

**Centro de Investigación en Matemática**



**ESTABILIZACIÓN Y SOLUCIÓN DE LAS ECUACIONES  
SAINT-VENANT UTILIZANDO CALCULO DE INCREMENTOS  
FINITOS**

*Tesis para obtener el grado de*  
**MAESTRO EN CIENCIAS CON ESPECIALIDAD EN  
MATEMÁTICAS APLICADAS**

*presenta:*

**Hugo Alfredo Carrillo Serrano**

*Director de Tesis:*

**Dr. Miguel Ángel Moreles Vázquez**

**2015 Guanajuato, Gto. México.**



A mi madre y padre: Martha Serrano

# Agradecimientos

A mi esposa Alma Bernice Gomez y mis hijos por estar conmigo en esta aventura.

Para los grandes amigos que CIMAT me permitió conocer: Javier Martinez , Wagner Badilla, Hugo Peña, Armando Albornoz, Alina Soltolongo, Fermin Reveles, Saul Infante y Daniel Teran, por compartir las alegrías, penas, trabajo, horas de estudio , pero sobre todo por no rendirse y no dejar que me rindiera.

En especial al Dr. Miguel Ángel Moreles de quien aprendí mucho y por permitirme ser parte de su grupo de trabajo.

Al Dr. Ricardo Vila coordinador del programa de posgrado, una excelente persona que busca siempre lo mejor para los estudiantes. le agradezco su apoyo y consejo.

Al CIMAT: Investigadores, profesores, Asistentes, Administrativos, Biblioteca, Computo, servicios generales y Mantenimiento, les doy las gracias.

Desde luego al CONACYT agradezco por su apoyo económico.

# Índice general

<b>Introducción</b>	<b>7</b>
<b>1. Ecuaciones Saint Venant Estabilizadas</b>	<b>9</b>
1.1. Modelo ecuaciones de Saint Venant . . . . .	9
1.1.1. Ecuaciones unidimensionales Saint Venant . . . . .	12
1.1.2. Sistemas hiperbólicos y Problema de Riemman en 1D . . . . .	18
1.2. Método del Cálculo de Incrementos Finitos . . . . .	20
<b>2. Discretización por el método de volumen finito</b>	<b>23</b>
2.1. Método de Volumen Finito . . . . .	23
2.2. Esquema de las ecuaciones SV estabilizadas . . . . .	26
2.3. Revisión de métodos clásicos . . . . .	35
2.3.1. Esquemas explícitos de primer orden . . . . .	35
2.3.2. Esquema de Roe . . . . .	38
2.3.3. Esquema de Szydlowski . . . . .	41
2.3.4. Comparación con métodos clásicos . . . . .	43

<b>3. Estimación de parámetros de estabilización</b>	<b>44</b>
3.1. Problemas con solución analítica . . . . .	44
3.1.1. Condiciones iniciales . . . . .	44
3.1.2. Condiciones de contorno . . . . .	45
3.1.3. Soluciones analíticas . . . . .	47
3.2. Parámetros Globales . . . . .	49
3.2.1. Dam break . . . . .	49
3.2.2. Curva suave . . . . .	54
3.3. Parámetros locales . . . . .	55
3.3.1. Algoritmo para estimación de parámetros locales . . . . .	56
3.3.2. Resultados - parámetro local . . . . .	59
<b>Conclusiones</b>	<b>64</b>
<b>Bibliografía</b>	<b>66</b>

# Introduccion

El modelo matemático usual para fluidos contenidos en canales a cielo abierto son las ecuaciones de Saint Venant (SV) , un sistema de ecuaciones diferenciales parciales hiperbólico con las variables de interés : velocidad, altura y caudal; incluye las fuentes y/o sumideros, contempla las interacciones entre las fuerzas de fricción y viscosidad del fluido con las paredes del contenedor. Existen diferentes versiones o adaptaciones del modelo, en este trabajo consideraremos una version especial de SV donde los términos fuente son nulos y se reduce a un caso especial de las leyes de conservación, las variables de interés ahora son llamadas variables de conservación.

Debido al carácter hiperbólico y no lineal en general no es posible determinar soluciones analíticas y los métodos numéricos son la vía clásica de solución. Sin embargo estos sistemas aun con condiciones iniciales suaves, puede generar *Shocks* o discontinuidades que dificultan la estabilidad y convergencia. Las estrategias para obtener soluciones numéricas se centran en esquemas muy particulares basados en métodos tales como Elemento Finito (MEF) y Volumen finito (MV),

El método *Finite Increment Calculus* ó FIC, permite obtener modelos alternativos que incluyen términos de orden mayor y parámetros que permiten estabilizar las soluciones y aun así sean aceptables en un contexto de la física del fenómeno y apegadas lo mas posible a la solución débil. Oñate en [1] aplica FIC en ecuaciones adveccion-difusion y demuestra que es equivalente a varios métodos tales como Petrov-Galerkin, Difusion artificial etc., propone ademas la búsqueda de parámetros adecuados mediante algoritmos iterativos o en casos especiales calcular los valores exactos del parámetro.

Por otro lado LeVeque [4], Toro[3] y Kröner [12] son textos especializados en la solución de sistemas de leyes de conservación; en ellos demuestran estabilidad y los buenos resultados obtenidos con los esquemas basados en el método de volumen finito, esto es evidenciado en trabajos como Szdlowsky [6], Bulatov [7], Parés [13], Gil Montoya [11] entre otros.

La idea base es aprovechar las ventajas de ambos métodos, aplicar FIC para estabilizar, después obtener esquemas de solución mediante el uso de volumen finito y por ultimo incluir en la solución la aplicación un algoritmo numérico propio que estime parámetros de forma local.

El desarrollo del trabajo se da como sigue:

- Capitulo 1: Se reproduce la modelación de las ecuaciones Saint Venant desde una perspectiva de la hidráulica clásica, posteriormente se replica el método FIC sobre SV e identificamos los parámetros de estabilización..
- Capitulo 2: Explicamos el proceso para obtener el esquema de solución numérica al aplicar Volumen Finito sobre las ecuaciones estabilizadas, en la segunda sección se estudian algunos métodos de primer orden similares al esquema SV-FIC, al final presentamos la equivalencia entre SV-FIC y los esquemas antes mencionados.
- Capitulo 3: En 2014 O. Bulatov presenta soluciones débiles actualizadas de los problemas clásicos introducidos por Strocker y Henderson en 1965 y 1966 respectivamente, que sirven de referencia para los esquemas numéricos emergentes. Comparamos las soluciones obtenidas con FIC + MVF contra algunas de estas soluciones analíticas y las resultantes de los esquemas Roe y Szydlowki. En una primera sección usamos parámetros globales, en un segundo apartado presentamos un algoritmo numérico que permite aproximar parámetros de manera local mejorando las soluciones originales de SV estabilizadas con parámetros globales.



# Capítulo 1

## Ecuaciones Saint Venant Estabilizadas

### 1.1. Modelo ecuaciones de Saint Venant

Las ecuaciones de Saint-Venant son presentadas por primera vez por el Ingeniero y Matemático francés Adhémar Jean Claude Barre de Saint-Venant en su trabajo: *Theorie du mouvement non permanent des eaux, avec application aux crues des rivières et à l'introduction des marées*, constan de un conjunto de ecuaciones diferenciales parciales que modelan los cambios de caudal, nivel del líquido y de la velocidad de un fluido incompresible que recorre un canal de superficie libre.

El modelo 1D se piensa en el contexto de la mecánica de medios continuos, fluido de densidad constante, newtoniano e incompresible. Suponemos la velocidad  $u(x, t)$  con solo componente horizontal significativa y para fines prácticos la componente la vertical es cero, en todo punto a lo largo de una recta perpendicular al cause canal para un punto fijo  $x_i$ . El supuesto es válido si el canal tiene amplitudes de onda relativamente pequeñas en comparación a la longitud del canal (esto se conoce como régimen de aguas someras), entonces una partícula que esta sobre el fondo seguirá una trayectoria sobre el fondo, es decir no existen turbulencias.

Las hipótesis son las siguientes:

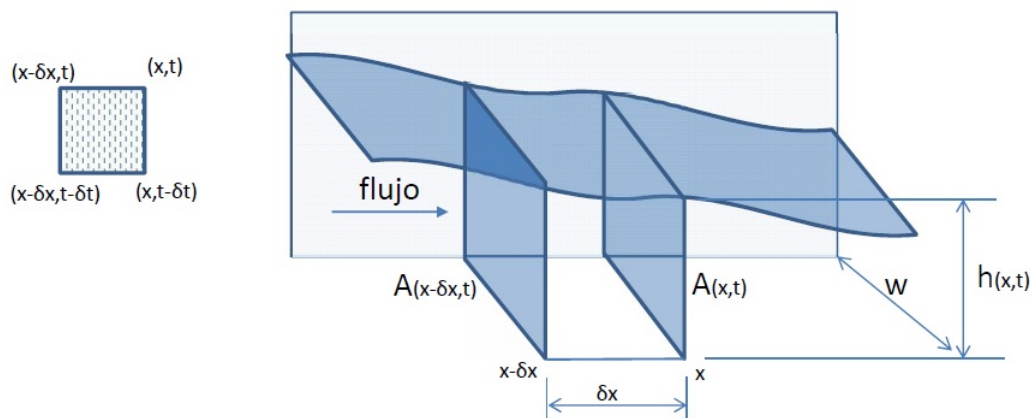
- Hipótesis de la hidrostática clásica: Considerar el medio continuo, incompresible, homogéneo y newtoniano, la incorporación de aire libre o gas es poco significativa sobre la fuerza de presión en la superficie.
- Solo actúa la fuerza de gravedad en el sistema, no se consideran las contribuciones de las fuerzas de inercia provocadas por la rotación de la tierra.
- Es un fenómeno de superficie libre.
- La alineación y la forma del cauce son arbitrarias pero sin variaciones bruscas en el canal, se excluyen cambios repentinos de secciones y/o incorporación de codos.
- La componente de la velocidad según las secciones transversales a la dirección de la descarga son pequeñas en comparación a las componentes longitudinales.
- No existen zonas de turbulencia o de transición, de laminar a turbulentas o viceversa, ni capas límite en desarrollo.
- Las componentes de la aceleración en las secciones transversales son despreciables.

- Los efectos disipativos de la turbulencia son despreciables. Esto es que la turbulencia solo se manifiesta como resistencia efectiva en el área de contacto.
  
- La distribución de velocidades es uniforme en cada sección transversal.
  
- La pendiente del fondo es pequeña. Por pequeña se entiende que el valor en radianes de la inclinación coincide aproximadamente con el seno del ángulo.

Dos formas clásicas explican el modelo SV; la primera de una simplificación del ecuaciones de *Navier – Stokes* que modela fluido newtonianos en general por una formulación integral, y la segunda a partir de las ecuaciones de *Euler*, que es un sistema de ecuaciones diferenciales parciales no lineales hiperbólicas para la dinámica de los gases en ausencia de aplicaciones de calor y/o viscosidad, la formulación es en base a las aproximaciones de las derivadas en lugar de la integral. Usamos la segunda para explicar la construcción del modelo 1D, pues desde una perspectiva de la mecánica de fluidos permite modelar el fenómeno en base a conceptos propios de la hidráulica y posteriormente resultara natural aplicar el método de cálculo de incrementos finitos o FIC por sus siglas en ingles.

### 1.1.1. Ecuaciones unidimensionales Saint Venant

El modelo Saint-Venant consta de dos ecuaciones diferenciales parciales, la ecuación de conservación de masa y conservación de momento. Para modelar cada una de ellas consideremos un fluido no permanente o transitorio sobre un canal abierto, de longitud  $L$ , ancho constante  $w$ , con flujo o caudal másico definido como  $q(x, t)$ , a una velocidad  $u(x, t)$ , altura de columna  $h(x, t)$  (estas tres últimas son nuestras variables de conservación i.e.  $h, u, q$ ) y pendiente en el fondo respecto a la horizontal del nivel de agua en reposo  $z(x)$ .



**Figura 1.1:** Izquierda celda de control. Derecha volumen de control  $\Omega$  de canal con pendiente baja, de altura  $h(x, t)$  y sección transversal  $A$ .

