Medidas Aleatorias en Espacios Localmente Compactos

Marina Suárez Muñoz

10 de marzo de 2006

Índice general

Introducción v

1. Espacio de medidas de Radon **1**

1.1. Espacios Localmente Compactos 1

1.2. Medidas de Radon 2

1.3. $\sigma-$ álgebras de $\mathcal{M}$ y $\mathcal{N}$ 11

1.4. Teorema de Consistencia de Kolmogorov 12

2. Medidas y Campos Aleatorios **21**

2.1. Regularidad de las medidas en $\mathcal{M}$ 21

2.2. Medidas Aleatorias 23

2.3. Campos Aleatorios 24

2.3.1. Campo aleatorio de Poisson 29

3. Convergencia débil **33**

3.1. Convergencia débil 33

3.2. Teoremas del límite central 36

3.2.1. Condiciones de mezcla 37

3.2.2. Medidas aleatorias asociadas 38

4. Sistemas de partículas **43**

4.1. Sistemas de partículas multiplicativos de Markov 43

4.2. Ejemplos de sistemas de partículas 50

4.2.1. Proceso de difusión de ramificación simple 51

4.2.2. Campo aleatorio de Poisson con ramificación 52

4.2.3. Campos aleatorios ramificados con inmigración 58

Introducción

El propósito de esta tesis es presentar en forma autocontenida una recopilación de resultados fundamentales en la teoría general de las medidas y campos aleatorios sobre un espacio de Hausdorff, localmente compacto con base numerable; además se describirá la forma en que dicha teoría sirve de contexto en el estudio de modelos de poblaciones aleatorias conocidos como sistemas de partículas.

La teoría de las medidas aleatorias tuvo sus orígenes en aplicaciones tales como líneas de espera, poblaciones aleatorias, procesos de riesgo, etc., y los primeros resultados importantes sobre esta teoría fueron descubiertos entre los años de 1956 a 1967, inicialmente para el caso real $G = \mathbb{R}$, ver [10]. Muchos de los resultados clásicos en la línea real fueron extendidos a espacios topológicos más generales y una amplia gama de nuevas propiedades se descubrieron. Una medida aleatoria sobre un espacio localmente compacto G puede entenderse como un mapeo medible de un espacio de propabilidad abstracto sobre el espacio $\mathcal{M}$ de las medidas de Radon en G, donde la $\sigma-$ álgebra que porta $\mathcal{M}$ es la generada por los mapeos $\mu \to \mu(B)$, $\mu \in \mathcal{M}$, para todo boreliano $B \subset G$. Posiblemente el ejemplo más típico de medida aleatoria es el proceso Poisson N, el cual puede pensarse como una configuración aleatoria de puntos en un espacio medible $(G, \mathfrak{B}(G))$ tal que el número de puntos en $A \in \mathfrak{B}(G)$ tiene una distribución de Poisson, y los números de puntos en regiones disjuntas son variables aleatorias independientes. El proceso de Poisson es considerado la medida aleatoria fundamental, es la más ampliamente entendida, y juega un papel prominente en el estudio de esta teoría.

Denotemos por $\mathcal{N}$ al subcojunto de $\mathcal{M}$ de medidas $\mathbb{N} \cup \{0\}-$ valuadas. Como caso particular de las medidas aleatorias tenemos las medidas aleatorias $\mathcal{N}-$ valuadas, a las cuales se les denomina campos aleatorios o procesos puntuales. Así un campo aleatorio es una media aleatoria que toma sus valores en $\mathcal{N}$ con probabilidad 1. La importancia de los campos aleatorios radica en el hecho de que estos aparecen como modelos en problemas relacionados con tiempos de arribos, tiempos de falla, ocurrencias de eventos raros, etc.

En nuestros días la teoría de las medidas aleatorias es aplicada en muchos campos. Algunos de los campos donde esta teoría ha sido frecuentemente utilizada son los sistemas de partículas, donde podemos mencionar el trabajo realizado por Moyal [16] quien introduce dichos sistemas en el contexto de los campos aleatorios definidos en un espacio de estados arbitrario. En esa misma línea podemos mencionar los trabajos realizados por D. Dawson y G. Ivanoff [6] en donde investigan sistemas en el espacio $\mathbb{R}^d$ que tienen un número infinito de partículas, además de introducir algunas propiedades que poseen este tipo de sistemas. Finalmente mencionaremos el trabajo realizado por D. Dawson [7], cuyo tema principal es la construcción y estudio de los procesos de Markov $\mathcal{M}-$ valuados y las diferentes direcciones en las que se ha desarrollado la teoría de tales procesos.

La contribución de este trabajo radica en recopilar los resultados fundamentales de algunos textos clásicos tales como [14], en el cual se estudian las medidas aleatorias sobre un espacio que no requiere de un orden particular o una estructura métrica, y artículos pioneros en el tema como [13], donde se estudian las medidas aleatorias sobre un espacio localmente compacto con base numerable. Además se completan y revisan varios argumentos en las demostraciones de los resultados más importantes de esta teoría. Es pertinente aclarar que no se pretende ninguna originalidad más allá de presentar en forma integrada los resultados fundamentales de esta útil teoría, y la forma en que la teoría de medidas aleatorias sirve de contexto en los sistemas de partículas. Finalmente hacemos notar que no se estudiarán propiedades específicas de algunas medidas aleatorias particulares que se mencionan en este trabajo, como es el caso campo aleatorio de Poisson. El énfasis es en las propiedades generales de medidas y campos aleatorios. En [5] se presenta un estudio más avanzado de las medidas aleatorias y campos aleatorios.

La tesis está dividida en cuatro capítulos. En el capítulo 1 se introduce el espacio $\mathcal{M}$, el cual es por sí mismo objeto de interés ya que posee ciertas propiedades importantes tales como el poder dotar a dicho espacio de una topología métrica en el caso de que G sea un espacio Hausdorff, localmente compacto y con base numerable; demostraremos que la topología mencionada anteriormente es metrizable por una métrica que es separable y completa. Además caracterizaremos a la $\sigma-$ álgebra de Borel $\mathfrak{M}$ de $\mathcal{M}$. Como resultado principal se demuestra, a partir del teorema de consistencia de Kolmogorov, la existencia de límites proyectivos de sistemas de distribuciones multivariadas en el espacio de medidas $\mathcal{M}$.

En el capítulo 2 se definen el funcional característico y la transformada de Laplace de un elemento aleatorio del espacio $(\mathcal{M}, \mathfrak{B}(\mathcal{M}))$. Se introducen los conceptos de medida aleatoria y campo aleatorio; se definen los campos aleatorios simples y se demuestra que la distribución de cualquier campo aleatorio simple está determinada por sus probabilidades de conjuntos donde no tienen puntos. Se define el campo aleatorio de Poisson y se estudian propiedades fundamentales de este campo aleatorio, tales como el teorema de Rényi.

En el capítulo 3 se estudian propiedades tales como la tensión de las medidas de probabilidad en el espacio de las medidas de Radon, y se revisa el tema de convergencia débil de medidas aleatorias. También se exponen resultados del tipo del teorema de límite central para campos aleatorios en el caso del espacio $G = \mathbb{R}^d$.

Finalmente, en el capítulo 4 se introducen los sistemas de partículas desde el enfoque de los campos aleatorios, donde se consideran principalmente los sistemas de partículas multiplicativos de Markov en el espacio $G = \mathbb{R}^d$. En este contexto se introduce la ecuación de Moyal y la ecuación de Skorokhod. Como ejemplos clásicos de sistemas de partículas multiplicativos de Markov, introduciremos tanto el proceso de difusión de ramificación simple como el campo aleatorio de Poisson con ramificación.

Capítulo 1

Espacio de medidas de Radon

En este capítulo se presentan brevemente algunas propiedades de los espacios localmente compactos que serán de gran importancia en el desarrollo de este trabajo. Además se introduce el concepto de medida de Radon; se estudiarán tanto la topología vaga como la topología débil que son inducidas en el espacio de medidas, así como algunas propiedades importantes de las topologías mencionadas. Se dan algunas caracterizaciones de la $\sigma-$álgebra de Borel en el espacio de las medidas de Radon. Finalmente se introduce el teorema general de consistencia de Kolmogorov, el cual utilizaremos para demostrar la existencia de límites proyectivos de sistemas de distribuciones multivariadas en el espacio de medidas $\mathcal{M}$.

1.1. Espacios Localmente Compactos

En este trabajo G es un espacio topológico Hausdorff, localmente compacto, con base numerable. Lo anterior implica que cada punto en G tiene una vecindad con cerradura compacta, y que dados dos puntos distintos en G, éstos pueden ser separados por vecindades disjuntas. Además G es un espacio métrico, separable, completo y cumple $G = \cup_{j=1}^{\infty} K_j$, donde K_j es compacto y $K_j \subset \text{Int}K_{j+1}$ para todo índice j. Denotaremos por ρ a la métrica en G, por C_K al espacio de funciones $f : G \to \mathbb{R}$ continuas de soporte compacto, por C_K^+ al subespacio de C_K de funciones no-negativas, por $\mathbf{M}$ al espacio de todas las funciones $f : G \to \mathbb{R}$ medibles, por $\mathbf{M}_+$ al subespacio de $\mathbf{M}$ de las funciones no-negativas y por $\mathfrak{B}(G)$ a la σ álgebra de Borel de G.

Definición 1.1. *Un conjunto, $B \subset G$, se dice acotado o relativamente compacto cuando su cerradura, $\overline{B}$, es compacta.*

Ejemplo 1.1. Sea $G = \mathbb{R}$ y $B = (a, b)$, con $a, b \in \mathbb{R}$, entonces B es relativamente compacto.

Proposición 1.1. *Dado un conjunto compacto (o abierto) $B \subset G$, existen sucesiones $\{B_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset G$ de conjuntos compactos (o abiertos relativamente compactos) y funciones $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset C_K^+$ tales que*

$$1_B \leq f_n \leq 1_{B_n} \downarrow_{n\to\infty} 1_B \text{ (o } 1_B \geq f_n \geq 1_{B_n} \uparrow_{n\to\infty} 1_B\text{)},$$

donde la convergencia $1_{B_n} \downarrow_{n\to\infty} 1_B$ ($1_{B_n} \uparrow_{n\to\infty} 1_B$) es puntual.

Demostración : Sea $B \subset G$ compacto, y sea $\mathcal{G}$ una base contable de la topología de G consistente de conjuntos acotados y abiertos. Denotemos por G_n a la unión de los primeros n elementos básicos. Entonces $G_n \uparrow_{n\to\infty} G$ y, dado que B es acotado, existe un n_0 tal que $B \subset G_{n_0}$ y $\rho\left(B, G_{n_0}^c\right) > 0$. Para $\varepsilon > 0$ suficientemente pequeño, se cumple que el conjunto $B^\varepsilon = \{x \in G : \rho(x, B) \leq \varepsilon\}$ es acotado. Definamos las funciones continuas $f_n(x) = 1 - n(\rho(x, B) \wedge n^{-1})$, donde $x \in G$ y $n \in \mathbb{N}$. Tomando $x \notin B^{1/n}$ se sigue que para n suficientemente grande $\rho(x, B) > n^{-1}$ y así $f_n(x) = 0$. Luego se cumple que el soporte de $f_n := \mathrm{sop} f_n \subset B^{1/n}$, es decir $f_n \in C_K^+$. La prueba para el caso B abierto y acotado es similar. Si B es abierto pero no acotado, se aplica el mismo argumento a la sucesión $\{B \cap G_n\}_{n\in\mathbb{N}}$. $\square$

1.2. Medidas de Radon

Denotemos por $\mathcal{B}$ a la subclase de $\mathfrak{B}(G)$ de elementos relativamente compactos.

