

Resumen

En esta tesis se desarrolla una metodología que permite realizar la comparación numérica de dos criterios para valorar opciones Europeas. Éstos se denominan minimización de riesgo local y precio de indiferencia. La motivación, justificación teórica e implementación se establecen para ambos. El modelo asumido para el precio del activo subyacente a la opción y la volatilidad asociada se basa en ecuaciones diferenciales estocásticas. La inferencia de los parámetros de este modelo se realiza con base en observaciones del índice financiero S&P500.

Índice general

Resumen	v
Agradecimientos	ix
Introducción	1
1. Preliminares	5
1.1. Conceptos importantes	5
1.1.1. Opciones Europeas	5
1.1.2. Volatilidad	9
1.2. Modelo propuesto para el mercado	10
1.2.1. Motivación	10
1.2.2. Modelo	12
1.2.3. Especificación de la EDE para la volatilidad	12
2. Métodos de valuación de opciones en mercados incompletos	17
2.1. Teoría de minimización del riesgo local	17
2.1.1. Medida martingala minimal	17
2.1.2. Precio de la opción Europea	23
2.2. Teoría del precio de indiferencia	32
3. Series de tiempo	42
3.1. Modelos heterocedásticos	42
3.1.1. Varianza condicional	42
3.1.2. El modelo EGARCH	45
3.2. Modelo EGARCH como aproximación a la EDE para la volatilidad	47

4. Metodología propuesta para la comparación de métodos de valoración	53
4.1. Inferencia estocástica	54
4.1.1. Ajuste del modelo EGARCH a la serie S&P500	56
4.2. Comparación de los métodos	70
4.2.1. Gráficas	72
A. Glosario de términos financieros	81
Referencias	82
Bibliografía	83

Agradecimientos

- Al Consejo Nacional de Ciencia y Tecnología (CONACYT) por la subvención durante dos años de maestría.
- Al Centro de Investigación en Matemáticas (CIMAT) por el soporte económico en particular para la realización de esta tesis.
- A mi asesor Dr. Daniel Hernández Hernández por todo el apoyo que me ha dado.
- A los sinodales Dra. Ekaterina Todorova Kolkovska, Dra. Graciela González Farías y Dr. Daniel Hernández Hernández por sus correcciones y sugerencias.
- Al Dr. Miguel Angel Moreles Vázquez por su amable ayuda en el rubro computacional.
- A la Dra. Graciela González Farías por traerme aquí y por todo lo demás.
- Al M. en C. Daniel Fernández Martínez por la crítica constructiva, la discusión y la ayuda técnica y emocional en pro de este trabajo.
- Al Dr. José Luis Batún, Lic. Esteban Bracamontes Orozco, M. en C. Antonio Murillo Salas e Ing. Alejandra Márquez Rodríguez por el apoyo técnico.
- A mi familia que es mi cimiento.

Introducción

Desde que surgió el comercio como actividad humana, han aparecido diversas formas y medios para comprar, vender e intercambiar **bienes**. Sin embargo, existe una gran cantidad de éstos con los que sería muy difícil negociar legal y organizadamente, ya sea directamente en forma de trueque o indirectamente por medio de dinero, debido a que hay objetos susceptibles de ser comercializables en grandes cantidades o en base a su valor futuro, entre otras cosas. Un mercado financiero cuenta con los elementos para poder llevar a cabo este y otro tipo de transacciones: un lugar físico donde puedan realizarse, oferentes y demandantes. Un ejemplo es la famosa bolsa de valores donde se realizan operaciones de compra venta de acciones de una empresa y obligaciones.

De todos los tipos de mercados financieros que hay, el **secundario** es donde se establece la oferta y la demanda de **activos** (títulos) **financieros** previamente colocados en el mercado por empresas miembros de éste. Esto le da a cualquier persona que pueda participar la posibilidad de seguir de cerca los movimientos de un precio, dándole así la oportunidad de utilizar herramientas de análisis que le permitan conocer acerca del comportamiento de dicho precio.

El valor de un título cambia, en términos generales, gracias a factores deterministas y aleatorios. En los primeros figuran tasas de crecimiento, cambios estructurales, ciclos financieros y, usualmente, todo aquello que es producto del conocimiento que un inversionista tiene del título financiero y del propio mercado. En cuanto a la parte aleatoria, ésta se debe a una gran cantidad de eventos no previsibles como cambios abruptos en variables económicas mundiales o la ley de la oferta y la demanda, mecanismo de formación de precios que establece que el precio de un bien en el mercado es aquel para el que se igualan la oferta y la demanda. El ámbito aleatorio del precio de un activo es el que ha hecho que desde hace algunos años el estudio probabilístico de éste se haya desarrollado de manera sólida. Si se considera al valor del activo en un momento en el tiempo como una variable aleatoria definida en un

espacio de probabilidad, los precios observados a lo largo de un intervalo de tiempo forman un proceso estocástico del que puede obtenerse información en términos de su distribución. Dicha información puede ser de mucha utilidad al momento de tomar una decisión basada en dicho precio.

Asociado al factor aleatorio de un activo se encuentra lo que se conoce como volatilidad. Es una cantidad que expresa el impacto que tienen eventos esperados e inesperados en una variable financiera, dándoles un peso. Así, si en un momento ocurre un suceso inesperado que afecta al precio de un activo, el valor de la volatilidad expresará la desviación estándar con la que cambia este precio facilitando un rango donde, virtualmente, éste se moverá en ese instante. Por esta razón a la volatilidad se le conoce como un proceso oculto, pues puede pensarse como la fuerza que empuja los precios pero no ser observada directamente en el mercado.

Los participantes del mercado realizan contratos basados en títulos financieros. A estos acuerdos se les conoce como **derivados** o instrumentos financieros. Entre éstos existe la opción Europea que está relacionada a la compra venta de unidades de activo, llamado en este caso subyacente, en un plazo de tiempo prefijado. Un problema fundamental en matemáticas financieras consiste en encontrar el precio justo que debe pagarse por un derivado. Su importancia se incrementa en la medida en que se encuentren métodos cuya implementación sea lo más viable posible y esté al alcance del **inversionista** común.

En 1973, Fischer Black y Myron Scholes propusieron una fórmula para valuar una opción Europea. En su análisis asumieron que la volatilidad es un parámetro constante. Sin embargo, existen muchos trabajos que han logrado evidenciar lo contrario como los de Mandelbrot [23] y Fama [9]. Por tal motivo han surgido alternativas como el uso de la volatilidad histórica que es, en esencia, un promedio de volatilidades diarias del pasado reciente. En la actualidad ésta es aceptada en algunos sectores del gremio financiero, pues se trata de una cantidad que representa de alguna forma información del comportamiento pasado del activo subyacente. En este trabajo, que busca ser más general, se asume que la volatilidad es un proceso estocástico.

Actualmente existe discusión acerca de qué método es más razonable para valuar opciones en el sentido de ser más representativo del comportamiento del mercado. El estudio aquí realizado tiene como objetivo proporcionar una metodología que sirva para comparar numéricamente dos métodos que por los supuestos que tienen a nivel teórico, resultan ser muy interesantes. De esta forma puede obtenerse información

empírica respecto a ambos que sea útil a un inversionista.

Un aspecto de gran importancia son las hipótesis que se hacen del mercado financiero en el que se opera. En efecto, en esta tesis los procesos financieros están definidos en un mercado en el que se asume (1) que no existe lo que se denomina **oportunidad de arbitraje** y entonces, no existe posibilidad de enriquecerse sin correr riesgo alguno; (2) que está compuesto de un activo sin riesgo al que se le llama **bono** y de un único activo financiero con riesgo descrito por una ecuación diferencial estocástica (EDE), con un proceso de volatilidad asociado. Éste a su vez está descrito por una ecuación de la misma clase. Finalmente (3) que el mercado es incompleto, lo que significa que no siempre se podrá cumplir el compromiso adquirido al vender o comprar una opción.

La estructura de esta tesis es como sigue: en el Capítulo 1 se profundizan dos conceptos importantes: opción Europea y volatilidad. Se presenta además el modelo que se propone en este trabajo para el mercado en el que se opera. En el Capítulo 2 se describe el marco teórico donde se generan los dos métodos de valuación a comparar: minimización del riesgo local y precio de indiferencia, analizando el caso particular de una opción Europea tipo *call*. Las ideas de este capítulo se basan en las desarrolladas por Hernández [17] y en Fölmer *et al.* [10]. Por otro lado en el Capítulo 3 se introduce el modelo EGARCH, generalización del modelo ARCH propuesto por Robert Engle en 1982, cuya idea es considerar que la volatilidad asociada cambia en el tiempo y depende de valores pasados de ésta. En la última sección del mismo Capítulo 3 se exhiben los cálculos realizados para mostrar un tipo de equivalencia entre el modelo propuesto de EDE y el de series de tiempo para la volatilidad. El resultado que permite mostrar una aproximación entre ambos lo presentó Nelson en [24]. Finalmente, en el capítulo 4 se introduce la metodología propuesta en esta tesis para realizar la comparación entre los métodos de valuación. Se muestra por un lado el procedimiento seguido para la inferencia de los parámetros con base en valores observados del **índice financiero** Standar & Poor's 500 (S&P500) . Por otro lado el desarrollo e implementación computacionales necesarios para originar las herramientas visuales sugeridas en la tarea de encontrar diferencias y similitudes entre ambos métodos. El activo subyacente considerado es el índice S&P500. Se incluye además en el apéndice A un glosario de los términos financieros usados en la tesis, los cuales aparecerán resaltados en negro a lo largo de este trabajo.

Capítulo 1

Preliminares

1.1. Conceptos importantes

Sea $\{S_t\}_{t \geq 0}$ un proceso estocástico que representa el valor de un activo financiero al tiempo t , definido en un espacio de probabilidad $(\Omega, \mathcal{F}, \bar{\mathcal{F}}, P)$ con una filtración $\bar{\mathcal{F}} = \{\mathcal{F}_t\}_{t \geq 0}$ i.e. una sucesión de σ -álgebras tales que $\mathcal{F}_t \subseteq \mathcal{F}_{t+1} \subseteq \mathcal{F}$ para todo $t \geq 0$. A lo largo de este capítulo se conservará esta notación. Se asumirá además que de este activo no se pagan **dividendos**.

1.1.1. Opciones Europeas

Definición

Una opción Europea tipo *call* es un derivado que le da a quien lo posee el derecho, pero no la obligación, de comprar una unidad de un activo llamado subyacente S . El precio K que debe pagarse por éste, conocido como *strike*, y el tiempo de expiración T en el que se lleva a cabo el pago están predeterminados. Si S_T es el precio de este activo subyacente en T , entonces el beneficio obtenido del contrato cuando expira, denominado *payoff*, es

$$h(S_T) = (S_T - K)^+ = \begin{cases} S_T - K & \text{si } S_T > K \\ 0 & \text{si } S_T \leq K. \end{cases} \quad (1.1.1)$$

Si $S_T > K$, el poseedor ejercerá la opción obteniendo una ganancia de $S_T - K$, comprando la acción a K y vendiéndola inmediatamente en el mercado a precio S_T .

En caso contrario la opción no se ejerce ya que el precio en el mercado es menor y por tal, no hay ganancia posible.

Análogamente, una opción Europea tipo *put* es un contrato que le da al poseedor el derecho, pero no la obligación, de vender en el tiempo de expiración T una unidad del activo subyacente S a precio *strike* K . En este caso el beneficio de poseer el contrato en el tiempo de expiración es

$$h(S_T) = (K - S_T)^+ = \begin{cases} K - S_T & \text{si } S_T < K \\ 0 & \text{si } S_T \geq K. \end{cases} \quad (1.1.2)$$

Si $S_T < K$, se compra una acción en el mercado a precio S_T y se ejerce el contrato vendiendo ésta a precio K , consiguiendo una ganancia de $K - S_T$. En caso contrario la opción simplemente no se ejerce.

A las opciones tipo Europeo se les conoce como de trayectorias independientes pues el *payoff* del contrato $h(S_T)$ sólo depende del precio del activo al tiempo T .

Por otro lado, una opción tiene un valor que cambia conforme pase el tiempo t . Al firmar el contrato una de las dos partes debe pagar por él un precio tal que ambas tengan la misma posibilidad de obtener una ganancia cuando se alcance T . Si se paga, el vendedor debe usar este capital inicial para diseñar una **estrategia de inversión**. Ésta, al tiempo T , debe permitir al vendedor de la opción disponer del capital suficiente para **replicar** la opción en caso de ser ejercida por el poseedor. Para cada $t \in [0, T]$, a la forma en que un inversionista dispone de su estrategia se le conoce como **portafolio de inversión**.

Valuación clásica de opciones Europeas: fórmula de Black y Scholes

En la actualidad existen mercados donde se valúan opciones con la fórmula de Black y Scholes (BS). Algunos de los supuestos hechos para encontrar ésta se conservan en métodos de valuación como los que se estudiarán en el Capítulo 2. Por esta razón a continuación se proporciona una breve introducción a las ideas de BS.

A principios de los años setentas, BS realizaron un estudio de derivados tipo Europeo del que se originó un modelo clásico. El paso esencial en la metodología de BS es la construcción de la expresión explícita para esta estrategia replicadora pues argumentan que, basados en una política de no arbitraje, el valor del portafolio al tiempo $t < T$ representa el precio que debe pagarse en ese momento por una opción

Europea (ver [3]). Así el valor del portafolio de inversión generado al tiempo T es igual al *payoff* de la opción $h(S_T)$.

En el modelo, un supuesto muy importante es que el proceso que representa al precio del activo está dado por la solución de la ecuación diferencial estocástica

$$dS_t = \mu_t S_t dt + \sigma_t S_t dW_t^S, \quad (1.1.3)$$

donde $\mu_t = \mu$ y $\sigma_t = \sigma$, tasa de retorno (o deriva) y volatilidad respectivamente, son parámetros constantes y conocidos y W^S es un movimiento Browniano (MB), definido en $(\Omega, \mathcal{F}, \bar{\mathcal{F}}, P)$.

Matemáticamente, una estrategia de inversión φ es una pareja de procesos $\xi = \{\xi_t\}_{0 \leq t \leq T}$ y $\eta = \{\eta_t\}_{0 \leq t \leq T}$ adaptados, es decir, ξ_t y η_t son \mathcal{F}_t -medibles. Se asume además que

$$E \left[\int_0^T \xi_t^2 dt \right] < \infty \quad \text{y} \quad \int_0^T |\eta_t| dt < \infty, \quad (1.1.4)$$

de tal forma que las integrales estocástica y usual que involucran a ξ_t y η_t respectivamente a lo largo del análisis están bien definidas. Al tiempo t esta estrategia significa que el inversionista adquirirá ξ_t unidades de activo S y η_t unidades de bono B .

El valor del portafolio al tiempo t está dado por $V_t(\varphi) = \xi_t S_t + \eta_t B_t$, entonces se replicará el derivado al tiempo T si

$$V_T(\varphi) = \xi_T S_T + \eta_T B_T = h(S_T). \quad (1.1.5)$$

Se asume que este portafolio es también autofinanciable, lo que significa que su valor al tiempo t sólo dependerá de los cambios en S y B . De forma que si se invierte más dinero en el activo con riesgo adquiriendo más unidades de éste y entonces aumentando ξ_t , ese dinero saldrá de vender unidades del bono B disminuyendo así η_t .

Por otro lado, se asume además que el precio del bono al tiempo t es $B_t = e^{rt}$ y que $P(t, s)$ es la función que representa el precio de un derivado Europeo. El estudio de BS, que excluye la posibilidad de arbitraje, consiste en encontrar ξ_t y η_t tales que

$$\xi_t S_t + \eta_t e^{rt} = P(t, S_t), \quad 0 \leq t \leq T. \quad (1.1.6)$$

El procedimiento para encontrar una fórmula para $P(t, s)$ inicia diferenciando (1.1.6) y usando la propiedad del portafolio de ser autofinanciable, dando como re-

sultado que el precio para una opción Europea tipo *call* es

$$C(S_t, t, K, T, \sigma, r) \equiv C_{BS} = Ke^{-r(T-t)}(M_t\Phi_N(d_1) - \Phi_N(d_2)), \quad (1.1.7)$$

donde $\Phi_N(\cdot)$ es la función de distribución de una normal estándar, r representa la tasa de interés asociada a la operación y d_1 y d_2 están dadas por

$$\begin{aligned} d_1 &= \frac{\ln(M_t) + \frac{1}{2}\sigma^2(T-t)}{\sigma\sqrt{(T-t)}} \\ d_2 &= d_1 - \sigma\sqrt{(T-t)}. \end{aligned}$$

A $M_t = S_t/Ke^{-r(T-t)}$ se le conoce como ***moneyness***: si $M_t > 1$ esto significa que al tiempo t la cantidad que se pagará por una unidad de activo, descontada a tiempo presente, es menor que el precio del activo en este momento. En este caso se dice que la opción esta *in-the-money*. Si $M_t < 1$, es decir, si la cantidad que se pagará por una unidad de activo, descontada a tiempo presente, es mayor que el precio del activo en ese momento, se dice que la opción está *out-of-the-money* y entonces a menos que el precio del activo se incremente, el *payoff* sera cero. Una opción está *at-the-money* cuando $M_t = 1$.

Un detalle importante de la expresión (1.1.7) es que no depende del parámetro μ . Esto expresa que si dos inversionistas tienen dos puntos de vista diferentes acerca de la tasa de crecimiento de S , que significa que tienen diferente μ , pero coinciden en que la volatilidad (constante o histórica) σ prevalecerá, estarán de acuerdo en usar $P(t, s)$.

Un último aspecto relevante es que el precio $P(t, s)$ a su vez puede expresarse como

$$R_t = e^{-r(T-t)}E_Q[h(S_T)|\mathcal{F}_t], \quad (1.1.8)$$

cantidad que es una martingala bajo una medida de probabilidad Q equivalente a P *i.e.*, es integrable con $E|R_t| < \infty$ y $E_Q[R_t|\mathcal{F}_s] = R_s$ para todo $s < t$. Esto confirma el supuesto de operar en un mercado en el que no existen oportunidades de arbitraje. A la medida Q se le conoce como medida de riesgo neutral.

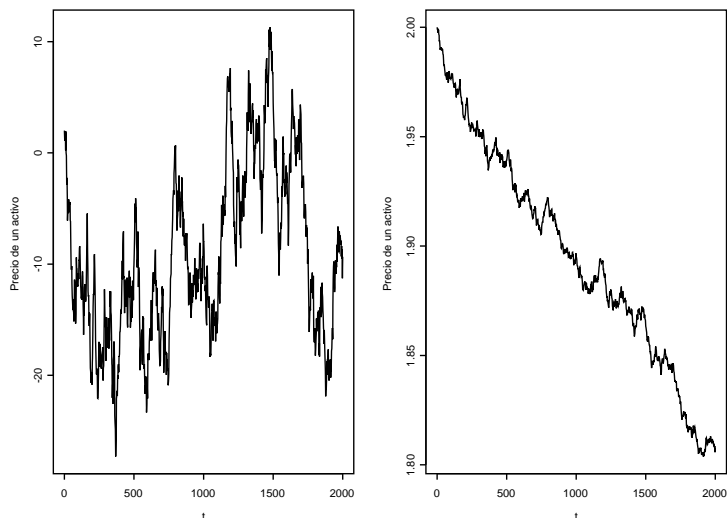


Figura 1.1: Dos simulaciones del precio de un activo S_t .

1.1.2. Volatilidad

Definición

Volatilidad es una medida de riesgo basada en la desviación estándar del precio de un activo S_t . En la Figura 1.1 se exponen dos gráficas que representan la realización de éste en un periodo de tiempo grande. Ambas trayectorias presentan tendencias. La primera es una combinación negativa-positiva-negativa y la segunda, en donde es más marcada, negativa. En términos de desviación estándar la gráfica de la izquierda es más volátil que la de la derecha.

Por otro lado, como consecuencia de la desigualdad de Chebychev se puede obtener una definición más probabilista de volatilidad, pero no menos intuitiva. En efecto, si para cada t , S_t es una variable aleatoria con varianza finita entonces

$$P[\mu_{S_t} - r\sigma_{S_t} < S_t < \mu_{S_t} + r\sigma_{S_t}] \geq 1 - \frac{1}{r^2} \quad \text{para todo } r > 0.$$

Esto es, la probabilidad de que S_t tome un valor a $r\sigma_{S_t}$ unidades de μ_{S_t} es mayor o igual a $1 - \frac{1}{r^2}$. Este resultado expone de forma natural la importancia de la volatilidad, pues su valor representa para un inversionista la noción del riesgo que este correrá en caso de comprar un derivado que tenga como activo subyacente a S .

1.2. Modelo propuesto para el mercado

1.2.1. Motivación

Si S_t representa la posición de un activo al tiempo t , el valor que tome este proceso al tiempo $t + \Delta$ con $\Delta > 0$ dependerá, como se mencionó en la Introducción, de dos tipos de factores. Por un lado de factores deterministas que pueden ser enumerados por un experto en finanzas. Por su naturaleza, éstos son descritos a través de una ecuación diferencial ordinaria

$$\frac{dS_t}{S_t} = \mu_t dt. \quad (1.2.9)$$

Ya que es susceptible de ser especificado, el precio de un bono está descrito también por una ecuación como (1.2.9). Por otro lado se encuentra lo que no es posible predecir, que puede pensarse intuitivamente como un conjunto de acontecimientos que ocurren de forma independiente y que impactan al precio del activo, aumentándolo, disminuyéndolo o manteniéndolo igual. En ese sentido, estos eventos representan buenas o malas noticias para el que invierte con base en el activo. Tiene lógica entonces representar estas diferencias mediante un MB, debido a que éste es un proceso con incrementos estacionarios e independientes y distribuidos normalmente, con varianza aumentando conforme pasa el tiempo (y con ella la incertidumbre de un inversionista). Resulta que la parte aleatoria consiste entonces de un conjunto de factores no controlables que afectan de forma aditiva el valor de $S(t + \Delta)$. Si σ_t mide el efecto que tienen estos factores entonces

$$\sigma_t [W_{t+1}^S - W_t^S], \quad (1.2.10)$$

con W^S MB en el espacio $(\Omega, \mathcal{F}, \overline{\mathcal{F}}, P)$, representa el cambio en el valor debido a la variación no controlable. En vista de (1.2.9) y (1.2.10), es razonable suponer que la dinámica de S_t es la dada por (1.1.3).

La motivación de un modelo de EDE para la volatilidad se soporta de experiencia y experimentos previos. Ésta se remonta a los años sesenta, cuando se realizaron estudios empíricos del comportamiento del logaritmo del precio diario de un activo $\ln(S_t)$, hallando distribuciones más picudas y de colas más pesadas que la normal (leptokúrticas). La intuición sugirió que una distribución con estas características no puede estar impulsada por un proceso de volatilidad constante. Para dar solución a

esto se propusieron distribuciones de colas más pesadas, como la Pareto. Claramente considerar una distribución de este tipo se pagaría en la manejabilidad de un modelo.

Por otro lado existe un fenómeno que es parte de la evidencia más contundente respecto a volatilidad no constante. Para describirlo se introducirá un concepto muy importante en finanzas. En efecto, la función en (1.1.7) es creciente en σ , para comprobarlo basta obtener su derivada y verificar que es positiva. Esto significa que existe un único valor $I > 0$ que sustituido en la fórmula de BS corresponde al valor observado de una opción Europea tipo *call* al tiempo t . A I se le conoce como volatilidad implícita. Si se cuenta con observaciones del precio de una opción Europea, de este concepto surge una forma de medir la volatilidad. Más aún, si se asume que el mercado calcula los precios de las opciones con base en esta fórmula, el verdadero valor del parámetro σ para cualquier *strike* K y cualquier tiempo de expiración T debe coincidir con la volatilidad implícita. Sea $I(K, T)$ esta volatilidad implícita para una opción Europea tipo *call* con *strike* K y tiempo de expiración $T > t$. Si la fórmula es correcta, entonces una gráfica de esta función debería verse como una superficie plana.

