(x_n, k) \quad (2.11)$$

en (2.10), llegamos a que:

$$\Lambda(k) = \prod_{n=1}^N \Lambda_n(k) \quad (2.12)$$

■

El análisis hecho en el teorema anterior es válido para $k \in \mathbb{R}$; para $k \in \mathbb{C}$, en general, no podemos asegurar que la factorización dada nos arroje valores válidos para $a(k)$ y $b(k)$. Esto es debido a que las soluciones $\varphi(x, k)$ y $\bar{\psi}(x, k)$ están definidas para el espectro continuo, y usando estas funciones y sus propiedades es como hemos probado el teorema. Pero el espectro continuo es el eje real en \mathbb{C} , por lo que no es de esperar que esta factorización sea válida fuera de este eje.

2.2 Cálculo del número de eigenvalores de L

Uno de los temas más estudiados recientemente para el problema de dispersión es el de determinar el número de eigenvalores de L para un potencial dado. Este problema no es sencillo de analizar, e incluso hay que hacer la distinción de cierto tipo de potenciales. Para ello, utilizaremos la siguiente

Definición 12 Sea $t(k)$ el coeficiente de transmisión para $u(x)$. Decimos que $u(x)$ es genérico si $t(0) = 0$, y decimos que es excepcional si $t(0) \neq 0$.

A continuación, demostraremos dos proposiciones importantes en el análisis del número de eigenvalores de L .

Primero, consideremos el par de ecuaciones generalizadas de Schrödinger:

$$\begin{aligned} -\frac{d^2}{dx^2} \psi_1(x, k) + u_1(x, k) \psi_1(x, k) &= -k^2 \psi_1(x, k), \\ -\frac{d^2}{dx^2} \psi_2(x, k) + u_2(x, k) \psi_2(x, k) &= -k^2 \psi_2(x, k), k \geq 0 \end{aligned} \quad (2.13)$$

La primera proposición muestra la relación entre los ceros de la solución a la primera ecuación y los ceros de la solución a la segunda ecuación.

Proposición 13 *Supongamos que $u_1(\cdot, k), u_2(\cdot, k) \in L^1(\mathbb{R})$ si $k > 0$, $u_1(\cdot, 0), u_2(\cdot, 0)$ cumplen (1.3), y $u_1(x, k_2) \leq u_2(x, k_1)$ si $0 \leq k_1 \leq k_2$. Sean $\psi_1(x, k)$ y $\psi_2(x, k)$ soluciones no triviales de (6.1a) y (6.1b), respectivamente. Entonces:*

(i) *Supongamos que $\psi_2(x, k_2)$ tiene dos ceros consecutivos a y b tales que $a < b$. Si $0 \leq k_1 \leq k_2$, entonces $\psi_1(x, k_1)$ tiene al menos un cero en (a, b) . Si $0 \leq k_1 = k_2$ y $u_1(x, k_1) \neq u_2(x, k_1)$ en (a, b) , entonces $\psi_1(x, k_1)$ tiene al menos un cero en (a, b) . Si $0 \leq k_1 = k_2$, $u_1(x, k_1) = u_2(x, k_1)$ en (a, b) , y $\psi_1(x, k_1)$ y $\psi_2(x, k_1)$ son linealmente independientes en (a, b) , entonces $\psi_1(x, k_1)$ tiene exactamente un cero en (a, b) .*

(ii) *Supongamos que $\psi_2(x, k_2)$ continúa acotada cuando $x \rightarrow \infty$. Sean a el mayor cero de $\psi_2(x, k_2)$ y $b = \infty$. Entonces (i) se cumple si reemplazamos el intervalo (a, b) por (a, ∞) .*

(iii) *Si $0 \leq k_1 \leq k_2$, $\psi_2(x, k_2)$ está acotada cuando $x \rightarrow \infty$, $\psi_1(x, k_1)$ no tiene ceros en \mathbb{R} , entonces $\psi_2(x, k_2)$ no tiene ceros en \mathbb{R} .*

(iv) *Si $\psi_2(x, k_2)$ está acotada cuando $x \rightarrow -\infty$ y a es el menor cero de $\psi_2(x, k_2)$, entonces (i) se cumple si reemplazamos el intervalo (a, b) por $(-\infty, a)$.*

Prueba. (i) es conocido (véase [15]), y la prueba de (iv) es análoga a las de (ii) y (iii), así que sólo probaremos estas dos últimas.

(ii) Procederemos por contradicción. Sin pérdida de generalidad, podemos suponer que $\psi_1(x, k_1)$ y $\psi_2(x, k_2)$ son estrictamente positivas en (a, ∞) . Cuando $b > a$, siendo a el mayor cero de $\psi_2(x, k_2)$, de (2.13) tenemos

$$\begin{aligned} & \psi_2(b, k_2)\psi_1'(b, k_1) - \psi_2'(b, k_2)\psi_1(b, k_1) + \psi_2'(a, k_2)\psi_1(a, k_1) \\ &= \int_a^b [u_1(x, k_1) - u_2(x, k_2) + k_1^2 - k_2^2] \psi_1(x, k_1)\psi_2(x, k_2)dx \end{aligned} \quad (2.14)$$

Ahora bien, usando las propiedades asintóticas de las soluciones, y que supusimos que son estrictamente positivas en (a, ∞) , para algún $c_2 > 0$

$$\psi_2(x, k_2) = c_2 e^{-k_2 x} + o(e^{-k_2 x}), \quad \psi_2'(x, k_2) = -c_2 k_2 e^{-k_2 x} + o(e^{-k_2(x)}), \quad x \rightarrow \infty \quad (2.15)$$

Además, $\psi_1(x, k_1)$ no está acotada cuando $x \rightarrow \infty$, y para algún $c_1 > 0$

$$\psi_1(x, k_1) = c_1 e^{k_1 x} + o(e^{k_1 x}), \quad \psi_1'(x, k_1) = c_1 k_1 e^{k_1 x} + o(e^{k_1 x}), \quad x \rightarrow \infty \quad (2.16)$$

Si $k_1 = 0$ y $\psi_1(x, 0)$ no está acotada cuando $x \rightarrow \infty$, entonces, para algún $\bar{c}_1 > 0$

$$\psi_1(x, 0) = \bar{c}_1 x + o(x), \quad \psi_1'(x, 0) = \bar{c}_1 + o(1), \quad x \rightarrow \infty \quad (2.17)$$

Si $\psi_2(x, k)$ está acotada cuando $x \rightarrow \infty$, entonces para algún $\bar{c}_2 > 0$

$$\psi_2(x, 0) = \bar{c}_2 + o(1), \quad \psi_2'(x, 0) = o\left(\frac{1}{x}\right), \quad x \rightarrow \infty \quad (2.18)$$

Usando las ecuaciones (2.15) a (2.18) podemos hacer que $b \rightarrow \infty$ en (2.14). Cuando $0 \leq k_1 \leq k_2$, el límite cuando $b \rightarrow \infty$ del lado derecho de (2.14) existe y es no positivo, y es igual a cero cuando $k_1 = k_2$ y $u_1(k_1, x) = u_2(k_2, x)$ en (a, ∞) . Si $0 \leq k_1 < k_2$, entonces cuando $b \rightarrow \infty$ el lado izquierdo de (2.14) es igual a $\psi_2'(a, k_2)\psi_1(a, k_1)$, que es no negativo. Entonces, tenemos una contradicción, así que $\psi_1(x, k_1)$ debe tener un cero en (a, ∞) . Si $0 < k_1 = k_2$ y $\psi_1(x, k)$ no está acotada, entonces cuando $b \rightarrow \infty$ el lado izquierdo de (2.14) es igual a $2c_1c_2k_1 + \psi_2'(a, k_1)\psi_1(a, k_1)$, que es estrictamente positivo, y el lado derecho es no positivo y de nuevo tenemos una contradicción. Si $0 < k_1 = k_2$ y $\psi_1(x, k_1)$ está acotada, entonces cuando $b \rightarrow \infty$ el lado izquierdo de (2.14) es igual a $\psi_2'(a, k_2)\psi_1(a, k_1)$, que es no negativo. Si además $u_1(x, k_1) \neq u_2(x, k_2)$ en (a, ∞) , entonces el lado izquierdo es estrictamente negativo y tenemos una contradicción.

