CIMAT

Centro de Investigación en Matemáticas, A.C.

ESTRATEGIAS DE NEGOCIACIÓN Y CONTRATOS EN JUEGOS NO COOPERATIVOS

T E S I S

PARA OBTENER EL GRADO DE:

MAESTRO EN CIENCIAS CON ESPECIALIDAD EN MATEMÁTICAS APLICADAS

PRESENTA:

DAVID ALBERTO BENÍTEZ GONZÁLEZ

DIRECTOR:

DR. FRANCISCO SÁNCHEZ SÁNCHEZ

GUANAJUATO, GTO., FEBRERO DE 2016.

Estrategias de negociación y contratos en juegos no cooperativos

David Alberto Benítez González

Febrero de 2016

Agradecimientos

Al Dr. Francisco Sánchez Sánchez por sus conocimientos brindados para la realización de esta tesis, y todo su apoyo y paciencia.

A mis sinodales Dr. William José Olvera López y Dr. Luis Hernández Lamoneda, por sus recomendaciones y consejos para mejorar este trabajo.

Al CONACYT, por el apoyo económico brindado para poder realizar mis estudios de posgrado.

A mi familia, por tenerme siempre en sus rezos, compartir su vida y amor interminable, dándome confianza y apoyándome incondicionalmente para la realización de mis sueños.

A Margarita, Cristian, Ariel, Mario, Mariana, Rafa, José Manuel y Viri, por brindarme su amistad y compartir muchos buenos momentos, haciendo que mi estancia en Guanajuato fuera más agradable. He aprendido mucho de cada uno de ustedes, y espero que la vida les permita realizar todos sus sueños y alcanzar cada una de sus metas.

Y a todos mis amigos que me han acompañado a cada paso en este caminar, y que forman parte importante de mi vida.

Índice general

Introducción

La Teoría de Juegos se puede definir como el estudio de modelos matemáticos que describen el conflicto y la cooperación entre entes inteligentes que toman decisiones. Tales decisiones se consideran estratégicas, esto es, que los entes que participan en el juego actúan teniendo en cuenta las acciones que tomarían los demás.

Los orígenes de la Teoría de Juegos se remontan al año 1944, en el cual el matemático John von Neumann y el economista Oskar Morgenstern publicaron el libro *"Game Theory and Economic Behavior"*. Desde entonces dicha teoría ha sido desarrollada extensivamente y en la actualidad tiene aplicaciones en una gran cantidad de áreas tales como Teoría Económica, Ciencias Políticas y Biología, entre otras.

Los modelos de Teoría de Juegos se agrupan en dos grandes grupos, cada uno de los cuales adopta un enfoque diferente a la hora de analizar las situaciones de interdependencia estratégica: Juegos Cooperativos y Juegos no Cooperativos.

En el enfoque cooperativo se analizan las posibilidades de que algunos o todos los jugadores lleguen a un acuerdo sobre qué decisiones va tomar cada uno, mientras que en el enfoque no cooperativo se analiza que decisiones tomaría cada jugador en ausencia de acuerdo previo.

En los juegos no cooperativos generalmente se supone que los jugadores toman sus decisiones independientemente unos de otros, aunque conociendo a sus oponentes y las posibles estrategias que éstos tienen a su disposición. Es decir, son individuos egoístas que tratan de predecir lo que los demás harán para entonces actuar en beneficio propio.

En ocasiones la competencia egoísta puede conducir a estados que son inferiores en términos de beneficio personal y social, en comparación a estados que se alcanzan mediante la cooperación, pero éstos no podrán implementarse a menos que existan reforzamientos externos, tales como contratos, que obliguen a los jugadores a cumplir con el acuerdo de cooperación.

Una técnica cooperativa muy utilizada son los modelos de negociación. En dichos modelos los jugadores buscan ganar a través de la cooperación, pero deben negociar el procedimiento y la forma en que se dividirán las ganancias de esta cooperación. Dichos modelos especifican cómo y cuándo se alcanzan los acuerdos, dependiendo de las reglas de negociación y de las características de los negociadores.

La idea esencial introducida por John Nash en su tesis doctoral en Matemáticas en la Universidad de Princeton titulada *"Juegos no cooperativos"* fue la definición del concepto de equilibrio, el cual es un acuerdo que ninguno de los jugadores puede romper sin salir perdiendo. Es decir, si alguien decide romper el pacto y lo hace unilateralmente, se arriesga a ganar por debajo de lo que hubiese ganado dentro del pacto. Sin embargo esto puede no ser lo mejor socialmente para los jugadores.

Nash aseguraba que la teoría de juegos cooperativa y la no cooperativa eran complementarias, que cada una ayudaba a justificar y clarificar la otra. De esta idea se desarrolló el llamado programa Nash, el cual busca la posibilidad de la unificación teórica; algunos logros ya se tienen en este sentido.

Debido a sus contribuciones al análisis de equilibrios en teoría de juegos no cooperativos, John Nash recibió el Premio Nobel de Economía en 1994, de manera conjunta con John Harsanyi y Reinhard Selten.

El objetivo principal de la tesis es plantear una nueva forma de jugar un juego no cooperativo mediante el uso de técnicas cooperativas, pero sin perder el enfoque no cooperativo, en la cual el pago esperado de cada jugador mejore con respecto al que se predice mediante los equilibrios de Nash. Además se tratará de encontrar relaciones entre los equilibrios hallados por esta nueva forma de jugar y los equilibrios ya existentes, o desarrollar algún nuevo concepto de equilibrio.

En el primer capítulo se presentan los conceptos basícos que se usan en juegos no cooperativos, tales como equilibrio y dominancia, y la relación que existe entre ellos. También se presenta la extension mixta de un juego, así como la demostración del Teorema de Nash acerca de la existencia de equilibrios en este tipo de juegos. Además se da una introducción a la forma correlacionada de un juego, la cual permite extender el conjunto de equilibrios con la ayuda de un mediador externo al juego.

En el segundo capítulo se presentan algunos resultados acerca del uso de estrategias correlacionadas, y la manera en que una "mala" recomendación del mediador podría derivar en la desviación de estrategias por parte de algunos jugadores al tener incentivos para seguir dicho comportamiento. Mediante el uso de cadenas de Markov se da una clasificación de juegos tomando en cuenta dichos incentivos para desviarse de equilibrios correlacionados.

En el tercer capítulo se desarrollan las ideas referentes a la aplicación de modelos de negociación y la firma de contratos para la resolución de juegos no cooperativos.

Para que los jugadores decidieran firmar un contrato propuesto por un mediador externo, éste debería darles incentivos para hacerlo, tales como ofrecerles un pago esperado mayor que el que obtendrían jugando de la manera habitual. Para ello se definirá un tipo especial de contratos, los cuales tendrán la propiedad de que siempre sea la mejor opción para los jugadores firmar dichos contratos, sin importar lo que decidieran hacer los demás jugadores. Habiendo definido este tipo de contratos, se establecerá la relación que hay entre ellos y los equilibrios correlacionados, además de dar condiciones necesarias para su existencia.

El mediador, después de haber convencido a los jugadores de que firmar el contrato es su mejor opción, tratará de encontrar la mejor estrategia posible para proponerles a los jugadores con ayuda de modelos de negociación. Además tendrá la oportunidad de penalizar a los jugadores que no siguieran sus recomendaciones.

También se incluye una nueva propuesta para jugar de manera cooperativa un juego no cooperativo: los jugadores que decidan firmar el contrato jugarán como un solo equipo contra los demás jugadores que no lo hayan firmado. Los jugadores que forman dicho equipo ahora no buscarán intereses individuales sino grupales.

En el cuarto capítulo se muestran ejemplos de juegos no cooperativos clásicos, en los cuales se aplican los conceptos y resultados mostrados en los capítulos anteriores.

Finalmente en el quinto capítulo se presentan las conclusiones obtenidas durante el desarrollo de esta tesis.

Capítulo 1

Equilibrio en juegos no cooperativos

La principal tarea de la teoría de juegos es establecer cuáles estrategias seguirían los jugadores racionales en un juego, basándose en lo que que esperan sobre el comportamiento de los demás jugadores. Para construir dicha teoría de comportamiento racional un requerimiento fundamental es que la teoría no sea contraproducente, esto es, que los jugadores no tengan incentivos para desviarse del comportamiento que la teoría recomienda.

Para juegos no cooperativos, en los cuales no existen mecanismos externos disponibles para el cumplimiento de acuerdos o compromisos, este requerimiento implica que la recomendación tenga que ser realizable por sí misma.

Así, si los jugadores actúan de manera independiente y la teoría recomienda una estrategia para cada jugador, el perfil de recomendaciones debe ser un equilibrio: la estrategia asignada a cada jugador debe ser óptima cuando los demás jugadores siguen las estrategias asignadas a ellos.

1.1. Juegos en forma estratégica

Una manera simple de representar un juego es con su forma estratégica. Para definir un juego en forma estratégica sólo se necesita especificar el conjunto de jugadores en el juego, el conjunto de opciones disponibles para cada jugador y la forma en que los pagos de los jugadores dependen de las opciones que eligen.

Definición 1.1.1 *Un juego en forma estratégica es una terna ordenada* $G = \left(N, (S_i)_{i\in N}, (u_i)_{i\in N}\right)$ *tal que:*

- $N = \{1, \ldots, n\}$ *es un conjunto finito de jugadores.*
- S_i *es el conjunto de estrategias del jugador* i *para cada* $i \in N$.

  Denótese al conjunto de perfiles de estrategias por $S = \times_{i\in N} S_i$.
- $u_i : S \to \mathbb{R}$ *es una función que asocia cada perfil de estrategias* $s = (s_i)_{i\in N}$ *con el pago* $u_i(s)$ *del jugador* i *para cada* $i \in N$.

Notación 1.1.2 *Para cada jugador* $i \in N$ *el conjunto de perfiles de estrategias de todos los jugadores diferentes de* i *se denota por* $S_{-i} = \times_{j\neq i} S_j$.

Un juego en forma estratégica es finito si el conjunto de jugadores N y todos los conjuntos de estrategias S_i son finitos. Generalmente se supondrá que los juegos son finitos a menos que se especifique otra cosa.

En el estudio de juegos en forma estratégica usualmente se supone que todos los jugadores escogen sus estrategias de manera simultánea, por lo cual no existen elementos temporales en el análisis de estos juegos.

1.1.1. Dominancia

En ocasiones ocurre que un jugador tiene una estrategia con la característica de que le proporciona mejores resultados que sus demás estrategias sin importar que hagan los demás jugadores. Cuando un jugador dispone de tal estrategia le conviene usarla sin lugar a dudas.

Definición 1.1.3 *Una estrategia* $t_i \in S_i$ *del jugador* i *es fuertemente dominante si para toda estrategia alternativa* $s_i \in S_i$, *y para cada perfil de estrategias* $s_{-i} \in S_{-i}$ *de los otros jugadores se cumple* $u_i(s_i, s_{-i}) < u_i(t_i, s_{-i})$.

La idea de dominancia también se puede aplicar a situaciones en las que, si bien un jugador no tiene una estrategia que le convenga más que otras, si tiene una estrategia que nunca le convendría usar sin importar que hagan los demás jugadores. Es decir, la idea de dominancia se pude usar para descartar estrategias que nunca conviene usar.

Definición 1.1.4 *Una estrategia* $s_i \in S_i$ *del jugador* i *es fuertemente dominada si existe otra estrategia* $t_i \in S_i$ *tal que para cada perfil de estrategias* $s_{-i} \in S_{-i}$ *de los otros jugadores se cumple* $u_i\left(s_i, s_{-i}\right) < u_i\left(t_i, s_{-i}\right)$.

Cuando un jugador tiene una estrategia fuertemente dominada no la usará nunca, porque dispone de una estrategia alternativa que le proporciona un bienestar mayor sin importar que hagan los demás jugadores.

Definición 1.1.5 *Una estrategia* $s_i \in S_i$ *del jugador* i *es débilmente dominada si existe otra estrategia* $t_i \in S_i$ *que satisface:*

- *Para cada perfil de estrategias* $s_{-i} \in S_{-i}$ *de los otros jugadores se cumple*

$$u_i\left(s_i, s_{-i}\right) \leq u_i\left(t_i, s_{-i}\right).$$

- *Existe un perfil de estrategias* $t_{-i} \in S_{-i}$ *de los otros jugadores tal que*

$$u_i\left(s_i, t_{-i}\right) < u_i\left(t_i, t_{-i}\right).$$

Un jugador que prescinda de una de sus estrategias débilmente dominadas no verá disminuida su utilidad porque existe otra que le da al menos lo mismo, y a veces más, sin importar que hagan los demás jugadores.

El proceso de eliminación iterativa de estrategias fuertemente dominadas se llama racionalización. Se puede desarrollar como sigue:

Sea $G = \left(N, \left(S_i\right)_{i\in N}, \left(u_i\right)_{i\in N}\right)$ un juego en forma estratégica. Para cada jugador $i \in N$ sea $S_i^{(1)}$ el conjunto de todas las estrategias en S_i que no son fuertemente dominadas para i. Entonces se puede formar el juego en forma estratégica $G^{(1)} = \left(N, \left(S_i^{(1)}\right)_{i\in N}, \left(u_i\right)_{i\in N}\right)$, donde cada función u_i es la restricción de la función de utilidad original al nuevo dominio $\times_{i\in N} S_i^{(1)}$.

Por inducción, para cada entero positivo k se puede definir el juego en forma estratégica $G^{(k)} = \left(N, \left(S_i^{(k)}\right)_{i\in N}, \left(u_i\right)_{i\in N}\right)$, donde $S_i^{(k)}$ es el conjunto de todas las estrategias en $S_i^{(k-1)}$ que no son fuertemente dominadas para el jugador i en el juego $G^{(k-1)}$ para cada $i \in N$.

Para cada $i \in N$ se cumple $S_i \supseteq S_i^{(1)} \supseteq S_i^{(2)} \supseteq \ldots$, y se puede ver que cada uno de estos conjuntos es no vacío. Dado que se empieza con un juego finito G, debe existir un número K tal que $S_i^{(K)} = S_i^{(K+1)} = \ldots$ para cada $i \in N$.

Dado este número K, denótese por $G^{(\infty)} = G^{(K)}$ y $S_i^{(\infty)} = S_i^{(K)}$ para cada $i \in N$. Las estrategias en $S_i^{(\infty)}$ se llaman iterativamente no dominadas para el jugador i. El juego $G^{(\infty)}$ se llama el juego residual generado de G por dominación iterativa fuerte.

1.1.2. Equilibrio

Un concepto de solución es cualquier regla que especifique predicciones sobre cómo se espera que los jugadores se comporten en un juego dado. El equilibrio de Nash es el concepto de solución más importante en teoría de juegos no cooperativos, el cual es un perfil de estrategias o planes tal que la estrategia de cada jugador es óptima para él dadas las estrategias de los demás jugadores.

Este argumento usa la suposición que los jugadores escogen sus estrategias independientemente, así que el cambio de estrategia de un jugador no causa un cambio de los demás jugadores. Por tanto se puede suponer que los jugadores no tienen oportunidad de comunicarse antes de escoger sus estrategias en el juego.

Definición 1.1.6 *Un perfil de estrategias $s^* = (s_1^*, \ldots, s_n^*)$ es un equilibrio de Nash si para cada jugador $i \in N$ y cada estrategia $s_i \in S_i$ se cumple*

$$u_i(s^*) \geq u_i\left(s_i, s_{-i}^*\right).$$

El vector de pagos $u(s^*)$ es el pago correspondiente al equilibrio de Nash s^*.

Definición 1.1.7 *La estrategia $\widehat{s}_i \in S_i$ es una desviación rentable del jugador i en el perfil de estrategias $s \in S$ si $u_i(\widehat{s}_i, s_{-i}) > u_i(s)$.*

Un equilibrio de Nash es un perfil de estrategias en el cual cada jugador no tiene una desviación rentable.

Definición 1.1.8 *Un equilibrio de Nash s^* es estricto si toda desviación de algún jugador le produce una pérdida; esto es, si se satisface $u_i(s^*) > u_i\left(s_i, s_{-i}^*\right)$ para cada jugador $i \in N$ y cada estrategia $s_i \in S_i \backslash \{s_i^*\}$.*

La propiedad más importante expresada por el equilibrio de Nash es la estabilidad, pues se define como un perfil de planes autoejecutables. Una condición necesaria para que sea autoejecutable es que cada jugador, dados los planes de los otros jugadores, no tenga un plan alternativo que prefiera estrictamente.

Definición 1.1.9 *Sea $s_{-i} \in S_{-i}$ un perfil de estrategias de los jugadores distintos de i. La estrategia s_i del jugador i es una mejor respuesta a s_{-i} si*

$$u_i(s_i, s_{-i}) = \text{máx}_{t_i \in S_i} u_i(t_i, s_{-i}).$$

Definición 1.1.10 *El perfil de estrategias $s^* = (s_1^*, \ldots, s_n^*)$ es un equilibrio de Nash si s_i^* es una mejor respuesta a s_{-i}^* para cada jugador $i \in N$.*

Bajo un equilibrio de Nash cada jugador actúa tratando de responder al comportamiento potencial de los demás jugadores de la mejor manera posible. Además cada jugador no puede incrementar su utilidad desviándose unilateralmente del perfil de estrategias que se predice.

Teorema 1.1.11 *Sea $s^* = (s_1^*, \ldots, s_n^*)$ un perfil de estrategias. Entonces s_i^* es una mejor respuesta a s_{-i}^* para cada jugador $i \in N$ si y sólo si para cada jugador $i \in N$ y cada estrategia $s_i \in S_i$ se cumple $u_i(s^*) \geq u_i\left(s_i, s_{-i}^*\right)$.*

Demostración. Suponga que s_i^* es una mejor respuesta a s_{-i}^* para cada jugador $i \in N$. Entonces se satisface

$$u_i\left(s_i^*, s_{-i}^*\right) = \text{máx}_{t_i \in S_i} u_i\left(t_i, s_{-i}^*\right) \geq u_i\left(s_i, s_{-i}^*\right) \qquad \forall s_i \in S_i.$$

Suponga ahora que s_i^* no es una mejor respuesta a s_{-i}^* para algún jugador $i \in N$. Entonces existe una estrategia $\widehat{s}_i \in S_i$ que es una desviación rentable del jugador i en el perfil de estrategias $s^* \in S$.

Con esto se tiene que $u_i\left(s_i^*, s_{-i}^*\right) < u_i\left(\widehat{s}_i, s_{-i}^*\right)$, y por tanto no se cumple $u_i(s^*) \geq u_i\left(s_i, s_{-i}^*\right)$ para cada jugador $i \in N$ y cada estrategia $s_i \in S_i$. ∎

Esto demuestra que las dos definiciones de equilibrio de Nash dadas anteriormente son equivalentes.

1.1.3. Relación entre dominancia y equilibrio

Una cuestión que surge acerca del proceso de eliminación de estrategias dominadas es su efecto sobre los equilibrios de un juego.

Si se eliminaran algunas estrategias de cada jugador, entonces cada equilibrio del juego original sería también un equilibrio del juego resultante del proceso de eliminación, si ninguna de las estrategias de dicho equilibrio fuera eliminadas.

Teorema 1.1.12 *Sea $G = \left(N, (S_i)_{i\in N}, (u_i)_{i\in N}\right)$ un juego en forma estratégica y sea $\widehat{G} = \left(N, \left(\widehat{S}_i\right)_{i\in N}, (u_i)_{i\in N}\right)$ el juego derivado de G después de eliminar algunas estrategias, es decir, $\widehat{S}_i \subseteq S_i$ para cada jugador $i \in N$. Si $s^* \in S$ es un equilibrio del juego G y $s_i^* \in \widehat{S}_i$ para cada $i \in N$, entonces s^* es un equilibrio del juego $\widehat{G}$.*

Demostración. Dado que s^* es un equilibrio del juego G, se cumple que para cada jugador $i \in N$

$$u_i\left(s_i, s_{-i}^*\right) \leq u_i\left(s^*\right) \qquad \forall s_i \in S_i.$$

Como $\widehat{S}_i \subseteq S_i$ para cada jugador $i \in N$, entonces

$$u_i\left(s_i, s_{-i}^*\right) \leq u_i\left(s^*\right) \qquad \forall s_i \in \widehat{S}_i.$$

Puesto que s^* es un perfil de estrategias en el juego $\widehat{G}$, de lo anterior se sigue que s^* es un equilibrio del juego $\widehat{G}$. ■

Ningún equilibrio puede ser creado en el juego mediante la eliminación de alguna estrategia dominada de algún jugador.

Teorema 1.1.13 *Sean $G = \left(N, (S_i)_{i\in N}, (u_i)_{i\in N}\right)$ un juego en forma estratégica, $j \in N$ y $\widehat{s}_j \in S_j$ una estrategia débilmente dominada del jugador j. Sea $\widehat{G}$ el juego derivado de G después de eliminar la estrategia $\widehat{s}_j$. Entonces cada equilibrio del juego $\widehat{G}$ es también un equilibrio del juego G.*

Demostración. El conjunto de estrategias del juego $\widehat{G}$ es

$$\widehat{S}_i = \left\{ \begin{array}{ll} S_i & \text{si } i \neq j \\ S_j \backslash \{\widehat{s}_j\} & \text{si } i = j \end{array} \right\}$$

Sea $s^* = (s_i^*)_{i\in N}$ un equilibrio del juego $\widehat{G}$. Entonces

$$1) \quad u_i\left(s_i, s_{-i}^*\right) \leq u_i\left(s^*\right) \qquad \forall i \neq j \qquad \forall s_i \in \widehat{S}_i = S_i$$

$$2) \quad u_j\left(s_j, s_{-j}^*\right) \leq u_j\left(s^*\right) \qquad \forall s_j \in \widehat{S}_j$$

Sea i un jugador distinto de j. Como $\widehat{S}_i = S_i$, por 1) el jugador i no tiene una desviación rentable de s_i^*. Mientras que para el jugador j, 2) implica que no tiene una desviación rentable con cualquier estrategia en $\widehat{S}_j = S_j \setminus \{\widehat{s}_j\}$.

Como $\widehat{s}_j$ es una estrategia dominada, existe una estrategia $t_j \in S_j$ que la domina. Se sigue que $t_j \neq \widehat{s}_j$, y en particular que $t_j \in \widehat{S}_j$. Con esto

$$3) \quad u_j(\widehat{s}_j, s_{-j}) \leq u_j(t_j, s_{-j}) \qquad \forall s_{-j} \in S_{-j}.$$

Sustituyendo $s_{-j} = s_{-j}^*$ en 3) y $s_j = t_j$ en 2), se obtiene

$$u_j\left(\widehat{s}_j, s_{-j}^*\right) \leq u_j\left(t_j, s_{-j}^*\right) \leq u_j\left(s_j^*, s_{-j}^*\right)$$

Por tanto, desviarse a la estrategia $\widehat{s}_j$ no es rentable para el jugador j. ■

La aplicación repetida de este resultado demuestra que el proceso de eliminación de estrategias dominadas no lleva a la creación de nuevos equilibrios.

Corolario 1.1.14 *Sea $G = \left(N, (S_i)_{i\in N}, (u_i)_{i\in N}\right)$ un juego en forma estratégica y sea $\widehat{G}$ el juego derivado de G por eliminación de estrategias dominadas. Entonces cada equilibrio del juego $\widehat{G}$ es también un equilibrio del juego G.*

La eliminación de estrategias débilmente dominadas podría llevar a la eliminación de todos los equilibrios del juego, pues se tiene el problema de que el conjunto de estrategias que sobreviven al eliminar de manera iterada estrategias débilmente dominadas puede ser distinto dependiendo del orden de eliminación.

Lo anterior no puede pasar con la eliminación de estrategias fuertemente dominadas, pues se preserva el conjunto de equilibrios del juego.

Teorema 1.1.15 *Sean $G = \left(N, (S_i)_{i\in N}, (u_i)_{i\in N}\right)$ un juego en forma estratégica, $j \in N$ y $\widehat{s}_j \in S_j$ una estrategia fuertemente dominada del jugador j. Sea $\widehat{G}$ el juego derivado de G después de eliminar la estrategia $\widehat{s}_j$. Entonces el conjunto de equilibrios del juego $\widehat{G}$ es idéntico al conjunto de equilibrios del juego G.*

Demostración. Denótese por E al conjunto de equilibrios del juego G, y por $\widehat{E}$ al conjunto de equilibrios del juego $\widehat{G}$.

Por el teorema anterior se tiene que $\widehat{E} \subseteq E$, ya que cada estrategia fuertemente dominada es también una estrategia débilmente dominada.

Sea $s^* \in E$ un equilibrio del juego G. Como el juego $\widehat{G}$ fue derivado del juego G por eliminación de la estrategia $\widehat{s}_j$ del jugador j, es suficiente mostrar que $s_j^* \neq \widehat{s}_j$.

La estrategia $\widehat{s}_j$ es fuertemente dominada en el juego G, así que existe una estrategia $t_j \in S_j$ que la domina fuertemente:

$$u_j\left(\widehat{s}_j, s_{-j}\right) < u_j\left(t_j, s_{-j}\right) \qquad \forall s_{-j} \in S_{-j}.$$

Como s^* es un punto de equilibrio, eligiendo $s_{-j} = s^*_{-j}$ en la desigualdad anterior se obtiene

$$u_j\left(\widehat{s}_j, s^*_{-j}\right) < u_j\left(t_j, s^*_{-j}\right) \leq u_j\left(s^*_j, s^*_{-j}\right)$$

llegando a la conclusión que $\widehat{s}_j \neq s^*_j$. ■

Corolario 1.1.16 *Una estrategia fuertemente dominada no puede ser elemento de un equilibrio del juego.*

Demostración. Sea $G = \left(N, (S_i)_{i\in N}, (u_i)_{i\in N}\right)$ un juego en forma estratégica y sea $s^*_i \in S_i$ una estrategia fuertemente dominada del jugador $i \in N$.

Suponga que el perfil de estrategias $s^* = \left(s^*_i, s^*_{-i}\right)$ es un equilibrio de G. Entonces para cada estrategia $s_i \in S_i$ del jugador i se debe cumplir

$$u_i\left(s_i, s^*_{-i}\right) \leq u_i\left(s^*_i, s^*_{-i}\right).$$

Por ser s^*_i fuertemente dominada, existe otra estrategia $t_i \in S_i$ tal que para cada perfil de estrategias $s_{-i} \in S_{-i}$ se cumple $u_i\left(s^*_i, s_{-i}\right) < u_i\left(t_i, s_{-i}\right)$.

En particular, para el perfil de estrategias $s^*_{-i} \in S_{-i}$ se cumple

$$u_i\left(s^*_i, s^*_{-i}\right) < u_i\left(t_i, s^*_{-i}\right) \leq u_i\left(s^*_i, s^*_{-i}\right)$$

Por tanto s^*_i no puede ser elemento de un equilibrio de G. ■

1.2. Estrategias mixtas

Dado un juego en forma estratégica, se puede extender el conjunto de estrategias de un jugador al conjunto de todas las distribuciones de probabilidad sobre sus estrategias. Los elementos de este nuevo conjunto son llamados estrategias mixtas, mientras que los elementos del conjunto de estrategias original son llamados estrategias puras.

Definición 1.2.1 *Sea $G = \left(N, (S_i)_{i\in N}, (u_i)_{i\in N}\right)$ un juego en forma estratégica. Una estrategia mixta del jugador $i \in N$ es una distribución de probabilidad sobre su conjunto de estrategias S_i.*

El conjunto de estrategias mixtas del jugador i se denota por

$$\Sigma_i = \left\{ \sigma_i : S_i \to [0,1] : \sum_{s_i \in S_i} \sigma_i\left(s_i\right) = 1 \right\}.$$

Denótese al número de estrategias puras del jugador i por m_i. Se sigue entonces que el conjunto de estrategias mixtas Σ_i es un subconjunto de $\mathbb{R}^{m_i}$ de dimensión $m_i - 1$.

Definición 1.2.2 *Para cada jugador $i \in N$, el soporte de la estrategia mixta $\sigma_i \in \Sigma_i$ es el conjunto de las estrategias puras que se escogen con probabilidad positiva usando σ_i; esto es, $Supp\left(\sigma_i\right) = \{s_i \in S_i : \sigma_i\left(s_i\right) > 0\}$*

Una estrategia pura s_i se puede asociar con la estrategia mixta en la cual la estrategia pura s_i es elegida con probabilidad 1. Esto implica que cada estrategia pura puede ser considerada también una estrategia mixta.

1.2.1. Extensión mixta de juegos en forma estratégica

Definición 1.2.3 *Sea $G = \left(N, \left(S_i\right)_{i\in N}, \left(u_i\right)_{i\in N}\right)$ un juego en forma estratégica. La extensión mixta de G es el juego $\Gamma = \left(N, \left(\Sigma_i\right)_{i\in N}, \left(U_i\right)_{i\in N}\right)$, tal que*

- *Para cada jugador $i \in N$ su conjunto de estrategias es Σ_i*
- *La función $U_i : \Sigma \to \mathbb{R}$ asocia a cada perfil de estrategias mixtas $\sigma = \left(\sigma_1, \ldots, \sigma_n\right) \in \Sigma = \Sigma_1 \times \cdots \times \Sigma_n$ con el pago*

$$U_i\left(\sigma\right) = E_\sigma\left[u_i\left(\sigma\right)\right] = \sum_{\left(s_1,\ldots,s_n\right)\in S} \left(\prod_{j\in N} \sigma_j\left(s_j\right)\right) u_i\left(s_1, \ldots, s_n\right).$$

Nótese que el hecho de que las estrategias mixtas de cada jugador sean independientes de las de cada uno de los otros jugadores juega un papel en la función $U_i\left(\sigma\right)$, ya que la probabilidad de jugar un perfil de estrategias particular $\left(s_1, \ldots, s_n\right) \in S$ es el producto $\prod_{j\in N} \sigma_j\left(s_j\right)$.

Para cada jugador $i \in N$ la función de pago U_i es una función de $\sum_{i\in N} m_i$ variables: $\sigma_1\left(s_1^1\right), \ldots, \sigma_1\left(s_1^{m_1}\right), \ldots, \sigma_n\left(s_n^1\right), \ldots, \sigma_n\left(s_n^{m_n}\right)$

Teorema 1.2.4 *Sea* $G = \left(N, (S_i)_{i\in N}, (u_i)_{i\in N}\right)$ *un juego en forma estratégica y sea* $\Gamma = \left(N, (\Sigma_i)_{i\in N}, (U_i)_{i\in N}\right)$ *su extensión mixta. Entonces para cada jugador* $i \in N$ *la función* U_i *es una función multilineal en las* n *variables* $(\sigma_i)_{i\in N}$*; esto es, para cada jugador* i*, para cada* $\sigma_i, \sigma_i^{'} \in \Sigma_i$ *y para cada* $\lambda \in [0,1]$

$$U_i\left(\lambda\sigma_i + (1-\lambda)\,\sigma_i^{'}, \sigma_{-i}\right) = \lambda U_i\left(\sigma_i, \sigma_{-i}\right) + (1-\lambda)\,U_i\left(\sigma_i^{'}, \sigma_{-i}\right),\ \ \forall\sigma_{-i} \in \Sigma_{-i}$$

Demostración. Para cada $i \in N$, cada j tal que $1 \le j \le m_i$, y cada $s = (s_1, \ldots, s_n) \in S$, defínase la función

$$\sigma_i\left(s_i^j\right) \mapsto u_i\left(s_1, \ldots, s_n\right) \prod_{k\in N} \sigma_k\left(s_k\right)$$

la cual es constante si $s_i \neq s_i^j$, y es una función lineal de $\sigma_i\left(s_i^j\right)$ si $s_i = s_i^j$, cuya pendiente es $u_i\left(s_1, \ldots, s_n\right) \prod_{k\neq i} \sigma_k\left(s_k\right)$

Con esto, la función U_i es lineal al ser suma de funciones lineales en $\sigma_i\left(s_i^j\right)$.