El fenómeno más citado que prueba las limitaciones del modelo de BS se da cuando se fija el tiempo de expiración T y la gráfica $I(K, T)$ es una función convexa en K . A este fenómeno se le conoce como efecto *smile*.

La idea de proponer distribuciones de colas pesadas en los modelos pudo haberse retomado en los setentas cuando el modelo de BS generaba superficies $I(K, T)$ no planas. Sin embargo, la preferencia por el modelo de BS se basa en la simplicidad de la distribución Gaussiana que ha dado resultados altamente congruentes con el mercado. Debido a esto la mayoría de los economistas han preferido conservarla y buscar explicaciones alternativas para la aleatoriedad de la volatilidad.

Otra característica empírica observada de la volatilidad es su correlación con el precio de un activo. Hay evidencia de que en el mercado se espera que cuando la volatilidad sube, el precio baja. Esta correlación es la que generó modelos como (1.1.3) para S_t , pero en donde $\sigma_t = \sigma_t(S)$.

Existen tantos aspectos empíricos de la volatilidad como modelos que los explican parcialmente. Sin embargo se requiere de modelos más sofisticados que permitan cambios aleatorios más fuertes en el nivel de volatilidad. Es así como surge el modelo para la volatilidad basado en una EDE.

1.2.2. Modelo

El modelo propuesto en esta tesis para el mercado está compuesto por un bono con precio B_t al tiempo t , descrito por una ecuación diferencial ordinaria

$$dB_t = r_t B_t dt, \quad B_0 = 1, \quad (1.2.11)$$

con $0 \leq t < \infty$. Por simplicidad, se considera que el proceso que representa a la tasa de interés $r = \{r_t, t \geq 0\}$, que se origina al operar con el bono es conocido, no negativo, determinista y depende del tiempo.

Por otro lado está el activo con riesgo que evoluciona de acuerdo a la EDE (1.1.3), donde los procesos de deriva μ_t y volatilidad σ_t son $\underline{\mathcal{F}}$ -adaptados, continuos por la derecha con límites por la izquierda. Por razones técnicas se asume además que el proceso σ_t está definido para un $\varepsilon > 0$ fijo y para cada $t > 0$ como sigue:

$$\sigma_t = \begin{cases} \sigma_t & \text{si } \sigma_t \geq \varepsilon \\ \varepsilon & \text{si } \sigma_t < \varepsilon. \end{cases} \quad (1.2.12)$$

Con la finalidad de evitar valores negativos para σ_t que por definición es positivo se estudió la función de este proceso $X_t = \ln(\sigma_t^2)$, $0 \leq t < \infty$. La EDE asociada a este nuevo proceso es

$$dX_t = C(X_t)dt + D(X_t)dW_t^\sigma, \quad (1.2.13)$$

definida también en $0 \leq t < \infty$. W^S en (1.1.3) y W^σ son procesos de Wiener con coeficiente de correlación ρ . Se asume además que todos estos procesos están definidos en el espacio $(\Omega, \mathcal{F}, \underline{\mathcal{F}}, P)$.

1.2.3. Especificación de la EDE para la volatilidad

El objetivo de esta sección es dar las condiciones para que exista la solución de la ecuación (1.2.13), así como las expresiones para sus coeficientes. Esta sección está basada en las ideas desarrolladas en [15].

Los siguientes son resultados importantes en la teoría de ecuaciones diferenciales parciales (EDP) y se usan en la construcción de una ecuación de difusión como (1.2.13). En efecto, sea $f(x, s)$ una función en $\mathcal{C}^2(\mathbb{R})$ con s fijo. El operador diferencial

L_s , $0 \leq s \leq T$ está definido por

$$L_s f(x, s) = (L_s f)(x, s) = \frac{1}{2} d^2(x, s) \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + c(x, s) \frac{\partial f}{\partial x}(x, s), \quad (1.2.14)$$

donde $c(x, s)$ y $d(x, s)$ son los coeficientes de deriva y volatilidad en una ecuación de difusión (EDE). Este operador se aplica a una función y da como resultado otra función, cuyo valor en el punto (x, s) está dado por (1.2.14).

Definición 1.2.1. *Una solución fundamental de EDP*

$$\frac{\partial u}{\partial s}(x, s) + L_s u(x, s) = 0 \quad (1.2.15)$$

es una función no negativa $p(y, t, x, s)$ que satisface las siguientes propiedades:

- A1 *Es continua en y, t, x, s , dos veces continuamente diferenciable en x y satisface la ecuación (1.2.15) con respecto a s y x ; además,*
- A2 *para cualquier función continua y acotada $f(x)$ en \mathbb{R} y para cualquier $t > 0$*

$$u(x, s) = \int_{\mathbb{R}} f(y) p(y, t, x, s) dy$$

está acotada, satisface (1.2.15) y $\lim_{s \uparrow t} u(x, s) = f(x)$ para todo $x \in \mathbb{R}$.

El siguiente teorema establece condiciones bajo las cuales la ecuación (1.2.15) tiene solución:

Teorema 1.2.2. *Suponga que $c(x, t)$ y $d(x, t)$ son funciones continuas y acotadas y que*

$$B1 \quad d^2(x, t) \geq c > 0,$$

B2 $c(x, t)$ y $d^2(x, t)$ satisfacen la condición de Hölder con respecto a x y a t , esto es, existe $\alpha \in [0, 1]$ tal que para todo $x, y, \in \mathbb{R}$ y $s, t, > 0$

$$|c(y, t) - c(x, s)| + |d^2(y, t) - d^2(x, s)| \leq K(|y - x|^\alpha + |t - s|^\alpha).$$

Entonces la EDP (1.2.15) tiene una solución fundamental $p(y, t, x, s)$ que es única y estrictamente positiva. Más aún, si existen las segundas derivadas parciales de $c(x, t)$

y $d(x, t)$ con respecto a x , están acotadas y satisfacen la condición de Hölder con respecto a x , entonces $p(y, t, x, s)$ como función de y y t satisface la ecuación de Fokker-Plank:

$$\frac{\partial p}{\partial t} + \frac{\partial(c(x, t)p)}{\partial x} - \frac{1}{2} \frac{\partial^2(d^2(x, t)p)}{\partial x^2} = 0, \quad t \geq 0, \quad (1.2.16)$$

donde $p = p(y, t, x, s)$.

En muchas aplicaciones matemáticas y en particular en finanzas una forma de analizar el comportamiento de un proceso de difusión como (1.2.13) es utilizando la EDP (1.2.16), conocida como ecuación de Fokker-Plank.

Si se asume que las funciones $C(\cdot)$ y $D(\cdot)$ en (1.2.13) cumplen las condiciones (B1) y (B2) del Teorema 1.2.2, se garantiza la existencia y unicidad de la solución fuerte de dicha EDP. Además X es un proceso de Markov homogéneo. Por [19, Teorema 5.13] la solución fundamental $p(y, t, x, s)$ define una única función de transición para el proceso. Ésta es la función de densidad de X_t dado que $X_s = x$.

Propiedades Ergódicas de X

Se puede demostrar, al igual que en el caso de procesos con un número numerable de estados (ver [18]), que bajo condiciones adecuadas el proceso X tiene una distribución estacionaria. En efecto, suponga que el proceso satisface la siguiente hipótesis

Hipótesis 1.2.3. *Existe un dominio acotado $U \subset E_l$ donde E_l es un conjunto de Borel contenido en \mathcal{F} , con cota Γ tal que $U \cup \Gamma \subset E_l$ y con las siguientes propiedades:*

C1 $D^2(x)$ no se anula en U .

C2 Si $x \in E_l \setminus U$ y el proceso inicia en x , el tiempo medio $\tau = \inf\{t > 0 \mid X_t \in U\}$ i.e. al cual el proceso alcanza el conjunto U es finito, es decir, $\sup_{x \in K} E_X(\tau) < \infty$ para cualquier subconjunto compacto $K \subset E_l$.

Bajo la Hipótesis (1.2.3) se sigue, por [18, Teorema 4.1], que el proceso de Markov X tiene una distribución estacionaria F_X . Más aún, en [19, Teorema 5.1] se demuestra que el proceso es ergódico con probabilidad uno, es decir, si $g(x)$ es una función integrable con respecto a la medida F_X entonces

$$P \left\{ \lim_{T \rightarrow \infty} \left[\frac{1}{T} \int_0^T g(X_t) dt \right] = \int_{E_l} g(x) dF_X(x) \right\} = 1 \quad (1.2.17)$$

para todo $x \in E_l$. Esta expresión indica que sin importar donde inicie el proceso (en que conjunto Boreliano) se alcanzará la distribución estacionaria.

Existe una cantidad infinita no numerable de estados a visitar por el proceso X y su distribución tiene una densidad $p(y, t, x, s)$ estrictamente positiva. Sea E_i un conjunto de Borel en $\underline{\mathcal{F}}$. El proceso es recurrente si después de haber visitado E_i la probabilidad de que alcance el mismo E_i al menos una vez más es igual a 1. Si por añadidura el tiempo medio de recurrencia hacia el estado E_i partiendo de E_i es finito, se dice además que el proceso es positivo.

El comportamiento asintótico de la función de transición depende esencialmente de si el tiempo medio de recurrencia a un dominio acotado (en este caso, conjunto de Borel) es finito o no. Se supone entonces que el proceso X saldrá de cualquier conjunto acotado y más aún, lo hará en un tiempo finito. Esto es, se asume que el proceso es recurrente positivo. Entonces de [18, Lema 9.5] se sigue que

$$\lim_{t \rightarrow \infty} p(y, t, x, s) = f_X(x) > 0 \quad \text{para todo } x \in \mathbb{R}, \quad (1.2.18)$$

donde $f_X(x)$ es la densidad estacionaria del proceso.

Asumiendo que los límites de las derivadas en (1.2.16) existen cuando $t \rightarrow \infty$, se sigue de (1.2.18) y la misma (1.2.16) que

$$C(x)f_X - \frac{1}{2} \frac{d(D^2(x)f_X)}{dx} = k_0, \quad (1.2.19)$$

para todo $x \in \mathbb{R}$ y k_0 constante. Usando el hecho de que cuando $|x| \rightarrow \infty$, $f_X \rightarrow 0$ y $\frac{df_X(x)}{dx} \rightarrow 0$ (ver [15]), k_0 debe ser cero y se calcula la expresión para la densidad f_X . En efecto

$$\begin{aligned} C(x)f_X &= \frac{1}{2} \frac{d(D^2(x)f_X)}{dx} && \text{luego,} \\ C(x) &= D(x) \frac{dD(x)}{dx} + \frac{1}{2} D^2(x) \frac{d \ln(f_X(x))}{dx} && \text{integrando,} \\ \int_{-\infty}^x \frac{2C(u)}{D^2(u)} du &= 2 \int_{-\infty}^x \frac{d \ln(D(u))}{du} du + \int_{-\infty}^x \frac{d \ln(f_X(u))}{du} du. \end{aligned}$$

Después de calcular las integrales con el Teorema Fundamental del Cálculo se llega a que

$$f_X(x) = \frac{A}{D^2(x)} \exp \left\{ 2 \int_{-\infty}^x \frac{C(u)}{D^2(u)} du \right\}, \quad (1.2.20)$$

donde A es una constante tal que $\int_{-\infty}^{\infty} f_X(x)dx = 1$. Finalmente, despejando de (1.2.19)

$$C(x) = \frac{1}{2f_X(x)} \frac{d(D^2(x)f_X(x))}{dx} \quad \text{para } x \in \mathbb{R}. \quad (1.2.21)$$

La ecuación (1.2.20) da una forma general para la distribución estacionaria del proceso mientras que (1.2.21) la propia para el coeficiente $C(x)$. La expresión para $D(x)$ queda relativamente abierta sin ignorar que la interpretación de éste juega un papel importante.

Capítulo 2

Métodos de valuación de opciones en mercados incompletos

A lo largo de este capítulo se considera un mercado financiero en el que se asume se cumplen las tres propiedades mencionadas en la introducción: es incompleto, no existe oportunidad de arbitraje y está compuesto de un activo con riesgo S , un bono B y un proceso X función de la volatilidad asociada. El objetivo es valorar una opción Europea tipo *call* con activo subyacente S , *strike* K , tiempo de maduración T y *payoff* $h(S_T)$ dado por (1.1.1). Por este motivo se exponen dos métodos. El primero está basado en la teoría de minimización de riesgo local (min-R), desarrollada por Föllmer, Sonderman y Schweizer. Éste consiste en encontrar una medida de probabilidad con características propias, bajo la cual se establece una expresión para el precio que debe pagarse por la opción. El segundo método se fundamenta con la teoría del precio de indiferencia (p-indi). Al igual que min-R, en este método se toma en cuenta la actitud del inversionista con respecto al riesgo pero introduciendo un concepto clave: utilidad.

2.1. Teoría de minimización del riesgo local

2.1.1. Medida martingala minimal

Definición 2.1.1. *Una medida de probabilidad Q en (Ω, \mathcal{F}) es una medida martingala equivalente (MME) para el proceso S si Q es equivalente a P (lo que se denota como $Q \sim P$) y S es martingala bajo Q .*

Dada una MME Q , de su definición se sabe que el proceso S es Q -martingala.

Más aún, en vista de que $Q \sim P$, bajo la medida P , S es semimartingala (ver [10]). Esta propiedad se usará en el desarrollo subsecuente. Por el Teorema de Doob-Mayer se asume que S tiene la descomposición

$$S = S_0 + M + A, \quad (2.1.1)$$

donde $M = \{M_t\}_{0 \leq t \leq T}$ es una martingala cuadrado integrable con $M_0 = 0$ y variación cuadrática $\langle M \rangle$ respecto a P ; $A = \{A_t\}_{0 \leq t \leq T}$ es un proceso predecible con $A_0 = 0$ y variación finita $|A|$.

En el Capítulo 1 se mostró que en el modelo de BS es de interés la forma en que un inversionista genera los recursos que le permitan cubrir el compromiso adquirido. Por esta razón se ha definido el concepto de estrategia de inversión. Esta definición se retoma en esta sección de una forma más general, teniendo en cuenta la descomposición (2.1.1).

Definición 2.1.2. *Una estrategia de inversión φ es una pareja de procesos $\xi = \{\xi_t\}_{0 \leq t \leq T}$ y $\eta = \{\eta_t\}_{0 \leq t \leq T}$ que satisfacen las siguientes condiciones:*

(i) ξ es predecible, es decir, ξ_t es \mathcal{F}_{t-} -medible para $0 \leq t \leq T$,

(ii)

$$E \left[\int_0^T \xi_u^2 d\langle M \rangle_u + \left(\int_0^T |\xi_u| d|A|_u \right)^2 \right] < \infty, \quad (2.1.2)$$

(iii) η es adaptado, es decir, η_t es \mathcal{F}_t -medible para $0 \leq t \leq T$, y

(iv) El proceso $V(\varphi)$ definido por $V_t(\varphi) := \xi_t S + \eta_t B$ es continuo por la derecha y $V_t(\varphi) \in L^2(\Omega, \mathcal{F}, P)$ para todo t , $0 \leq t \leq T$.

El proceso $V(\varphi)$ representa el valor del portafolio de inversión φ . Su significado es que al tiempo t el inversionista adquirirá ξ_t unidades de activo S y η_t unidades de bono B . En esta subsección se establece por simplicidad que $B \equiv 1$.

La característica deseable para el valor de un portafolio es que al tiempo T éste sea igual al *payoff* $h(S_T)$. Esta propiedad motiva la siguiente definición

Definición 2.1.3. *Una estrategia es admisible si*

$$V_T(\varphi) = h(S_T), \quad P - c.s. \quad (2.1.3)$$

Dicha estrategia admisible siempre existe pues puede tomarse $\xi \equiv 0$ y $\eta \equiv 0$, excepto para $\eta_T = h(S_T)$.

El siguiente es un concepto que ilustra la forma de proceder de un inversionista paso a paso hasta alcanzar el tiempo de expiración T . El proceso de costo $C(\varphi)$ se define mediante la expresión

$$C_t(\varphi) := V_t(\varphi) - \int_0^t \xi_u dS_u, \quad 0 \leq t \leq T. \quad (2.1.4)$$

Para comprender el significado de este proceso al tiempo t , se realiza el análisis de éste en una etapa. Por definición de costo e integral estocástica se sigue que

$$V_0(\varphi) = \xi_0 S_0 + \eta_0, \quad V_1(\varphi) = \xi_1 S_1 + \eta_1 \quad \text{y} \quad \int_0^1 \xi_u dS_u = \xi_0(S_1 - S_0). \quad (2.1.5)$$

Por lo que al tiempo $t = 1$ el proceso costo es, sumando y restando η_0

$$\begin{aligned} C_1(\varphi) &= \xi_1 S_1 + \eta_1 - \xi_0 S_1 + \xi_0 S_0 \\ &= S_1(\xi_1 - \xi_0) + (\eta_1 - \eta_0) + V_0. \end{aligned}$$

De tal forma que $C_1(\varphi)$ representa información del rendimiento (o pérdida) conseguido de invertir en S y B siguiendo la estrategia (ξ, η) en esa etapa, sumado al valor del portafolio inicial. En consecuencia, el proceso costo funciona como equilibrador pues si el inversionista obtiene una ganancia a partir del bono, usará esta cantidad para invertirla en S en la etapa siguiente y viceversa. En términos del proceso costo, una estrategia admisible será entonces autofinanciable si $C(\varphi)$ es constante P -c.s. a lo largo del intervalo $[0, T]$. Más aún, se dice que éste será autofinanciable en media si $C(\varphi)$ es una P -martingala.

Como se ha sugerido ya, un inversionista maneja el capital inicial por etapas. El método min-R debe verse como un procedimiento de progresión en el siguiente sentido: al tiempo t , debe dejarse atrás el pasado y concentrarse en esas estrategias que difieren de la estrategia de referencia sólo en el intervalo restante $(t, T]$. Por esto se introduce la siguiente definición

Definición 2.1.4. Sea $\varphi = (\xi, \eta)$ una estrategia de inversión y $t \in [0, T]$. Una continuación admisible de φ a partir de t es una estrategia de inversión $\tilde{\varphi} = (\tilde{\xi}, \tilde{\eta})$ que satisfice

$$D1 \quad \tilde{\xi}_s = \xi_s \quad \text{para } s \leq t,$$

$$D2 \quad \tilde{\eta}_s = \eta_s \quad \text{para } s < t,$$

$$D3 \quad V_T(\tilde{\varphi}) = V_T(\varphi) \quad P - c.s.$$

Como se ha dicho, una de las propiedades del mercado en el que se opera es ser incompleto. En este tipo de mercado no es posible encontrar siempre la estrategia que haga que el vendedor de una opción pueda cubrir su compromiso de forma segura al tiempo T . Por tal razón, el método min-R busca minimizar en lo posible el riesgo de incumplimiento al que se expone un inversionista. Así, se introduce una medida de riesgo llamada proceso de error cuadrático medio condicional

$$R_t(\varphi) = E\{[C_T(\varphi) - C_t(\varphi)]^2 | \mathcal{F}_t\}, \quad 0 \leq t \leq T. \quad (2.1.6)$$

Por razones técnicas, se considera a (2.1.6) continuo por la derecha.

Una estrategia de inversión φ es minimizadora-R (mina-R) si para cualquier $t \in [0, T)$ y cualquier continuación admisible $\tilde{\varphi}$ de φ a partir de t se cumple que $R_t(\varphi) \leq R_t(\tilde{\varphi})$, P -c.s. Cabe resaltar que en este sentido min-R es entonces una extensión del modelo de BS en donde $R(\varphi)$ puede reducirse a 0.

En [26, Proposición 2.3] se demuestra que una estrategia φ es mina-R si y solo si $C(\varphi)$ es una martingala cuadrado integrable ortogonal al proceso martingala M en (2.1.1). Se dice que una estrategia es óptima si satisface la condición anterior. Sin perder de vista el objetivo principal que es encontrar el precio para la opción Europea, se buscará la expresión para una estrategia óptima. Para simplificar la notación, se define $H = h(S_T)$.

Proposición 2.1.5. *Una estrategia óptima se obtiene mediante la descomposición del payoff*

$$H = H_0 + \int_0^T \xi_u^H dS_u + L_T^H, \quad (2.1.7)$$

con $H_0 \in L^2(\Omega, \mathcal{F}, P)$, ξ^H cumple la condición (ii) de la definición (2.1.2) y $L^H = \{L_t^H\}_{0 \leq t \leq T}$ es una martingala cuadrado integrable con respecto a P , ortogonal a M . La estrategia está dada entonces por

$$\xi = \xi^H, \quad \eta = V - \xi \cdot S \quad (2.1.8)$$

donde

$$V_t = H_0 + \int_0^t \xi_u^H dS_u + L_t^H. \quad (2.1.9)$$

Ver demostración en [10].

Habiendo establecido la Proposición 2.1.5, el problema de minimización se reduce a encontrar (2.1.7). Este procedimiento es delicado puesto que en un mercado incompleto, existe una infinidad de medidas martingalas equivalentes MME bajo las cuales S es martingala. Por este motivo se deberá elegir siguiendo algún criterio una única MME bajo la cual se encuentre la representación (2.1.7) para H . En efecto, si \dot{P} es una de estas medidas martingalas equivalentes, se asume entonces que

$$\frac{d\dot{P}}{dP} \in L^2(\Omega, \mathcal{F}, P) \quad \text{y } S \text{ es } \dot{P} - \text{martingala.} \quad (2.1.10)$$

Por otro lado, bajo \dot{P} , el proceso $M = \{M_t\}_{0 \leq t \leq T}$ introducido en (2.1.1) es una semimartingala. La descomposición de Doob-Meyer para éste proceso está dada por

$$M = S - S_0 + (-A), \quad (2.1.11)$$

de donde $\langle M \rangle = \langle S \rangle$. Con el supuesto (2.1.10), en [10] se demuestra que el proceso A debe ser absolutamente continuo con respecto a la variación cuadrática del proceso S , es decir

$$A_t = \int_0^t \alpha_u d\langle S \rangle_u, \quad 0 \leq t \leq T, \quad (2.1.12)$$

para algún proceso predecible $\alpha = \{\alpha_t\}_{0 \leq t \leq T}$.

Es de interés que al momento de pasar a la medida \dot{P} pueda preservarse, tanto como sea posible, la estructura que se observe bajo la medida P . Así, si L^H en (2.1.7) es P -martingala ortogonal a M es deseable que continúe siéndolo bajo la medida \dot{P} . Las medidas martingalas equivalentes con esta propiedad se denominan de una forma específica

Definición 2.1.6. Una medida martingala $\hat{P} \sim P$ se llamará *minimal* si

$$\hat{P} = P \quad \text{en } \mathcal{F}_0 \quad (2.1.13)$$

y si cualquier P -martingala cuadrado integrable que sea ortogonal a M bajo P , sigue siendo martingala bajo \hat{P} .

En [10] se demuestra la existencia y unicidad de una medida con estas características mediante el siguiente teorema:

Teorema 2.1.7. (1) *La medida martingala minimal \hat{P} está determinada de forma única.*

(2) \hat{P} existe si y solo si para t en $0 \leq t \leq T$

$$\hat{G}_t = \exp\left(-\int_0^t \alpha_u dM_u - \frac{1}{2} \int_0^t \alpha_u^2 d\langle S \rangle_u\right), \quad (2.1.14)$$

es una martingala cuadrado integrable bajo P ; en este caso \hat{P} está dada por la expresión

$$\frac{d\hat{P}}{dP} = \hat{G}_T \quad (2.1.15)$$

y α es el proceso predecible en (2.1.12).

(3) *La medida martingala minimal preserva ortogonalidad: si bajo P , L es martingala cuadrado integrable con $\langle L, M \rangle = 0$ entonces bajo \hat{P} , satisface que $\langle L, S \rangle = 0$.*

Ver demostración en [10].