Si $u_1(x, k_1) = u_2(x, k_2)$ en (a, ∞) , entonces $\psi_1(a, k_1) > 0$ ya que $\psi_1(x, k_1)$ y $\psi_2(x, k_2)$, y por lo tanto, el lado izquierdo de (2.14) es estrictamente positivo mientras el lado derecho es cero. En este caso, por (i), sólo puede haber un cero de $\psi_1(x, k_1)$ en (a, ∞) . Si $0 = k_1 = k_2$ y $\psi_1(0, k)$ no está acotada, entonces por (2.18) el lado izquierdo de (2.14) se va a $\bar{c}_1\bar{c}_2 + \psi_2'(a, 0)\psi_1(a, 0)$ cuando $b \rightarrow \infty$, que es estrictamente positivo. Si $0 = k_1 = k_2$ y $\psi_1(0, k)$ está acotada, entonces el límite cuando $b \rightarrow \infty$ del lado izquierdo de (2.14) es $\psi_2'(a, 0)\psi_1(a, 0)$ que es no negativo. Si $u_1(x, 0) \neq u_2(x, 0)$ en (a, ∞) , entonces el lado derecho es estrictamente negativo, y si $u_1(x, 0) = u_2(x, 0)$ en (a, ∞) , entonces el lado derecho es cero y el lado izquierdo es estrictamente positivo debido a que $\psi_1(x, 0)$ y $\psi_2(x, 0)$ son linealmente independientes, lo cual representa una contradicción en ambos casos. Como en (i), si $u_1(x, 0) = u_2(x, 0)$ en (a, ∞) , entonces $\psi_1(x, 0)$ tiene exactamente un cero en (a, ∞) .

(iii) Supongamos que $\psi_2(x, k_2)$ tiene ceros, y el mayor es a . Entonces, de (i) y (ii), se sigue que $\psi_1(x, k_1)$ tiene un cero a la derecha de a , contradiciendo las hipótesis de (iii). Nos falta ver qué pasa cuando $k_2 = k_1$, $u_1(x, k_1) = u_2(x, k_2)$ en (a, ∞) y $\psi_1(x, k_1)$ y $\psi_2(x, k_1)$ son linealmente independientes en (a, ∞) , pero $\psi_1(a, k_1) = 0$ implica que $\psi_2(a, k_1) = 0$, lo que es una contradicción. ■

La siguiente proposición es importante en el cálculo del número de eigenvalores de L , ya que después utilizaremos particiones para calcular N a partir del número de eigenvalores de cada "pedazo" de $u(x)$.

Proposición 14 (i) Sean $u(x) \in L^1(\mathbb{R})$ y $\beta > 0$. Entonces, el número de ceros de $\bar{\psi}(x, i\beta)$ es igual al número de eigenvalores de L contenidos en el intervalo $(-\infty, -\beta^2)$.

(ii) Supongamos que $u(x)$ satisface (1.3). Entonces el número de ceros de $\bar{\psi}(x, 0)$ es igual al número de eigenvalores de L .

Prueba. (i) Como suponemos $u(x) \in L^1(\mathbb{R})$, puede haber un número infinito de eigenvalores de L acumulándose en cero. Todos esos eigenvalores son negativos, de la forma $-\varkappa_j^2$. Acomodémoslos de tal manera que $\varkappa_j < \varkappa_{j+1} < 0$. Sabemos

que $\bar{\psi}(x, i\kappa_j)$ tiene $j - 1$ ceros. Entonces sólo necesitamos considerar los ceros de $\bar{\psi}(x, i\beta)$ donde $\beta \neq \kappa_j \forall j$. Si $\beta > \kappa_1$, entonces de la proposición 13 (iii), haciendo $u_1 = u_2 = u$, $k_1 = \kappa_1$, $k_2 = \beta$, $\psi_1(x, k_1) = \bar{\psi}(x, i\kappa_1)$ y $\psi_2(x, k_2) = \bar{\psi}(x, i\beta)$, se sigue que $\bar{\psi}(x, i\beta)$ no tiene ceros. Si $\beta \in (\kappa_j, \kappa_{j+1})$, entonces por la proposición 13 (i) y (ii), haciendo $k_1 = \beta$ y $k_2 = \kappa_j$, observamos que $\bar{\psi}(x, i\beta)$ tiene al menos j ceros. Pero también, por la proposición 13, vemos que $\bar{\psi}(x, i\beta)$ no puede tener más que j ceros porque su número de ceros es no decreciente cuando β decrece, y entonces $\bar{\psi}(x, i\beta)$ tiene exactamente j ceros. Entonces, $\bar{\psi}(x, i\beta)$ tiene j ceros cuando $\beta \in (\kappa_{j+1}, \kappa_j)$. Esto prueba (i) cuando $N = \infty$, porque todos los eigenvalores son negativos y reales, por lo que sus raíces siempre caen en el eje imaginario positivo.

Si N es finito, entonces nos falta considerar el caso cuando $\beta \in (0, \kappa_N)$. Usando el lema 1 en la página 91 de la referencia [13] concluimos que $\bar{\psi}(x, i\beta)$ tiene exactamente N ceros porque si tuviera más ceros uno podría encontrar un subespacio de dimensión al menos $N + 1$ en el que el valor esperado de $(-\frac{d^2}{dx^2} + u - \beta v)$ es menor o igual que $-\beta^2$, y esto implicaría la existencia de al menos $N + 1$ eigenvalores menores o iguales que $-\beta^2$.

(ii) En este caso la condición de que $u(x)$ cumpla (1.3) garantiza que N es finito. Sólo nos queda considerar el caso $\beta = 0$. Notemos que $\bar{\psi}(x, 0)$ no puede tener más que N ceros porque $\bar{\psi}(x, i\beta)$ tiene exactamente N ceros cuando β es suficientemente pequeño, y por que cuando $\beta \rightarrow 0$, $\bar{\psi}(x, i\beta) \rightarrow \bar{\psi}(x, 0)$ uniformemente en intervalos compactos. Por otro lado, haciendo en (2.13) $k_1 = 0$, $k_2 = \beta$, $u_1(x, k_1) = u(x)$, $u_2(x, k_2) = u(x) - \beta v(x)$, y $\psi_2(x, k_2) = \bar{\psi}(x, \beta)$, y usando la proposición 13 vemos que $\bar{\psi}(x, 0)$ tiene al menos N ceros. Por lo tanto, $\bar{\psi}(x, 0)$ tiene exactamente N ceros. ■

Habiendo probado estas dos proposiciones, estudiaremos ahora cómo podemos calcular N haciendo una partición del potencial como se explicó en la sección 2.1. Utilizaremos la siguiente notación. N_j es el número de eigenvalores de L para u_j ; $\varphi_j(x, k)$ y $\bar{\psi}_j(x, k)$ son las funciones definidas en la sección 1.2 correspondientes a u_j ; n_j es el número de ceros que tiene $\varphi_j(x, 0)$ en $(-\infty, x_j)$, y m_j es el número de ceros que tiene $\bar{\psi}_j(x, 0)$ en (x_{j-1}, ∞) .

Notemos que en (x_j, ∞) la función $\bar{\psi}_j(x, 0)$ es igual a $\bar{\psi}'_j(x_j, 0)(x - x_j) + \bar{\psi}_j(x, 0)$ y que esta función lineal tiene la raíz $x = x_j - \frac{\bar{\psi}_j(x_j, 0)}{\bar{\psi}'_j(x_j, 0)}$ que cae en $[x_j, \infty)$ precisamente si $\bar{\psi}_j(x_j, 0) = 0$ o $\bar{\psi}_j(x_j, 0)\bar{\psi}'_j(x_j, 0) < 0$; en este caso, $N_j = n_j + 1$. Por otra parte, si $\bar{\psi}_j(x_j, 0) \neq 0$ o $\bar{\psi}_j(x_j, 0)\bar{\psi}'_j(x_j, 0) > 0$, entonces $\bar{\psi}_j(x, 0)$ no tiene ceros en $[x_j, \infty)$, es decir, todos sus ceros están en $(-\infty, x_j)$, y por lo tanto, $N_j = n_j$. Haciendo un análisis similar para $\varphi_j(x, 0)$, obtenemos:

$$N_j = \begin{cases} n_j, & \text{si } \bar{\psi}_j(x_j, 0) \neq 0 \text{ o } \bar{\psi}_j(x_j, 0)\bar{\psi}'_j(x_j, 0) > 0 \\ n_j + 1, & \text{si } \bar{\psi}_j(x_j, 0) = 0 \text{ o } \bar{\psi}_j(x_j, 0)\bar{\psi}'_j(x_j, 0) < 0 \end{cases} \quad (2.19)$$

$$N_j = \begin{cases} m_j, & \text{si } \varphi_j(x_j, 0) \neq 0 \text{ o } \varphi_j(x_j, 0)\varphi'_j(x_j, 0) < 0 \\ m_j + 1, & \text{si } \varphi_j(x_j, 0) = 0 \text{ o } \varphi_j(x_j, 0)\varphi'_j(x_j, 0) > 0 \end{cases} \quad (2.20)$$