Se sigue entonces que para cada $i \in N$ la función $U_i\left(\cdot, \sigma_{-i}\right)$ es lineal en cada coordenada $\sigma_i\left(s_i^j\right)$ de σ_i para cada $\sigma_{-i} \in \Sigma_{-i}$, y por tanto

$$U_i\left(\lambda\sigma_i + (1-\lambda)\,\sigma_i^{'}, \sigma_{-i}\right) = \lambda U_i\left(\sigma_i, \sigma_{-i}\right) + (1-\lambda)\,U_i\left(\sigma_i^{'}, \sigma_{-i}\right)$$

para cada $\lambda \in [0,1]$ y toda $\sigma_i, \sigma_i^{'} \in \Sigma_i$. ■

Dado que una función multilineal sobre Σ es una función continua, se tiene el siguiente resultado.

Corolario 1.2.5 *La función de pago* U_i *del jugador* i *es una función continua en la extensión mixta de cada juego en forma estratégica* G*.*

1.2.2. Equilibrio de Nash en estrategias mixtas

En la extensión mixta Γ de un juego en forma estratégica G, cada equilibrio de Γ es llamado un equilibrio en estrategias mixtas de G.

Teorema 1.2.6 *Sea* $G = \left(N, (S_i)_{i\in N}, (u_i)_{i\in N}\right)$ *un juego en forma estratégica y sea* Γ *su extensión mixta. Un perfil de estrategias mixtas* $\sigma^* \in \Sigma$ *es un equilibrio en estrategias mixtas de* G *si y sólo si para cada jugador* $i \in N$ *y cada estrategia pura* $s_i \in S_i$ *se satisface* $U_i\left(\sigma^*\right) \ge U_i\left(s_i, \sigma_{-i}^*\right)$

Demostración. Si σ^* es un equilibrio en estrategias mixtas de Γ, entonces

$$U_i(\sigma^*) \geq U_i(\sigma_i, \sigma_{-i}) \qquad \forall i \in N, \forall \sigma_i \in \Sigma_i.$$

Dado que cada estrategia pura es una estrategia mixta, se cumple

$$U_i(\sigma^*) \geq U_i\left(s_i, \sigma^*_{-i}\right) \qquad \forall i \in N, \forall s_i \in S_i.$$

Suponga ahora que el perfil de estrategias mixtas σ^* satisface $U_i(\sigma^*) \geq U_i\left(s_i, \sigma^*_{-i}\right)$ para cada jugador $i \in N$ y toda estrategia pura $s_i \in S_i$. Entonces para cada estrategia mixta $\sigma_i \in \Sigma_i$ del jugador i se cumple

$$\begin{aligned} U_i\left(\sigma_i, \sigma^*_{-i}\right) &= \sum_{s_i \in S_i} \sigma_i(s_i) U_i\left(s_i, \sigma^*_{-i}\right) \\ &\leq \sum_{s_i \in S_i} \sigma_i(s_i) U_i(\sigma^*) \\ &= U_i(\sigma^*) \sum_{s_i \in S_i} \sigma_i(s_i) = U_i(\sigma^*) \end{aligned}$$

En particular σ^* es un equilibrio en estrategias mixtas de Γ. ■

Una herramienta efectiva para encontrar equilibrios es el principio de indiferencia, que establece que si en un equilibrio en estrategias mixtas σ^* un jugador utiliza dos distintas estrategias puras que están en el soporte de σ^*_i, entonces el pago esperado del jugador por usar cualquiera de dichas estrategias es el mismo, suponiendo que los demás jugadores están jugando de acuerdo al equilibrio.

Teorema 1.2.7 *Sean $\sigma^* \in \Sigma$ un equilibrio en estrategias mixtas de un juego en forma estratégica y $s_i, \widehat{s}_i \in S_i$ dos estrategias distintas del jugador i tales que $s_i, \widehat{s}_i \in Supp(\sigma^*_i)$. Entonces se satisface $U_i\left(s_i, \sigma^*_{-i}\right) = U_i\left(\widehat{s}_i, \sigma^*_{-i}\right)$.*

Demostración. Sin pérdida de generalidad suponga que $U_i\left(s_i, \sigma^*_{-i}\right) > U_i\left(\widehat{s}_i, \sigma^*_{-i}\right)$.
Sea σ_i la estrategia del jugador i definida por

$$\sigma'_i(t_i) = \left\{ \begin{array}{ll} \sigma^*_i(t_i) & \text{si } t_i \notin \{s_i, \widehat{s}_i\} \\ 0 & \text{si } t_i = \widehat{s}_i \\ \sigma^*_i(s_i) + \sigma^*_i(\widehat{s}_i) & \text{si } t_i = s_i \end{array} \right\}$$

Entonces se cumple

$$\begin{aligned} U_i\left(\sigma'_i, \sigma^*_{-i}\right) &= \sum_{t_i \in S_i} \sigma'_i(t_i) U_i\left(t_i, \sigma^*_{-i}\right) \\ &= \sum_{t_i \notin \{s_i, \widehat{s}_i\}} \sigma^*_i(t_i) U_i\left(t_i, \sigma^*_{-i}\right) + \left(\sigma^*_i(s_i) + \sigma^*_i(\widehat{s}_i)\right) U_i\left(s_i, \sigma^*_{-i}\right) \\ &> \sum_{t_i \notin \{s_i, \widehat{s}_i\}} \sigma^*_i(t_i) U_i\left(t_i, \sigma^*_{-i}\right) + \sigma^*_i(s_i) U_i\left(s_i, \sigma^*_{-i}\right) + \sigma^*_i(\widehat{s}_i) U_i\left(\widehat{s}_i, \sigma^*_{-i}\right) \\ &= \sum_{t_i \in S_i} \sigma^*_i(t_i) U_i\left(t_i, \sigma^*_{-i}\right) \\ &= U_i(\sigma^*) \end{aligned}$$

Pero esto contradice el supuesto que σ^* es un equilibrio, pues el jugador i puede incrementar su pago desviándose a la estrategia σ'_i. ■

Si el pago esperado del jugador i cuando juega la estrategia pura s_i fuera mayor que cuando juega la estrategia $\widehat{s}_i$, entonces podría mejorar su pago esperado incrementando la probabilidad de jugar s_i y disminuyendo la probabilidad de jugar $\widehat{s}_i$.

En el equilibrio ningún jugador puede beneficiarse desviándose unilateralmente, en particular si $s_i^* \in Supp\,(\sigma_i^*)$ se cumple:

$$U_i\left(s_i^*, \sigma_{-i}^*\right) \geq U_i\left(s_i, \sigma_{-i}^*\right) \qquad \forall s_i \in S_i \backslash Supp\,(\sigma_i^*)$$

Teorema 1.2.8 *Sea $G = \left(N, (S_i)_{i \in N}, (u_i)_{i \in N}\right)$ un juego en forma estratégica finito. Si una estrategia pura $s_i \in S_i$ del jugador i es fuertemente dominada por una estrategia mixta $\sigma_i \in \Sigma_i$ entonces en cada equilibrio del juego la estrategia pura s_i es elegida por el jugador i con probabilidad 0.*

Demostración. Sea $s_i \in S_i$ una estrategia pura del jugador i que es fuertemente dominada por una estrategia mixta $\sigma_i \in \Sigma_i$ y sea $\widehat{\sigma} = (\widehat{\sigma}_i)_{i \in N}$ un perfil de estrategias en el cual el jugador i escoge la estrategia s_i con probabilidad positiva.

Defínase la estrategia mixta $\sigma_i^{'} \in \Sigma_i$ como sigue

$$\sigma_i^{'}(t_i) = \left\{ \begin{array}{ll} \widehat{\sigma}_i(s_i) \cdot \sigma_i(s_i) & t_i = s_i \\ \widehat{\sigma}_i(t_i) + \widehat{\sigma}_i(s_i) \cdot \sigma_i\left(t_i^{'}\right) & t_i \neq s_i \end{array} \right\}$$

Como s_i está dominada fuertemente por σ_i, se cumple

$$U_i(s_i, \sigma_{-i}) < U_i(\sigma_i, \sigma_{-i}) \qquad \forall \sigma_{-i} \in \Sigma_{-i}$$

En particular se cumple para el perfil de estrategias $\widehat{\sigma}_{-i} \in \Sigma_{-i}$. Con esto se obtiene

$$\begin{aligned}
U_i(\widehat{\sigma}_i, \widehat{\sigma}_{-i}) &= \sum_{t_i \in S_i} \widehat{\sigma}_i(t_i)\, U_i(t_i, \widehat{\sigma}_{-i}) \\
&= \sum_{t_i \neq s_i} \widehat{\sigma}_i(t_i)\, U_i(t_i, \widehat{\sigma}_{-i}) + \widehat{\sigma}_i(s_i)\, U_i(s_i, \widehat{\sigma}_{-i}) \\
&< \sum_{t_i \neq s_i} \widehat{\sigma}_i(t_i)\, U_i(t_i, \widehat{\sigma}_{-i}) + \widehat{\sigma}_i(s_i)\, U_i(\sigma_i, \widehat{\sigma}_{-i}) \\
&= \sum_{t_i \neq s_i} \sigma_i^{'}(t_i)\, U_i(t_i, \widehat{\sigma}_{-i}) + \widehat{\sigma}_i(s_i) \sum_{t_i \in S_i} \sigma_i^{'}(t_i)\, U_i(t_i, \widehat{\sigma}_{-i}) \\
&= \sum_{t_i \in S_i} \sigma_i^{'}(t_i)\, U_i(t_i, \widehat{\sigma}_{-i}) \\
&= U_i\left(\sigma_i^{'}, \widehat{\sigma}_{-i}\right)
\end{aligned}$$

Luego la estrategia $\sigma_i^{'}$ le produce al jugador i un pago mayor que $\widehat{\sigma}_i$ cuando los demás jugadores juegan $\widehat{\sigma}_{-i}$, y por tanto $\widehat{\sigma}$ no puede ser un equilibrio. ■

Definición 1.2.9 *Un equilibrio de Nash en estrategias mixtas $\sigma^* = (\sigma_i^*)_{i \in N}$ es estricto si para cada jugador $i \in N$ y cada estrategia pura $s_i \in S_i$ que cumpla $\sigma_i^*(s_i) = 0$ se tiene $U_i(\sigma^*) > U_i\left(s_i, \sigma_{-i}^*\right)$.*

Esto significa que si el jugador i se desvía a una estrategia que no está en el soporte de σ_i^*, esta acción le produce una pérdida.

Definición 1.2.10 *Una estrategia mixta $\sigma_i \in \Sigma_i$ del jugador i se llama completamente mixta si $\sigma_i(s_i) > 0$ para cada estrategia pura $s_i \in S_i$.*

Esto significa que la estrategia mixta σ_i del jugador i tiene soporte completo; esto es, $Supp(\sigma_i) = S_i$.

Definición 1.2.11 *Un equilibrio $\sigma^* = (\sigma_i^*)_{i\in N}$ es llamado completamente mixto si para cada jugador $i \in N$ la estrategia σ_i^* es completamente mixta.*

Se sigue entonces que en cada equilibrio completamente mixto todo perfil de estrategias puras $s \in S$ se escoge con probabilidad positiva.

1.2.3. El teorema de Nash

La contribución de John Nash en su artículo "Juegos no cooperativos" fue definir los equilibrios en estrategias mixtas para cualquier juego finito en forma estratégica y probar que debe existir al menos un equilibrio para dichos juegos.

Teorema 1.2.12 *Para todo juego finito en forma estratégica existe un equilibrio en estrategias mixtas.*

En la demostración de este teorema, John Nash hizo uso el Teorema del punto fijo de Brouwer:

Teorema 1.2.13 *Sea X un conjunto convexo y compacto en un espacio euclideano n-dimensional y sea $f : X \to X$ una función continua. Entonces existe un punto $x \in X$ tal que $f(x) = x$.*

Este teorema afirma que toda función continua de un conjunto convexo y compacto en sí misma tiene un punto fijo.

La demostración del Teorema de Nash consta de dos pasos:

1. Definir una función que satisfaga las condiciones del Teorema del punto fijo de Brouwer, y en consecuencia tenga un punto fijo.
2. Probar que un punto fijo de la función elegida es necesariamente un equilibrio de Nash.

Teorema 1.2.14 *Si el conjunto de estrategias puras S_i del jugador i es finito entonces su conjunto de estrategias mixtas Σ_i es convexo y compacto.*

Demostración. Dado que el conjunto de estrategias mixtas Σ_i es un simplex de dimensión $m_i - 1$, se sigue que es un conjunto convexo y compacto. ■

Teorema 1.2.15 *Si $A \subset \mathbb{R}^n$ y $B \subset \mathbb{R}^m$ son conjuntos compactos entonces el conjunto $A \times B$ es un subconjunto compacto de $\mathbb{R}^{n+m}$. Si A y B son conjuntos convexos entonces $A \times B$ es un subconjunto convexo de $\mathbb{R}^{n+m}$.*

Los teoremas anteriores implican que el conjunto $\Sigma = \times_{i \in N} \Sigma_i$ es un subconjunto convexo y compacto del espacio Euclideano $\mathbb{R}^{m_1 + \ldots + m_n}$.

Defínase primero una función auxiliar $g_i^j : \Sigma \to [0, \infty)$ para cada jugador $i \in N$ y cada índice $j \in \{1, \ldots, m_i\}$ de la siguiente manera:

$$g_i^j(\sigma) = \max\left\{0, U_i\left(s_i^j, \sigma_{-i}\right) - U_i(\sigma)\right\}$$

Esta función da los incentivos para que el jugador i se desvíe del perfil de estrategias σ a su estrategia pura s_i^j en términos de la ganancia generada por esta desviación. Si esta desviación no le produce ganancia positiva entonces no tiene incentivos para desviarse, por lo cual la función da 0.

Afirmación 1.2.16 *Para cada jugador $i \in N$ y cada j tal que $1 \leq j \leq m_i$ la función g_i^j es continua.*

Demostración. Sean $i \in N$ y $j \in \{1, \ldots, m_i\}$. La función U_i es continua. Entonces la función $\sigma_{-i} \mapsto U_i\left(s_i^j, \sigma_{-i}\right)$ es continua. En particular $U_i\left(s_i^j, \sigma_{-i}\right) - U_i(\sigma)$ es una función continua. Dado que 0 es una función continua, y ya que el máximo de funciones continuas es continua, entonces la función g_i^j es continua. ■

Dado que un jugador tiene una desviación rentable si y sólo si tiene una desviación a una estrategia pura, se tiene el siguiente resultado:

Afirmación 1.2.17 *El perfil de estrategias mixtas $\sigma \in \Sigma$ es un equilibrio si y sólo si $g_i^j(\sigma) = 0$ para cada jugador $i \in N$ y para cada $j \in \{1, \ldots, m_i\}$.*

Demostración. Sea σ un equilibrio de Nash de un juego G. Entonces se cumple:

$$U_i(\sigma) \geq U_i(s_i, \sigma_{-i}) \qquad \forall s_i \in S_i, \forall i \in N$$

Con esto se tiene que $U_i\left(s_i^j, \sigma_{-i}\right) - U_i(\sigma) \leq 0$ para cada jugador $i \in N$ y para cada $j \in \{1, \ldots, m_i\}$, y por tanto

$$g_i^j(\sigma) = \text{máx}\left\{0, U_i\left(s_i^j, \sigma_{-i}\right) - U_i(\sigma)\right\} = 0$$

Suponga ahora que $\sigma \in \Sigma$ es un perfil de estrategias mixtas tal que $g_i^j(\sigma) = 0$ para cada jugador $i \in N$ y para cada $j \in \{1, \ldots, m_i\}$. Entonces se cumple

$$U_i\left(s_i^j, \sigma_{-i}\right) - U_i(\sigma) \leq 0 \qquad \forall i \in N, \forall j \in \{1, \ldots, m_i\}$$

Esto equivale a la definición de equilibrio de Nash. Por tanto el perfil de estrategias mixtas σ es un equilibrio. ∎

Para cada perfil de estrategias mixtas $\sigma \in \Sigma$ defínase otro perfil de estrategias $f(\sigma) = (f_i(\sigma))_{i \in N}$ de la siguiente forma:

$$f_i^j(\sigma) = \frac{\sigma_i\left(s_i^j\right) + g_i^j(\sigma)}{1 + \sum_{k=1}^{m_i} g_i^k(\sigma)}$$

$f_i^j(\sigma)$ es la probabilidad de que el jugador i juegue la estrategia pura s_i^j.

En el numerador de la función f si la estrategia pura considerada le da al jugador i una utilidad esperada mayor que la estrategia mixta σ entonces se le suma a la probabilidad que se está asignando a esta estrategia pura la cantidad $g_i^j(\sigma)$; en caso contrario no se le suma nada. El denominador toma después los números resultantes y los normaliza para que se forme una distribución de probabilidad.

Afirmación 1.2.18 *El rango de f es Σ, esto es, $f(\Sigma) \subseteq \Sigma$.*

Demostración. Se debe probar que $f(\sigma)$ es un perfil de estrategias mixtas para cada $\sigma \in \Sigma$; esto es:

1. $f_i^j(\sigma) \geq 0$ para cada i y cada $j \in \{1, \ldots, m_i\}$.
2. $\sum_{j=1}^{m_i} f_i^j(\sigma) = 1$ para todos los jugadores $i \in N$.

La condición 1 se cumple porque $g_i^j(\sigma)$ es no negativo, y con esto el denominador de la ecuación es al menos 1 y el numerador es no negativo.

Para la condición 2, como $\sum_{j=1}^{m_i} \sigma_i\left(s_i^j\right) = 1$ se sigue que

$$
\begin{aligned}
\sum_{j=1}^{m_i} f_i^j(\sigma) &= \sum_{j=1}^{m_i} \frac{\sigma_i\left(s_i^j\right)+g_i^j(\sigma)}{1+\sum_{k=1}^{m_i} g_i^k(\sigma)} \\
&= \frac{\sum_{j=1}^{m_i}\left(\sigma_i\left(s_i^j\right)+g_i^j(\sigma)\right)}{1+\sum_{k=1}^{m_i} g_i^k(\sigma)} \\
&= \frac{\sum_{j=1}^{m_i}\sigma_i\left(s_i^j\right)+\sum_{j=1}^{m_i} g_i^j(\sigma)}{1+\sum_{k=1}^{m_i} g_i^k(\sigma)} = 1
\end{aligned}
$$

Por tanto se cumple que $f(\Sigma) \subseteq \Sigma$. ■

Afirmación 1.2.19 *f es una función continua.*

Demostración. Por la afirmación tanto el numerador como el denominador en la definición de f_i^j son funciones continuas, y dado que el denominador es al menos 1, entonces f es el cociente de dos funciones continuas y por tanto es continua. ■

En consecuencia f es una función continua que mapea el conjunto de estrategias Σ, el cual es convexo y compacto, en sí misma. Por el Teorema del punto fijo de Brouwer existe un punto $\sigma \in \Sigma$ tal que $f(\sigma)=\sigma$.

Afirmación 1.2.20 *Sea σ un punto fijo de f. Entonces*

$$g_i^j(\sigma)=\sigma_i\left(s_i^j\right)\sum_{k=1}^{m_i} g_i^k(\sigma) \qquad \forall i \in N,\ j \in \{1,\ldots,m_i\}$$

Demostración. El perfil de estrategias σ es un punto fijo de f, y por tanto $f(\sigma)=\sigma$; esto es,

$$f_i^j(\sigma)=\sigma_i\left(s_i^j\right) \qquad \forall i \in N,\ \forall j \in \{1,\ldots,m_i\}$$

De la definición de f se tiene que

$$\frac{\sigma_i\left(s_i^j\right)+g_i^j(\sigma)}{1+\sum_{k=1}^{m_i} g_i^k(\sigma)}=\sigma_i\left(s_i^j\right) \qquad \forall i \in N,\ j \in \{1,\ldots,m_i\}$$

El denominador del lado izquierdo es positivo, entonces multiplicando ambos lados de la ecuación por el denominador se obtiene

$$\sigma_i\left(s_i^j\right)+g_i^j(\sigma)=\sigma_i\left(s_i^j\right)+\sigma_i\left(s_i^j\right)\sum_{k=1}^{m_i} g_i^k(\sigma), \qquad \forall i \in N,\ j \in \{1,\ldots,m_i\}$$

Cancelando términos de ambos lados se obtiene el resultado deseado. ■

Finalmente, se obtiene la existencia de equilibrios de Nash para cada juego en forma estratégica.

Afirmación 1.2.21 *Sea σ un punto fijo de f. Entonces σ es un equilibrio de Nash.*

Demostración. Suponga por contradicción que σ no es un equilibrio. Entonces existe un jugador $i \in N$ y una estrategia pura $l \in \{1, \ldots, m_i\}$ tal que $g_i^l(\sigma) > 0$. En particular se tiene que $\sum_{k=1}^{m_i} g_i^k(\sigma) > 0$.

Con esto y de la ecuación del teorema anterior se cumple

$$\sigma_i\left(s_i^j\right) > 0 \Leftrightarrow g_i^j(\sigma) > 0, \qquad \forall j \in \{1, \ldots, m_i\}.$$

Como $g_i^l(\sigma) > 0$, en particular se tiene $\sigma_i\left(s_i^l\right) > 0$.

Dado que la función U_i es multilineal se tiene que $U_i(\sigma) = \sum_{j=1}^{m_i} \sigma_i\left(s_i^j\right) U_i\left(s_i^j, \sigma_{-i}\right)$. Esto produce:

$$\begin{aligned}
0 &= \sum_{j=1}^{m_i} \sigma_i\left(s_i^j\right)\left(U_i\left(s_i^j, \sigma_{-i}\right) - U_i(\sigma)\right) \\
&= \sum_{\left\{j:\sigma_i\left(s_i^j\right)>0\right\}} \sigma_i\left(s_i^j\right)\left(U_i\left(s_i^j, \sigma_{-i}\right) - U_i(\sigma)\right) \\
&= \sum_{\left\{j:\sigma_i\left(s_i^j\right)>0\right\}} \sigma_i\left(s_i^j\right) g_i^j(\sigma)
\end{aligned}$$

Lo anterior se cumple ya que si $\sigma_i\left(s_i^j\right) > 0$ entonces $g_i^j(\sigma) > 0$, y con esto $g_i^j(\sigma) = U_i\left(s_i^j, \sigma_{-i}\right) - U_i(\sigma)$.

Pero esta suma es positiva, ya que contiene al menos a $j = l$, y cada sumando es positivo. Por tanto σ debe ser un equilibrio de Nash. ■

1.3. Equilibrios correlacionados

Existen muchos juegos en los cuales un equilibrio de Nash produce pagos relativamente bajos a los jugadores en comparación a otros resultados del juego que no son equilibrios. En tales situaciones a los jugadores les gustaría transformar el juego, si es posible, para extender el conjunto de equilibrios que incluyan mejores resultados. Los jugadores podrían buscar transformar el juego tratando de comunicarse con los demás y coordinando sus movimientos, incluso formulando acuerdos contractuales.

Motivados por esto, las elecciones de las estrategias puras de los jugadores podrían ser correlacionadas, debido al hecho de que usan el mismo espacio de eventos aleatorios para decidir qué estrategias jugar.

Definición 1.3.1 *Sea $G = \left(N, (S_i)_{i\in N}, (u_i)_{i\in N}\right)$ un juego en forma estratégica. Una estrategia correlacionada para los jugadores en el juego G es cualquier distribución de probabilidad sobre $\Delta(S)$. Esto es, p es una estrategia correlacionada si y sólo si $p = (p(s))_{s\in S}$ satisface*

$$p(s) \geq 0 \qquad \forall s \in S, \qquad \sum_{s \in S} p(s) = 1$$

1.3.1. Extensión correlacionada de un juego en forma estratégica

Definición 1.3.2 *Sean $G = \left(N, (S_i)_{i \in N}, (u_i)_{i \in N}\right)$ un juego en forma estratégica y p una estrategia correlacionada sobre el conjunto de estrategias S. La extensión correlacionada de G es el juego $\Gamma^*(p)$, el cual se define como sigue:*

- *Un mediador externo elige probabilísticamente un perfil de estrategias $s \in S$ de acuerdo a la estrategia correlacionada p, la cual es de conocimiento común para todos los jugadores.*
- *A cada jugador $i \in N$ el mediador revela s_i pero no s_{-i}.*
- *Cada jugador i escoge una estrategia $s_i^* \in S_i$, que puede ser diferente de la recomendación revelada por el mediador.*
- *El pago de cada jugador i es $u_i(s_1^*, \ldots, s_n^*)$.*

El mediador recomienda al jugador i que juegue la estrategia $s_i \in S_i$ del juego original, pero el jugador no está obligado a seguir la recomendación que recibe y es libre de jugar una estrategia diferente.

Definición 1.3.3 *Sea $p \in \Delta(S)$ una estrategia correlacionada. Entonces el pago esperado del jugador $i \in N$ está dado por*

$$U_i(p) = \sum_{s \in S} p(s)\, u_i(s).$$

Notación 1.3.4 *La probabilidad marginal de s_i en p para cada estrategia $s_i \in S_i$ del jugador i se denota por $p(s_i \times S_{-i}) = \sum_{t_{-i} \in S_{-i}} p(s_i, t_{-i})$*

Lo anterior denota la probabilidad de que el jugador i reciba la recomendación s_i.

Se dice que la estrategia pura $s_i \in S_i$ es jugada en p si esta probabilidad marginal es positiva. Entonces la probabilidad condicional de que el mediador haya recomendado el perfil de estrategias $s = (s_i, s_{-i})$ es

$$p\left(s_{-i}|s_i\right) = \frac{p\left(s_i, s_{-i}\right)}{p\left(s_i \times S_{-i}\right)} = \frac{p\left(s_i, s_{-i}\right)}{\sum_{t_{-i}\in S_{-i}} p\left(s_i, t_{-i}\right)} \qquad \forall s_{-i} \in S_{-i}$$

Notación 1.3.5 *La estrategia correlacionada de jugadores distintos de i dada la recomendación s_i al jugador i se denota por $p\left(\cdot|s_i\right)$.*

Cuando $p\left(s_i \times S_{-i}\right) = 0$ la probabilidad de que el jugador i reciba la recomendación s_i es cero, y en este caso la probabilidad condicional $p\left(s_{-i}|s_i\right)$ queda indefinida.

Puesto que las decisiones que los jugadores pueden tomar en el juego $\Gamma^*\left(p\right)$ están asociadas con una recomendación dada por el mediador, y el conjunto de posibles recomendaciones del jugador i es su conjunto de estrategias puras S_i, se obtiene la siguiente definición de una estrategia pura en $\Gamma^*\left(p\right)$.

Definición 1.3.6 *Una estrategia del jugador $i \in N$ en el juego $\Gamma^*\left(p\right)$ es una función $\tau_i : S_i \to S_i$ que mapea cada recomendación s_i del mediador a una acción $\tau_i\left(s_i\right) \in S_i$.*

Para cada jugador $i \in N$, defínase la acción τ_i^* por $\tau_i^*\left(s_i\right) = s_i$ para cada $s_i \in S_i$; esto es, cuando el jugador i sigue la recomendación del mediador. En este juego se desea que la recomendación del mediador le genere a cada jugador un beneficio mayor que el que obtendría si no siguiera esta recomendación.

Si el jugador $i \in N$ decide seguir la recomendación $s_i \in S_i$ del mediador, entonces su pago marginal esperado está dado por $\sum_{s_{-i}\in S_{-i}} p\left(s_i, s_{-i}\right) u_i\left(s_i, s_{-i}\right)$.

En cambio, dado que ha recibido la recomendación $s_i \in S_i$ del mediador, si decidiera no seguir dicha recomendación y jugar su estrategia pura $t_i \in S_i$, entonces su pago marginal esperado está dado por $\sum_{s_{-i}\in S_{-i}} p\left(s_i, s_{-i}\right) u_i\left(t_i, s_{-i}\right)$.

Definición 1.3.7 *Sea $p \in \Delta\left(S\right)$ una estrategia correlacionada. Para cada jugador $i \in N$ y cada par de estrategias puras $s_i, t_i \in S_i$, los incentivos de desviación de la recomendación s_i a t_i están dados por*

$$h_{s_i,t_i}\left(p\right) = \sum_{s_{-i}\in S_{-i}} p\left(s_i, s_{-i}\right)\left[u_i\left(s_i, s_{-i}\right) - u_i\left(t_i, s_{-i}\right)\right]$$

Teorema 1.3.8 *El perfil de acciones $\tau^* = (\tau_1^*, \ldots, \tau_n^*)$ es un equilibrio del juego $\Gamma^*(p)$ si y sólo si*

$$h_{s_i,t_i}(p) \geq 0 \qquad \forall i \in N, \forall s_i, t_i \in S_i$$

Demostración. El perfil de acciones τ^* es un equilibrio si y sólo si ningún jugador i puede beneficiarse desviándose a una estrategia diferente a su recomendación.

El pago que el jugador i obtiene con el perfil de acciones τ^* cuando su recomendación es s_i es

$$\sum_{s_{-i}\in S_{-i}} \left(\frac{p(s_i, s_{-i})}{\sum\limits_{t_{-i}\in S_{-i}} p(s_i, t_{-i})} u_i(s_i, s_{-i}) \right)$$

Suponga que el jugador i decide desviarse y jugar la estrategia $s_i^{'}$ en lugar de s_i mientras los otros siguen las recomendaciones; esto es, juegan τ_{-i}^*.