Definición 1.2. *Una medida μ en $(G, \mathfrak{B}(G))$ se llama localmente finita o de Radon si $\mu(B) < \infty$ para cualquier $B \in \mathcal{B}$.*

Ejemplo 1.2. Sea λ la medida de Lebesgue en $\mathbb{R}$, y sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+$ Borel- medible, integrable. Entonces

$$\mu(A) = \int_A f(x)\, \lambda(dx), \qquad A \in \mathfrak{B}(\mathbb{R}),$$

es medida de Radon en $\mathbb{R}$.

Denotaremos por $\mathcal{M}$ a la clase de todas las medidas de Radon en $(G, \mathfrak{B}(G))$, y por $\mathcal{N}$ al subespacio de $\mathcal{M}$ compuesto por las medidas que toman únicamente valores en $\mathbb{N} \cup \{0\}$.

Si $f \in \mathbf{M}_+$, denotamos la integral $\int_G f(x)\, \mu(dx)$ como μf, y definimos la medida $f\mu$ por

$$(f\mu)(B) = \int_B f(x)\, \mu(dx), \qquad B \in \mathfrak{B}(G).$$

En $\mathcal{M}$ introducimos la topología vaga, la cual está generada por los mapeos $\mu \mapsto \mu f$ para toda $f \in C_K^+$, donde los subconjuntos de $\mathcal{M}$ de la forma

$$\{\mu \in \mathcal{M} : |\mu f_j - \nu f_j| < \varepsilon, 1 \leq j \leq n\},$$

$n = 1, 2, ...,$ $f_j \in C_K^+$, $\nu \in \mathcal{M}$, $\varepsilon > 0$, forman una base para esta topología. Nótese que una sucesión de medidas $\{\mu_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ converge vagamente a μ si y sólo si $\mu_n f \longrightarrow \mu f$ para toda $f \in C_K^+$. En efecto, supongamos que μ_n converge vagamente a μ. Entonces, dados $f \in C_K^+$ y $\varepsilon > 0$, existe $n_o \in \mathbb{N}$ tal que

$$\mu_n \in \{\nu \in \mathcal{M} : |\nu f - \mu f| < \varepsilon\}$$

para $n \geq n_o$, de donde se sigue que $\mu_n f$ converge a μf. La otra implicación se demuestra de forma análoga.

Cuando consideramos el subespacio de $\mathcal{M}$ constituido por las medidas finitas, reemplazaremos C_K^+ por la clase de todas las funciones continuas y acotadas $f : G \to \mathbb{R}_+$, obteniendo la topología débil en $\mathcal{M}$, donde μ_n converge a μ en esta topología si y sólo si $\mu_n f \longrightarrow \mu f$ para toda función continua y acotada.

Los hechos mencionados arriba sobre las topologías vaga y débil junto con los siguientes lemas, permiten deducir propiedades de la topología vaga, semejantes a correspondientes propiedades de la convergencia en distribución.

Lema 1.1. *Sean* $\{f_k\}_{k\in\mathbb{N}} \subset C_K^+$, $\{G_k\}_{k\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{B}$ *tales que* $1 \geq f_k \geq 1_{G_k} \uparrow_{k\to\infty} 1$ *y* $\{\mu_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{M}$, *y supongamos que* $f_k\mu_n$ *converge débilmente a alguna* μ'_k *para cada* $k \in \mathbb{N}$. *Entonces*

$$\mu'_k (G_k \cap \cdot) = \mu'_{k+i} (G_k \cap \cdot) \tag{1.1}$$

para todo $i \in \mathbb{N}$.

Demostración: Sea k un índice fijo. Para cualesquiera $n \in \mathbb{N}$ y $f \in C_K^+$ tal que $\text{sop} f \subset G_k$ se cumple que

$$\begin{aligned}(f_{k+1}\mu_n) f &= \int_G f(x) f_{k+1}(x) \mu_n(dx) \\ &= \int_{G_k} f(x) f_{k+1}(x) \mu_n(dx)\end{aligned}$$

puesto que $f_{k+1}1_{G_k} = 1 = f_k 1_{G_k}$ obtenemos que

$$\begin{aligned}\int_{G_k} f(x) f_{k+1}(x) \mu_n(dx) &= \int_{G_k} f(x) f_k(x) \mu_n(dx) \\ &= (f_k\mu_n) f.\end{aligned}$$

Por tanto

$$\mu'_{k+1} f := \lim_{n\to\infty} (f_{k+1}\mu_n) f = \lim_{n\to\infty} (f_k \mu_n) f = \mu'_k f. \tag{1.2}$$

Si $B \subset G_k$ es abierto, entonces por la Proposición 1.1 existen una sucesión $\{B_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset G$ de abiertos relativamente compactos y una sucesión $\{g_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset C_K^+$ tales que $1_B \geq g_n \geq 1_{B_n} \uparrow_{n\to\infty} 1_B$. De la relación (1.2) se sigue que

$$\mu'_{k+1}(B) \geq \mu'_{k+1} g_n = \mu'_k g_n \geq \mu'_k (B_n) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \mu'_k (B),$$

entonces

$$\mu'_{k+1}(B) \geq \mu'_k (B)$$

y

$$\mu'_k (B) \geq \mu'_k g_n = \mu'_{k+1} g_n \geq \mu'_{k+1} (B_n) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \mu'_{k+1} (B),$$

entonces

$$\mu'_k (B) \geq \mu'_{k+1} (B),$$

de donde se sigue que

$$\mu'_k (B) = \lim_{n\to\infty} \mu'_{k+1} g_n = \mu'_{k+1} (B).$$

Para concluir que se cumple (1.1), obsérvese que la clase de subconjuntos abiertos y relativamente compactos de G_k es un $\pi-$sistema, y que la familia de subconjuntos relativamente compactos $B \subseteq G_k$ que cumplen $\mu'_k (B) = \mu'_{k+1} (B)$ para toda k es un $\lambda-$sistema. Luego la relación (1.1) se sigue del lema de clases monótonas. $\square$

Lema 1.2. *Sean $\{f_k\}_{k\in\mathbb{N}} \subset C_K^+$, $\{G_k\}_{k\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{B}$ tales que $1 \geq f_k \geq 1_{G_k} \uparrow_{k\to\infty} 1$, y sea $\{\mu_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{M}$. Entonces μ_n converge vagamente a alguna μ si y sólo si $f_k\mu_n$ converge débilmente a alguna $\mu'_k \in \mathcal{M}$ para cada $k \in \mathbb{N}$, en cuyo caso $\mu'_k = f_k \mu$ para $k \in \mathbb{N}$.*

Demostración: Es claro que la primera condición implica la segunda. Para demostrar que el reciproco es cierto definamos

$$\mu(B) = \max_k \mu'_k (G_k \cap B), \qquad B \in \mathcal{B}.$$

Para mostrar lo deseado es suficiente determinar a μ sobre $\mathcal{B}$, pues $\mathcal{B}$ es un $\pi-$sistema que contiene a todos los subconjuntos compactos de G, y la $\sigma-$álgebra generada por éstos coincide con $\mathfrak{B}(G)$. Entonces probaremos que μ es una medida de Radon y que μ_n converge vagamente a μ. Sea $B \in \mathcal{B}$ y G_k tal que $B \subset G_k$. Entonces

$$\mu(B) = \max_i \mu'_i (B),$$

y debido a la relación (1.1) se tiene que

$$\mu_i'(G_i \cap B) = \mu_{i+1}'(G_i \cap B) = \cdots = \mu_k'(G_i \cap B)$$

para toda $i \leq k$. Por otro lado

$$G_m \mu_m'(B) := \mu_m'(G_m \cap B) = \mu_m'(G_k \cap B) = G_k \mu_m'(B) = G_k \mu_k'(B)$$

para toda $m \geq k$, ya que se cumple $G_k \subset G_m$. Luego

$$\mu(B) = \max_{1 \leq i \leq k} \mu_k'(G_i \cap B) = \mu_k'(B). \tag{1.3}$$

De lo anterior se sigue que

i) μ es localmente finita,

ii) $\int f(x)\,\mu(dx) = \int f(x)\,\mu_k'(dx)$ para toda $f \in C_K^+$ con sop$f \subset G_k$,

iii) $\mu = f_k \mu_k'$ en G_k, pues $f_k = 1$ sobre G_k.

Demostraremos que μ es contablemente aditiva. Sea $B \in \mathcal{B}$ tal que $B = \cup_{n=1}^{\infty} B_n$, donde $B_1, B_2, \ldots,$ son elementos de $\mathcal{B}$ mutuamente disjuntos. Dado que todo B_n es relativamente compacto, existe para cada $n \in \mathbb{N}$ un menor índice j_n para el cual $B_n \subset G_{j_n}$; de la relación (1.3) se sigue que

$$\mu(B) = \mu_k'(B) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu_k'(B_n) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu_k'(G_{j_n} \cap B_n)$$

y debido a la relación (1.1)

$$\begin{aligned}
\mu(B) &= \sum_{n=1}^{\infty} \mu_k'(G_{j_n} \cap B_n) \\
&= \sum_{n=1}^{\infty} \mu_{j_n}'(G_{j_n} \cap B_n) \\
&= \sum_{n=1}^{\infty} \max_{1 \leq i \leq j_n} \mu_{j_n}'(G_i \cap B_n) \\
&= \sum_{n=1}^{\infty} \mu(B_n).
\end{aligned}$$

Finalmente, si $f \in C_K^+$ con sop$f \subset G_k$ para algún k, se cumple que

$$\mu_n f = \mu_n f_k f = (f_k \mu_n) f,$$

de donde se sigue que

$$\lim_{n \to \infty} \mu_n f = \lim_{n \to \infty} (f_k \mu_n) f = \mu_k' f = \mu f,$$

es decir μ_n converge vagamente a μ. $\square$

Teorema 1.1. *Sean $\mu \in \mathcal{M}$ y $\{\mu_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{M}$. Las siguientes condiciones son equivalentes*

i) μ_n *converge vagamente a* μ.

ii) $\liminf_{n\to\infty} \mu_n(B) \geq \mu(B)$ *para todo* $B \in \mathcal{B}$ *abierto y* $\limsup_{n\to\infty} \mu_n(F) \leq \mu(F)$ *para todo* $F \in \mathcal{B}$ *cerrado.*

iii) $\mu_n(B)$ *converge a* $\mu(B)$ *para todo* $B \in \mathcal{B}_\mu := \{S \in \mathcal{B} : \mu(\partial S) = 0\}$.