Ahora sí, estamos listos para enunciar el siguiente

Teorema 15 *Supongamos que $u(x)$ cumple (1.3), y sean $x_1, \dots, x_n \in \mathbb{R}$ con $x_1 < x_2 < \dots < x_n$ y $x_0 = -\infty$, $x_{n+1} = \infty$, y definimos $I_n = (x_{n-1}, x_n)$ y $u_n(x) = u(x)\chi_{(x_{n-1}, x_n)}$, donde χ_I es la función característica del intervalo I , i.e., $\chi_I(x) = 1$ si $x \in I$, y $\chi_I(x) = 0$ si $x \notin I$. Entonces:*

$$1 - p + \sum_{j=1}^p N_j \leq N \leq \sum_{j=1}^p N_j, p = 1, 2, \dots \quad (2.21)$$

Prueba. Es suficiente con probarlo para $p = 2$ porque el resto se puede probar por inducción. Sea $y(x)$ una solución de (1.4) para $k = 0$ tal que $y(x_1) = 1$ y $y'(x_1) = 0$. Entonces, $y(x) = \bar{\psi}_2(x, 0)$ en $x \geq x_1$ y $y(x) = \varphi_1(x, 0)$ en $x \leq x_1$. Entonces $y(x)$ tiene N_1 ceros en $(-\infty, x_1)$ y N_2 ceros en (x_1, ∞) , es decir, tiene $N_1 + N_2$ ceros en total. Esto prueba (2.21). Para ver que ambas desigualdades se cumplen, véase [4], o bien, el siguiente teorema. ■

Podemos ahora preguntarnos qué podemos decir cuando la partición está hecha sólo en dos fragmentos, ya que, para el caso particular, de los potenciales simétricos, haremos una partición del eje real en $x = 0$. Sea

$$Z(x_1) = \frac{\bar{\psi}_2(x_1, 0)}{\bar{\psi}'_2(x_1, 0)} - \frac{\varphi_1(x_1, 0)}{\varphi'_1(x_1, 0)}.$$

Tenemos el siguiente teorema:

Teorema 16 *Supongamos que $u(x)$ está dividido en dos fragmentos. Entonces:*

(a) *Si $\varphi'_1(x_1, 0) \neq 0$, $\bar{\psi}'_2(x_1, 0) \neq 0$ y $Z(x_1) \geq 0$, entonces $N = N_1 + N_2 - 1$; si $Z(x_1) < 0$, entonces $N = N_1 + N_2$.*

(b) *Si $\varphi'_1(x_1, 0) = 0$ o $\bar{\psi}'_2(x_1, 0) = 0$, entonces $N = N_1 + N_2$.*

Prueba. (a) Para determinar N , contaremos el número de ceros de $\varphi_1(x, 0)$ en $[x_1, \infty]$. Esto lo haremos usando que $\bar{\psi}(x, 0) = \bar{\psi}_2(x, 0)$ en $[x_1, \infty)$ y $\varphi(x, 0) = \varphi_1(x, 0)$ en $(-\infty, x_1]$. Nosotros sabemos que hay n_1 ceros de $\varphi_1(x, 0)$ en $(-\infty, x_1)$, donde n_1 está relacionada con N_1 por (2.19). Multiplicando $\bar{\psi}_2(x, 0)$ y $\varphi_1(x, 0)$ por ciertas constantes α y β , podemos hacer que $y_2(x, 0) = \alpha\bar{\psi}_2(x, 0)$ y $y_1(x, 0) =$

$\beta\varphi_1(x, 0)$ satisfagan que $y_2'(x_1, 0) = y_1'(x_1, 0) = 1$, y sean $w_2(x, 0) = \alpha\bar{\psi}(x, 0)$ y $w_1(x, 0) = \beta\varphi(x, 0)$. Entonces $Z(x_1)$ es

$$Z(x_1) = y_2(x_1, 0) - y_1(x_1, 0).$$

Primero supongamos que $Z(x_1) > 0$, es decir, $W[w_2(\cdot, 0), w_1(\cdot, 0)](x_1) > 0$. Supongamos que $y_2(x, 0)$ tiene sus ceros en z_j para $j = 1, \dots, m_2$, con $x_1 < z_1 < \dots < z_{m_2}$. Si $y_2(x_1, 0) > y_1(x_1, 0) > 0$, entonces $y_1(x_1, 0)$ tiene m_2 ceros en (x_1, ∞) , porque, por un argumento conocido del Wronskiano, no hay ceros en (x_1, z_1) y hay exactamente un cero en cada uno de los intervalos $(z_1, z_2), (z_2, z_3), \dots, (z_{m_2}, \infty)$. Para ver que hay un cero en (z_{m_2}, ∞) , podemos usar que para el caso genérico:

$$\bar{\psi}(x, 0) = 1 + o(1), \quad \bar{\psi}'(x, 0) = o\left(\frac{1}{x}\right)$$

$$\varphi(x, 0) = cx + o(x), \quad \varphi'(x, 0) = c + o(1) \quad \text{para alguna constante } c \neq 0, \quad (2.22)$$

para ver que $W[w_2(\cdot, 0), w_1(\cdot, 0)](x) = \alpha\beta c > 0$. Por lo tanto, α y βc tienen el mismo signo. Si además $\alpha > 0$, entonces $y_2'(z_{m_2}, 0) > 0$ y por lo tanto $w_1(z_{m_2}, 0) < 0$. En contraparte, si $\alpha < 0$, entonces $y_2'(z_{m_2}, 0) < 0$ y por lo tanto $w_1(z_{m_2}, 0) > 0$. Como $w_1(x, 0) = \beta cx + o(x)$ cuando $x \rightarrow \infty$, se sigue que $w_1(x, 0)$ debe tener un cero en (z_{m_2}, ∞) , y por la propiedad del Wronskiano, no puede haber otro más. Ahora bien, usando (2.19) y (2.20), tenemos $n_1 = N_1$, $m_2 = N_2 - 1$, y $N = n_1 + m_2 = N_1 + N_2 - 1$. El mismo resultado se mantiene si $y_2(x, 0)$ no tiene ceros en (x_1, ∞) . En ese caso, $w_1(x, 0)$ tampoco tiene ceros en (x_1, ∞) , y $m_2 = 0$. Si $y_2(x_1, 0) > y_1(x_1, 0) = 0$, entonces podemos usar el mismo argumento sólo haciendo un cambio en el conteo de ceros porque ahora $w_1(x, 0)$ tiene un cero en x_1 . Tenemos $n_1 = N_1 - 1$, $m_2 = N_2 - 1$, y $N = n_1 + m_2 + 1 = N_1 + N_2 - 1$. Si $y_2(x_1, 0) \geq 0 > y_1(x_1, 0)$, entonces $w_1(x, 0)$ tiene $m_2 + 1$ ceros en (x_1, ∞) porque ahora $w_1(x, 0)$ también tiene un cero en (x_1, z_1) . Entonces $n_1 = N_1 - 1$, $m_2 = N_2 - 1$, y $N = n_1 + m_2 + 1 = N_1 + N_2 - 1$. Si $0 > y_2(x_1, 0) > y_1(x_1, 0)$, entonces $n_1 = N_1 - 1$, $m_2 = N_2$, y $N = N_1 + N_2 - 1$ porque $w_1(x, 0)$ no tiene ceros en (x_1, z_1) . No hay más posibilidades para que $Z(x_1) > 0$, y procediendo de manera similar, podemos ver que si $Z(x_1) < 0$, entonces $N = N_1 + N_2$. Por último, si $Z(x_1) = 0$ porque $y_2(x_1, 0) = y_1(x_1, 0) > 0$, entonces $n_1 = N_1$, $m_2 = N_2 - 1$, y $N = n_1 + m_2 = N_1 + N_2 - 1$. Si $Z(x_1) = 0$ porque $y_2(x_1, 0) = y_1(x_1, 0) = 0$, entonces $n_1 = N_1 - 1$, $m_2 = N_2 - 1$ y $N = n_1 + m_2 + 1 = N_1 + N_2 - 1$. Si $Z(x_1) = 0$ porque $y_2(x_1, 0) = y_1(x_1, 0) < 0$, entonces $n_1 = N_1 - 1$, $m_2 = N_2$, y $N = n_1 + m_2 = N_1 + N_2 - 1$. (a) queda probado. La prueba de (b) es análoga. ■

El teorema que sigue es resultado inmediato del anterior, y nos da una manera que puede resultar más fácil de calcular N en función de N_1 y N_2 , usando el Wronskiano de $\bar{\psi}_2$ y φ_1 , junto con (2.22).