El cambio de volumen en una sección del canal  $\Omega$  de longitud  $\delta x$ , se estima como diferencia de caudal o flujo másico entre la entrada y salida de las caras laterales  $A(x, t)$  de  $\Omega$  en un intervalo de tiempo  $\delta t$ , esto es:

$$\Delta vol = [q(x, t) - q(x - \delta x, t)]\delta t, \quad (1.1)$$

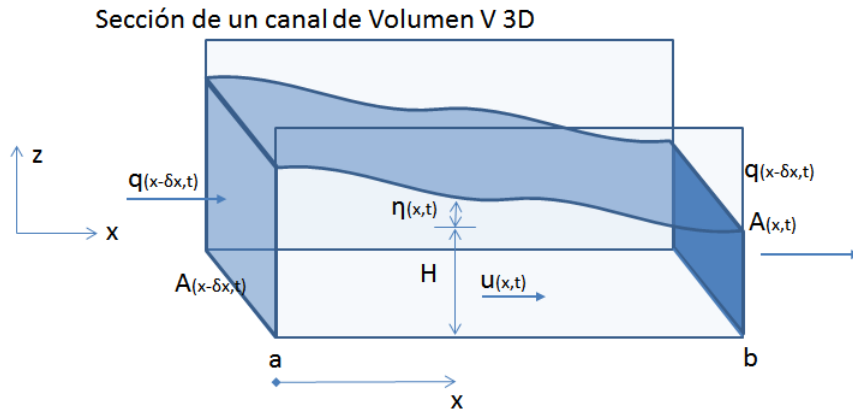
aproximamos  $q(x - \delta x, t)$  por serie de Taylor hasta los términos de primer orden

$$q(x - \delta x, t) \simeq q(x, t) + ((-\delta x) \frac{\partial q}{\partial x} + (0) \frac{\partial q}{\partial t}) \quad (1.2)$$

de lo anterior se obtiene

$$[q(x, t) - q(x - \delta x, t)] \delta t \simeq \delta x \frac{\partial q}{\partial x} \delta t$$

suponiendo que la *rebanada* o volumen de control  $\Omega$  es de un grosor  $\delta x$  suficientemente pequeño, el cambio de volumen puede estimarse también por el cambio de área en la sección transversal  $A(x, t)$  en el tiempo  $\delta t$  multiplicado por  $\delta x$



**Figura 1.2**

nuevamente con Taylor:

$$[A(x, t - \delta t) - A(x, t)] \delta x \simeq -\delta t \frac{\partial A}{\partial t} \delta x \quad (1.3)$$

se divide entre  $\delta x \delta t$ , al aplicar límites cuando  $\delta t \rightarrow 0$  se obtiene

$$\lim_{\delta t \rightarrow 0} \frac{A(x, t) - A(x, t - \delta t)}{\delta t} = \frac{\partial A}{\partial t}$$

igualamos los cambios de volumen

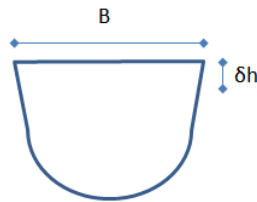
$$-\frac{\partial A}{\partial t} = \frac{\partial q}{\partial x}$$

el canal es de ancho fijo por tanto se considerara  $h$  (altura de la columna en el punto  $x$  al tiempo  $t$ ) en lugar de  $A$  y  $q$  en términos de  $h$  y  $u$

$$\frac{\partial h}{\partial t} + \frac{\partial(uh)}{\partial x} = 0 \quad (1.4)$$

esta es la ecuación de conservación de masa.

Una version alterna es considerar cambios en la sección transversal en función del ancho del canal. Sea  $g$  un flujo proveniente de fuentes o sumideros externos que aplican de forma transversal y el volumen de la sección aproximado por  $A(x, t)\delta x = B\delta h$ , entonces :



**Figura 1.3:** Canal con sección transversal variable en el ancho de canal en función de la altura del canal.

$$\frac{\partial h}{\partial t} + B \frac{\partial q}{\partial x} + g = 0$$

En la modelación de la ecuación de conservación de momento se consideran que existen componentes internas y externas que restan o suman fuerza al sistema, en el primer rubro se tienen los cambios de impulso causados por el cambio del caudal respecto al tiempo junto a los cambios en ímpetu que se experimentan en la salida/ entrada del volumen de control.

El impulso es simplemente una fuerza aplicada en un intervalo de tiempo, en el caso de fluidos se calculan como:

$$\rho q(x, t)\delta x - \rho q(x, t - \delta t)\delta x \simeq \rho \delta t \frac{\partial q}{\partial t} \delta x \quad (1.5)$$

otra fuente interna de impulso proviene de:

$$Impulso_{salida} - Impulso_{entrada} = \rho q u_{sal} - \rho q u_{ent}$$

o bien

$$[\rho q(x, t)u(x, t) - \rho q(x - \delta x, t)u(x - \delta x, t)]\delta t \simeq \rho \frac{\partial}{\partial x}(qu)\delta x \delta t \quad (1.6)$$

Las fuerzas externas que afectan directamente al fluido son :  $f_p$  fuerza de presión atmosférica sobre la superficie del flujo, la fuerza debido al peso de la sección de volumen  $f_w$ , y la componente de la fuerza de fricción que se presenta por las paredes del canal y el fluido  $f_r$ <sup>1</sup>.

Los componentes se definen de la siguiente manera:

Sea  $I$  la pendiente del fondo del canal, que por hipótesis es suave y de poca inclinación,

---

<sup>1</sup>En aguas someras o poco profundas este valor varía en proporción de la velocidad laminar y la humedad del contenedor, la fórmula de Manning es útil en estos casos para calcular el coeficiente de rugosidad en canales abiertos

$\gamma$  como el peso específico del fluido,  $\tau_0$  la tensión de corte sobre el perímetro mojado  $\Gamma$  en la dirección  $x$ , los impulsos que actúan en el volumen  $\Omega$  :

$$Im_{fp} = \gamma \Omega I_0 \delta t$$

$$Im_{fw} = \gamma \Omega I \delta t$$

$$Im_{fr} = -\tau_0 \Gamma \delta x \delta t$$

$I_0$  denota la pendiente de la superficie libre. Luego al realizar el balance de fuerzas sobre el volumen  $\Omega$

$$\left( \frac{\partial(Au)}{\partial t} + \frac{\partial(qu)}{\partial x} \right) \rho \delta x \delta t = Im_{fp} + Im_{fw} + Im_{fr} \quad (1.7)$$

luego como  $I = -\frac{\partial z}{\partial x}$ ,  $\gamma = \rho g$ . Dividimos (1.7) por  $\rho \delta t \delta x$ , y re-acomodamos de manera conveniente

$$\frac{\partial(Au)}{\partial t} + \frac{\partial(qu)}{\partial x} = g\Omega(I - I_0) - \tau_0 \Gamma$$

lo que implica

$$\frac{\partial q}{\partial t} + \frac{\partial qu}{\partial x} + Ag \frac{\partial z}{\partial x} - AgI_0 + \tau_0 \Gamma = 0$$

Si consideramos  $\Delta y = 1$ , y usamos la notación de hidráulica clásica tal como en ( ver **Stokes** ),  $gS_f = \tau_0 \Gamma$  y  $S_0 = AI_0$ , obtenemos:

$$\frac{\partial q}{\partial t} + \frac{\partial qu}{\partial x} + Ag \frac{\partial z}{\partial x} - g(S_0 - S_f) = 0$$



podemos escribir  $h$  en lugar de  $A$  y  $z$  en función de  $h$ . Luego

$$\frac{\partial(uh)}{\partial t} + \frac{\partial(u^2h)}{\partial x} + hg\frac{\partial h}{\partial x} - g(S_0 - S_f) = 0 \quad (1.8)$$

con (1.4) y (1.8) obtenemos el sistema de ecuaciones de Saint Venant 1D en forma compacta:

Sea  $U$  es el vector de las variables de conservación,  $F(U)$  el vector flujo y  $G(U)$  el término fuente,

$$\frac{\partial U}{\partial t} + \frac{\partial F(U)}{\partial x} = G$$

$$U = \begin{bmatrix} h \\ uh \end{bmatrix}, \quad F = \begin{bmatrix} uh \\ u^2h + gh^2/2 \end{bmatrix}, \quad G = \begin{bmatrix} 0 \\ g(S_0 - S_f) \end{bmatrix}$$

### 1.1.2. Sistemas hiperbólicos y Problema de Riemman en 1D

**Definición: Sistema hiperbólico**

$$\frac{\partial U}{\partial t} + \frac{\partial F(U)}{\partial x} = 0$$

Es hiperbólico si  $F(U) \in C^1(\mathbb{R}^2, \mathbb{R}^2)$  y  $DF(U)$  tiene únicamente eigenvalores reales (distintos), para toda  $U \in \mathbb{R}^2$

el sistema de ecuaciones de Saint Venant al escribirse de forma cuasi lineal

$$\frac{\partial U}{\partial t} + \frac{\partial F(U)}{\partial U} \frac{\partial U}{\partial x} = 0$$

$$A(U) = \frac{\partial F(U)}{\partial U}$$

$q$  es el flujo másico, equivalente a  $q(x, t) = h(x, t)u(x, t)$ , luego se escribe a  $F(U)$  como:

$$U = \begin{bmatrix} h \\ q \end{bmatrix}, \quad F(u) = \begin{bmatrix} q \\ \frac{q^2}{h} + gh^2/2 \end{bmatrix}$$

al derivar  $F(U)$  respecto a  $U$  resulta

$$\frac{\partial F(U)}{\partial U} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ \frac{-q^2}{h^2} + gh & \frac{2q}{h} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -u^2 + gh & 2u \end{bmatrix} \quad (1.9)$$

los eigenvalores se calculan resolviendo la ecuación característica

$$\lambda_1 = u + \sqrt{gh}, \quad \lambda_2 = u - \sqrt{gh}, \quad (1.10)$$

luego los vectores propios correspondientes son:

$$r_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ u + c \end{bmatrix}, \quad r_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ u - c \end{bmatrix}$$

donde  $c = \sqrt{gh}$ , por tanto SV es un sistema estrictamente hiperbólico.

### **Definición: Problema de Riemman**

Un sistema de conservación de la forma:

$$\frac{\partial U}{\partial t} + \frac{\partial F(U)}{\partial x} = 0$$

con las condiciones iniciales

$$U(x, 0) = \begin{cases} U_l & \text{si } x > 0 \\ U_r & \text{si } x < 0 \end{cases}$$

es un problema de Riemman.

## 1.2. Método del Cálculo de Incrementos Finitos

El método FIC o Finite Increment Calculus, consiste básicamente es tomar el modelo original del sistema de ecuaciones y sobre un dominio de tamaño finito se aproximan las variables con términos de mayor orden, los cuales resultan luego de algunas consideraciones coeficientes que actúan como parámetros libres que permiten estabilizar la solución numérica. La intención es que numéricamente la solución mejore su comportamiento sobre simulaciones en mallados gruesos o a tiempos largos de simulación sin sobrepasar las condiciones CFL, o bien *estabilizar* las regiones donde la solución numérica tiene variaciones drásticas, que no son aceptables en el fenómeno físico descrito por el sistema.

Las ecuaciones estabilizadas son:

$$\frac{\partial U}{\partial t} + \frac{\partial F(U)}{\partial x} - \frac{1}{2} \left( \delta_t \frac{\partial^2 U}{\partial t^2} + \delta_x \frac{\partial^2 F(U)}{\partial x^2} \right) = G \quad (1.11)$$

donde

$$U = \begin{bmatrix} h \\ uh \end{bmatrix} \quad F = \begin{bmatrix} uh \\ u^2h + gh^2/2 \end{bmatrix}, \quad G = \begin{bmatrix} 0 \\ g(S_0 - S_f) \end{bmatrix}$$

Los parámetros  $\delta t, \delta x$  que se calculan en la referencia[1] son estimados para la ecuacion adveccion-difusion de calor con técnicas numéricas iterativas, en otros trabajos de investigación se logró calcular este parámetro de forma analítica para casos de ecuaciones muy específicas, tal es el caso de Moreles [2], por ahora mostraremos como se obtiene (1.11) al aplicar FIC en SV y en el capítulo tres retomaremos el calculo de parámetros.