Demostración : i) $\Rightarrow$ *ii)* Sea $B \in \mathcal{B}$ abierto y supongamos que μ_n converge vagamente a μ. Aplicando la Proposición 1.1 a B y G, existen $\{g_n\}_{n\in\mathbb{N}}, \{f_k\}_{k\in\mathbb{N}} \subset C_K^+$ y sucesiones $\{B_n\}_{n\in\mathbb{N}}, \{G_k\}_{k\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{B}$ de abiertos acotados tales que

$$1_B \geq g_n \geq 1_{B_n} \uparrow_{n\to\infty} 1_B \qquad y \qquad 1 \geq f_k \geq 1_{G_k} \uparrow_{k\to\infty} 1.$$

Como $\{G_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ es creciente y existe k tal que $B \subset G_k$, y por el Lema 1.2, $f_k\mu_n$ converge débilmente a $f_k\mu$. Luego $f_k\mu_n(B) \geq f_k\mu_n(g_m)$ para toda m. Por convergencia monótona se sigue que

$$\liminf_{n\to\infty} f_k\mu_n(B) \geq \liminf_{n\to\infty} f_k\mu_n(g_m) = f_k\mu(g_m) \underset{m\to\infty}{\longrightarrow} f_k\mu(B),$$

es decir,

$$\liminf_{n\to\infty} \int_B f_k(x)\,\mu_n(dx) \geq \int_B f_k(x)\,\mu(dx).$$

Debido a que $f_k = 1$ sobre G_k resulta

$$\liminf_{n\to\infty} \mu_n(B) \geq \mu(B).$$

La afirmación referente a conjuntos cerrados en *ii)* se obtiene mediante otra aplicación de la Proposición 1.1.

ii) $\Rightarrow$ *iii)* Sea $B \in \mathcal{B}_\mu$. Entonces

$$\begin{aligned}
\limsup_{n\to\infty} \mu_n(B) &\leq \limsup_{n\to\infty} \mu_n\left(\overline{B}\right) \\
&\leq \mu\left(\overline{B}\right) \\
&= \mu(\mathrm{int}B) \\
&\leq \liminf_{n\to\infty} \mu_n(\mathrm{int}B) \\
&\leq \liminf_{n\to\infty} \mu_n(B),
\end{aligned}$$

es decir

$$\limsup_{n\to\infty} \mu_n(B) = \liminf_{n\to\infty} \mu_n(B) = \mu(B).$$

iii) $\Rightarrow$ *i)* Se afirma que dada la función $f \in C_K^+$, existe $C \in \mathcal{B}_\mu$ tal que $F \subset C$ es el sop f y

$$C\mu_n(B) = \mu_n(C \cap B) \longrightarrow \mu(C \cap B) = C\mu(B), \qquad B \in \mathcal{B}_\mu.$$

En efecto, nótese que por un argumento similar al de la demostración de la Proposición 1.1 existe $c > 0$ tal que los conjuntos

$$F^\varepsilon = \{x \in G : \rho(x, F) \leq \varepsilon\}, \qquad \varepsilon \in [0, c]$$

son acotados y, dado que μ es una medida de Radon, cumplen $\mu(F^\varepsilon) < \infty$ para todo $\varepsilon \in [0, c]$. Luego, para cada $n \in \mathbb{N}$, existe un conjunto finito $A_n \subset [0, c]$ tal que $\mu(\partial F^\varepsilon) < (n+1)^{-1}$ para todo $\varepsilon \in [0, c] \setminus A_n$, pues si esto no fuera cierto, existiría un $n \in \mathbb{N}$ tal que para cada $A \subset [0, c]$ finito hay un $\varepsilon_A \in [0, c] \setminus A_n$ tal que $\mu(\partial F^\varepsilon) > (n+1)^{-1}$. Como $\mu\{x \in G : \rho(x, F) \leq C\} \geq \mu\left(\bigcup_{\varepsilon_A} \mu(\partial F^\varepsilon)\right)$, entonces $\mu\{x \in G : \rho(x, F) \leq C\} = \infty$, lo cual es una contradicción. De esta forma $\mu(\partial F^\varepsilon) > 0$ sólo si $\varepsilon \in \cup_{n=1}^\infty A_n = A$. Tomemos $C = F^\varepsilon$ con $\varepsilon \in [0, c) \setminus A$. Entonces para cada $B \in \mathcal{B}_\mu$ se cumple $\partial(B \cap C) \subset \partial B \cup \partial C$, y en virtud de que $\mu_n(B)$ converge a $\mu(B)$ para todo $B \in \mathcal{B}_\mu$, se obtiene que

$$C\mu_n(B) = \mu_n(B \cap C) \longrightarrow \mu(B \cap C) = C\mu(B).$$

Sea $g : G \to \mathbb{R}$ una función continua y acotada con $a = \inf g(x)$ y $b = \sup g(x)$. Entonces dado $\varepsilon > 0$, existe una partición $a = t_0 < t_1 < \cdots < t_m = b$ tal que $t_j - t_{j-1} < \varepsilon$ y

$$\mu(\{x \in G : g(x) = t_j\} \cap C) = 0, \qquad j = 1, \ldots, m.$$

En efecto, tomemos una partición $a = x_0 < \cdots < x_n = b$ de (a, b) tal que $\max_j (x_j - x_{j-1}) < \varepsilon/2$. Para $t \in (x_{j-1}, x_j)$ denotemos $M_t = \{x \in G : g(x) = t\} \cap C$. Entonces

$$\mu(M_t) \leq \mu(\{x \in G : g(x) = (x_{j-1}, x_j)\} \cap C) < \infty.$$

Así, dado $n \in \mathbb{N}$, existe un conjunto finito $E_n \subset (x_{j-1}, x_j)$ tal que $\mu(M_t) < n^{-1}$ para todo $t \in (x_{j-1}, x_j) \setminus E_n$, es decir $\mu(M_t) > 0$ sólo si $t \in \cup_n E_n$. Tomando $t_j \in (x_{j-1}, x_j) \setminus \cup_n E_n$, se cumple que $\mu(\{x \in G : g(x) = t_j\} \cap C) = 0$, donde $t_j - t_{j-1} < \varepsilon$.

Sean $A_j = \{x \in G : t_{j-1} \leq g(x) \leq t_j\}$, $j = 1, \ldots, m$, donde los puntos t_j son los obtenidos en la partición anterior. Los conjuntos $A_1, \ldots, A_m$ son ajenos y cumplen

i) $G = \cup_j A_j$,

ii) $\mu(\left(\overline{A} \setminus \text{int} A_j\right) \cap C) = 0$,

iii) $\left(C \cap \overline{A_j}\right) \cap (\text{int}(C \cap A_j)) \subseteq (\overline{C} \cap \left(\overline{A_j} \setminus \text{int} A_j\right)) \cup (\left(\overline{C} \setminus \text{int} C\right) \cap \overline{A_j})$, de manera que

$$\mu(\left(\overline{C \cap A_j}\right) \setminus \text{int}(C \cap A_j)) = 0.$$

Aplicando *iii*) se sigue que $\mu_n(C \cap A_j) \longrightarrow \mu(C \cap A_j)$, para $j = 1, \ldots, m$. Definamos $g'(x) = \sum_j t_{j-1} 1_{A_j \cap C}(x)$, $x \in G$ y notemos que

$$\left| g'(x) - g(x) \right| < \varepsilon,$$

para $x \in C$. Luego $|C\mu_n(g) - C\mu(g)| \leq |C\mu_n(g') - C\mu(g')|$ y entonces

$$|C\mu_n(g) - C\mu(g)| \leq 2\varepsilon \max\{\mu(C), \mu_1(C), \ldots\} + \left| C\mu_n(g') - C\mu(g') \right|.$$

Haciendo $n \to \infty$ y $\varepsilon \to 0$, obtenemos que $|C\mu_n(g) - C\mu(g)|$ converge a 0, es decir $C\mu_n$ converge débilmente a $C\mu$, luego μ_n converge vagamente a μ. □

Definición 1.3. *i*) *Sea* $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ *un espacio de probabilidad y* Θ *una familia de elementos aleatorios* $\theta : \Omega \to G$. *Se dice que* Θ *es tensa si*

$$\inf_K \sup_{\theta \in \Theta} P\{\theta \in K^c\} = 0$$

donde el ínfimo se toma sobre todos los conjuntos $K \subset G$ *compactos.*

ii) *Se dice que* Θ *es relativamente compacta en la topología débil (topología vaga), si cualquier sucesión* $\{\theta_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ *de elementos de* Θ *tiene una subsucesión débilmente (vagamente) convergente.*

Teorema 1.2. ***(Prokhorov)*** *Sea* G *un espacio métrico separable y completo. Una familia de elementos aleatorios de* G *es relativamente compacta si y sólo si es tensa.*

Demostración : Ver [2] Teoremas 5.1 y 5.2. □

Teorema 1.3. *Sea* M *un subconjunto de* $\mathcal{M}$ *o* $\mathcal{N}$. *Entonces*

i) M *es relativamente compacto referente a la convergencia en la topología débil si y sólo si*

$$\sup_{\mu \in M} \mu(G) < \infty \quad e \quad \inf_{B \in \mathcal{B}} \sup_{\mu \in M} \mu(B^c) = 0.$$

ii) M *es relativamente compacto referente a la convergencia en la topología vaga si y sólo si*

$$\sup_{\mu \in M} \mu(B) < \infty, \qquad B \in \mathcal{B}.$$

Demostración : La afirmación relativa a convergencia débil es sólo una reformulación del teorema de Prokhorov.

Para demostrar *i*), probaremos que cualquier sucesión de medidas en M contiene una subsucesión $\{\mu_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ que converge vagamente si y sólo si $\sup_{\mu \in M} \mu(B) < \infty$ para $B \in \mathcal{B}$.

Sean $\{f_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ y $\{G_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ tales que $1 \geq f_k \geq 1_{G_k}$ con $G_k \uparrow G$. Es claro que μ_n converge vagamente a μ si y sólo si $f_k\mu_n$ converge débilmente a $f_k\mu$ para todo k, lo cual se cumple si y sólo si $\sup_{\mu\in M} f_k\mu(G) < \infty$ e $\inf_{B\in\mathcal{B}} \sup_{\mu\in M} f_k\mu(B^c) = 0$ para todo k, y esto implica que $\sup_{\mu\in M} \mu(B) < \infty$, para $B \in \mathcal{B}$.

Resta demostrar que si $\sup_{\mu\in M} \mu(B) < \infty$, entonces

$$\sup_{\mu\in M} \mu(G) < \infty \quad \text{e} \quad \inf_{B\in\mathcal{B}} \sup_{\mu\in M} \mu(B^c) = 0.$$

Sea $F_k = \operatorname{sop} f_k$. Luego para cualquier $k \in \mathbb{N}$ y $\mu \in \mathcal{M}$

$$f_k\mu(G) = f_k\mu(F_k) \leq \mu(F_k),$$

de donde se sigue que $\sup_{\mu\in M} f_k\mu(G) \leq \sup_{\mu\in M} \mu(F_k) < \infty$, y dado que $f_k\mu(F_k^c) = 0$ para $\mu \in M$, se concluye que $\inf_{B\in\mathcal{B}} \sup_{\mu\in M} f_k\mu(B^c) = 0$. □

Teorema 1.4. *Sean $\mu \in \mathcal{M}$ y $\{\mu_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{M}$ finitas. Las siguientes condiciones son equivalentes:*

i) μ_n converge débilmente a μ.

ii) μ_n converge vagamente a μ y $\mu_n(G) \longrightarrow \mu(G)$.

iii) μ_n converge vagamente a μ e $\inf_{B\in\mathcal{B}} \limsup_{n\to\infty} \mu_n(B^c) = 0$.