La distribución de las estrategias de los jugadores distintos de i es dada por la probabilidad condicional $p(s_{-i}|s_i)$, y así el pago esperado del jugador i si se desvía a la estrategia $s_i^{'}$ es

$$\sum_{s_{-i}\in S_{-i}} \left(\frac{p(s_i, s_{-i})}{\sum\limits_{t_{-i}\in S_{-i}} p(s_i, t_{-i})} u_i\left(s_i^{'}, s_{-i}\right) \right)$$

Esto significa que el perfil de acciones τ^* es un equilibrio si y sólo si para cada jugador $i \in N$, cada estrategia $s_i \in S_i$ para la cual $\sum_{s_{-i}\in S_{-i}} p(s_i, s_{-i}) > 0$ y cada estrategia $s_i^{'} \in S_i$:

$$\sum_{s_{-i}\in S_{-i}} \left(\frac{p(s_i, s_{-i})}{\sum\limits_{t_{-i}\in S_{-i}} p(s_i, t_{-i})} u_i(s_i, s_{-i}) \right) \geq \sum_{s_{-i}\in S_{-i}} \left(\frac{p(s_i, s_{-i})}{\sum\limits_{t_{-i}\in S_{-i}} p(s_i, t_{-i})} u_i\left(s_i^{'}, s_{-i}\right) \right)$$

Cuando el denominador de esta ecuación es positivo, se puede reducir ambos lados de la desigualdad para obtener $h_{s_i,s_i'}(p) \geq 0$

Cuando $\sum_{t_{-i}\in S_{-i}} p(s_i, t_{-i}) = 0$, dado que $(p(s_i, t_{-i}))_{t_{-i}\in S_{-i}}$ son números no negativos, entonces $p(s_i, t_{-i}) = 0$ para cada $t_{-i} \in S_{-i}$ y así $h_{s_i,s_i'}(p) = 0$ ■

Con esto se espera que el jugador $i \in N$ no pueda incrementar su pago esperado por usar una estrategia t_i cuando la recomendación del mediador fue s_i, suponiendo que las recomendaciones del mediador son generadas de acuerdo a la distribución p y que los demás jugadores están siguiendo la recomendación del mediador.

Definición 1.3.9 *Una distribución de probabilidad μ sobre el conjunto de perfiles de estrategias S se llama un equilibrio correlacionado si el perfil de acciones τ^* es un equilibrio de Nash del juego $\Gamma^*(\mu)$. Esto es:*

$$h_{s_i,t_i}(\mu) \geq 0 \qquad \forall i \in N, \forall s_i, t_i \in S_i$$

Las desigualdades definidas en un equilibrio correlacionado μ se llaman restricciones estratégicas de incentivos, las cuales representan las condiciones que la estrategia correlacionada del mediador debe satisfacer para garantizar que todos los jugadores tengan incentivos para obedecer sus recomendaciones.

Definición 1.3.10 *Sean* $s_i, t_i \in S_i$ *dos estrategias puras distintas del jugador* i*. La restricción de incentivos* $h_{s_i,t_i}(\cdot) \geq 0$ *es vacía si* $h_{s_i,t_i} = 0$*.*

Definición 1.3.11 *Un juego* G *es no trivial si al menos una de las restricciones de incentivos es no vacía.*

Así, un juego es no trivial si existe al menos un jugador que tiene dos estrategias puras distintas tales que $U_i(s_i, \cdot) \neq U_i(t_i, \cdot)$.

Definición 1.3.12 *La estrategia pura* $s_i \in S_i$ *del jugador* i *es coherente si es jugada en algún equilibrio correlacionado, esto es, si existe un equilibrio correlacionado* μ *tal que* $\mu(s_i \times S_{-i}) > 0$*.*

Denótese por S_i^c al conjunto de estrategias puras coherentes del jugador i.

Definición 1.3.13 *Sean* $s_i, t_i \in S_i$ *dos estrategias puras del jugador* i*. La estrategia* t_i *compromete a la estrategia* s_i *si para cada equilibrio correlacionado* μ *se cumple* $h_{s_i,t_i}(\mu) = 0$*.*

Esto es, t_i compromete a s_i si para cada equilibrio correlacionado μ en el cual s_i es jugado, la estrategia pura t_i es una mejor respuesta a $p(\cdot|s_i)$.

Nótese que si la estrategia $s_i \in S_i$ no es coherente entonces toda estrategia pura $t_i \in S_i$ del jugador i compromete a s_i.

1.3.2. Geometría de equilibrios correlacionados

Un semiespacio en $\mathbb{R}^m$ se define por un vector $\alpha \in \mathbb{R}^m$ y un número real $\beta \in \mathbb{R}$ mediante la siguiente ecuación

$$H^+(\alpha, \beta) = \left\{ x \in \mathbb{R}^m : \sum_{i=1}^{m} \alpha_i x_i \geq \beta \right\}$$

En la definición de equilibrio correlacionado se puede ver que el conjunto de equilibrios correlacionados de un juego está dado por la intersección de un número finito de semiespacios.

Un semiespacio es un conjunto convexo y cerrado. Puesto que la intersección de conjuntos cerrados y convexos es un conjunto cerrado y convexo, se sigue que el conjunto de equilibrios correlacionados es convexo y cerrado.

Dado que el conjunto de equilibrios correlacionados es un subconjunto del conjunto de distribuciones de probabilidad de S, entonces es un conjunto acotado y por tanto es un conjunto convexo y compacto.

Teorema 1.3.14 *El conjunto de equilibrios correlacionados de un juego finito es convexo y compacto.*

Un politopo en $\mathbb{R}^d$ es la envoltura convexa de un número finito de puntos en $\mathbb{R}^d$. Todo conjunto acotado definido por la intersección de un número finito de semiespacios es un politopo, de lo cual se sigue que el conjunto de equilibrios correlacionados de un juego es un politopo, que se denotará por C.

El conjunto $\Delta(S)$ de estrategias correlacionadas de un juego es un simplex de dimensión $|S|-1$. Dado que el politopo C de equilibrios correlacionados es un subconjunto de este simplex, entonces tiene dimensión a lo más $|S|-1$.

Definición 1.3.15 *El politopo de equilibrios correlacionados C es de dimensión completa si tiene dimensión $|S|-1$.*

Un equilibrio correlacionado μ se encuentra en la frontera de C si yace en una cara de C, la cual es de dimensión menor a $|S|-1$.

Si C no es de dimensión completa entonces todos sus puntos son frontera y por tanto no tiene interior. Pero si no es un único punto entonces tiene un interior relativo y una frontera relativa.

1.3.3. Relación entre equilibrios de Nash y correlacionados

Cada perfil de estrategias mixtas $\sigma \in \Sigma$ induce una distribución de probabilidad p_σ sobre el conjunto de perfiles de estrategias S:

$$p_\sigma(s_1, \ldots, s_n) = \sigma_1(s_1) \times \cdots \times \sigma_n(s_n).$$

Teorema 1.3.16 *Para cada equilibrio de Nash σ^* la distribución de probabilidad p_{σ^*} es un equilibrio correlacionado.*

Demostración. Sea σ^* un equilibrio de Nash de un juego G. Entonces para cada $s_i^* \in Supp(\sigma_i^*)$ se cumple:

$$p_{\sigma^*}(s_{-i}|s_i^*) = \frac{p_{\sigma^*}(s_i^*, s_{-i})}{\sum\limits_{t_{-i} \in S_{-i}} p_{\sigma^*}(s_i^*, t_{-i})} = \frac{\sigma_i^*(s_i^*) \times \sigma_{-i}^*(s_{-i})}{\sum\limits_{t_{-i} \in S_{-i}} \sigma_i^*(s_i^*) \times \sigma_{-i}^*(t_{-i})} =$$
$$= \frac{\sigma_{-i}^*(s_{-i})}{\sum\limits_{t_{-i} \in S_{-i}} \sigma_{-i}^*(t_{-i})} = \sigma_{-i}^*(s_{-i})$$

Aplicando esto en la definición de equilibrio correlacionado, se requiere que para cada jugador $i \in N$, $s_i^* \in Supp(\sigma_i^*)$ y $\forall s_i \in S_i$ se cumpla

$$\sum_{s_{-i} \in S_{-i}} u_i(s_i^*, s_{-i})\, \sigma_{-i}^*(s_{-i}) \geq \sum_{s_{-i} \in S_{-i}} u_i(s_i, s_{-i})\, \sigma_{-i}^*(s_{-i}).$$

Esto equivale a $U_i\left(s_i^*, \sigma_{-i}^*\right) \geq U_i\left(s_i, \sigma_{-i}^*\right)$, la cual es la definición de equilibrio de Nash. Por tanto la distribución de probabilidad p_{σ^*} es un equilibrio correlacionado. ∎

Dado que cada juego finito en forma estratégica tiene algún equilibrio de Nash, se deduce el siguiente resultado.

Corolario 1.3.17 *Para todo juego finito en forma estratégica existe algún equilibrio correlacionado.*

El conjunto de equilibrios correlacionados de un juego en forma estratégica G tiene una estructura matemática simple y tratable, al ser un conjunto convexo y compacto y estar caracterizado por un sistema de desigualdades lineales finito. Por otro lado, el conjunto de equilibrios de Nash de G generalmente no tiene una estructura simple. Por tal motivo, el conjunto de equilibrios correlacionados podría ser más sencillo de analizar que el conjunto de equilibrios de Nash.

Un mejor entendimiento de la localización de los equilibrios de Nash dentro del politopo C de equilibrios correlacionados podría no sólamente aclarar las conexiones entre ambos tipos de equilibrios, sino también podría servir para diseñar algoritmos más eficientes para calcular equilibrios de Nash.

Proposición 1.3.18 *En todo juego finito no trivial cada equilibrio de Nash está localizado sobre la frontera del politopo C de equilibrios correlacionados.*

Demostración. Sea σ^* un equilibrio de Nash de un juego finito no trivial G.

Suponga que σ^* no es completamente mixto. Entonces para algún jugador $i \in N$ existe alguna estrategia $t_i \in S_i$ tal que $p\left(t_i \times S_{-i}\right) = 0$. Con esto se cumple $p\left(t_i, s_{-i}\right) = 0$ para cada $s_{-i} \in S_{-i}$.

Suponga que σ^* es completamente mixto. Entonces σ^* hace que cada jugador sea indiferente de jugar entre todas sus estrategias. Luego se satisface $h_{s_i,t_i}\left(\mu\right) = 0$ para todo jugador $i \in N$ y para cada par de estrategias $s_i, t_i \in S_i$.

Así, cada equilibrio de Nash σ^* satisface con igualdad al menos una restricción de no negatividad o una restricción de incentivos, y dichas restricciones determinan una cara del politopo C de equilibrios correlacionados.

Por tanto cada equilibrio de Nash se encuentra sobre la frontera de C. ■

Si el politopo C tiene dimensión completa, entonces cada equilibrio de Nash está localizado sobre su frontera relativa.

Capítulo 2

Desviación de estrategias correlacionadas

Las desigualdades no estrictas en las restricciones de incentivos permiten que un jugador pueda ser indiferente entre obedecer y desobedecer las recomendaciones del mediador en un equilibrio correlacionado. Si un jugador fuera indiferente entre seguir un equilibrio correlacionado o desviarse de él, entonces el mediador debería cuidar que la menor perturbación de incentivos y creencias pudiera lograr que el equilibrio no se llevara a cabo.

2.1. Cadenas de Markov y equilibrios correlacionados

2.1.1. Matrices de transición de estrategias

Denótese por $\alpha_i\left(t_i|s_i\right)$ a la probabilidad condicional de que el jugador i se desvíe a la estrategia t_i si la estrategia s_i fuera recomendada por el mediador. Con estas probabilidades, para cada jugador $i \in N$ se puede formar una matriz de desviaciones de las recomendaciones dadas por el mediador.

Definición 2.1.1 *Una matriz de transición sobre el conjunto de estrategias puras para el jugador i es una matriz de probabilidades condicionales de desviación $\alpha_i = \left(\alpha_i\left(t_i|s_i\right)\right)_{s_i,\in S_i, t_i\in S_i}$ tal que*

$$\begin{aligned} \alpha_i\left(t_i|s_i\right) \geq 0 \qquad & \forall s_i, t_i \in S_i, \\ \sum_{t_i\in S_i} \alpha_i\left(t_i|s_i\right) = 1 \qquad & \forall s_i \in S_i \end{aligned}$$

Dicha matriz de transición de estrategias para el jugador i se puede interpretar como una desviación aleatoria de estrategias del jugador i cuando el mediador está tratando de implementar alguna estrategia correlacionada p. También se puede ver como la matriz de transición de probabilidades para una cadena de Markov sobre el conjunto de estrategias puras S_i del jugador i.

Definición 2.1.2 *Sean α_i una matriz de transición de estrategias para el jugador $i \in N$ y $s_i \in S_i$. La estrategia mixta $\alpha_i * s_i$ es la probabilidad de transición por desviación de la estrategia pura $s_i \in S_i$. Esto es,*

$$(\alpha_i * s_i)(t_i) = \alpha_i(t_i|s_i) \ \forall t_i \in S_i.$$

Para cada estrategia mixta $\sigma_i \in \Sigma_i$ defínase la estrategia mixta $\alpha_i * \sigma_i$ por

$$(\alpha_i * \sigma_i)(t_i) = \sum_{s_i \in S_i} \sigma_i(s_i)\left[(\alpha_i * s_i)(t_i)\right] \qquad \forall t_i \in S_i$$

Definición 2.1.3 *Sean $p \in \Delta(S)$ una estrategia correlacionada y α_i una matriz de transición de estrategias del jugador $i \in N$. La estrategia correlacionada de desviación $\alpha_i * p \in \Delta(S)$ del jugador i está definida por*

$$(\alpha_i * p)(t_i, s_{-i}) = \sum_{s_i \in S_i} (\alpha_i * s_i)(t_i)\, p(s_i, s_{-i}) \qquad \forall s_{-i} \in S_{-i}, \forall t_i \in S_i$$

Esto es, $\alpha_i * p$ es la estrategia correlacionada que resulta cuando el mediador trata de implementar la estrategia correlacionada p, pero el jugador i sigue la estrategia de desviación aleatoria α_i mientras todos los demás jugadores siguen la recomendación del mediador.

Denótese por $D_i(s, \alpha_i)$ la ganancia del jugador i por usar la estrategia aleatoria de desviación α_i cuando el mediador recomienda el perfil de estrategias $s \in S$. Esto es:

$$D_i(s, \alpha_i) = \sum_{t_i \in S_i} (\alpha_i * s_i)(t_i)\left(U_i(t_i, s_{-i}) - U_i(s)\right)$$

Con esto se puede obtener la identidad siguiente, donde $p \in \Delta(S)$ y α_i es una matriz de transición de estrategias para el jugador i:

$$\begin{aligned}
\sum_{s\in S} p(s)\, D_i(s,\alpha_i) &= \sum_{s\in S} p(s) \sum_{t_i\in S_i} (\alpha_i * s_i)(t_i)\left(U_i(t_i,s_{-i}) - U_i(s)\right)\\
&= \sum_{s\in S}\sum_{t_i\in S_i} (\alpha_i * s_i)(t_i)\, p(s_i,s_{-i})\, U_i(t_i,s_{-i})\\
&\quad - \sum_{s\in S} p(s)\, U_i(s) \sum_{t_i\in S_i} (\alpha_i * s_i)(t_i)\\
&= \sum_{s_{-i}\in S_{-i}}\sum_{s_i\in S_i}\sum_{t_i\in S_i} (\alpha_i * s_i)(t_i)\, p(s_i,s_{-i})\, U_i(t_i,s_{-i})\\
&\quad - \sum_{s\in S} p(s)\, U_i(s)\\
&= \sum_{s_{-i}\in S_{-i}}\sum_{t_i\in S_i}\sum_{s_i\in S_i} (\alpha_i * s_i)(t_i)\, p(s_i,s_{-i})\, U_i(t_i,s_{-i})\\
&\quad - \sum_{s\in S} p(s)\, U_i(s)\\
&= \sum_{s_{-i}\in S_{-i}}\sum_{t_i\in S_i} (\alpha_i * p)(t_i,s_{-i})\, U_i(t_i,s_{-i}) - \sum_{s\in S} p(s)\, U_i(s)\\
&= \sum_{s\in S} (\alpha_i * p)(s)\, U_i(s) - \sum_{s\in S} p(s)\, U_i(s)\\
&= U_i(\alpha_i * p) - U_i(p)
\end{aligned}$$

Ambos lados de la ecuación representan las ganancias esperadas del jugador i por desviarse usando α_i, cuando los demás jugadores obedecen al mediador que trata de implementar la estrategia correlacionada p.

2.1.2. Vectores duales

Sea $\alpha = (\alpha_i)_{i\in N}$ un perfil de matrices de transición de estrategias y para cada perfil de estrategias $s \in S$ defínase

$$f(s,\alpha) = \sum_{i\in N} \left[U_i(\alpha * s_i, s_{-i}) - U_i(s)\right] = \sum_{i\in N}\sum_{t_i\in S_i} (\alpha_i * s_i)(t_i)\left[U_i(t_i,s_{-i}) - U_i(s)\right]$$

$f(s,\alpha)$ es la suma de ganancias esperadas de los jugadores usando las estrategias aleatorias de desviación $\alpha_i * s_i$ por desviarse del perfil de estrategias $s \in S$ recomendado por el mediador.

Definición 2.1.4 *El perfil de matrices de transición de estrategias α es un vector dual si para cada $s \in S$ se satisface $f(s,\alpha) \geq 0$.*

Nótese que siempre existe al menos un vector dual, tomando $\alpha_i * s_i = s_i$ para cada $i \in N$ y cada $s_i \in S_i$.

Definición 2.1.5 *Un vector dual* α *es trivial si y sólo si*

$$\alpha_i\left(s_i|s_i\right)=1, \qquad \alpha_i\left(t_i|s_i\right)=0\ \forall t_i\neq s_i, \qquad \forall s_i\in S_i,\ \forall i\in N$$

Un vector dual es trivial cuando cada jugador siempre obedece a las recomendaciones del mediador con probabilidad 1. Además todas las ganancias por desviarse son cero. Esto es, para cada $s\in S$ se satisface:

$$\begin{aligned} D_i\left(s,\alpha_i\right) &= \sum_{t_i\in S_i}\alpha_i\left(t_i|s_i\right)\left(U_i\left(t_i,s_{-i}\right)-U_i\left(s\right)\right) \\ &= \sum_{t_i\neq s_i}\alpha_i\left(t_i|s_i\right)\left(U_i\left(t_i,s_{-i}\right)-U_i\left(s\right)\right)+\alpha_i\left(s_i|s_i\right)\left(U_i\left(s\right)-U_i\left(s\right)\right) \\ &= \sum_{t_i\neq s_i}0\times\left(U_i\left(t_i,s_{-i}\right)-U_i\left(s\right)\right)+1\times 0=0 \end{aligned}$$

Si el mediador recomendara un perfil de estrategias $s\in S$ tal que cuando los jugadores usaran un perfil de matrices de transición de estrategias α que produjera que la suma de sus ganancias esperadas por desviarse fuesen positivas, entonces dicha recomendación no sería aceptada por alguno de los jugadores pues le convendría usar su estrategia de desviación α_i.

Así, un jugador podría desviarse de la recomendación del mediador a otra estrategia en un equilibrio correlacionado sólamente si fuera indiferente entre ambas estrategias, al no tener ganancia positiva por seguir dicha recomendación.

Lema 2.1.6 *Sean* $s_i',t_i'\in S_i$ *dos estrategias puras del jugador* $i\in N$*. Entonces existe un vector dual* α *tal que* $\left(\alpha_i * s_i'\right)\left(t_i'\right)>0$ *si y sólo si* t_i' *compromete a* s_i'*.*

Demostración. Suponga que existe un vector dual α tal que $\left(\alpha_i * s_i'\right)\left(t_i'\right)>0$.

Por ser α dual, para cada perfil de estrategias $s\in S$ se cumple:

$$f\left(s,\alpha\right)=\sum_{i\in N}\sum_{t_i\in S_i}\left(\alpha_i * s_i\right)\left(t_i\right)\left[U_i\left(t_i,s_{-i}\right)-U_i\left(s\right)\right]\geq 0$$

Sea $\mu\in\Delta\left(S\right)$ un equilibrio correlacionado. Entonces para cada jugador $i\in N$ y cada par de estrategias $s_i,t_i\in S_i$ se cumple:

$$\sum_{s_{-i}\in S_{-i}}\mu\left(s\right)\left[U_i\left(t_i,s_{-i}\right)-U_i\left(s\right)\right]\leq 0$$

Como $\mu\left(s\right)\geq 0$ para cada $s\in S$, se cumple:

$$\begin{aligned} 0 &\leq \sum_{s\in S}\mu\left(s\right)\sum_{i\in N}\sum_{t_i\in S_i}\left(\alpha_i * s_i\right)\left(t_i\right)\left[U_i\left(t_i,s_{-i}\right)-U_i\left(s\right)\right] \\ &= \sum_{s_i\in S_i}\sum_{s_{-i}\in S_{-i}}\sum_{i\in N}\sum_{t_i\in S_i}\mu\left(s\right)\left(\alpha_i * s_i\right)\left(t_i\right)\left[U_i\left(t_i,s_{-i}\right)-U_i\left(s\right)\right] \\ &= \sum_{s_i\in S_i}\sum_{i\in N}\sum_{t_i\in S_i}\sum_{s_{-i}\in S_{-i}}\mu\left(s\right)\left(\alpha_i * s_i\right)\left(t_i\right)\left[U_i\left(t_i,s_{-i}\right)-U_i\left(s\right)\right] \\ &= \sum_{s_i\in S_i}\sum_{i\in N}\sum_{t_i\in S_i}\left(\alpha_i * s_i\right)\left(t_i\right)\sum_{s_{-i}\in S_{-i}}\mu\left(s\right)\left[U_i\left(t_i,s_{-i}\right)-U_i\left(s\right)\right] \quad \leq \quad 0 \end{aligned}$$

Con lo anterior se obtiene que

$$\sum_{s_i\in S_i}\sum_{i\in N}\sum_{t_i\in S_i}(\alpha_i * s_i)(t_i)\sum_{s_{-i}\in S_{-i}}\mu(s)\left[U_i(s)-U_i(t_i,s_{-i})\right]=0$$

Ya que $(\alpha_i * s_i)(t_i)\geq 0$ y $\sum_{s_{-i}\in S_{-i}}\mu(s)\left[U_i(s)-U_i(t_i,s_{-i})\right]\geq 0$ para cada par de estrategias $s_i,t_i\in S_i$, entonces cada sumando debe ser 0.

Por hipótesis $(\alpha_i * s_i')(t_i')>0$, y al ser cada sumando 0, se obtiene que

$$\sum_{s_{-i}\in S_{-i}}\mu(s')\left[U_i(s')-U_i(t_i',s_{-i})\right]=0.$$

Por la elección arbitraria de μ la igualdad anterior se cumple para todo equilibrio correlacionado y por tanto t_i' compromete a s_i'.

Suponga ahora que t_i' compromete a s_i'. Entonces para cada equilibrio correlacionado $\mu\in C$ se cumple $h_{s_i',t_i'}(\mu)=0$.

Con esto, el siguiente problema de programación lineal tiene un valor óptimo igual a 0: escoger μ que satisfaga

$$\begin{aligned}
&\text{máx}\sum_{s_{-i}\in S_{-i}}\mu(s')\left[U_i(s')-U_i(t_i',s_{-i})\right] \qquad s.a.\\
&\sum_{s\in S}\mu(s)=1, \qquad \mu(s)\geq 0\ \forall s\in S\\
&\sum_{s_{-i}\in S_{-i}}\mu(s)\left[U_i(t_i,s_{-i})-U_i(s)\right]\leq 0 \qquad \forall i\in N,\ \forall s_i,t_i\in S_i
\end{aligned}$$

Además el dual de este problema también tiene un valor óptimo igual a 0. Esto es, escoger α y β que satisfagan

$$\begin{aligned}
&\text{mín}\,\beta \qquad s.a.\\
&\alpha_i(t_i|s_i)\geq 0 \qquad \forall i\in N,\ \forall s_i,t_i\in S_i\\
&\sum_{i\in N}\sum_{t_i\in S_i}\alpha_i(t_i|s_i)\left[U_i(t_i,s_{-i})-U_i(s)\right]+\beta\geq 0 \qquad \forall s\in S,\ s_i\neq s_i'\\
&\sum_{i\in N}\sum_{t_i\in S_i}\alpha_i(t_i|s_i')\left[U_i(t_i,s_{-i})-U_i(s')\right]+\beta\geq U_i(s')-U_i(t_i',s_{-i}) \qquad \forall s_{-i}\in S_{-i}
\end{aligned}$$

Luego existe algún vector α que satisface estas restricciones con $\beta=0$.

Sea $\widehat{\alpha}$ un vector igual a α en cada componente excepto $\widehat{\alpha}(t_i'|s_i')=\alpha(t_i'|s_i')+1$. Este vector satisface las siguientes propiedades:

1) Para cada $i\in N$ y cada par de estrategias $s_i,t_i\in S_i$ se cumple $\widehat{\alpha}(t_i|s_i)\geq 0$. Además $\widehat{\alpha}(t_i'|s_i')=\alpha(t_i'|s_i')+1\geq 1>0$

2) $\sum_{i\in N}\sum_{t_i\in S_i}\widehat{\alpha}_i(t_i|s_i)\left[U_i(t_i,s_{-i})-U_i(s)\right]\geq 0$ para cada $s\in S$. En efecto:

- Para cada $s\in S$ tal que $s_i\neq c_i$

$$\sum_{i\in N}\sum_{t_i\in S_i}\widehat{\alpha}_i(t_i|s_i)\left[U_i(t_i,s_{-i})-U_i(s)\right]=\sum_{i\in N}\sum_{t_i\in S_i}\alpha_i(t_i|s_i)\left[U_i(t_i,s_{-i})-U_i(s)\right]\geq 0$$

- Para cada $s\in S$ tal que $s_i=s_i'$

$$\begin{aligned}
&\sum_{i\in N}\sum_{t_i\in S_i}\widehat{\alpha}_i(t_i|s_i')\left[U_i(t_i,s_{-i})-U_i(s')\right]=\\
&=\sum_{i\in N}\sum_{t_i\in S_i}\alpha_i(t_i|s_i')\left[U_i(t_i,s_{-i})-U_i(s')\right]+\left[U_i(t_i',s_{-i})-U_i(s')\right]\\
&\geq\left[U_i(s')-U_i(t_i',s_{-i})\right]+\left[U_i(t_i',s_{-i})-U_i(s')\right]=0
\end{aligned}$$

Multiplicando el vector $\widehat{\alpha}$ por un escalar positivo pequeño ε si fuera necesario, se obtiene un vector $\widehat{\alpha}'$ que también se satisface

$$\sum_{t_i \in S_i} \widehat{\alpha}'(t_i|s_i) \leq 1 \qquad \forall i \in N, \forall s_i \in S_i$$

Incrementando $\widehat{\alpha}_i'(s_i|s_i)$ si fuera necesario, pues su coeficiente es 0 y no afecta el cumplimiento de las condiciones anteriores, se obtiene un vector $\widetilde{\alpha}$ que satisface

$$\sum_{t_i \in S_i} \widetilde{\alpha}_i(t_i|s_i) = 1 \qquad \forall i \in N, \forall s_i \in S_i$$

Por tanto $\widetilde{\alpha}$ es un vector dual tal que $(\widetilde{\alpha}_i * s_i')(t_i') > 0$. ■

Definición 2.1.7 *Un vector dual α es completo si $(\alpha_i * s_i)(t_i) > 0$ para cada jugador $i \in N$ y cada par de estrategias $s_i, t_i \in S_i$ tales que t_i compromete a s_i.*

El conjunto de vectores duales de un juego es acotado y definido por un conjunto de desigualdades lineales, por tanto es un politopo.

Definición 2.1.8 *Un vector dual α es interior si es el único vector dual del juego o si pertenece al interior relativo del conjunto de vectores duales.*

Dado que el interior relativo de un conjunto convexo no vacío siempre es no vacío, entonces siempre existe un vector dual interior.

De la definiciones de vectores duales y vectores duales completos se sigue que una combinación convexa estricta de un vector dual completo con un vector dual es un vector dual completo. En consecuencia se tiene el siguente resultado:

Lema 2.1.9 *Todo vector dual interior es completo*

Lema 2.1.10 *Si un perfil de estrategias $s \in S$ es coherente, entonces $f(s, \alpha) = 0$ para cada vector dual α. Si un perfil de estrategias $s \in S$ es incoherente, entonces existe un vector dual α tal que $f(s, \alpha) > 0$.*

Demostración. Sea α un vector dual y suponga que $\mu \in \Delta(S)$ es un equilibrio correlacionado tal que el perfil de estrategias $s' \in S$ es coherente.

De la demostración del lema anterior se cumple $\sum_{s \in S} \mu(s) f(s, \alpha) = 0$

Como $\mu(s) \geq 0$ y $f(s,\alpha) \geq 0$ para cada perfil de estrategias $s \in S$ entonces se cumple $\mu(s) f(s,\alpha) = 0$ para cada $s \in S$.

Puesto que $s' \in S$ es coherente, entonces $\mu(s') > 0$ y por tanto $f(s',\alpha) = 0$.

Suponga ahora que el perfil de estrategias $s' \in S$ es incoherente. Entonces para cada equilibrio correlacionado $\mu \in C$ se cumple $\mu\left(s'\right) = 0$.

Con esto, el siguiente problema de programación lineal tiene un valor óptimo igual a 0: escoger μ que satisfaga

$$\max \mu\left(s'\right) \qquad s.a.$$

$$\sum_{s\in S} \mu(s) = 1, \qquad \mu(s) \geq 0 \; \forall s \in S$$

$$\sum_{s_{-i}\in S_{-i}} \mu(s)\left[U_i(t_i, s_{-i}) - U_i(s)\right] \leq 0 \qquad \forall i \in N, \forall s_i, t_i \in S_i$$

Además el dual de este problema también tiene un valor óptimo igual a 0. Esto es, escoger α y β que satisfagan

$$\min \beta \qquad s.a.$$

$$\alpha_i(t_i|s_i) \geq 0 \qquad \forall i \in N, \forall s_i, t_i \in S_i$$

$$\sum_{i\in N}\sum_{t_i\in S_i} \alpha_i(t_i|s_i)\left[U_i(t_i, s_{-i}) - U_i(s)\right] + \beta \geq 0 \qquad \forall s \in S,\, s \neq s'$$

$$\sum_{i\in N}\sum_{t_i\in S_i} \alpha_i(t_i|s_i')\left[U_i\left(t_i, s_{-i}'\right) - U_i(s')\right] + \beta \geq 1$$

Luego existe algún vector α que satisface estas restricciones con $\beta = 0$.