Teorema 17 *Supongamos que $u(x)$ está dividido en dos fragmentos, y sea $W(x_1) = W[\bar{\psi}_2(\cdot, 0), \varphi_1(\cdot, 0)](x_1)$. Entonces:*

(i) Supongamos que N_1 y N_2 son ambos pares o ambos impares. Si $W(x_1) > 0$ ($W(x_1) < 0$), entonces $N = N_1 + N_2$ ($N = N_1 + N_2 - 1$).

(ii) Supongamos que N_1 es par y N_2 es impar, o viceversa. Si $W(x_1) > 0$ ($W(x_1) < 0$), entonces $N = N_1 + N_2 - 1$ ($N = N_1 + N_2$).

Prueba. La prueba es inmediata ya que si $W(x_1) > 0$, entonces la constante c en (2.22) es positiva, y entonces N es par, mientras que si $W(x_1) < 0$, entonces c es negativa y N es impar. ■

Retomamos la factorización para $\Lambda(k)$ en la sección 2.1:

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} a(k) & -b(k) \\ -\bar{b}(k) & \bar{a}(k) \end{bmatrix} &= \Lambda(k) = \Lambda_1(k)\Lambda_2(k) \\ &= \begin{bmatrix} a_1(k) & -b_1(k) \\ -\bar{b}_1(k) & \bar{a}_1(k) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_2(k) & -b_2(k) \\ -\bar{b}_2(k) & \bar{a}_2(k) \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

De aquí se sigue que

$$a(k) = a_1(k)a_2(k) + b_1(k)\bar{b}_2(k)$$

o bien

$$\frac{1}{t(k)} = \frac{1 - r_1(k)l_2(k)}{t_1(k)t_2(k)}. \quad (2.23)$$

Sea $\mathbb{R}^+ = (0, \infty)$. Para $k \in \mathbb{R}^+$, definimos las fases $\theta(k)$, $\theta_1(k)$ y $\theta_2(k)$ de los coeficientes de transmisión como:

$$t(k) = |t(k)|e^{i\theta(k)}, \quad t_1(k) = |t_1(k)|e^{i\theta_1(k)}, \quad t_2(k) = |t_2(k)|e^{i\theta_2(k)}$$

donde $\theta(k)$, $\theta_1(k)$ y $\theta_2(k)$ son continuas $\forall k \in \mathbb{R}^+$, y normalizadas de tal manera que

$$\theta(\infty) = \theta_1(\infty) = \theta_2(\infty) = 0. \quad (2.24)$$

Ahora, sea $\omega(k)$ tal que

$$1 - r_1(k)l_2(k) = |1 - r_1(k)l_2(k)|e^{i\omega(k)}$$

donde $\omega(k)$ también es continua $\forall k \in \mathbb{R}^+$ y $\omega(\infty) = 0$. De (2.23), obtenemos que

$$\theta(k) = \theta_1(k) + \theta_2(k) - \omega(k), \quad k \in \mathbb{R}^+. \quad (2.25)$$

Del teorema de Levinson ([14]), tenemos:

$$\theta(0+) = \left[N + \frac{d}{2} \right] \pi, \quad \theta_1(0+) = \left[N_1 + \frac{d_1}{2} \right] \pi, \quad \theta_2(0+) = \left[N_2 + \frac{d_2}{2} \right] \pi, \quad (2.26)$$

donde $d = 1$ si $u(x)$ es genérico y $d = 0$ si $u(x)$ es excepcional. De (2.25) y (2.26) llegamos a que

$$N = N_1 + N_2 + \frac{1}{2}(d - d_1 - d_2) - \frac{1}{\pi}\omega(0+). \quad (2.27)$$

Hecho este análisis, podemos ver que:

- (i) Si $u_1(x)$ y $u_2(x)$ son excepcionales, entonces $N = N_1 + N_2$.
- (ii) Si $u_1(x)$ es genérico y $u_2(x)$ es excepcional, o viceversa, entonces $N = N_1 + N_2$.
- (iii) Si $u_1(x)$, $u_2(x)$ y $u(x)$ son genéricos, entonces $\omega(0+) = \pm \frac{\pi}{2}$. En este caso, si $\omega(0+) = \frac{\pi}{2}$, entonces $N = N_1 + N_2 - 1$, y si $\omega(0+) = -\frac{\pi}{2}$, entonces $N = N_1 + N_2$.
- (iv) Si $u_1(x)$ y $u_2(x)$ son genéricos, pero $u(x)$ es excepcional, entonces $\omega(0+) = 0$ y $N = N_1 + N_2 - 1$.

El caso (i) se sigue del resultado, ya conocido, de que si $u_1(x)$ y $u_2(x)$ son excepcionales, entonces $u(x)$ también lo es.

Capítulo 3

Potenciales simétricos

3.1 Relación entre los datos de dispersión de $u(x)$ y $u(-x)$

Una forma de encontrar propiedades de los potenciales simétricos en el problema de dispersión, puede ser estudiar la relación que hay entre los datos de dispersión para $u(x)$ y para $u(-x)$.

Un primer resultado en esta dirección es:

Proposición 18 *Si $\psi(x)$ es solución de la ecuación (1.4) para el potencial $u(x)$, entonces $\psi(-x)$ es solución de la ecuación (1.4) para el potencial $u(-x)$.*

Prueba. La demostración es inmediata cambiando x por $-x$ en la ecuación (1.4). ■

Es de esperarse que los operadores asociados a $u(x)$ y $u(-x)$ tengan los mismos eigenvalores, ya que se podría suponer que $t_+(k) = t_-(k)$ donde $t_+(k)$ es el coeficiente de transmisión de $u(x)$ y $t_-(k)$ es el de $u(-x)$. Adoptando el subíndice \pm para diferenciar entre $u(x)$ y $u(-x)$, en efecto tenemos:

Proposición 19 *El operador L_+ y el operador L_- tienen los mismos eigenvalores.*

Prueba. Consideramos la solución de (1.4) para $u(x)$, $\varphi_+(x, k)$, que se comporta asintóticamente como:

$$\varphi_+(x, k) = \begin{cases} e^{ikx} + o(1), & x \rightarrow -\infty \\ a_+(k)e^{-ikx} + b_+(k)e^{ikx} + o(1), & x \rightarrow \infty \end{cases} \quad (3.1)$$

Por la proposición 18, la función

$$\varphi_+(-x, k) = \begin{cases} e^{-ikx} + o(1), & x \rightarrow \infty \\ a_+(k)e^{ikx} + b_+(k)e^{-ikx} + o(1), & x \rightarrow -\infty \end{cases} \quad (3.2)$$

es entonces solución de (1.4) para $u(-x)$. Similarmente, si nos fijamos en la solución de (1.4) para $u(-x)$, $\bar{\psi}_-(x, k)$, que se comporta como:

$$\bar{\psi}_-(x, k) = \begin{cases} e^{-ikx} + o(1), & x \rightarrow \infty \\ -\bar{b}_-(k)e^{-ikx} + a_-(k)e^{ikx} + o(1), & x \rightarrow -\infty \end{cases} \quad (3.3)$$

la función

$$\bar{\psi}_-(-x, k) = \begin{cases} e^{ikx} + o(1), & x \rightarrow -\infty \\ -\bar{b}_-(k)e^{ikx} + a_-(k)e^{-ikx} + o(1), & x \rightarrow \infty \end{cases} \quad (3.4)$$

es solución de (1.4) para $u(x)$. Comparando (3.2) y (3.3) y (3.1) y (3.4), vemos que $\varphi_+(-x, k)$ y $\bar{\psi}_-(x, k)$ tienen la misma conducta asintótica cuando $x \rightarrow -\infty$ y cuando $x \rightarrow \infty$, por lo que:

$$a_+(k) = a_-(k) \quad (3.5)$$

$$b_+(k) = -\bar{b}_-(k) \quad (3.6)$$

$\therefore L_+$ y L_- tienen los mismos eigenvalores. ■

3.2 Potenciales simétricos

Analizaremos ahora el problema de dispersión para la ecuación:

$$-\frac{d^2}{dx^2}\psi(x, k) + u(x)\psi(x, k) = k^2\psi(x, k) \quad (3.7)$$

para el caso en el que $u(x) = u(-x)$; nos referiremos a estos como potenciales simétricos.

Proposición 20 *Sea $\psi(x, k)$ solución de (3.7), y $u(x) = u(-x)$. Entonces, $\psi(-x, k)$ es solución de (3.7).*

Prueba. Sustituimos x por $-x$ en (3.7):

$$-\frac{d^2}{dx^2}\psi(-x, k) + u(-x)\psi(-x, k) = k^2\psi(-x, k) \quad (3.8)$$

pero como $u(x) = u(-x)$:

$$-\frac{d^2}{dx^2}\psi(-x, k) + u(x)\psi(-x, k) = k^2\psi(-x, k) \quad (3.9)$$

$\therefore \psi(-x, k)$ es solución de (3.7). ■

La intuición nos hace pensar que para un potencial simétrico los coeficientes de reflexión por la izquierda y por la derecha deberían de coincidir, i.e. $l(k) = r(k)$, por las definiciones de ambos coeficientes, tenemos que esto es equivalente a que:

$$-\frac{\bar{b}(k)}{a(k)} = \frac{b(k)}{a(k)} \Leftrightarrow -\bar{b}(k) = b(k) \Leftrightarrow b(k) \in i\mathbb{R} \quad (3.10)$$

Veamos que en efecto éste es el caso:

Proposición 21 Si $u(x) = u(-x)$, entonces $b(k) \in i\mathbb{R}$.