Suponemos que las soluciones son suficientemente suaves, sobre un volumen de tamaño finito se realiza el balance de masa y momento como en (1.2) pero extendiendo las aproximaciones con

términos de segundo orden. Para la ecuación de masa

$$q(x - \delta x, t) = q(x, t) - \frac{\partial q}{\partial x} \delta x + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 q}{\partial x^2} \delta x^2$$

usamos lo anterior para calcular  $\Delta q$  al tiempo  $\delta t$

$$[q(x, t) - q(x - \delta x, t)] \delta t = \frac{\partial q}{\partial x} \delta x \delta t - \frac{1}{2} \frac{\partial^2 q}{\partial x^2} \delta x^2 \delta t \quad (1.12)$$

el cambio de masa en la sección transversal en el tiempo  $t - \delta t$  se escribe

$$A(x, t - \delta t) = A(x, t) - \delta t \frac{\partial A}{\partial t} + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 A}{\partial t^2} \delta t^2$$

entonces el cambio volumétrico en el intervalo finito  $\delta x$  lo escribimos como:

$$[A(x, t - \delta t) - A(x, t)] \delta x = -\frac{\partial A}{\partial t} \delta x \delta t + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 A}{\partial t^2} \delta t \delta t^2 \quad (1.13)$$

hacemos el balance de con las ecuaciones 1.12 y 1.13

$$\frac{\partial q}{\partial x} \delta x \delta t - \frac{1}{2} \frac{\partial^2 q}{\partial x^2} \delta x^2 \delta t = -\frac{\partial A}{\partial t} \delta x \delta t + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 A}{\partial t^2} \delta t \delta t^2$$

y nuevamente consideramos es de ancho constante

$$\frac{\partial h}{\partial t} - \delta t \frac{1}{2} \frac{\partial^2 h}{\partial t^2} + \frac{\partial q}{\partial x} - \delta x \frac{1}{2} \frac{\partial^2 q}{\partial x^2} = 0 \quad (1.14)$$

Para la segunda ecuación de SV al considerar en (1.5) una aproximación por segundo orden

$$\rho q(x - \delta x, t) u(x - \delta x, t) \simeq \rho q(x, t) u(x, t) - \rho \frac{\partial}{\partial x} (qu) \delta x + \rho \frac{1}{2} \frac{\partial^2 (qu)}{\partial x^2} \delta x^2$$

y en (1.6) similar

$$\rho q(x, t)u(x, t)\delta t - \rho q(x - \delta x, t)u(x - \delta x, t)\delta t \simeq \rho \frac{\partial}{\partial x}(qu)\delta x\delta t - \rho \frac{1}{2} \frac{\partial^2(qu)}{\partial x^2} \delta x^2 \delta t$$

Los terminos de fuerzas externas (1.8), con series de segundo orden y con los términos como en **Stokes**  $gS_f = \tau_0$  y  $S_0 = AI_0$  obtenemos

$$\frac{\partial q}{\partial t} - \frac{\delta t}{2} \frac{\partial^2 q}{\partial t^2} + \frac{\partial qu}{\partial x} - \frac{\delta x}{2} \frac{\partial^2(qu)}{\partial x^2} + Ag \frac{\partial z}{\partial x} - \frac{\delta x}{2} \frac{\partial}{\partial x} \left( Ag \frac{\partial z}{\partial x} \right) - g(S_0 - S_f) = 0$$

o bien

$$\frac{\partial(uh)}{\partial t} - \frac{\delta t}{2} \frac{\partial^2(uq)}{\partial t^2} + \frac{\partial(u^2h)}{\partial x} - \frac{\delta x}{2} \frac{\partial^2(u^2h)}{\partial x^2} + hg \frac{\partial h}{\partial x} - \frac{\delta x}{2} \frac{\partial}{\partial x} \left( hg \frac{\partial h}{\partial x} \right) - g(S_0 - S_f) = 0 \quad (1.15)$$

Con (1.15) y (1.14) obtenemos las ecuaciones SV estabilizadas. Note que si  $\delta x \rightarrow 0$  y  $\delta t \rightarrow 0$  el sistema se reduce a las ecuaciones SV originales 1.11.

## Capítulo 2

# Discretización por el método de volumen finito

Usamos el método de Volumen finito ó MVF por que sus propiedades localmente conservativas son adecuadas en los problemas de transporte.

### 2.1. Método de Volumen Finito

El método de volumen finito es un caso especial de método de residuos pesados, la idea es la siguiente:

Consideremos una ecuación diferencial  $L(\psi)$ , con una solución aproximada  $\tilde{\psi}$  por:

$$\tilde{\psi} = c_0 + c_1x + \dots c_mx^m$$

la solución produce un residuo  $Re$

$$Re = L(\tilde{\psi})$$

luego se define  $W$  una función de peso, de tal manera que

$$\int W Re dx = 0$$

lo ideal es que el residuo sea lo más pequeño posible en valor absoluto, el uso de funciones  $W$  especiales dan lugar a diversas versiones del método, si se toma  $W = 1$  de tal forma que tenga peso solo sobre la celda de integración y cero en los otros lugares da lugar al MVF.

El método consta de cuatro etapas:

1. **Generación de la malla** El dominio se discretiza en un número de volúmenes de control no sobrepuestos, de tal manera que existe un volumen rodeando a cada punto de la malla.
2. **Integración** Se integran las ecuaciones gobernantes sobre cada volumen de control
3. **Discretización** Discretizamos cada término resultante de la integración usando distintos esquemas numéricos, esto produce un sistema algebraico de ecuaciones.
4. **Solución** Se utiliza algún algoritmo para resolver el sistema algebraico de ecuaciones.

El primer paso para sistemas 1D en MVF es dividir un dominio espacial-temporal en intervalos o celdas  $c_i$  de una forma especial.



Sea  $L = [a, b] \times [t_1, t_2]$  la región donde se requiere la solución, para lo cual se toman las variables independientes de la forma discreta:

espacio

$$x = (x_0, x_1, \dots, x_i, x_{N-1}, x_N), 0 \leq i \leq N \text{ tal que } x_0 = a, x_N = b$$

tiempo

$$t = (t_0, t_1, \dots, t_n, t_{k-1}, t_k),$$

$$0 \leq n \leq k$$

tal que  $t_0 = t_1, t_k = t_2$

*No necesariamente espaciados uniformemente*

entonces cada celda toma la forma:  $c_i = [x_{i-1/2}, x_{i+1/2}] \times [t_n, t_{n+1}]$ .

El paso dos y tres requieren explicar a detalle los procesos de la deducción del esquema para soluciones de sistemas hiperbólicos.

## 2.2. Esquema de las ecuaciones SV estabilizadas

Definidos los dominios de las celdas como antes, en cada  $(x_i, t^n)$  de la malla, se integran las ecuaciones sobre el  $c_i^n$  correspondiente, es decir

$$\int_{t_n}^{t_{n+1}} \int_{x_{i-1/2}}^{x_{i+1/2}} \left( \frac{\partial}{\partial t} U + \frac{\partial}{\partial x} F(U) - \frac{1}{2} \delta_t \frac{\partial^2}{\partial t^2} U - \frac{1}{2} \delta_x \frac{\partial^2}{\partial x^2} F(U) \right) dx dt = 0 \quad (2.1)$$

consideramos que  $\delta_x$   $\delta_t$  en  $c_i^n$  son constantes para cada celda, y reacomodamos convenientemente

$$\int_{c_i^n} \frac{\partial}{\partial t} U - \frac{1}{2} \delta_t \int_{c_i^n} \frac{\partial^2}{\partial t^2} U + \int_{c_i^n} \frac{\partial}{\partial x} F(U) - \frac{1}{2} \delta_x \int_{c_i^n} \frac{\partial^2}{\partial x^2} F(U) = 0 \quad (2.2)$$

cada termino de la integral se aproxima de la siguiente forma:

### a) Aproximación de la integral del termino de advección temporal

En fluidos las variables de conservación físicamente deben describir un fenómeno continuo, es decir las variables son continuas al menos en la región de solución propuesta y como la integral es en un compacto, podemos intercambiar el orden de integración en los términos que nos convenga. El primer elemento incluye la derivada temporal de la variable de conservación, al intercambiar el orden de integración nos permite escribirlo como:

$$\int_{c_i^n} \frac{\partial}{\partial t} U = \int_{x_{i-1/2}}^{x_{i+1/2}} (U^{n+1} - U^n) dx \quad (2.3)$$

se aproxima la integral resultante con una regla la cuadratura de punto medio:

$$\int_{x_{i-1/2}}^{x_{i+1/2}} (U^{n+1} - U^n) dx \simeq \Delta x (V_i^{n+1} - V_i^n)$$

donde  $\Delta x = x_{i+1/2} - x_{i-1/2}$  y  $V_i^n$  es el valor numérico promedio de la variable de conservación  $U$  al tiempo  $n$  en la celda  $i$

### b) Aproximación del termino de advección espacial

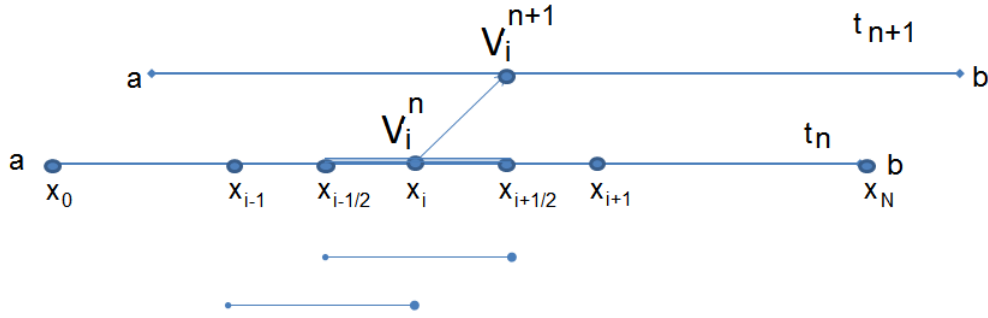


Figura 2.1

La primer integral es directa por el teorema fundamental del cálculo

$$\int_{c_i^n} \frac{\partial}{\partial x} F(U) = \int_{t_n}^{t_{n+1}} (F(V_{i+1/2}) - F(V_{i-1/2})) dt \quad (2.4)$$

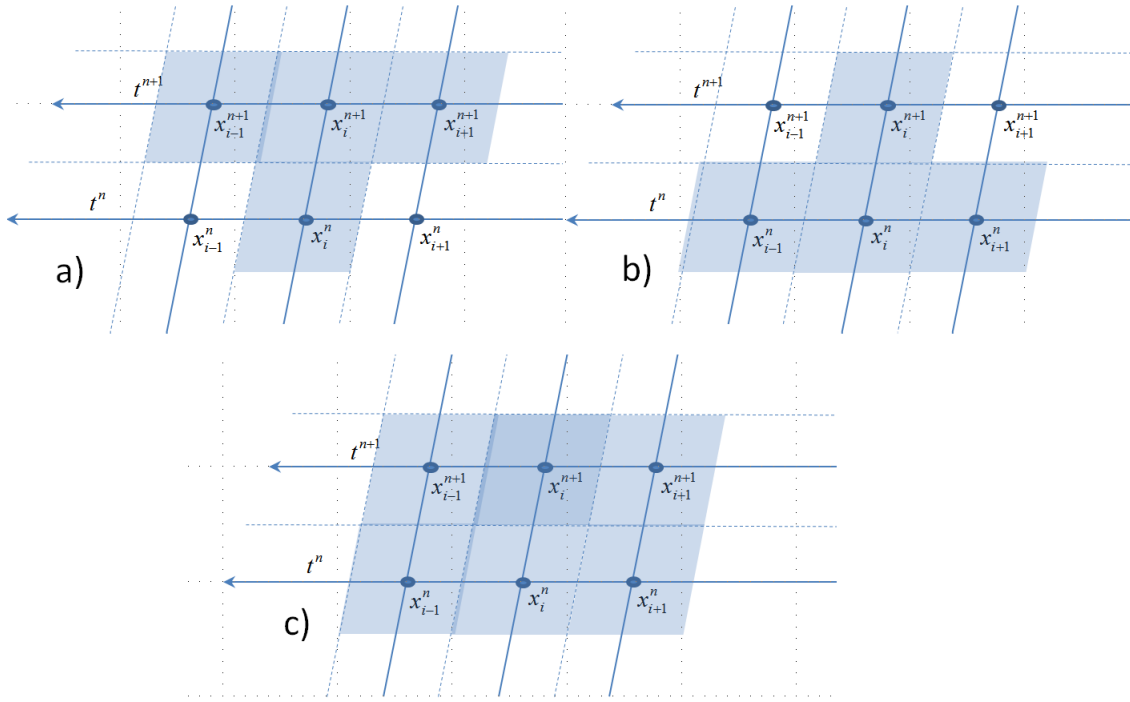
la segunda parte de la integración no es tan simple de calcularla, una de las dificultades reside en estimar el cambio del flujo en los puntos medios respecto al tiempo, es decir una solución numérica para:

$$R_{i+1/2} = \frac{1}{\Delta t} \int_{t_n}^{t_{n+1}} (F(V_{i+1/2})) dt$$

como el flujo debe cambiar a una razón finita, podemos estimar a  $F(V_{i+1/2})$  en función de los valores  $V_{x_k}^{t_j}$ , con  $k = (i - 1, i, i + 1)$  y  $j = (n, n + 1)$ , de la vecindad del punto  $x_{i+1/2}$ , para la integral respecto al tiempo con alguna cuadratura, aunado al método teta para solventar esta situación, el esquema es versátil en el sentido que permite esquemas explícito, implícito o semi implícito.

a) Implícito; estima  $F$  en función de  $V_{i-1}^{n+1}$ ,  $V_i^{n+1}$  y  $V_{i+1}^{n+1}$

b) Explícito; estima  $F$  en función de  $V_{i-1}^n$ ,  $V_i^n$  y  $V_{i+1}^n$



**Figura 2.2:**  $R_i^n$  el flujo en la cara de la celda  $i$ , a tiempo  $n$  se puede estimar con los valores promedios de la variable de conservación de las celdas vecinas, como se representa en el gráfico.

- c) Semi-Implícito; en función de  $V_{i-1}$ ,  $V_i$  y  $V_{i+1}$  de las celdas vecinas tanto en  $t^{n+1}$  como en  $t^n$ , el peso que se les asigne dependerá del parámetro  $\theta \in [0, 1]$ , en particular si se usa  $\theta = 0.5$ , el esquema es conocido como Crank Nicolson.