Aunque cambiar la forma de medir (pasando de P a \hat{P}) minimiza el riesgo al que se expone el inversionista, es claro que aún bajo \hat{P} sigue existiendo un riesgo intrínseco que no se puede controlar. Por tanto, representa una ventaja contar con una cantidad que pueda dar información de qué tan capaz es una MME de conservar las propiedades observadas bajo la medida original. Para esto se introduce la medida conocida como entropía relativa.

Definición 2.1.8. *La medida de entropía relativa está dada por la expresión*

$$H(Q|P) = \begin{cases} \int \log \frac{dQ}{dP} dQ & \text{si } Q \ll P \\ +\infty & \text{c.c.} \end{cases} \quad (2.1.16)$$

Esta cantidad es siempre no negativa y $H(Q|P) = 0$ si y solo si $Q = P$.

Teorema 2.1.9. *En la clase de todas las medidas martingalas \dot{P} , la medida martingala minimal \hat{P} se caracteriza por minimizar*

$$H(\dot{P}|P) - \frac{1}{2}E \left[\int_0^T \alpha_u^2 d\langle S \rangle_u \right]. \quad (2.1.17)$$

En particular, \hat{P} minimiza la entropía relativa $H(\cdot|P)$ de entre todas las medidas martingalas equivalentes que tienen esperanza

$$E \left[\int_0^T \alpha_u^2 d\langle S \rangle_u \right] \quad (2.1.18)$$

finita.

Ver demostración en [10].

Finalmente se enunciará el teorema que determina la estrategia óptima en la Proposición 2.1.5.

Teorema 2.1.10. *La estrategia óptima que corresponde a la expresión (2.1.7) está determinada de forma única. Ésta puede calcularse en términos de la medida martingala minimal \hat{P} : Si $V = \{V_t\}_{0 \leq t \leq T}$ denota la versión continua por la derecha de la martingala*

$$V_t := E_{\hat{P}}[H|\mathcal{F}_t], \quad 0 \leq t \leq T, \quad (2.1.19)$$

entonces la estrategia óptima (ξ, η) está dada por (2.1.8) donde

$$\xi^H = \frac{d\langle V, S \rangle}{d\langle S \rangle} \quad (2.1.20)$$

se obtiene proyectando la \hat{P} -martingala V en la \hat{P} -martingala S .

Ver demostración en [10].

2.1.2. Precio de la opción Europea

Sin perder de vista el resto de las características del mercado mencionadas al inicio de este capítulo, se hace alusión a que los procesos S , B y X están dados por las ecuaciones (1.1.3), (1.2.11) y (1.2.13) respectivamente. El método min-R busca valuar opciones bajo la medida martingala minimal \hat{P} introducida en la sección anterior.

Sea $\alpha_t = [\mu_t - r_t]/\sigma_t$, donde los procesos que lo componen son los coeficientes en las ecuaciones de S y B . De acuerdo al Teorema 2.1.7 para mostrar la existencia de la medida martingala minimal \hat{P} basta mostrar que el proceso \hat{G}_t en la ecuación (2.1.14) es una martingala cuadrado integrable. El proceso α_t definido así es predecible pues por hipótesis los procesos que lo conforman lo son. Por tanto es suficiente probar que se cumple la condición

$$E\left[e^{\frac{1}{2}\int_0^T \alpha_s^2 ds}\right] < \infty. \quad (2.1.21)$$

Esto sucede pues los procesos μ_t y r_t son deterministas (de hecho r_t es conocido) y gracias a la restricción impuesta a σ_t en (1.2.12) que implica que $\sigma_t \geq \varepsilon > 0$ para todo t .

Entonces, dado que α_t es predecible y cumple (2.1.21), por el Teorema de Girsanov se sigue que \hat{G}_t es una martingala cuadrado integrable y por lo tanto, por el Teorema 2.1.7, existe una medida martingala minimal \hat{P} . Más aún, el proceso

$$\hat{W}_t^S = W_t^S + \int_0^t \alpha_u du \quad (2.1.22)$$

es un \hat{P} -MB. A α_t se le conoce como precio de mercado por riesgo.

Bajo \hat{P} el proceso S_t se ve ahora como

$$\begin{aligned} dS_t &= S_t(\mu_t dt + \sigma_t dW_t^S) && \text{T. de Girsanov} \\ &= S_t \left\{ \mu_t dt + \sigma_t \left[d\hat{W}_t^S - \left(\frac{\mu_t - r_t}{\sigma_t} \right) dt \right] \right\} \\ &= S_t(r_t dt + \sigma_t d\hat{W}_t^S). \end{aligned} \quad (2.1.23)$$

Por su parte, el proceso X_t en la ecuación (1.2.11) se como

$$\begin{aligned} dX_t &= C(X_t)dt + D(X_t)dW_t^\sigma \\ &= C(X_t)dt + D(X_t)[d\hat{W}_t^\sigma - \rho\alpha_t dt] \\ &= [C(X_t) - \rho D(X_t)\alpha_t]dt + D(X_t)d\hat{W}_t^\sigma. \end{aligned} \quad (2.1.24)$$

En vista de que W^S y W^σ están correlacionados puede expresarse a dicho W^σ

como

$$\begin{aligned} W_t^\sigma &= \rho W_t^S + \sqrt{(1-\rho^2)}(W_t^S)^\perp && \text{T. de Girsanov} \\ &= \rho \left[\hat{W}_t^S - \int_0^t \alpha_u du \right] + \sqrt{(1-\rho^2)}(W_t^S)^\perp. && (2.1.25) \end{aligned}$$

Manipulando (2.1.25) se obtiene

$$W_t^\sigma + \rho \int_0^t \alpha_u du = \rho \hat{W}_t^S + \sqrt{(1-\rho^2)}(W_t^S)^\perp, \quad (2.1.26)$$

donde W_t^S y $(W_t^S)^\perp$ son movimientos Brownianos ortogonales. Se observa que debido a la propiedad de la medida martingala minimal de conservar ortogonalidad, la expresión del lado derecho de la igualdad (2.1.26) es, bajo \hat{P} , un MB. El nuevo sistema de ecuaciones (2.1.23) y (2.1.24) puede reescribirse bajo la medida \hat{P} en términos de dos movimientos Brownianos independientes $(\hat{W}^S)^\perp$ y \hat{W}^σ , donde $\hat{W}^S = \rho \hat{W}^\sigma + \sqrt{1-\rho^2}(\hat{W}^S)^\perp$. Haciendo las operaciones necesarias se sigue para $t \in [0, T]$

$$\begin{aligned} dS_t &= r_t S_t dt + \rho \sigma_t S_t d\hat{W}_t^\sigma + \sqrt{1-\rho^2} \sigma_t S_t d(\hat{W}_t^S)^\perp \\ dX_t &= [C(X_t) - \rho \alpha_t D(X_t)] dt + D(X_t) d\hat{W}_t^\sigma. \end{aligned} \quad (2.1.27)$$

Para poder valuar una opción, es preciso conocer qué tipo de información tendrá un inversionista al tiempo t . Con este objeto, se define como $\{\mathcal{F}_{S_t}^\perp\}_{t \geq 0}$ y $\{\mathcal{F}_{\sigma_t}\}_{t \geq 0}$ a las filtraciones generadas por los movimientos Brownianos independientes $(\hat{W}^S)^\perp$ y \hat{W}^σ respectivamente. Así, la filtración $\{\mathcal{F}_t\}_{t \geq 0}$ donde toma valores el precio del activo S se define como la filtración conjunta de ambas. Esto quiere decir que, para todo $t \geq 0$

$$\mathcal{F}_t = \mathcal{F}_{S_t}^\perp \otimes \mathcal{F}_{\sigma_t}. \quad (2.1.28)$$

Con \mathcal{F}_t definida así, al tiempo t ésta contendrá información de la dinámica de los procesos S y X hasta ese momento. Continuando con esta idea, la persona que determina cuánto vale una opción deseará conocer en lo posible el comportamiento del proceso S hasta ese instante. Más aún, le interesará saber cómo cambia S hasta que se alcance el precio de expiración. En el Capítulo 1 se explicó que una forma de tener conocimiento al respecto es por medio del proceso de volatilidad. Por esta razón se define a la filtración $\{\mathcal{F}_t^*\}_{0 \leq t \leq T}$ como la filtración conjunta de $\{\mathcal{F}_{S_t}^\perp\}_{0 \leq t \leq T}$ y la σ -álgebra

\mathcal{F}_{σ_T} . Esto es,

$$\mathcal{F}_t^* = \mathcal{F}_{S_t}^\perp \otimes \mathcal{F}_{\sigma_T}, \quad \text{para todo } 0 \leq t \leq T. \quad (2.1.29)$$

Para cada t , esta σ -álgebra contiene información de la dinámica del proceso S hasta t y de la dinámica del proceso X en todo el intervalo $[0, T]$. Los procesos S , B y X toman valores a partir de ahora en el espacio $(\Omega, \mathcal{F}, \underline{\mathcal{F}}^*, \hat{P})$, donde $\underline{\mathcal{F}}^* = \{\mathcal{F}_t^*\}_{0 \leq t \leq T}$. El precio de la opción Europea al tiempo t (ver [19, Teorema 11.13]) está dado por

$$\begin{aligned} H(t) &= E_{\hat{P}} \left[\frac{B_t}{B_T} H \middle| \mathcal{F}_t \right] \\ &= E_{\hat{P}} \left[\frac{B_t}{B_T} h(S_T) \middle| \mathcal{F}_t \right] \\ &= \frac{B_t}{B_T} E_{\hat{P}}[(S_T - K)^+ | \mathcal{F}_t] \\ &= \frac{B_t}{B_T} E_{\hat{P}}[E_{\hat{P}}[(S_T - K)^+ | \mathcal{F}_t^*] | \mathcal{F}_t] \\ &= E_{\hat{P}}[\hat{H}(t) | \mathcal{F}_t], \end{aligned} \quad (2.1.30)$$

donde, ya que para cada $t \in [0, T]$ se cumple que $\mathcal{F}_t \subset \mathcal{F}_t^*$, la tercera igualdad se debe a una propiedad de la esperanza condicional y $\hat{H}(t) := \frac{B_t}{B_T} \hat{E}[(S_T - K)^+ | \mathcal{F}_t^*]$. Este nuevo proceso su vez puede reescribirse de la forma

$$\begin{aligned} \hat{H}(t) &= \frac{B_t}{B_T} E_{\hat{P}}[(S_T - K)I(S_T > K) | \mathcal{F}_t^*] \\ &= \frac{B_t}{B_T} E_{\hat{P}}[S_T I(S_T > K) | \mathcal{F}_t^*] - \frac{B_t}{B_T} E_{\hat{P}}[K I(S_T > K) | \mathcal{F}_t^*] \\ &= \frac{B_t}{B_T} E_{\hat{P}}[S_T I(S_T > K) | \mathcal{F}_t^*] - \frac{B_t}{B_T} K P(S_T > K | \mathcal{F}_t^*), \end{aligned} \quad (2.1.31)$$

donde $I(\cdot)$ es función indicadora. El trabajo subsecuente se centra en calcular (2.1.31). En efecto, asumiendo sin pérdida de generalidad que $S_0 = 1$, la solución de la EDE (2.1.27) es

$$\begin{aligned} S_t &= \exp \left\{ \int_0^t r_u du + \rho \int_0^t \sigma_u d\hat{W}_u^\sigma + \sqrt{1 - \rho^2} \int_0^t \sigma_u d(\hat{W}_u^S)^\perp \right. \\ &\quad \left. - \frac{1}{2} \int_0^t \sigma_u^2 du \right\}. \end{aligned} \quad (2.1.32)$$

Evaluando (2.1.32) en T se obtiene

$$\begin{aligned}
S_T &= \exp \left\{ \int_0^T r_u du + \rho \int_0^T \sigma_u d\hat{W}_u^\sigma + \sqrt{1-\rho^2} \int_0^T \sigma_u d(\hat{W}_u^S)^\perp \right. \\
&\quad \left. - \frac{1}{2} \int_0^T \sigma_u^2 du \right\} \\
&= \exp \left\{ \int_0^t r_u du + \rho \int_0^t \sigma_u d\hat{W}_u^\sigma + \sqrt{1-\rho^2} \int_0^t \sigma_u d(\hat{W}_u^S)^\perp \right. \\
&\quad \left. - \frac{1}{2} \int_0^t \sigma_u^2 du \right\} \\
&\times \exp \left\{ \int_t^T r_u du + \rho \int_t^T \sigma_u d\hat{W}_u^\sigma + \sqrt{1-\rho^2} \int_t^T \sigma_u d(\hat{W}_u^S)^\perp \right. \\
&\quad \left. - \frac{1}{2} \int_t^T \sigma_u^2 du \right\} \\
&= S_t \exp \left\{ \int_t^T r_u du \right\} \exp\{N_H(t, T)\} \\
&= S_t \frac{B_T}{B_t} \exp\{N_H(t, T)\}
\end{aligned} \tag{2.1.33}$$

en el cual, para $0 \leq t \leq T$

$$\begin{aligned}
N_H(t, T) &= -\frac{1}{2} N_1(t, T) + \rho N_2(t, T) + \sqrt{1-\rho^2} \int_t^T \sigma_u d(\hat{W}_u^S)^\perp, \\
N_1(t, T) &= \int_t^T \sigma_u^2 du \quad \text{y} \\
N_2(t, T) &= \int_t^T \sigma_u d\hat{W}_u^\sigma.
\end{aligned} \tag{2.1.34}$$

Con respecto a la filtración $\{\mathcal{F}_t^*\}_{0 \leq t \leq T}$, el proceso de MB $\{\hat{W}_t^\sigma, 0 \leq t \leq T\}$ es condicionalmente conocido sobre todo $[0, T]$. Por tanto, σ_t , N_1 y N_2 están condicionalmente determinados. Más aún, debido a que cuando se condiciona al pasado la integral de Itô es un proceso Gaussiano, para cada t , el proceso $N_H(t, T)$ es condicionalmente una variable aleatoria con distribución normal, es decir,

$$N_H(t, T) \sim \mathcal{N}[me(t, T), va(t, T)], \tag{2.1.35}$$

en donde

$$\begin{aligned}
me(t, T) &= -\frac{1}{2}N_1(t, T) + \rho N_2(t, T) \\
va(t, T) &= (1 - \rho^2) \int_t^T \sigma_u^2 du \\
&= (1 - \rho^2)N_2(t, T).
\end{aligned} \tag{2.1.36}$$

Sustituyendo (2.1.33) en (2.1.31):

$$\begin{aligned}
\hat{H}(t) &= \frac{B_t}{B_T} \hat{E} \left\{ S_t \frac{B_T}{B_t} \exp[N_H(t, T)] \times I \left(S_t \frac{B_T}{B_t} \exp[N_H(t, T)] > K \right) \middle| \mathcal{F}_t^* \right\} \\
&\quad - \frac{B_t}{B_T} KP \left(S_t \frac{B_T}{B_t} \exp[N_H(t, T)] > K \middle| \mathcal{F}_t^* \right) \\
&= S_t \hat{E} \left\{ \exp[N_H(t, T)] \times I \left[N_H(t, T) > \ln \left(\frac{B_t K}{B_T S_t} \right) \right] \middle| \mathcal{F}_t^* \right\} \\
&\quad - \frac{B_t}{B_T} KP \left(\exp[N_H(t, T)] > \frac{B_t K}{B_T S_t} \middle| \mathcal{F}_t^* \right) \\
&= S_t \mathcal{Z}_1 - \frac{B_t}{B_T} K \mathcal{Z}_2.
\end{aligned} \tag{2.1.37}$$

La segunda igualdad se debe a que B_t es un proceso determinista y a que S_t es \mathcal{F}_t^* -medible. El cálculo de la diferencia $S_t \mathcal{Z}_1 - \frac{B_t}{B_T} K \mathcal{Z}_2$ se desarrolla por partes. Para poder calcular la esperanza condicional \mathcal{Z}_1 se realizará el siguiente cambio de medida. Sea $\Omega = \mathbb{R}$ y sea Q una medida tal que $\hat{P} \ll Q$ bajo la cual $N_H(t, T)$ es normal, pero con parámetros $[me(t, T) + va(t, T), va(t, T)]$. La variable aleatoria $\tilde{N}(\omega) = \omega$ realiza $N_H(t, T)$ en el espacio $(\mathbb{R}, \mathcal{F}, \hat{P})$. El cociente de verosimilitud está dado por

$$\begin{aligned}
\Lambda(\omega) &= \frac{d\hat{P}}{dQ}(\omega) \\
&= \frac{[2\pi va(t, T)]^{-1/2} \exp \left\{ -\frac{[\omega - me(t, T)]^2}{2va(t, T)} \right\}}{[2\pi va(t, T)]^{-1/2} \exp \left\{ -\frac{[\omega - me(t, T) - va(t, T)]^2}{2va(t, T)} \right\}} \\
&= \exp \left\{ -\frac{[\omega - me(t, T)]^2}{2va(t, T)} + \frac{[\omega - me(t, T) - va(t, T)]^2}{2va(t, T)} \right\} \\
&= \exp \left\{ -\omega + me(t, T) + \frac{1}{2}va(t, T) \right\}. \tag{2.1.38}
\end{aligned}$$

Usando (2.1.38) el valor de \mathcal{Z}_1 en (2.1.37) sería

$$\begin{aligned}
\mathcal{Z}_1 &= \hat{E} \left\{ e^{[N_H(t, T)]} \times I \left[N_H(t, T) > \ln \left(\frac{B_t K}{B_T S_t} \right) \right] \middle| \mathcal{F}_t^* \right\} \\
&= \hat{E} \left\{ e^{\tilde{N}} \times I \left[\tilde{N} > \ln \left(\frac{B_t K}{B_T S_t} \right) \right] \middle| \mathcal{F}_t^* \right\}.
\end{aligned}$$

Del Teorema de Radom-Nikodym para cualquier variable aleatoria Z \hat{P} -integrable se cumple $E_{\hat{P}}(Z) = E_Q(\Lambda Z)$, luego

$$\begin{aligned}
\mathcal{Z}_1 &= E_Q \left\{ \Lambda e^{\tilde{N}} I \left[\tilde{N} > \ln \left(\frac{B_t K}{B_T S_t} \right) \right] \middle| \mathcal{F}_t^* \right\} \\
&= E_Q \left\{ e^{-\tilde{N} + me(t, T) + \frac{1}{2}va(t, T)} e^{\tilde{N}} I \left[\tilde{N} > \ln \left(\frac{B_t K}{B_T S_t} \right) \right] \middle| \mathcal{F}_t^* \right\} \\
&= E_Q \left\{ e^{me(t, T) + \frac{1}{2}va(t, T)} I \left[\tilde{N} > \ln \left(\frac{B_t K}{B_T S_t} \right) \right] \middle| \mathcal{F}_t^* \right\} \\
&= e^{me(t, T) + \frac{1}{2}va(t, T)} E_Q \left\{ I \left[\tilde{N} > \ln \left(\frac{B_t K}{B_T S_t} \right) \right] \middle| \mathcal{F}_t^* \right\} \\
&= e^{me(t, T) + \frac{1}{2}va(t, T)} P \left[\tilde{N} > \ln \left(\frac{B_t K}{B_T S_t} \right) \right]. \tag{2.1.39}
\end{aligned}$$

Ya que \tilde{N} realiza a N_H en $(\mathbb{R}, \mathcal{F}, \hat{P})$ y ésta a su vez tiene distribución (2.1.35), se sigue finalmente

$$\begin{aligned}
\mathcal{Z}_1 &= e^{me(t,T) + \frac{1}{2}ve(t,T)} P \left[\frac{\tilde{N} - me(t,T) - va(t,T)}{\sqrt{va(t,T)}} \right. \\
&> \left. \frac{\ln\left(\frac{B_t K}{B_T S_t}\right) - me(t,T) - va(t,T)}{\sqrt{va(t,T)}} \right] \\
&= e^{me(t,T) + \frac{1}{2}ve(t,T)} \Phi \left[\frac{\ln\left(\frac{B_t S_t}{B_T K}\right) + me(t,T) + va(t,T)}{\sqrt{va(t,T)}} \right] \tag{2.1.40}
\end{aligned}$$

Por otra parte la expresión para \mathcal{Z}_2 en (2.1.37) es

$$\begin{aligned}
\mathcal{Z}_2 &= P \left(\exp[N_H(t,T)] > \frac{B_t K}{B_T S_t} \middle| \mathcal{F}_t^* \right) \\
&= 1 - P \left(\exp[N_H(t,T)] \leq \frac{B_t K}{B_T S_t} \middle| \mathcal{F}_t^* \right) \\
&= 1 - P \left[N_H(t,T) \leq \ln \left(\frac{B_t K}{B_T S_t} \right) \middle| \mathcal{F}_t^* \right] \\
&= 1 - P \left[\frac{N_H(t,T) - me(t,T)}{\sqrt{va(t,T)}} \leq \frac{\ln\left(\frac{B_t K}{B_T S_t}\right) - me(t,T)}{\sqrt{va(t,T)}} \right] \\
&= 1 - \Phi \left\{ \frac{\ln\left(\frac{B_t K}{B_T S_t}\right) - me(t,T)}{\sqrt{va(t,T)}} \right\} \\
&= \Phi \left\{ \frac{\ln\left(\frac{B_t S_t}{B_T K}\right) + me(t,T)}{\sqrt{va(t,T)}} \right\}. \tag{2.1.41}
\end{aligned}$$

Sustituyendo (2.1.39) y (2.1.41) en (2.1.37) se sigue que

$$\begin{aligned}
\hat{H}(t) &= S_t e^{me(t,T) + \frac{1}{2}va(t,T)} \Phi \left[\frac{\ln\left(\frac{B_t S_t}{B_T K}\right) + me(t,T) + va(t,T)}{\sqrt{va(t,T)}} \right] \\
&- \frac{B_t}{B_T} K \Phi \left\{ \frac{\ln\left(\frac{B_t S_t}{B_T K}\right) + me(t,T)}{\sqrt{va(t,T)}} \right\}. \tag{2.1.42}
\end{aligned}$$

Reemplazando $\hat{H}(t)$ en (2.1.30) por la expresión en (2.1.42) se obtiene que

$$\begin{aligned}
 H(t) &= \hat{E} \left\{ S_t e^{me(t,T) + \frac{1}{2}va(t,T)} \Phi \left[\frac{\ln \left(\frac{B_t S_t}{B_T K} \right) + me(t,T) + va(t,T)}{\sqrt{va(t,T)}} \right] \right. \\
 &\quad \left. - \frac{B_t}{B_T} K \Phi \left\{ \frac{\ln \left(\frac{B_t S_t}{B_T K} \right) + me(t,T)}{\sqrt{va(t,T)}} \right\} \middle| \mathcal{F}_t \right\} \quad (2.1.43)
 \end{aligned}$$

que es la expresión específica para el precio de una opción Europea tipo *call* al tiempo t . En la práctica (2.1.42) representa una buena aproximación a dicho precio.

2.2. Teoría del precio de indiferencia

Dado que el mercado se asume libre de arbitraje, un inversionista sabe que operar en éste conlleva un riesgo. Sin embargo, por más que un inversionista esté dispuesto a asumir un riesgo no participará en un negocio a menos que hacerlo le represente la posibilidad de obtener un rendimiento que sea razonable con sus intereses. Es por ello que buscará maximizar su beneficio minimizando a su vez dicho riesgo.

La teoría del precio de indiferencia asume que un inversionista estará dispuesto a pagar una cantidad p por un contrato por el que tiene el derecho a recibir en el tiempo de expiración determinadas unidades de activo subyacente \tilde{S} , pero el no hacerlo y no recibir nada no le representa una pérdida. Es por eso que a p se le conoce como precio de indiferencia y con él se establece el método para valuar opciones.

En esta teoría los intereses del inversionista se introducen mediante el concepto de función de utilidad. Ésta le asigna al valor de un portafolio de inversión un número real con el que existe la posibilidad de conocer qué beneficio le proporcionará al inversionista pagar o no p .