Prueba. Primero recordemos que la solución $\varphi(x, k)$ tiene el comportamiento asintótico:

$$\varphi(x, k) = \begin{cases} e^{-ikx} + o(1), & x \rightarrow -\infty \\ a(k)e^{-ikx} + b(k)e^{ikx} + o(1), & x \rightarrow \infty \end{cases}$$

Por la proposición 20, sabemos que $\varphi(-x, k)$ es también solución de (3.7). El comportamiento asintótico de esta función es:

$$\varphi(-x, k) = \begin{cases} e^{ikx} + o(1), & x \rightarrow \infty \\ a(k)e^{ikx} + b(k)e^{-ikx} + o(1), & x \rightarrow -\infty \end{cases}$$

Ahora, observamos el comportamiento asintótico de la solución $\bar{\psi}(x, k)$:

$$\bar{\psi}(x, k) = \begin{cases} e^{ikx} + o(1), & x \rightarrow \infty \\ a(k)e^{ikx} - \bar{b}(k)e^{-ikx} + o(1), & x \rightarrow -\infty \end{cases}$$

Por la misma proposición 20, tenemos que $\bar{\psi}(-x, k)$ también es solución de (3.7), y su comportamiento asintótica es:

$$\bar{\psi}(-x, k) = \begin{cases} e^{-ikx} + o(1), & x \rightarrow -\infty \\ a(k)e^{-ikx} - \bar{b}(k)e^{ikx} + o(1), & x \rightarrow \infty \end{cases}$$

De comparar estas comportamientos asintóticos, vemos que $\varphi(x, k)$ y $\bar{\psi}(-x, k)$ tienen el mismo comportamiento cuando $|x| \rightarrow \infty$, de donde:

$$a(k)e^{ikx} + b(k)e^{-ikx} + o(1) = a(k)e^{ikx} - \bar{b}(k)e^{-ikx} + o(1), \quad x \rightarrow -\infty$$

Como esto es independiente de k se sigue que

$$b(k) = -\bar{b}(k)$$

y por lo tanto

$$b(k) \in i\mathbb{R}. \quad (3.11)$$

De (3.11) y usando (3.10), vemos que, efectivamente $u(x) = u(-x) \Rightarrow l(k) = r(k)$. ■

Este análisis es válido para $k \in \mathbb{R}$, ya que las soluciones $\varphi(x, k)$ y $\bar{\psi}(x, k)$ están definidas para el espectro continuo, i.e. para $k \in \mathbb{R}$. Como vimos en la sección 1.2, $b(k)$ no tiene una continuación analítica hacia fuera del eje real en general, así que no podemos esperar que $b(k)$ sea puramente imaginario si $k \notin \mathbb{R}$.

A pesar de esto, sí podemos decir algo para cuando k es un cero de $a(k)$, es decir, cuando k^2 es un eigenvalor de L , y este resultado es importante pues implica para potenciales simétricos una fuerte restricción.

Teorema 22 *Si $u(x) = u(-x)$, entonces $b_n = (-1)^{n-1} \forall n \in \{1, \dots, N\}$, donde N es el número de eigenvalores de L .*

Prueba. Sea $\{i\kappa_n | n = 1, \dots, N\}$ el conjunto de ceros de $a(k)$, i.e. $-\kappa_n^2$ es un eigenvalor de L , $\forall n \in \{1, \dots, N\}$, y sea $\varphi^{(n)}(x)$ la eigenfunción asociada al eigenvalor $-\kappa_n^2$. Sea $m \in \{1, \dots, N\}$. $\varphi^{(m)}(x)$ es solución de la ecuación:

Entonces, si

$$-\frac{d^2}{dx^2}\varphi^{(m)}(x) + u(x)\varphi^{(m)}(x) = -\kappa_m^2\varphi^{(m)}(x), \quad (3.12)$$

y tiene el comportamiento asintótico:

$$\varphi^{(m)}(x) = \begin{cases} e^{\kappa_m x} + o(e^{\kappa_m x}), & x \rightarrow -\infty \\ b_m e^{-\kappa_m x} + o(e^{-\kappa_m x}), & x \rightarrow \infty \end{cases}$$

Por la proposición 20, $\varphi^{(m)}(-x)$ también es solución de (3.12), y su comportamiento asintótico es:

$$\varphi^{(m)}(-x) = \begin{cases} e^{-\kappa_m x} + o(e^{-\kappa_m x}), & x \rightarrow \infty \\ b_m e^{\kappa_m x} + o(e^{\kappa_m x}), & x \rightarrow -\infty \end{cases}$$

Ahora, si nos fijamos en $\frac{\varphi^{(m)}(-x)}{b_m}$, que también es solución de (3.12):

$$\frac{\varphi^{(m)}(-x)}{b_m} = \begin{cases} \frac{e^{-\kappa_m x}}{b_m} + o(e^{-\kappa_m x}), & x \rightarrow \infty \\ e^{\kappa_m x} + o(e^{\kappa_m x}), & x \rightarrow -\infty \end{cases}$$

Como el espectro discreto de L es simple, todas las eigenfunciones correspondientes a $-\kappa_m^2$ se pueden obtener multiplicando a $\varphi^{(m)}(x)$ por alguna constante. Por consiguiente $\frac{\varphi^{(m)}(-x)}{b_m}$, que es una eigenfunción para $-\kappa_m^2$, tiene el mismo comportamiento asintótico cuando $x \rightarrow -\infty$ que $\varphi^{(m)}(x)$ de modo que $\varphi^{(m)}(x) = \frac{\varphi^{(m)}(-x)}{b_m}$, y aquí:

$$b_m e^{-\kappa_m x} + o(e^{-\kappa_m x}) = \frac{e^{-\kappa_m x}}{b_m} + o(e^{-\kappa_m x})$$

Esto implica que

$$b_m^2 = 1$$

por lo que $b_m = \pm 1$. Como sabemos que $b_m = (-1)^{m-1} |b_m|$, y $b_1 = 1$, por convención, entonces $b_n = (-1)^{n-1} \forall n \in \{1, \dots, N\}$. ■

Este es uno de los resultados principales de nuestro estudio, pues con el sólo hecho de saber *a priori* que $u(x) = u(-x)$, para resolver el problema inverso de dispersión sólo necesitamos conocer $r(k)$ y el conjunto $\{\mathcal{X}_n | a(i\mathcal{X}_n) = 0\}$, ya que el conjunto $\{b_n\}$ está completamente determinado.

Consideraremos ahora particiones para un potencial simétrico como en la sección 2.1. Por la simetría conviene tomar $N = 1$, y hacer $x_1 = 0$, de modo que $u(x) = u_1(x) + u_2(x)$, donde:

$$u_1(x) = \begin{cases} u(x) & \text{si } x < 0 \\ 0 & \text{si } x \geq 0 \end{cases} \quad (3.13)$$

$$u_2(x) = \begin{cases} u(x) & \text{si } x > 0 \\ 0 & \text{si } x \leq 0 \end{cases} \quad (3.14)$$

Puesto que $u(x) = u(-x)$, de (3.13) y (3.14), vemos que $u_1(-x) = u_2(x)$. Usando un subíndice en los datos de acuerdo al subíndice del potencial correspondiente, como consecuencia de (3.5) y (3.6) tenemos que:

$$a_1(k) = a_2(k) \quad (3.15)$$

$$b_1(k) = -\bar{b}_2(k). \quad (3.16)$$

Usando ahora la factorización descrita en la sección 2.1, tenemos que:

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} a(k) & -b(k) \\ -\bar{b}(k) & \bar{a}(k) \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} a_1(k) & -b_1(k) \\ -\bar{b}_1(k) & \bar{a}_1(k) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_2(k) & -b_2(k) \\ -\bar{b}_2(k) & \bar{a}_2(k) \end{bmatrix} \\ \Rightarrow \begin{bmatrix} a(k) & -b(k) \\ -\bar{b}(k) & \bar{a}(k) \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} a_1(k)a_2(k) + b_1(k)\bar{b}_2(k) & -a_1(k)b_2(k) - \bar{a}_2(k)b_1(k) \\ -a_2(k)\bar{b}_1(k) - \bar{a}_1(k)\bar{b}_2(k) & \bar{b}_1(k)b_2(k) + \bar{a}_1(k)\bar{a}_2(k) \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (3.17)$$