Luego de este procedimiento en (2.4) se realizan las sustituciones

$$\int_{t_n}^{t_{n+1}} (F(V_{i+1/2}) - F(V_{i-1/2})) dt$$

$$= \theta \Delta t \left( F(V_{i+1/2}^{n+1}) - F(V_{i-1/2}^{n+1}) \right) + \Delta t (1 - \theta) \left( F(V_{i+1/2}^n) - F(V_{i-1/2}^n) \right)$$

aún nos queda el problema de estimar el flujo en las caras de  $\Omega_i$ . La solución simple es tomar el

valor promedio de los flujos en las celdas vecinas (*forma centrada*) a cada cara del volumen

$$F(V_{i+1/2}^n) = \frac{1}{2}[F(V_{i+1}^n) + F(V_i^n)]. \quad (2.5)$$

Para flujos en el tiempo  $t^{n+1}$ , como serie de Taylor

$$F(V_i^{n+1}) = F(V_i^n) + A(V)_i^n (V_i^{n+1} - V_i^n) \quad (2.6)$$

donde  $A = F'(V)$ , es el Jacobiano de  $F$ . Con (2.6), (2.5) y el método teta en (2.4), obtenemos la aproximación numérica de la integral

$$\begin{aligned} \int_{t_n}^{t_{n+1}} (F(V_{i+1/2}) - F(V_{i-1/2})) dt &\simeq \frac{\theta}{2} \Delta t [F(V_{i+1}^n) - F(V_{i-1}^n)] \\ &+ A_{i+1}^n (V_{i+1}^{n+1} - V_{i+1}^n) - A_{i-1}^n (V_{i-1}^{n+1} - V_{i-1}^n) + \frac{(1-\theta)}{2} \Delta t [F(V_{i+1}^n) - F(V_{i-1}^n)] \\ &= \frac{\theta}{2} \Delta t [A_{i+1}^n (V_{i+1}^{n+1} - V_{i+1}^n) - A_{i-1}^n (V_{i-1}^{n+1} - V_{i-1}^n)] + \frac{1}{2} \Delta t [F(V_{i+1}^n) - F(V_{i-1}^n)] \end{aligned}$$

### c) Aproximación de la integral en el termino de difusión temporal

Nuevamente como en (b) se invierte el orden de la integral, y aplicamos el TFC

$$\int_{c_i^n} \frac{\partial^2}{\partial t^2} U = \int_{x_{i-1/2}}^{x_{i+1/2}} \left( \frac{\partial}{\partial t} U^{n+1} - \frac{\partial}{\partial t} U^n \right) dx \quad (2.7)$$

solo se puede acceder a los valores de  $U_i^{t_0}$  dados por la condición inicial, y los valores  $V_i^{t_0+1}$  en cada solución numérica, así que lo lógico es aproximar el valor numérico de la derivada temporal

con estos datos para toda  $i$ , la propuesta es la siguiente:

de la ecuación SV sin estabilizar

$$\frac{\partial}{\partial t} U + \frac{\partial}{\partial x} F(U) = 0 \quad (2.8)$$

de manera convenientemente la ecuación la escribimos como

$$\frac{\partial}{\partial t} U = - \frac{\partial}{\partial x} F(U) \quad (2.9)$$

con el resultado anterior en la ecuación (2.7)

$$\int_{x_{i-1/2}}^{x_{i+1/2}} \left( \frac{\partial}{\partial t} U^{n+1} - \frac{\partial}{\partial t} U^n \right) dx = \int_{x_{i-1/2}}^{x_{i+1/2}} \left( \frac{\partial}{\partial x} F(U^n) - \frac{\partial}{\partial x} F(U^{n+1}) \right) dx \quad (2.10)$$

la integral del flujo se calcula como en (2.4)

$$\int_{x_{i-1/2}}^{x_{i+1/2}} \left( \frac{\partial}{\partial x} F(U^n) - \frac{\partial}{\partial x} F(U^{n+1}) \right) dx = F(V_{i+1/2}^n) - F(V_{i-1/2}^n) - F(V_{i+1/2}^{n+1}) + F(V_{i-1/2}^{n+1})$$

nuevamente con (2.6), (2.5) en la ecuación anterior, consideramos la derivada del flujo como el Jacobiano de  $F$  al tiempo  $t^{n+1}$

$$A_{i+1/2}^{n+1} = A_{i+1/2}^n$$

luego

$$\begin{aligned}
& F(V_{i+1/2}^n) - F(V_{i-1/2}^n) - F(V_{i+1/2}^{n+1}) + F(V_{i-1/2}^{n+1}) = \\
& \frac{1}{2} (F(V_{i+1}^n) - F(V_{i-1}^n)) - \frac{1}{2} (F(V_{i+1}^{n+1}) - F(V_{i-1}^{n+1})) \\
& = \frac{1}{2} (F(V_{i+1}^n) - F(V_{i-1}^n)) \\
& - \frac{1}{2} ((F(V_{i+1}^n) + A_{i+1}^n(V_{i+1}^{n+1} - V_{i+1}^n)) - (F(V_{i-1}^n) + A_{i-1}^n(V_{i-1}^{n+1} - V_{i-1}^n))) \\
& = -\frac{1}{2} (A_{i+1}^n(V_{i+1}^{n+1} - V_{i+1}^n) - A_{i-1}^n(V_{i-1}^{n+1} - V_{i-1}^n))
\end{aligned}$$

finalmente la integral toma la forma

$$\int_{c_i^n} \frac{\partial^2}{\partial t^2} U \simeq \frac{1}{2} (A_{i-1}^n(V_{i-1}^{n+1} - V_{i-1}^n) - A_{i+1}^n(V_{i+1}^{n+1} - V_{i+1}^n)). \quad (2.11)$$

**d) Aproximación de la integral al término de difusión espacial**

La primer parte de la integral puede calcularse directamente:

$$\int_{c_i^n} \frac{\partial^2}{\partial x^2} F(U) = \int_{t_n}^{t_{n+1}} \left( \frac{\partial F(V_{i+1/2})}{\partial x} - \frac{\partial F(V_{i-1/2})}{\partial x} \right) dt \quad (2.12)$$

ahora conviene expresar a la derivada del flujo en las caras como:

$$\frac{\partial F(V_{i+1/2})}{\partial x} = A_{i+1/2} \frac{\partial V_{i+1/2}}{\partial x}$$

la derivada resultante se estima con diferencias hacia adelante

$$\frac{\partial F(V_{i+1/2})}{\partial x} = A_{i+1/2} \frac{V_{i+1} - V_i}{\Delta x}$$

$A_{i+1/2}$  debe escribirse en función de valores de las celdas laterales, es una buena estrategia utilizar los promedios de *Roe* que explicaremos mas adelante.

Luego se toman el valor de las variables de conservación en los puntos intermedios como el promedio de las celdas laterales

$$\frac{\partial f(q)_{i+1/2}}{\partial x} - \frac{\partial f(q)_{i-1/2}}{\partial x} = \frac{A_{i+1/2}}{\Delta x} V_{i+1} - \frac{A_{i+1/2} + A_{i-1/2}}{\Delta x} V_i + \frac{A_{i-1/2}}{\Delta x} V_{i-1}$$

aplicamos método teta al integrar respecto al tiempo y asumimos que para tiempos cortos es valido escribir;

$$A_{i+1/2}^{n+1} = A_{i+1/2}^n$$

luego



$$\int_{t_n}^{t_{n+1}} \left( \frac{\partial F(V_{i+1/2})}{\partial x} - \frac{\partial F(V_{i-1/2})}{\partial x} \right) dt =$$

$$\frac{\theta \Delta t}{\Delta x} (A_{i+1/2}^n V_{i+1}^{n+1} - (A_{i+1/2}^n + A_{i-1/2}^n) V_i^{n+1} + A_{i-1/2}^n V_{i-1}^{n+1})$$

$$+ \frac{(1-\theta) \Delta t}{\Delta x} (A_{i+1/2}^n V_{i+1}^n - (A_{i+1/2}^n + A_{i-1/2}^n) V_i^n + A_{i-1/2}^n V_{i-1}^n)$$

finalmente se sustituye (2.3),(2.4),(2.7) y (2.12) en (2.2)

$$\int_{c_i^n} \frac{\partial}{\partial t} U - \frac{1}{2} \delta_t \int_{c_i^n} \frac{\partial^2}{\partial t^2} U + \int_{c_i^n} \frac{\partial}{\partial x} F(U) - \frac{1}{2} \delta_x \int_{c_i^n} \frac{\partial^2}{\partial x^2} F(U) =$$

$$\Delta x (V_i^{n+1} - V_i^n) - \frac{\delta_t}{4} (A_{i-1}^n (V_{i-1}^{n+1} - V_{i-1}^n) - A_{i+1}^n (V_{i+1}^{n+1} - V_{i+1}^n))$$

$$+ \frac{\theta \Delta t}{2} [A_{i+1}^n (V_{i+1}^{n+1} - V_{i+1}^n) - A_{i-1}^n (V_{i-1}^{n+1} - V_{i-1}^n)] + \frac{\Delta t}{2} [F(V_{i+1}^n) - F(V_{i-1}^n)]$$

$$- \frac{\theta \Delta t \delta_x}{2 \Delta x} (A_{i+1/2}^n V_{i+1}^{n+1} - (A_{i+1/2}^n + A_{i-1/2}^n) V_i^{n+1} + A_{i-1/2}^n V_{i-1}^{n+1})$$

$$- \frac{(1-\theta) \Delta t \delta_x}{2 \Delta x} (A_{i+1/2}^n V_{i+1}^n - (A_{i+1/2}^n + A_{i-1/2}^n) V_i^n + A_{i-1/2}^n V_{i-1}^n).$$

En forma compacta

$$B_W V_{i-1}^{n+1} + B_P V_i^{n+1} + B_E V_{i+1}^{n+1} = B_w V_{i-1}^n + B_p V_i^n + B_e V_{i+1}^n + F_s \quad (2.13)$$

$B_{2x2}, F_s, V \in \mathbb{R}^2$ .

Las matrices correspondientes son:

$$B_W = -\frac{\Delta t}{2\Delta x} \theta \left( A_{i-1}^n + \frac{\delta x}{\Delta x} A_{i-1/2}^n \right) - \frac{\delta t}{4\Delta x} A_{i-1}^n$$

$$B_P = I + \frac{\theta \delta x \Delta t}{2\Delta x^2} (A_{i+1/2}^n + A_{i-1/2}^n)$$

$$B_E = \frac{\Delta t}{2\Delta x} \theta \left( A_{i+1}^n - \frac{\delta x}{\Delta x} A_{i+1/2}^n \right) + \frac{\delta t}{4\Delta x} A_{i+1}^n$$

$$B_w = -\frac{\Delta t}{2\Delta x} \left( \theta A_{i-1}^n - \frac{(1-\theta)\delta x}{\Delta x} A_{i-1/2}^n \right) - \frac{\delta t}{4\Delta x} A_{i-1}^n$$

$$B_p = I - \frac{\delta x \Delta t}{2\Delta x^2} (1-\theta) (A_{i+1/2}^n + A_{i-1/2}^n)$$

$$B_e = \frac{\Delta t}{2\Delta x} \left( \theta A_{i+1}^n + \frac{(1-\theta)\delta x}{\Delta x} A_{i+1/2}^n \right) + \frac{\delta t}{4\Delta x} A_{i+1}^n$$

$$F_s = -\frac{\Delta t}{2\Delta x} (F(V_{i+1}^n) - F(V_{i-1}^n)).$$

## 2.3. Revisión de métodos clásicos

Mostraremos que la discretización de SV estabilizadas coinciden con algunos esquemas clásicos al imponer valores especiales sobre los parámetros estabilización.

Partimos del esquema básico resultante al aplicar método de volumen finito en SV

$$V_i^{n+1} - V_i^n + \frac{\Delta t}{\Delta x} [F_{i+1/2} - F_{i-1/2}] = 0 \quad (2.14)$$

donde  $F_{i+1/2}$  es una aproximación del flujo presente en la pared de la celda  $i$ , en un incremento del tiempo:

$$F_{i+1/2} = \frac{1}{\Delta t} \int_{t_n}^{t_{n+1}} F(V_{i+1/2}) dt.$$

El problema de estimar las variables de conservación se reduce a elegir una estrategia de aproximar los flujos de las caras en cada celda, los esquemas propuestos deben como mínimo ser linealmente estables y consistentes, la estabilidad en los esquemas simples de primer orden se asegura con las condiciones CLF y para aquellos métodos que agregan términos de viscosidad artificial existe una variante de la misma condición CLF, se requiere además que cumplan con otras condiciones como lo veremos mas adelante.

### 2.3.1. Esquemas explícitos de primer orden

Un primer esquema para calcular el flujo numérico son los esquemas simples que toman información únicamente de las celdas contiguas al flujo que se quiere estimar, las opciones con orden uno son tres:

Unilateral por la izquierda:

$$F_{i+1/2} = \frac{1}{2} \Delta t (F(V_i^n) + F(V_{i-1}^n)).$$

Centrado:

$$F_{i+1/2} = \frac{1}{2} \Delta t (F(V_{i+1}^n) + F(V_{i-1}^n)).$$

Unilateral por derecha:

$$F_{i+1/2} = \frac{1}{2} \Delta t (F(V_{i+1}^n) + F(V_i^n)).$$

Una prueba simple de estabilidad que debe superar el esquema es que al menos sea estable con una  $F$  lineal. Si supera esta prueba se dice es estable, en caso contrario incondicionalmente inestable.