Para cada $s \neq s'$ se cumple

$$\textstyle\sum_{i\in N}\sum_{t_i\in S_i} \widehat{\alpha}_i(t_i|s_i)\left[U_i(t_i, s_{-i}) - U_i(s)\right] \geq 0$$

y de la última desigualdad del problema dual se tiene que

$$\sum_{i\in N}\sum_{t_i\in S_i} \alpha_i(t_i|s_i')\left[U_i\left(t_i, s_{-i}'\right) - U_i(s')\right] \geq 1 > 0$$

Multiplicando el vector α por un escalar positivo pequeño ε si fuera necesario, se obtiene un vector $\widehat{\alpha}$ que también satisface

$$\sum_{t_i\in S_i} \widehat{\alpha}(t_i|s_i) \leq 1 \qquad \forall i \in N, \forall s_i \in S_i$$

Incrementando $\widehat{\alpha}_i(s_i|s_i)$ si fuera necesario, pues su coeficiente es 0 y no afecta el cumplimiento de las condiciones anteriores, se obtiene un vector $\widetilde{\alpha}$ que satisface

$$\sum_{t_i\in S_i} \widetilde{\alpha}_i(t_i|s_i) = 1 \qquad \forall i \in N, \forall s_i \in S_i$$

Por tanto $\widetilde{\alpha}$ es un vector dual que satisface $f(s', \widetilde{\alpha}) > 0$. ■

Lema 2.1.11 *Si α es un vector dual interior entonces para cada perfil de estrategias incoherente $s \in S$ se cumple $f(s,\alpha) > 0$.*

Demostración. Por el lema anterior, si el perfil de estrategias $s \in S$ es incoherente entonces existe un vector dual α tal que $f(s,\alpha) > 0$.

Como el conjunto de vectores duales es convexo, entonces existe un vector dual α' tal que $f(s,\alpha') > 0$ para cada perfil de estrategias incoherente $s \in S$.

Sean α un vector dual y α' un vector dual que satisface lo anterior. Entonces para cada $\lambda \in (0,1)$ y para cada perfil de estrategias incoherente $s \in S$ se satisface:

$$\lambda f(s,\alpha) + (1-\lambda) f(s,\alpha') \geq (1-\lambda) f(s,\alpha') > 0$$

Así, para cada vector dual interior α y para cada perfil de estrategias incoherente $s \in S$ se cumple $f(s,\alpha) > 0$. ■

2.1.3. Estrategias estacionarias, recurrentes y transitorias

La matriz de transición de estrategias α_i induce una cadena de Markov sobre S_i. Esta cadena de Markov particiona a S_i en un conjunto de estados transitorios y clases de recurrencia disjuntas:

$$S_i = T_i \coprod \left(\coprod_{1 \leq k \leq K} R_{i,k} \right)$$

donde T_i es un conjunto de estados transitorios (posiblemente vacío), K es un entero positivo y $R_{i,k}$ es una clase de recurrencia.

Por la teoría básica de cadenas de Markov existe una distribución de probabilidad sobre S_i que es estacionaria para cada cadena de Markov.

Definición 2.1.12 *Una estrategia mixta $\sigma_i \in \Sigma_i$ es α_i-estacionaria si $\alpha_i * \sigma_i = \sigma_i$; esto es, $\sum_{s_i \in S_i} \sigma_i(s_i)(\alpha_i * s_i)(t_i) = \sigma_i(t_i)$ para cada $t_i \in S_i$*

Definición 2.1.13 *Un perfil de estrategias mixtas $\sigma \in \Sigma$ es α-estacionario si $\alpha_i * \sigma_i = \sigma_i$ para cada $i \in N$.*

Si la recomendación del mediador al jugador i fuera generada de acuerdo a dicha estrategia mixta α_i-estacionaria, al aplicar la matriz de transición de estrategias α_i no se cambiaría la distribución de las estrategias del jugador i.

Para cada perfil de estrategias mixtas $\sigma \in \Sigma$ defínase

$$f(\sigma,\alpha) = \sum_{s \in S} \sigma(s) f(s,\alpha) = \sum_{i \in N} \left[U_i(\alpha_i * \sigma_i, \sigma_{-i}) - U_i(\sigma) \right]$$

Lema 2.1.14 *Si σ es α-estacionaria entonces $f(\sigma, \alpha) = 0$.*

Demostración. Suponga que el perfil de estrategias mixtas σ es α-estacionaria; esto es, $\alpha_i * \sigma_i = \sigma_i$ para cada jugador $i \in N$. De esto se obtiene:

$$f(\sigma, \alpha) = \sum_{i \in N} [U_i(\alpha_i * \sigma_i, \sigma_{-i}) - U_i(\sigma)] = \sum_{i \in N} [U_i(\sigma_i, \sigma_{-i}) - U_i(\sigma_i, \sigma_{-i})] = 0 \quad \blacksquare$$

Esto significa que si la distribución de las estrategias no cambia al aplicar la matriz de transición α_i para cada jugador $i \in N$, entonces la suma de las ganancias por desviarse de las recomendaciones del mediador es 0.

Definición 2.1.15 *Un conjunto de estrategias B_i es α_i-absorbente si y sólo si es un subconjunto no vacío de S_i y $\alpha_i(s_i|b_i) = 0$ $\forall b_i \in B_i$, $\forall s_i \in S_i \backslash B_i$*

Esto es, B_i es α_i-absorbente si y sólo si α_i asigna probabilidad cero a moverse afuera del conjunto B_i desde su interior.

Definición 2.1.16 *Un conjunto α_i-absorbente es minimal si no contiene ningún subconjunto propio α_i-absorbente.*

Los conjuntos minimales α_i-absorbentes son subconjuntos disjuntos no vacíos de S_i, ya que la intersección de conjuntos α_i-absorbentes es α_i-absorbente.

Si B_i es cualquier conjunto minimal α_i-absorbente entonces existe una única distribución α_i-estacionaria que tiene soporte en B_i. Esto es, para cada conjunto minimal α_i-absorbente B_i existe una única estrategia $\sigma_i \in \Sigma_i$ tal que

$$\sum_{s_i \in B_i} \sigma_i(s_i)(\alpha_i * s_i)(b_i) = \sigma_i(b_i) \qquad \forall b_i \in B_i$$
$$\sum_{s_i \in B_i} \sigma_i(s_i) = 1 \qquad \sigma_i(t_i) = 0 \ \forall t_i \notin B_i$$

Denótese por S_i/α_i al conjunto de distribuciones α_i-estacionarias que tienen soporte en el interior de un subconjunto minimal α_i-absorbente de S_i.

El número de elementos en el conjunto S_i/α_i no puede ser mayor que el número de estrategias puras en S_i, ya que hay un elemento de S_i/α_i para cada conjunto minimal α_i-absorbente y estos conjuntos minimales α_i-absorbentes son subconjuntos no vacíos disjuntos de S_i.

Definición 2.1.17 *Una estrategia pura $s_i \in S_i$ es recurrente bajo α_i si existe σ_i en S_i/α_i tal que $\sigma_i(s_i) > 0$. De otro modo, s_i es transitorio bajo α_i.*

Definición 2.1.18 *Las estrategias s_i y t_i son agrupadas juntas si existe σ_i en S_i/α_i tales que ambas estrategias pertenecen al soporte de σ_i.*

Es decir, dos estrategias son agrupadas juntas si y sólo si son recurrentes bajo α_i y pertenecen al mismo subconjunto minimal α_i-absorbente de S_i.

Lema 2.1.19 *1) Sea $s \in S$. Si $f(s,\alpha) > 0$ entonces para cada σ en $S/\alpha = \times_{i\in N} S_i/\alpha_i$ se cumple $\sigma(s) = 0$*

2) Sea $s_i \in S_i$. Si para cada $s_{-i} \in S_{-i}$ se tiene $f(s,\alpha) > 0$, entonces para cada σ_i en S_i/α_i se cumple $\sigma_i(s_i) = 0$; esto es, s_i es transitorio bajo α_i.

3) Para cada jugador $i \in N$ sea $S_i' \subseteq S_i$ y sea $S' = \times_{i\in N} S_i'$. Suponga que para todo s en $S \backslash S'$ se cumple $f(s,\alpha) > 0$. Entonces toda estrategia s_i en $S_i \backslash S_i'$ es transitoria bajo α_i.

Demostración. 1) Sea $\sigma \in S/\alpha$. Por definición de S/α se tiene que σ es α-estacionaria. Por el lema anterior se cumple $0 = f(\sigma,\alpha) = \sum_{s\in S} \sigma(s) f(s,\alpha)$.

Puesto que $f(s,\alpha) \geq 0$ para cada perfil de estrategias $s \in S$ por definición de vector dual, se tiene que $\sigma(s) = 0$ para cada $s \in S$ tal que $f(s,\alpha) > 0$.

2) Sea $s_i \in S_i$. Suponga que para cada $s_{-i} \in S_{-i}$ se tiene que $f(s,\alpha) > 0$.

Por 1), para cada $s_{-i} \in S_{-i}$ y cada $\sigma \in S/\alpha$ se cumple $\sigma(s) = 0$. Con esto $\sigma_i(s_i) = 0$ para cada $\sigma_i \in S_i/\alpha_i$.

3) Sea $s_i \in S_i \backslash S_i'$. Entonces $(s_i, s_{-i}) \in S \backslash S'$ para cada $s_{-i} \in S_{-i}$, y por hipótesis se cumple que $f(s,\alpha) > 0$.

De 2) se cumple que $s_i \in S_i \backslash S_i'$ es transitoria bajo α_i. ■

2.1.4. Juegos reducidos duales

La reducción dual de un juego permite reducir juegos finitos a juegos con una menor cantidad de estrategias. Esta reducción funciona por eliminación de algunas estrategias puras y reemplazando el conjunto de estrategias puras por estrategias estacionarias.

Definición 2.1.20 *Sea α un vector dual. El juego α-reducido G/α es el juego en forma estratégica obtenido de G restringiendo a cada jugador $i \in N$ a sus estrategias α_i-estacionarias. Esto es, $G/\alpha = \left(N, (S_i/\alpha_i)_{i\in N}, (u_i)_{i\in N}\right)$*

Cuando los jugadores usan estrategias que son estacionarias con respecto a algún vector dual α se obtiene el juego α-reducido G/α, y entonces se pueden analizar los equilibrios de este juego como los de cualquier otro juego en forma estratégica.

Se podría preguntar si es razonable para los jugadores actuar de acuerdo a un equilibrio del juego α-reducido G/α, si se supone que los jugadores podrían desviarse a una estrategia no estacionaria.

Lema 2.1.21 *Sean α un vector dual, $p_{-i} \in \Delta(S_{-i})$ y $\sigma_i \in \Sigma_i$. Suponga que $\alpha_j * p_{-i} = p_{-i}$ para cada jugador $j \neq i$. Entonces $U_i(\sigma_i, p_{-i}) \leq U_i(\alpha_i * \sigma_i, p_{-i})$*

Demostración. Si α es un vector dual entonces para cada perfil de estrategias $s \in S$ se cumple $\sum_{j\in N} D_j(s, \alpha_j) \geq 0$. Además se tiene que $p(s) = \sigma_i(s_i)\, p_{-i}(s_{-i}) \geq 0$ para cada $s \in S$. Con esto:

$$\begin{aligned} 0 &\leq \sum_{s\in S} \sigma_i(s_i)\, p_{-i}(s_{-i}) \sum_{j\in N} D_j(s, \alpha_j) \\ &= \sum_{j\neq i} \left[U_j(\alpha_j * p_{-i}, \sigma_i) - U_j(p_{-i}, \sigma_i)\right] + \left[U_i(\alpha_i * \sigma_i, p_{-i}) - U_j(\sigma_i, p_{-i})\right] \\ &= U_i(\alpha_i * \sigma_i, p_{-i}) - U_j(\sigma_i, p_{-i}) \end{aligned}$$

Así, se cumple $U_i(\sigma_i, p_{-i}) \leq U_i(\alpha_i * \sigma_i, p_{-i})$. ■

Lema 2.1.22 *Sean α un vector dual, $p_{-i} \in \Delta(S_{-i})$, y suponga que $\alpha_j * p_{-i} = p_{-i}$ para cada jugador $j \neq i$. Entonces existe alguna estrategia α_i-estacionaria σ_i en S_i/α_i que es mejor respuesta a p_{-i} para el jugador i. Esto es*

$$U_i(\sigma_i, p_{-i}) = \text{máx}_{s_i\in S_i} U_i(s_i, p_{-i})$$

Demostración. Por el lema anterior, si σ_i es una mejor repuesta a p_{-i} para el jugador i entonces $\alpha_i * \sigma_i$ también es una mejor respuesta, y por tanto, también lo es la estrategia aleatoria $f(\sigma_i) = \frac{1}{2}\sigma_i + \frac{1}{2}\alpha_i * \sigma_i$.

Sea $s_i \in S_i$ una mejor respuesta para el jugador i cuando los demás jugadores usan p_{-i}. Entonces cualquier estrategia de la forma $f(f(\cdots f(s_i)\cdots))$ es también una mejor respuesta para i.

Mientras el soporte de esta estrategia no sea un conjunto absorbente, la transformación f debe incrementar estrictamente su soporte. Luego de $|S_i|$ iteraciones el proceso debe generar mejores respuestas que asignan probabilidad positiva a cada estrategia pura en al menos un subconjunto α_i-absorbente minimal de S_i.

Por tanto la estrategia α_i-estacionaria en este conjunto α_i-absorbente minimal debe ser también una mejor respuesta del jugador i contra p_{-i}. ■

Se puede ver que cualquier distribución del conjunto de perfiles de estrategias de un juego reducido induce una distribución de probabilidad sobre el conjunto de perfiles de estrategias del juego original. En este sentido, cualquier equilibrio correlacionado de un juego reducido induce un equilibrio correlacionado del juego original.

Teorema 2.1.23 *Sea α un vector dual para el juego G. Si μ es un equilibrio correlacionado del juego α-reducido G/α entonces la estrategia correlacionada G-equivalente $\widehat{\mu}$ es equilibrio correlacionado de G.*

Demostración. Suponga que el mediador está implementando el equilibrio correlacionado μ en el juego α-reducido G/α, y suponga que σ_i en S_i/α_i ha sido recomendada al jugador $i \in N$. Sea p_{-i} la probabilidad condicional sobre las estrategias de los demás jugadores en S_{-i} dado que σ_i ha sido recomendada.

Ya que μ es un equilibrio correlacionado de G/α, entonces σ_i es óptima para el jugador i entre todas sus estrategias α_i-estacionarias en S_i/α_i. Como la recomendación del mediador a cada jugador $j \neq i$ es una estrategia α_j-estacionaria entonces se cumple $\alpha_j * p_{-i} = p_{-i} \ \forall j \neq i$.

Como σ_i es óptimo para el jugador i en S_i/α_i entonces es óptimo en $\Delta(S_i)$. Así, el jugador i no obtiene ganancias por desviarse a otra estrategia disponible en G.

Por tanto $\widehat{\mu}$ es un equilibrio correlacionado de G. ■

El resultado anterior se aplica también para equilibrios de Nash.

Corolario 2.1.24 *Todo equilibrio de Nash de G/α es un equilibrio de Nash de G.*

Lema 2.1.25 *Para cada jugador $i \in N$ existe una estrategia pura coherente que es recurrente bajo α_i.*

Demostración. Sea σ un equilibrio de Nash del juego α-reducido G/α. Entonces también es equilibrio de Nash de G.

Toda estrategia pura que está en el soporte de σ_i es coherente, ya que se juega en el equilibrio de Nash, el cual es un equilibrio correlacionado de G.

Además es recurrente, pues $\sigma_i \in S_i/\alpha_i$. ∎

La reducción dual es también útil para probar la existencia de equilibrios de Nash con propiedades especiales.

Proposición 2.1.26 *En todo juego finito existe un equilibrio de Nash σ tal que para cada jugador $i \in N$ y cada estrategia pura $s_i \in S_i$ que cumple $\mu(s_i \times S_{-i}) = 0$ para cada equilibrio correlacionado $\mu \in C$, s_i no es mejor respuesta para σ_{-i}.*

Demostración. Sean α un vector dual interior, σ un perfil de estrategias mixtas de G y μ la distribución producto inducida por (s_i, σ_{-i}).

Si s_i cumple $\mu(s_i \times S_{-i}) = 0$ para cada equilibrio correlacionado $\mu \in C$, entonces todo perfil de estrategias $s = (s_i, s_{-i})$ para cada $s_{-i} \in S_{-i}$ es incoherente, y por ser α un vector dual interior se cumple $f(s, \alpha) > 0$.

Si para cada jugador $j \neq i$ la estrategia mixta σ_j es α_j-invariante, entonces

$$U_i(\alpha_i * s_i, \sigma_{-i}) - U_i(s_i, \sigma_{-i}) > 0$$

Con esto s_i no es una mejor respuesta para σ_{-i}.

Se sigue entonces que si σ es un equilibrio de Nash del juego α-reducido G/α, y por tanto equilibrio de Nash de G, entonces para cada jugador $i \in N$ y cada estrategia pura $s_i \in S_i$ tal que $\mu(s_i \times S_{-i}) = 0$ para cada equilibrio correlacionado $\mu \in C$, s_i no es mejor respuesta para σ_{-i}. ∎

Definición 2.1.27 *Un equilibrio de Nash σ^* es cuasiestricto si para cada jugador $i \in N$ toda estrategia pura que es mejor respuesta a σ^*_{-i} pertenece al soporte de σ^*_i.*

Corolario 2.1.28 *Para todo juego finito, si un equilibrio de Nash es el único equilibrio correlacionado del juego entonces es cuasiestricto.*

Demostración. Sea σ un equilibrio de Nash que también sea el único equilibrio correlacionado de un juego finito G.

Si la estrategia pura s_i no pertenece al soporte de σ_i, entonces $\mu(s_i \times S_{-i}) = 0$ para cada equilibrio correlacionado $\mu \in C$.

Por la proposición anterior, y por ser σ el único equilibrio de Nash, se tiene que s_i no es mejor respuesta para σ_{-i}.

Por tanto σ es un equilibrio de Nash cuasiestricto. ■

2.2. Clasificación de juegos por incentivos para desviarse de equilibrios correlacionados

2.2.1. Juegos elementales

Definición 2.2.1 *Dado un juego en forma estratégica G, se dice que un equilibrio correlacionado $\mu \in C$ tiene incentivos elementales si satisface todas las restricciones de incentivos con desigualdad estricta; esto es*

$$h_{s_i,t_i}(\mu) > 0 \qquad \forall i \in N,\, \forall s_i, t_i \in S_i,\, s_i \neq t_i$$

Esto implica que toda estrategia pura debe tener probabilidad positiva en μ:

$$\mu(s_i \times S_{-i}) = \sum_{t_{-i} \in S_{-i}} \mu(s_i, t_{-i}) > 0 \qquad \forall i \in N,\, \forall s_i \in S_i$$

Esto significa que un equilibrio correlacionado tiene incentivos elementales si toda estrategia pura de cada jugador tiene probabilidad positiva de ser recomendada, y además cualquier jugador decrementaría estrictamente su pago esperado desviándose de la estrategia recomendada cuando se espera que los otros jugadores obedezcan las recomendaciones en el equilibrio correlacionado.

Proposición 2.2.2 *Sean μ un equilibrio correlacionado y $\widehat{\mu}$ un equilibrio correlacionado con incentivos elementales. Entonces $(1-\varepsilon)\mu + \varepsilon\widehat{\mu}$ es un equilibrio correlacionado con incentivos elementales para cada ε tal que $0 < \varepsilon < 1$.*

Demostración. Sean μ un equilibrio correlacionado y $\widehat{\mu}$ un equilibrio correlacionado con incentivos elementales. Entonces se satisface:

$$h_{s_i,t_i}(\mu) \geq 0 \text{ y } h_{s_i,t_i}(\widehat{\mu}) > 0 \qquad \forall i \in N,\, \forall s_i, t_i \in S_i$$

Sea ε tal que $0 < \varepsilon < 1$. Entonces para cada jugador $i \in N$ y cada par de estrategias $s_i, t_i \in S_i$ se cumple:

$$h_{s_i,t_i}((1-\varepsilon)\mu + \varepsilon\widehat{\mu}) = (1-\varepsilon)\, h_{s_i,t_i}(\mu) + \varepsilon h_{s_i,t_i}(\widehat{\mu}) \geq \varepsilon h_{s_i,t_i}(\widehat{\mu}) > 0$$

Por tanto, $(1-\varepsilon)\,\mu+\varepsilon\widehat{\mu}$ es un equilibrio correlacionado con incentivos elementales para cada ε tal que $0<\varepsilon<1$. ■

Con esto, si un juego tiene algún equilibrio correlacionado con incentivos elementales, entonces todo equilibrio correlacionado puede ser aproximado arbitrariamente cerca por equilibrios correlacionados con incentivos elementales.

Definición 2.2.3 *Un juego G es elemental si tiene algún equilibrio correlacionado con incentivos elementales.*

Si algún jugador $i\in N$ fuera indiferente entre dos estrategias puras $s_i,t_i\in S_i$ con $s_i\neq t_i$, entonces $h_{s_i,t_i}(\mu)=0$ para cada equilibrio correlacionado $\mu\in C$. Por lo cual en los juegos elementales cualquier jugador puede ser motivado a elegir cualquier estrategia pura sin problemas de indiferencia.

Además, si un juego es elemental entonces todas las restricciones de incentivos son no vacías.

Proposición 2.2.4 *Existe un vector dual no trivial α para el juego G si y sólo si G no es elemental*

Demostración. Suponga que G es un juego elemental. Entonces existe un equilibrio correlacionado μ tal que

$$h_{s_i,t_i}(\mu)>0 \qquad \forall i\in N,\ \forall s_i,t_i\in S_i.$$

Con esto, para cada jugador $i\in N$ y para cada par de estrategias $s_i,t_i\in S_i$ tal que $t_i\neq s_i$ se tiene que t_i no compromete a s_i, y por tanto no existe un vector dual α tal que $(\alpha_i * s_i)(t_i)>0$.

Así, el único vector dual para el juego G es el trivial.

Suponga ahora que G no es un juego elemental. Entonces existe al menos un jugador $i\in N$ y un par de estrategias $s_i,t_i\in S_i$ tal que $h_{s_i,t_i}(\mu)=0$ para cada equilibrio correlacionado $\mu\in C$.

Con esto, t_i compromete a s_i y por tanto existe un vector dual α tal que $(\alpha_i * s_i)(t_i)>0$. Así, el vector dual α no es trivial. ■

2.2.2. Juegos ajustados y preajustados

Definición 2.2.5 *Un juego es ajustado si en cada equilibrio correlacionado todas las restricciones de incentivos se satisfacen con igualdad, esto es:*

$$h_{s_i,t_i}(\mu) = 0 \qquad \forall \mu \in C,\ \forall i \in N,\ \forall s_i, t_i \in S_i$$

Esto significa que siempre que una estrategia pura s_i es jugada en un equilibrio correlacionado μ, toda estrategia pura del jugador i es una mejor respuesta a $p(\cdot|s_i)$.

Proposición 2.2.6 *Si existe una estrategia mixta que es fuertemente dominada entonces el juego no es ajustado.*

Demostración. Sea σ^* un equilibrio de Nash del juego ajustado G.

Por ser G ajustado entonces toda estrategia pura $s_i \in S_i$ de cada jugador $i \in N$ es una mejor respuesta a σ_i^*. Luego toda estrategia mixta $\sigma_i \in \Sigma_i$ para cada jugador $i \in N$ es mejor respuesta a σ_i^*.

Por tanto no existe estrategia mixta que sea estrictamente dominada. ∎

Un juego ajustado G también puede ser definido por comparación de los equilibrios correlacionados de G y un juego auxiliar. Sea $-G$ el juego con los mismos conjuntos de jugadores y estrategias que G, pero en el cual todos los pagos son multiplicados por -1: $-G = \left(N, (S_i)_{i\in N}, (-u_i)_{i\in N}\right)$.

Proposición 2.2.7 *Un juego G es ajustado si y sólo si G y $-G$ tienen los mismos equilibrios correlacionados.*

Demostración. Suponga que G es un juego ajustado, y sean C y $-C$ el conjunto de equilibrios correlacionados de G y $-G$ respectivamente.

Si $\mu \in C$ entonces se cumple: $\quad h_{s_i,t_i}(\mu) \geq 0 \qquad \forall i \in N,\ \forall s_i, t_i \in S_i$

Si $\mu \in -C$ entonces se cumple: $\quad -h_{s_i,t_i}(\mu) \geq 0 \qquad \forall i \in N,\ \forall s_i, t_i \in S_i$

Por ser G ajustado se satisface: $\quad h_{s_i,t_i}(\mu) = 0 \qquad \forall \mu \in C,\ \forall i \in N,\ \forall s_i, t_i \in S_i$

En particular, si $\mu' \in C$ se satisface

$$h_{s_i,t_i}(\mu') = 0 \Leftrightarrow -h_{s_i,t_i}(\mu') = 0 \qquad \forall i \in N,\ \forall s_i, t_i \in S_i$$

De lo anterior se tiene que $\mu' \in -C$ si y sólo si $\mu' \in -C$.

Por tanto, G y $-G$ tienen los mismos equilibrios correlacionados.

Suponga ahora que G y $-G$ tienen los mismos equilibrios correlacionados. Entonces para cada $\mu \in C$ se satisfacen

a) $h_{s_i,t_i}(\mu) \geq 0 \qquad \forall i \in N, \forall s_i, t_i \in S_i$

b) $-h_{s_i,t_i}(\mu) \geq 0 \qquad \forall i \in N, \forall s_i, t_i \in S_i$

Escogiendo arbitrariamente $\mu' \in C$, y $s'_i, t'_i \in S_i$ de algún jugador $i \in N$, de a) se cumple $h_{s'_i,t'_i}(\mu') \geq 0$ y de b) se cumple $-h_{s'_i,t'_i}(\mu') \geq 0$, y con esto $h_{s'_i,t'_i}(\mu') = 0$.

Así, se cumple $h_{s_i,t_i}(\mu) = 0$ para cada $\mu \in C$, cada jugador $i \in N$ y cada par de estrategias $\forall s_i, t_i \in S_i$, y por tanto G es ajustado. ■

Definición 2.2.8 *Un juego es preajustado si en cualquier equilibrio correlacionado todas las restricciones de incentivos por desviarse a una estrategia coherente son ajustadas; esto es:*

$$h_{s_i,t_i}(\mu) = 0 \qquad \forall \mu \in C, \forall i \in N, \forall s_i, t_i \in S_i^c$$

En un juego preajustado si cada vez que una estrategia pura s_i es jugada en un equilibrio correlacionado μ, toda estrategia pura coherente del jugador i es una mejor respuesta a $p(\cdot|s_i)$.

Proposición 2.2.9 *Si un juego tiene un único equilibrio correlacionado entonces es preajustado.*

Demostración. Sea G un juego que tiene un único equilibrio correlacionado μ.

Como todo juego finito tiene algún equilibrio de Nash σ y todo equilibrio de Nash en un equilibrio correlacionado, entonces $\sigma = \mu$ y así, μ es equilibrio de Nash de G.

Con esto, el conjunto de estrategias coherentes del jugador $i \in N$ es el soporte de σ_i, y para cada $s_i \in Supp(\sigma_i)$ se cumple $\sigma(\cdot|s_i) = \sigma_{-i}$.

Entonces el juego es preajustado si y sólo si para cada jugador $i \in N$ toda estrategia pura en el soporte de σ_i es una mejor respuesta a σ_{-i}.

Como σ es equilibrio de Nash, esta condición se satisface. ■

De las definiciones de juegos ajustados y preajustados se puede ver que todo juego ajustado es un juego preajustado, ya que $S_i^c \subseteq S_i$ para cada $i \in N$, y por tanto las restricciones de juegos preajustados son condiciones mas débiles.

Los conceptos de juegos ajustados y preajustados se pueden redefinir en términos de comprometer estrategias.

Lema 2.2.10 *Un juego es ajustado si y sólo si para cada jugador cualquiera de sus estrategias puras compromete a todas las demás.*

Lema 2.2.11 *Un juego es preajustado si y sólo si para cada jugador cualquiera de sus estrategia puras coherentes compromete a todas las demás.*

2.2.3. Caracterización de juegos ajustados y preajustados

Se puede dar una caracterización de juegos ajustados y preajustados usando perfiles de desviación de estrategias y vectores duales.

Proposición 2.2.12 *Un juego es ajustado si y sólo si existe un vector dual α tal que para cada jugador $i \in N$ y cada estrategia pura $s_i \in S_i$ la estrategia mixta $\alpha_i * s_i$ es completamente mixta.*

Demostración. Suponga que el juego G es ajustado. Entonces para cada jugador $i \in N$ cada estrategia pura $s_i \in S_i$ compromete a todas sus demás estrategias puras.

Con esto, para cada vector dual interior α se cumple $(\alpha_i * s_i)(t_i) > 0$ para cada jugador $i \in N$ y cada par de estrategias puras $s_i, t_i \in S_i$. Esto es, la estrategia mixta $\alpha_i * s_i$ es completamente mixta.

Suponga ahora que existe un vector dual α tal que para cada jugador $i \in N$ y para cada estrategia pura $s_i \in S_i$ la estrategia $\alpha_i * s_i$ es completamente mixta. Esto equivale a que $(\alpha_i * s_i)(t_i) > 0$ para cada jugador $i \in N$ y cada par de estrategias puras $s_i, t_i \in S_i$.

Luego t_i compromete a s_i para cada par de estrategias puras $s_i, t_i \in S_i$, y por tanto G es ajustado. ■

Proposición 2.2.13 *Un juego es preajustado si y sólo si existe un vector dual α y un subconjunto $S_i' \subseteq S_i$ de estrategias puras para cada jugador $i \in N$ tal que:*

1) Para cada jugador $i \in N$ y cada estrategia pura $s_i \in S_i^{'}$, la estrategia mixta $\alpha * s_i$ tiene soporte $S_i^{'}$.

2) Para cada perfil de estrategias puras $s \in S$ que no pertenezca a $S^{'} = \times_{i \in N} S_i^{'}$, se tiene $f(s, \alpha) > 0$.

En este caso $S_i^{'}$ es el conjunto de estrategias puras coherentes del jugador i.

Demostración. Sean G un juego preajustado y α un vector dual interior.

Suponga que $S_i^{'} = S_i^c$. Si $s \notin S'$ entonces s no es un perfil de estrategias puras coherentes, y como α es un vector dual interior se cumple $f(s, \alpha) > 0$. Luego la condición 2) se satisface.

Para cada jugador $i \in N$ existe una estrategia pura coherente $s_i \in S_i^c$ que es recurrente bajo α_i. Por ser G preajustado, la estrategia pura s_i compromete a todas las demás estrategias puras coherentes, y con esto $(\alpha_i * s_i)(t_i) > 0$ para cada par de estrategias puras $s_i, t_i \in S_i^c$

Con esto el soporte de $\alpha_i * S_i$ contiene a S_i^c. Además, cualquier estrategia pura en el soporte de $\alpha_i * S_i$ es recurrente.

De la condición 2), si $s_i \in S_i \backslash S_i^c$ entonces $s = (s_i, s_{-i}) \notin S^c$ y así $f(s, \alpha) > 0$. Entonces cada estrategia pura en $S_i \backslash S_i^c$ es transitoria.

Así, el soporte de $\alpha_i * S_i$ es $S_i^{'} = S_i^c$, y por tanto la condición 1) se satisface.

Suponga ahora que existe un vector dual α y que para cada jugador $i \in N$ existe algún conjunto $S_i^{'} \subseteq S_i$ que satisface las condiciones 1) y 2).

Suponga primero que $S_i^{'} = S_i^c$. De la condición 1), el soporte de la estrategia mixta $\alpha * s_i$ es S_i^c para cada $s_i \in S_i^c$.