Usando (3.15) y (3.16) en (3.17), obtenemos:

$$\begin{bmatrix} a(k) & -b(k) \\ -\bar{b}(k) & \bar{a}(k) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_1^2(k) - b_1^2(k) & a_1(k)\bar{b}_1(k) - \bar{a}_1(k)b_1(k) \\ -a_1(k)\bar{b}_1(k) + \bar{a}_1(k)b_1(k) & \bar{a}_1^2(k) - \bar{b}_1^2(k) \end{bmatrix} \quad (3.18)$$

y de (3.18), llegamos a que:

$$a(k) = a_1^2(k) - b_1^2(k) \quad (3.19)$$

$$b(k) = \bar{a}_1(k)b_1(k) - a_1(k)\bar{b}_1(k) \quad (3.20)$$

$$t(k) = \frac{1}{a_1^2(k) - b_1^2(k)} \quad (3.21)$$

$$l(k) = r(k) = \frac{\bar{a}_1(k)b_1(k) - a_1(k)\bar{b}_1(k)}{a_1^2(k) - b_1^2(k)} \quad (3.22)$$

Como se mencionó en la sección 2.1, este análisis es válido para $k \in \mathbb{R}$. Pero sabemos que $a(k)$ es analítica en \mathbb{C}^+ ya que $t(k)$ es meromorfa y sin ceros en \mathbb{C}^+ , y también lo es $a_1(k)$. Asimismo, dado que $r_1(k)$ es meromorfa y $a_1(k)$ analítica, $b_1(k)$ es analítica en \mathbb{C}^+ , de modo que la expresión $a(k) = a_1^2(k) - b_1^2(k)$ tiene una continuación analítica del eje real hacia el semiplano superior de k , i.e., $a(k) = a_1^2(k) - b_1^2(k) \forall k \in \text{Im } k \geq 0$. Usando este hecho obtenemos de inmediato la siguiente

Proposición 23 *Sea $-\varkappa_n^2$ es un eigenvalor de L , $u(x) = u(-x)$, y $a_1(k)$ y $b_1(k)$ los coeficientes de transición definidos para $u_1(x) = u(x)\chi(-\infty, 0)$. Entonces, $a_1^2(i\varkappa_n) = b_1^2(i\varkappa_n)$.*

Prueba. Sabemos que $a(i\varkappa_n) = 0$, entonces, de (3.19), tenemos que

$$a_1^2(i\varkappa_n) - b_1^2(i\varkappa_n) = 0 \Rightarrow a_1^2(i\varkappa_n) = b_1^2(i\varkappa_n).$$

■

Ahora tenemos todo listo para probar el otro resultado central de este trabajo:

Teorema 24 *Sea $u(x) = u(-x)$, $u_1(x) = u(x)\chi(-\infty, 0)$ y $r_1(k)$ el coeficiente de reflexión por la derecha correspondiente a $u_1(x)$. Entonces, $r_1(k)$ define de manera única a $u(x)$.*

Prueba. Probaremos que podemos reconstruir los datos de dispersión de u .

Como $u_1(x)$ tiene soporte restringido a una semirecta, $b_1 = \frac{r_1(k)}{t_1(k)}$ es analítica en \mathbb{C}^+ , lo que quiere decir que los polos de r_1 y los de t_1 deben coincidir, entonces podemos encontrar los ceros de a_1 encontrando los polos de r_1 . Hecho esto, podemos reconstruir a_1 y b_1 ; usando (3.22) se tiene $a(k)$. Resolviendo $a_1^2(k) = b_1^2(k)$ se obtienen los ceros de $a(k)$ y $\{b_n\}$ está determinado. ■

Otra forma de probar este teorema, es ver que como $u_1(x)$ tiene soporte restringido a una semirrecta, entonces $r_1(k)$ tiene los mismos polos que $t(k)$, así que encontrando los polos de $r_1(k)$, encontramos los eigenvalores de L_1 , y puesto que $b_1(k)$ es analítica en \mathbb{C}^+ , entonces podemos obtener $b_n = b(i\lambda_n)$ para cada n . De este conjunto, podemos encontrar a $u_1(x)$, y puesto que $u_2(x) = u_1(-x)$, entonces $u(x) = u_1(x) + u_1(-x)$.

Con respecto al número de eigenvalores de $u(x)$ cuando $u(x) = u(-x)$ podemos enunciar el siguiente resultado

Proposición 25 Sean $u(x) = u(-x)$,

$$u_1(x) = \begin{cases} u(x) & \text{si } x \leq 0 \\ 0 & \text{si } x > 0 \end{cases},$$

N el número de eigenvalores de $u(x)$ y N_1 el número de eigenvalores de $u_1(x)$.
Entonces

$$2N_1 - 1 \leq N \leq 2N_1.$$

Prueba. Sea $u_2(x) = u_1(-x)$. Entonces, $u(x) = u_1(x) + u_2(x)$, y por los resultados de la sección 3.1, si N_2 es el número de eigenvalores de $u_2(x)$, entonces $N_1 = N_2$. Juntado esto con los resultados de la sección 2.2, esta proposición es inmediata. ■

Como último comentario, si $u_1(x)$ es excepcional, entonces $u_2(x)$ y $u(x)$ también lo son; pero si $u_1(x)$ es genérico, $u_2(x)$ también lo es, pero no podemos decir nada sobre $u(x)$.

Capítulo 4

Conclusiones

Ni el problema directo ni el problema inverso de dispersión cuentan aún, con una solución analítica ni numérica para la mayoría de los potenciales, por lo tanto, éste sigue siendo un problema abierto.

El enfoque relativamente nuevo de la partición de los potenciales parece una buena forma de atacar el problema directo, porque cuando tomamos fragmentos del potencial todos ellos fragmentos, excepto los de los extremos, tienen soporte compacto, por lo que para cada fragmento podemos estudiar a las soluciones tanto a la izquierda como a la derecha sin que éstas sigan siendo afectadas por el potencial. Sin embargo todavía nos queda mucho por hacer, pues aún cuando un potencial tiene soporte compacto, el problema directo es difícil, porque hay que resolver una ecuación diferencial de segundo orden con un coeficiente variable. Y no sólo eso, sino que no hay ninguna relación aparente entre los eigenvalores correspondientes a los fragmentos que forman a un potencial y los eigenvalores correspondientes al potencial entero.

El problema inverso es aún más difícil que el directo y sólo se ha podido resolver analíticamente para algunas clases de potenciales, como lo son, por ejemplo, los potenciales sin reflexión, comúnmente llamados solitones.

En cuanto al objetivo de esta tesis, debemos mencionar que, aunque se ha logrado demostrar que se requiere menos información para reconstruir un potencial sabiendo *a priori* que es simétrico, no hemos encontrado ningún indicador que nos haga pensar que por ser simétrico el potencial sea más fácil reconstruirlo a partir de sus datos de dispersión.

Sin embargo, como dijimos, sí se pueden decir cosas sobre los datos de dispersión con sólo saber que el potencial es simétrico. No sólo hemos visto que no es necesario conocer el conjunto de datos $\{b_n\}$, sino que además, hemos probado que podemos reconstruir a $u(x)$ con sólo el coeficiente de reflexión correspondiente a su fragmento para $x \in (-\infty, 0)$. Además, hemos dado cotas para el número de eigenvalores de $u(x)$ en función del número de eigenvalores de su fragmento para $x \in (-\infty, 0)$.

Como trabajo futuro, nos queda todavía analizar otros tipos de simetrías que puedan tener los potenciales, como por ejemplo el caso en que $u(x) = -u(-x)$.

Apéndice A

El problema directo para potenciales cuadrados

En este apéndice daremos un ejemplo de cómo se resuelve el problema directo de dispersión para potenciales cuadrados.

Entonces el problema es: dado

$$u(x) = \begin{cases} -Q & \text{si } x \in (-L, L) \\ 0 & \text{si } x \notin (-L, L) \end{cases}$$

donde $Q, L > 0$, obtener $r(k)$, $\{z_n\}$ y $\{b_n\}$.