Supongamos  $F(U)$  lineal y de la forma  $f(u) = cu$ ,  $c$  constante real, en un numero finito de iteraciones, Un esquema es estable si, dado  $T > 0$ , existe  $K > 0$  independiente de  $\Delta x$ ,  $\Delta t$  tal que:

$$\sup_{i \in \mathbb{Z}} |u_i^n| \leq K \sup_{i \in \mathbb{Z}} |u_i^0|, \quad \forall n \leq \frac{T}{\Delta t}$$

para el esquema lineal 2.14) con  $F$  lineal y el flujo unilateral por la derecha

$$u_i^{n+1} = u_i^n - c \frac{\Delta t}{\Delta x} (u_{i+1}^n - u_i^n)$$

luego

$$|u_i^{n+1}| = |u_i^n (1 + c \frac{\Delta t}{\Delta x}) - c \frac{\Delta t}{\Delta x} u_{i+1}^n|$$

por la desigualdad del triangulo tenemos

$$|u_i^{n+1}| = |u_i^n| |1 + c \frac{\Delta t}{\Delta x}| + |c \frac{\Delta t}{\Delta x}| |u_{i+1}^n|$$

$$|u_i^{n+1}| = (1 + c \frac{\Delta t}{\Delta x} + |c \frac{\Delta t}{\Delta x}|) (\sup_{j \in \mathbb{Z}} |u_j^n|)$$

si suponemos  $c < 0$  y además

$$|c| \frac{\Delta t}{\Delta x} \leq 1$$

esta última expresión es llamada condición *Courant Frederich Lax* o simplemente CLF; entonces

$$|u_i^{n+1}| \leq \sup_{j \in \mathbb{Z}} |u_j^n|$$

por tanto

$$\sup_{j \in \mathbb{Z}} |u_j^n| \leq \sup_{j \in \mathbb{Z}} |u_j^0|$$

resulta un esquema unilateral por la derecha que es condicionalmente estable, pero si  $c > 0$  es incondicionalmente inestable, es fácil ver que si se aplica esta demostración sobre el esquema izquierdo, es condicionalmente estable si  $c > 0$ , e incondicionalmente inestable para  $c < 0$ , en consecuencia un esquema centrado no es estable en este sentido aún siendo más preciso en el cálculo de las variables numéricas.

$F(U)$  es no lineal en SV, no es linealmente estable al usar en un esquema central, lo viable son los esquemas unilaterales pero para estos esquemas se requiere la información del sentido del flujo numérico en cada tiempo, algunos métodos basados en lo anterior son el método de Godunov y Upwind.

### 2.3.2. Esquema de Roe

Cada iteración en un esquema numérico de las ecuaciones SV deberá dar solución a un conjunto finito de problemas de Riemann relacionados por las leyes de conservación en cada intervalo, esto no siempre es tan sencillo como vimos pues los esquemas simples requieren información del sentido del flujo y resulta ser poco práctico en la mayoría de los casos, Roe [10] propone que tal solución numérica se aproxime no a la solución real sino a la solución débil de problema de conservación.

La propuesta sin mucho detalle es el siguiente:

La ecuación SV original es:

$$\frac{\partial U}{\partial t} + \frac{\partial F}{\partial x} = 0$$

luego la expresamos quasi-linear

$$\frac{\partial U}{\partial t} + A \frac{\partial U}{\partial x} = 0$$

la condición es que  $A$  tenga sus eigenvalores reales distintos y cumpla con:

$$A(u, v)(u - v) = F(u) - F(v), \quad \text{para toda } u, v \in \mathbb{R}^m. \quad (2.15)$$

llamada *Propiedad de Roe*;

El flujo numérico se aproxima como

$$F_{i-1/2} = \frac{1}{2}[F_i + F_{i-1} - \tilde{A}_{i-1/2}(V_i - V_{i-1})]$$

donde

$$\tilde{A}_{i-1/2} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\bar{u}^2 + g\bar{h} & 2\bar{u} \end{bmatrix}$$

Es en esencia el Jacobiano de  $F(U)$  conocido pero las entradas de la matriz se calculan como sigue: se calculan los eigenvalores

$$\lambda_1 = u - \sqrt{gh} \qquad \lambda_2 = u + \sqrt{gh}$$

luego los correspondientes eigenvectores derechos e izquierdos

$$r_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ u - \sqrt{gh} \end{bmatrix}, \quad r_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ u + \sqrt{gh} \end{bmatrix},$$

$$l_1 = \frac{1}{2\sqrt{gh}} \begin{bmatrix} u + \sqrt{gh} \\ -1 \end{bmatrix}, \quad l_2 = \frac{1}{2\sqrt{gh}} \begin{bmatrix} \sqrt{gh} - u \\ 1 \end{bmatrix}$$

ademas

$$F_{i-1/2} = \frac{1}{2} (F_i + F_{i-1} - \tilde{\alpha}_k |\lambda_k| r_k) \quad (2.16)$$

los coeficientes  $\tilde{\alpha}_k (k = 1, 2)$  son:

$$\tilde{\alpha}_1 = \frac{\Delta h(\tilde{u} + \tilde{c}) - \Delta(uh)}{2\tilde{c}} \qquad \tilde{\alpha}_2 = \frac{-\Delta h(\tilde{u} - \tilde{c}) + \Delta(uh)}{2\tilde{c}}$$

$\tilde{c} = \sqrt{g\tilde{h}}$ ,  $\tilde{h}$  y  $\tilde{u}$  se calculan como promedios de la forma especial (llamados *promedios de Roe*):

$$\tilde{h} = \frac{1}{2}(h_{i-1} + h_i), \quad \tilde{u} = \frac{\sqrt{h_{i-1}}u_{i-1} + \sqrt{h_i}u_i}{\sqrt{h_{i-1}} + \sqrt{h_i}}.$$

Si aplicamos estas consideraciones en (2.14) obtenemos el esquema de solución numérica de tipo explícito Roe

$$B_W V_{i-1}^{n+1} + B_P V_i^{n+1} + B_E V_{i+1}^{n+1} = B_w V_{i-1}^n + B_p V_i^n + B_e V_{i+1}^n + F_s \quad (2.17)$$

donde

$$B_W = 0$$

$$B_P = I$$

$$B_E = 0$$

$$B_w = \frac{\Delta t}{2\Delta x} A_{i-1/2}^n$$

$$B_p = I - \frac{\Delta t}{2\Delta x} (A_{i+1/2}^n + A_{i-1/2}^n)$$

$$B_e = \frac{\Delta t}{2\Delta x} A_{i+1/2}^n$$

$$F_s = - \frac{\Delta t}{2\Delta x} (F(V_{i+1}^n) - F(V_{i-1}^n))$$

linealmente estable, bajo la condición CLF para leyes de conservación

$$\sup_{i,n} |A_{i+1/2}^n| \frac{\Delta x}{\Delta t} \leq 1.$$



### 2.3.3. Esquema de Szydlowski

Una versión actualizada del esquema de Roe, es el esquema que presenta Szydlowski en [6], un esquema implícito-explicito que incluye el método teta, ideas de McDonald [9] y algunas otras consideraciones que mencionaremos en la siguiente breve explicación del esquema.

Las novedades que incluye el esquema a diferencia del esquema de Roe son:

El flujo advectivo se aproxima de la clásica de Roe:

$$F_{i-1/2} = \frac{1}{2}[F_i + F_{i-1} - \tilde{A}_{i-1/2}(V_i - V_{i-1})] \quad (2.18)$$

se aplica el método teta

$$V_i^{n+1} + \frac{\theta \Delta t}{\Delta x} (F(V_{i+1/2}^{n+1}) - F(V_{i-1/2}^{n+1})) = V_i^n - \frac{(1-\theta)\Delta t}{\Delta x} (F(V_{i+1/2}^n) - F(V_{i-1/2}^n))$$

y se toman los flujos en tiempo  $t^{n+1}$  como en MacDonalld [9]

$$F_i^{n+1} = F_i^n + A_{i-1/2} \Delta V + O(\Delta t^2)$$

una diferencia notable es que para el cálculo del flujo se usa la técnica de extrapolación MUSCL (Monotonic Upstream-Center Scheme for Conservation Laws), que permite mejorar notablemente las simulaciones numéricas.

El esquema es el siguiente:

$$B_W V_{i-1}^{n+1} + B_P V_i^{n+1} + B_E V_{i+1}^{n+1} = B_w V_{i-1}^n + B_p V_i^n + B_e V_{i+1}^n + F_s \quad (2.19)$$

donde

$$B_W = -\frac{\Delta t}{2\Delta x}\theta (A_{i-1}^n + A_{i-1/2}^n)$$

$$B_P = I + \frac{\theta\Delta t}{2\Delta x} (A_{i+1/2}^n + A_{i-1/2}^n)$$

$$B_E = \frac{\Delta t}{2\Delta x}\theta (A_{i+1}^n - A_{i+1/2}^n)$$

$$B_w = -\frac{\Delta t}{2\Delta x} (\theta A_{i-1}^n - (1-\theta)A_{i-1/2}^n)$$

$$B_p = I - \frac{\Delta t}{2\Delta x}(1-\theta) (A_{i+1/2}^n + A_{i-1/2}^n)$$

$$B_e = \frac{\Delta t}{2\Delta x} (\theta A_{i+1}^n + (1-\theta)A_{i+1/2}^n)$$

$$F_s = -\frac{\Delta t}{2\Delta x} (F(V_{i+1}^n) - F(V_{i-1}^n)).$$

### 2.3.4. Comparación con métodos clásicos

En el esquema de las ecuaciones SV estabilizadas al modificar los parámetros  $\theta$ ,  $\delta t$ ,  $\delta x$  en el rango  $[0, \Delta]$ , obtenemos los esquema siguientes:

$$\delta t = 0 \quad \delta x = 0 \quad \theta = 0 \quad \Rightarrow \text{Esquema de Lex}$$

$$\delta t = 0 \quad \delta x = \Delta x \quad \theta = 0 \quad \Rightarrow \text{Esquema Explícito de Roe}$$

$$\delta t = \Delta t \quad \delta x = \Delta x \quad \theta = 1 \quad \Rightarrow \text{Esquema Implícito}$$

$$\delta t = \Delta t \quad \delta x = \Delta x \quad \theta = 0,5 \quad \Rightarrow \text{Esquema Implícito-Explícito de Szydlowski}$$

# Capítulo 3

## Estimación de parámetros de estabilización

Mostramos los resultados de las soluciones numéricas usando el esquema SV estabilizadas en dos problemas en particular; rompimiento de una presa que tiene una discontinuidad en la condición inicial y un caso que llamamos curva suave. incluimos las soluciones analíticas clásicas en cada caso provenientes de los trabajos de Bulatov [7], el esquema Roe (esquema implícito) y Szydlowski, (esquema implícito),

### 3.1. Problemas con solución analítica

#### 3.1.1. Condiciones iniciales

Para las ecuaciones SV 1D en general las condiciones iniciales son del tipo:

$$h(x, 0) = h(x)$$

$$u(x, 0) = u(x)$$

El rompimiento de una presa o *Dam Break*, simula el perfil en 1D de una compuerta simple,

es decir; una pared vertical rígida mantiene el fluido separado por dos distintos niveles no cero, se supone que en un inicio el fluido está en reposo y no existen zonas con movimiento laminar en la superficie, cuando  $t > 0$  la pared se retira rápidamente y casi sin fricción, provocando un derrame de izquierda a derecha, el objetivo entonces es simular el comportamiento aguas abajo del sistema.

Fijamos las condiciones iniciales

$$h, u(x, 0) = \begin{cases} h_l = 10 & u_l = 0 & \text{si } x > p \\ h_r = 1 & u_r = 0 & \text{si } x < p \end{cases} \quad (3.1)$$

$p$  es la posición de la pared vertical.

Para el caso dos, se impone como perfil inicial una función al menos  $C^1$  continua, convexa, que simulara el comportamiento de una ola central, contenida en los mismos límites que el caso anterior, en las pruebas usamos:

$$h(x, 0) = 10 \exp^{-0,001x^2} + 2; \quad u(x, 0) = 0.$$

### 3.1.2. Condiciones de contorno

Al imponer los comportamientos en las fronteras, en las pruebas 1D consideramos las posibilidades; pared sólida en los contornos, pared sólida solo en donde el fluido tiene altura mayor y el extremo opuesto está conectado a un flujo estacionario de longitud infinita.

Consideremos:

$$h(0, t) = \kappa(t)$$

$$u(0, t) = \kappa(t).$$

En las simulaciones el procedimiento para complementar el sistema fue suponer un par de celdas artificiales para crear efectos de pared.

En caso de simular una pared vertical de longitud que no permite salidas o brincos del flujo, la altura de la celda extra sera la misma que el valor de la celda contigua, en cambio la velocidad del flujo  $u$  debe ser en magnitud igual pero sentido contrario. En caso de flujo libre por las paredes del sistema, suponemos que tanto la altura como la velocidad en la celda extra son iguales a los valores de la celda adyacente

Las condiciones son tipo Dirichlet en las fronteras correspondientes son:

$$u - \tilde{u} = 0 \quad \Gamma_p \quad (3.2)$$

$\tilde{u} = 0$  para paredes sin flujo.