Con esto $(\alpha * s_i)(t_i) > 0$ para cada jugador $i \in N$ y cada par de estrategias puras $s_i, t_i \in S_i^c$. Luego t_i compromete a s_i para cada par de estrategias puras coherentes $s_i, t_i \in S_i^c$, y por tanto G es preajustado.

Así, para probar que G es preajustado es suficiente mostrar que $S_i^{'} = S_i^c$.

Sea $s_i \in S_i \backslash S_i^{'}$. Entonces para cada $s_{-i} \in S_{-i}$ se tiene que $s = (s_i, s_{-i}) \notin S^{'}$. De la condición 2) se tiene que $f(s, \alpha) > 0$.

Con esto s es un perfil de estrategias puras incoherente. Ya que esto se cumple para cada $s_{-i} \in S_{-i}$, entonces la estrategia pura s_i es incoherente.

Por tanto se tiene que $S_i^c \subseteq S_i^{'}$.

De la condición 1) se tiene que $S_i^{'}$ es una clase de recurrencia. De la condición 2) para cada estrategia pura $s_i \in S_i \backslash S_i^c$ se tiene que $f(s, \alpha) > 0$, y con esto s_i es transitorio bajo α_i.

Así, $S_i^{'}$ es la única clase de recurrencia. Esto implica que existe una única estrategia α_i-invariante σ_i cuyo soporte es $S_i^{'}$.

Luego en el juego α-reducido G/α el perfil de estrategias $\sigma = (\sigma_i)_{i \in N}$ es el único perfil de estrategias, y por tanto es trivialmente un equilibrio de Nash.

Además cada equilibrio de Nash del juego α-reducido G/α es un equilibrio de G. Entonces cada estrategia pura en el soporte de σ_i es coherente.

Por tanto $S_i^{'} \subseteq S_i^c$. Con esto $S_i^{'} = S_i^c$ y así, el juego G es preajustado. ∎

Además, los juegos ajustados y preajustados poseen algún equilibrio de Nash con características especiales.

Proposición 2.2.14 *1) Todo juego preajustado tiene un equilibrio de Nash cuasiestricto con soporte* $S^c = \times_{i\in N} S_i^c$.

2) Todo juego ajustado tiene un equilibrio de Nash completamente mixto.

Demostración. 1) Sean G un juego preajustado y α un vector dual interior. Entonces las condiciones 1) y 2) de la proposición anterior se cumplen.

Luego en el juego α-reducido G/α existe un único perfil de estrategias estacionario σ, el cual es un equilibrio de Nash de G. Además, si $s \notin S^c$ entonces $f(s,\alpha) > 0$.

Sea s_i una estrategia pura del jugador i que no pertenece al soporte de σ_i. Como σ_i tiene soporte S_i^c entonces s_i es incoherente. Esto implica que para cada $s_{-i} \in S_{-i}$ se tiene que $s = (s_i, s_{-i}) \notin S^c$ y con esto $f(s,\alpha) > 0$.

Defínase el perfil de estrategias $\tau \in S$ tal que $\tau_i = s_i$ y $\tau_j = \sigma_j$ para cada $j \neq i$. Este perfil satisface

$$f(\tau,\alpha) = \sum_{s_{-i}\in S_{-i}} \tau(s)\, f(s,\alpha) = \sum_{i\in N} \left[U_i(\alpha_i * \tau_i, \tau_{-i}) - U_i(\tau)\right] > 0.$$

Dado que para cada $j \neq i$ se tiene que $\tau_j = \sigma_j$ es α_j-invariante y además $\tau_i = s_i$, lo anterior implica que $U_i(\alpha_i * s_i, \sigma_{-i}) - U_i(s_i, \sigma_{-i}) > 0$.

Luego s_i no es una mejor respuesta a σ_{-i} y por tanto σ es cuasiestricto.

2) Sea G un juego ajustado. Entonces existe un vector dual α tal que para cada jugador $i \in N$ y cada estrategia pura $s_i \in S_i$ la estrategia mixta $\alpha_i * s_i$ es completamente mixta. Con esto se satisfacen las condiciones de la proposición anterior con $S_i' = S_i$, y así $S_i = S_i^c$.

Como G es ajustado entonces es preajustado, y de 1) tiene un equilibrio cuasiestricto de Nash con soporte $S^c = S$.

Por tanto el juego G tiene un equilibrio de Nash completamente mixto. ■

2.2.4. Relación entre juegos ajustados y preajustados

Proposición 2.2.15 *Un juego es ajustado si y sólo si es preajustado y toda estrategia pura de cada jugador es coherente.*

Demostración. Sea G un juego preajustado y suponga que todas las estrategias puras $s_i \in S_i$ de cada jugador $i \in N$ son coherentes. Esto es:

$$h_{s_i,t_i}(\mu) = 0 \qquad \forall \mu \in C,\ \forall i \in N,\ \forall s_i, t_i \in S_i^c = S_i$$

Esto equivale a la definición de juego ajustado. Por tanto G es ajustado.

Suponga ahora que G es un juego ajustado. Entonces es preajustado.

Por ser G ajustado entonces tiene un equilibrio de Nash σ completamente mixto; esto es, para cada $i \in N$ y para cada $s_i \in S_i$ se tiene $\sigma_i(s_i) > 0$.

Por tanto toda estrategia pura de cada jugador es coherente. ■

Defínase el juego $G^c = \left(N, (S_i^c)_{i\in N}, (u_i)_{i\in N}\right)$ como el juego obtenido de G restringiendo a los jugadores a sus estrategias coherentes.

Denótese por $C^c \subseteq \Delta(S^c)$ al conjunto de equilibrios correlacionados de G^c.

Proposición 2.2.16 *Un juego G es preajustado si y sólo si el juego G^c es ajustado.*

Demostración. Sea G un juego preajustado. Como todo equilibrio correlacionado de G tiene soporte en S^c, entonces el conjunto de equilibrios correlacionados de G puede verse como subconjunto de $\Delta(S^c)$.

Dado que en G^c los jugadores tienen menos posibilidades de desviación que en G, entonces cada equilibrio correlacionado de G es un equilibrio correlacionado de G^c. Esto es, $C \subseteq C^c$.

Por definición el juego G^c es ajustado si y sólo si

a) $h_{s_i,t_i}(\mu) = 0 \qquad \forall \mu \in C^c,\ \forall i \in N,\ \forall s_i, t_i \in S_i^c$

Similarmente el juego G es preajustado si y solo sí

b) $h_{s_i,t_i}(\mu) = 0 \qquad \forall \mu \in C,\ \forall i \in N,\ \forall s_i, t_i \in S_i^c$

Como $C \subseteq C^c$ se sigue que a) implica b). Suponga ahora que a) no se cumple. Entonces $\exists \mu \in C^c$, $\exists i \in N$, $\exists s_i^* \in S_i^c$, $\exists t_i^* \in S_i^c$ tales que $h_{s_i^*,t_i^*}(\mu) > 0$.

Dado que $\mu \in C^c$ entonces se cumple

c) $h_{s_i,t_i}(\mu) \geq 0\ \forall i \in N,\ \forall s_i \in S_i,\ \forall t_i \in S_i^c$.

Para $s_i \in S_i \backslash S_i^c$ se cumple trivialmente, pues $p(s_i \times S_{-i}) = 0$.

Por ser G preajustado existe un equilibrio de Nash cuasiestricto σ con soporte S^c. Como σ es un equilibrio de Nash entonces es un equilibrio correlacionado que cumple

d) $h_{s_i,t_i}(\sigma) \geq 0\ \forall i \in N,\ \forall s_i, t_i \in S_i$.

Dado que σ es cuasiestricto con soporte S^c, entonces satisface

e) $h_{s_i,t_i}(\sigma) > 0\ \forall i \in N,\ \forall s_i \in S_i^c,\ \forall t_i \in S_i \backslash S_i^c$.

Usando c), d) y e), se sigue que para $\epsilon > 0$ suficientemente pequeño $\mu_\epsilon = \epsilon\mu + (1-\epsilon)\sigma$ está en C.

Pero de d) y de la definición de μ se sigue que

$$\begin{aligned} h_{s_i^*,t_i^*}(\mu_\epsilon) &= h_{s_i^*,t_i^*}(\epsilon\mu + (1-\epsilon)\sigma) \\ &= \epsilon h_{s_i^*,t_i^*}(\mu) + (1-\epsilon) h_{s_i^*,t_i^*}(\sigma) \\ &\geq \epsilon h_{s_i^*,t_i^*}(\mu) > 0 \end{aligned}$$

contradiciendo b). Por tanto se obtiene que a) y b) son equivalentes. ■

2.2.5. Juegos preajustados y relación geométrica entre equilibrios

Si el politopo de equilibrios correlacionados C de un juego G no es de dimensión completa entonces no tiene interior, y por tanto se cumple trivialmente que los equilibrios de Nash de G se encuentran en la frontera de C. Pero si C no consta de un único punto entonces tiene un interior relativo.

Lo anterior lleva a la cuestión de si es posible encontrar condiciones necesarias y suficientes para que un equilibrio de Nash se encuentre en el interior relativo del politopo de equilibrios correlacionados.

Proposición 2.2.17 *Si existe un equilibrio de Nash σ del juego G en el interior relativo de C entonces*

1) El equilibrio de Nash σ asigna probabilidad positiva a cada estrategia coherente de todos los jugadores; esto es, σ tiene soporte $S^c = \times_{i\in N} S_i^c$.

2) El juego G es preajustado.

Demostración. Sea σ un equilibrio de Nash del juego G. Entonces σ es un equilibrio correlacionado, y así $\sigma \in C$.

Suponga que la condición 1) no se cumple. Entonces para algún jugador $i \in N$ existe una estrategia pura coherente $t_i \in S_i^c$ tal que $\sigma_i(t_i) = 0$.

Con esto $p(s) = 0$ para cada $s \in S^c$ tal que $s = (t_i, s_{-i})$. Luego se satisface con igualdad alguna restricción de no negatividad, y por tanto σ pertenece a la frontera relativa de C.

Suponga ahora que la condición 1) se cumple. Entonces cada estrategia pura coherente s_i es una mejor respuesta a σ_{-i} para cada jugador $i \in N$.

Luego σ satisface $h_{s_i,t_i}(\sigma) = 0$, para cada par de estrategias $s_i, t_i \in S_i^c$.

Si el juego no es preajustado, al menos una restricción de incentivos no se satisface con igualdad para todo equilibrio correlacionado.

Con esto σ pertenece a la frontera relativa de C. ■

Proposición 2.2.18 *Sea G un juego preajustado en el que C no está formado por un único punto. Entonces un equilibrio de Nash de G pertenece al interior relativo de C si y sólo si es cuasiestricto.*

Demostración. Suponga que G es un juego preajustado. Entonces existe algún equilibrio de Nash cuasiestricto σ con soporte S^c. Este equilibrio satisface

a) $\sigma(s) > 0$ para cada $s \in S^c$

y por ser cuasiestricto

b) $h_{s_i,t_i}(\sigma) > 0$ $\forall i \in N$, $\forall s_i \in S_i^c$, $\forall t_i \in S_i \backslash S_i^c$.

Como las desigualdades anteriores son estrictas, entonces existe una vecindad Ω de σ en $\mathbb{R}^S$ en la cual se siguen cumpliendo.

Sea E el subespacio lineal de $\mathbb{R}^S$ que consiste de los vectores $x = (x(s))_{s\in S}$ que satisfacen las siguientes condiciones:

c) $\sum\limits_{s\in S} x(s) = 1$ y $x(s) = 0$ $\forall s \in S\backslash S^c$

d) $h_{s_i,t_i}(x) = 0 \qquad \forall i \in N$, $\forall s_i \in S_i\backslash S_i^c$, $t_i \in S_i$

e) $h_{s_i,t_i}(x) = 0 \qquad \forall i \in N$, $\forall s_i \in S_i^c$, $t_i \in S_i^c$

Todo equilibrio correlacionado satisface trivialmente c) y d). Además como el juego G es preajustado, cada equilibrio correlacionado satisface e).

Con esto se sigue que C es subconjunto de E. Como C no es un único punto entonces E tampoco lo es.

Además cualquier vector en $\mathbb{R}^S$ que satisface las condiciones a) a e) es un equilibrio correlacionado. Entonces $\Omega \cap E \subseteq C$.

Dado que Ω es un conjunto abierto que contiene a σ y E es un subespacio lineal que contiene a C, se tiene que σ pertenece al interior relativo de C.

Sea σ un equilibrio de Nash cuasiestricto de un juego preajustado G.

Suponga que $s_i \in S_i^c$. Dado que G es un juego preajustado, entonces s_i es una mejor respuesta a σ_{-i}.

Como σ es cuasiestricto entonces $\sigma_i(s_i) > 0$. Luego σ tiene soporte S^c.

Si σ no fuera cuasiestricto entonces existiría $s \in S^c$ tal que $\sigma(s) = 0$, o existen $i \in N$, $s_i \in S_i^c$ y $t_i \in S_i\backslash S_i^c$ tales que $h_{s_i,t_i}(\sigma) = 0$.

Es decir, existe una restricción de no negatividad o una restricción de incentivos que es ajustada en σ pero no en todo equilibrio correlacionado.

Con esto σ pertenece a una cara de C y por tanto no pertenece al interior relativo de C. ■

Proposición 2.2.19 *Si un juego es preajustado, entonces C contiene algún equilibrio de Nash en su interior relativo o C es un único punto.*

Demostración. Suponga que G es un juego preajustado. Entonces existe algún equilibrio de Nash cuasiestricto σ.

Si además C no es un único punto, por la proposición anterior σ pertenece al interior relativo de C. ■

De los resultados anteriores se obtiene el siguiente teorema.

Teorema 2.2.20 *Un juego G es preajustado si y sólo si C es un único punto o C contiene un equilibrio de Nash en su interior relativo.*

Capítulo 3

Negociación y contratos en juegos no cooperativos

John Nash propuso que la cooperación entre jugadores podría ser estudiada usando el mismo concepto básico de equilibrio que se utiliza en juegos no cooperativos. Argumentó que las acciones cooperativas son el resultado de un proceso de negociación entre los jugadores que cooperan, y en este proceso de negociación se esperaría que los jugadores se comportaran de acuerdo a alguna estrategia de negociación que satisfaga el mismo criterio de maximización de utilidad como en cualquier otro juego.

En una situación real, si se observa lo que la gente puede hacer para alcanzar un acuerdo o una estrategia de cooperación conjunta, se debería ser capaz de modelar dicha situación como un juego y entonces predecir el resultado analizando el conjunto de equilibrios de este juego.

3.1. Problemas de negociación

Supóngase que un conjunto de jugadores deben negociar una alternativa sobre algún conjunto de pagos S. Sus preferencias sobre estas alternativas difieren, pero si consiguen acordar una alternativa entonces ésta es el pago que los jugadores obtienen de la negociación. Si no consiguen ponerse de acuerdo entonces la negociación se detiene y obtienen una alternativa d preestablecida del conjunto.

Notación 3.1.1 *Sean $x, y \in \mathbb{R}^n$. Denótese por*

- $x \geq y$ si $x_i \geq y_i$ $\forall i \in \{1, \ldots, n\}$
- $x > y$ si $x \geq y$ y $x \neq y$
- $x \gg y$ si $x_i > y_i$ $\forall i \in \{1, \ldots, n\}$

Definición 3.1.2 *Un problema de negociación se define como la terna* (N, S, d) *donde:*

- N *es un conjunto finito de jugadores*
- $S \subseteq \mathbb{R}^{|N|}$ *es un conjunto no vacío, cerrado, acotado y convexo de alternativas, llamado conjunto factible*
- $d \in S$ *es un punto de desacuerdo*
- *Existe una alternativa* $x \in S$ *tal que* $x \gg d$

Cada punto de S da los niveles de utilidad que pueden ser alcanzados por los jugadores por la elección de una de las alternativas disponibles para negociar, o una aleatorización de ellas.

S es acotado para que los pagos máximos y mínimos de cada jugador sean acotados; S es cerrado para que la frontera de cada sucesión de alternativas en S se encuentre también en S; S es convexo para que una aleatorización de alternativas sea también una alternativa.

Se supone que existe una alternativa $x \in S$ tal que $x \gg d$, para evitar tratar con casos degenerados en los cuales exista la posibilidad de que algún jugador no pueda ser beneficiado por ningún acuerdo.

Definición 3.1.3 *Una alternativa* $x \in S$ *es individual racional en* S *si* $x \geq d$.

Dado que $d \in S$, el conjunto de alternativas racionalmente individuales es no vacío. Si una alternativa x no fuera racionalmente individual en S entonces al menos uno de los jugadores preferiría d sobre x de manera estricta, por lo cual dicha alternativa no podría ser el resultado final del proceso de negociación.

3.1.1. Soluciones de negociación

Denótese por $\mathcal{F}^N$ a la colección de los problemas de negociación N-personales.

Una solución de un problema de negociación se puede ver como la recomendación que un mediador podría proponer a los jugadores que participan en la negociación.

Definición 3.1.4 *Una solución de negociación es una función* $\varphi : \mathcal{F}^N \to \mathbb{R}^{|N|}$ *en la cual cada problema de negociación* $(N, S, d) \in \mathcal{F}^N$ *se asocia con una alternativa* $\varphi(N, S, d) \in S$*.*

El mediador de una negociación debe ser capaz de explicar como llega al acuerdo que propone a los jugadores; para ello necesita basar su método para decidir el acuerdo en principios que sean aceptables para todos los jugadores y mostrar que su propuesta sigue estos principios. La eficiencia y la simetría son ejemplos de principios que pueden ser usados para ayudar a guiar al mediador.

Definición 3.1.5 *Una alternativa* $x \in S$ *es eficiente si no existe otra alternativa* $y \in S$ *tal que* $y > x$*.*

Definición 3.1.6 *Una alternativa* $x \in S$ *es débilmente eficiente si no existe otra alternativa* $y \in S$ *tal que* $y \gg x$*.*

Denótese por $PO(S)$ al conjunto de alternativas eficientes de S y por $PO^W(S)$ al conjunto de alternativas débilmente eficientes de S. De las definiciones se sigue que $PO(S) \subseteq PO^W(S)$ para cada $S \subseteq \mathbb{R}^{|N|}$

Definición 3.1.7 *Una solución de negociación* φ *es eficiente si* $\varphi(N, S, d) \in PO(S)$ *para cada problema de negociación* $(N, S, d) \in \mathcal{F}^N$*.*

Definición 3.1.8 *Una solución de negociación* φ *es débilmente eficiente si* $\varphi(N, S, d) \in PO^W(S)$ *para cada problema de negociación* $(N, S, d) \in \mathcal{F}^N$*.*

Si una solución es eficiente, entonces no existe otra posible alternativa que sea mejor para cada uno de los jugadores que participan en la negociación que la alternativa a la que se llega con dicha solución.

Los conjuntos $PO\,(S)$ y $PO^W\,(S)$ están sobre la frontera de S, por tanto $\varphi\,(N,S,d)$ está sobre la frontera de S siempre que φ sea una solución de negociación eficiente o débilmente eficiente.

Definición 3.1.9 *Un problema de negociación $(N,S,d)\in\mathcal{F}^N$ es simétrico si se cumplen las propiedades siguientes:*

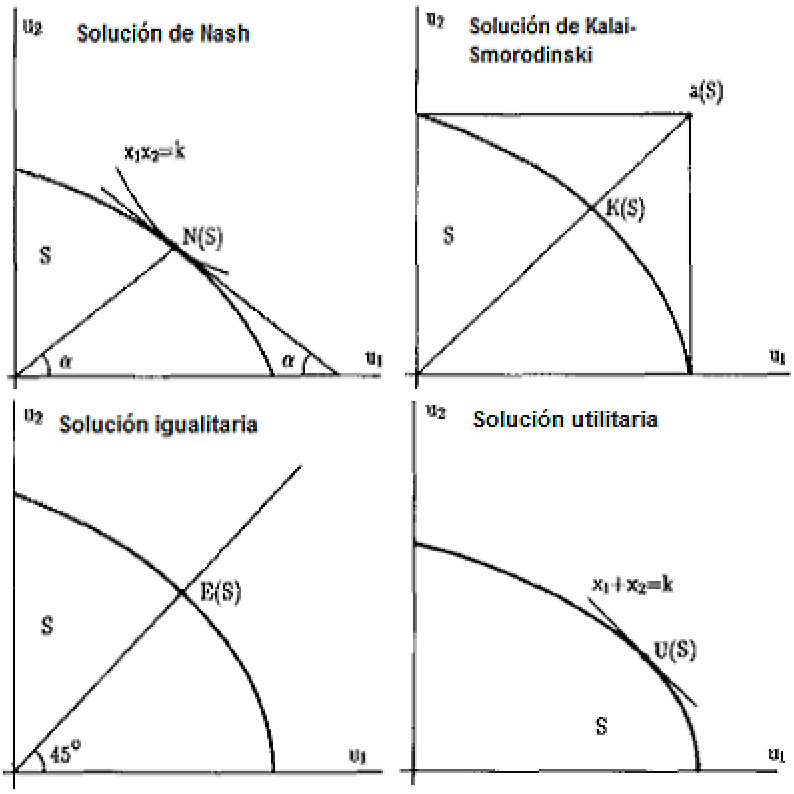
- $d_i = d_j$ *para cada par de jugadores* $i,j\in N$
- $\left(x_{\pi(i)}\right)_{i\in N}\in S$ *para cada alternativa* $x\in S$ *y toda permutación* π *de* N.

Definición 3.1.10 *Una solución de negociación φ es simétrica si satisface $\varphi_i\,(N,S,d) = \varphi_j\,(N,S,d)$ para cada par de jugadores $i,j\in N$, para cada problema de negociación simétrico $(N,S,d)\in\mathcal{F}^N$.*

La propiedad de simetría le prohíbe al mediador darle preferencia a un jugador sobre los demás cuando el juego es simétrico.

Entre las principales soluciones de negociación se encuentran las siguientes:

- **Solución de Nash:** $N\,(S)$ es el punto de S que maximiza el producto $\prod\limits_{i\in N}(x_i-d_i)$ para $x\in S$ tal que $x\geq d$.
- **Solución de Kalai-Smorodinsky:** $K\,(S)$ es el punto máximo de S sobre el segmento que conecta d con $a\,(S)$, donde $a_i\,(S)=\max\{x_i\mid x\in S, x\geq d\}$ para cada $i\in N$.
- **Solución igualitaria**: $E\,(S)$ es el punto máximo de S de coordenadas iguales respecto al punto de desacuerdo, esto es, $E_i\,(S)-d_i = E_j\,(S)-d_j$ para cada $i,j\in N$.
- **Solución utilitaria**: $U\,(S)$ es el punto de S que maximiza la suma de utilidades de los jugadores con respecto al punto de desacuerdo, esto es, $U\,(S) = \max_{x\in S}\sum_{i\in N}(x_i-d_i)$.



En las gráficas anteriores se muestran de manera geométrica las principales soluciones de negociación sobre un problema de negociación bipersonal.

3.2. Contratos

Los contratos pueden transformar juegos con equilibrios no tan deseables en juegos con equilibrios más deseables. En un juego con contratos se requiere que un jugador que firma un contrato juegue de acuerdo a una estrategia correlacionada diseñada por el mediador del juego.

Definición 3.2.1 *Sea $G = \left(N, (S_i)_{i\in N}, (u_i)_{i\in N}\right)$ un juego en forma estratégica. Una estrategia correlacionada para un conjunto no vacío de jugadores $R \subseteq N$ es una distribución de probabilidad sobre el conjunto de combinaciones de estrategias puras que dichos jugadores pueden escoger. Esto es, $\tau_R \in \Delta(S_R)$ donde $S_R = \Delta(\times_{i\in R} S_i)$.*

N es llamada la gran coalición y τ_N denota una estrategia correlacionada para la gran coalición.

Definición 3.2.2 *Un contrato τ es un vector de estrategias correlacionadas de todas las posibles coaliciones no vacías de jugadores $R \subseteq N$*

Nótese que $\tau = (\tau_R)_{R \subseteq N} \in \times_{R \subseteq N} \Delta(S_R)$. Para dicho contrato, τ_R representa la estrategia correlacionada que sería implementada por los jugadores en R si R fuera el conjunto de jugadores que firman el contrato.

3.2.1. Juegos de firma de contrato

Un contrato define un juego extendido llamado juego de firma de contrato.

Definición 3.2.3 *Sea $G = \left(N, (S_i)_{i \in N}, (u_i)_{i \in N}\right)$ un juego en forma estratégica y sea τ un contrato. Un juego de firma del contrato τ es un juego en forma estratégica $G_\tau = \left(N, \left(\widetilde{S}_i\right)_{i \in N}, \left(\widetilde{U}_i\right)_{i \in N}\right)$ tal que las estrategias para cada jugador $i \in N$ son $\widetilde{S}_i = \left\{F, F'\right\}$, donde $F = firmar$ o $F' = rechazar$ el contrato.*

El conjunto de estrategias $\widetilde{S} = \times_{i \in N} \widetilde{S}_i$ es isomorfo al conjunto de coaliciones $R \subseteq N$ de jugadores que deciden firmar el contrato. Con esto, se denotará por s_R al perfil de estrategias del juego G_τ tal que $R = \{i \in N : \widetilde{s}_i = F\}$

Para cada coalición de jugadores que firma el contrato $R \subseteq N$ se puede formar el subjuego siguiente:

Los jugadores que pertenecen a la coalición $R \subseteq N$ que firma el contrato juegan de acuerdo a la estrategia correlacionada τ_R. Los jugadores que rechazan el contrato eligen de manera independiente sobre su conjunto de estrategias puras.

La función $\widetilde{U}_i$ asigna a cada jugador el pago esperado por jugar de acuerdo al comportamiento anterior.

Para cada vector de pagos en el conjunto $\left\{U(p) \in \mathbb{R}^{|N|} : p \in \Delta(S)\right\}$ existe un contrato tal que, si todos los jugadores firmaran el contrato, entonces podrían obtener este vector de pagos esperado. Este conjunto de posibles pagos esperados es un subconjunto cerrado y convexo de $\mathbb{R}^{|N|}$.

Definición 3.2.4 *Para cada jugador $i \in N$ el valor minimax (o nivel de seguridad) del jugador i en el juego G es*

$$\upsilon_i = \text{mín}_{\tau_{-i} \in \Delta(S_{-i})} \left(\text{máx}_{s_i \in S_i} \sum_{s_{-i} \in S_{-i}} \tau_{-i}(s_{-i})\, u_i(s_i, s_{-i}) \right)$$

Esto es, el valor minimax para el jugador i es el mejor pago esperado que podría obtener contra la peor estrategia correlacionada que los demás jugadores pudieran usar contra él.

Una estrategia minimax contra el jugador i es cualquier estrategia correlacionada en $\Delta(S_{-i})$ que alcanza el mínimo en la ecuación anterior.

Definición 3.2.5 *Una estrategia correlacionada $p \in \Delta(S)$ es individualmente racional si y sólo si $U_i(p) \geq \upsilon_i$ para cada jugador $i \in N$.*

Proposición 3.2.6 *Para cada estrategia correlacionada p individualmente racional existe un contrato τ con $\tau_N = p$ tal que s_N es un equilibrio del juego de firma del contrato τ.*

Demostración. Sea $p \in \Delta(S)$ una estrategia correlacionada individualmente racional; esto es, $U_i(p) \geq \upsilon_i$ para cada jugador $i \in N$.

Considere el contrato $\tau = (\tau_R)_{R \subseteq N}$ tal que $\tau_N = p$ y para cada jugador $i \in N$ sea τ_{-i} una estrategia minimax contra el jugador i. Para todas las demás coaliciones elíjase τ_R de manera arbitraria.

Luego en el juego de firma de contrato se tiene que $U_i(s_N) \geq \upsilon_i$ para cada $i \in N$.

Note que para cada $s_i \in S_i$ el perfil (s_i, τ_{-i}) corresponde a la situación cuando el jugador i juega su estrategia t_i mientras los demás jugadores juegan la estrategia correlacionada τ_{-i} por haber firmado el contrato.

Entonces $U_i(s_i, \tau_{-i}) \leq \upsilon_i$, dado que τ_{-i} es una estrategia minimax contra el jugador i. Con esto se cumple:

$$U_i(s_N) \geq \upsilon_i \geq U_i(s_i, \tau_{-i}) \qquad \forall i \in N, \forall s_i \in S_i$$

Por tanto s_N es un equilibrio de Nash del juego de firma del contrato τ. ■

Así, ningún jugador podría obtener algo más que su valor minimax si fuera el único que decidiera no firmar el contrato. Entonces cada jugador firmaría el contrato si esperara que todos los demás jugadores lo hicieran.

Ningún equilibrio de un juego de firma de contrato podría generar un vector de pagos esperados en el cual algún jugador pudiera obtener un pago estrictamente menor que su valor minimax, pues podría entonces mejorar este pago decidiendo no firmar el contrato y usando la estrategia que le garantice su valor minimax.

Proposición 3.2.7 *Sea σ^* un equilibrio de Nash del juego de firma del contrato inducido por una estrategia individualmente racional $p \in \Delta(S)$. Entonces se cumple $U_i(\sigma^*) \geq \upsilon_i$ para cada jugador $i \in N$.*

Demostración. Sea σ^* un perfil de estrategias del juego de firma del contrato τ. Suponga que existe un jugador $i \in N$ tal que $U_i(\sigma^*) < \upsilon_i$.

Si el jugador i decide no firmar el contrato y juega la estrategia $s_i \in S_i$ que le garantiza su valor minimax υ_i, entonces

$$U_i(\sigma^*) < \upsilon_i = U_i\left(s_i, \sigma^*_{-i}\right)$$

Por tanto σ^* no es un equilibrio de Nash del juego de firma del contrato τ. ■

Con esto, el conjunto de vectores de pagos que pueden ser alcanzados en algún equilibrio de un juego de firma de contrato es

$$\left\{U(p) \in \mathbb{R}^{|N|} : p \in \Delta(S),\, U_i(p) \geq \upsilon_i \ \forall i \in N\right\}$$

Este conjunto de todas las posibles asignaciones de pagos esperados que son individualmente racionales es también cerrado y convexo.

3.2.2. Contratos ideales para juegos de firma de contrato

Una condición necesaria para que los jugadores decidan firmar un contrato es que sea individualmente racional. Pero esto no es suficiente, pues podría ocurrir que aún habiendo firmado el contrato un jugador se desviara de la recomendación dada por el mediador o que existiera alguna coalición en la cual no le convendría firmar el contrato, pues su pago esperado podría ser menor.

Así, se podrían buscar cuáles son los contratos en los cuales no ocurre esto, donde los jugadores no tengan incentivos para romper el contrato.

Denótese por $U_R(p)$ el vector de pagos restringido a los jugadores de la coalición $R \subseteq N$ por jugar la estrategia correlacionada p.