Definición 2.2.1. *Una función de utilidad $U(x)$ es aquella que cumple con las siguientes propiedades:*

- (1) $U(x) \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R})$.
- (2) *Es estrictamente creciente.*
- (3) *Es estrictamente cóncava.*

La propiedad (2) expresa que un inversionista siempre desea obtener un beneficio mayor mientras que la propiedad (3) se refiere a su aversión al riesgo (ver [1]).

Por lo anterior las principales ventajas de p radican en su justificación económica y en la incorporación del concepto de aversión al riesgo introducido en el caso de la teoría min-R, analizada antes. Entre sus limitaciones la más relevante es el número reducido de funciones de utilidad que se han estudiado. Así se acota la capacidad de un inversionista de elegir la que mejor le convenga y poder calcular con ella el precio p .

Sin perder de vista que el mercado en el que se opera está compuesto de los procesos (1.1.3), (1.2.11) y (1.2.13) definidos en el espacio (Ω, \mathcal{F}, P) , se considera nuevamente una estrategia de inversión como en la Definición 2.1.2. Al tiempo t , ξ_t es

la cantidad de capital invertido en el activo con riesgo S_t y η_t la cantidad de unidades invertidas en el bono B_t . Así, asumiendo que el portafolio es autofinanciable y que el inversionista tiene un capital inicial v , el valor del portafolio V está descrito para cada $t \in [0, T]$ como

$$\begin{aligned} dV_t &= \xi_t dS_t + \eta_t dB_t \\ &= \xi_t dS_t + r[V_t - \xi_t S_t] dt \text{ con } V_0 = v. \end{aligned} \quad (2.2.44)$$

Por ahora se asume que la tasa de interés a la que se invierte en el bono es $r = 0$ por lo que no existirá variación en la inversión en el bono y entonces $dB_t \equiv 0$. La forma de cuantificar en tiempo presente la utilidad que proporcionará seguir esta estrategia de inversión, maximizando dicha utilidad, es mediante la función de valor. A ésta se le denota como R y se define como

$$R(v, k) = \sup_{V_T \in \mathcal{A}(v)} EU(V_T + k\tilde{S}_T), \quad (2.2.45)$$

donde el supremo es tomado sobre todas las posibles riquezas que puedan generarse iniciando con un capital de v . k es el número de unidades de activo por las que se firma el contrato.

El precio de indiferencia de compra p es aquel que el inversionista es indiferente a pagar por recibir una cantidad k de activo subyacente \tilde{S}_T al tiempo de expiración T o no pagarlo y no recibir nada. Es decir $p = p(k)$ es solución de

$$R(v - p, k) = R(v, 0). \quad (2.2.46)$$

Análogamente el precio de indiferencia de venta $p = p(k)$ es lo mínimo que un inversionista está dispuesto a pagar por vender k unidades de activo \tilde{S}_T en el tiempo de expiración T . Este precio resuelve

$$R(v + p, -k) = R(v, 0). \quad (2.2.47)$$

En la literatura se distingue a uno y otro precio como p^b (compra) y p^s (venta), sin embargo, en este trabajo se considera sólo el caso de compra. El precio de indiferencia se denotará entonces sencillamente como p . Definido así, este precio tiene muchas propiedades razonables con lo que se espera ocurra en el mercado. Entre éstas están

la no linealidad en el número de unidades de activo k y la monotoneidad en el *payoff* de la opción. Para detalles de éstas y otras propiedades ver [16].

La justificación de usar el precio de indiferencia para valuar una opción surge eligiendo como el activo subyacente del contrato a $h(S_t)$ en $0 < t \leq T$. De esta forma, al tiempo de expiración T , el inversionista que se decida a pagar p recibirá como beneficio $k = 1$ unidades del *payoff* $h(S_T)$.

Por lo tanto, al tiempo 0 el inversionista puede elegir entre los dos casos siguientes:

- (a) decidir NO adquirir el contrato. Asumiendo que el supremo sobre el conjunto de riquezas posibles existe y es finito, la función de valor correspondiente es

$$\begin{aligned} R^{no}(t, v, x) &= \max_{\xi_u} E[U(V_T) \mid V_t = v, X_t = x] \\ &= \max_{\xi_u} E[U(V_T)]; \end{aligned} \quad (2.2.48)$$

- (b) decidir tomar el contrato y pagar p por él. Asumiendo que el supremo sobre el conjunto de riquezas posibles existe y es finito, la función de valor correspondiente es

$$\begin{aligned} R(t, v, x, s) &= \max_{\xi_u} E[U(V_T + h(S_T)) \mid V_t = v, X_t = x, S_t = s] \\ &= \max_{\xi_u} E[U(V_T + h(S_T))]. \end{aligned} \quad (2.2.49)$$

Para encontrar las expresiones (2.2.48) y (2.2.49) es necesario definir la forma de la función de utilidad. En este trabajo se considera la llamada exponencial

$$U(y) = -e^{-\theta y}, \quad \theta > 0, \quad y \in \mathbb{R}. \quad (2.2.50)$$

La elección de esta función, perteneciente a las conocidas como Utilidades de Hara (ver [16]), se traduce en la necesidad del inversionista de tener una utilidad muy alta del valor del portafolio. Usando esta función y sustituyendo en (2.2.49) se sigue que

$$\begin{aligned}
R(t, v, x, s) &= \max_{\xi_u} E\{U[V_T + h(S_T)] \mid V_t = v, X_t = x, S_t = s\} \\
&= \max_{\xi_u} E\left(-\exp\left\{-\theta[V_T + h(S_T)]\right\}\middle| V_t = v, X_t = x, S_t = s\right) \\
&= \max_{\xi_u} E\left(-\exp\left\{-\theta\left[v + \int_t^T \xi_u \mu(X_u) du \right. \right. \right. \\
&\quad \left. \left. \left. + \int_t^T \xi_u \sigma(X_u) dW_u^S\right] - \theta h(S_T)\right\}\middle| X_t = x, S_t = s\right) \\
&= \max_{\xi_u} \left[-e^{-\theta v} E\left(\exp\left\{-\theta\left[\int_t^T \xi_u \mu(X_u) du \right. \right. \right. \right. \right. \\
&\quad \left. \left. \left. + \int_t^T \xi_u \sigma(X_u) dW_u^S\right]\right\} \pm \frac{1}{2} \int_t^T \theta^2 \xi_u^2 \sigma^2(X_u) du \right. \\
&\quad \left. \left. - \theta h(S_T)\right\}\middle| X_t = x, S_t = s\right) \quad (2.2.51)
\end{aligned}$$

Para calcular la esperanza anterior se hace un cambio de medida. En efecto, tal como se definió en el Capítulo 1, los procesos W^S y W^σ de las ecuaciones (1.1.3) y (1.2.13) respectivamente están ρ correlacionados, esto implica que $W^\sigma = \rho W^S + \sqrt{1-\rho^2}(W^S)^\perp$ donde $\langle W^S, (W^S)^\perp \rangle = 0$. Sea $\tilde{W}^S = (W^S)^\perp$, dado que $\xi_t \sigma_t$ es un proceso predecible y tal que $E[e^{\frac{1}{2} \int_0^T \theta^2 \xi_s^2 \sigma_s^2 ds}] < \infty$, por el Teorema de Girsanov se sigue que existe una medida $Q \sim P$ tal que el proceso

$$\tilde{W}_t^S = W_t^S + \theta \int_t^T \xi_u \sigma(X_u) du \quad (2.2.52)$$

es un Q -MB. Más aún, el cociente de razón de verosimilitud es

$$\Lambda(\omega) = \frac{dP}{dQ}(\omega) = \exp\left\{\int_t^T \theta \xi_u \sigma(X_u) d\tilde{W}_u^S - \frac{1}{2} \int_t^T \theta^2 \xi_u^2 \sigma^2(X_u) du\right\}. \quad (2.2.53)$$

Se ha comentado ya que por el Teorema de Radom-Nikodym si Z es una variable aleatoria P -integrable entonces $E_P(Z) = E_Q(\Lambda Z)$. Por tanto, sustituyendo (2.2.53)

en (2.2.51),

$$\begin{aligned}
R(t, v, x, s) &= \max_{\xi_u} \left\{ -e^{-\theta v} E_Q \left(\exp \left\{ \int_t^T \left[\frac{1}{2} \theta^2 \xi_u^2 \sigma^2(X_u) - \theta \xi_u \mu(X_u) \right] du \right. \right. \right. \\
&\quad \left. \left. \left. - \theta h(S_T) \right\} \middle| X_t = x, S_t = s \right) \right\} \\
&= -e^{-\theta v} \Psi(t, x, s) = -e^{-\theta v} e^{-\theta \psi(t, x, s)}, \tag{2.2.54}
\end{aligned}$$

donde, dado que maximizar $\{-e^{\theta v} E_Q(\cdot)\}$ sobre todo ξ es equivalente a maximizar $\{-\frac{1}{\theta} \ln[E_Q(\cdot)]\}$ sobre todo ξ y

$$\psi(t, x, s) := \max_{\xi_u} \left\{ -\frac{1}{\theta} \ln E_Q \left[\exp \left\{ -\theta \int_t^T \ell(X_u, \xi_u) du - \theta h(S_T) \right\} \right] \right\} \tag{2.2.55}$$

De un procedimiento análogo al anterior se obtiene la expresión de la función de valor para el caso en el no se paga p

$$R^{no}(t, v, x) = -e^{-\theta v} e^{-\theta \phi(t, x)}, \tag{2.2.56}$$

donde

$$\phi(t, v, x) := \max_{\xi_u} \left\{ -\frac{1}{\theta} \log E_Q \left[\exp \left\{ -\theta \int_t^T \ell(X_u, \xi_u) du \right\} \right] \right\} \tag{2.2.57}$$

y en ambas ecuaciones $\ell(x, \xi) = \xi \mu(x) - (1/2) \theta \xi^2 \sigma^2(x)$. Es claro además que se cumplen las relaciones $\Phi = e^{-\theta \phi}$ y $\Psi = e^{-\theta \psi}$.

Por definición de precio de indiferencia y con base en las expresiones anteriores, el precio p es tal que

$$R(t, v - p, x, s) = R^{no}(t, v, x). \tag{2.2.58}$$

Sustituyendo las ecuaciones (2.2.54) y (2.2.56) en (2.2.58)

$$-e^{-\theta(v-p)} e^{-\theta \psi(t, x, s)} = -e^{-\theta v} e^{-\theta \phi(t, x)}, \tag{2.2.59}$$

despejando de esta expresión se llega a

$$p = \psi(t, x, s) - \phi(t, x). \quad (2.2.60)$$

Note que la expresión (2.2.60) no depende del capital inicial del inversionista v . El problema ahora se reduce a buscar la forma de la solución de ϕ y ψ . Las condiciones de frontera para éstas, las cuales se dan al llegar los procesos al tiempo de maduración T , son:

$$\begin{aligned} \psi(T, x, s) &= \max_{\xi_u} \left\{ -\frac{1}{\theta} \ln E_Q \left[\exp \left\{ -\theta \int_T^T \ell(X_u, \xi_u^*) du - \theta h(S_T) \right\} \middle| X_t = x, S_t = s \right] \right\} \\ &= \max_{\xi_u} \left\{ -\frac{1}{\theta} \ln E_Q \left[\exp \left\{ -\theta h(S_T) \right\} \middle| X_t = x, S_t = s \right] \right\} \\ &= \max_{\xi_u} \left\{ -\frac{1}{\theta} \ln [\exp\{-\theta h(s)\}] \right\} \\ &= h(s). \end{aligned} \quad (2.2.61)$$

Análogamente se obtiene que $\phi(T, x) = 0$.

Por otro lado, maximizar la expresión en (2.2.55) es equivalente a maximizar la expresión

$$E_Q \left[\exp \left\{ -\theta \int_t^T \ell(X_u, \xi_u) du - \theta h(S_T) \right\} \right], \quad (2.2.62)$$

por lo cual, se considera el problema como uno de control estocástico en donde ξ_t es conocido como el proceso de control. A cada tiempo u , el control $\{\xi_u, t \leq u \leq T\}$ que es un proceso adaptado que toma valores en un conjunto de estrategias posibles \mathcal{A} .

Del análisis de la ecuación (2.2.55) se obtiene (ver [17]) la ecuación de Hamilton Jacobi Bellman

$$0 = \max_{\xi \in \mathbb{R}} \left\{ L_{x,s} \hat{\Psi} + \hat{\Psi}_t - \theta \ell(x, \xi) \hat{\Psi} \right\}, \quad (2.2.63)$$

donde $L_{x,s}$ es el generador de S_t y X_t , es decir, es el operador diferencial de segundo orden asociado a (1.1.3) y (1.2.13). Realizando las derivadas necesarias para el cálculo

de éste y sustituyendo en (2.2.63) se encuentra la ecuación equivalente

$$\begin{aligned}
0 &= \max_{\xi \in \mathbb{R}} \left(\hat{\Psi}_s \left\{ s \left[\mu(x) - \theta \xi \sigma^2(x) \right] \right\} + \hat{\Psi}_x \left[C(x) - \theta \rho \xi \sigma(x) D(x) \right] \right. \\
&+ \frac{1}{2} \hat{\Psi}_{ss} \left[s^2 \sigma^2(x) \right] + \frac{1}{2} \hat{\Psi}_{xx} \left[D^2(x) \right] \\
&+ \left. \hat{\Psi}_{sx} \left[s \sigma(x) D(x) \right] + \hat{\Psi}_t - \hat{\Psi} \theta \ell(x, \xi) \right). \tag{2.2.64}
\end{aligned}$$

Reemplazando $\Psi = e^{-\theta \psi}$ en la ecuación anterior se obtiene

$$\begin{aligned}
0 &= \max_{\xi \in \mathbb{R}} \left(e^{-\theta \psi} \left\{ s \mu(x) \psi_s + C(x) \psi_x \right. \right. \\
&+ \frac{1}{2} s^2 \sigma^2(x) \psi_{ss} + \frac{1}{2} D^2(x) \psi_{xx} + \rho s \sigma(x) D(x) \psi_{sx} \\
&+ \theta (1 - \rho) s \sigma(x) D(x) \psi_s \psi_x - \frac{\theta}{2} [s \sigma(x) \psi_s + D(x) \psi_x]^2 + \psi_t - \theta \xi \sigma^2(x) \psi_s \\
&+ \left. \left. - \theta \rho \xi \sigma(x) D(x) \psi_x + \xi \mu(x) - \frac{1}{2} \theta \xi^2 \sigma^2(x) \right\} \right) \tag{2.2.65}
\end{aligned}$$

Más aún, si la función se supone suficientemente suave para que dicho máximo exista, el problema de maximización anterior es equivalente a

$$\begin{aligned}
0 &= \max_{\xi \in \mathbb{R}} \left\{ s \mu(x) \psi_s + C(x) \psi_x \right. \\
&+ \frac{1}{2} s^2 \sigma^2(x) \psi_{ss} + \frac{1}{2} D^2(x) \psi_{xx} + \rho s \sigma(x) D(x) \psi_{sx} \\
&+ \theta (1 - \rho) s \sigma(x) D(x) \psi_s \psi_x - \frac{\theta}{2} [s \sigma(x) \psi_s + D(x) \psi_x]^2 + \psi_t - \theta \xi \sigma^2(x) \psi_s \\
&+ \left. \left. - \theta \rho \xi \sigma(x) D(x) \psi_x + \xi \mu(x) - \frac{1}{2} \theta \xi^2 \sigma^2(x) \right\}. \tag{2.2.66}
\end{aligned}$$

Expresión de la que se obtendrá su derivada para encontrar la forma de dicho máximo.

En efecto, de

$$\frac{d[-\theta \rho \xi \sigma(x) D(x) \psi_x + \xi \mu(x) - \frac{1}{2} \theta \xi^2 \sigma^2(x)]}{d\xi} = 0 \tag{2.2.67}$$

se encuentra la expresión para ξ

$$\xi = -\psi_s - \frac{\rho D(x)}{\sigma(x)} \psi_x + \frac{\mu(x)}{\theta \sigma^2(x)}, \quad \sigma(x) > 0. \tag{2.2.68}$$

Por otro lado, en vista de que

$$\frac{d^2[-\theta\rho\xi\sigma(x)D(x)\psi_x + \xi\mu(x) - \frac{1}{2}\theta\xi^2\sigma^2(x)]}{d\xi^2} = -\theta\sigma^2(x) < 0, \quad (2.2.69)$$

se sigue que ξ en (2.2.68) es efectivamente un máximo. Sustituyendo (2.2.68) en (2.2.66) y simplificando se obtiene

$$\begin{aligned} 0 &= \psi_t + \tilde{a}(t, x, s)\psi_s + \tilde{g}(t, x, s)\psi_x + \tilde{b}(t, x, s)\psi_s^2 \\ &+ \tilde{\beta}(t, x, s)\psi_x^2 + \frac{1}{2}s^2\sigma^2(x)\psi_{ss} + \frac{1}{2}D^2(x)\psi_{xx} \\ &+ \tilde{d}(t, x, s)\psi_{sx} + \tilde{e}(t, x, s)\psi_s\psi_x + Q(t, x, s) \end{aligned} \quad (2.2.70)$$

donde

$$\begin{aligned} \tilde{a}(t, x, s) &= (s-1)\mu(x); \\ \tilde{g}(t, x, s) &= C(x) - \frac{\rho\mu(x)D(x)}{\sigma(x)}; \\ \tilde{b}(t, x, s) &= \frac{1}{2}(1-s^2)\theta\sigma^2(x); \\ \tilde{\beta}(t, x, s) &= \frac{1}{2}(1-\rho^2)\theta D^2(x); \\ \tilde{d}(t, x, s) &= \rho s\sigma(x)D(x); \\ \tilde{e}(t, x, s) &= (1-s)\theta\rho\sigma(x)D(x) \quad \text{y} \\ Q(t, x, s) &= \frac{\mu^2(x)}{2\theta\sigma^2(x)}. \end{aligned}$$

Además la condición terminal de esta ecuación está dada por (2.2.61).

Por otro lado, la ecuación para ϕ se encuentra haciendo $s = 0$ en (2.2.70). Así,

$$0 = \phi_t + \tilde{g}(t, x)\phi_x + \tilde{\beta}(t, x)\phi_x^2 + \frac{1}{2}D^2(x)\phi_{xx} + Q(t, x). \quad (2.2.71)$$

A continuación se hará uso de los resultados anteriores para obtener el precio de indiferencia en el caso más general en donde la tasa de interés es $r \neq 0$. En efecto, el proceso de valor del portafolio V_t en (2.2.44) se ve ahora como

$$\begin{aligned}
dV_t &= \xi_t dS + \eta_t dB_t \\
&= \xi_t dS + r\eta_t B_t dt \\
&= \xi_t dS_t + r(V_t - \xi_t S_t) dt && \text{sustituyendo la EDE para } S_t \\
&= \xi_t [S_t(\mu_t dt + \sigma_t dW_t^S)] + rV_t dt - r\xi_t S_t dt \\
&= \xi_t [(\mu_t - r)dt + \sigma_t dW_t^S] S_t + rV_t dt.
\end{aligned} \tag{2.2.72}$$

Se introducen los procesos auxiliares

$$\tilde{V}_t := e^{r(T-t)} V_t, \quad \tilde{X}_t = X_t \quad y \quad \tilde{S}_t = e^{r(T-t)} S_t. \tag{2.2.73}$$

Cabe resaltar que tiene sentido definir estos procesos tilde pues ahora los procesos originales S_t y V_t que representan al valor del activo y del portafolio respectivamente pueden reescribirse en función de procesos descontados al tiempo presente.

De las definiciones en (2.2.73) y calculando los diferenciales involucrados se sigue

$$\begin{aligned}
d\tilde{S}_t &= e^{r(T-t)} dS_t + S_t d(e^{r(T-t)}) \\
&= e^{r(T-t)} S_t \{[\mu_t - r]dt + \sigma_t dW_t^S\} \\
&= \tilde{S}_t \{[\mu_t - r]dt + \sigma_t dW_t^S\}
\end{aligned} \tag{2.2.74}$$

$$\begin{aligned}
d\tilde{V}_t &= e^{r(T-t)} dV_t + V_t d(e^{r(T-t)}) \\
&= e^{r(T-t)} \left\{ \xi_t \left[(\mu_t - r)dt + \sigma_t dW_t^S \right] S_t + rV_t dt \right\} - r e^{r(T-t)} V_t dt \\
&= \xi_t e^{r(T-t)} S_t \left[(\mu_t - r)dt + \sigma_t dW_t^S \right] \\
&= \xi_t d\tilde{S}_t
\end{aligned} \tag{2.2.75}$$

en donde ξ_t representa ahora las unidades de capital invertido en el activo con riesgo \tilde{S}_t , en términos de \tilde{V}_t . Con lo anterior las nuevas expresiones para las funciones de valor que se denotan como \tilde{R} y \tilde{R}^{no} guardan la siguiente relación con las funciones de valor originales

(a) para el caso en el que se paga p

$$R(t, v, x, s) = \tilde{R}[t, e^{r(T-t)}v, x, e^{r(T-t)}s] \quad (2.2.76)$$

(b) para el caso en el que NO se paga

$$R^{no}(t, v, x) = \tilde{R}^{no}[t, e^{r(T-t)}v, x] \quad (2.2.77)$$

donde

$$\tilde{R}^{no}(t, \tilde{v}, \tilde{x}) = -e^{-\theta\tilde{v}}e^{-\theta\phi(t, \tilde{x})} \quad (2.2.78)$$

y

$$\tilde{R}(t, \tilde{v}, \tilde{x}, \tilde{s}) = -e^{-\theta\tilde{v}}e^{-\theta\psi(t, \tilde{x}, \tilde{s})}, \quad (2.2.79)$$

en donde las funciones ψ y ϕ son las mismas que en (2.2.55) y en (2.2.57). Entonces el precio de indiferencia p es tal que

$$\begin{aligned} \tilde{R}[t, e^{r(T-t)}(v-p), x, e^{r(T-t)}s] &= R(t, v-p, x, s) \\ &= R^{no}(t, v, x) \\ &= \tilde{R}^{no}[t, e^{r(T-t)}v, x]. \end{aligned} \quad (2.2.80)$$

Por tanto, de (2.2.78) y (2.2.79) en (2.2.80),

$$-e^{-\theta[e^{r(T-t)}(v-p)]-\theta\psi(t, y, e^{r(T-t)}s)} = -e^{-\theta[e^{r(T-t)}x]-\theta\phi(t, x)} \quad (2.2.81)$$

Despejando de la igualdad anterior, la expresión para p es

$$p = e^{-r(T-t)}\{\psi[t, x, e^{r(T-t)}s] - \phi(t, x)\}, \quad (2.2.82)$$

cantidad que representa el precio de una opción Europea tipo *call* al tiempo t . Note nuevamente que esta expresión para p no depende del capital inicial del inversionista v .

Con los dos métodos para valuar opciones descritos, en el Capítulo 4 se realizarán las comparaciones numéricas de éstos.

Capítulo 3

Series de tiempo

El estudio de series de tiempo financieras esta relacionado con el análisis del valor de un activo a lo largo del tiempo. Se trata de una disciplina altamente empírica pero no por ello poco valiosa. De hecho una de sus principales cualidades es que en cuanto a observaciones se refiere, virtualmente todas las series de tiempo económicas se obtienen en intervalos de tiempo discretos. Por tal razón, hacer inferencia estadística surge de forma natural.

3.1. Modelos heterocedásticos

3.1.1. Varianza condicional

En la década de los 90's, Robert F. Engle introdujo un modelo cuya importancia puede medirse en función, entre muchas otras cosas, de la gran cantidad de extensiones que se le han hecho desde que salió a la luz. Este modelo consiste en uno de regresión clásico pero con residuos siguiendo un proceso ARCH. Este proceso de residuales está formado por una sucesión de variables aleatorias con media cero, varianza no condicionada constante y varianza condicionada al pasado no constante. Uno de los supuestos más importantes de un modelo tipo ARCH es que el pasado más reciente da información para predecir la varianza del periodo siguiente.