Demostración : *i)* ⇒ *ii)* Es obvio.

ii) ⇒ *iii)* Sea ε arbitrario, y $A \in \mathcal{B}$ abierto tal que $\mu(A^c) < \varepsilon/2$. Sea $f \in C_K^+$ tal que $f \leq 1_A$ y $\mu(1_A - f) < \varepsilon/2$. Entonces

$$\begin{aligned}
\limsup_{n\to\infty} \mu_n(A^c) &\leq \limsup_{n\to\infty} (\mu_n(G) - \mu_n f) \\
&= \mu(G) - \mu f \\
&= \mu(A^c) + \mu(A) - \mu f \\
&= \mu(A^c) + \mu(1_A - f) \\
&< \varepsilon.
\end{aligned}$$

iii) ⇒ *i)* Del Teorema 1.3 se sigue que $\{\mu_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ es relativamente compacto en la topología de convergencia débil. Así cualquier subsucesión $\{\mu_{n'}\}_{n'\in\mathbb{N}}$ de $\{\mu_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ contiene una subsucesión $\{\mu_{n''}\}_{n''\in\mathbb{N}}$ tal que $\mu_{n''}$ converge débilmente a μ'. Como $\mu_{n''}$ converge vagamente a μ' se sigue que $\mu = \mu'$, por lo tanto μ_n converge débilmente a μ. □

Teorema 1.5. *El espacio de medidas $\mathcal{M}$ con la topología vaga es métrico, separable y completo.*

Demostración : Sea $\mathcal{C}$ una base numerable de la topología de G. Supongamos que $\mathcal{C} \subset \mathcal{B}$ y que $\mathcal{C}$ es cerrado bajo uniones e intersecciones finitas. De la Proposición 1.1 se sigue que para cualquier $C \in \mathcal{C}$ existen abiertos $C_k \in \mathcal{B}$ y funciones $f_k^C \in C_K^+$, $k \in \mathbb{N}$, tales que $1_C \geq f_k^C \geq 1_{C_k}$, con $1_{C_k} \uparrow_{k\to\infty} 1_C$. Sea $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ una enumeración de $\cup_{C\in\mathcal{C}} \left\{f_k^C\right\}$. Entonces cada $\mu \in \mathcal{M}$ está unívocamente determinado por $\{\mu f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$. En efecto, por convergencia monótona, se sigue que la sucesión $\left\{\mu f_n^C\right\}_{n\in\mathbb{N}}$ determina $\mu(C)$, donde $C \in \mathcal{C}$ y debido a que $\mathcal{C}$ es $\pi-$sistema, se sigue que para cualquier $\mu \in \mathcal{M}$ la sucesión $\{\mu f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ determina unívocamente a μ.

Probaremos que μ_n converge vagamente a una medida μ si y sólo si $\mu_n f_k \longrightarrow c_k \in \mathbb{R}_+$ para toda $k \in \mathbb{N}$, en cuyo caso $c_k = \mu f_k$. En efecto, si $\mu_n f_k \longrightarrow_{n\to\infty} c_k \in \mathbb{R}_+$ para toda $k \in \mathbb{N}$, entonces $\{\mu_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ es relativamente compacta en la topología vaga, pues si $B \in \mathcal{B}$, existen $C \in \mathcal{C}$ y $k \in \mathbb{N}$ tales que $1_C \geq f_k \geq 1_B$, y por tanto

$$\sup_n \mu_n(B) \leq \sup_n \mu_n f_k < \infty.$$

Entonces del Teorema 1.3 se sigue que $\{\mu_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ es relativamente vagamente compacto. Así, cualquier subsucesión $\left\{\mu_{n_i}\right\}_{n_i\in\mathbb{N}}$ de $\{\mu_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ posee una subsucesión $\left\{\mu_{n_{i_j}}\right\}_{n_{i_j}\in\mathbb{N}}$ tal que $\left\{\mu_{n_{i_j}}\right\}_{n_{i_j}\in\mathbb{N}}$ converge vagamente alguna medida μ. Entonces $c_k = \mu f_k$, y como $\{\mu f_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ determina a μ, se obtiene que μ_n converge vagamente a μ. La otra implicación se sigue de la definición de convergencia vaga.

De acuerdo a este criterio de convergencia vaga, la topología vaga en $\mathcal{M}$ es inducida por la métrica

$$\rho(\mu,\nu) = \sum_{n=1}^{\infty} 2^{-n}(1 - \exp(-|\mu f_n - \nu f_n|)),\ \mu,\nu \in \mathcal{M}.$$

Verifiquemos a continuación la separabilidad y completez de $\mathcal{M}$.

i) Considerémos la función $h : \mathcal{M} \to \operatorname{Im} h \subset \mathbb{R}^\infty$, donde $\operatorname{Im} h$ es la imagen de h y la función h está dada por

$$\mu \mapsto (\mu f_1, \mu f_2, ...)$$

Dado que $\{\mu f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ determina unívocamente a μ, se sigue que h es inyectiva y por tanto biyectiva. Debido al criterio de convergencia vaga que se acaba de demostrar en el segundo párrafo de esta demostración se deduce que h y h^{-1} son continuas. Entonces h es un homeomorfismo, de donde se sigue $\mathcal{M}$ es separable ya que $\mathbb{R}^\infty$ es separable y métrico.

ii) Supongamos que $\{\mu_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{M}$ es una suceción de Cauchy, es decir para $\varepsilon > 0$ existe

$N(\varepsilon)$ tal que

$$\rho(\mu_n, \mu_m) = \sum_{i=1}^{\infty} 2^{-i}(1 - \exp(-|\mu_n f_i - \mu_m f_i|)) \leq \varepsilon,$$

para toda $n, m \geq N(\varepsilon)$. Entonces cada sucesión $\{\mu_n f_i\}_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{R}$, $i \in \mathbb{N}$, es de Cauchy, por tanto para cada $i \in \mathbb{N}$ existe un $c_i \in \mathbb{R}_+$, tal que $\mu_n f_i \longrightarrow c_i$, luego debido al criterio de convergencia vaga que se acaba de demostrar en el segundo párrafo de esta demostración se cumple que para toda $i \in \mathbb{N}$ existe $\mu \in \mathcal{M}$ tal que $\mu_n f_i \longrightarrow \mu f_i$. Verifiquemos que $\mu_n \longrightarrow \mu$. Sea $\varepsilon > 0$, entonces existen $K_0, N_0 \in \mathbb{N}$ tales que

$$\sum_{i=K_0+1}^{\infty} 2^{-i}(1 - \exp(-|\mu_n f_i - \mu f_i|)) \leq \varepsilon/2$$

para toda $n \in \mathbb{N}$, y

$$\sum_{i=1}^{K_0} 2^{-i}(1 - \exp(-|\mu_n f_i - \mu f_i|)) \leq \varepsilon/2$$

para toda $n \geq N_0$. Por tanto

$$\begin{aligned} \rho(\mu_n, \mu) &= \sum_{i=K_0+1}^{\infty} 2^{-i}(1 - \exp(-|\mu_n f_i - \mu f_i|)) \\ &\quad + \sum_{i=1}^{K_0} 2^{-i}(1 - \exp(-|\mu_n f_i - \mu f_i|)) \\ &\leq \varepsilon \end{aligned}$$

para todo $n \geq N_0$. Por lo tanto $\mathcal{M}$ es completo. □

1.3. $\sigma-$ álgebras de $\mathcal{M}$ y $\mathcal{N}$

Sea $\mathcal{A} \subseteq \mathfrak{B}(G)$ y $\varphi_A : \mathcal{M} \to \overline{\mathbb{R}}_+$ definida por $\varphi_A(\mu) = \mu(A)$, $A \in \mathcal{A}$. Ponemos $\mathcal{S}(\mathcal{A}) = \sigma\{\varphi_A : A \in \mathcal{A}\}$, es decir $\mathcal{S}(\mathcal{A})$ es la $\sigma-$álgebra en $\mathcal{M}$ generada por los cilindros

$$\{\mu \in \mathcal{M} : \mu(A_1) \in B_1, \ldots, \mu(A_k) \in B_k\},$$

donde $A_j \in \mathcal{A}$, $B_j \in \mathfrak{B}(\overline{\mathbb{R}}_+)$, $j = 1, \ldots, k$; $k = 1, 2, \ldots$.

Denotemos por $\mathfrak{M}$ y $\mathfrak{N}$ *a* las $\sigma-$álgebras de Borel de $\mathcal{M}$ y $\mathcal{N}$ respectivamente.

Proposición 1.2. *i)*$\mathcal{S}(\mathfrak{B}(G)) = \mathfrak{M}$

ii)$\mathcal{S}(\mathfrak{B}(G)) := \sigma\{\varphi_A|_{\mathcal{N}} : \mathcal{N} \to \overline{\mathbb{R}}_+ \mid A \in \mathfrak{B}(G)\} = \mathfrak{N}$.

Demostración : Verificaremos sólo la primera igualdad; la segunda se demuestra de forma análoga.

Veamos primero que $\mathfrak{M} \subseteq \mathcal{S}(\mathfrak{B}(G))$.

Aproximando a $f \in C_K^+$ por funciones simples y luego usando el teorema de convergencia dominada se demuestra que los mapeos $\mu \mapsto \mu f$, $f \in C_K^+$, son $\mathcal{S}(\mathfrak{B}(G))-$medibles. Por lo tanto las vecindades básicas de la topología vaga

$$\{\mu : |\mu f_i - \nu f_i| < \varepsilon,\, 1 \leq i \leq m\}$$

$i = 1, 2, \ldots,$ $f_i \in C_K^+$, $\varepsilon \in \mathbb{R}_+, \nu \in \mathcal{M}$, pertenecen a $\mathcal{S}(\mathfrak{B}(G))$. Así $\mathfrak{M} \subseteq \mathcal{S}(\mathfrak{B}(G))$.

Probaremos ahora que $\mathcal{S}(\mathfrak{B}(G)) \subseteq \mathfrak{M}$.

Paso 1) Sea $H \subseteq G$ abierto. Por la Proposición 1.1 existe sucesión $\{f_k\}_{n\in\mathbb{N}} \subseteq C_K^+$ tal que $f_k \uparrow_{k\to\infty} 1_H$. Por lo tanto $\mu(H) = \lim_{n\to\infty} \mu f_n = \sup \mu f_n$. Por convergencia monótona se concluye que los mapeos $\mu \mapsto \mu(H)$, $H \subseteq G$ abierto, son $\mathfrak{M}-$medibles.

Paso 2) Sea $K \subset G$ compacto. Dado que $G = \bigcup_{j=1}^{\infty} K_j$ y $K_j \subset \mathrm{Int}K_{j+1}$, existe un i tal que $K \subset \mathrm{Int}K_i$. Sea

$$G^{1/n} = \{x \in G : \rho(x, K) < 1/n\} \bigcap \mathrm{Int}K_i, \qquad n \in \mathbb{N}.$$

Entonces $K = \bigcap_{n=1}^{\infty} G^{1/n}$ y $\mu\left(G^{1/n}\right) < \infty$ para cualesquiera $n \in \mathbb{N}$ y $\mu \in \mathcal{M}$. Por otro lado, cualquier abierto $H \subseteq G$ cumple $\mu(H \bigcap K) = \inf_n \mu\left(H \bigcap G^{1/n}\right)$, $\mu \in \mathcal{M}$. Del paso 1 se concluye que los mapeos $\mu \mapsto \mu(H \bigcap K)$, con $H \subseteq G$ abierto y $K \subset G$ compacto, son $\mathfrak{M}-$medibles.