Definición 3.2.8 *Sea σ^* un equilibrio de Nash de un juego en forma estratégica G. Un contrato ideal respecto a σ^* es un contrato τ tal que para cada coalición no vacía de jugadores $R \subseteq N$, existe una estrategia correlacionada $\tau_R \in \Delta(S_R)$ tal que*

- $U_R(\tau_R) \gg U_R(\sigma^*)$
- $U_i(\sigma \mid \tau_R) < U_i(\sigma^*) \qquad \forall i \notin R, \forall \sigma \in \Sigma_{-R}$

Esto significa que si τ es un contrato ideal respecto al equilibrio de Nash σ^*, para cada coalición de jugadores que firme el contrato el mediador podrá proponerles una estrategia correlacionada que les garantice un pago mayor que el que obtenían por jugar de acuerdo a σ^*, y que los jugadores que decidan rechazar el contrato no puedan obtener un pago mayor del que obtenían jugando de la forma anterior, aun sabiendo la estrategia correlacionada de los jugadores que firman el contrato.

Al asegurarles dichos pagos, cada uno de los jugadores tendrá incentivos para firmar el contrato en el juego de firma de contrato asociado.

Proposición 3.2.9 *Sean τ un contrato ideal respecto al equilibrio σ^* del juego G y G_τ el juego de firma del contrato τ. Entonces para cada jugador $i \in N$, $\widetilde{s}_i = F$ es una estrategia dominante del juego G_τ.*

Demostración. Sean σ^* un equilibrio de Nash del juego G, τ un contrato ideal respecto a σ^* y G_τ el juego de firma del contrato τ.

Sea $R \subseteq N$ una coalición no vacía de jugadores que decide firmar el contrato en el juego G_τ. Por ser τ un contrato ideal respecto a σ^*, existe una estrategia correlacionada $\tau_R \in \Delta(S_R)$ tal que $U_R(\tau_R) \gg U_R(\sigma^*)$, esto es, $\widetilde{U}_i(s_R) > U_i(\sigma^*)$ para cada $i \in R$.

Suponga que el jugador $i \in R$ decide cambiar su comportamiento, esto es, $\widetilde{s}_i = F'$. Con esto la coalición de jugadores que firma el contrato es ahora $\widehat{R} = R \setminus \{i\}$.

Por ser τ un contrato ideal respecto a σ^*, existe una estrategia correlacionada $\tau_{\widehat{R}} \in \Delta\left(S_{\widehat{R}}\right)$ tal que

$$U_j\left(\sigma \mid \tau_{\widehat{R}}\right) < U_j(\sigma^*) \qquad \forall j \notin \widehat{R}, \forall \sigma \in \Sigma_{-\widehat{R}}.$$

En particular se tiene que $U_i\left(\sigma \mid \tau_{\widehat{R}}\right) \leq U_i(\sigma^*)\ \forall \sigma \in \Sigma_{-\widehat{R}}$.

De lo anterior se tiene que

$$\widetilde{U}_i\left(s_{\widehat{R}}\right) = U_i\left(\sigma \mid \tau_{\widehat{R}}\right) < U_i(\sigma^*) < \widetilde{U}_i(s_R)$$

Por la arbitrariedad de la coalición R se cumple que $\widetilde{U}_i\left(s_{\widehat{R}}\right) < \widetilde{U}_i(s_R)$ para cada coalición R tal que $i \in R$, y por tanto $\widetilde{s}_i = F$ es una estrategia dominante del jugador i en el juego G_τ. ■

Si τ es un contrato ideal, siempre es recomendable para todos los jugadores firmar este contrato.

Corolario 3.2.10 *Sean τ un contrato ideal respecto al equilibrio σ^* del juego G y G_τ el juego de firma del contrato τ. Entonces el perfil de estrategias s_N es el único equilibrio de Nash del juego G_τ.*

Demostración. Por la proposición anterior, $\widetilde{s}_i = F$ es una estrategia dominante para cada jugador $i \in N$ en el juego G_τ. Luego $\widetilde{s}_i = F'$ es una estrategia dominada para cada jugador $i \in N$

Después del proceso de racionalización, s_N es el único perfil de estrategias racional del juego G_τ. Por tanto s_N es el único equilibrio de Nash del juego G_τ. ■

3.2.3. Contratos ideales y equilibrios correlacionados

Si todos los jugadores deciden firmar el contrato ideal τ, entonces la estrategia correlacionada τ_N debe ser un equilibrio correlacionado para evitar que cualquier jugador tenga incentivos para desviarse de la recomendación dada por el mediador.

Sean $R \subset N$ una coalición no vacía de jugadores que decide firmar el contrato ideal τ y τ_R una estrategia correlacionada para dicha coalición. Al ser de conocimiento común el conjunto de jugadores R que firma el contrato, para el conjunto de jugadores que no pertenecen a dicha coalición se forma el juego en forma estratégica $G^R = \left(N/R, (S_i)_{i\in N/R}, (u_i|\tau_R)_{i\in N/R}\right)$, en donde para cada $s \in \times_{i\in N/R} S_i$ se tiene que el pago para el jugador i está dado por

$$u_i|\tau_R(s) = \sum_{s'\in \times_{i\in R} S_i} u_i(s, s')\, \tau_R(s') \,.$$

Por ser G^R un juego finito, entonces debe existir un perfil de estrategias $\sigma^R = \left(\sigma_i^R\right)_{i\in N/R}$ que sea un equilibrio de Nash para dicho juego.

Al mismo tiempo, dado que los jugadores que no pertenecen a la coalición R jugarían siguiendo el perfil de estrategias σ^R, la estrategia correlacionada τ_R debe ser un equilibrio correlacionado para los jugadores de la coalición R, pues de no ser así algún jugador tendría incentivos para desviarse de la recomendación dada por el mediador al usar dicha estrategia correlacionada.

Dado que ningún jugador tendría incentivos para desviarse de dicho comportamiento, se obtiene el siguiente resultado.

Proposición 3.2.11 *Sean σ^* un equilibrio de Nash del juego en forma estratégica G y τ un contrato ideal respecto a σ^*. Entonces para cada coalición no vacía de jugadores $R \subseteq N$ el perfil de estrategias $\left(\tau_R, \sigma^R\right)$ induce una estrategia correlacionada que es un equilibrio correlacionado de G.*

Si $R = N$ entonces el perfil de estrategias $\left(\tau_R, \sigma^R\right)$ es igual a τ_N, ya que al firmar todos el contrato τ el juego G^R no tendría ningún jugador y por tanto no existiría ningún perfil de estrategias σ^R.

Corolario 3.2.12 *Si $|R| = 1$ entonces el perfil de estrategias $\left(\tau_R, \sigma^R\right)$ es un equilibrio de Nash de G.*

Demostración. Sin pérdida de generalidad suponga que $R = \{i\}$. Entonces $\tau_R = \sigma_i$ es una estrategia mixta para el jugador i.

Con esto se tiene que $\left(\tau_R, \sigma^R\right) = (\sigma_i, \sigma_{-i})$ es un perfil de estrategias mixtas de G, donde cada jugador elige su estrategia de manera independiente.

Por la proposición anterior $\left(\tau_R, \sigma^R\right)$ induce un equilibrio correlacionado de G, y dado que cada perfil de estrategias independientes que es un equilibrio correlacionado es un equilibrio de Nash, entonces el perfil de estrategias $\left(\tau_R, \sigma^R\right)$ es un equilibrio de Nash de G. ■

De lo anterior se puede establecer una condición necesaria para la existencia de contratos ideales respecto a un equilibrio de Nash.

Corolario 3.2.13 *Sean G un juego en forma estratégica y σ^* un equilibrio de Nash de G. Si τ es un contrato ideal respecto a σ^* entonces existen al menos $|N| + 1$ equilibrios de Nash en el juego G.*

Demostración. Por el corolario anterior, para cada $i \in N$ el perfil de estrategias $\left(\tau_{\{i\}}, \sigma^{\{i\}}\right)$ es un equilibrio de Nash de G.

Por ser τ un contrato ideal respecto al equilibrio σ^*, para cada $i \in N$ se cumple $U_i\left(\tau_{\{i\}}, \sigma^{\{i\}}\right) > U_i\left(\sigma^*\right)$. Así $\sigma^* \neq \left(\tau_{\{i\}}, \sigma^{\{i\}}\right)$ para cada $i \in N$.

Sin pérdida de generalidad, sean $i, j \in N$ tales que $i \neq j$. Por ser τ un contrato ideal respecto a σ^* se cumple $U_i\left(\tau_{\{i\}}, \sigma^{\{i\}}\right) > U_i\left(\sigma^*\right)$ y $U_i\left(\tau_{\{j\}}, \sigma^{\{j\}}\right) < U_i\left(\sigma^*\right)$. Con esto $\left(\tau_{\{i\}}, \sigma^{\{i\}}\right) \neq \left(\tau_{\{j\}}, \sigma^{\{j\}}\right)$ para cada par de jugadores $i \neq j$.

En consecuencia el conjunto de equilibrios de Nash de G debe contener a los perfiles de estrategias σ^* y $\left(\tau_{\{i\}}, \sigma^{\{i\}}\right)$ para cada $i \in N$. Por tanto existen al menos $|N| + 1$ equilibrios de Nash en el juego G. ■

El recíproco de este resultado es falso, por lo cual no es una condición suficiente.

Dado un punto $x \in \mathbb{R}^{|N|}$, se pueden definir $2^{|N|}$ regiones de $\mathbb{R}^{|N|}$ por

$$\Omega\left(R, x\right) = \left\{y \in \mathbb{R}^{|N|} : y_R \geq x_R,\ y_{N/R} \leq x_{N/R}\right\}$$

donde R es un subconjunto de las $|N|$ coordenadas de cada punto en $\mathbb{R}^{|N|}$, y x_R es la restricción de x a dicho subconjunto de coordenadas.

Si $R = N$ entonces se define $\Omega\left(R, x\right) = \left\{y \in \mathbb{R}^{|N|} : y \geq x\right\}$, y si $|R| = 0$ entonces se define $\Omega\left(R, x\right) = \left\{y \in \mathbb{R}^{|N|} : y \leq x\right\}$.

Denótese por $CEP\left(G\right)$ a la región de pagos esperados del conjunto de equilibrios correlacionados C de un juego G. Esto es: $CEP\left(G\right) = \left\{U\left(p\right) \in \mathbb{R}^N : p \in C\right\}$.

Proposición 3.2.14 *Sean G un juego en forma estratégica y σ^* un equilibrio de Nash de G. Si τ es un contrato ideal respecto a σ^* entonces $U\left(\tau_R, \sigma^R\right) \in CEP\left(G\right) \cap \Omega\left(R, U\left(\sigma^*\right)\right)^\circ$ para cada coalición no vacía de jugadores $R \subseteq N$.*

Demostración. Sea τ un contrato ideal respecto al equilibrio de Nash σ^* del juego G. Por la proposición 3.2.11 el perfil de estrategias $\left(\tau_R, \sigma^R\right)$ debe inducir un equilibrio correlacionado de G para cada coalición no vacía de jugadores $R \subseteq N$ y por tanto $U\left(\tau_R, \sigma^R\right) \in CEP\left(G\right)$ para cada $R \subseteq N$.

Además por ser τ un contrato ideal respecto a σ^*, para cada coalición no vacía de jugadores $R \subseteq N$ el perfil de estrategias $\left(\tau_R, \sigma^R\right)$ satisface $U_R\left(\tau_R, \sigma^R\right) \gg U_i\left(\sigma^*\right)$ y $U_j\left(\tau_R, \sigma^R\right) < U_j\left(\sigma^*\right)$ para cada $j \notin R$.

Con esto se tiene que $U\left(\tau_R, \sigma^R\right) \in \Omega\left(R, U\left(\sigma^*\right)\right)^\circ$ para cada $R \subseteq N$.

De lo anterior se tiene que $U\left(\tau_R, \sigma^R\right) \in CEP\left(G\right) \cap \Omega\left(R, U\left(\sigma^*\right)\right)^\circ$ para cada coalición no vacía de jugadores $R \subseteq N$. ■

Al ser el conjunto de equilibrios correlacionados C un politopo y U una función continua sobre el conjunto de pagos, se tiene que $CEP\left(G\right)$ es un politopo en $\mathbb{R}^{|N|}$. De lo cual se tiene que si $x \in CEP\,(G)$ entonces puede ser un punto frontera o un punto interior de dicha región.

Si x es un punto frontera de $CEP\,(G)$, entonces se encuentra sobre un hiperplano en $\mathbb{R}^{|N|}$ o la intersección de un número finito de ellos al ser $CEP\,(G)$ un politopo en $\mathbb{R}^{|N|}$. Para cada uno de estos hiperplanos existe un único vector normal exterior al semiespacio definido por ellos.

Para saber la localización de un punto $y \in \mathbb{R}^{|N|}$ respecto al semiespacio definido por alguno de los hiperplanos sobre los que se encuentra x, suponga el hiperplano H, se puede proceder de la siguiente manera:

- Si $\langle y - x, n_H \rangle > 0$ entonces y se encuentra en el exterior del semiespacio definido por el hiperplano H
- Si $\langle y - x, n_H \rangle = 0$ entonces y se encuentra sobre el hiperplano H
- Si $\langle y - x, n_H \rangle < 0$ entonces y se encuentra en el interior del semiespacio definido por el hiperplano H

en donde $\langle \cdot, \cdot \rangle : \mathbb{R}^{|N|} \times \mathbb{R}^{|N|} \to \mathbb{R}$ es el producto escalar sobre $\mathbb{R}^{|N|}$ y n_H es el vector normal exterior al semiespacio definido por el hiperplano H.

Lema 3.2.15 *Sean $x \in \mathbb{R}^{|N|}$ y H un hiperplano que contiene a x. Para todo $R \subseteq N$ tal que $x + n_H \in \Omega\,(R, x)$ se cumple que si $y \in \Omega\,(R, x)^\circ$ entonces y se encuentra en el exterior del semiespacio definido por el hiperplano H.*

Demostración. El punto $z = x + n_H \in \mathbb{R}^{|N|}$ se encuentra en al menos una región $\Omega\,(R, x)$ para algún $R \subseteq N$. Si $y \in \Omega\,(R, x)$ entonces se cumple

$$\begin{aligned} \langle z - x, y - x \rangle &= \sum_{i \in N} (z - x)_i\,(y - x)_i \\ &= \sum_{i \in R} (z - x)_i\,(y - x)_i + \sum_{i \in N/R} (z - x)_i\,(y - x)_i \\ &\geq \sum_{i \in N/R} (x - z)_i\,(x - y)_i \geq 0 \end{aligned}$$

Si $z \neq x$ y además $y \in \Omega\,(R, x)^\circ$, esto es, si $y_R \gg x_R$ y $y_{N/R} \ll x_{N/R}$ entonces se cumple $\langle z - x, y - x \rangle > 0$, pues $(z - x)_i\,(y - x)_i \geq 0$ para cada $i \in N$ y al menos uno de ellos satisface $(z - x)_j\,(y - x)_j > 0$ dado que $z_j \neq x_j$ para algún $j \in N$.

Por tanto todo $y \in \Omega\,(R, x)^\circ$ se encuentra en el exterior del semiespacio definido por el hiperplano H que contiene a x, cuyo vector normal exterior es n_H. ∎

Así, si $U(\sigma^*)$ es punto frontera de $CEP(G)$, no es posible encontrar un equilibrio correlacionado para todo $y \in \left\{U(p) \in \mathbb{R}^{|N|} : p \in \Delta(S)\right\}$ que satisfaga $\langle y - U(\sigma^*), n_H\rangle > 0$ para algún vector normal exterior n_H de un hiperplano H que contiene a $U(\sigma^*)$ y que delimita una cara del politopo $CEP(G)$.

En particular, por el lema anterior se cumple que si $z = U(\sigma^*) + n_H \in \Omega(R, U(\sigma^*))$ para alguna coalición no vacía de jugadores $R \subseteq N$ entonces $\langle y - U(\sigma^*), z - U(\sigma^*)\rangle > 0$ para toda $y \in \Omega(R, U(\sigma^*))^\circ$. Por tanto no es posible encontrar un equilibrio correlacionado $\mu \in C$ tal que $U(\mu) = y$.

Por la proposición anterior, si τ es un contrato ideal respecto a σ^* entonces $U\left(\tau_R, \sigma^R\right) \in CEP(G) \cap \Omega(R, U(\sigma^*))^\circ$ para cada coalición no vacía de jugadores $R \subseteq N$. Pero para cada coalición no vacía $R \subseteq N$ tal que $z \in \Omega(R, U(\sigma^*))$ no existe $y \in CEP(G) \cap \Omega(R, U(\sigma^*))^\circ$, y con esto lo anterior no se satisface. Por tanto no existe contrato ideal respecto a σ^*.

Proposición 3.2.16 *Sean G un juego en forma estratégica y σ^* un equilibrio de Nash de G. Si $U(\sigma^*)$ es un punto frontera de $CEP(G)$ tal que $U(\sigma^*) + n_H \in \Omega(R, U(\sigma^*))$ para alguna coalición no vacía de jugadores $R \subseteq N$, donde n_H es el vector normal exterior de un hiperplano H que contiene a $U(\sigma^*)$ y que delimita una cara del politopo $CEP(G)$, entonces no existe un contrato ideal respecto a σ^*.*

Si x es un punto interior de $CEP(G)$, entonces existe una vecindad $B(x, \varepsilon)$ donde $\varepsilon > 0$ que está contenida completamente en $CEP(G)$. Con esto se tiene que $\emptyset \neq \Omega(R, x) \cap B(x, \varepsilon) \subset \Omega(R, x) \cap CEP(G)$ para cada $R \subseteq N$.

Así, si $U(\sigma^*)$ es punto interior de $CEP(G)$, es factible buscar una estrategia correlacionada $\left(\tau_R, \sigma^R\right) \in C$ tal que $U\left(\tau_R, \sigma^R\right) \in CEP(G) \cap \Omega(R, U(\sigma^*))$ para cada coalición no vacía de jugadores $R \subseteq N$.

De lo anterior se tiene que la localización de $U(\sigma^*)$ dentro de $CEP(G)$ puede servir para determinar la existencia de un contrato ideal respecto a σ^*.

Conjetura 3.2.17 *Sean G un juego en forma estratégica y σ^* un equilibrio de Nash de G. Entonces existe un contrato ideal respecto a σ^* si y sólo si $U(\sigma^*)$ es un punto interior de $CEP(G)$.*

3.3. Negociación y contratos ideales

3.3.1. Problemas de negociación de contratos ideales

Sean G un juego en forma estratégica y σ^* un equilibrio de Nash de G. Suponga que existe un contrato ideal τ respecto a σ^*.

Por el corolario 3.2.10, todos los jugadores deciden jugar F en el juego de firma del contrato τ por ser una estrategia dominante. De esta forma s_N es el único equilibrio del juego de firma del contrato τ.

Por la proposición 3.2.11, τ_N es un equilibrio correlacionado del juego G.

El conjunto $S_\tau = CEP\,(G) \cap \Omega\,(N, U\,(\sigma^*))$ es convexo, cerrado y acotado sobre $\mathbb{R}^{|N|}$. Esto se cumple dado que $CEP\,(G)$ y $\Omega\,(N, U\,(\sigma^*))$ son conjuntos cerrados (convexos) en $\mathbb{R}^{|N|}$, y como la intersección de conjuntos cerrados (convexos) es cerrada (convexa), entonces S_τ es cerrado (convexo). Además por ser $CEP\,(G)$ un politopo en $\mathbb{R}^{|N|}$ entonces es acotado, y ya que $S_\tau \subseteq CEP\,(G)$ entonces S_τ es acotado.

Como τ es un contrato ideal respecto a σ^*, por la proposición 3.2.14 se tiene que $U\,(\tau_N) \in CEP\,(G) \cap \Omega\,(N, U\,(\sigma^*))^\circ \subseteq S_\tau$. Estableciendo $d_\tau = U\,(\sigma^*)$, entonces se satisface $U\,(\tau_N) \gg d_\tau$.

Con esto, se puede formar un problema de negociación con S_τ como región de negociación y d_τ como punto de desacuerdo, llamado problema de negociación del contrato ideal τ.

Las soluciones de negociación encuentran una alternativa sobre la región de negociación, que en este caso es el pago esperado que se alcanza mediante un equilibrio correlacionado que sea individualmente racional respecto a un equilibrio de Nash.

Sin embargo, al no ser inyectiva la función de pagos esperados $U : \Delta\,(S) \to CEP\,(G)$, la alternativa alcanzada anteriormente podría alcanzarse también por estrategias correlacionadas que no fueran un equilibrio, de lo cual solamente deberían tomarse en cuenta aquellas que si lo fueran.

3.3.2. Penalizaciones por rompimiento de contrato

Dado que todos los jugadores elegirían firmar un contrato que fuera ideal respecto a un equilibrio de Nash del juego G, suponga ahora que el mediador decide penalizar al jugador que no respete dicho contrato.

Denótese por $\epsilon_i\left(t_i|s_i\right)$ a la penalización para el jugador i cuando se desvía a la estrategia t_i si la estrategia s_i fuera recomendada por el mediador. Con estas penalizaciones, para cada jugador $i \in N$ se puede formar una matriz de penalizaciones $\epsilon_i = \left(\epsilon_i\left(t_i|s_i\right)\right)_{s_i,\in S_i, t_i \in S_i}$ por desviarse de las recomendaciones dadas por el mediador.

Definición 3.3.1 *Sean ϵ_i una matriz de penalizaciones para cada jugador $i \in N$ y $\epsilon = \left(\epsilon_i\right)_{i \in N}$ un perfil de dichas matrices. Una distribución de probabilidad $\mu \in \Delta\left(S\right)$ es un equilibrio correlacionado con penalizaciones si para cada jugador $i \in N$ y cada par de estrategias $s_i, t_i \in S_i$ se satisface*

$$\sum_{s_{-i} \in S_{-i}} \mu\left(s\right) U_i\left(s\right) \geq \sum_{s_{-i} \in S_{-i}} \mu\left(s\right) U_i\left(t_i, s_{-i}\right) - \epsilon_i\left(t_i|s_i\right) \mu\left(s_i \times S_{-i}\right)$$

La desigualdades anteriores equivalen a:

$$\sum_{s_{-i} \in S_{-i}} \mu\left(s_{-i} \mid s_i\right) U_i\left(s\right) \geq \sum_{s_{-i} \in S_{-i}} \mu\left(s_{-i} \mid s_i\right) U_i\left(t_i, s_{-i}\right) - \epsilon_i\left(t_i|s_i\right)$$

para cada jugador $i \in N$ y cada $s_i \in S_i$ tal que $\mu\left(s_i \times S_{-i}\right) > 0$.

Si todas las penalizaciones son 0, entonces la definición anterior coincide con la de equilibrio correlacionado.

Entonces para que el conjunto de equilibrios correlacionados con penalizaciones sea no vacío, se requiere que $\epsilon_i\left(t_i|s_i\right) \geq 0$ para cada jugador $i \in N$ y cada par de estrategias $s_i, t_i \in S_i$. Además se debe tener $\epsilon_i\left(s_i|s_i\right) = 0$ para cada jugador $i \in N$ y cada estrategia $s_i \in S_i$, pues el mediador no penalizaría a los jugadores que siguieran su recomendación.

Denótese por C^ϵ al politopo de equilibrios correlacionados con penalizaciones. Entonces se cumple $C \subseteq C^\epsilon$.

Como todo equilibrio correlacionado es un equilibrio correlacionado con penalizaciones, se puede extender el conjunto de equilibrios del juego para alcanzar pagos que no se podían obtener solamente con los equilibrios correlacionados.

Denótese por $CEP^{\epsilon}(G)$ a la región de pagos esperados del conjunto de equilibrios correlacionados con penalizaciones.

Dado que el conjunto $S_{\tau}^{\epsilon} = CEP^{\epsilon}(G) \cap \Omega(N, U(\sigma^*))$ es convexo y compacto, entonces se puede formar un problema de negociación asociado al contrato ideal τ con S_{τ}^{ϵ} como región de negociación y d_{τ} como punto de desacuerdo, llamado problema de negociación del contrato ideal τ con penalizaciones por desviación de estrategias.

3.3.3. Soluciones de problemas de negociación de contratos ideales con penalizaciones

El mediador del juego, para poder encontrar la "mejor" estrategia correlacionada que podría proponerles a los jugadores por firmar un contrato ideal respecto a un equilibrio de Nash σ^* del juego, podría ayudarse utilizando alguna de las soluciones de negociación para el problema de negociación $(N, S_{\tau}^{\epsilon}, \sigma^*)$, dependiendo de algún criterio que quiera utilizar para hacerlo.

A continuación se presenta la forma analítica para encontrar dicha estrategia correlacionada usando las principales soluciones para problemas de negociación.

Solución de Nash:

$$\text{máx} \prod_{i \in N} \left(\sum_{s \in S} \mu(s) U_i(s) - U_i(\sigma^*) \right) \quad s.a.$$

1. $\sum_{s_{-i} \in S_{-i}} \mu(s) \left[U_i(s) - U_i(t_i, s_{-i}) + \epsilon_i(t_i|s_i) \right] \geq 0 \qquad \forall i \in N, \forall s_i, t_i \in S_i$

2. $\sum_{s \in S} \mu(s) U_i(s) - U_i(\sigma^*) \geq 0 \qquad \forall i \in N$

3. $\sum_{s \in S} \mu(s) = 1, \qquad \mu(s) \geq 0 \qquad \forall s \in S$

La función objetivo maximiza el producto de los pagos esperados con respecto al equilibrio de Nash σ^*.

Las desigualdades en 1) son las restricciones de incentivos con penalización por desviarse de la estrategia s_i a t_i

Las desigualdades en 2) garantizan la racionalidad individual.

Las restricciones en 3) garantizan que μ sea una distribución de probabilidad.

Solución de Kalai-Smorodinsky:

$$\max \sum_{s\in S} \mu\left(s\right) U_j\left(s\right) - U_j\left(\sigma^*\right) \ s.a.$$

1. $\displaystyle\sum_{s_{-i}\in S_{-i}} \mu\left(s\right)\left[U_i\left(s\right) - U_i\left(t_i, s_{-i}\right) + \epsilon_i\left(t_i|s_i\right)\right] \geq 0 \qquad \forall i \in N, \forall s_i, t_i \in S_i$

2. $\displaystyle\sum_{s\in S} \mu\left(s\right) U_i\left(s\right) - U_i\left(\sigma^*\right) \geq 0 \qquad \forall i \in N$

3. $\displaystyle\frac{\sum_{s\in S} \mu\left(s\right) U_i\left(s\right) - U_i\left(\sigma^*\right)}{a_i - U_i\left(\sigma^*\right)} = \frac{\sum_{s\in S} \mu\left(s\right) U_j\left(s\right) - U_j\left(\sigma^*\right)}{a_j - U_j\left(\sigma^*\right)}$

   $\forall i, j \in N \qquad a_i \neq U_i\left(\sigma^*\right), \, a_j \neq U_j\left(\sigma^*\right)$

4. $\displaystyle\sum_{s\in S} \mu\left(s\right) = 1, \qquad \mu\left(s\right) \geq 0 \qquad \forall s \in S$

La función objetivo maximiza, sin pérdida de generalidad, el pago esperado del jugador j con respecto al equilibrio de Nash σ^* de manera proporcional en dirección al vector de pagos optimistas a, siempre que $a_j \neq U_j\left(\sigma^*\right)$.

Las desigualdades en 1) son las restricciones de incentivos con penalización por desviarse de la estrategia s_i a t_i

Las desigualdades en 2) garantizan la racionalidad individual.

Las igualdades en 3) garantizan que el vector de pagos esperados de todos los jugadores $i \in N$ tales que $a_i \neq U_i\left(\sigma^*\right)$ con respecto al equilibrio de Nash se mueva en dirección del vector de pagos optimistas a.

Las restricciones en 4) garantizan que μ sea una distribución de probabilidad.

Para encontrar el vector de pagos optimistas a, para cada jugador $j \in N$ se busca a_j utilizando el programa lineal anterior sin incluir las igualdades en 3).

Solución igualitaria:

$$\max \sum_{s\in S} \mu\left(s\right) U_j\left(s\right) - U_j\left(\sigma^*\right) \ s.a.$$

1. $\displaystyle\sum_{s_{-i}\in S_{-i}} \mu\left(s\right)\left[U_i\left(s\right) - U_i\left(t_i, s_{-i}\right) + \epsilon_i\left(t_i|s_i\right)\right] \geq 0 \qquad \forall i \in N, \forall s_i, t_i \in S_i$

2. $\displaystyle\sum_{s\in S} \mu\left(s\right) U_i\left(s\right) - U_i\left(\sigma^*\right) \geq 0 \qquad \forall i \in N$

3. $\displaystyle\sum_{s\in S} \mu\left(s\right) U_i\left(s\right) - U_i\left(\sigma^*\right) = \sum_{s\in S} \mu\left(s\right) U_j\left(s\right) - U_j\left(\sigma^*\right) \qquad \forall i, j \in N$

4. $\displaystyle\sum_{s\in S} \mu\left(s\right) = 1, \qquad \mu\left(s\right) \geq 0 \qquad \forall s \in S$

La función objetivo maximiza, sin pérdida de generalidad, el pago esperado del jugador j con respecto al equilibrio de Nash σ^*. Al ser igualitaria, la ganancia de todos los jugadores es la misma.

Las desigualdades en 1) son las restricciones de incentivos con penalización por desviarse de la estrategia s_i a t_i

Las desigualdades en 2) garantizan la racionalidad individual.

Las igualdades en 3) garantizan que los pagos esperados de todos los jugadores con respecto al equilibrio de Nash sean los mismos.

Las restricciones en 4) garantizan que μ sea una distribución de probabilidad.

Solución utillitaria:

$\text{máx} \sum_{i \in N} \left[\sum_{s \in S} \mu(s) U_i(s) - U_i(\sigma^*) \right]$ $s.a.$

1. $\sum_{s_{-i} \in S_{-i}} \mu(s) \left[U_i(s) - U_i(t_i, s_{-i}) + \epsilon_i(t_i | s_i) \right] \geq 0 \qquad \forall i \in N, \forall s_i, t_i \in S_i$
2. $\sum_{s \in S} \mu(s) U_i(s) - U_i(\sigma^*) \geq 0 \qquad \forall i \in N$
3. $\sum_{s \in S} \mu(s) = 1, \qquad \mu(s) \geq 0 \qquad \forall s \in S$

La función objetivo maximiza la suma de utilidades esperadas de todos los jugadores con respecto al equilibrio de Nash σ^*

Las desigualdades en 1) son las restricciones de incentivos con penalización por desviarse de la estrategia s_i a t_i

Las desigualdades en 2) garantizan la racionalidad individual.

Las restricciones en 3) garantizan que μ sea una distribución de probabilidad.