Las ecuaciones SV estabilizadas son de segundo orden requieren completarse con las condiciones son tipo Neumann estabilizadas:

$$\frac{\delta t}{2} \frac{\partial U}{\partial t} - \frac{\delta x}{2} \frac{\partial F(U)}{\partial x} - S = K \quad (3.3)$$

con

$$U = \begin{bmatrix} h \\ uh \end{bmatrix}, \quad F = \begin{bmatrix} uh \\ u^2h + gh^2/2 \end{bmatrix}, \quad S = \begin{bmatrix} u_n \\ \tau \end{bmatrix}, \quad k = \begin{bmatrix} -\tilde{u} \\ 0 \end{bmatrix}, \quad (3.4)$$

donde  $\tau, u_n$  es la cantidad de velocidad y movimiento prefijado en la celda,  $\tilde{u} = 0$  si es pared sólida o superficie estacionaria, en los test que presentaremos adelante en el capítulo supondremos que las paredes no son permeables, y además no tienen fuentes externas de masa y/o impulso en las celdas del contorno.

### 3.1.3. Soluciones analíticas

Para el *Dam Break*, Stokes (stokes) muestra un análisis de las características de la solución al problema de rompimiento de una presa, Bulatov [7] presenta soluciones analíticas a estos tipos de problemas, ambas son referencia para test numéricos en las ecuaciones SV estabilizadas.

Los datos en las simulaciones son: Presa de longitud  $L = 1000$  mts, sin fuentes/sumideros laterales, opera bajo las hipótesis de SV, con las condiciones como en (3.1) y (3.4) condiciones iniciales

$$h, u = \begin{cases} h_L = a & u_L = 0 & \text{si } x > L/2 \\ h_R = b & u_R = 0 & \text{si } x < L/2 \end{cases}$$

condiciones de frontera

$$\begin{aligned}
 u(x, t) &= 0 && \text{en } x = 0 && \text{(Dirichlet)} \\
 \frac{\partial F(u)}{\partial x} - q_c &= 0 && \text{en } x = L && \text{(Neumann)}
 \end{aligned}$$

con  $t$  en segundos y  $x$  en metros, la solución es:

$$h(x, t) = \begin{cases} h_L & \text{si } x \leq 0 \\ \frac{1}{9g} \left( 2(gh_L)^{1/2} - \frac{x}{t} \right)^2 & \text{si } x_1 < x \leq x_2 \\ h_1 & \text{si } x_2 < x \leq x_3 \\ \frac{1}{9g} \left( 2C_2 - \frac{x}{t} \right)^2 & \text{si } x_3 < x \leq x_4 \\ h_2 & \text{si } x_4 < x \leq x_5 \\ h_R & \text{si } x \geq x_5 \end{cases}$$

$$u(x, t) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \leq 0 \\ \frac{2}{3} \left( (gh_L)^{1/2} + \frac{x}{t} \right) & \text{si } x_1 < x \leq x_2 \\ u_1 & \text{si } x_2 < x \leq x_3 \\ \frac{2}{3} \left( 2C_2 + \frac{x}{t} \right) & \text{si } x_3 < x \leq x_4 \\ u_2 & \text{si } x_4 < x \leq x_5 \\ 0 & \text{si } x \geq x_5 \end{cases}$$

los desarrollos completos de las soluciones analíticas se pueden consultar en [7].

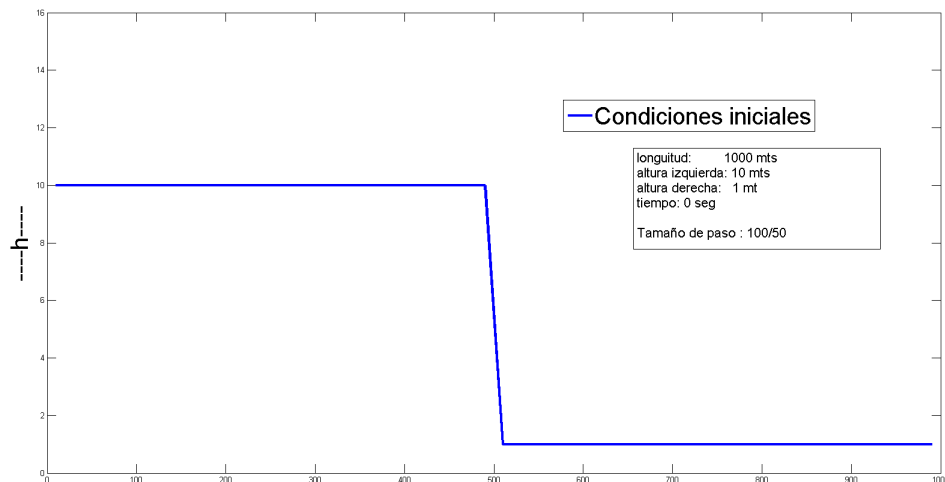


## 3.2. Parámetros Globales

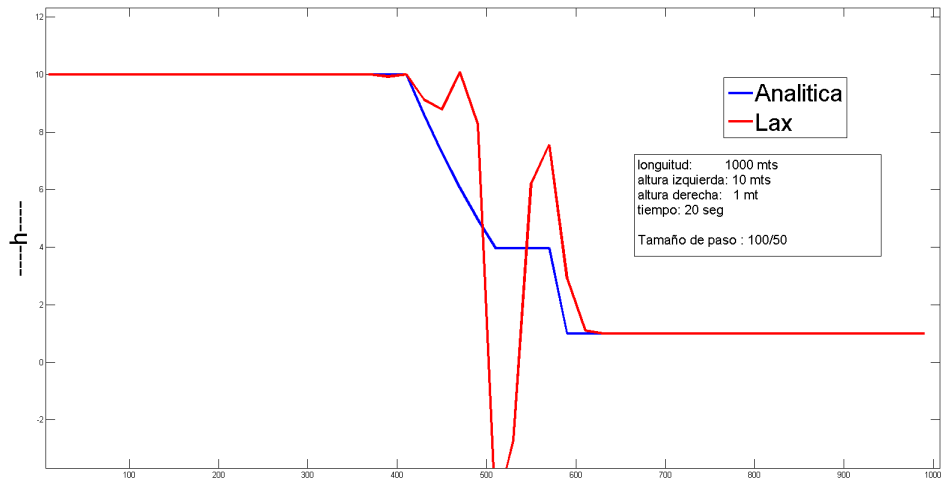
### 3.2.1. Dam break

Las simulaciones se realizan con tiempos  $\Delta t = 1$ , 51 nodos en  $L = 1000$ ,  $\theta = 0, 1$ , la altura máxima de la presa 10 mts., mínima 1 suelo húmedo y mínima 0 para suelo seco, vigilaremos el criterio CLF como criterio de paro de la simulación.  $\Delta x = 1000/50$  metros y  $\Delta t = 1$  segundos.

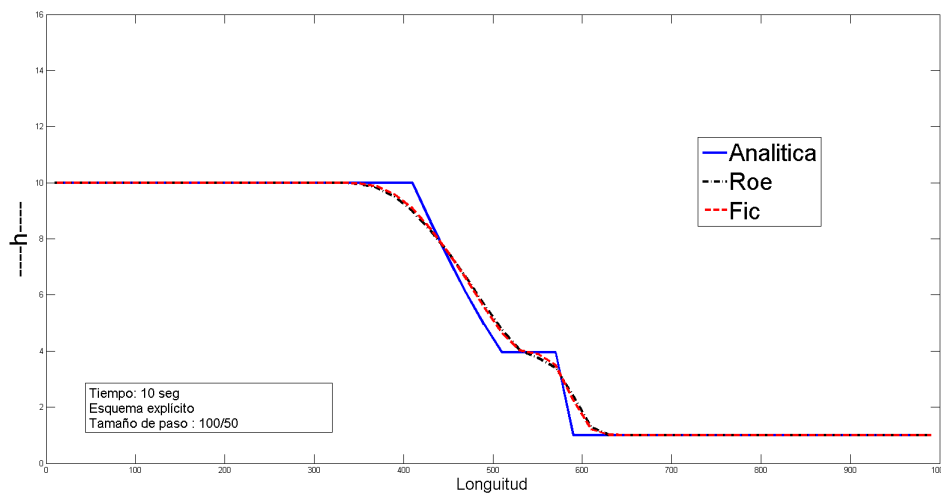
En cuanto a los parámetros de estabilización en FIC, se usaron  $\delta x = 0.8\Delta x$ ,  $\Delta x$ ,  $1.4\Delta x$ ,  $\delta t = 0.8\Delta t$ , para toda celda en cada tiempo de simulación, en otras palabras globales y constantes en las simulaciones. Omitimos el caso  $\delta x = \Delta x$ ,  $\delta t = \Delta t$  ya por motivos obvios el esquema reproduce las soluciones Roe y Szydlowzki.



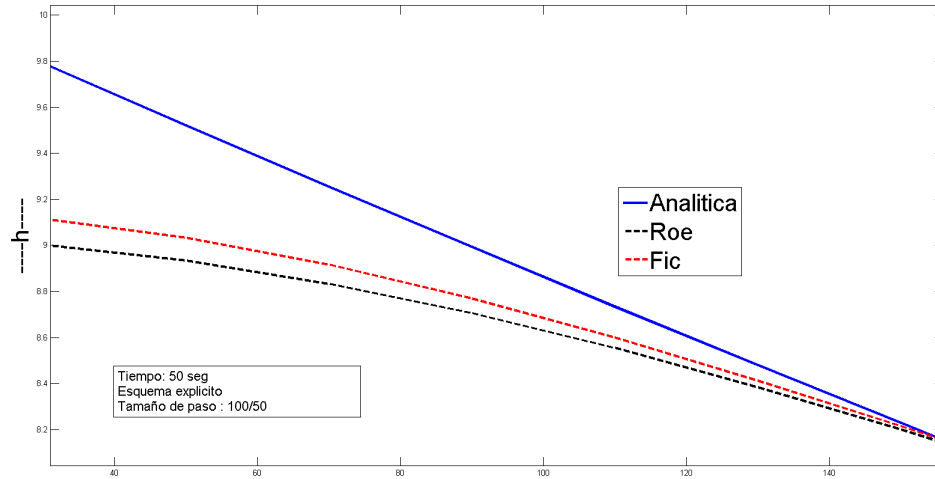
**Figura 3.1:** Condiciones iniciales Dam Break



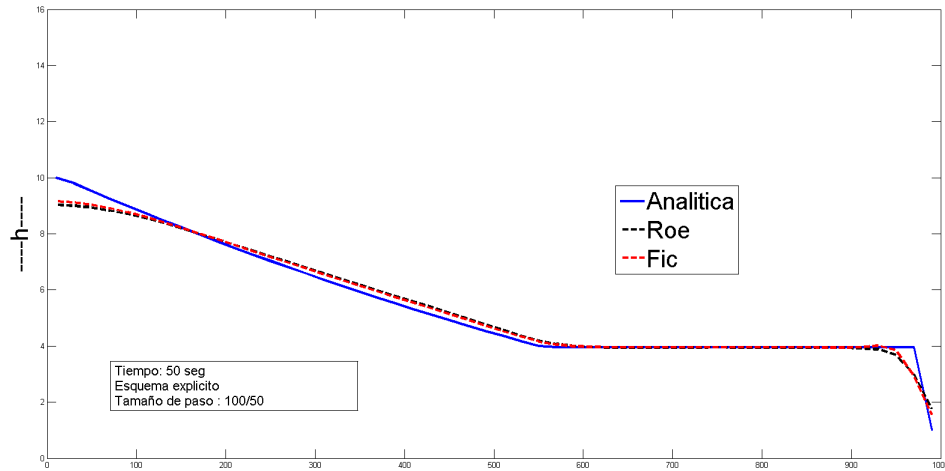
**Figura 3.2:** Solución con esquema de Lax y solución analítica a los 10 segundos de simulación



**Figura 3.3:** Esquema explícito : Esquema FIC vs Esquema Roe con  $\delta_t = 0,8\Delta t$ ,  $\delta_x = 0,8\Delta x$ , a los 10 segundos de simulación



**Figura 3.4:** Ventajas del esquema Esquema FIC vs Esquema Roe con  $\delta_t = 0.8\Delta t$ ,  $\delta_x = 0.8\Delta x$ , a los 50 segundos de simulación



**Figura 3.5:** Esquema explícito : Esquema FIC vs Esquema Roe con  $\delta_t = 0.8\Delta t$ ,  $\delta_x = 0.8\Delta x$ , a los 50 segundos de simulación

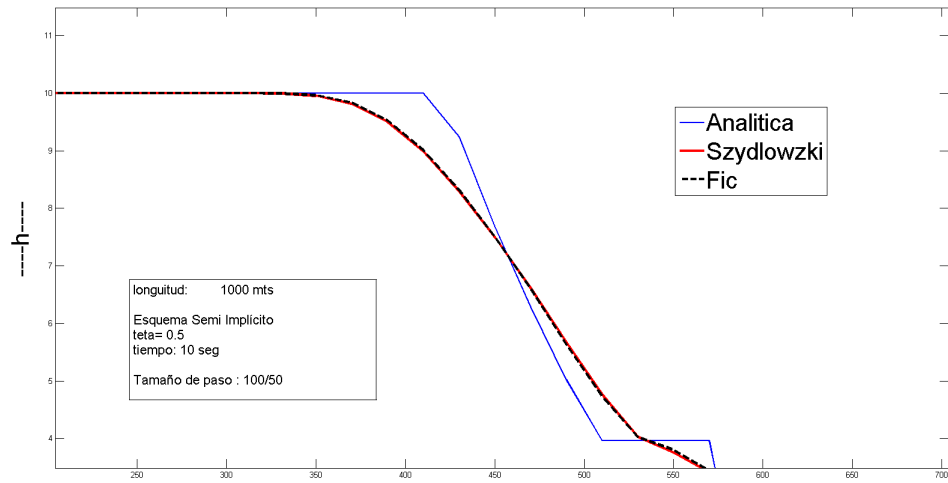
Observamos que para valores de entre  $0.6\Delta x$  y  $1.8\Delta x$  para el parámetro espacial y  $\delta t = \Delta t$  fijo, las simulaciones numéricas son estables. Si fijamos  $\delta x = \Delta x$  y variamos  $\Delta t$  entre  $0.8\Delta t$  y

$\Delta t$  obtenemos resultados similares.