Para resolverlo, fijémonos que $\varphi(x, k) = e^{-ikx}$ para $x < -L$. Esto es consecuencia de que, en $(-\infty, -L)$, la ecuación (1.4) es:

$$-\frac{d^2}{dx^2}\psi(x, k) = k^2\psi(x, k)$$

En $(-L, L)$, la ecuación (1.4) se puede expresar como:

$$-\frac{d^2}{dx^2}\psi(x, k) = (k^2 + Q)\psi(x, k)$$

de donde podemos ver que las soluciones en $(-L, L)$ son de la forma $Ae^{-i\sqrt{k^2+Q}x} + Be^{i\sqrt{k^2+Q}x}$. Entonces, puesto que $\varphi(x, k)$ y su derivada deben ser continuas en \mathbb{R} , podemos encontrar las constantes A y B tales que $\varphi(x, k)$ es continua en $x = -L$. Entonces, tenemos dos ecuaciones para A y B :

$$e^{ikL} = Ae^{i\sqrt{k^2+Q}L} + Be^{-i\sqrt{k^2+Q}L}$$

$$-ike^{ikL} = -i\sqrt{k^2+Q}Ae^{i\sqrt{k^2+Q}L} + i\sqrt{k^2+Q}Be^{-i\sqrt{k^2+Q}L}$$

y despejando, encontramos expresiones para A y B . Ahora, para $x \in (L, \infty)$, tenemos que $\psi(x, k) = e^{-ikx}$ y $\bar{\psi}(x, k) = e^{ikx}$; haciendo uso del mismo argu-

mento (la continuidad de $\varphi(x, k)$ y su derivada), podemos encontrar los coeficientes $a(k)$ y $b(k)$, de tal manera que $\varphi(x, k)$ sea continua en $x = L$, ahora con las siguientes dos ecuaciones:

$$Ae^{-i\sqrt{k^2+QL}} + Be^{i\sqrt{k^2+QL}} = a(k)e^{-ikL} + b(k)e^{ikL}$$

$$-i\sqrt{k^2+Q}Ae^{-i\sqrt{k^2+QL}} + i\sqrt{k^2+Q}Be^{i\sqrt{k^2+QL}} = -ika(k)e^{-ikL} + ikb(k)e^{ikL}$$

Puesto que ya hemos obtenido A y B, estas son dos ecuaciones con dos incógnitas para $a(k)$ y $b(k)$. Lo siguiente es encontrar $r(k)$, pero eso es fácil ya que $r(k) = \frac{b(k)}{a(k)}$. Después, hallamos $\{\varkappa_n\}$ encontrando los ceros de $a(k)$, y el conjunto $\{b_n\}$ lo encontramos haciendo $b_n = b(i\varkappa_n)$.

Para resolver este problema, se desarrolló un programa en Maple, que sigue el algoritmo que hemos propuesto:

```

sdata := proc (Q, L)
local  $\psi1, i1, i2, \psi2, i3, i4, eq1, eq2, A, B, i5, i6, \psi3, i7, i8, eq3, eq4, C, E, A1,$ 
 $B1, C1, E1, R, y, \kappa, i, j, n, \theta, a, b, \beta, al;$ 
 $\psi1 := x \rightarrow \exp(-I \times k \times x);$ 
 $i1 := \psi1(-L);$ 
 $i2 := \text{subs}(x = -L, \text{diff}(\psi1(x), x));$ 
 $\psi2 := x \rightarrow A \times \exp(-I \times \text{sqrt}(k^2 + Q) \times x) + B \times \exp(\text{sqrt}(k^2 + Q) \times x \times I);$ 
 $i3 := \psi2(-L);$ 
 $i4 := \text{subs}(x = -L, \text{diff}(\psi2(x), x));$ 
 $eq1 := i1 = i3;$ 
 $eq2 := i2 = i4;$ 
 $A1 := \text{solve}(eq1, A);$ 
 $eq2 := \text{subs}(A = A1, eq2);$ 
 $B1 := \text{solve}(eq2, B);$ 
 $A1 := \text{simplify}(\text{subs}(B = B1, A1));$ 
 $B1 := \text{simplify}(B1);$ 

```

```

i5 := ψ2(L);
i6 := subs(x = L, diff(ψ2(x), x));
ψ3 := x → C×exp(-I×k×x) + E×exp(k×x×I);
i7 := ψ3(L);
i8 := subs(x = L, diff(ψ3(x), x));
eq3 := subs(A = A1, B = B1, i5 = i7);
eq4 := subs(A = A1, B = B1, i6 = i8);
C1 := solve(eq3, C);
eq4 := subs(C = C1, eq4);
E1 := solve(eq4, E);
C1 := simplify(subs(E = E1, C1));
E1 := simplify(E1);
R := simplify(E1/C1);
y := x → 2×evalf(sqrt(Q))×L×sin(x) - evalf(π) + 2×x;
j := -1;
i := 1;
while j < 0 do
    i := i + 1;
    y := x → 2×evalf(sqrt(Q))×L×sin(x) - i×evalf(π) + 2×x;
    j := y(0)×y(evalf(π/2))
end do ;
n := i - 1;
θ := Vector(n);
κ := Vector(n);
for i to n do
    y := x → 2×evalf(sqrt(Q))×L×sin(x) - i×evalf(π) + 2×x;
    θ[i] := biseccion(y, 0, evalf(π/2));
    κ[i] := sqrt(Q)×cos(θ[i])

```

```

end do ;
a := Vector(n);
a1 := Vector(n);
b := Vector(n);
β := Vector(n);
for i to n do
    b[i] := subs(k = κ[i]×I, EI);
    a[i] := subs(k = κ[i]×I, diff(CI, k));
    β[i] := -I×b[i]/a[i]
end do ;
simplify([R, κ, b])
end proc

```

Este programa recibe como entrada los valores Q y L , y nos devuelve $r(k)$, $\{z_n\}$ y $\{b_n\}$. Aquí hay varios ejemplos de corridas:

> $S := sdata(1, 1);$

$$\begin{aligned}
 S := & [2I \sin(2\sqrt{k^2+1}) / (2k\sqrt{k^2+1} e^{(-2I(-k+\sqrt{k^2+1}))} + 2k^2 e^{(-2I(-k+\sqrt{k^2+1}))} \\
 & - 2k^2 e^{(2I(\sqrt{k^2+1}+k))} + 2k\sqrt{k^2+1} e^{(2I(\sqrt{k^2+1}+k))} + e^{(-2I(-k+\sqrt{k^2+1}))} \\
 & - e^{(2I(\sqrt{k^2+1}+k))}), [0.673612029], [1.000000001]]
 \end{aligned}$$

> $S := sdata(2, 2);$

$$\begin{aligned}
 S := & \left[2I \sin(4\sqrt{k^2+2}) / (k\sqrt{k^2+2} e^{(4I(-k+\sqrt{k^2+2}))} + k^2 e^{(4I(-k+\sqrt{k^2+2}))} \right. \\
 & \left. - k^2 e^{(4I(\sqrt{k^2+2}+k))} + k\sqrt{k^2+2} e^{(4I(\sqrt{k^2+2}+k))} + e^{(-4I(-k+\sqrt{k^2+2}))} - e^{(4I(\sqrt{k^2+2}+k))} \right) \\
 & , \left[\begin{array}{c} 1.291708726 \\ 0.8685635949 \end{array} \right], \left[\begin{array}{c} 0.9999999977 \\ -1. \end{array} \right]
 \end{aligned}$$

> $S := sdata(3,3);$

$$S := \left[\begin{array}{l} 6I \sin(6\sqrt{k^2+3}) / (2\sqrt{k^2+3} k e^{(-6I(-k+\sqrt{k^2+3}))} + 2k^2 e^{(-6I(-k+\sqrt{k^2+3}))} \\ - 2k^2 e^{(6I(\sqrt{k^2+3}+k))} + 2\sqrt{k^2+3} k e^{(6I(\sqrt{k^2+3}+k))} + 3 e^{(-6I(-k+\sqrt{k^2+3}))} \\ - 3 e^{(6I(\sqrt{k^2+3}+k))}, \left[\begin{array}{l} 1.675672399 \\ 1.496851243 \\ 1.155181322 \\ 0.4796191197 \end{array} \right], \left[\begin{array}{l} 1.000000004 \\ -1.000000001 \\ 1.000000001 \\ -1. \end{array} \right] \end{array} \right]$$

Estos ejemplos son simétricos y confirma que $b_n = (-1)^{n-1}$.

Apéndice B

Potenciales sin reflexión

Un caso particularmente sencillo para el cual podemos encontrar una solución analítica en el problema inverso, es en el cual $r(k) = 0 \forall k \in \mathbb{R}$. Al resolver el problema inverso, llegamos a potenciales que son llamados *solitones*.