3.4. Juegos no cooperativos con formación de equipos por firma de contratos

Sea $G = \left(N, (S_i)_{i \in N}, (u_i)_{i \in N}\right)$ un juego en forma estratégica con $|N| \geq 2$. Suponga que para cada coalición no vacía de jugadores $R \subseteq N$ el mediador del juego les propone un contrato que les permite jugar de la siguiente forma:

El conjunto de jugadores R que decide firmar el contrato juega como un equipo. Esto es, juegan como un único jugador contra el conjunto de jugadores que no firmaron el contrato.

Al jugar como un único jugador, su conjunto de estrategias es ahora $S_R = \times_{i \in R} S_i$, y el pago asociado a dicho jugador es el vector de pagos $u_R(s)$ para cada perfil de estrategias $s = (s_R, s_{-R}) \in S$.

Definición 3.4.1 *Sean $G = \left(N, (S_i)_{i \in N}, (u_i)_{i \in N}\right)$ un juego en forma estratégica con $|N| \geq 2$ y $R \subseteq N$ una coalición no vacía de jugadores. El juego coalicional G_R es un juego en forma estrátegica tal que:*

- *G_R tiene $|N - R| + 1$ jugadores: el conjunto de jugadores es $R \cup \{i \notin R\}$.*
- *El conjunto de estrategias de la coalición R es $S_R = \times_{i \in R} S_i$.*
- *$u_R : S \to \mathbb{R}^{|R|}$ es una función que asocia cada perfil de estrategias $s \in S$ con el vector de pagos $u_R(s)$ de la coalición R.*

Notación 3.4.2 *El conjunto de perfiles de estrategias puras de cada juego coalicional G_R se denota por $S_{(R,-R)} = S_R \times_{i \notin R} S_i$. El conjunto de perfiles de estrategias mixtas de cada juego coalicional G_R se denota por $\Sigma_{(R.-R)} = \Delta(S_R) \times_{i \notin R} \Sigma_i$.*

Para cada coalición de jugadores $R \subseteq N$ tal que $|R| = 1$ se tiene que $G_R = G$. Es decir, se necesitan al menos dos jugadores que firmen un contrato para formar un equipo que pueda jugar conjuntamente.

Para cada perfil de estrategias puras $s_{-R} \in S_{-R}$ de los jugadores que no pertenecen a la coalición R, el conjunto de pagos del jugador R usando estrategias puras está dado por vectores de $\mathbb{R}^{|R|}$, entre los cuales solamente podría eliminar aquellos para los que exista otro vector que fuera favorable para el equipo, pues al jugar como un único jugador solamente se podría desviar a un vector que fuera al menos tan bueno para cada jugador que formó la coalición.

Extendiendo el juego permitiendo estrategias mixtas para cada jugador, dado un perfil de estrategias mixtas $\sigma_{-R} \in \Sigma_{-R}$ de los jugadores que no pertenecen a la coalición R, el conjunto de pagos del jugador R usando estrategias mixtas es ahora un conjunto convexo y compacto de vectores en $R^{|R|}$, entre los cuales sólo escogería aquellos que fueran eficientes, pues para estos vectores no existen otros que favorezcan a todos los jugadores que formaron la coalición sin perjudicar a alguno de ellos.

Denótese a la región de pagos del jugador R dado el perfil de estrategias $\sigma_{-R} \in \Sigma_{-R}$ de los jugadores que no pertenecen a la coalición R por

$$P_{\sigma_{-R}} = \left\{x \in \mathbb{R}^{|R|} : x = U_R\left(\sigma_R, \sigma_{-R}\right), \sigma_R \in \Delta\left(S_R\right)\right\}$$

Si $R = N$ entonces existe un único jugador en el juego coalicional G_R, y al no existir otros jugadores contra los que compite, su región de pagos está dada por $\Pi = \left\{U\left(\sigma\right) \in \mathbb{R}^{|N|} : \sigma \in \Delta\left(S\right)\right\}$.

Definición 3.4.3 *Sean $R \subseteq N$ una coalición no vacía de jugadores y $\sigma_{-R} \in \Sigma_{-R}$ un perfil de estrategias de los jugadores que no pertenecen a la coalición. Una estrategia $\sigma_R \in \Delta\left(S_R\right)$ del jugador R es fuertemente dominada si existe otra estrategia $\sigma'_R \in \Delta\left(S_R\right)$ tal que para cada perfil de estrategias $\sigma_{-R} \in \Sigma_{-R}$ de los jugadores que no pertenecen a la coalición R se cumple*

$$U_R\left(\sigma_R, \sigma_{-R}\right) \ll U_R\left(\sigma'_R, \sigma_{-R}\right).$$

Definición 3.4.4 *Sean $R \subseteq N$ una coalición no vacía de jugadores y $\sigma_{-R} \in \Sigma_{-R}$ un perfil de estrategias de los jugadores que no pertenecen a la coalición. Una estrategia $\sigma_R \in \Delta\left(S_R\right)$ del jugador R es débilmente dominada si existe otra estrategia $\sigma'_R \in \Delta\left(S_R\right)$ tal que*

- *Para cada perfil de estrategias $\sigma_{-R} \in \Sigma_{-R}$ de los jugadores que no pertenecen a la coalición R se cumple $U_R\left(\sigma_R, \sigma_{-R}\right) \leq U_R\left(\sigma'_R, \sigma_{-R}\right)$.*
- *Existe un perfil de estrategias $\phi_{-R} \in \Sigma_{-R}$ de los jugadores que no pertenecen a la coalición R tal que $U_R\left(\sigma_R, \phi_{-R}\right) < U_R\left(\sigma'_R, \phi_{-R}\right)$.*

Si $R = N$ entonces una estrategia $\sigma \in \Delta\left(S\right)$ es dominada si existe otra estrategia $\sigma' \in \Delta\left(S\right)$ tal que $U\left(\sigma\right) < U\left(\sigma'\right)$.

Definición 3.4.5 *Sean $R \subseteq N$ una coalición no vacía de jugadores y $\sigma_{-R} \in \Sigma_{-R}$ un perfil de estrategias de los jugadores que no pertenecen a la coalición. La estrategia $\sigma_R \in \Delta\left(S_R\right)$ del jugador R es eficiente respecto a σ_{-R} si no existe otra estrategia $\sigma'_R \in \Delta\left(S_R\right)$ tal que $U_R\left(\sigma_R, \sigma_{-R}\right) < U_R\left(\sigma'_R, \sigma_{-R}\right)$.*

Esto significa que una estrategia $\sigma_R \in \Delta\left(S_R\right)$ del jugador R es eficiente respecto a $\sigma_{-R} \in \Sigma_{-R}$ si $U_R\left(\sigma_R, \sigma_{-R}\right) \in PO\left(P_{\sigma_{-R}}\right)$.

Definición 3.4.6 *Sean $R \subseteq N$ una coalición no vacía de jugadores y $\sigma_{-R} \in \Sigma_{-R}$ un perfil de estrategias de los jugadores que no pertenecen a la coalición. La estrategia $\sigma_R \in \Delta(S_R)$ del jugador R es débilmente eficiente respecto a σ_{-R} si no existe otra estrategia $\sigma'_R \in \Delta(S_R)$ tal que $U_R(\sigma_R, \sigma_{-R}) \ll U_R\left(\sigma'_R, \sigma_{-R}\right)$.*

Si $R = N$ entonces todos los jugadores juegan como un solo equipo en el juego coalicional G_R, y así pueden obtener cualquier vector de pagos eficiente $x \in PO(\Pi) \subseteq \mathbb{R}^{|N|}$ del juego original G.

Proposición 3.4.7 *Sea $R \subseteq N$ una coalición no vacía de jugadores. Si una estrategia $\sigma_R \in \Delta(S_R)$ del jugador R es fuertemente dominada, entonces no es eficiente respecto a cada perfil de estrategias $\sigma_{-R} \in \Sigma_{-R}$ de los jugadores que no pertenecen a la coalición.*

Demostración. Sea $R \subseteq N$ una coalición no vacía de jugadores y suponga que el jugador R tiene una estrategia $\sigma_R \in \Delta(S_R)$ que es fuertemente dominada.

Entonces existe otra estrategia $\sigma'_R \in \Delta(S_R)$ tal que para cada perfil de estrategias $\sigma_{-R} \in \Sigma_{-R}$ de los jugadores que no pertenecen a la coalición R se cumple $U_R(\sigma_R, \sigma_{-R}) \ll U_R\left(\sigma'_R, \sigma_{-R}\right)$.

Así, σ_R no es eficiente respecto a cada perfil de estrategias $\sigma_{-R} \in \Sigma_{-R}$ de los jugadores que no pertenecen a la coalición. ∎

Definición 3.4.8 *Sea $R \subseteq N$ una coalición no vacía de jugadores. Un perfil de estrategias $\sigma^* = \left(\sigma^*_R, \sigma^*_{-R}\right)$ es un equilibrio del juego coalicional G_R si*

- *Para cada jugador $i \notin R$ y cada estrategia pura $s_i \in S_i$ se satisface*
$$U_i(\sigma^*) \geq U_i\left(s_i, \sigma^*_{-i}\right).$$
- *La estrategia σ^*_R del jugador R es eficiente respecto a σ^*_{-R}.*

Un equilibrio de un juego coalicional es débil si en la segunda condición de la definición anterior se pide eficiencia débil en vez de eficiencia.

Si todos los jugadores deciden jugar como un solo equipo, toda estrategia $\sigma \in \Delta(S)$ tal que $U(\sigma) \in PO(\Pi) \subseteq \mathbb{R}^{|N|}$ del juego G es un equilibrio del juego coalicional G_R.

Proposición 3.4.9 *Sean $G = \left(N, (S_i)_{i\in N}, (u_i)_{i\in N}\right)$ un juego en forma estratégica, σ^* un equilibrio de Nash de G y $R \subseteq N$ una coalición no vacía de jugadores. Si σ^*_R es eficiente respecto a σ^*_{-R} entonces σ^* induce un equilibrio del juego coalicional G_R.*

Demostración. Sea $R \subseteq N$ una coalición no vacía de jugadores. Por ser σ^* un equilibrio de Nash de G para cada jugador $i \in N$ y cada estrategia pura $s_i \in S_i$ se satisface $U_i(\sigma^*) \geq U_i(s_i, \sigma^*_{-i})$. En particular se cumple para cada jugador $i \notin R$.

Además por ser σ^*_R es eficiente respecto a σ^*_{-R} entonces se satisfacen las condiciones para que σ^* induzca un equilibrio $(\sigma^*_R, \sigma^*_{-R})$ del juego coalicional G_R. ■

Del resultado anterior se puede ver que no todo equilibrio de Nash de G es un equilibrio para cada juego coalicional G_R.

Existen dos tipos de juegos coalicionales en los que se pueden deducir fácilmente cuáles son los equilibrios para dichos juegos: cuando la coalición sólo está formada por un jugador, o cuando está formada por todos los jugadores.

Proposición 3.4.10 *Sean $G = \left(N, (S_i)_{i\in N}, (u_i)_{i\in N}\right)$ un juego en forma estratégica y $R \subseteq N$ tal que $|R| = 1$. Entonces el juego coalicional G_R tiene al menos un equilibrio en estrategias mixtas.*

Demostración. Si $|R| = 1$ entonces el juego coalicional G_R equivale al juego G, y por el teorema de Nash existe un equilibrio en estrategias mixtas de G. ■

Proposición 3.4.11 *Sean $G = \left(N, (S_i)_{i\in N}, (u_i)_{i\in N}\right)$ un juego en forma estratégica. Entonces el juego coalicional G_N tiene al menos un equilibrio en estrategias mixtas.*

Demostración. Si $R = N$, como el conjunto de pagos Π del jugador R es un conjunto convexo y compacto de $\mathbb{R}^{|N|}$, entonces existe al menos un punto $x \in \Pi$ tal que $x \in PO(\Pi)$. Luego toda estrategia $\sigma \in \Delta(S)$ tal que $U(\sigma) = x$ es un equilibrio del juego coalicional G_R. ■

Las dos proposiciones anteriores muestran que si no se puede formar una coalición con al menos dos personas entonces el resultado será el mismo que en el juego original, y si todos los jugadores deciden cooperar de manera conjunta entonces siempre pueden alcanzar vectores de pagos que son eficientes, algo que no siempre sucedía cuando cada uno de ellos decidía jugar de manera independiente.

Corolario 3.4.12 *Todo juego coalicional G_R de un juego bipersonal tiene al menos un equilibrio en estrategias mixtas para cada coalición no vacía de jugadores $R \subseteq N$.*

Demostración. Dado que las únicas coaliciones no vacías de jugadores $R \subseteq \{1, 2\}$ pueden tener cardinalidad $|R| = 1$ o $|R| = 2 = |N|$, por las dos proposiciones previas se tiene que G_R tiene al menos un equilibrio en estrategias mixtas para cada coalición no vacía de jugadores $R \subseteq N$. ■

Surge de manera natural la cuestión de si no todos los jugadores decidieran jugar en equipo, pero éste está formado por al menos dos de ellos, entonces debiera existir un equilibrio para el juego coalicional asociado.

Conjetura 3.4.13 *Sean $G = \left(N, (S_i)_{i \in N}, (u_i)_{i \in N}\right)$ un juego en forma estratégica tal que $|N| \geq 3$ y $R \subseteq N$ una coalición no vacía de jugadores tal que $1 < |R| < |N|$. Entonces el juego coalicional G_R tiene al menos un equilibrio en estrategias mixtas.*

Capítulo 4

Aplicación en juegos no cooperativos clásicos

4.1. Equilibrio y contratos en juegos bipersonales

4.1.1. Dilema del prisionero

	A	B
A	(5,5)	(0,6)
B	(6,0)	(1,1)

En este juego para ambos jugadores la estrategia B es fuertemente dominante. Luego de la eliminación de las estrategias fuertemente dominadas, el juego residual es

	B
B	(1,1)

Así, el perfil de estrategias $s = (B, B)$ es el único resultado del proceso de racionalización y por tanto es el único equilibrio de Nash del juego.

Este equilibrio les da a los jugadores el pago $u(s) = (1, 1)$, mientras que el pago $(5, 5)$ dado por la estrategia $s = (A, A)$ que sería más deseable por ambos jugadores no se puede alcanzar por ningún equilibrio.

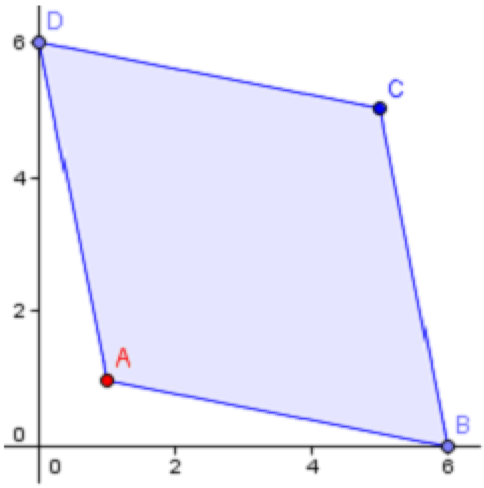
Extendiendo el juego permitiendo estrategias correlacionadas, el conjunto de equilibrios correlacionados del juego están dados por las distribuciones correlacionadas $\mu = [\mu(A, A), \mu(A, B), \mu(B, A), \mu(B, B)] \in \Delta(S)$ que satisfacen:

$$-\mu(A,A)-\mu(A,B)\geq 0$$
$$\mu(B,A)+\mu(B,B)\geq 0$$
$$-\mu(A,A)-\mu(B,A)\geq 0$$
$$\mu(A,B)+\mu(B,B)\geq 0$$

De la primera y tercera desigualdad, por ser $\mu \in \Delta(S)$ se tiene que $\mu(A,A) = \mu(A,B) = \mu(B,A) = 0$ y en consecuencia $\mu(B,B) = 1$. Por tanto el conjunto de equilibrios correlacionados solo está formado por $[0,0,0,1] \in \Delta(S)$, la cual es la distribución correlacionada inducida por el equilibrio de Nash $s = (B,B)$.

En la gráfica se muestran:

- El conjunto de pagos posibles, dado por la envoltura convexa de los puntos A=$(1,1)$, B=$(6,0)$, C=$(5,5)$, D=$(0,6)$.
- El pago del equilibrio de Nash s dado por el punto A=$(1,1)$.



Al ser el equilibrio de Nash s el único equilibrio correlacionado del juego G, el pago $u(s)$ es el único punto de $CEP(G)$. Dado que deben existir al menos $|N|+1=3$ equilibrios de Nash de G para que exista un contrato ideal respecto a s, esta condición no se satisface.

Además esto se cumple porque si solamente el jugador $i \in \{1,2\}$ decidiera firmar el contrato, se cumpliría $U_i\left(\tau_{\{i\}}\right) \leq u_i(s)$ sin importar cual fuera la estrategia $\tau_{\{i\}}$ que le recomendara el mediador al jugador i, al elegir el otro jugador siempre su estrategia dominante $\sigma_{-i}^{\{i\}} = B$.

4.1.2. Batalla de los sexos

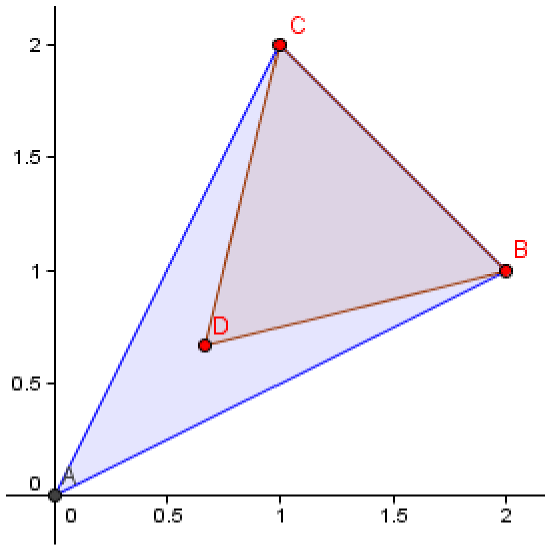
	A	B
A	(2,1)	(0,0)
B	(0,0)	(1,2)

En este juego los perfiles de estrategias $s^1 = (A, A)$ y $s^2 = (B, B)$ son equilibrios de Nash en estrategias puras, cuyos respectivos pagos son $u\left(s^1\right) = (2, 1)$ y $u\left(s^2\right) = (1, 2)$.

Además existe un equilibrio de Nash en estrategias mixtas $\sigma^* = \left[\left(\frac{2}{3}, \frac{1}{3}\right), \left(\frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right)\right]$, cuyo pago es $U\left(\sigma^*\right) = \left(\frac{2}{3}, \frac{2}{3}\right)$.

Extendiendo el juego permitiendo estrategias correlacionadas, el conjunto de equilibrios correlacionados del juego están dados por las distribuciones correlacionadas $\mu = [\mu(A, A), \mu(A, B), \mu(B, A), \mu(B, B)] \in \Delta(S)$ que satisfacen:

$$
\begin{gathered}
2\mu(A, A) - \mu(A, B) \geq 0 \\
-2\mu(B, A) + \mu(B, B) \geq 0 \\
\mu(A, A) - 2\mu(B, A) \geq 0 \\
-\mu(A, B) + 2\mu(B, B) \geq 0
\end{gathered}
$$



En la gráfica se muestran:

- El conjunto de pagos posibles, dado por la envoltura convexa de los puntos A=(0, 0), B=(2, 1), C=(1, 2).

- Los pagos de equilibrios de Nash, dados por los puntos B=$(2,1)$, C=$(1,2)$, D=$\left(\frac{2}{3},\frac{2}{3}\right)$.
- El conjunto de pagos de equilibrios correlacionados, dado por la envoltura convexa de los puntos B=$(2,1)$, C=$(1,2)$, D=$\left(\frac{2}{3},\frac{2}{3}\right)$.

En este caso, el conjunto de pagos de los equilibrios correlacionados coincide con la envoltura convexa de las pagos de los equilibrios de Nash.

Dado que los pagos de los tres equilibrios de Nash de G se encuentran sobre la frontera de $CEP\,(G)$, entonces no existe algún contrato ideal para ninguno de ellos.

En el equilibrio $s^1 = (A, A)$ el jugador 1 obtiene su pago máximo en el juego, y así no podría alcanzar un pago mejor con la firma de cualquier contrato. Por tanto no existe contrato ideal respecto a s^1. Lo mismo ocurre en el equilibrio $s^2 = (B, B)$.

Para el equilibrio σ^* suponga sin pérdida de generalidad que el jugador 1 decide firmar el contrato, pero el jugador 2 no lo hace. Sea $\tau_{\{1\}} = (p, 1-p)$ una estrategia para el jugador 1. Entonces se satisface:

- $U_2\left(A \mid \tau_{\{1\}}\right) = p < 2-2p = U_2\left(B \mid \tau_{\{1\}}\right)$ si $p \in \left[0, \frac{2}{3}\right)$. Con esto al jugador 1 le convendría desviarse a su estrategia B y por tanto
$$U_2\left(\sigma_2^{\{1\}} \mid \tau_{\{1\}}\right) = U_2\,(B,B) = 2 > \tfrac{2}{3} = U_2\,(\sigma^*)$$
- $U_2\left(A \mid \tau_{\{1\}}\right) = p > 2-2p = U_2\left(B \mid \tau_{\{1\}}\right)$ si $p \in \left(\frac{2}{3}, 1\right]$. Con esto al jugador 1 le convendría desviarse a su estrategia A y por tanto
$$U_2\left(\sigma_2^{\{1\}} \mid \tau_{\{1\}}\right) = U_2\,(A,A) = 1 > \tfrac{2}{3} = U_2\,(\sigma^*)$$
- Si $p = \frac{2}{3}$ entonces $U_2\left(A \mid \tau_{\{1\}}\right) = \frac{2}{3} = U_2\left(B \mid \tau_{\{1\}}\right)$. La única estrategia del jugador 2 con la que no se desviaría el jugador 1 es $\sigma_2^{\{1\}} = \left(\frac{1}{3},\frac{2}{3}\right)$, y con esto $U_1\left(\tau_{\{1\}}\right) = U_1\,(\sigma^*)$. Por tanto $U_1\left(\tau_{\{1\}}\right) \not> U_1\,(\sigma^*)$.

De lo anterior no existe $\tau_{\{1\}}$ tal que τ sea un contrato ideal respecto a σ^*.

Este ejemplo muestra que el hecho de que existan $|N|+1 = 3$ equilibrios de Nash en el juego G no es suficiente para la existencia de contratos ideales.

4.1.3. Juego del gallina

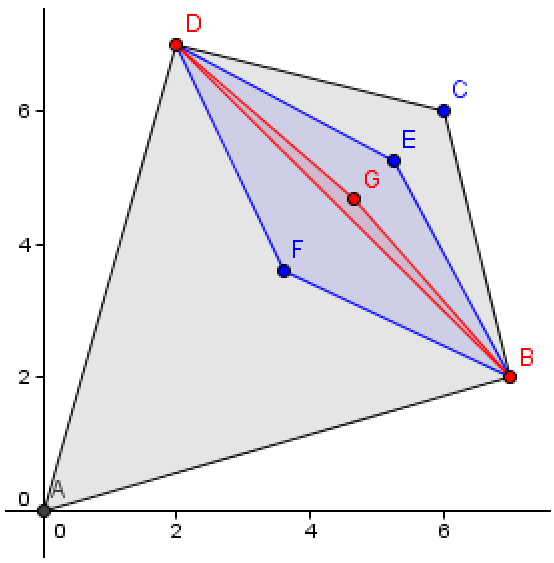
	A	B
A	(6,6)	(2,7)
B	(7,2)	(0,0)

En este juego los perfiles de estrategias $s^1 = (A, B)$ y $s^2 = (B, A)$ son equilibrios de Nash en estrategias puras, cuyos respectivos pagos son $u\left(s^1\right) = (2, 7)$ y $u\left(s^2\right) = (7, 2)$.

Además existe un equilibrio de Nash en estrategias mixtas $\sigma^* = \left[\left(\frac{2}{3}, \frac{1}{3}\right), \left(\frac{2}{3}, \frac{1}{3}\right)\right]$, cuyo pago es $U(\sigma^*) = \left(\frac{14}{3}, \frac{14}{3}\right)$.

Extendiendo el juego permitiendo estrategias correlacionadas, el conjunto de equilibrios correlacionados del juego están dados por las distribuciones correlacionadas $\mu = [\mu(A, A), \mu(A, B), \mu(B, A), \mu(B, B)] \in \Delta(S)$ que satisfacen:

$$-\mu(A, A) + 2\mu(A, B) \geq 0$$
$$\mu(B, A) - 2\mu(B, B) \geq 0$$
$$-\mu(A, A) + 2\mu(B, A) \geq 0$$
$$\mu(A, B) - 2\mu(B, B) \geq 0$$



En la gráfica se muestran:

- El conjunto de pagos posibles, dado por la envoltura convexa de los puntos A=(0, 0), B=(7, 2), C=(6, 6), D=(2, 7).

- Los pagos de equilibrios de Nash, dados por los puntos B=$(7, 2)$, D=$(2, 7)$, G=$\left(\frac{14}{3}, \frac{14}{3}\right)$.
- El conjunto de pagos de equilibrios correlacionados, dado por la envoltura convexa de los puntos B=$(7, 2)$, D=$(2, 7)$, E=$\left(\frac{21}{4}, \frac{21}{4}\right)$, F=$\left(\frac{18}{5}, \frac{18}{5}\right)$.

La envoltura convexa de los pagos alcanzados por los equilibrios de Nash se encuentra contenida estrictamente en la región de pagos esperados por equilibrios correlacionados, de lo cual se observa que se pueden alcanzar mejores pagos que los que se podían alcanzar solamente usando equilibrios de Nash.

Para el equilibrio s^1, $u\left(s^1\right) = (2, 7)$ se encuentra sobre la frontera de $CEP\,(G)$ y por tanto no existe un contrato ideal τ respecto a s^1.

Si existiera dicho contrato, entonces se debería cumplir $U_2\left(\tau_{\{2\}}\right) > U_2\left(s^1\right) = 7$ cuando el jugador 2 decide firmar el contrato pero el jugador 1 no lo hace, lo cual es imposible. Por tanto no existe un contrato ideal τ respecto a s^1.

Lo mismo ocurre para el equilibrio s^2, pues $u\left(s^2\right) = (7, 2)$ se encuentra sobre la frontera de $CEP\,(G)$.

Para el equilibrio σ^*, $U\,(\sigma^*) = \left(\frac{14}{3}, \frac{14}{3}\right)$ es un punto interior de $CEP\,(G)$. Por tanto es factible encontrar un contrato ideal τ respecto a σ^*. En efecto: Sea el contrato $\tau = \left\{\tau_1, \tau_2, \tau_{\{1,2\}}\right\}$, donde

- $\tau_{\{1\}} = \left\{\tau_{\{1\}}\,(A) = 0,\ \tau_{\{1\}}\,(B) = 1\right\}$
- $\tau_{\{2\}} = \left\{\tau_{\{2\}}\,(A) = 0,\ \tau_{\{2\}}\,(B) = 1\right\}$
- $\tau_{\{1,2\}} = \left\{\tau_{\{1,2\}}\,(A, A) = \frac{1}{2},\ \tau_{\{1,2\}}\,(A, B) = \tau_{\{1,2\}}\,(B, A) = \frac{1}{4},\ \tau_{\{1,2\}}\,(B, B) = 0\right\}$

Suponga que el jugador 1 decide firmar el contrato pero el jugador 2 no lo hace. Entonces el pago esperado del jugador 2 dada la estrategia $\tau_{\{1\}}$ es

- Si $s_2 = A$ entonces $U_2\left(s_2 \mid \tau_{\{1\}}\right) = 2 < \frac{14}{3} = U_2\,(\sigma^*)$
- Si $s_2 = B$ entonces $U_2\left(s_2 \mid \tau_{\{1\}}\right) = 0 < \frac{14}{3} = U_2\,(\sigma^*)$

Con esto se tiene que $\sigma_2^{\{1\}} = A$, pues dicha estrategia maximiza su pago dada la estrategia correlacionada $\tau_{\{1\}}$.

Dado que el jugador 2 elegiría su estrategia A, el pago esperado para el jugador 1 es $U_1\left(\tau_{\{1\}}\right) = 7 > \frac{14}{3} = U_1\left(\sigma^*\right)$.

Además, el perfil de estrategias correlacionadas
$\left(\tau_{\{1\}}, s_2^{\{1\}}\right) = \{\mu\left(A,A\right) = 0,\ \mu\left(A,B\right) = 0,\ \mu\left(B,A\right) = 1,\ \mu\left(B,B\right) = 0\}$
es un equilibrio correlacionado del juego.

Como el juego es simétrico, lo mismo sucede si el jugador 2 decide firmar el contrato pero el jugador 1 no lo hace.

Si ambos jugadores deciden firmar el contrato, entonces se cumple
$U_1\left(\tau_{\{1,2\}}\right) = \frac{21}{4} > \frac{14}{3} = U_1\left(\sigma^*\right) \qquad U_2\left(\tau_{\{1,2\}}\right) = \frac{21}{4} > \frac{14}{3} = U_2\left(\sigma^*\right)$
Además $\tau_{\{1,2\}}$ es un equilibrio correlacionado del juego.

Así, τ es un contrato ideal con respecto al equilibrio de Nash σ^*. El juego de firma de contrato G_τ asociado a este contrato ideal está dado por

$$\begin{array}{ccc} & F & F' \\ F & \left(\frac{21}{4}, \frac{21}{4}\right) & (7,2) \\ F' & (2,7) & \left(\frac{14}{3}, \frac{14}{3}\right) \end{array}$$

Firmar el contrato es una estrategia dominante para ambos jugadores, y por lo tanto (F,F) es un equilibrio del juego de firma del contrato ideal τ.

Dado que ambos jugadores elegirían firmar el contrato, para cada jugador defínase una matriz de penalizaciones por rompimiento del contrato mediante:

$$\epsilon_1 = \begin{pmatrix} \epsilon_1\left(A|A\right) & \epsilon_1\left(B|A\right) \\ \epsilon_1\left(A|B\right) & \epsilon_1\left(B|B\right) \end{pmatrix} \qquad \epsilon_2 = \begin{pmatrix} \epsilon_2\left(A|A\right) & \epsilon_2\left(B|A\right) \\ \epsilon_2\left(A|B\right) & \epsilon_2\left(B|B\right) \end{pmatrix}$$

Por simetría del juego, supóngase que $\epsilon_1\left(B|A\right) = \epsilon_2\left(B|A\right)$ y $\epsilon_1\left(A|B\right) = \epsilon_2\left(A|B\right)$. Además $\epsilon_1\left(A|A\right) = \epsilon_2\left(A|A\right) = \epsilon_1\left(B|B\right) = \epsilon_2\left(B|B\right) = 0$.