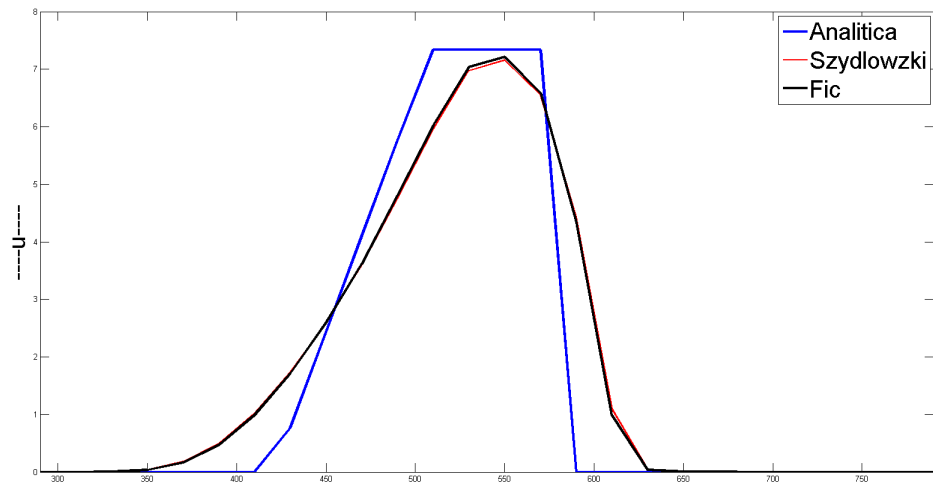
Para la solución analítica se requiere calcular en principio  $u_1, h_1$  a partir de conocer  $u_1$  y las condiciones iniciales,  $c_1$  se aproxima solucionando un sistema no lineal con la algún método numérico, en nuestro caso usamos el método de Newton con tres iteraciones y con las condiciones del vector inicial cercanas a  $h_1$ .

La solución del esquema explícito-implícito se usa un programa propio que permite modificar los parámetros como las condiciones de frontera e iniciales, los pasos que se siguen son en esencia:

- Lectura de los datos y parámetros globales.
- Discretización del perfil de las condiciones iniciales, cálculo de los valores de frontera en las celdas el tiempo  $t = 0$ .
- Con (2.13), se construyen sistema de ecuaciones no lineales  $2N \times 2N$  con la información por celda.
- Resolvemos con método de Newton, y se actualizan las nuevas cond. iniciales.
- Se revisan las condiciones CLF y se itera nuevamente.



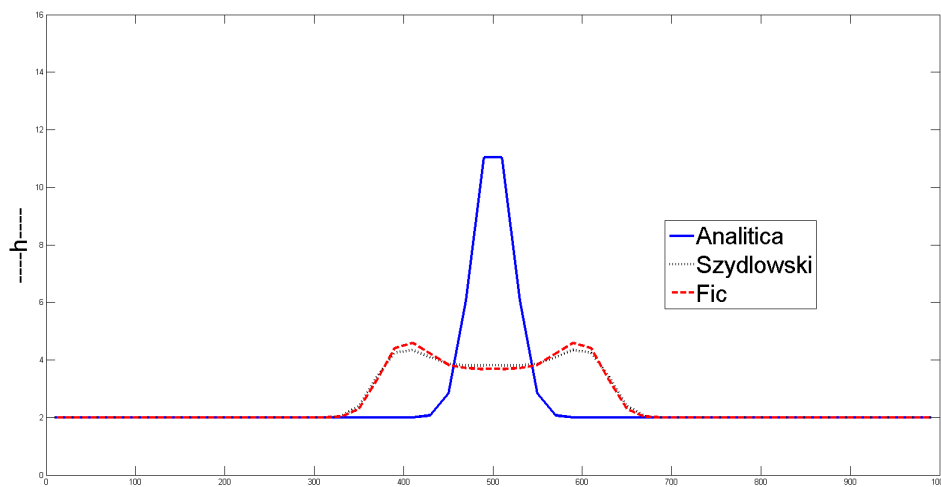
**Figura 3.6:** Esquema FIC vs esquema de Szydlowski con  $\delta_t = 0.8\Delta t$ ,  $\delta_x = 0.8\Delta x$ , a los 10 segundos de simulación



**Figura 3.7:** Velocidad del fluido ,  $\delta_t = 0.8\Delta t$ ,  $\delta_x = 0.8\Delta x$ . 10 segundos de simulación

### 3.2.2. Curva suave

Mismos datos que el caso 1, solo cambian las condiciones iniciales, no se incluyen en las simulaciones las soluciones analíticas y Roe, se comparan los comportamientos de los esquemas FIC y de Szydlowski.



**Figura 3.8:** En azul: Condiciones iniciales curva suave sin fricción en el fondo.

En rojo- negro: Simulación con esquemas FIC y Szydlowski usando parámetros globales  $\delta x = 0.85\Delta x$ ,  $\delta t = \Delta t$ ,  $\theta = 0.5$  a los 10 segundos

### 3.3. Parámetros locales

En la sección anterior los parámetros globales modifican las soluciones para las caudales y velocidad del fluido en cada celda, en el esquema de Roe explícito el parámetro  $\alpha$  espacial es la unidad y el temporal es cero y en el esquema implícito  $\theta$  podía variar. Experimentalmente modificamos los valores de los parámetros en rangos cercanos a los propuestos en Roe y Crank-Nicolson y se registraron en ciertas zonas de la solución mejoras en la aproximación a la solución analítica, es bien conocido que la estabilización no es siempre necesaria para todas las celdas, a todo tiempo. En este apartado el trabajo se enfoca a localizar las celdas que deben ser estabilizadas y posteriormente estimar valores en los parámetros adecuados a cada una en cada tiempo.

Si consideramos que cada celda tiene un parámetro específico en cada tiempo de simulación, conviene escribir nuestros parámetros como  $\delta_x = \alpha_x \Delta_{x_i}$  con  $\alpha_x, \alpha_t$  en el intervalo cerrado  $[0, 1]$ .

### 3.3.1. Algoritmo para estimación de parámetros locales

Lo primero que realizamos es revisar la condición CLF en las condiciones iniciales, permite controlar los disparos de información por errores numéricos

$$\sup_{i,n} |A_{i+1/2}^n| \frac{\Delta x}{\Delta t} \leq 1 \quad (3.5)$$

para cada celda verificamos

$$|A_i^n| \frac{\Delta x}{\Delta t} \leq 1. \quad (3.6)$$

Luego requerimos una forma de estimar la fiabilidad de los parámetros actuales en cada celda, el método es como sigue:

Sea  $N$  el número de puntos de la discretización espacial,  $(N-2)$  el número de celdas centradas en puntos internos del dominio, dos celdas ubicadas en el contorno  $\delta x, \delta t \in \mathbb{R}^N$ ,  $\delta x_i = \alpha_{x_k} \Delta x$ , para  $i = 1..N$ ,  $k = 1..p$  con  $p$  prefijado, y  $\delta t_i = \alpha_{t_k} \Delta t$ .

Expresamos el residuo en cada elemento, para una malla 1 dada

$$s_i^1 = \frac{\partial V_i^1}{\partial t} + \frac{\partial F_i^1}{\partial x} - \frac{1}{2} \left( \delta_t \frac{\partial^2 V_i^1}{\partial t^2} + \delta_x \frac{\partial^2 F_i^1}{\partial x^2} \right) \quad (3.7)$$

luego definimos el residuo medio como:

$$r_i^1 = \frac{1}{c_i} \int_{c_i} s_i^1.$$

Oñate [1] propone un algoritmo en base a dos soluciones una proveniente de una mallado en particular y la otra de algún otro método de orden superior, en nuestro caso asumiremos que la solución mejorada proviene de obtener los valores de conservación usando una segunda malla fina. Si ambas soluciones son estables en el sentido (3.5) entonces la hipótesis es que la segunda



debería mejorar la aproximación, debemos cuidar las mallas coincidan al menos en los nodo de la malla gruesa, si calculamos el residuo para cada celda, podemos afirmar que se cumple lo siguiente:

$$|r_i^2 - r_i^1| \geq 0 \quad (3.8)$$

se desea que a medida que se mejora el valor de los parámetros tal diferencia de residuos tienda a cero, la estrategia es entonces que si no se cumple la condición CLF, estimar los parámetros de forma local locales que aproximen la diferencia de los residuos tendiendo a cero

$$|r_i^2 - r_i^1| = 0 \quad (3.9)$$

sea

$$\delta_i = [\delta t, \delta x]^t \quad (3.10)$$

Luego sustituimos (3.7) en (3.9), y obtenemos un sistema de ecuaciones con dos incógnitas por celda de la forma

$$\delta_i = M^{-1}b$$

con

$$M = \frac{1}{2} \left[ \frac{1}{c_i^n} \int_{c_i^n} \frac{\partial^2 V_i^1}{\partial t^2} - \frac{1}{C_i^n} \int_{C_i^n} \frac{\partial^2 V_i^2}{\partial t^2}, \frac{1}{c_i^n} \int_{c_i^n} \frac{\partial^2 F_i^1}{\partial x^2} - \frac{1}{C_i^n} \int_{C_i^n} \frac{\partial^2 F_i^2}{\partial x^2} \right]$$

$$b = \frac{1}{c_i^n} \int_{c_i^n} \left( \frac{\partial V_i^1}{\partial t} + \frac{\partial F_i^1}{\partial x} \right) - \frac{1}{C_i^n} \int_{C_i^n} \left( \frac{\partial V_i^2}{\partial t} + \frac{\partial F_i^2}{\partial x} \right).$$

El algoritmo para solución de  $V_{x_i}^n$  con MVF en la ecuación estabilizada, en cada paso de tiempo  $t_p$ , es el siguiente:

Consideremos el contador  $k = 0 \dots m$ , con  $m$  un valor real prefijado;

- 1) Iniciamos con los vectores  $\alpha_x^0$  y  $\alpha_t^0$  tal que cada una de sus entradas sea la unidad, sea  $\alpha_x^k = \alpha_x^0, \alpha_t^k = \alpha_t^0$ .
- 2) Calculamos  $V^1$  y  $V^2$  para mallas 1 y 2 respectivamente, con las condiciones iniciales  $h_i(x, t_{p-1})$  y  $q_i(x, t_{p-1})$ .
- 3) Empatamos por celdas centradas en los puntos de malla 1.
  - Por celda: Se calcula  $M$  y  $b$ .
  - Obtenemos  $|M|, |M(1 : 2, 1)|, |M(1 : 2, 2)|$ .
  - Si  $|M| = 0 \Rightarrow \delta_x = \delta_t = 0$ .
  - En caso contrario si  $|M(1 : 2, 1)| \Rightarrow \alpha_{t_i}^{k+1} = 0$  y estimamos  $\alpha_{x_i}^{k+1}$ .
  - En caso contrario si  $|M(1 : 2, 2)| \Rightarrow \alpha_{x_i}^{k+1} = 0$  y estimamos  $\alpha_{t_i}^{k+1}$ .
  - Si ninguna de las anteriores se cumple, resolvemos  $\alpha_{x_i}^{k+1}, \alpha_{t_i}^{k+1}$ .
- 4) Actualizamos  $\alpha_x^k = \alpha_x^{k+1}, \alpha_t^k = \alpha_t^{k+1}$ .
- 5) Repetimos 2,3 y 4 hasta que  $k = m$ , ó se cumpla la tolerancia prefijada.
- 6) Actualizamos  $V_{(x, t_{p-1})} = V_{(x, t_p)}^2$ .