Para formalizar los conceptos anteriores sea s_t el valor de un activo al tiempo t . Sea \mathcal{F}_{t-1} la información pasada de las realizaciones de todas las variables relevantes hasta el tiempo $t-1$. Ya que los inversionistas conocen esta información al tiempo $t-1$, ellos pueden tomar decisiones basados en ésta. Entonces el valor esperado y la volatilidad

al tiempo t serán la esperanza condicional del activo y la varianza condicional de éste dado \mathcal{F}_{t-1} , los cuales están denotados por

$$m_t \equiv E(s_t | \mathcal{F}_{t-1}) \quad y \quad h_t \equiv Var(s_t | \mathcal{F}_{t-1}). \quad (3.1.1)$$

Como parte de los componentes en un modelo de regresión, los residuales $e_t = s_t - m_t$ representan el error de predicción. En la clase de modelos ARCH éstos se visualizan como un indicador de buenas o malas noticias: si $e_t > 0$ entonces se ha dado una alza en el precio del activo mientras que si $e_t < 0$ se ha presentado una disminución inesperada en el precio y en consecuencia se dice que representa malas noticias. En general un valor grande de $|e_t|$ manifiesta que las noticias son relevantes pues significa que se ha producido un gran cambio en el precio.

El modelo para la varianza condicional establece que

$$e_t = \sigma_t z_t \quad y \quad (3.1.2)$$

$$z_t \sim i.i.d \quad \text{con} \quad E(z_t) = 0 \quad y \quad Var(z_t) = 1, \quad (3.1.3)$$

donde σ_t es una función \mathcal{F}_t -medible que representa la volatilidad y es tal que $\sigma_t^2 = h_t$. Por definición los e_t son no correlacionados serialmente con media cero y varianza condicional igual a h_t , la cual puede cambiar en el tiempo tal como se mencionó antes. En nuestro estudio e_t correspondera al error en un modelo para la media de s_t ,

$$s_t = g_r(x_{t-1}, x_{t-2}, \dots; \underline{b}) + e_t \quad (3.1.4)$$

donde $g_r(\cdot, \cdot, \dots; \underline{b})$ denota una función del vector de parámetros \underline{b} y de x_{t-1}, x_{t-2}, \dots . Éstos a su vez pueden ser realizaciones pasadas (*laggs*) de s_t .

En la práctica cuando se tiene una serie de tiempo s_t , es posible conocer el valor observado de e_t . Si $f_Z(z_t)$ representa la función de densidad, θ el vector de todos los parámetros desconocidos del modelo y se considera una muestra e_1, \dots, e_{T-1}, e_T en el intervalo de tiempo discreto $\{1, 2, \dots, T\}$, por el Teorema de cambio de variable se sigue que

$$f_e(e_t) = f_Z(e_t \sigma_t^{-1}) \frac{1}{\sigma_t}$$

Por tanto, la función de log verosimilitud para dicha muestra es, relajando el supuesto

de independencia entre e_t y σ_t ,

$$\ell(\theta) = \sum_{t=1}^T [\ln f_Z(e_t \sigma_t^{-1}) - \ln \sigma_t]. \quad (3.1.5)$$

La expresión (3.1.5) también define la log verosimilitud para s_1, \dots, s_{T-1}, s_T . Dada una representación paramétrica para $f_Z(z_t)$ se pueden calcular los estimadores de máxima verosimilitud para los parámetros de interés usando diferentes técnicas numéricas de optimización.

El modelo presentado por Engle en 1982 (ver [7]) propone una dinámica para la varianza condicional dada por

$$h_t = \omega + \sum_{i=1}^p \alpha_i e_{t-i}^2, \quad (3.1.6)$$

donde $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_p$ y ω son parámetros constantes. Una interpretación para esta expresión es que la volatilidad depende de p cambios previos, es decir, las buenas o malas noticias más recientes ayudan a definir la variabilidad futura del proceso.

Las generalizaciones a esta forma de modelar la varianza condicional no tardaron en aparecer. La primera en la clase de los modelos ARCH la dio Bollerslev en 1986. Él hizo depender a la varianza no sólo de p sino de una infinidad de variables pasadas en su modelo GARCH (ver [4]). Más de 200 tipos de modelos ARCH se han expuesto en la literatura (ver [5]) y la razón es que con el paso de los años se han encontrado nuevas propiedades empíricas de la volatilidad observada en diversas series financieras. A estas características se les conoce como hechos estilizados de la volatilidad. Algunos de estos hechos se han introducido ya en la Sección 1.2.1 del Capítulo 1 y todos en conjunto confirman que la experiencia empírica previa es la que ha motivado en gran medida el surgimiento de modelos estocásticos para la volatilidad.

Hechos estilizados de la volatilidad

1.- Colas pesadas. Es bien sabido que en muchas series financieras se han descubierto colas más pesadas para $f_Z(z_t)$ que las de la distribución normal, la cual es ampliamente usada. Por tal motivo se ha sugerido utilizar tomar distribuciones con colas pesadas como la Pareto. Sin embargo la simplicidad matemática que representa la distribución Gaussiana ha hecho que se intente conservarla en el

modelo. Es por ello que se buscan propiedades teóricas que garanticen que la distribución elegida sea leptokurtica. Por ejemplo, Bollerslev encontró condiciones para que la kurtosis asociada a un modelo GARCH(1,1) sea mayor a 3 que es la de la distribución normal (ver [4]).

- 2.- *Clusters de volatilidad.* Desde principios de los 60's se encontró evidencia de que cambios pequeños en la volatilidad son seguidos por cambios pequeños mientras que cambios grandes por cambios grandes. Esto significa que los cambios en la volatilidad actual influirán en la volatilidad observada periodos después.
- 3.- *Reversión a la media.* Este hecho significa que la volatilidad, coloquialmente hablando, va y viene. Reversión a la media se interpreta como la existencia de un nivel al cual la volatilidad eventualmente regresará. Esto nos dice que la predicción de la volatilidad alcanzará un dominio de atracción. Muchos investigadores coinciden en esta propiedad, sin embargo, en lo que no todos coinciden es si este nivel debe ser constante o a su vez variar en el tiempo.
- 4.- *Efecto de asimetría.* Este efecto ocurre cuando una caída inesperada en el precio (malas noticias) incrementa la volatilidad predicha más que un aumento en el precio inesperado (buenas noticias) de magnitud similar. Este efecto sugiere una constante de asimetría en la función de la varianza condicional. En [25] se propone un modelo que incluye este tipo de característica. Este es el modelo que se estudiará posteriormente.

Se conocen muchos otros hechos más y un buen resumen se encuentra en [13].

3.1.2. El modelo EGARCH

Como una generalización al modelo ARCH surge el modelo exponencial ARCH (EGARCH) cuya primera modificación consiste en modelar $\ln(h_t)$, donde h_t es como en (3.1.1). Con esto se asegura que sin importar que signo tengan los parámetros en la dinámica del proceso, la volatilidad siempre será positiva a diferencia de los modelos ARCH y GARCH, donde la positividad de los parámetros es una hipótesis necesaria. Suponga que (3.1.2) y (3.1.4) se cumplen. La expresión general para $\ln(h_t)$, siendo g

una función adecuada, está dada por

$$\ln(h_t) = \alpha_t + \sum_{k=1}^{\infty} \beta_k g(z_{t-k}) \quad \text{con } \beta_1 = 1, \quad (3.1.7)$$

donde $\{\alpha_t\}_{t=-\infty}^{\infty}$ y $\{\beta_k\}_{k=0}^{\infty}$ son sucesiones de números reales, no estocásticas.

Usando una parametrización que consiste en expresar la serie en (3.1.7) como el cociente de dos polinomios de orden finito se obtiene la expresión paramétrica del comportamiento del logaritmo de la volatilidad.

$$\ln(h_t) = \alpha + \sum_{i=1}^q \beta_i (\chi z_{t-i} + [|z_{t-i}| - E|z_{t-i}|]) + \sum_{i=1}^p \delta_i \ln(h_{t-1}), \quad (3.1.8)$$

en donde g en (3.1.7) es $g(z_t) = \chi z_t + [|z_t| - E|z_t|]$.

Estimación

Considérese una serie de tiempo s_1, s_2, \dots, s_T observada en un intervalo de tiempo discreto $\{1, 2, \dots, T\}$. En este trabajo se asume que la distribución de z_t en (3.1.2) es una normal estándar. La forma de estimar en un modelo EGARCH consiste en dar valores numéricos al vector de parámetros

$$\Delta = [(\alpha, \delta_1, \dots, \delta_p, \beta_1, \dots, \beta_q, \chi)^T, \underline{b}^T]^T,$$

y con ellos calcular la sucesión (3.1.8). Con esta puede ahora maximizarse la expresión para la verosimilitud (3.1.5) que en el caso normal se ve como

$$\begin{aligned} \ell(\Delta) &= -\frac{T}{2} \log(2\pi) \\ &- \frac{1}{2} \sum_{t=1}^T \log(h_t) - \frac{1}{2h_t} \sum_{t=1}^T [s_t - g_r(x_{t-1}, x_{t-2}, \dots; \underline{b})]^2, \end{aligned} \quad (3.1.9)$$

en donde se relaja el supuesto de independencia entre e_t y σ_t .

Pruebas de especificación del modelo

Nelson ha sugerido algunas pruebas que deben hacerse para comprobar si el modelo EGARCH ajusta razonablemente a una serie de tiempo financiera (ver [25]). Para

esto se deben verificar ciertas características de la distribución de z_t . Por ejemplo $E[z_t] = 0, E[z_t^2] = 1$, y $E[g(z_t)] = 0$. Una especificación correcta del modelo requiere también que $\{e_t^2 - \sigma_t^2\}$ y $\{e_t\}$, o equivalentemente, $\{z_t^2 - 1\}$ y $\{z_t\}$ estén serialmente no correlacionados.

3.2. Modelo EGARCH como aproximación a la EDE para la volatilidad

Tal y como se expondrá en el Capítulo 4, la forma de la EDE que describe al proceso X , derivada del análisis que se realizó en esta tesis a la serie de tiempo S&P500, es

$$dX_t = d \ln(\sigma_t^2) = \left\{ \frac{\gamma^2}{2b^2} \left[a - \ln(\sigma_t^2) \right] \right\} dt + \gamma dW_t^\sigma, \quad (3.2.10)$$

donde a , b y γ son parámetros cuyo surgimiento e interpretación se comentarán en el mismo capítulo. Las realizaciones de esta ecuación forman una serie de tiempo X_t con $t \in \{0, 1, \dots, T\}$. Hasta este punto se han descrito dos clases de modelos para el proceso de volatilidad. Uno de éstos basado en esta EDE y otro en una serie de tiempo. Si (3.2.10) describe razonablemente al proceso X , en este trabajo se buscó probar que existe una relación entre ésta y la serie de tiempo.

En 1990 Nelson encontró que, bajo ciertas condiciones, una ecuación de la clase ARCH converge en distribución a una EDE. Esta convergencia es un poco diferente a la usual y más adelante se explicará en que sentido. El análisis lo expone en [24]. En esta sección se presenta parte de la teoría desarrollada por él con este objetivo. Como parte de este trabajo de tesis se realizaron los cálculos necesarios para estudiar la convergencia de (3.1.8) a la EDE para la volatilidad (3.2.10). Posteriormente se usó el resultado principal en [24] para asegurar la convergencia en distribución. Lo anterior se presenta a continuación.

Sea $D([0, \infty), \mathbb{R})$ el espacio de funciones continuas por la derecha con límites por la izquierda. Para cada $h > 0$, se define el proceso $\{X_t^h\}_{h \downarrow 0} = \{\ln(\sigma_t^2)^h\}_{h \downarrow 0}$. Sea M_{kh} la σ -álgebra generada por $kh, X_0^h, X_h^h, \dots, X_{kh}^h$ y sea ρ_h una medida de probabilidad definida en $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$. Por otro lado, para cada $h > 0$ y cada $k = 0, 1, 2, \dots$ sea $\Pi_{h, kh}(x, \cdot)$ una función de transición en \mathbb{R} .

Para cada $h > 0$ sea P_h una medida de probabilidad en $D([0, \infty), \mathbb{R})$ tal que

$$P_h[X_0^h \in \Gamma] = \rho_h(\Gamma) \quad \text{para cualquier } \Gamma \in \mathcal{B}(R), \quad (3.2.11)$$

$$P_h[X_t^h = X_{kh}^h, kh \leq t < (k+1)h] = 1 \quad \text{y} \quad (3.2.12)$$

$$P_h[X_{(k+1)h}^h \in \Gamma \mid M_{kh}] = \Pi_{h, kh}(X_{kh}^h, \Gamma)$$

casi seguramente bajo P_h para todo $k \geq 0$ y $\Gamma \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$. (3.2.13)

Las ecuaciones anteriores especifican la distribución del punto inicial y las probabilidades de transición para el proceso de Markov X_{kh}^h y por otro lado, la forma en que se construye el proceso en tiempo continuo X_t^h . Este proceso está formado por funciones escalonadas. Finalmente se considera el proceso de difusión límite X_t al cual, bajo las condiciones enunciadas a continuación, convergerá en distribución el proceso $\{X_t^h\}$, cuando $h \downarrow 0$.

Para cada $\rho > 0$ y cada $h > 0$ se define

$$c_{h,\rho}(x, t) \equiv h^{-1} \int_{\mathbb{R}} |(y-x)|^{2+\rho} \Pi_{h, h[t/h]}(x, dy). \quad (3.2.14)$$

Si para algún $\rho > 0$, $c_{h,\rho}(x, t)$ es finita, entonces las siguientes integrales estarán bien definidas y serán finitas:

$$a_h^*(x, t) \equiv h^{-1} \int_{\mathbb{R}} (y-x)^2 \Pi_{h, h[t/h]}(x, dy), \quad (3.2.15)$$

$$b_h^*(x, t) \equiv h^{-1} \int_{\mathbb{R}} (y-x) \Pi_{h, h[t/h]}(x, dy). \quad (3.2.16)$$

$a^*(x, t)$ y $b^*(x, t)$ son medidas de la deriva y del segundo momento por unidad de tiempo del proceso.

Hipótesis 3.2.1. *Existe un $\delta > 0$ tal que para cada $R > 0$ y cada $T > 0$*

$$\lim_{h \downarrow 0} \sup_{|x| \leq R, 0 \leq t \leq T} c_{h,\delta}(x, t) = 0. \quad (3.2.17)$$

Por otro lado, existen funciones continuas $a(x, t)$ de $\mathbb{R} \times [0, \infty)$ en \mathbb{R}^+ y $b(x, t)$ de

$\mathbb{R} \times [0, \infty)$ en \mathbb{R} tales que

$$\lim_{h \downarrow 0} \sup_{|x| \leq R, 0 \leq t \leq T} |a_h^*(x, t) - a(x, t)| = 0 \quad \text{y} \quad (3.2.18)$$

$$\lim_{h \downarrow 0} \sup_{|x| \leq R, 0 \leq t \leq T} |b_h^*(x, t) - b(x, t)| = 0. \quad (3.2.19)$$

Hipótesis 3.2.2. Existe una función continua $d(x, t) : \mathbb{R} \times [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ tal que para todo $x \in \mathbb{R}$ y para todo $t \geq 0$

$$a(x, t) = d^2(x, t). \quad (3.2.20)$$

Hipótesis 3.2.3. X_0^h converge en distribución a una variable aleatoria X_0 con medida de probabilidad ρ_0 en $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$, cuando $h \downarrow 0$.

Hipótesis 3.2.4. ρ_0 , $a(x, t)$ y $b(x, t)$ especifican de manera única la distribución de un proceso de difusión con distribución inicial ρ_0 , coeficiente de difusión $a(x, t)$ y coeficiente de deriva $b(x, t)$.

Teorema 3.2.5. Bajo las hipótesis anteriores, la sucesión de procesos X_t^h definido por (4.2.14), (4.2.15) y (4.2.16) converge débilmente cuando $h \downarrow 0$ a X_t , proceso que está definido por la EDE

$$X_t = X_0 + \int_0^t b(X_s, s) ds + \int_0^t d(X_s, s) dW_s, \quad (3.2.21)$$

donde W_t es un MB estándar independiente de X_0 y, para cualquier $\Gamma \in \mathcal{B}(R)$, $P(X_0 \in \Gamma) = \rho_0(\Gamma)$. El proceso X_t existe y es único en el sentido distribucional. Finalmente, X_t es finito casi seguramente en intervalos de tiempo finitos, i.e., para todo $T > 0$,

$$P \left[\sup_{0 \leq t \leq T} |X_t| < \infty \right] = 1. \quad (3.2.22)$$

Ver demostración en [24].

Se considera ahora la discretización para la dinámica del proceso $X_t = \ln(\sigma_t^2)$ en (3.1.8)

$$\begin{aligned} \ln(\sigma^2)_{(k+1)h}^h &= X_{(k+1)h}^h \\ &= \alpha_h + \delta_h X_{kh}^h h + \beta_h [|Z_{kh}^h| - \sqrt{(2h/\pi)} + \chi_h Z_{kh}^h], \end{aligned} \quad (3.2.23)$$

con $\{Z_{kh}^h\} \sim iid \mathcal{N}(0, h)$ y $P_h[X_0^h \in \Gamma] = \rho_h(\Gamma)$ para cualquier $\Gamma \in \mathcal{B}(R)$. También se asume que la sucesión de medidas $\{\rho_h\}_{h \downarrow 0}$ satisface la Hipótesis (3.2.3) y $\rho_h(X_0) = 1$.

El proceso en tiempo continuo se define entonces como

$$X_t^h \equiv X_{kh}^h \quad \text{para} \quad kh \leq t < (k+1)h, \quad (3.2.24)$$

dando como resultado una sucesión de procesos en tiempo continuo $\{X_t^h\}$ formada por funciones escalonadas del proceso en tiempo discreto $\{X_{kh}^h\}$. A continuación se buscará demostrar que X_t descrito por (3.2.10) es un proceso en tiempo continuo al cual la sucesión anterior converge en distribución. Por tanto se buscará una sucesión $\{\alpha_h, \delta_h, \beta_h, \chi_h\}$ que haga que dicha convergencia débil suceda cuando $h \downarrow 0$. En efecto, la deriva para el proceso (3.2.23) en la unidad de tiempo h , condicionada a la información al tiempo kh está dada por

$$\begin{aligned} E[h^{-1}(X_{(k+1)h}^h - X_{kh}^h) | M_{kh}] &= E\left\{h^{-1}\left[\alpha_h + \delta_h X_{kh}^h h \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + \beta_h(|Z_{kh}^h| - \sqrt{2h/\pi} + \chi_h Z_{kh}^h) - X_{kh}^h\right] | M_{kh}\right\} \\ &= h^{-1}\alpha_h + (\delta_h - h^{-1})X_{kh}^h \\ &\quad + h^{-1}\beta_h E[|Z_{kh}^h| - \sqrt{2h/\pi} + \chi_h Z_{kh}^h | M_{kh}] \\ &= h^{-1}\alpha_h + h^{-1}(\delta_h h - 1)X_{kh}^h, \end{aligned} \quad (3.2.25)$$

pues con h fijo, $|Z_{kh}^h| - \sqrt{2h/\pi} + \chi_h Z_{kh}^h$ es una variable aleatoria con media cero. Por otro lado, usando técnicas similares (propiedades de la esperanza condicional y de momentos de la distribución normal) el segundo momento por unidad de tiempo condicionado al pasado para el proceso (3.2.23) es

$$\begin{aligned} E[h^{-1}(X_{(k+1)h}^h - X_{kh}^h)^2 | M_{kh}] &= (h\delta_h^2 + h^{-1} - 2\delta_h)(X_{kh}^h)^2 \\ &\quad + 2\alpha_h(\delta_h - h^{-1})X_{kh}^h \\ &\quad + h^{-1}\alpha_h^2 + \beta_h^2 \left[\frac{(\pi - 2)}{\pi} + \chi_h^2 \right]. \end{aligned} \quad (3.2.26)$$

Asumiendo que las siguientes igualdades se cumplen:

$$\lim_{h \downarrow 0} [h^{-1}\alpha_h] = \alpha \quad (3.2.27)$$

$$\lim_{h \downarrow 0} \left(\delta_h - \frac{1}{h} \right) = \delta < 0, \quad (3.2.28)$$

se desprende que

$$\begin{aligned}
\lim_{h \downarrow 0} (h\delta_h^2 + h^{-1} - 2\delta_h) &= \lim_{h \downarrow 0} \left\{ h \left(\delta_h - \frac{1}{h} + \frac{1}{h} \right)^2 + \frac{1}{h} - 2\delta_h \right\} \\
&= \lim_{h \downarrow 0} \left\{ h \left(\delta_h - \frac{1}{h} \right)^2 + 2 \left(\delta_h - \frac{1}{h} \right) - 2 \left(\delta_h - \frac{1}{h} \right) \right\} \\
&= 0.
\end{aligned} \tag{3.2.29}$$

Además

$$\begin{aligned}
\lim_{h \downarrow 0} [2\alpha_h h^{-1} (\delta_h h - 1)] &= \lim_{h \downarrow 0} \left[2\alpha_h \left(\delta_h - \frac{1}{h} \right) \right] \\
&= 0,
\end{aligned} \tag{3.2.30}$$

pues de la ecuación (3.2.27) se sigue que $\lim_{h \downarrow 0} \alpha_h = 0$. Las sucesiones requeridas son entonces

$$\alpha_h = \alpha h, \quad \delta_h = \delta + \frac{1}{h}, \quad \chi_h = \sqrt{\frac{\chi}{h}} \quad \text{y} \quad \beta_h = \beta \sqrt{h}.$$

con $\delta < 0$ y $\chi > 0$. Con éstas definiciones se sigue por las ecuaciones (3.2.29) y (3.2.30) que

$$\lim_{h \downarrow 0} E[h^{-1} (X_{(k+1)h}^h - X_{kh}^h) | M_{kh}] = \alpha + \delta X_t \tag{3.2.31}$$

$$\lim_{h \downarrow 0} E[h^{-1} (X_{(k+1)h}^h - X_{kh}^h)^2 | M_{kh}] = \chi. \tag{3.2.32}$$

Después de una serie de cálculos se encontró que la esperanza $E[h^{-1} (X_{(k+1)h}^h - X_{kh}^h)^3 | M_{kh}]$ tiende a cero cuando h lo hace. Por lo anterior la Hipótesis 3.2.1 se cumple. En la expresión (3.2.10) sean $\frac{\gamma^2 \hat{a}}{2\hat{b}^2} = \alpha$, $-\frac{\gamma^2}{2\hat{b}^2} = \delta$ y $\chi = \gamma$ y, por el Teorema 3.2.5 se concluye que el proceso $X_t^h = \ln(\sigma_t^2)^h$ converge en distribución al proceso X_t definido por la EDE en (3.2.10).

Se considera al proceso S_t^h que representa un activo financiero cuya dinámica está dada por la serie de tiempo

$$s_t = c + d\sigma_t^2 + e_t, \tag{3.2.33}$$

con c y d constantes, σ_t^2 el proceso tal que $\ln \sigma_t^2$ está definido por (3.1.8) y e_t como en (3.1.2). Un procedimiento análogo demuestra que ésta converge en distribución al

proceso S_t definido por la EDE en (1.1.3)

$$dS_t = \mu_t S_t dt + \sigma_t S_t dW_t^S, \quad (3.2.34)$$

cuando $\mu_t = \mu(\sigma_t)$. La demostración para una ecuación similar a (3.2.33) puede verse en [24].

En el Capítulo 4 se mostrará específicamente que una serie de tiempo como (3.2.33) describe razonablemente a la serie S&P500.

Capítulo 4

Metodología propuesta para la comparación de métodos de valuación

El objetivo de este capítulo es exponer la metodología sugerida en esta tesis para generar gráficas. Éstas permitirán la comparación numérica de los dos métodos de valuación introducidos en el Capítulo 2. Por tal motivo, se hace referencia al modelo asumido para el mercado en el que opera el activo subyacente de las opciones Europeas. Éste está dado por las ecuaciones descritas en la Sección 1.2.2.