Con esto, el conjunto de equilibrios correlacionados con penalizaciones son todas las distribuciones correlacionadas $\mu = \left[\mu\left(A,A\right), \mu\left(A,B\right), \mu\left(B,A\right), \mu\left(B,B\right)\right] \in \Delta\left(S\right)$ que satisfacen:

$$\begin{aligned} \left[\epsilon_1\left(B|A\right) - 1\right]\mu\left(A,A\right) + \left[\epsilon_1\left(B|A\right) + 2\right]\mu\left(A,B\right) \geq 0 \\ \left[\epsilon_1\left(A|B\right) + 1\right]\mu\left(B,A\right) + \left[\epsilon_1\left(A|B\right) - 2\right]\mu\left(B,B\right) \geq 0 \\ \left[\epsilon_1\left(B|A\right) - 1\right]\mu\left(A,A\right) + \left[\epsilon_1\left(B|A\right) + 2\right]\mu\left(B,A\right) \geq 0 \\ \left[\epsilon_1\left(A|B\right) + 1\right]\mu\left(A,B\right) + \left[\epsilon_1\left(A|B\right) - 2\right]\mu\left(B,B\right) \geq 0 \end{aligned}$$

De la primera y tercera desigualdad, si la penalización del mediador al jugador que se desvía cuando su recomendación fue jugar su estrategia A es $\epsilon_1(B|A) > 1$, entonces la estrategia A de cada jugador se volvería dominante y por tanto la estrategia $s = (A, A)$, la cual les da un pago a los jugadores que maximiza la suma de utilidades, sería alcanzable mediante el uso de este tipo de equilibrios.

Si $0 < \epsilon_1(B|A) < 1$, entonces la estrategia que maximiza la suma de utilidades de los jugadores se encuentra maximizando la probabilidad de jugar $\mu(A, A)$. Para esto primero se suman la primera y tercera desigualdad, luego se sustituye $\mu(A, B) + \mu(B, A) = 1 - \mu(A, A) - \mu(B, B)$ y finalmente se supone $\mu(B, B) = 0$.

De lo anterior, se obtiene que la estrategia correlacionada con penalizaciones que maximiza la suma de utilidades de los jugadores está dada por:

$$\mu = \left[\frac{1}{2}\left(1 + \frac{3\epsilon_1(B|A)}{4 - \epsilon_1(B|A)}\right), \frac{1}{4}\left(1 - \frac{3\epsilon_1(B|A)}{4 - \epsilon_1(B|A)}\right), \frac{1}{4}\left(1 - \frac{3\epsilon_1(B|A)}{4 - \epsilon_1(B|A)}\right), 0\right] \in \Delta(S)$$

la cual les da el pago

$$\left[\frac{21}{4} + \frac{3}{4}\left(\frac{3\epsilon_1(B|A)}{4 - \epsilon_1(B|A)}\right), \frac{21}{4} + \frac{3}{4}\left(\frac{3\epsilon_1(B|A)}{4 - \epsilon_1(B|A)}\right)\right]$$

De esta forma, se puede ampliar el conjunto de equilibrios para obtener pagos que no se podían alcanzar solamente con los equilibrios correlacionados.

4.2. Juegos coalicionales en un juego tripersonal

Extendiendo el juego del gallina a 3 jugadores se obtienen las siguientes matrices de pago, donde el jugador 1 escoge renglones, el jugador 2 escoge columnas y el jugador 3 escoge matrices:

A	A	B	B	A	B
A	$(6,6,6)$	$(2,7,2)$	A	$(2,2,7)$	$(2,0,0)$
B	$(7,2,2)$	$(0,0,2)$	B	$(0,2,0)$	$(0,0,0)$

Sea $R \subseteq \{1, 2, 3\}$ una coalición no vacía de jugadores.

Si $|R| = 1$ entonces el juego coalicional G_R coincide con el juego G, y por tanto el conjunto de equilibrios es el mismo. Estos equilibrios son:

- El perfil de estrategias puras $s^1 = (B, A, A)$, cuyo pago es $u\left(s^1\right) = (7, 2, 2)$.
- El perfil de estrategias puras $s^2 = (A, B, A)$, cuyo pago es $u\left(s^2\right) = (2, 7, 2)$.
- El perfil de estrategias puras $s^3 = (A, A, B)$, cuyo pago es $u\left(s^3\right) = (2, 2, 7)$.
- El perfil de estrategias mixtas $\sigma^1 = \left[(1,0), \left(\frac{2}{3}, \frac{1}{3}\right), \left(\frac{2}{3}, \frac{1}{3}\right)\right]$, cuyo pago es $U\left(\sigma^1\right) = \left(\frac{34}{9}, \frac{14}{3}, \frac{14}{3}\right)$.
- El perfil de estrategias mixtas $\sigma^2 = \left[\left(\frac{2}{3}, \frac{1}{3}\right), (1,0), \left(\frac{2}{3}, \frac{1}{3}\right)\right]$, cuyo pago es $U\left(\sigma^2\right) = \left(\frac{14}{3}, \frac{34}{9}, \frac{14}{3}\right)$.
- El perfil de estrategias mixtas $\sigma^3 = \left[\left(\frac{2}{3}, \frac{1}{3}\right), \left(\frac{2}{3}, \frac{1}{3}\right), (1,0)\right]$, cuyo pago es $U\left(\sigma^3\right) = \left(\frac{14}{3}, \frac{14}{3}, \frac{34}{9}\right)$.
- El perfil de estrategias mixtas $\sigma^4 = \left[\left(\sqrt{\frac{2}{3}}, 1-\sqrt{\frac{2}{3}}\right), \left(\sqrt{\frac{2}{3}}, 1-\sqrt{\frac{2}{3}}\right), \left(\sqrt{\frac{2}{3}}, 1-\sqrt{\frac{2}{3}}\right)\right]$, cuyo pago es $U\left(\sigma^4\right) = \left(\frac{14}{3}, \frac{14}{3}, \frac{14}{3}\right)$.

Sea $|R| = 2$. Por ser G simétrico, sin pérdida de generalidad suponga que $R = \{2, 3\}$. Entonces el juego coalicional G_R está definido por:

	(A,A)	(A,B)	(B,A)	(B,B)
A	$[6,(6,6)]$	$[2,(2,7)]$	$[2,(7,2)]$	$[2,(0,0)]$
B	$[7,(2,2)]$	$[0,(2,0)]$	$[0,(0,2)]$	$[0,(0,0)]$

En este juego la estrategia (B, B) del jugador R es fuertemente dominada por su estrategia (A, A), por tanto puede eliminarse del juego en la búsqueda de equilibrios.

Sea $\sigma_1 = (p, 1-p) \in \Sigma_1$ una estrategia mixta del jugador 1. Entonces el pago esperado de cada estrategia pura del jugador R dada la estrategia mixta σ_1 en términos de p está dado por:

$$U_R\left[(A,A), \sigma_1\right] = [2+4p, 2+4p]$$
$$U_R\left[(A,B), \sigma_1\right] = [2, 7p]$$
$$U_R\left[(B,A), \sigma_1\right] = [7p, 2]$$

Dependiendo del valor de p, el comportamiento del jugador R sería:

- Si $p = 0$, la estrategia (A, A) dominaría débilmente a las estrategias (A, B) y (B, A), pues se satisface:

$$U_R\left[(A,A), B\right] = (2,2) > (2,0) = U_R\left[(A,B), B\right]$$
$$U_R\left[(A,A), B\right] = (2,2) > (0,2) = U_R\left[(B,A), B\right]$$

- Si $p \in \left(0, \frac{2}{3}\right)$, la estrategia (A, A) dominaría fuertemente a las estrategias (A, B) y (B, A), pues se satisface:

$$U_R\left[(A,A),\sigma_1\right] = (2+4p, 2+4p) \gg (2, 7p) = U_R\left[(A,B),\sigma_1\right]$$
$$U_R\left[(A,A),\sigma_1\right] = (2+4p, 2+4p) \gg (7p, 2) = U_R\left[(B,A),\sigma_1\right]$$

- Si $p = \frac{2}{3}$, la estrategia (A, A) dominaría débilmente a las estrategias (A, B) y (B, A), pues se satisface:

$$U_R\left[(A,A),\left(\tfrac{2}{3},\tfrac{1}{3}\right)\right] = \left(\tfrac{14}{3},\tfrac{14}{3}\right) > \left(2,\tfrac{14}{3}\right) = U_R\left[(A,B),\left(\tfrac{2}{3},\tfrac{1}{3}\right)\right]$$
$$U_R\left[(A,A),\left(\tfrac{2}{3},\tfrac{1}{3}\right)\right] = \left(\tfrac{14}{3},\tfrac{14}{3}\right) > \left(\tfrac{14}{3},2\right) = U_R\left[(B,A),\left(\tfrac{2}{3},\tfrac{1}{3}\right)\right]$$

- Si $p \in \left(\frac{2}{3}, 1\right]$, las estrategias (A, A), (A, B), (B, A) son indiferentes entre sí, pues ninguna de ellas domina a otra.

Sea $\sigma_R = (\mu_{AA}, \mu_{AB}, \mu_{BA}, 0) \in \Delta(S_R)$ una estrategia mixta del jugador R. Entonces el pago esperado de cada estrategia pura del jugador 1 dada la estrategia mixta σ_R está dado por:

$$U_1(A, \sigma_R) = 6\mu_{AA} + 2\mu_{AB} + 2\mu_{BA} = 2 + 4\mu_{AA}$$
$$U_1(B, \sigma_R) = 7\mu_{AA}$$

Dependiendo del valor μ_{AA}, el comportamiento del jugador 1 sería:

- Si $\mu_{AA} \in \left[0, \frac{2}{3}\right)$, la estrategia A dominaría a la estrategia B, pues se satisface:

$$U_1(A, \sigma_R) = 2 + 4\mu_{AA} > 7\mu_{AA} = U_1(B, \sigma_R)$$

- Si $\mu_{AA} = \frac{2}{3}$, entonces el jugador 1 es indiferente entre sus estrategias A y B, pues se satisface:

$$U_1(A, \sigma_R) = \tfrac{14}{3} = U_1(B, \sigma_R)$$

- Si $\mu_{AA} \in \left(\frac{2}{3}, 1\right]$, la estrategia B dominaría a la estrategia A, pues se satisface:

$$U_1(A, \sigma_R) = 2 + 4\mu_{AA} < 7\mu_{AA} = U_1(B, \sigma_R)$$

De acuerdo a este comportamiento los equilibrios del juego G_R pueden ser en estrategias puras, fuertes en estrategias mixtas y débiles en estrategias mixtas.

El conjunto de equilibrios en estrategias puras está dado por:

- El perfil de estrategias $s^1 = [B, (A, A)]$, cuyo pago es $u\left(s^1\right) = [7, (2, 2)]$
- El perfil de estrategias $s^2 = [A, (B, A)]$, cuyo pago es $u\left(s^2\right) = [2, (7, 2)]$

- El perfil de estrategias $s^3 = [A, (A, B)]$, cuyo pago es $u\left(s^3\right) = [2, (2, 7)]$

El conjunto de equilibrios fuertes en estrategias mixtas está dado por:

- Si $p \in \left(\frac{2}{3}, 1\right)$, entonces $\sigma^p = \left[(p, 1-p), \left(\frac{2}{3}, \frac{1}{3}, 0, 0\right)\right]$ es equilibrio, cuyo pago es $U(\sigma^p) = \left[\frac{14}{3}, \left(2 + \frac{8}{3}p, \frac{4}{3} + 5p\right)\right]$
- Si $p \in \left(\frac{2}{3}, 1\right)$, entonces $\sigma^p = \left[(p, 1-p), \left(\frac{2}{3}, 0, \frac{1}{3}, 0\right)\right]$ es equilibrio, cuyo pago es $U(\sigma^p) = \left[\frac{14}{3}, \left(\frac{4}{3} + 5p, 2 + \frac{8}{3}p\right)\right]$
- Si $\mu_{AA} \in \left[0, \frac{2}{3}\right]$, entonces $\sigma^{\mu_{AA}} = [A, (\mu_{AA}, 1 - \mu_{AA}, 0, 0)]$ es equilibrio, cuyo pago es $U(\sigma^{\mu_{AA}}) = [2 + 4\mu_{AA}, (2 + 4\mu_{AA}, 7 - \mu_{AA})]$
- Si $\mu_{AA} \in \left[0, \frac{2}{3}\right]$, entonces $\sigma^{\mu_{AA}} = [A, (\mu_{AA}, 0, 1 - \mu_{AA}, 0)]$ es equilibrio, cuyo pago es $U(\sigma^{\mu_{AA}}) = [2 + 4\mu_{AA}, (7 - \mu_{AA}, 2 + 4\mu_{AA})]$

El conjunto de equilibrios débiles en estrategias mixtas está dado por:

- El perfil de estrategias $\sigma = \left[\left(\frac{2}{3}, \frac{1}{3}\right), \left(\frac{2}{3}, \frac{1}{3}, 0, 0\right)\right]$, cuyo pago es $U(\sigma) = \left[\frac{14}{3}, \left(\frac{34}{9}, \frac{14}{3}\right)\right]$
- El perfil de estrategias $\sigma = \left[\left(\frac{2}{3}, \frac{1}{3}\right), \left(\frac{2}{3}, 0, \frac{1}{3}, 0\right)\right]$, cuyo pago es $U(\sigma) = \left[\frac{14}{3}, \left(\frac{14}{3}, \frac{34}{9}\right)\right]$
- Si $\mu_{AA} \in \left[\frac{2}{3}, 1\right)$, entonces $\sigma^{\mu_{AA}} = [B, (\mu_{AA}, 1 - \mu_{AA}, 0, 0)]$ es equilibrio, cuyo pago es $U(\sigma^{\mu_{AA}}) = [7\mu_{AA}, (2, 2\mu_{AA})]$
- Si $\mu_{AA} \in \left[\frac{2}{3}, 1\right)$, entonces $\sigma^{\mu_{AA}} = [B, (\mu_{AA}, 0, 1 - \mu_{AA}, 0)]$ es equilibrio, cuyo pago es $U(\sigma^{\mu_{AA}}) = [7\mu_{AA}, (2\mu_{AA}, 2)]$

En este juego coalicional G_R solamente se conservaron 5 de los 7 equilibrios de Nash del juego G, pues al formar un solo equipo los jugadores 2 y 3 se eliminó la posibilidad de que ambos jugadores eligieran simultáneamente la estrategia (B, B), por lo cual los equilibrios σ^1 y σ^4 de G no pueden ser alcanzados.

De esto, se puede ver que aunque la cantidad de equilibrios de G_R es mayor que los de G, no todo equilibrio de G es equilibrio de G_R.

Si $R = N$, entonces el conjunto de pagos alcanzables para la coalición es el politopo $\Pi = \{U(\sigma) : \sigma \in \Delta(S)\}$, y con esto el conjunto de equilibrios del juego G_R son las distribuciones $\mu \in \Delta(S)$ tales que $U(\mu) \in PO(\Pi)$.

Para los perfiles de estrategias (A, B, B), (B, A, B), (B, B, A), (B, B, B) del jugador R se satisface:

$$u\left[(A,B,B)\right]=(2,0,0)\ll(6,6,6)=u\left[(A,A,A)\right]$$
$$u\left[(B,A,B)\right]=(0,2,0)\ll(6,6,6)=u\left[(A,A,A)\right]$$
$$u\left[(B,B,A)\right]=(0,0,2)\ll(6,6,6)=u\left[(A,A,A)\right]$$
$$u\left[(B,B,B)\right]=(0,0,0)\ll(6,6,6)=u\left[(A,A,A)\right]$$

Con esto, dichos perfiles de estrategias no pueden pertenecer al conjunto de equilibrios del juego G_R, y por tanto el conjunto de estrategias para que se pueden jugar en un equilibrio es $S'=\{(A,A,A),(B,A,A),(A,B,A),(A,A,B)\}$, cuya región de pagos está dada por el politopo $\Pi'=\{U(\sigma):\sigma\in\Delta(S')\}$

Lo anterior se cumple ya que para cada estrategia $s\in S'$ no existe $t\in S'$ tal que $U(s)<U(t)$. En consecuencia se tiene que $PO(\Pi)=PO(\Pi')$. Por tanto si μ es un equilibrio de G_R entonces $U(\mu)\in PO(\Pi')$.

Dado que $PO(\Pi')$ se encuentra sobre la frontera del politopo Π', basta con buscar los equilibrios sobre esta región que está dada por las 4 caras del politopo:

- $C_1=\Delta\left(\{u\left[(A,A,A)\right],u\left[(B,A,A)\right],u\left[(A,B,A)\right]\}\right)$
- $C_2=\Delta\left(\{u\left[(A,A,A)\right],u\left[(B,A,A)\right],u\left[(A,A,B)\right]\}\right)$
- $C_3=\Delta\left(\{u\left[(A,A,A)\right],u\left[(A,B,A)\right],u\left[(A,A,B)\right]\}\right)$
- $C_4=\Delta\left(\{u\left[(B,A,A)\right],u\left[(A,B,A)\right],u\left[(A,A,B)\right]\}\right)$

Sin pérdida de generalidad defínanse sobre la cara C_1 las aristas

- $A_1(C_1)=\{\lambda u\left[(B,A,A)\right]+(1-\lambda)u\left[(A,B,A)\right]:\lambda\in[0,1]\}$
- $A_2(C_1)=\{\lambda u\left[(B,A,A)\right]+(1-\lambda)u\left[(A,A,A)\right]:\lambda\in[0,1]\}$
- $A_3(C_1)=\{\lambda u\left[(A,B,A)\right]+(1-\lambda)u\left[(A,A,A)\right]:\lambda\in[0,1]\}$

Denótese por $(A_1(C_1))^\circ$ al interior relativo de la arista $A_1(C_1)$, y defínase una función $f:(A_1(C_1))^\circ\to A_2(C_1)\cup A_3(C_1)$ mediante

- $f(x)=u\left[(A,A,A)\right]$ si $x=\frac{1}{2}\left[u\left[(B,A,A)\right]+u\left[(A,B,A)\right]\right]$
- Para $\lambda\in\left(0,\frac{1}{2}\right)$, $f(x)=2\lambda u\left[(B,A,A)\right]+(1-2\lambda)u\left[(A,A,A)\right]$ si
  $x=2\lambda u\left[(B,A,A)\right]+\left(\frac{1}{2}-\lambda\right)\left[u\left[(B,A,A)\right]+u\left[(A,B,A)\right]\right]$

- Para $\lambda \in \left(0, \frac{1}{2}\right)$, $f(x) = 2\lambda u[(A, B, A)] + (1 - 2\lambda) u[(A, A, A)]$ si
  $x = 2\lambda u[(A, B, A)] + \left(\frac{1}{2} - \lambda\right)[u[(A, B, A)] + u[(B, A, A)]]$

Esta función desplaza cada punto $x \in (A_1(C_1))^\circ$ sobre la cara C_1 en dirección $(3, 3, 8)$ hasta alcanzar un punto $f(x)$ sobre $A_2(C_1) \cup A_3(C_1)$ que satisface $f(x) \gg x$. En efecto:

- $x = \frac{1}{2}[u[(B, A, A)] + u[(A, B, A)]] = \left(\frac{9}{2}, \frac{9}{2}, 2\right) \ll (6, 6, 6) = u[(A, A, A)]$
- $x = 2\lambda u[(B, A, A)] + \left(\frac{1}{2} - \lambda\right)[u[(B, A, A)] + u[(A, B, A)]] =$
  $\left(\frac{9}{2}, \frac{9}{2}, 2\right) + \lambda(5, -5, 0) \ll (6, 6, 6) + 2\lambda(1, -4, -4) =$
  $2\lambda u[(B, A, A)] + (1 - 2\lambda) u[(A, A, A)] = f(x) \qquad \forall \lambda \in \left(0, \frac{1}{2}\right)$
- $x = 2\lambda u[(A, B, A)] + \left(\frac{1}{2} - \lambda\right)[u[(A, B, A)] + u[(B, A, A)]] =$
  $\left(\frac{9}{2}, \frac{9}{2}, 2\right) + \lambda(-5, 5, 0) \ll (6, 6, 6) + 2\lambda(-4, 1, -4) =$
  $2\lambda u[(A, B, A)] + (1 - 2\lambda) u[(A, A, A)] = f(x) \qquad \forall \lambda \in \left(0, \frac{1}{2}\right)$

Con esto, para cada $x \in (A_1)^\circ$ se cumple $x \notin PO(\Pi')$.

Dado que para cada $x \in (A_1(C_1))^\circ$ se cumple $x \ll f(x)$, entonces para cada $\lambda \in (0, 1)$ se satisface $y = \lambda x + (1 - \lambda) f(x) \ll f(x)$, por tanto se tiene que $y \notin PO(\Pi')$ para cada punto $y \in (C_1)^\circ$.

Por simetría del juego, lo mismo ocurre para las caras C_2 y C_3.

Como se cumple $x \ll f(x)$ para cada $x \in (A_1(C_1))^\circ$, $y \ll f(y)$ para cada $y \in (A_1(C_2))^\circ$ y $z \ll f(z)$ para cada $z \in (A_1(C_3))^\circ$, entonces $w = \lambda_1 x + \lambda_2 y + \lambda_3 z \ll \lambda_1 f(x) + \lambda_2 f(y) + \lambda_3 f(z)$ para cada $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \in [0, 1]$ tal que $\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 = 1$, y por tanto para todo punto $w \in (C_4)^\circ$ se tiene que $w \notin PO(\Pi')$.

Las distribuciones cuyos pagos se encuentran sobre las aristas de Π' que no han sido eliminadas están dadas por los conjuntos

- $\Delta^1 = \{[\mu(A, A, A), 1 - \mu(A, A, A), 0, 0] \in \Delta(S'), \mu(A, A, A) \in [0, 1]\}$
- $\Delta^2 = \{[\mu(A, A, A), 0, 1 - \mu(A, A, A), 0] \in \Delta(S'), \mu(A, A, A) \in [0, 1]\}$
- $\Delta^3 = \{[\mu(A, A, A), 0, 0, 1 - \mu(A, A, A)] \in \Delta(S'), \mu(A, A, A) \in [0, 1]\}$

Sin pérdida de generalidad, sean $\mu_1, \mu_2 \in \Delta^1$ tales que $\mu_1(A, A, A) > \mu_2(A, A, A)$. Entonces se satisface:

$$U_1(\mu_1) = 7 - \mu_1(A, A, A) < 7 - \mu_2(A, A, A) = U_1(\mu_2)$$
$$U_2(\mu_1) = 2 + 4\mu_1(A, A, A) > 2 + 4\mu_2(A, A, A) = U_2(\mu_2)$$

Por tanto $U(\mu_1) \not< U(\mu_2)$ y $U(\mu_1) \not> U(\mu_2)$.

De lo anterior, se tiene todo par de estrategias $\mu_1, \mu_2 \in \Delta^1$ es indiferente entre sí. Lo mismo ocurre para los conjuntos Δ^2 y Δ^3.

Sean $\mu_1 \in \Delta^1$, $\mu_2 \in \Delta^2$ y $\mu_3 \in \Delta^3$. Entonces se satisface:

1. $U_1(\mu_1) = 7 - \mu_1(A, A, A) > 2 + 4\mu_2(A, A, A) = U_1(\mu_2)$
2. $U_2(\mu_1) = 2 + 4\mu_1(A, A, A) < 7 - \mu_2(A, A, A) = U_2(\mu_2)$
3. $U_1(\mu_1) = 7 - \mu_1(A, A, A) > 2 + 4\mu_3(A, A, A) = U_1(\mu_3)$
4. $U_3(\mu_1) = 2 + 4\mu_1(A, A, A) < 7 - \mu_3(A, A, A) = U_3(\mu_3)$
5. $U_2(\mu_2) = 7 - \mu_2(A, A, A) > 2 + 4\mu_3(A, A, A) = U_2(\mu_3)$
6. $U_3(\mu_2) = 2 + 4\mu_2(A, A, A) < 7 - \mu_3(A, A, A) = U_3(\mu_3)$

De 1) y 2) se tiene que $U(\mu_1) \not< U(\mu_2)$ y $U(\mu_1) \not> U(\mu_2)$.
De 3) y 4) se tiene que $U(\mu_1) \not< U(\mu_3)$ y $U(\mu_1) \not> U(\mu_3)$.
De 5) y 6) se tiene que $U(\mu_2) \not< U(\mu_3)$ y $U(\mu_2) \not> U(\mu_3)$.
Con esto los conjuntos $\Delta^1, \Delta^2, \Delta^3$ son indiferentes entre sí.

Por tanto, el conjunto de equilibrios de G_R está dado por los conjuntos $\Delta^1 \cup \Delta^2 \cup \Delta^3$, los cuales incluyen a cada perfil de estrategias $s \in S'$.

Capítulo 5

Conclusiones

La aplicación de técnicas cooperativas para la resolución de juegos no cooperativos permite encontrar nuevas formas alternativas de jugar. Sin embargo, estas alternativas deben seguir tomando en cuenta que los jugadores aun tienen el poder para decidir jugar o no hacerlo de dicha forma.

Para poder plantear nuevas formas alternativas de jugar, se presentaron los principios teóricos fundamentales de juegos no cooperativos que serían necesarios para el desarrollo de éstas.

La inclusión de un mediador externo al juego es importante para que los jugadores tengan la oportunidad de utilizar estrategias que les permitan alcanzar pagos esperados mejores que los que se obtienen cuando juegan de manera independiente unos de otros. Dicho mediador debe siempre buscar la manera de que su propuesta sea aceptada por todos los jugadores, dándoles los incentivos necesarios para hacerlo.

El uso de contratos que los jugadores pueden tener la oportunidad de firmar o rechazar, dependiendo de los incentivos que ofrecen para hacerlo, fue una técnica utilizada para el planteamiento de una forma alternativa de jugar. Se buscaron las condiciones para definir un tipo de contrato que satisfaciera que la mejor opción para los jugadores siempre fuera firmar en lugar de rechazar dichos contratos, a los cuales se les dio el nombre de contratos ideales.

Una condición necesaria que se estableció para cumplir lo anterior es que cada vez que un jugador firmara un contrato de este tipo, el pago esperado por haber tomado esa decisión fuera mejor que el que se obtiene si jugara de acuerdo a un equilibrio de Nash del juego, y que cada vez que decidiera rechazar dicho contrato, se arriesgaba a obtener un pago esperado menor al mencionado anteriormente, para que así tuviera incentivos para firmar siempre el contrato.

De la definición de tales contratos, se encontraron algunas relaciones entre el comportamiento esperado de los jugadores en cada situación posible del juego derivado por la firma de un contrato ideal y el que siguen cuando juegan de acuerdo a un equilibrio correlacionado. La forma de jugar propuesta por el mediador para los jugadores que firman un contrato determina también la forma de jugar para aquellos que no lo hacen. Este comportamiento genera un equilibrio correlacionado, el cual satisface que la distribución marginal para los jugadores que rechazan el contrato sigue siendo independiente de aquellos que lo firmaron.

No en todos los juegos se puede definir un contrato de este estilo, dependiendo del equilibrio que se tome en cuenta para generarlo. Un aspecto que permite ayudar a determinar la existencia de tales contratos es la cantidad mínima de equilibrios del juego. También la localización del pago esperado de un equilibrio dentro de la región de pagos esperados de los equilibrios correlacionados podría ser determinante para alcanzar dicho objetivo.

Para saber cual estrategia elegir para la situación donde todos los jugadores firman el contrato ideal, se hizo uso de los modelos de negociación y se supuso que el mediador podría ayudarse de alguno de ellos, buscando entre los equilibrios correlacionados cuyos pagos esperados sean individualmente racionales respecto al pago esperado por jugar de acuerdo al equilibrio de Nash a partir del cual se generó dicho contrato, y encontrar dicha estrategia usando alguna de las soluciones de negociación clásicas.

Además se supuso que el mediador podría penalizar a los jugadores que rompieran dichos contratos, pues al ser acuerdos que les dan incentivos necesarios para firmarlos, no sería racional desviarse de las recomendaciones dadas por él. De esta forma, dependiendo del valor asignado a las penalizaciones de desviación, el mediador puede proponer a los jugadores mejores estrategias que les permiten obtener pagos que no se podían alcanzar anteriormente y que además son mejores en comparación a los alcanzados por los equilibrios de Nash, lo cual era el objetivo principal de esta tesis.

También se definió otra forma alternativa de jugar, en la cual los jugadores que eligen firmar el contrato deciden formar una coalición que juegue como un solo equipo contra aquellos no lo hicieron. Al jugar de esta forma, se preocupan ahora por el bienestar común en lugar del individual.

El conjunto de equilibrios generados por este nuevo comportamiento difiere de los mencionados anteriormente (de Nash y correlacionados), pues al jugar de manera conjunta los jugadores de dicha coalición, la desviación de estrategias también es conjunta y ya no individual.

Si todos los jugadores decidieran formar la coalición entonces podrían obtener cualquier pago del juego que fuera eficiente grupalmente. Sin embargo, si no se formara la gran coalición, aunque el pago esperado por jugar de esta manera fuera eficiente grupalmente para la coalición formada dado el comportamiento de los demás, podría no ser individualmente racional respecto al que obtendrían de manera independiente y entonces al menos uno de ellos saldría perdiendo.

En el capítulo final se presentaron algunos juegos no cooperativos clásicos (dilema del prisionero, batalla de los sexos, juego del gallina), los cuales sirvieron de apoyo para ejemplificar la forma de jugar de las nuevas alternativas propuestas.

Partiendo de los resultados generados en el desarrollo de esta tesis, se pueden proponer algunas líneas de investigación para trabajos futuros:

- Encontrar condiciones suficientes para la existencia de contratos ideales.
- La existencia de múltiples contratos que los jugadores puedan elegir firmar, para que así cada uno de ellos pueda jugar de acuerdo a las recomendaciones que pudiera hacerles un mediador, dependiendo de cual contrato decidan firmar.
- El comportamiento de los jugadores cuando se hace una partición arbitraria de ellos para que jueguen de manera conjunta de acuerdo al equipo que pertenezcan después de realizar la partición.

Bibliografía

[1] Maschler Michael, Solan Eilon, Zamir Schmuel. "Game Theory". USA: Cambridge University Press. (2013).

[2] Aumann Robert, Hart Sergiu. "Handbook of Game Theory with Economic Applications Volume 2". Netherlands: North-Holland. (1994).

[3] Aumann Robert, Hart Sergiu. "Handbook of Game Theory with Economic Applications Volume 3". Netherlands: North-Holland. (2002).

[4] Myerson Roger. "Game Theory: Analysis of Conflict". USA: Harvard University Press. (1997).

[5] Fernandez Ruíz Jorge. "Teoría de juegos: su aplicación en economía"México: El Colegio de México, Centro de Estudios Económicos. (2010).

[6] Franklin Joel. "Methods of Mathematical Economics: Linear and Nonlinear Programming, Fixed-Point Theorems". USA: Society for Industrial and Applied Mathematics. (2002).

[7] Viossat Yannick. *The geometry of Nash Equilibria and Correlated Equilibria and a Generalization of Zero-Sum Games.* Cahier du laboratoire d'économétrie, École polytechnique, Paris. (2003)

[8] Myerson Roger. *Dual Reduction and Elementary Games.* Games and Economic Behavior. (1997).

[9] Nau Robert, Gomez Canovas Sabrina, Hansen Pierre. *On the Geometry of Nash Equilibria and Correlated Equilibria.* International Journey of Game Theory. (2004).