Consideremos el conjunto $s = \{r(k) = 0, \varkappa_n, b_n | n = 1, \dots, N\}$. Como $r(k) = 0$, $b(k) = 0$, y $|a(k)| = 1$, y entonces podemos expresar a $a(k)$ de la siguiente manera:

$$a(k) = \prod_{n=1}^N \frac{k - i\varkappa_n}{k + i\varkappa_n}.$$

De esta expresión, podemos fácilmente definir el conjunto $\left\{ \beta_n = \frac{b_n}{ia'(i\varkappa_n)} > 0 \right\}$ y, puesto que $r(k) = 0$ por (1.67) tenemos que:

$$F(x) = \sum_{n=1}^N \beta_n e^{-\varkappa_n x} \quad (\text{B.1})$$

y vamos a suponer que $K(x, y)$ tiene la siguiente forma:

$$K(x, y) = \sum_{n=1}^N K_n(x) e^{-\varkappa_n y} \quad (\text{B.2})$$

Después de integrar en la ecuación (1.68), obtenemos un sistema de ecuaciones lineales algebraicas para $K_n(x)$:

$$K_n(x) + \sum_{m=1}^N \frac{\beta_n}{\varkappa_n + \varkappa_m} e^{-(\varkappa_n + \varkappa_m)x} K_m(x) = -\beta_n e^{-\varkappa_n x}, \quad n = 1, \dots, N \quad (\text{B.3})$$

Ahora, definimos la matriz $A(x)$ como una matriz de $N \times N$, formada por los siguientes elementos:

$$A_{mn} = \delta_{mn} + \frac{\beta_m}{\varkappa_n + \varkappa_m} e^{-(\varkappa_n + \varkappa_m)x} \quad (\text{B.4})$$

donde $\delta_{mn} = 1$ si $m = n$ y $\delta_{mn} = 0$ si $m \neq n$ (δ de Kronecker). Ahora, definimos la matriz $A^{(n)}(x)$, la cual es obtenida de $A(x)$ reemplazando los elementos de su columna n por los siguientes valores:

$$A_{mn}^{(n)} = -\beta_m e^{-\varkappa_m x}, \quad m = 1, \dots, N$$

Entonces, usando la regla de Kramer, sabemos que

$$K_n(x) = \frac{\det A^{(n)}(x)}{\det A(x)}$$

Sustituyendo esta expresión en (B.2), obtenemos que:

$$K(x, x) = \frac{\sum_{n=1}^N \det A^{(n)}(x) e^{-\varkappa_n x}}{\det A}$$

Usando la regla de diferenciación para determinantes, encontramos que el denominador de esta expresión es igual a la derivada de $\det A$, ya que $K(x, x) = \frac{d}{dx} \ln \det A(x)$. Usando este hecho junto con (1.69), llegamos a que

$$u(x) = -2 \frac{d^2}{dx^2} \ln \det A(x) \quad (\text{B.5})$$

El potencial no trivial sin reflexión más simple sólo tiene un eigenvalor, $-\varkappa^2$, y $u(x)$ tiene la forma

$$u(x) = -\frac{2\varkappa^2}{\cosh \varkappa(x - \varphi)},$$

donde

$$\varphi = \frac{1}{2\varkappa} \ln \frac{\beta}{2\varkappa} = \frac{1}{2\varkappa} \ln b.$$

Igualmente, se hizo un programa en Maple haciendo uso del algoritmo descrito en este apéndice:


```

rkzero := proc (β, κ)
local n, A, i, j;
  with(LinearAlgebra);
  n := LinearAlgebra:-Dimension(β);
  A := Matrix(n);
  for i to n do
    for j to n do A[i, j] := β[j]×exp(-(κ[i] + κ[j])×x)/(κ[i] + κ[j]) end do
  end do ;
  A := A + LinearAlgebra:-IdentityMatrix(n);
  simplify(-2×diff( diff(ln(LinearAlgebra:-Determinant(A)), x), x))
end proc

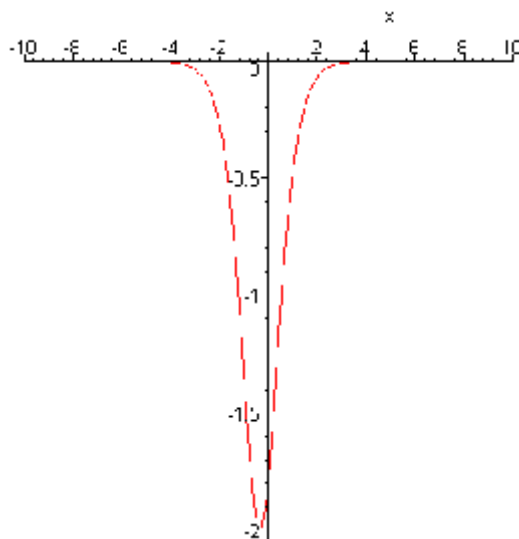
```

El programa recibe por entradas al conjunto $\{\beta_n\}$ y al conjunto $\{\kappa_n\}$, y de salida entrega al potencial $u(x)$. He aquí varias corridas:

```
> u:=rkzero(Vector([1]),Vector([1]));
```

$$u := - \frac{16 e^{(-2x)}}{(e^{(-2x)} + 2)^2}$$

```
> plot(u,x=-10..10);
```

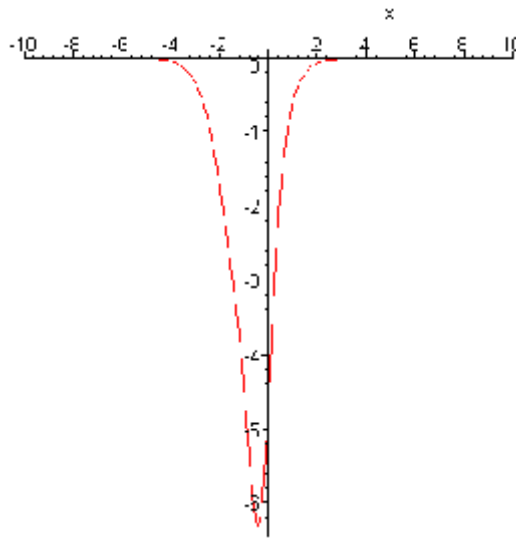


Esta figura es la gráfica de un solitón. Se puede demostrar que los potenciales sin reflexión son, de hecho, colisiones de N solitones, donde N es el número de eigenvalores para el potencial.

```
> u:=rkzero(Vector([1,1]),Vector([2,1]));
```

$$u := - \frac{144 e^{(-2x)} (e^{(-8x)} + 8 e^{(-6x)} + 72 e^{(-4x)} + 288 e^{(-2x)} + 144)}{(e^{(-6x)} + 18 e^{(-4x)} + 36 e^{(-2x)} + 72)^2}$$

```
> plot(u,x=-10..10);
```



Bibliografía

- [1] S. Novikov, S. V. Manakov, L. P. Pitaevskii, V. E. Zakharov, *Theory of Solitons*, Consultants Bureau, URSS (1984).
- [2] A. C. Newell, *Solitons in Mathematics and Physics*, SIAM, EUA (1985).
- [3] P. Deift, E. Trubowitz, "Inverse scattering on the line", *Commun. Pure Appl. Math.* **32** (1979), pp. 121-251.
- [4] T. Aktosun, M. Klaus, C. van der Mee, "On the number of bound states for the one-dimensional Schrödinger equation", *J. Math. Phys.* **39** (1998), pp. 4249-4256.
- [5] T. Aktosun, "A factorization of the scattering matrix for the Schrödinger equation and for the wave equation in one dimension", *J. Math. Phys.* **33** (1992), pp. 3865-3869.
- [6] T. Aktosun, M. Klaus, C. van der Mee, "Wave scattering in one dimension with absorption", *J. Math. Phys.* **39** (1998), pp. 1957-1992.
- [7] T. Aktosun, V. G. Papanicolaou, "Recovery of a potential from the ratio of reflection and transmission coefficients", *J. Math. Phys.* **44** (2003), pp. 4875-4883.
- [8] J. E. Marsden, M. J. Hoffman, *Análisis Básico de Variable Compleja*, Editorial Trillas, México (1996)
- [9] L. D. Faddeev, *Am. Math. Soc. Transl.* **2** (1964), 139
- [10] B. M. Levitan, *Introduction to Spectral Theory; Selfadjoint Ordinary Differential Operators*, American Mathematical Society Translations of Mathematical Monographs, EUA, (1975)
- [11] J. Weidmann, *Spectral Theory of Ordinary Differential Operators*, Lecture Notes in Mathematics, Alemania (1987), 1258
- [12] P. Deift, *Classical Scattering with a Trace Condition*, Princeton University, EUA (1976)

- [13] M. Reed, B. Simon, *Methods of Modern Mathematical Physics. IV. Analysis of Operators*, Academic, EUA (1978)
- [14] R. G. Newton, "Inverse scattering I. One dimension", *J. Math. Phys.* **21** (1980), pp. 493-505
- [15] E. A. Coddington, N. Levinson, *Theory of Ordinary Differential Equations*, McGraw-Hill, EUA (1955)