En vista de que las expresiones para el precio de una opción Europea tipo *call* calculadas con los métodos min-R y p-indi dependen de los parámetros de dicho modelo, inicialmente se realizó la inferencia de los parámetros de éste con base en observaciones diarias del índice financiero Standard & Poor's 500 (S&P500). Éste opera en la bolsa de valores de Nueva York, Estados Unidos. Muchos econométristas eligen analizar esta serie pues, para algunos expertos en finanzas, se trata de la más representativa del mercado mundial. Esto se debe a que en ella operan 500 de las empresas más importantes en distintos rubros. Creada por Standard & Poor's, una de las empresas consultoras más grandes del mundo, el índice ha mostrado con el paso de los años ser bastante sólido soportando derrumbes bursátiles como el del año 87. El periodo de tiempo en el que se analizó dicha serie comprende del 7 de diciembre del 2000 al 6 de diciembre del 2004 y a lo largo de este capítulo se denotará a ésta como s_t . Se asumió además que de este índice no se pagan dividendos.

La mayor parte de las pruebas estadísticas llevadas a cabo y descritas en este

capítulo se realizaron en el módulo *finmetrics* del software *Splus*, especial para series de tiempo. En cuanto al trabajo de programación, éste se desarrolló en el software *Matlab*.

4.1. Inferencia estocástica

La inferencia del parámetro r_t en la EDO (1.2.11) para el bono B , $dB_t = r_t B_t dt$, se simplifica dado que se ha dicho ya que éste proceso se considera constante y conocido. Por otro lado, una vez más se hace referencia a la EDE para el proceso S

$$dS_t = \mu_t S_t dt + \sigma_t S_t dW_t^S.$$

Para estimar μ_t se siguió el siguiente procedimiento:

Estimación adaptada de μ_t

Se calculó con base en el artículo de Spokoiny (ver [27]) lo que se conoce como el estimador adaptado de la deriva. El objetivo es recuperar la función deriva μ_t de las observaciones de S_t , s_t (S&P500), en un periodo $[0, T]$. La estimación es puntual y entonces dado un valor s al tiempo t se estima el valor de $\mu_t(s)$. La idea en términos generales es similar a mínimos cuadrados. Sin embargo se ha visto ya que las series financieras no son en general suaves por lo que el método de Spokoiny ajusta funciones que son aproximadamente lineales en intervalos de la forma $[s-h, s+h]$. Estos últimos deben ser lo suficientemente pequeños como para que la trayectoria de S_t sea lo más suave posible. En cada intervalo se define un suavizador local lineal que, bajo ciertas condiciones, está muy cerca del estimador puntual $\mu_t(s)$. La precisión del estimador se mide mediante lo que Spokoiny define como varianza del estimador. Para los fines de este trabajo este estimador es suficientemente preciso. Esto se validó simulando trayectorias del proceso $\ln(S_t)$ en diferentes periodos de tiempo usando el proceso estimador de μ_t y la volatilidad estimada obtenida de la forma que se mostrará más adelante en la Sección 4.1.1. Dichas simulaciones se comparan con los datos reales del logaritmo del índice S&P500. Las Figuras 4.1 y 4.2 muestran algunas de estas simulaciones graficadas de forma conjunta con el logaritmo de la trayectoria original del precio de S&P500.

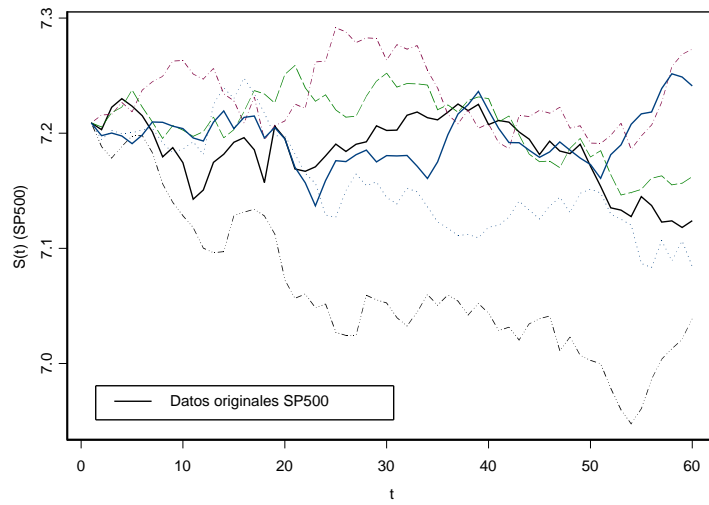


Figura 4.1: Cinco simulaciones del proceso $\ln(S_t)$ con μ_t estimada mediante el estimador lineal adaptado.

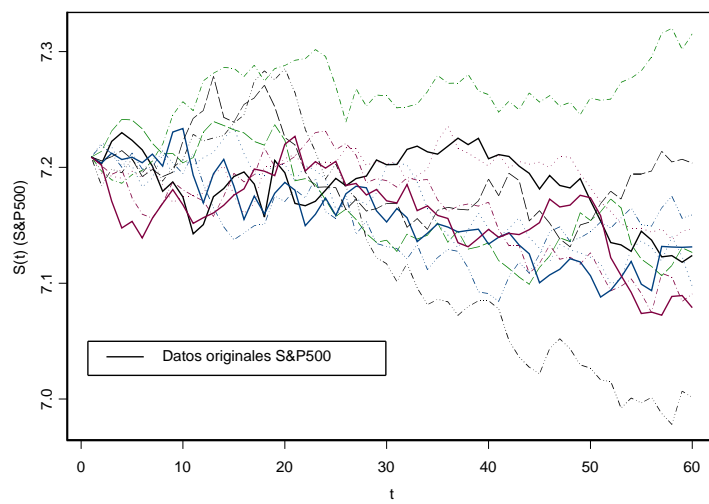


Figura 4.2: Diez simulaciones del proceso $\ln(S_t)$ con μ_t estimada mediante el estimador lineal adaptado.

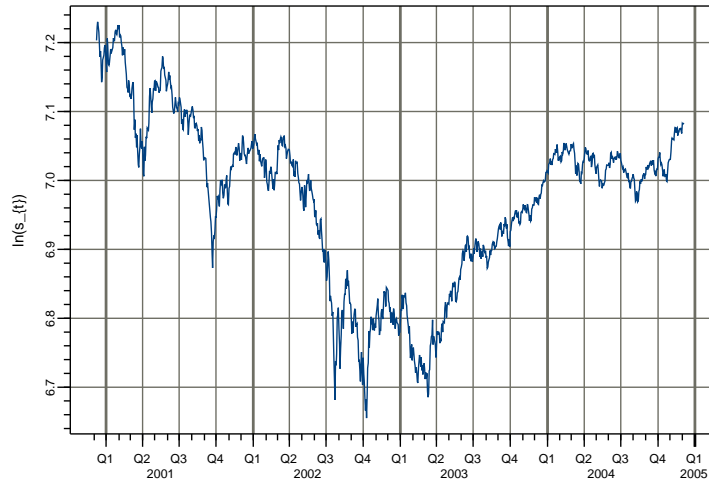


Figura 4.3: Logaritmo natural de valores diarios del índice S&P500.

Por otro lado la estimación del parámetro σ_t en la EDE del proceso S se realizó haciendo uso de la relación que hay entre éste y el proceso X , es decir, $X = \ln(\sigma^2)$. Luego el problema se reduce a estimar los coeficientes $C(x)$ y $D(x)$ (o los parámetros incluidos en éstos). Con ese fin y recordando que la expresión para el coeficiente $C(x)$ dada en (1.2.21)

$$C(x) = \frac{1}{2f_X(x)} \frac{d(D^2(x)f_X(x))}{dx}, \quad \text{para } x \in \mathbb{R},$$

depende de la distribución estacionaria del proceso X y del coeficiente $D(x)$, se llevó a cabo el siguiente ajuste para proponer ambos.

4.1.1. Ajuste del modelo EGARCH a la serie S&P500

En muchas ocasiones cuando se estudian series de tiempo resulta muy útil trabajar con el logaritmo natural (logaritmo) de la serie original. El hacerlo ayuda a disminuir el tamaño de los cambios conservando a su vez la variabilidad, los *clusters*, las tendencias y en general, el comportamiento de la serie original. Por este motivo en este trabajo se eligió estudiar el logaritmo de la serie S&P500. La Figura 4.3 muestra la trayectoria de esta nueva serie.

Debido a la definición (3.1.1) y los supuestos (3.1.2) en el capítulo anterior, el ajuste de un modelo con residuos ARCH debe hacerse preferentemente a una serie estacionaria. De esta forma se garantiza que el primer y segundo momentos de s_t son invariantes. Sin embargo, más allá del requisito teórico para la validación del modelo, es importante saber que obtener las diferencias de una serie tiene aplicación en el contexto financiero. La definición siguiente introduce un proceso muy utilizado en la literatura económica.

Definición 4.1.1. *El retorno continuamente compuesto en un periodo está determinado por la expresión*

$$v_t = \ln\left(\frac{s_t}{s_{t-1}}\right). \quad (4.1.1)$$

Este proceso tiene el propósito de dar información acerca del cambio en el precio s_t en un periodo de tiempo comprendido entre $t - 1$ y t . Este término tiene entonces sentido económicamente hablando y dado que

$$s_t = e^{v_t} s_{t-1}, \quad (4.1.2)$$

se puede regresar de una a otra serie sin que el estudio pierda significado. Por tal motivo el análisis de esta sección se centra en la serie $v_t = \ln\left(\frac{s_t}{s_{t-1}}\right) = \ln(s_t) - \ln(s_{t-1})$. La Figura 4.4 muestra las realizaciones de ésta.

Después de obtener la serie de diferencias v_t se buscó evidencia estadística de que la serie es en efecto estacionaria. La Figura 4.5 muestra las funciones de autocorrelación (ACF) y autocorrelación parcial (PACF). Este tipo de gráficas exhibe la estructura de correlación entre las observaciones, permitiendo apreciar visualmente si el proceso en cuestión tiene estructura de medias móviles o autoregresiva. En particular en la Figura 4.5 puede apreciarse que aunque hay algún *lagg* significativo en 12, la serie tiene en general un comportamiento estacionario.

Para mostrar estacionariedad más formalmente, se realizó la prueba basada en el estadístico KPSS, debido a Kwiatkowski, Phillips, Schmidt y Shin (ver [21]). El resultado es que a la luz de los datos de S&P500 no se encuentra evidencia para rechazar la hipótesis de estacionariedad a un nivel de 0.05 (ver tabla de cuantiles del estadístico KPSS en [29]). En muchos estudios relacionados con finanzas, un nivel de confianza como éste es muy razonable.

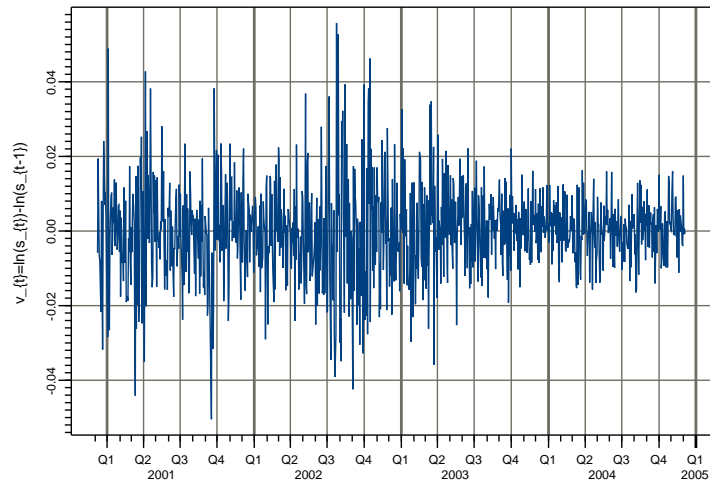


Figura 4.4: Diferencias del logaritmo de la serie S&P500.

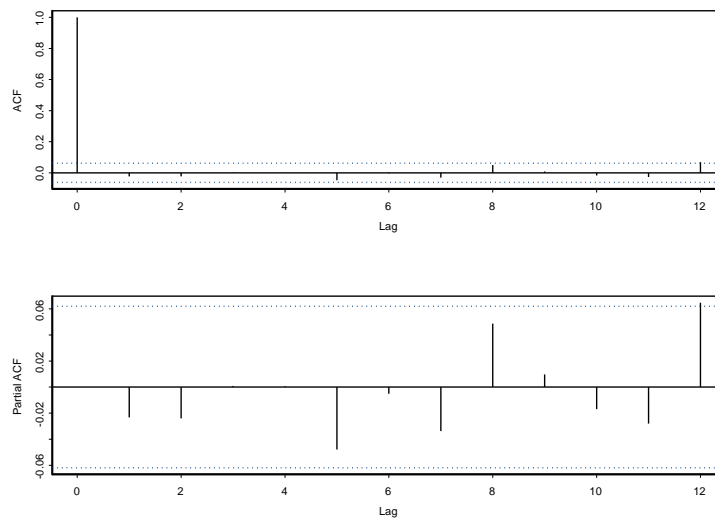


Figura 4.5: ACF y PACF para v_t .

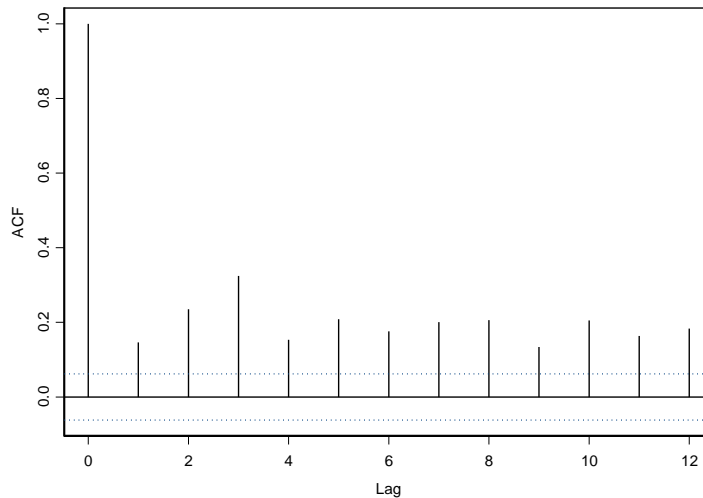


Figura 4.6: ACF de v_t^2 .

Prueba de efectos ARCH para v_t

Como punto siguiente en el análisis se buscaron efectos ARCH en la serie v_t , es decir, si existe evidencia de que la varianza condicionada depende del pasado. La Figura 4.6 muestra la ACF para la serie v_t^2 . Dado que el cuadrado de la serie v_t mide el momento de segundo orden de la serie original, la Figura 4.6 muestra que la varianza de v_t condicionada a su pasado puede cambiar a lo largo del tiempo. Esto representa una primera prueba de que la serie tiene efectos ARCH en los residuos. Para asumir esto de forma más contundente se realizó una prueba basada en el estadístico Multiplicador de Lagrange (ver [7]). En ésta la hipótesis nula es que no hay efectos ARCH. El resultado de la prueba es que hay evidencia en los datos para rechazar la hipótesis nula a un nivel de 0.01.

Ajuste y adecuación

Con la finalidad de encontrar la media condicionada (3.1.4) para v_t , se hace referencia una vez más a la Figura 4.5. Las funciones ahí no revelan correlación significativa entre ninguna observación. Los valores que toma v_t parecen provenir únicamente de eventos aleatorios. Por lo tanto, se asume que el modelo para v_t es uno de regresión muy simple.

Por otra parte, cuando invierte en el mercado financiero, un inversionista que se expone a un riesgo alto usualmente esperará tener un premio por esto. Aunque la teoría financiera actual para el precio de un activo no considera que esta relación sea tan simple, Engle, Lilien y Robins (ver [8]) propusieron en 1987 un modelo que incluye esta preferencia del inversionista. En éste la volatilidad condicional tiene oportunidad de generar un premio al riesgo que sea parte de los rendimientos esperados. Esta idea se conserva en este trabajo por lo que la ecuación sugerida para la media condicional de v_t es

$$v_t = c + d\sigma_t^2 + e_t, \quad (4.1.3)$$

donde c y d son constantes, $e_t = \sigma_t z_t$, $z_t \sim \mathcal{N}(0, 1)$ y σ_t^2 es el proceso en esta ecuación para e_t .

El modelo asumido para la varianza condicional en (3.1.4) es EGARCH(1,1) y las razones de su elección se enumeran a continuación.

1. No es necesaria la hipótesis de positividad en los parámetros.
2. Incluye la propiedad de asimetría detallada en el Capítulo 3.
3. Asume que una serie financiera y la volatilidad asociada a ésta están correlacionadas.

Los parámetros para este modelo se eligieron haciendo uso de resultados de ajustes previos (ver [25]) que indican que un modelo EGARCH(1,1) es adecuado en muchas series financieras similares. Existen además criterios de selección de modelo en los cuales la idea es ajustar todos los modelos EGARCH(p,q) con órdenes $p \leq p_{max}$ y $q \leq q_{max}$. Luego se eligen los valores p y q que minimicen algún criterio de selección. Entre éstos los más comunes son el de Akaike (AIC) y el de Schwarz-Bayesian (BIC). Bajo estos dos criterios, el modelo EGARCH(1,1) resulta más adecuado que el EGARCH(1,2) o el EGARCH(2,1). La ecuación para la varianza condicional es entonces

$$x_t = \ln \sigma_t^2 = \alpha + \beta_1[\chi z_{t-1} + (|z_{t-1}| - \sqrt{2/\pi})] + \delta_1 \ln \sigma_{t-1}^2. \quad (4.1.4)$$

Contando con todos los requerimientos anteriores se llevó a cabo el ajuste del modelo, realizando la estimación de los parámetros en (4.1.4) con el algoritmo BHHH. Éste es un procedimiento iterativo que combina un algoritmo genético con el algoritmo de Berndt, Hall, Hausman y Hall (ver [2]). Los valores de los estimadores se muestran a continuación:

	Valor	Error Est.	Valor t	$Pr(> t)$
C	-0.001235	0.0006239	-1.979	0.02402279
ARCH-IN-MEAN	9.495216	4.7370068	2.004	0.02264485
A	-0.469390	0.1201613	-3.906	0.00005002
ARCH(1)	0.100416	0.0346708	2.896	0.00192941
GARCH(1)	0.957204	0.0114407	83.667	0.00000000
LEV(1)	-0.999989	0.3450923	-2.898	0.00192051

En la tabla C y ARCH-IN-MEAN corresponden a las constantes c y d en la ecuación (4.1.3) y A, ARCH(1), GARCH(1) y LEV(1) corresponden a α , β_1 , δ_1 y χ en (4.1.4) respectivamente. Los estimadores son de máxima verosimilitud y para éstos se dan los errores estándar y el valor del estadístico t -Student. Con éste se prueba la hipótesis nula de que los verdaderos valores de los parámetros son cero. Para cada prueba se expone además el p-valor correspondiente. A la luz de los datos se encontró evidencia para rechazar todas las pruebas a un nivel de 0.05.

Por otro lado si (4.1.4) y (4.1.3) describen exitosamente la estructura de correlación serial en la media y varianza condicionales, tal como se mencionó en la Sección 3.1.2, no debe haber correlación en los residuales estandarizados y tampoco en los residuales al cuadrado estandarizados. Para mostrar esto se realizaron dos pruebas basadas en el estadístico Ljung-Box (ver [22]). La conclusión en ambas es que no se encuentra evidencia para rechazar la hipótesis nula de no correlación a un nivel de 0.01.

La Figura 4.7 muestra los residuales del ajuste del modelo mientras que las Figuras 4.8 y 4.9 las gráficas de sus correspondientes ACF y PACF. En éstas puede apreciarse que en general ya no existe estructura en los residuales.

Finalmente resta probar si el supuesto de distribución normal para el modelo es razonable. En efecto, se realizaron dos pruebas basadas en los estadísticos Jarque-Bera y Shapiro-Wilks (ver [29]). Como resultado de éstas y con base en los datos de S&P500 no se encontró evidencia para rechazar la hipótesis de normalidad en los residuales a un nivel de 0.05. Adicionalmente la Figura 4.10 muestra un QQ-plot de dichos residuales donde se puede observar un pequeño desajuste en la cola inferior. Este resultado no debe sorprender pues la serie v_t contiene algunos valores atípicos. Sin embargo en términos generales se considera suficientemente razonable suponer dicha distribución.

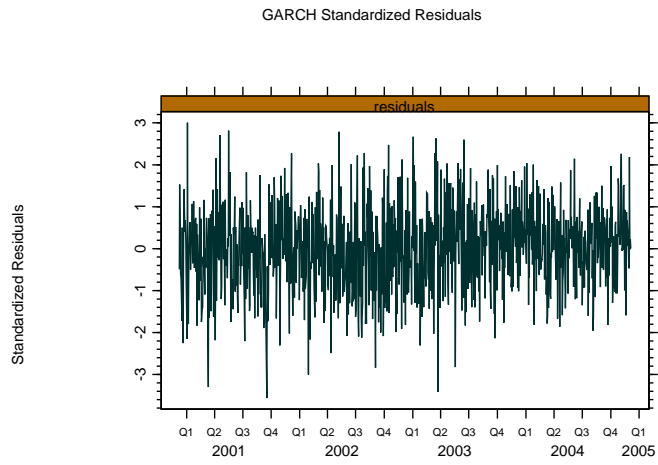


Figura 4.7: Residuales del modelo EGARCH.

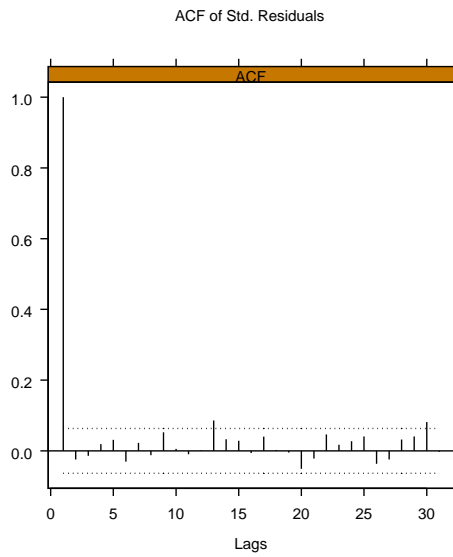


Figura 4.8: ACF de los residuales del modelo.

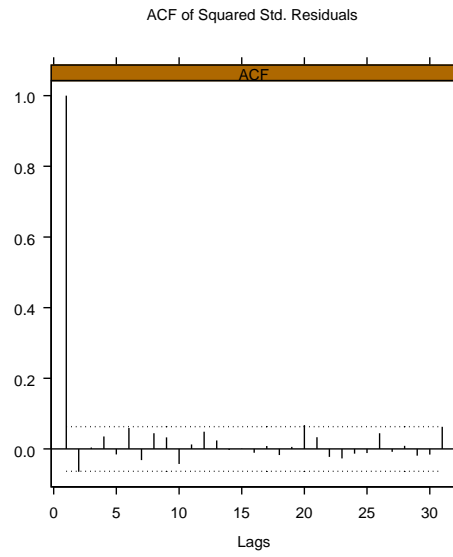


Figura 4.9: ACF de los residuales al cuadrado estandarizados.

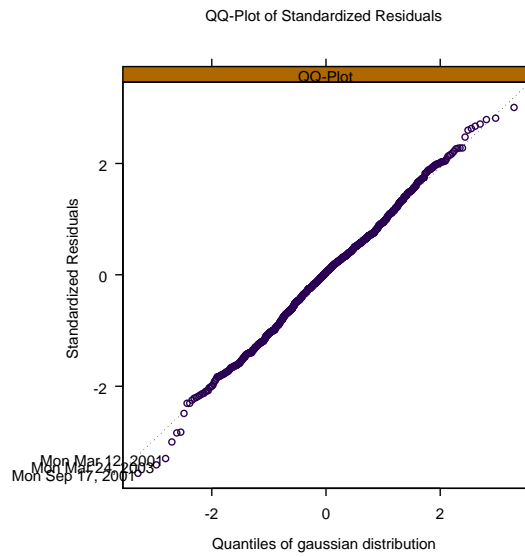


Figura 4.10: QQ-plot para los residuales del modelo.