Paso 3) Sea $D_j = \left\{A \in \mathfrak{B}(G) : \varphi_{A\cap K_j} \text{ es } \mathfrak{M} - \text{medible}\right\}$. Es fácil ver que D_j es un $\lambda-$sistema, y debido al paso 2, que contiene al $\pi-$sistema constituído por los abiertos de G, lo cual implica que $\mathfrak{B}(G) \subset D_j$ para todo j. Si $A \in \mathfrak{B}(G)$ entonces $\varphi_A = \lim_{j\to\infty} \varphi_{A\cap K_j}$, pues $K_j \uparrow G$, de donde se sigue que φ_A es $\mathfrak{M}-$medible para todo $A \in \mathfrak{B}(G)$, es decir, $\mathcal{S}(\mathfrak{B}(G)) \subseteq \mathfrak{M}$. $\square$

1.4. Teorema de Consistencia de Kolmogorov

El objetivo de esta sección es demostrar a partir del teorema general de consistencia de Kolmogorov, la existencia de límites proyectivos de sistemas de distribuciones multivariadas en el espacio de medidas $\mathcal{M}$. Por lo tanto se dará el teorema general de consistencia de Kolmogorov.

Iniciaremos esta sección dando la definición de límite de conjuntos, la cual será utilizada en el desarrollo de algunas demostraciones de esta sección.

Definición 1.4. *Sean $A_1, A_2, ...$ subconjuntos de Ω. Definimos*

i) $\limsup A_n = \bigcap_{n=1}^{\infty} \bigcup_{k=n}^{\infty} A_k$.

ii) $\liminf A_n = \bigcup_{n=1}^{\infty} \bigcap_{k=n}^{\infty} A_k$.

iii) Si $\limsup A_n = \liminf A_n = A$, *entonces A es el límite de la sucesión $A_1, A_2, ...$, y escribimos $A = \lim A_n$.*

Sea $T \neq \phi$ y $\{(\Omega_t, \mathcal{F}_t), t \in T\}$ una familia de espacios medibles. Para cualquier $U \subseteq T$ definamos $\prod_{t\in U} \Omega_t$ como el conjunto de funciones $f : U \to \bigcup_{t\in T} \Omega_t$ tales que $f(t) \in \Omega_t$. Para todo $V \subseteq U \subseteq T$ sea $\prod_V^U$ la proyeccion de $\prod_{t\in U} \Omega_t$ sobre $\prod_{t\in V} \Omega_t$, es decir, $\prod_V^U (f) = f|_V$. Denotemos por fT a la clase de subconjuntos finitos de T. Si $U \in fT$ consideraremos la $\sigma-$álgebra producto $\prod_{t\in U} \mathcal{F}_t$ y $\prod_{t\in T} \mathcal{F}_t$ la menor $\sigma-$álgebra en $\prod_{t\in T} \Omega_t$ tal que hace que todas las proyecciones $\prod_U^T$, $U \in fT$, sean $\prod_{t\in T} \mathcal{F}_t \diagup \prod_{t\in U} \mathcal{F}_t$ medibles.

Si P es una medida de probabilidad en $\left(\prod_{t\in T} \Omega_t,\ \prod_{t\in T} \mathcal{F}_t\right)$ definimos para cualquier $U \in fT$, $P_U = P\left(\prod_U^T\right)^{-1}$. Entonces se cumple $P_V = P_U\left(\prod_V^U\right)^{-1}$ para $V \subseteq U \in fT$.

Definición 1.5. *Para cada $U \in fT$ sea dada una medida de probabilidad P_U en el espacio medible $\left(\prod_{t\in U} \Omega_t,\ \prod_{t\in U} \mathcal{F}_t\right)$. Diremos que $\{P_U, U \in fT\}$ es un sistema proyectivo o consistente en $\left(\prod_{t\in T} \Omega_t,\ \prod_{t\in T} \mathcal{F}_t\right)$, si se cumple $P_V = P_U\left(\prod_V^U\right)^{-1}$ para todo $V \subseteq U$, con $U \in fT$.*

En el siguiente teorema se dan condiciones suficientes para construir a partir de un sistema proyectivo $\{P_U, U \in fT\}$, una única medida de probabilidad P en $\left(\prod_{t\in T} \Omega_t,\ \prod_{t\in T} \mathcal{F}_t\right)$ tal que $P_U = P\left(\prod_U^T\right)^{-1}$, donde $U \in fT$. A tal medida P le llamaremos límite proyectivo de $\{P_U, U \in fT\}$ y la denotaremos por $\varprojlim_{U\in fT} P_U$.

Teorema 1.6. ***(De consistencia de Kolmogorov)*** *Sean dados $T \neq \phi$ y $\{P_U, U \in fT\}$ un sistema proyectivo en $\left(\prod_{t\in T} \Omega_t,\ \prod_{t\in T} \mathcal{F}_t\right)$. Supongamos que para cada $t \in T$ hay una familia $\mathcal{U}_t \subset \mathcal{F}_t$ que es secuencialmente compacta, en el sentido de que para cualquier sucesión $\{A_n\} \subset \mathcal{U}_t$ con $\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n = \phi$, existe $m \in \mathbb{N}$ tal que $\bigcap_{n=1}^{m} A_n = \phi$. Supongamos además que $\{P_U, U \in fT\}$ es tensa, en el sentido de que para cualquier $t \in T$ y $B \in \mathcal{F}_t$ se cumple $P_{\{t\}}(B) = \sup_{A\in\mathcal{U}_t; A\subset B} P_{\{t\}}(A)$. Entonces existe un único límite proyectivo de $\{P_U, U \in fT\}$.*

Demostración : Ver [1] Teorema 2.7.5. □

Corolario 1.1. *Si* $\{P_U,\, U\in fT\}$ *es un sistema proyectivo en el espacio* $\left(\prod_{t\in T}\Omega_t,\ \prod_{t\in T}\mathcal{F}_t\right)$, *donde para cualquier* $t\in T$, Ω_t *es métrico, separable y completo, con* $\mathcal{F}_t=\mathfrak{B}\left(\Omega_t\right)$, *entonces existe un único límite proyectivo de* $\{P_U,\, U\in fT\}$.

Demostración : Debido a que las medidas finitas en un espacio métrico separable y completo son tensas y regulares (ver [2], Teoremas 1.1 y 1.3), $\mathcal{U}_t$ puede ser tomado como la clase de los subconjuntos compactos de Ω_t y por lo tanto, según al teorema 1.6, es suficiente ver que dicha clase es secuencialmente compacta.

Sea $\{A_n\}\subset\mathcal{U}_t$ tal que $\bigcap_n A_n=\phi$. Entonces $\Omega_t=\bigcup_n A_n^c$ y existen índices $n_1,\ldots,n_m$ tales que $A_1\subset\bigcup_{j=1}^m A_{n_j}^c$, pues A_1 es compacto. Claramente $\bigcap_{j=1}^{n_m}A_j\subset A_1$. Si $\bigcap_{j=1}^m A_{n_j}\neq\phi$, entonces existe $x\in G$ tal que $x\in\bigcap_{j=1}^{n_m}A_j$ y $x\notin\bigcup_{j=1}^m A_{n_j}^c$, de donde se sigue que $\bigcap_{j=1}^{n_m}A_j\nsubseteq\bigcup_{j=1}^m A_{n_j}^c$, lo cual es una contradicción, pues $\bigcap_{j=1}^{n_m}A_j\subset A_1$. Aplicando el Teorema 1.6 se obtiene lo deseado. □

Sea $\mathfrak{D}$ una base numerable de la topología de G que es cerrada bajo uniones e intersecciones finitas y tal que $\phi,\, G\in\mathfrak{D}$.

Lema 1.3. *Sea* $\mathfrak{A}$ *la clase de uniones finitas y ajenas de diferencias propias de elementos de* $\mathfrak{D}$. *Entonces* $\mathfrak{A}$ *es numerable y es el álgebra generada por* $\mathfrak{D}$.

Demostración: Como $\mathfrak{A}$ es la clase de uniones finitas y ajenas de diferencias propias de elementos de $\mathfrak{D}$ y dado que $\mathfrak{D}$ es numerable, se sigue que $\mathfrak{A}$ es numerable.

Veamos que $\mathfrak{A}$ es la álgebra generada por $\mathfrak{D}$. Primero observemos que si $A,B,C,D\in\mathfrak{D}$ con $B\subset A$ y $D\subset C$, entonces

$$(A\setminus B)\bigcap(C\setminus D)=(A\cap C)\setminus(B\cup D)=(A\cap C)\setminus(\,(B\cap C)\bigcup(A\cap D)\,)\in\mathfrak{A}.$$

Sean $A=\bigcup_{j=1}^{l_1}(A_j\setminus B_j)$, $B=\bigcup_{n=1}^{l_2}(C_n\setminus D_n)$ dos uniones de conjuntos disjuntos y $C,D\in\mathfrak{D}$ con $C\subset D$. Entonces se cumple que

$$A\cap B=\bigcup_{j,n}(\,(A_j\setminus B_j)\cap(C_n\setminus D_n)\,)\in\mathfrak{A},$$

y

$$(D\setminus C)^c=(C\setminus\phi)\bigcup(G\setminus D)\in\mathfrak{A},$$

es decir $\mathfrak{A}$ es cerrado bajo intersecciones finitas y bajo complementación, por tanto $\mathfrak{A}$ es álgebra. Si $\mathcal{B}$ es un álgebra tal que $\mathfrak{D}\subset\mathcal{B}$, entonces $A\in\mathcal{B}$ para $A\in\mathfrak{A}$, y así $\mathfrak{A}$ es el álgebra generada por $\mathfrak{D}$. □

A continuación procederemos a construir una medida de probabilidad en $(\mathcal{M},\mathfrak{M})$, para lo cual utilizaremos el teorema de consistencia de Kolmogorov.

En el teorema de consistencia de Kolmogorov, pongamos $T = \mathfrak{A}$, donde $\mathfrak{A}$ es como en el Lema 1.3, y $\Omega_t = \overline{\mathbb{R}}_+$, con $\mathcal{F}_t = \mathfrak{B}\left(\overline{\mathbb{R}}_+\right)$ para todo t. Sea $\{P_U,\, U \in f\mathfrak{A}\}$ un sistema proyectivo. Entonces $P = \varprojlim_{U\in f\mathsf{A}} P_U$ es la única medida de probabilidad en $\overline{\mathbb{R}}_+^{\mathsf{A}} = \left\{f \mid f : \mathfrak{A} \to \overline{\mathbb{R}}_+\right\}$ tal que

$$\begin{aligned} & P_{\{A_1,\ldots,A_n\}}\left\{\varphi \in \overline{\mathbb{R}}_+^{\{A_1,\ldots,A_n\}} : (\varphi(A_1),\ldots,\varphi(A_n)) \in E\right\} \\ = \; & P\left\{\varphi \in \overline{\mathbb{R}}_+^{\mathsf{A}} : (\varphi(A_1),\ldots,\varphi(A_n)) \in E\right\} \end{aligned}$$

donde $E \in \mathfrak{B}\left(\overline{\mathbb{R}}_+^n\right)$, $\{A_1,\ldots,A_n\} \in f\mathfrak{A}$.