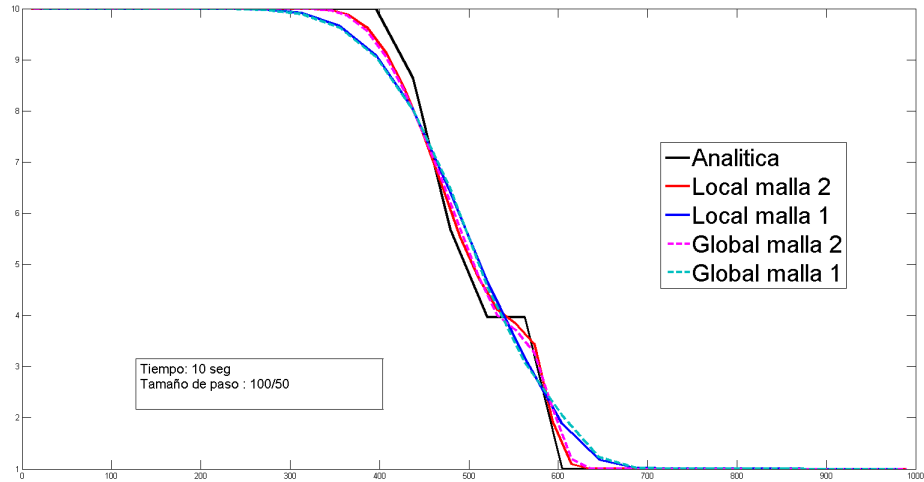
El cálculo de parámetros de forma local deberá mejorar no solo la solución en la malla gruesa, sino también en la malla fina o solución mejorada.

### 3.3.2. Resultados - parámetro local

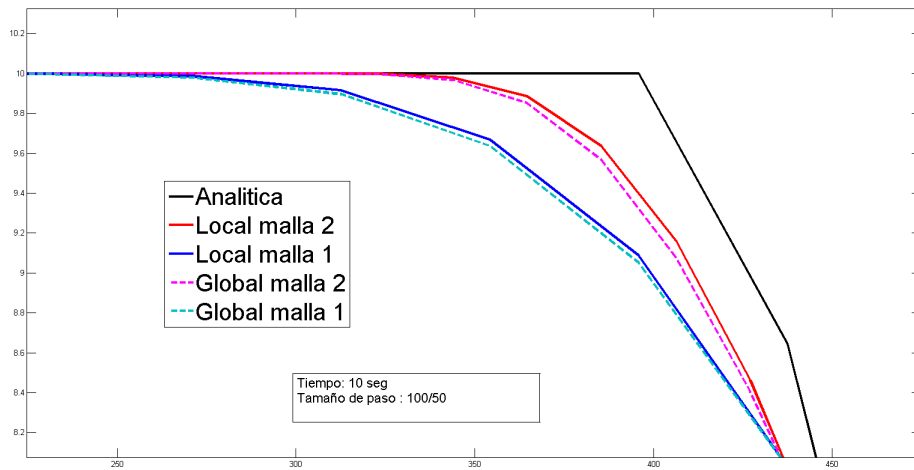
Aplicamos el esquema numérico de SV estabilizado a dos casos prueba el primero es el rompimiento de una presa con los datos expuestos en el capítulo anterior con las mismas condiciones de frontera y valores iniciales en los saltos; el segundo tiene condiciones iniciales suaves, es decir no tiene saltos o discontinuidades.

En ambos casos, la solución mejorada proviene de duplicar el número de celdas en el mallado *grueso*, la expectativa es mejorar la solución tanto para la aproximación del mallado 1 como del 2, en el caso uno compararemos la solución analítica, la solución con parámetro global fijo y la solución con parámetro local.

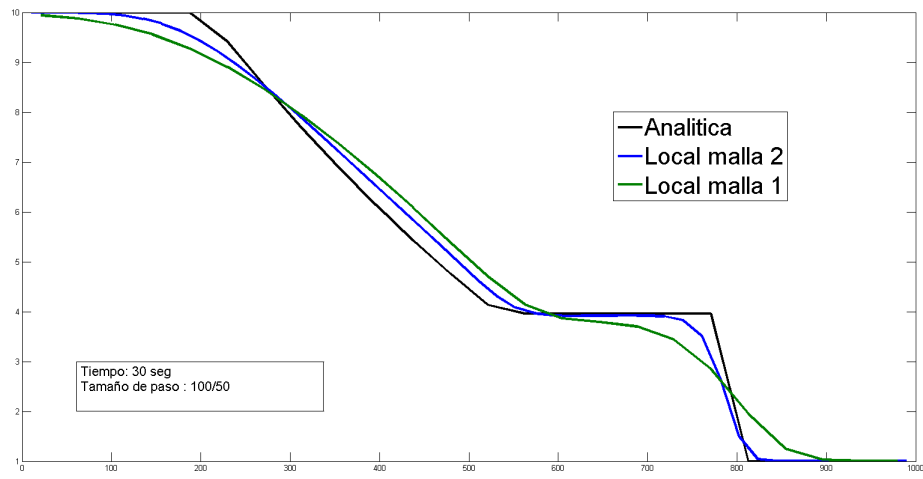
## Dam Break



**Figura 3.9:** Gráfica de los mallados 1 y 2 con parámetro global  $\alpha_x = 8.0$ , además de las soluciones mejoradas por parámetros locales con una iteración del algoritmo para parámetro local  $m=1$ .



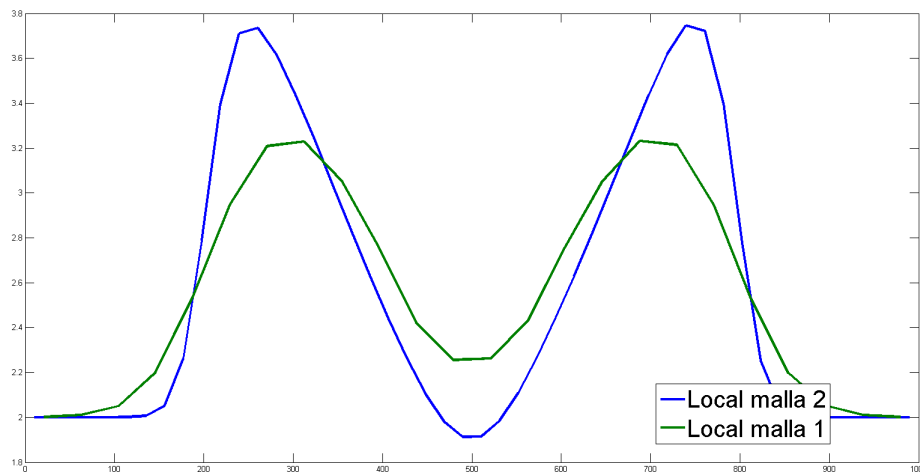
**Figura 3.10:** Detalle de gráfica de los mallados 1 y 2 con parámetro global  $\alpha_x = 8.0$ , además de las soluciones mejoradas por parámetros locales con una iteración del algoritmo para parámetro local  $m=1$ .



**Figura 3.11:** Soluciones numéricas de las ecuaciones estabilizadas con parámetros locales

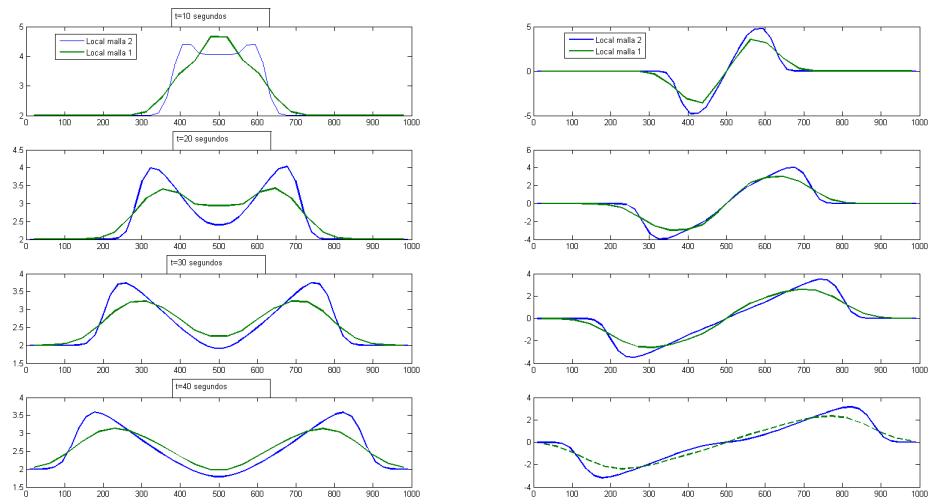
### Curva suave

El caso dos simula el comportamiento de un fluido sobre un canal de contención de longitud de 1000 mts, de ancho fijo y sin fricción. Las condiciones iniciales simulan el rompimiento de una presa con paredes de contorno suaves en 1D, además esta sujeto a condiciones de frontera de pared



**Figura 3.12:** Altura,  $t=10$  seg. y  $m=1$

La gráfica anterior muestra los contornos al transcurrir diez segundos en la simulación en la malla 1 y la solución malla 2 o malla fina, usando un parámetro inicial la unidad en cada entrada tanto espacial como temporal.



**Figura 3.13:** Evolución Altura- Velocidad ,  $m=1$

# Conclusiones y Trabajo futuro

## Puntos a destacar

- *Esquema Saint Venant estabilizado.* Se presenta un esquema de aguas someras basado en el método FIC consistente y estable de primer orden comparable con los métodos de baja resolución de volumen finito.
- *Relación con esquemas similares.* El esquema numérico propuesto bajo la imposición de valores especiales en los parámetros reproduce esquemas estables e inestables existentes en la literatura de volumen finito.
- *Parámetros globales.* Experimentalmente se corrobora la aproximación a la solución de los problemas test y en casos especiales logramos mejorar la solución en comparación a los métodos clásicos del mismo orden.
- *Parámetros locales.* El algoritmo propuesto mejora las aproximaciones al estimar parámetros locales en cada iteración. Un dato interesante es la evolución de los parámetros de estabilización en la línea de tiempo al converger progresivamente a un valor muy cercano a la unidad, precisamente el valor de Roe propuesto como parámetro global en sus esquemas explícitos. En estos experimentos se pudo apreciar que los parámetros fijados tanto de Roe como Szydlowsky son estables y aproximan bien, pero tiempos posteriores se pueden mejorar en las primeras iteraciones tal como se vio al implementar el algoritmo de solución de parámetros locales.



Por simplicidad del modelo no se tomaron en cuenta fuentes o sumideros, porosidad, sedimentos, turbulencias, variantes en los fondos del canal, mas dimensiones etc., sin embargo es fructífera en el sentido que muestra la posibilidad de aplicar el método FIC en este tipo de ecuaciones, los esquemas estables que ofrece como alternativa de solución y la relación que guardan los resultados con esquemas existentes en los referentes bibliográficos de volumen finito.

### **Un trabajo futuro**

- Extender resultados a dos y tres dimensiones.
  
- Estudio a fondo de la convergencia del método y de los algoritmos expuestos, en teoría de Volumen finito
  
- Esquemas no conservativos.  
Por ejemplo; Incluir en el estudio la aparición de sumideros y/o fuentes, la fricción en las paredes y efectos del viento sobre la superficie
  
- Arrastre de sedimentos.  
Contemplar al posibilidad de dos o mas fluidos de distinta densidad que interactúan sobre un canal y zonas de estancamientos.

# Bibliografía

- [1] Eugenio Oñate and Marco Manzan (2000). *Stabilization Techniques for Finite Element Analysis of Convection-Diffusion Problems*. Publication CIMNE no. 183
- [2] Manuel Ramirez and Miguel Ángel Moreles (2010) *On the Finite Increment Calculus method for stabilizing advection-diffusion equations, analysis and computation of the stabilization parameter* International Journal for numerical methods in fluids 2012-70
- [3] Eleuterio F. Toro (2009). *Riemman solvers and numerical methods for fluid mechanics*. third edition Springer-Verlag Berlin.
- [4] Randall J. Leveque (2004). *Finite Volume Methods for Hyperbolic Problems*. Cambridge UK: Cambridge University Press.
- [5] J.J. Stoker (1957). *Water Waves, the mathematical theory with applications* . New York: Interscience publishers Ltd. New York-London
- [6] Michel Szydlowski (2004). *Implicit versus explicit volume schemes for extreme free surface water flow modelling*. Archives of hydro engineering and enviromental mechanics vol. 51 No. 3. pp 287-303.
- [7] O.V.Bulatov (2013). *Analitycal and Numerical Riemman Solutions of the Saint Venant equations for forward and backward face steps flows*. Computational Mathematics and Mathematics phisics 2014 vol. 54 No. 1. pp 149-163.
- [8] Robert Eymard *et all* (2003). *Finite Volume Methods*, LATP UMR 6632 Marseille.

- [9] Ian MacDonald (1996). *Phd tesis: Analysis and Computation of Steady open channel flow*. University of Reading.
- [10] P.L. Roe (1981). *Approximate Riemann Solvers, Parameter Vectors and Difference Schemes*. Journal of Computational Physics 43, 357-372.
- [11] Luis Miguel de la Cruz Salas (2009) *Solución del problema de convección utilizando volumen finito y algoritmos paralelos*. DGSCA-UNAM
- [12] Dietmar Kröner (1997) *Numerical Schemes for Conservation Laws*. Wiley Teubner
- [13] Carlos Parés (2015) *ENOAN 2015, Aguas Someras*. UAM-1 Mexico Df.