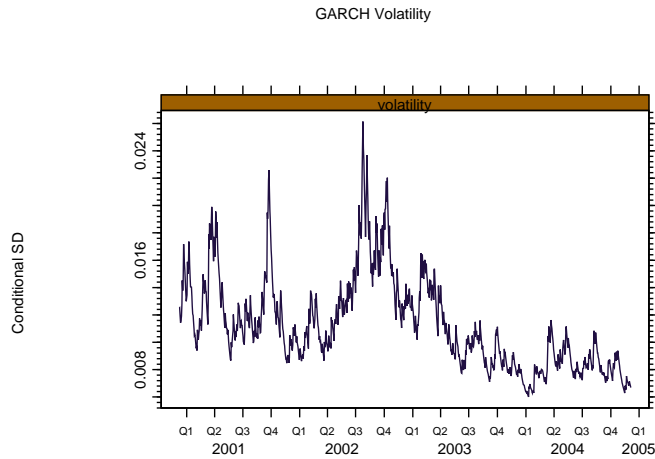


Figura 4.11: Serie de la volatilidad.

La volatilidad asociada al proceso v_t se obtiene de forma recursiva con la ecuación (4.1.4) y los parámetros estimados. Así la serie de tiempo para la volatilidad se ve como en la Figura 4.11. Es notable el hecho de que este proceso toma sus valores más altos justo cuando la serie v_t se incrementa o decae significativamente. La Figura 4.12 permite apreciar este fenómeno más claramente.

Con el análisis anterior se concluye que el modelo EGARCH(1,1) ajusta de forma razonable a la serie S&P500 en el periodo de tiempo que va del 7 de diciembre del 2000 al 6 de diciembre del 2004. Por tanto de aquí en adelante se considera al proceso de volatilidad (a la función de ésta) descrita por la expresión

$$\ln(\sigma_t^2) = (-0.469390) + (0.100416)[(-0.999989)z_{t-1} + (|z_{t-1}| - \sqrt{(2/\pi)})] + (0.957204) \ln(\sigma_{t-1}^2). \quad (4.1.5)$$

Una elección de otro modelo empírico que ajuste mejor a los datos es claramente posible. En principio optar por uno con residuales que tengan una distribución de colas pesadas es factible. Sin embargo, como ya se ha comentado, la manejabilidad de la distribución normal es difícil de igualar. Por otro lado, elegir un modelo con una media condicional más compleja que la actual es también posible pero al mismo

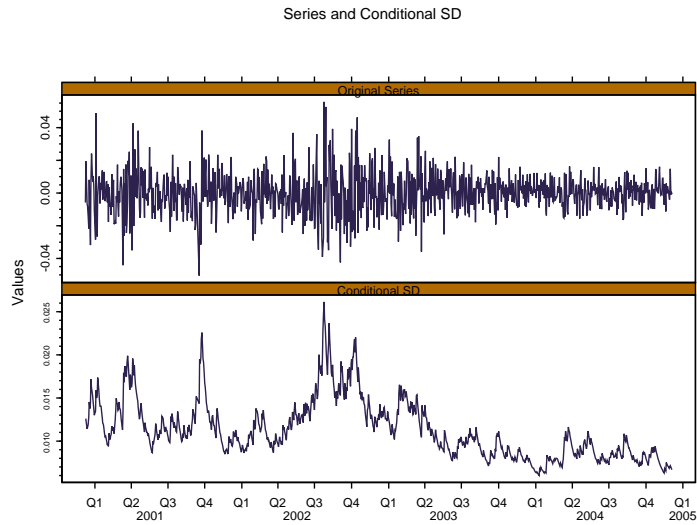


Figura 4.12: Serie de tiempo v_t y volatilidad asociada

tiempo se perdería en el sentido de contar con muchos más parámetros a estimar.

Distribución estacionaria de $\ln(\sigma_t^2)$

El objetivo de esta sección es mostrar como se encontró empíricamente la distribución estacionaria del proceso X . Posteriormente se encontrarán los estimadores de los parámetros de ésta para así obtener la estimación explícita de los coeficientes $C(x)$ y $D(x)$ en (4.1.10).

Sea x_t la serie de tiempo cuya dinámica está dada en (4.1.5). Si se considera a ésta descrita por un modelo ARMA(1,1), el polinomio característico asociado es

$$\phi_s(z) = 1 - (0.957204)z. \quad (4.1.6)$$

La raíz de este polinomio es $z = 1.0447$. Dado que es mayor a uno se muestra parcialmente que el proceso es ergódico (ver [29]). Por lo tanto, sin importar el punto en el que inicie la serie, los momentos muestrales convergerán en probabilidad a los momentos poblacionales, es decir, se alcanzará la distribución estacionaria.

Se sabe ya que la serie x_t representa la volatilidad asociada a v_t a lo largo de 1000 días. Esto es equivalente a observar en el mercado dicho precio continuamente por casi

cuatro años. En un mercado financiero es poco común firmar contratos de expiración más allá de uno o dos años. Esto es lógico pues un inversionista prefiere obtener beneficios en menos tiempo e invertir su capital más dinámicamente, además de que su ignorancia del comportamiento de la serie S&P500 aumenta conforme aumenta el tiempo de expiración. Por estas razones se considera que la serie x_t reflejará un comportamiento límite respecto a su condición inicial después de un periodo de 1000 días. En otras palabras, se considera que alcanzará su distribución estacionaria para entonces.

Con el argumento anterior y sin perder de vista que la distribución asumida para z_t es $\mathcal{N}(0, 1)$, se simularon $M = 500$ trayectorias de $N = 1000$ observaciones del proceso dado por (4.1.5). Posteriormente se conservaron las muestras (de tamaño M) que consisten de observaciones independientes del valor del proceso al tiempo $t = 2, 5, 10, 50, 100, 500, 900, 1000$. Como ejemplo, al tiempo $t = 100$ se obtuvo una muestra de tamaño 500 que representa realizaciones independientes del valor de la serie x_{500} .

Para estas 8 muestras se llevaron a cabo histogramas que se presentan en las Figuras 4.13 y 4.14. En éstas puede apreciarse que la distribución proceso converge a una simétrica. Por tanto se realizó un QQ-plot (ver Figura 4.15) con los cuantiles de la distribución normal para la muestra correspondiente al tiempo $t = 1000$ que como ya se explicó, es cuando se aprecia la propiedad asintótica del proceso. En éste se aprecia que empíricamente la distribución normal es razonable como distribución estacionaria de X . Para concluir de forma más contundente se realizaron dos pruebas basadas en los estadísticos Jarque-Bera y Shapiro-Wilks. Como resultado de éstas y con base en los datos de S&P500 no se encontró evidencia para rechazar la hipótesis de normalidad a un nivel de 0.05. Por tanto se consideró como distribución estacionaria de X la $\mathcal{N}(a, b)$ *i.e.*

$$f_{\ln(\sigma^2)}(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi b^2}} \exp \left\{ -\frac{(x - a)^2}{2b^2} \right\}. \quad (4.1.7)$$

Bajo la normalidad asumida se procedió a obtener las expresiones para $C(x)$ y $D(x)$. El análisis se presenta a continuación.

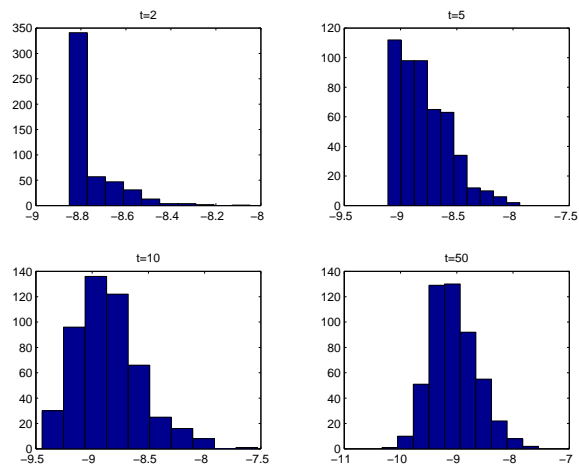


Figura 4.13: Histogramas de las muestras correspondientes al tiempo $t = 2, 5, 10, 50$.

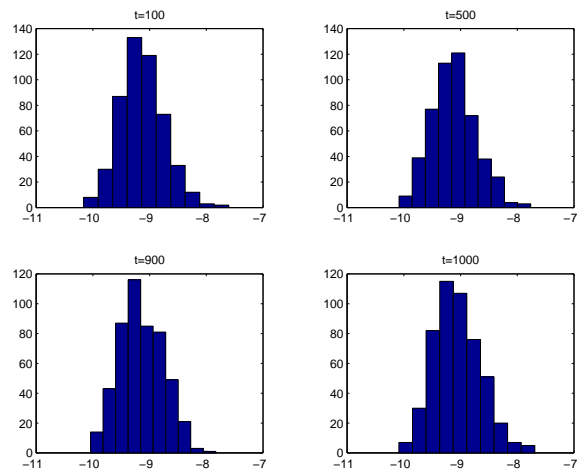


Figura 4.14: Histogramas de las muestras correspondientes al tiempo $t = 100, 500, 900, 1000$.

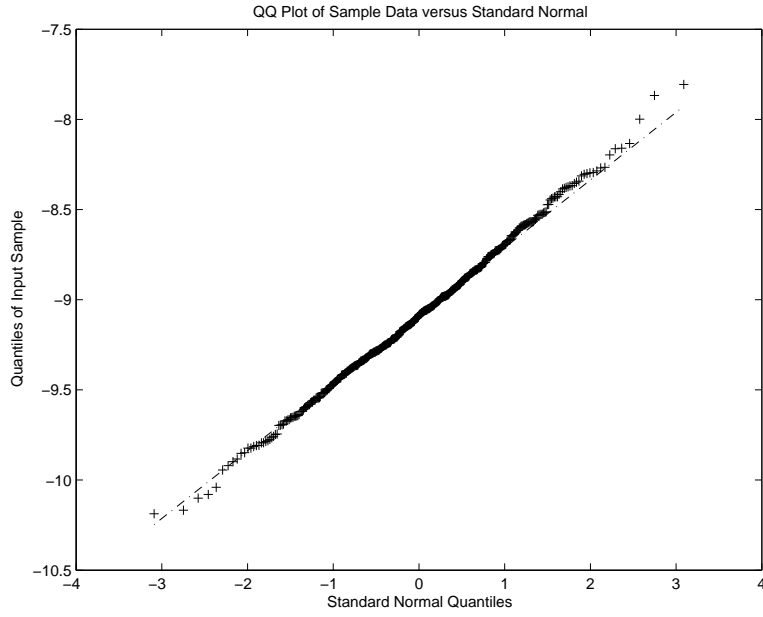


Figura 4.15: QQ-plot para la muestra al tiempo $t = 1000$.

Especificación de los coeficientes $C(x)$ y $D(x)$

De la expresión (1.2.21) obtenida para $C(x)$ en el Capítulo 1 y (4.1.7), los coeficientes de (1.2.13) están dados por:

$$D(x) = \gamma. \quad (4.1.8)$$

$$\begin{aligned}
 C(x) &= \frac{1}{2 \left[\frac{1}{\sqrt{2\pi b^2}} \exp \left\{ -\frac{(x-a)^2}{2b^2} \right\} \right]} \frac{d \left[\gamma^2 \frac{1}{\sqrt{2\pi b^2}} \exp \left\{ -\frac{(x-a)^2}{2b^2} \right\} \right]}{dx} \\
 &= \frac{\gamma^2}{2} \left(-\frac{(x-a)}{b^2} \right) \\
 &= \frac{\gamma^2}{2b^2} (a-x)
 \end{aligned} \quad (4.1.9)$$

Usando estas expresiones, la ecuación (1.2.13) se escribe ahora como

$$dX_t = d \ln(\sigma_t^2) = \left\{ \frac{\gamma^2}{2b^2} \left[a - \ln(\sigma_t^2) \right] \right\} dt + \gamma dW_t^\sigma, \quad (4.1.10)$$

donde el coeficiente $D(x) = \gamma > 0$ se asume positivo pues se pretende respetar la dirección de la volatilidad.

A un modelo con una EDE como la anterior se le conoce como aditivo. Modelos más generales como los multiplicativos incluyen al proceso X_t (o una función de éste) en $D(x)$, de tal forma que la volatilidad de la volatilidad pueda cambiar. En este trabajo no se considera este caso más general.

Ahora se puede garantizar que para la EDE de $\ln(\sigma_t^2)$ existe una única solución fuerte. La solución a la ecuación (4.1.10) está dada por (ver [20]),

$$X_t = e^{-\frac{\gamma^2}{2b^2}t} \left[x_0 - a(1 - e^{\frac{\gamma^2}{2b^2}t}) + \int_0^t e^{\frac{\gamma^2}{2b^2}s} dW_s^\sigma \right]. \quad (4.1.11)$$

Este proceso corresponde al famoso proceso de Ornstein-Uhlenbeck. Esta identificación permite comprobar (ver [19]) que existe la solución fuerte de (4.1.10), que ésta es de Markov y Gaussiana con distribución

$$N\left(a + (x_0 - a)e^{-\frac{\gamma^2}{2b^2}t}, b^2(1 - e^{-\frac{\gamma^2}{b^2}t})\right). \quad (4.1.12)$$

y su distribución invariante, obtenida haciendo tender $t \rightarrow \infty$ es, tal y como se observó empíricamente, $N(a, b)$.

Estimación de parámetros de la distribución estacionaria

Para encontrar los estimadores de a y b se obtuvieron los de máxima verosimilitud. En efecto, como ya se ha justificado antes, al tiempo $t = 1000$ el proceso dará información confiable del comportamiento límite de la variable. Con esta muestra de 500 datos se encontraron los estimadores máximo verosímiles, es decir, los valores de a y b que maximicen

$$\mathcal{L}(a, b, \vec{x}) = \prod_{i=1}^{500} \frac{1}{\sqrt{2\pi b^2}} \exp\left\{-\frac{(x_i - a)^2}{2b^2}\right\}, \quad (4.1.13)$$

y para éstos puede calcularse un intervalo de verosimilitud-confianza. Por ahora sólo se conservará la estimación puntual. Haciendo los cálculos necesarios se encuentra que $\hat{a} = -9.0875$ y $\hat{b} = 0.4204$.

Por lo tanto, la fórmula para $C(x)$ en (4.1.8) es explícita sustituyendo los valores

de los estimadores \hat{a} y \hat{b} . A partir de ahora se fija el valor de $D(x)$ en $\gamma = 0.005$. La razón de esta elección es por su interpretación pues este parámetro controla la variabilidad de la volatilidad que se asume pequeña.

4.2. Comparación de los métodos

El objetivo de esta sección es documentar diferencias entre la valuación de una opción Europea tipo *call* bajo los métodos min-R y p-indi. Por la forma en que se construyen, los precios basados en estos métodos pertenecerán a un intervalo virtual dentro del cual están todos los precios que no generan oportunidades de arbitraje. Es consecuencia ambos establecen criterios susceptibles de ser adoptados por un inversionista a la hora de contratar una opción. A continuación se describe la forma en que se calculó numéricamente el precio en ambos criterios.

Cálculo numérico del precio p-indi

Como se vio en el Capítulo 2 la fórmula para el precio de indiferencia, el cual coincide en este estudio con el precio de la opción Europea, es

$$p = \psi(t, x, s) - \phi(t, x), \quad (4.2.14)$$

donde las funciones ψ y ϕ resuelven un par de ecuaciones diferenciales parciales. Estas últimas están dadas en (2.2.70) y (2.2.71) respectivamente. Por esta razón este trabajo se centró en encontrar la aproximación numérica de las soluciones de dichas ecuaciones. Para hacerlo se usó el método numérico conocido como Diferencias Finitas (ver [28]). Inicialmente se definieron un par de ecuaciones auxiliares $\tilde{\psi}$ y $\tilde{\phi}$ de la siguiente forma:

$$\tilde{\psi}(T - t, x, s) = \psi(t, x, s) \quad y \quad \tilde{\phi}(T - t, x) = \phi(t, x), \quad (4.2.15)$$

en donde T es una constante fija que representa el tiempo de expiración de la opción Europea. De estas expresiones se observa que las condiciones iniciales para estas nuevas funciones $\tilde{\psi}$ y $\tilde{\phi}$ son las condiciones finales de ψ y ϕ respectivamente

$$\tilde{\psi}(0, x, s) = \psi(T, x, s) = h(s) \quad y \quad \tilde{\phi}(0, x) = \phi(T, x) = 0. \quad (4.2.16)$$

A continuación se calcularon las derivadas parciales de (2.2.70) y (2.2.71) en términos de estas funciones auxiliares. Posteriormente se aproximó a estas nuevas derivadas parciales mediante diferencias finitas, las cuales se basan en la definición de derivada. Siguiendo este proceso para la función $\tilde{\phi}$ se obtuvo la siguiente ecuación:

$$\begin{aligned} \tilde{\phi}_{n+1}^m &= \tilde{\phi}_n^m \\ &+ \left\{ \left[\frac{\gamma^2}{2(0.4860)^2}(-9.0428 - mh) \right] - \left[\frac{\rho\mu(nk)\gamma}{\sqrt{\exp(mh)}} \right] \right\} \left(\frac{\lambda}{2} \right) \left(\tilde{\phi}_n^{m+1} - \tilde{\phi}_n^{m-1} \right) \\ &+ \frac{\lambda\gamma^2}{2h}(\tilde{\phi}_n^{m+1} - \tilde{\phi}_n^{m-1} - 2\tilde{\phi}_n^m) + \frac{\lambda\gamma^2}{8h}\theta(\rho^2 - 1)(\tilde{\phi}_n^{m+1} - \tilde{\phi}_n^{m-1})^2 \\ &+ k \left[\frac{\mu^2(nk)}{2\theta \exp(mh)} \right], \quad m, n \in \mathbb{Z}^+ \text{ y } \lambda = k/h. \end{aligned} \quad (4.2.17)$$

Mediante un criterio conocido como de Von Newman puede demostrarse parcialmente que la solución numérica calculada mediante (4.2.17) converge a la solución teórica de la EDP siempre que

$$\frac{k}{h^2}(2l + Uh) \leq 1, \quad (4.2.18)$$

donde U y l son los coeficientes de $\tilde{\phi}_x$ y $\tilde{\phi}_{xx}$ respectivamente en la EDP para $\tilde{\phi}$. Por otro lado k y h determinan el ancho de las rejilla en cuyos vértices se encuentra dicha solución numérica. Eligiendo los valores adecuados de k y h se programó (4.2.17) en el software *Matlab*. La Figura 4.16 muestra la gráfica de la aproximación a la solución de $\tilde{\phi}$ en un intervalo de tiempo que representa 30 días. Análogamente, solo que esta vez dependiendo de una tercera variable s , se muestra que para valores adecuados de k , h y j , la solución numérica de $\tilde{\psi}$, calculada mediante una expresión más compleja que (4.2.17), también converge a la solución teórica. El procedimiento de programación es similar al descrito antes para $\tilde{\phi}$.

El precio de la opción Europea al tiempo t pudo calcularse entonces evaluando las funciones $\tilde{\phi}$ y $\tilde{\psi}$ en el valor del índice S&P500, la volatilidad asociada a éste (obtenida del ajuste del modelo EGARCH), el estimador lineal adaptado de μ y las condiciones de la opción en ese instante. Posteriormente haciendo

$$\tilde{\psi}(t, x_t, s_t) - \tilde{\psi}(t, x_t). \quad (4.2.19)$$

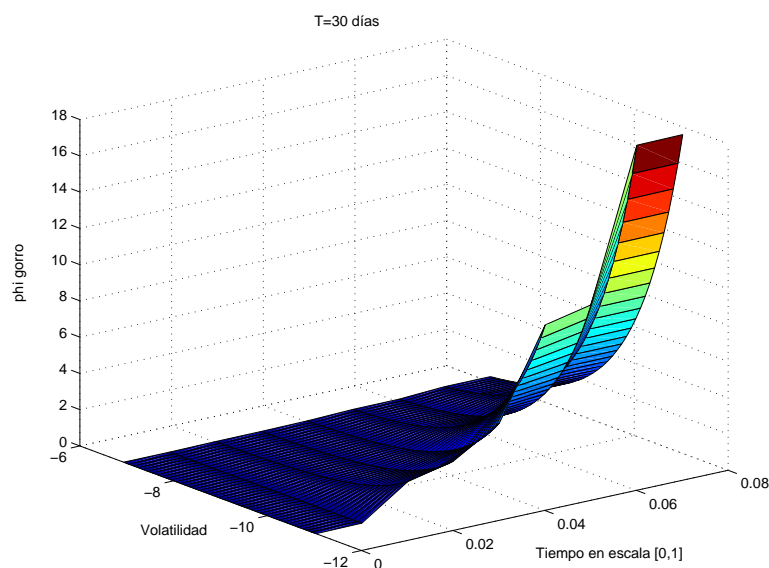


Figura 4.16: Gráfica de la aproximación a la solución de $\tilde{\phi}$

Cálculo numérico del precio min-R

En este caso específico se programó en el software *Matlab* la fórmula (2.1.42),

$$\hat{H}(t) = S_t e^{me(t,T) + \frac{1}{2}va(t,T)} \Phi \left[\frac{\ln \left(\frac{B_t S_t}{B_T K} \right) + me(t,T) + va(t,T)}{\sqrt{va(t,T)}} \right] - \frac{B_t}{B_T} K \Phi \left\{ \frac{\ln \left(\frac{B_t S_t}{B_T K} \right) + me(t,T)}{\sqrt{va(t,T)}} \right\}.$$

Encontrando cuantiles de la distribución normal, el precio de la opción Europea se calculó entonces introduciendo valores reales del índice S&P500, la volatilidad asociada a éste y las condiciones de la opción Europea en un intervalo de tiempo específico.

4.2.1. Gráficas

Como se introdujo en el Capítulo 1 un factor muy importante de una opción Europea es su precio al momento de adquirirla. Esta clase de opciones opera en el mercado secundario lo que significa que antes de alcanzar el tiempo de expiración T , un inversionista tiene la posibilidad de comerciar con éstas. En la realidad muchos inversionistas nunca ejercen una opción sino que obtienen sus ganancias vendiéndola

nuevamente en el mercado antes de que expire. Éstos pueden entonces calcular el precio de una opción antes de que llegue T con el método que más se adecúe a sus intereses.

El intervalo de tiempo en el que expiran las opciones analizadas a continuación corresponde al primer trimestre (PT) del año 2001. Este trimestre suele ser importante en términos económicos pues es en este periodo de tiempo que en un país se dan cambios importantes en variables **macroeconómicas** como: devaluaciones, incrementos en precios de productos básicos, *etc.* Estos cambios suelen tener un impacto en el precio de un activo financiero como S&P500 y en consecuencia en el precio de una opción Europea basada en éste.

Las condiciones del contrato en todos los casos son: al tiempo de expiración T se comprará una unidad de activo a precio *strike* $K = 7$, bajo una tasa de interés $r = 0$. Se asume que el coeficiente de correlación entre el activo y la volatilidad es $\rho = -0.1$. Finalmente el parámetro asumido para la función de utilidad en el precio de indiferencia es $\theta = 0.005$.

Por razones de optimización computacional, las gráficas se realizaron haciendo una transformación del tiempo (un año en el intervalo $[0, 1]$) y del valor del activo con riesgo (usando el logaritmo de esta variable).

La Figura 4.17 muestra una gráfica que ilustra el cambio en el precio de una opción Europea tipo *call* a lo largo del tiempo antes de alcanzar el tiempo de expiración $T = 30$ días. Este precio se ha calculado bajo el criterio p-indi. Para esto se usaron los datos del índice S&P500 a cada tiempo t , $0 \leq t \leq 30$. Como puede apreciarse, el precio aparentemente tiende a bajar conforme se acerca el tiempo de expiración. El caso del precio calculado mediante min-R se presenta en la Figura 4.18. En ésta puede apreciarse más variabilidad a lo largo del tiempo, aunque también una ligera disminución en los precios cerca de T .