Nótese que $\overline{\mathbb{R}}_+^{\{A_1,\ldots,A_n\}}$ se puede identificar con $\overline{\mathbb{R}}_+^n$ mediante la aplicación

$$T : \overline{\mathbb{R}}_+^{\{A_1,\ldots,A_n\}} \to \overline{\mathbb{R}}_+^n$$

dada por $\varphi \mapsto (\varphi(A_1),\ldots,\varphi(A_n))$. Definamos $P_{A_1,\ldots,A_n} = P_{\{A_1,\ldots,A_n\}}T^{-1}$. Para concentrar toda la masa de P en el subconjunto de $\overline{\mathbb{R}}_+^{\mathsf{A}}$ que contiene a todas las funciones en $\mathfrak{A}$ que son contablemente aditivas, finitas en conjuntos compactos, son necesarias las siguientes condiciones:

1) Si $A, B \in \mathfrak{A}$ y $A \bigcap B = \phi$, entonces

$$P_{A,B,A\cup B}\left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x + y = z\right\} = 1.$$

2) Si $\{A_n\} \subset \mathfrak{A}$ y $A_n \downarrow \phi$, entonces $\text{lím}_{n\to\infty} P_{A_n}([0,t]) = 1$ para toda $t > 0$.

3) Si $A \in \mathfrak{A}$ es acotado, entonces $P_A(\mathbb{R}_+) = 1$.

De 1) se deduce que para cualquier pareja $A, B \in \mathfrak{A}$ de conjuntos disjuntos

$$P\left\{\varphi \in \overline{\mathbb{R}}_+^{\mathsf{A}} : \varphi(A) + \varphi(B) = \varphi(A \cup B)\right\} = 1.$$

Por el Lema 1.3 sabemos que el conjunto de tales parejas es contable. Se sigue que P asigna probabilidad 1 al conjunto de funciones reales finitamente aditivas en $\mathfrak{A}$. Por 2)

$$P\left\{\varphi \in \overline{\mathbb{R}}_+^{\mathsf{A}} : \varphi(\phi) = 0\right\} = P_{\{\phi\}}\{0\} = 1,$$

y por 3) para $A \in \mathfrak{A}$ acotado

$$P\left\{\varphi \in \overline{\mathbb{R}}_+^{\mathsf{A}} : \varphi(A) < \infty\right\} = 1.$$

Proposición 1.3. *Sean G compacto, $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{D}$ como en el Lema 1.3, y $\{P_U, U \in f\mathfrak{A}\}$ un sistema proyectivo como arriba. Supongamos que se cumplen las condiciones* 1), 2), 3) *mencionados arriba. Entonces existe una única medida de probabilidad P en $(\mathcal{M}, \mathfrak{M})$ tal que*

$$P\{\mu \in \mathcal{M} : (\mu(A_1), \ldots, \mu(A_n)) \in E\} = P_{A_1,\ldots,A_n}(E),$$

donde $\{A_1, \ldots, A_n\} \in f\mathfrak{A}$ y $E \in \mathfrak{B}\left(\mathbb{R}^n_+\right)$.

Demostración : Sea $H \subset G$ abierto. Entonces H^c es compacto y para cada $x \in H$ existen conjuntos disjuntos U_x, $V_x \in \mathfrak{D}$ tales que $x \in U_x \subset H$ y $H^c \subset V_x$. Entonces

$$\bigcup_{x\in H} V_x^c \subset H \subset \bigcup_{x\in H} U_x \subset \bigcup_{x\in H} V_x^c,$$

luego

$$H = \bigcup_{x\in H} V_x^c.$$

Como cada $V_x \in \mathfrak{D}$, sólo una cantidad numerable de conjuntos aparece en la última unión, luego para $H \subset G$ abierto se cumple

$$H = \bigcup_{n=1}^{\infty} H(n),$$

donde $H(n) \in \mathfrak{A}$ y se cumple que $H(n)$ es cerrado para toda n. Si $H = H_1 \diagdown H_2$ es una diferencia propia de subconjuntos abiertos, obtenemos por lo comentado anteriormente que $H_1 = \bigcup_{n=1}^{\infty} H_1(n)$ donde $H_1(n) \in \mathfrak{A}$ y $H_1(n)$ es cerrado para toda n. Luego, $H = \left(\bigcup_{n=1}^{\infty} H_1(n)\right) \diagdown H_2 = \bigcup_{n=1}^{\infty} H(n)$, donde $H(n) = H_1(n) \cap H_2^c \in \mathfrak{A}$ y $H(n)$ es un conjunto cerrado para toda n. Como todos los elementos de $\mathfrak{A}$ son uniones finitas de tales diferencias, se cumple para todo $A \in \mathfrak{A}$ que $A = \bigcup_{n=1}^{\infty} A(n)$, con $A(n) \in \mathfrak{A}$ cerrado. Como $\mathfrak{A}$ es un álgebra, podemos suponer que $\{A(n)\}$ es creciente.

Sea Ω_0 el conjunto de todas las funciones $\varphi : \mathfrak{A} \to \overline{\mathbb{R}}_+$ que son finitamente aditivas, $\varphi(\phi) = 0$ y $\lim_{n\to\infty} \varphi(A \diagdown A(n)) = 0$ para todo $A \in \mathfrak{A}$. Notemos que $P(\Omega_0) = 1$. En efecto, sean

$$\begin{aligned} A &= \left\{\varphi \in \mathbb{R}^{\mathsf{A}} : \varphi \text{ es finitamente aditiva}\right\}; \\ B &= \left\{\varphi \in \mathbb{R}^{\mathsf{A}} : \varphi(\phi) = 0\right\}; \\ C &= \bigcap_{A\in\mathsf{A}} \left\{\varphi \in \mathbb{R}^{\mathsf{A}} : \lim_{n\to\infty} \varphi(A \diagdown A_n) = 0\right\}. \end{aligned}$$

De las condiciones 1) y 2) se sigue que $P(A) = P(B) = 1$ y dado que $\mathfrak{A}$ es contable, $P(C) = 1$ y por lo tanto $P(\Omega_0) = P(A \bigcap B \bigcap C) = 1$. Más aún, todas las funciones en Ω_0 son $\sigma-$aditivas. En efecto, tomemos $\varphi \in \Omega_0$ y una sucesión decreciente de conjuntos $\{A_k\} \subset \mathfrak{A}$ tal que $\varphi(A_k) \geq \alpha > 0$ para algún α. Entonces para cada $k \in \mathbb{N}$ existe un n_k que satisface

$$\varphi(A_k \diagdown A_k(n_k)) < \alpha 2^{-k-1},$$

donde $A_k(n_k)$ pertenece a la sucesión creciente $\{A_k(n)\}$ tal que $A_k = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_k(n)$, donde $A_k(n) \in \mathfrak{A}$ y $A_k(n)$ es cerrado para toda n. Sea $F_j = \cap_{k=1}^{j} A_k(n_k)$, donde F_j es cerrado y $F_{j+1} \subset F_j$ para toda j. Entonces $F_j = A_j \diagdown \bigcup_{k=1}^{j} (A_k \diagdown A_k(n_k))$. Luego

$$\begin{aligned}
\varphi(F_j) &\geq \varphi(A_j) - \varphi\left(\bigcup_{k=1}^{j} (A_k \diagdown A_k(n_k))\right) \\
&\geq \varphi(A_j) - \sum_{j=1}^{k} (\varphi A_k \diagdown A_k(n_k)) \\
&\geq \alpha/2.
\end{aligned}$$

Como G es compacto $\bigcap_j A_j \supset \bigcap_j F_j \neq \phi$. Luego $\lim_n A_n \neq \phi$, de donde se sigue que φ es contablemente aditiva.

Como la $\sigma-$álgebra generada por $\mathfrak{A}$ es igual a $\mathfrak{B}(G)$, entonces del teorema de extensión de Caratheodory se sigue que cualquier $\varphi \in \Omega_0$ se extiende de manera única a una medida de Radon μ_φ en $\mathfrak{B}(G)$.

Sea la función medible

$$\varsigma : \left(\Omega_0, \Omega_0 \cap \left[\mathfrak{B}\left(\overline{\mathbb{R}}_+\right)\right]^{\mathsf{A}}, P|_{\Omega_0}\right) \to (\mathcal{M}, \mathfrak{M})$$

dada por $\varphi \mapsto \mu_\varphi$, donde $\left[\mathfrak{B}\left(\overline{\mathbb{R}}_+\right)\right]^{\mathsf{A}}$ denota la $\sigma-$álgebra generada por la clase de conjuntos

$$\left\{\varphi \in \overline{\mathbb{R}}_+^{\mathsf{A}} : (\varphi(A_1), \ldots, \varphi(A_n)) \in E\right\},$$

con $A_j \in \mathfrak{A}$, $E \in \mathfrak{B}\left(\mathbb{R}_+^n\right)$. Tomemos $Q(\cdot) = P\varsigma^{-1}(\cdot)$. Entonces se cumple

i) $Q(\mathcal{M}) = P\varsigma^{-1}(\mathcal{M}) = P(\Omega_0) = 1$.

ii) $Q\{\mu\in\mathcal{M}:(\mu(A_1),\ldots,\mu(A_n))\in E\}$

$$\begin{aligned}
&= P\varsigma^{-1}\{\mu\in\mathcal{M}:(\mu(A_1),\ldots,\mu(A_n))\in E\}\\
&= P\{\varphi\in\Omega_0:(\mu(A_1),\ldots,\mu(A_n))\in E\}\\
&= P\left(\left\{\varphi\in\overline{\mathbb{R}}_+^{\mathsf{A}}:(\varphi(A_1),\ldots,\varphi(A_n))\in E\right\}\diagdown\Omega_0^c\right)\\
&= P\left(\left\{\varphi\in\overline{\mathbb{R}}_+^{\mathsf{A}}:(\varphi(A_1),\ldots,\varphi(A_n))\in E\right\}\right)-P(\Omega_0^c)\\
&= P_{A_1,\ldots,A_n}(E)-P(\Omega_0^c)\\
&= P_{A_1,\ldots,A_n}(E),
\end{aligned}$$

de donde se concluye que Q es la medida buscada.

Si Q' es otra medida con estas características, entonces se sigue de los cálculos anteriores que $Q'=P\varsigma^{-1}$ en los cilindros

$$\{\mu\in\mathcal{M}:(\mu(A_1),\ldots,\mu(A_n))\in E\},$$

donde $A_j\in\mathfrak{A}$, $E\in\mathfrak{B}(\mathbb{R}_+^n)$ y por tanto $Q'=Q$. □

Teorema 1.7. *Sea $\{K_j\}_{j=1}^{\infty}$ una sucesión de compactos en G, $K_j\subset K_{j+1}$, $G=\bigcup_{j=1}^{\infty}K_j$. Supongamos que $\mathfrak{A}$ es la álgebra más chica en G que contiene a $\{K_j\}$ y a una base contable de la topología en G. Si $\{P_U,\,U\in f\mathfrak{A}\}$ es un sistema proyectivo que satisface las condiciones* 1), 2), 3), *entonces existe una única medida de probabilidad P en $(\mathcal{M},\mathfrak{M})$ tal que para cualesquiera $A_1,\ldots,A_n\in\mathfrak{A}$, $E\in\mathfrak{B}(\overline{\mathbb{R}}_+^n)$*

$$P\{\mu\in\mathcal{M}:(\mu(A_1),\ldots,\mu(A_n))\in E\}=P_{A_1,\ldots,A_n}(E).$$

Demostración : Sean $\mu\in\mathcal{M}$ y $\mu_j=\mu\,|_{K_j}$. El mapeo ψ dado por $\mu\mapsto(\mu_1,\mu_2,\ldots)$ es inyectivo de $\mathcal{M}$ sobre $\prod_{j=1}^{\infty}\mathcal{M}_j$, donde $\mathcal{M}_j$ es el conjunto de medidas de Radon en K_j. Para cada j

$$\{P_U:U\in f\mathfrak{A},\text{ cada elemento de }U\text{ incluido en }K_j\}$$

es un sistema proyectivo que satisface 1), 2), 3). Por la Proposición anterior tal sistema tiene un límite proyectivo P_j en $(\mathcal{M}_j,\mathfrak{B}(\mathcal{M}_j))$. Consideremos ahora $U=\{n_1,\ldots,n_l\}$ un subconjunto de $\mathbb{N}$ donde $n_1=\max U$. Para $E\in\prod_{j\in U}\mathfrak{M}_j$ definamos

$$P_U(E)=P_{n_1}\left\{\mu\in\mathcal{M}_{n_1}:\prod_{j\in U}\mu\,|_{K_j}\in E\right\}.$$

Notemos que $\{P_U:U\in f\mathbb{N}\}$ es un sistema proyectivo que cumple $P_{\{j\}}=P_j$ para todo j. Como $\mathcal{M}_j$ es el espacio de medidas de Radon en K_j, $j\in\mathbb{N}$, del Teorema 1.5 se sigue que

$\mathcal{M}_j$ es métrico, separable y completo. Luego, por el Corolario 1.1, se cumple que existe una única medida de probabilidad P_0 en $\left(\prod_{j\in T}\mathcal{M}_j, \prod_{j\in T}\mathfrak{B}\left(\mathcal{M}_j\right)\right)$. La medida buscada P es $P_0\circ\psi$, ya que si $E\in\mathfrak{M}$, entonces $\psi\left(E\right)\in\prod_{j\in T}\mathfrak{B}\left(\mathcal{M}_j\right)$ y por tanto $P\left(E\right)=P_0\circ\psi\left(E\right)$.$\square$

Capítulo 2

Medidas y Campos Aleatorios

En este capítulo demostraremos la regularidad y tensión de las medidas de probabilidad en ($\mathcal{M}$,$\mathfrak{M}$) y daremos algunos resultados importantes acerca de la función característica y transformada de Laplace de tales medidas de probabilidad; se introduce además el concepto de medida aleatoria y se definen la distribución, intensidad y transformada de Laplace de una medida aleatoria. Finalmente se introduce el concepto de campo aleatorio, se dan algunos resultados importantes sobre éstos, y se definen los campos aleatorios de Poisson.

2.1. Regularidad de las medidas en $\mathcal{M}$

Iniciaremos esta sección con el siguiente lema, el cual es de gran importancia para nuestros propósitos.

Lema 2.1. *Sean $G = \cup_{j=1}^{\infty} K_j$, donde $K_j \subset \mathrm{Int}K_{j+1}$, con K_j compacto, y f_i función de Urysohn que vale 1 en K_j y 0 en $\mathrm{Int}K_{j+1}^c$. Entonces para cualquier sucesión $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ de números reales positivos el conjunto*

$$H = \bigcap_{j=1}^{\infty} \{\mu \in \mathcal{M} : \mu f_j \leq a_j\}$$

es vagamente compacto.

Demostración : Claramente H es vagamente cerrado. Si $\mu \in H$ y $B \in \mathcal{B}$, entonces existe $j \in \mathbb{N}$ tal que $B \subset \overline{B} \subset K_j$ y $\mu(B) = \mu(f_j 1_B) \leq \mu f_j \leq a_j$, por lo tanto $\sup_{\mu\in H} \mu(B) \leq a_j < \infty$. De i) del Teorema 1.3 se sigue que H es relativamente compacto en la topología vaga y por lo tanto compacto. $\square$

Teorema 2.1. *Las medidas de probabilidad en $(\mathcal{M}, \mathfrak{M})$ son regulares y tensas.*

Demostración : Como $(\mathcal{M}, \mathfrak{M})$ es un espacio métrico separable y completo, entonces las medidas de probabilidad en $(\mathcal{M}, \mathfrak{M})$ son regulares y tensas, ver [2] Teoremas 1.1 y 1.3 . $\square$

Definición 2.1. *Sea P es una medida de probabilidad en $(\mathcal{M},\mathfrak{M})$. La **función característica** $\chi(P)$ de P es la función*

$$f \mapsto \int\limits_{\mathcal{M}} e^{i\mu f} P(d\mu), \qquad f \in C_K.$$

*La **transformada de Laplace** $\mathcal{L}(\mathbb{P})$ de $\mathbb{P}$ está definida por la función*

$$f \mapsto \int\limits_{\mathcal{M}} e^{-\mu f} P(d\mu), \qquad f \in C_K^+.$$

Proposición 2.1. *Las medidas de probabilidad en $(\mathcal{M},\mathfrak{M})$ estan determinadas unívocamente por sus funciones características y por sus transformadas de Laplace.*

Demostración : Sean P, Q medidas de probabilidad en $\mathcal{M}$ y supongamos que $\chi(P) = \chi(Q)$. Entonces para $f_{1,} \ldots, f_n \in C_K$ y $t_1, \ldots, t_n \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned} \int\limits_{\mathcal{M}} \exp\left(i\sum_{j=1}^{n} t_j \mu f_j\right) Q(d\mu) &= \int\limits_{\mathcal{M}} \exp\left(i\sum_{j=1}^{n} t_j \mu f_j\right) P(d\mu) \\ &= \int\limits_{\mathbb{R}^n} \exp\left(i\sum_{j=1}^{n} t_j u_j\right) p_{f_1}\ldots_{f_n}(du_1, \ldots, du_n), \end{aligned}$$

donde $p_{f_1}\ldots_{f_n}(u_1, \ldots, u_n) = P\{\mu : \mu f_1 \le u_1, \ldots, \mu f_n \le u_n\}$. Por el teorema de unicidad en $\mathbb{R}^n$, $p_{f_1}\ldots_{f_n} = q_{f_1}\ldots_{f_n}$. Luego P y Q coinciden en los cilindros

$$\{\mu : (\mu f_1, \ldots, \mu f_n) \in E\}, \, E \in \mathfrak{B}(\mathbb{R}^n).$$

Aplicando el lema de clases monótonas se concluye que $P = Q$ en $\mathcal{S}_{\mathsf{B}\,(G)} = \mathfrak{M}$.

Para demostrar la afirmación referente a la transformada de Laplace, descompongamos a $f \in C_K$ en sus partes positiva y negativa, $f = f_+ - f_-$, y tomemos u, $v \in \mathbb{R}_+$. Como

$$\mathcal{L}(P)(uf_+ + vf_-) = \int\limits_{\mathbb{R}^2} \exp(-us - vt)\, p_{f_+f_-}(ds, dt),$$

$\mathcal{L}$ determina $p_{f_+f_-}$. Se sigue que $\chi(P) f = \int_{\mathbb{R}^2} e^{i(s-t)} p_{f_+f_-}(ds, dt)$. $\square$

2.2. Medidas Aleatorias

Definición 2.2. *Una medida aleatoria en G es una función medible ξ de un espacio de probabilidad $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ en $(\mathcal{M}, \mathfrak{M})$.*

Si ξ es una medida aleatoria, entonces la **distribución** o ley de ξ es por definición la medida de probabilidad $\mathbb{P} = P\xi^{-1}$ en $(\mathcal{M}, \mathfrak{M})$, dada por

$$\mathbb{P}(A) = P\{\omega \in \Omega : \xi(\omega) \in A\}, \qquad A \in \mathfrak{M}.$$

La **intensidad** de ξ es la medida $\mathbb{E}\xi$ definida por

$$\mathbb{E}\xi(B) = \mathbb{E}(\xi B) = \int_{\Omega} \xi(\omega, B)\, P(d\omega), \qquad B \in \mathcal{B}.$$

La **Transformada de Laplace** L_ξ de ξ es la función

$$L_\xi(f) = \mathbb{E}\mathrm{e}^{-\xi f}, \qquad f \in C_K^+,$$

donde $\xi f = \int_G f(x)\, \xi(dx)$.

Observación 2.1. *i*) Notemos que $\mathbb{E}\xi$ es siempre una medida, pero no necesariamente pertenece a $\mathcal{M}$.

ii) Para $k \in \mathbb{N}$ y $B_1, \ldots, B_k \in \mathcal{B}$, la función

$$L_\xi\left(\sum_{j=1}^{k} t_j I_{B_j}\right) = \mathbb{E}\left(\exp\left(-\sum_{j=1}^{k} t_j \xi B_j\right)\right) = L_{\xi B_1, \ldots, \xi B_k}(t_1, \ldots, t_k),$$

con $t_1, \ldots, t_k \in \mathbb{R}_+$, es la transformada de Laplace del vector aleatorio $(\xi B_1, \ldots \xi B_k)$.

Ejemplo 2.1. *i*) **La medida de Dirac**. Sea $s \in G$, definamos la medida $\delta_s(\cdot) \in \mathcal{N}$ por $\delta_s(B) = 1_B(s)$, $B \in \mathcal{B}$. La función $\Delta : G \to \mathcal{N}$ dada por $s \mapsto \delta_s(\cdot)$ es medible. En efecto, si

$$A = \{\mu \in \mathcal{N} : \mu(A_1) = k_1, \ldots, \mu(A_n) = k_n\},$$

entonces se tiene lo siguiente: $\Delta^{-1}A = \phi$ si existe j tal que $k_j \notin \{0, 1\}$, y

$$\Delta^{-1}A = (A_{j_1} \cap \cdots \cap A_{j_m}) \bigcap \left(\bigcap_{l \neq j_1, \ldots, j_l} A_l^c\right),$$

si $k_{j_1} = ... = k_{j_m} = 1$ y $k_j = 0$ para $j \neq j_1, ..., j_m$, con $k_1, ..., k_n \in \mathbb{N}$ y $A_1, ..., A_n \in \mathfrak{B}(G)$. Sea $X : (\Omega, \mathcal{F}, P) \to (G, \mathfrak{B}(G))$ un elemento aleatorio en G, y definamos $\delta_X = \Delta \circ X$.