En los criterios min-R y p-indi se percibe una reacción a los cambios en el precio del activo subyacente S&P500. Para ayudar a identificarla, en la Figura 4.20 se presenta una gráfica de un acercamiento de la Figura 4.3 que muestra la trayectoria del logaritmo de la serie S&P500, en el periodo de tiempo para el que se calcularon los precios. Esta reacción puede ser razonable con lo que ocurre en el mercado pues en éste es usual encontrar que un alza en el valor del activo subyacente conlleva un alza en el precio de las opciones.

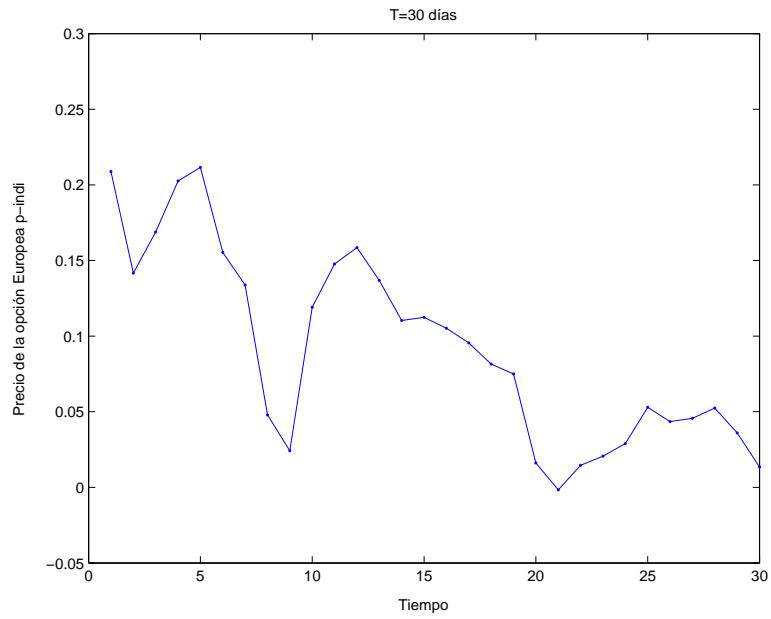


Figura 4.17: Precio p-indi de una opción Europea a 30 días que expira el PT del 2001.

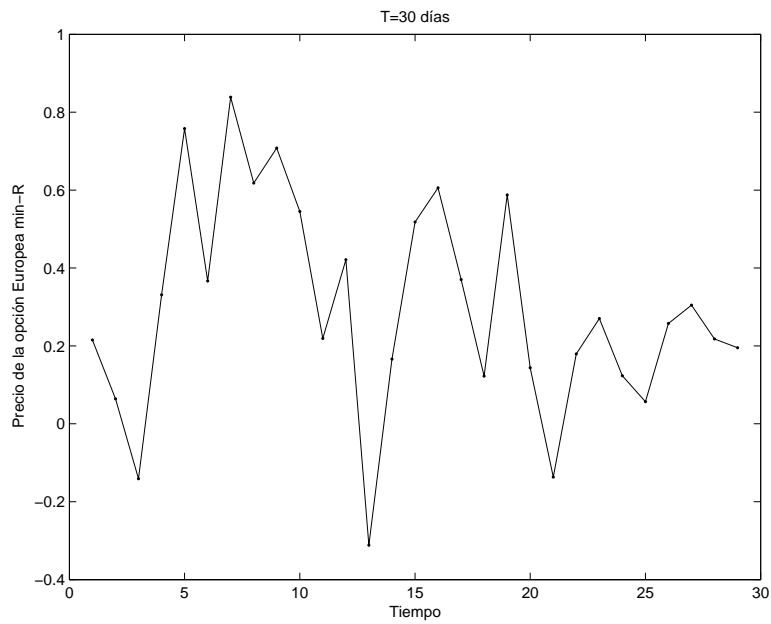


Figura 4.18: Precio min-R de una opción Europea a 30 días que expira el PT del 2001.

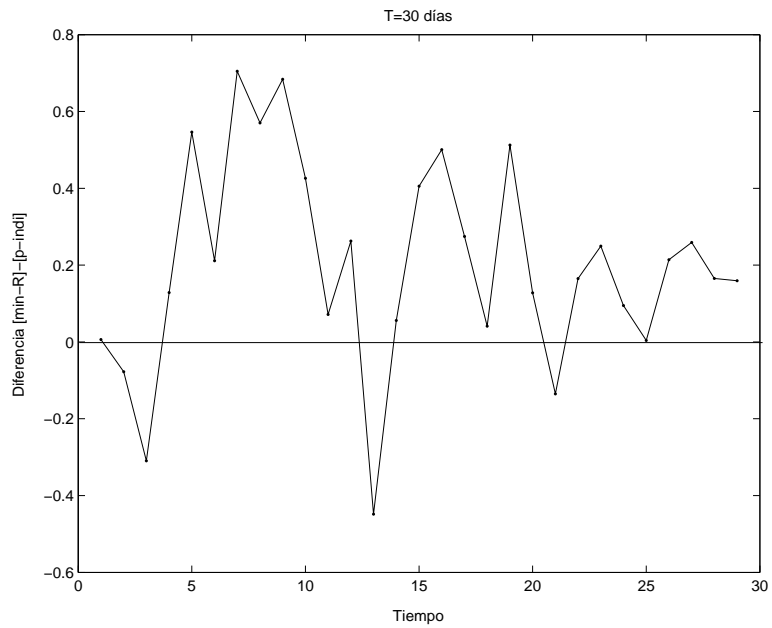


Figura 4.19: Diferencias diarias del precio de una opción Europea a 30 días.

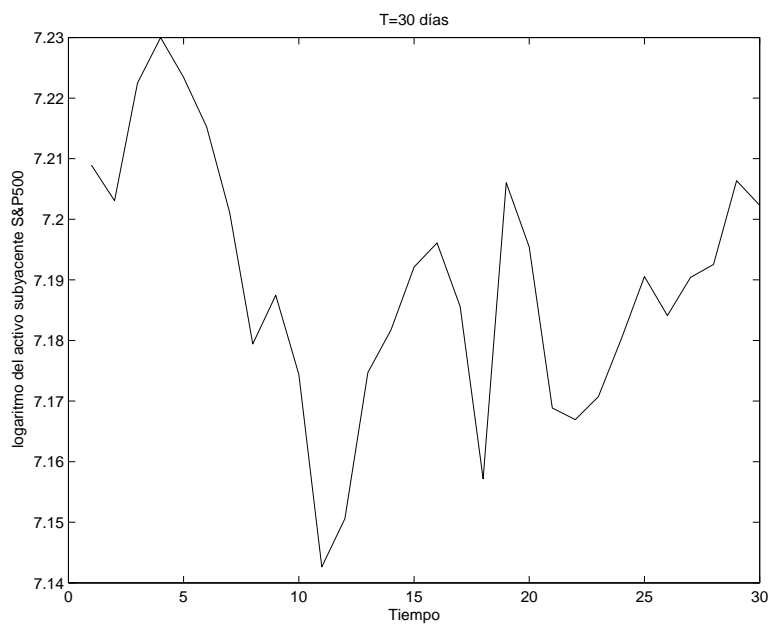


Figura 4.20: Valor del logaritmo del activo subyacente S&P500 en un periodo de 30 días.

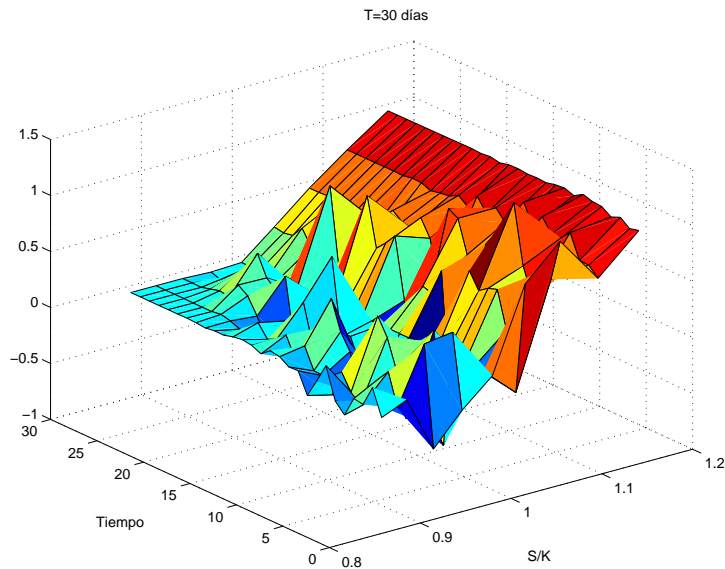


Figura 4.21: Precio min-R en función de *moneyness* y tiempo.

Se observa pues que en el caso de una opción a 30 días aparentemente el precio H , basado en min-R, es generalmente más caro que el precio p , basado en p-indi, pues la diferencia $H - p$ es positiva la mayor parte del tiempo (ver Figura 4.19). Sin embargo, dado que la expresión con la que se obtiene el precio min-R depende, entre otros elementos, del valor simulado de una variable aleatoria con distribución normal (ver ecuaciones (2.1.34)) los precios pueden cambiar si se calculan por segunda ocasión. Esto puede representar una ventaja del método p-indi quien se basa en la solución de ecuaciones diferenciales parciales y por tal tiene, en este sentido, un carácter fijo.

Para un inversionista puede ser interesante conocer la forma en que reacciona el precio de una opción Europea con respecto al valor del *strike* que pagará por la unidad de activo. Como ya se ha mencionado, existen tres casos posibles para una opción Europea: estar *in-the-money*, *at-the-money* o *out-of-the-money*. Es por ello que se proponen gráficas donde puede apreciarse dicha reacción considerando los tres casos posibles, asumiendo nuevamente que la tasa de interés es $r = 0$. Estas gráficas se presentan en las Figuras 4.22 y 4.21.

En la gráfica correspondiente a el precio H , basado en min-R, se observa que éste es muy variable, en particular cuando se trata de opciones *out-of-the money*. Esta variabilidad decrece conforme se acerca el tiempo de expiración. Más aún, cerca de T se aprecia que H es creciente como función de S/K . Por otro lado, en el caso de la

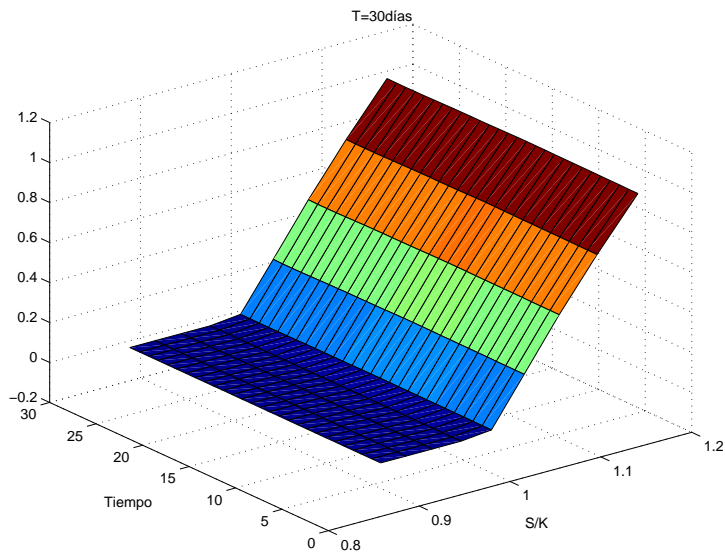


Figura 4.22: Precio p-indi en función de *moneyness* y tiempo.

Figura 4.22 correspondiente al precio p , basado en p-indi, es claro que éste es creciente con respecto a S/K para cualquier t , $0 \leq t \leq T$.

La propiedad que se observa en las Figuras 4.21 y 4.22 significa que valuando con cualquiera de los dos criterios, conforme se acerca T , si se considera una opción *in-the-money*, es decir, en la que un inversionista pagará un *strike* más bajo que el valor del activo subyacente al momento de contratarla, esta opción es más cara que si se paga un *strike* más alto que el valor del activo subyacente. En el caso del precio p la propiedad se aprecia desde que la opción comienza a operar. Esto es muy razonable con lo que se observa en el mercado pues, en general, un inversionista pagará precios más altos por contratos que potencialmente tengan mayores posibilidades de generarle rendimientos.

Conclusiones y Trabajos Futuros

Esta tesis estuvo motivada principalmente por la pretensión de realizar un trabajo que representara una aportación en el área de finanzas. Dentro de ésta, se eligió en particular estudiar métodos para valorar opciones Europeas pues en la actualidad existen resultados importantes acerca de éstas. El punto de partida fue pensar que trabajar de forma conjunta con modelos de series de tiempo y con la metodología teórica basada en ecuaciones diferenciales estocásticas, representa una gran oportunidad para analizar profundamente el comportamiento de una variable financiera.

La aportación de esta tesis es documentar algunas diferencias entre los métodos de valuación de opciones minimización de riesgo local y precio de indiferencia. Esto para un modelo específico del precio de un activo financiero y la volatilidad asociada a éste basado en ecuaciones diferenciales estocásticas. Un supuesto importante de dicho modelo es la consideración de correlación entre el activo y la volatilidad distinta a cero.

Para su realización este trabajo ha requerido de diferentes aspectos, entre los que destacan los siguientes:

- Un estudio esmerado de distintos conceptos financieros y de resultados previos en matemáticas financieras relacionados con el tema.
- Un estudio breve de la teoría básica de Diferencias Finitas aplicadas a la solución numérica de ecuaciones diferenciales parciales.
- El uso de dos aplicaciones de cómputo básicas para el desarrollo de la tesis. Por un lado el módulo *finmetrics* del software *Splus*, especial para series de tiempo. En éste se llevaron a cabo pruebas estadísticas para el análisis de una serie de tiempo financiera. Por otro lado, el software matemático *Matlab* en el cual se realizaron programas con el objeto de encontrar las soluciones numéricas de las

ecuaciones ψ y ϕ en el método precio de indiferencia. Posteriormente también se utilizó, entre otras cosas, para la elaboración de las gráficas del Capítulo 4. El trabajo incluyó una fase de simulación para probar la efectividad del estimador lineal adaptado de μ_t y para observar empíricamente la distribución asintótica del proceso de volatilidad.

En este punto es relevante hacer notar que al construir algunas de las herramientas visuales de comparación de métodos, se han usado valores para el coeficiente de correlación ρ diferente de cero. Esto constituye una generalización a la forma en que se han comparado en la literatura otros métodos para valuar en donde por simplicidad se asume a este parámetro igual a cero.

El análisis elaborado se basa en realizaciones del índice S&P500. Sin embargo, teniendo en cuenta los resultados del presente trabajo ambos métodos pueden usarse para valuar opciones en tiempo presente. Para esto se sugiere usar técnicas de series de tiempo para predecir valores futuros de S y σ .

Finalmente existen problemas que surgen a partir de la realización de este trabajo a los que puede darseles seguimiento, entre los que destacan los siguientes:

- Realización de más herramientas gráficas de comparación entre los métodos. En particular algunas que consideren tiempos de expiración mayores a 30 días y otras que consideren diferentes niveles de ρ , r y K . Además, a fin de emular la actitud de un inversionista, se sugiere variar el parámetro de la función de utilidad θ , así como la función misma, lo cual se espera cambiará algunos de los resultados obtenidos en este trabajo. Todo esto puede formar parte importante en la creación futura de un procedimiento más completo para el cálculo de opciones Europeas.
- Realizar intervalos de verosimilitud-confianza para los estimadores de los parámetros a y b en la distribución asintótica de la volatilidad.
- Análisis gráfico específico del método precio de indiferencia en donde pueda mostrarse el cambio de la función de valor $R(t, v, x, s)$ para diferentes valores de las variables tiempo, precio del activo, volatilidad asociada y capital inicial.
- Encontrar formas alternativas de estimar los parámetros en un modelo de efectos ARCH diferente a la verosimilitud, pues violar el supuesto de independencia dentro de la muestra puede afectar la precisión de los estimadores del modelo.

- Estimar los parámetros del modelo EGARCH(1,1) con otro método numérico distinto a BHHH. Dada su naturaleza de algoritmo genético a veces éste puede resultar un método muy ambiguo.
- Con la finalidad de perfeccionar las herramientas desarrolladas en este trabajo y en general el papel realizado por un matemático en finanzas, se propone interactuar intensivamente con expertos en la materia. Esta relación permitirá fundar ideas importantes que den paso a modelos más aproximados a la realidad.

Apéndice A

Glosario de términos financieros

Activo Financiero Conocido también como título financiero. Son documentos que incorporan la titularidad de derechos sobre un bien, fácilmente convertible en dinero. Es negociado en el mercado de capitales.

Bien Se entiende como bien a todo artículo o servicio que permite satisfacer una necesidad. Se clasifica en primario y secundario.

Bono Es un contrato con una tasa de interés asociada cuyos rendimientos pueden adquirirse en pagos regulares o bien en un único pago en el tiempo de expiración.

Derivados Conocidos también como instrumentos financieros. Son contratos cuyo valor depende (o se deriva de) activos subyacentes existentes en el mercado.

Dividendos Pagos fijos de monto variable, hechos del valor de un activo.

Estrategia de Inversión Es la elección continua de un portafolio de inversión la cual puede depender de los cambios en el mercado.

Índice Financiero Es una medida estadística de los cambios en un mercado financiero. Específicamente, un índice es un portafolio imaginario de activos que representan un sector específico del mercado. Cada índice tiene su propia forma de calcularse y usualmente se expresa en términos de un cambio sobre un valor base.

Inversionista Es como se le conoce a la gente que se encarga de invertir capital constante y dinámicamente en determinados bienes.

Macroeconomía Es el estudio de una economía entera en términos de la cantidad de bienes y servicios producidos, los ingresos ganados, el nivel de empleo de las fuentes productivas y el comportamiento general de los precios. A todos éstos se les conoce como variables macroeconómicas.

Mercados Financieros Los mercados financieros se clasifican básicamente de dos formas:

	Clasificación basada en plazos	Clasificación basada en la forma de operación
Mercado Financiero	Mercado de dinero En éste se realizan operaciones financieras a largo plazo.	Mercado de valores primario En éste se realiza la oferta y la demanda de valores cuando una empresa entra a la bolsa de valores.
	Mercado de capitales En éste se realizan operaciones financieras a corto y mediano plazo.	Mercado de valores secundario Es donde se produce la oferta y demanda de valores ya emitidos con anterioridad por cualquier empresa inscrita a la bolsa.
	Otros	Otros

Moneyness Es una medida del grado al que se espera que un derivado tenga un *payoff* positivo al tiempo de expiración.

Oportunidad de Arbitraje Se le llama así a la estrategia que puede seguir un inversionista y que le proporciona ganancias sin correr riesgo alguno. En la realidad son muy escasas y poco éticas.

Portafolio de Inversión Se refiere a la forma en que un inversionista reparte el capital entre el activo con riesgo y en el bono.

Replicar Se refiere a proteger un capital contra el riesgo en el mercado de tal forma que pueda pagarse con él un contrato en el tiempo de expiración.

Bibliografía

- [1] BARRON, E. N. Y JENSEN, R. (1989) *Total Risk Aversion, Stochastic Optimal Control and Differential Games*. Applied Mathematics and Optimization, **19**, 313-327.
- [2] BERNDT, E. K., HALL, B. H., HALL, R. E. Y HAUSMAN, J. A. (1974) *Estimation and Inference in Nonlinear Structural Models*. Annals of Economic and Social Measurement, **3** (4), 653-665.
- [3] BLACK, F. Y SCHOLES, M. (1973) *The Pricing of Options and Corporate Liabilities*. Journal of Political Economy, **81**, 637-659.
- [4] BOLLERSLEV, T. (1986) *Generalized Autoregressive Conditional Heterocedasticity*. Journal of Econometrics, **31**, 307-327.
- [5] BOLLERSLEV, T., CHOU, R. Y. Y KRONER, K. F (1992) *ARCH Modeling in Finance: a Review of the Theory and Empirical Evidence*. Journal of Econometrics, **52**, 5-59. North-Holland.
- [6] DYNKIN E. B. (1965) *Markov Processes*. Springer-Verlag.
- [7] ENGLE, R. F. (1982) *Autoregressive Conditional Heterocedasticity with Estimates of the Variance of the United Kingdom Inflation*. Econometrica, **50** (4), 987-1006.
- [8] ENGLE, R. F., LILIEN, D. M. Y ROBINS, R. P. (1987) *Estimating Time Varying Risk Premia in the Term-Structure: the ARCH-M Model*. Econometrica, **55** (2), 391-407.
- [9] FAMA, E. F. (1965) *The Behaviour of Stock Market Prices*. Journal of Business, **38**, 34-105.

- [10] FÖLMEER, H. Y SCHWEIZER, M. (1990) *Hedging of Contingent Claims under Incomplete Information*. In M.H.A. Davis and R. J. Elliot, eds., Applied Stochastic Analysis (Gordon and Breach, London).
- [11] FOUQUE, J., PAPANICOLAOU, G. Y SIRCAR K. R. (2000) *Derivatives in Financial Markets with Stochastic Volatility*. Cambridge University Press.
- [12] FRIEDMAN, A. Y LITTMAN, W. (1994) *Industrial Mathematics: a Course in Solving Real-world Problems*. Philadelphia: SIAM.
- [13] GIGLI, A. (2002) *Market Volatility: why do we know?*. Preprint.
- [14] HARRISON, J. M. Y PLISKA, S. R. (1981) *Martingales and Stochastic Integrals in the Theory of Continuous Trading*. Stochastic Process Appl., **11**, 215-260.
- [15] HEATH, D., HURST, S. Y PLATEN, E. (2001) *Modelling the Stochastic Dynamics of Volatility for Equity Indices*. Asia-Pacific Financial Markets, **8**, 179-195.
- [16] HENDERSON, V. Y HOBSON, D. (2004) *Utility Indifference Pricing: an overview*. To appear in Volume on Indifference Pricing (ed. R. Carmona). Princeton University Press.
- [17] HERNÁNDEZ, D. (2005) *Indifference Pricing for Stochastic Volatility Models*. Preprint.
- [18] KHAS'MINSKII, R. Z. (1980) *Stochastic Stability of Differential Equations*. Sijthoff y Noordhoff, Alphen aon den Rijn, The Netherlands.
- [19] KLEBANER F. C. (1998) *Introduction to Stochastic Calculus with Applications*. Imperial College Press.
- [20] KLOEDEN P. E. Y PLATEN E. (1992) *Numerical Solution of Stochastic Differential Equations*. Springer-Verlag.
- [21] KWIATKOWSKI, D., PHILLIPS, P.C.B., SCHMIDT, P. Y SHIN, Y. (1992) *Testing the Null Hypothesis of Stationarity against the Alternative of a Unit Root*. Journal of Econometrics, **54**, 159-178.
- [22] LJUNG, T. Y BOX, G. E. P. (1979) *The Likelihood Function for a Stationary Autoregressive Moving Average Process*. Biometrika, **66**, 265-270.

- [23] MANDLEBROT, B. B. (1963) *The Variation of certain Speculative Prices*. Journal of Business, **36**, 394-416.
- [24] NELSON, D. B. (1990) *ARCH Models as Diffusion Approximations*. Journal of Econometrics, **45** (2), 7-38.
- [25] NELSON, D. B. (1991) *Conditional Heterocedasticity in Asset Returns: a new approach*. Econometrica, **59** (2), 347-370.
- [26] SCHWEIZER, M. (1991) *Option Hedging for Semimartingales*. Stochastic Processes and their Applications, **37**, 339-363.
- [27] SPOKOINY, V. (1991) *Drift Estimation for non Parametric Diffusion Model: non Asymptotic approach*. Mathematics Subject Classification 62G05.
- [28] STRIKWERDA, J. C. (1996) *Finite Difference Schemes and Partial Differential Equations*. Chapman & Hall.
- [29] WANG, J. Y ZIVOT, E. (2003) *Modeling Financial Time Series with S-PLUS*. Springer.