Entonces para $B \in \mathfrak{B}(G)$ tenemos

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}(\delta_X(B)) &= \int_{\Omega} \delta_X(B)\,\mathbb{P}(d\omega) = \int_{G} \delta_s(B)\,P_X(dx) \\
&= \int_{G} 1_B(s)\,PX^{-1}(ds) = P_X(B)
\end{aligned}$$

y

$$\begin{aligned}
L_{\delta_X}(f) &= \mathbb{E}\mathrm{e}^{-\delta_X f} = \int_{G} \mathrm{e}^{-\delta_s f} P_X(ds) \\
&= \int_{G} \mathrm{e}^{-f(s)} PX^{-1}(ds) = P_X \mathrm{e}^{-f} \\
&= \mathbb{E}\left(\mathrm{e}^{-f(X)}\right),
\end{aligned}$$

con $f \geq 0$ medible. Por lo tanto P_X y $\mathbb{E}\left(\mathrm{e}^{-f}\right)$ son respectivamente, la intensidad y la transformada de Laplace de δ_X.

ii) Sean $n \in \{1, 2, \ldots\}$ y $X_1, \ldots, X_n$ elementos aleatorios en G independientes e idénticamente distribuidos, con distribución P_X. Entonces $\delta_{X_1} + \cdots + \delta_{X_n}$ es una medida aleatoria con intensidad nP_X y transformada de Laplace dada por $\left(P_X \mathrm{e}^{-f}\right)^n$, con $f \geq 0$ medible.

2.3. Campos Aleatorios

Definición 2.3. *Un campo aleatorio en G es una función $N : \Omega \to \mathcal{N}$ que es $\mathcal{F}-\mathfrak{N}$ medible.*

Ejemplo 2.2. *i*) El elemento aleatorio $\delta_{X_1} + \cdots + \delta_{X_n}$ definido en el Ejemplo 2.1 de la sección anterior, es un campo aleatorio. Si $\nu : \Omega \to \mathbb{N}$ es variable aleatoria independiente de $X_1, ..., X_n$, entonces la intensidad del campo aleatorio obtenido N es

$$(\mathbb{E}N)(\cdot) = (\mathbb{E}\nu)\,P_X(\cdot)$$

y su transformada de Laplace está dada por

$$\mathbb{E}\mathrm{e}^{-\xi f} = \Psi_\nu\left(P_X \mathrm{e}^{-f}\right),$$

donde $\Psi_\nu(s)$ es la función generadora de probabilidades de ν, es decir $\Psi_\nu(s) = \mathbb{E}(s^\nu)$, para $s \in [0, 1]$.

Proposición 2.2. *Sea $K \subset G$ compacto y $\mu \in \mathcal{N}$. Entonces $\mu(K) = 0$ ó bien existen $k \in \mathbb{N}$, $n_j \in \mathbb{N}$ y $x_j \in K$, $j = 1, \ldots, k$ tales que*

$$\mu(\cdot \cap K) = \sum_{x_j} n_j \delta_{x_j}(\cdot).$$

Recíprocamente, si $\varphi : G \to \mathbb{N} \cup \{0\}$ *es tal que* $\{x \in K : \varphi(x) \neq 0\}$ *es finito para todo* $K \subset G$ *compacto, entonces*

$$\mu(\cdot) := \sup_K \sum_{x \in K} \varphi(x)\, \delta_x(\cdot),$$

define una medida $\mu \in \mathcal{N}$*, donde el supremo se toma sobre todos los conjuntos compactos* $K \subset G$.

Demostración : Sea $\mu \in \mathcal{N}$, $\mu(K) = n$. Debido a que G es un espacio regular, para cada $x \in K$ existe V_x abierto tal que $x \in V_x$ y $\mu(x) = \mu(V_x)$. Como $\mu(K) < \infty$, entonces

$$E := \{x \in K : \mu(x) \neq 0\}$$

tiene k elementos para algún k, $0 \leq k \leq n$, digamos $E = \{x_1, \ldots, x_k\}$. Si además $F \subset K$ es cerrado y $F \subset \bigcup_{x \in E \cap F} V_x$, entonces

$$F \subset \left(\bigcup_{x \in E \cap F} V_x \right) \bigcup \left(\bigcup_{x \in E^c \cap F} V_x \right).$$

Luego, por compacidad

$$F \subset \left(\bigcup_{x \in E \cap F} V_x \right) \bigcup \left(\bigcup_{x \in S \cap F} V_x \right),$$

para algún conjunto finito S tal que $S \bigcap E = \phi$. Por lo tanto

$$\mu(F) \leq \sum_{x_j \in E} \mu\{x_i\}\, \delta_{x_i}(F) + \sum_{x \in S} \mu(V_x) = \sum_{x_j \in E} \mu\{x_j\}\, \delta_{x_j}(F),$$

además

$$\mu F \geq \sum_{j=1}^{k} \mu\{x_j\}\, \delta_{x_j} F.$$

Se sigue que $\mu(\cdot) = \sum_{x_j \in E} \mu(\{x_j\})\, \delta_{x_j}(\cdot)$ en los subconjuntos cerrados de K y por lo tanto en $\mathfrak{B}(K)$.

Recíprocamente, sean $\mu_{K_j}(\cdot) = \sum_{x \in K_j} \varphi(x)\, \delta_x(\cdot) \in \mathcal{N}$, donde $G = \bigcup_{j=1}^{\infty} K_j$ con $K_j \subset \mathrm{Int} K_{j+1}$, y $f \in C_K^+$ con $\mathrm{sop} f = F$. Entonces

$$\mu_{K_j} f = \sum_{x \in K_j} \varphi(x)\, 1_F(x)\, f(x) = \sum_{x \in K_j \cap F} \varphi(x)\, f(x),$$

de donde se sigue puesto que $G = \bigcup_{j=1}^{\infty} K_j$

$$\lim_{n \to \infty} \mu_{K_j} f = \sup_K \sum_{x \in K \cap F} \varphi(x)\, f(x) = \sup_K \sum_{x \in K} \varphi(x)\, 1_F(x)\, f(x) = \mu f$$

y, por tanto, que μ_{K_j} converge vagamente a μ. Debido a que $\mathcal{N}$ es vagamente cerrado se concluye que $\mu \in \mathcal{N}$. $\square$

Proposición 2.3. *$\mathcal{N}$ es un subconjunto vagamente cerrado de $\mathcal{M}$.*

Demostración : Sea $\{\mu_\alpha\}_{\alpha\in A}$ una red de elementos de $\mathcal{N}$. Sea $K \subset G$ compacto, de la Proposición anterior se sigue que

$$\mu_\alpha(\cdot\cap K) = \sum_{i=1}^{k_\alpha} n_{\alpha_i}\delta_{\alpha_i}(\cdot),$$

para k_{α_i}, $n_{\alpha_i} \in \mathbb{N}$ y $x_{\alpha_i} \in K$. Supongamos que μ_α converge vagamente a μ. Por la Proposición1.1 existe una función $f \in C_K^+$ tal que $1_K < f < 1_G$, luego $\mu_\alpha(K) \leq \mu_\alpha f \longrightarrow \mu f < \infty$, de lo anterior se sigue $\{k_\alpha\}_{\alpha\in A}$ es acotado, entonces existe una subred $\{k_\gamma\}_{\gamma\in B}$ tal que $k_\gamma \longrightarrow_B k$ para algún $k \in \mathbb{N}$, luego existe un $\gamma_0 \in B$ tal que que $k_{\gamma_0} = k$. Tomemos subredes $\{n_{\gamma\prime_i}\}_{\gamma\prime\in B\prime}$, $\{x_{\gamma\prime_i}\}_{\gamma\prime\in B\prime}$ tales que $n_{\gamma\prime_i} \longrightarrow n_i$, $x_{\gamma\prime_i} \longrightarrow x_i$, si tomamos una función $g \in C_K^+$ con sop $(g) \subset K$ se cumple que

$$\mu g \longleftarrow_{B\prime} \mu_\alpha = \sum_{i=1}^{k_\alpha} n_{\alpha_i} g(x_{\alpha_i}) \longrightarrow_{B\prime} \sum_{i=1}^{k} n_i g(x_i).$$

Entonces

$$\mu(\cdot\cap K) = \sum_{i=1}^{k} n_i\delta_{x_i}(\cdot)$$

por tanto

$$\mu(\cdot) = \sup_K \mu(\cdot\cap K) \in \mathcal{N}.$$

□

Observación 2.2. De la Proposición anterior y del Teorema 1.5 se sigue que el espacio $\mathcal{N}$ es métrico separable y completo.

Proposición 2.4. *Supongamos que se cumplen las hipótesis del Teorema 1.7 y que para todo $A \in \mathfrak{A}$, $P_{\{A\}}\left(\overline{\mathbb{N}}\cup\{0\}\right) = 1$. Entonces la medida de probabilidad P en $(\mathcal{M},\mathfrak{M})$ que es límite proyectivo de $\{P_U,\ U \in f\mathfrak{A}\}$ satisface $P(\mathcal{N}) = 1$. Es decir, el sistema proyectivo define un campo aleatorio.*

Demostración : Sea Ω_0 como en la demostración de la Proposición 1.3. Si $\varphi \in \Omega_0$, entonces φ tiene una extensión única μ_φ a $\sigma(\mathfrak{A}) = \mathfrak{B}(G)$. Si

$$\Omega_1 = \left\{\varphi \in \Omega_0 : \varphi(A) \in \overline{\mathbb{N}}\cup\{0\},\ A \in \mathfrak{A}\right\}$$

entonces, dado que $P_{\{A\}}\left(\overline{\mathbb{N}}\cup\{0\}\right) = 1$ y $\mathfrak{A}$ es numerable, se sigue que $P(\Omega_1) = 1$. Sólo resta probar que para toda $\varphi \in \Omega_1$, μ_φ es $\overline{\mathbb{N}}\cup\{0\}$ − valuada. Si $\varphi \in \Omega_1$, entonces $\varphi(A) \in \overline{\mathbb{N}}\cup\{0\}$

para $A \in \mathfrak{A}$. Sea $H \in \mathfrak{B}(G)$. Si $\mu_\varphi(H) = \infty \in \overline{\mathbb{N}} \cup \{0\}$, entonces no hay nada que demostrar. Si $\mu_\varphi(H) < \infty$, por la demostración de la Proposición 1.3 se sigue que μ_φ es $\sigma-$ finita, luego para $\varepsilon > 0$ existe $H_\varepsilon \in \mathfrak{A}$ tal que $\mu_\varphi(H \triangle H_\varepsilon) < \varepsilon$. Tomando $\varepsilon = 1/n$, $n = 1, 2, \dots$, se sigue que

$$\begin{aligned}
\left|\mu_\varphi(H) - \mu_\varphi\left(H_{1/n}\right)\right| &= \left|\mu_\varphi\left(H \setminus H_{1/n}\right) + \mu_\varphi\left(H \cap H_{1/n}\right) - \mu_\varphi\left(H_{1/n}\right)\right| \\
&= \left|\mu_\varphi\left(H \setminus H_{1/n}\right) - \left(\mu_\varphi\left(H_{1/n}\right) - \mu_\varphi\left(H \cap H_{1/n}\right)\right)\right| \\
&\leq \mu_\varphi\left(H \setminus H_{1/n}\right) + \left(\mu_\varphi\left(H_{1/n}\right) - \mu_\varphi\left(H \cap H_{1/n}\right)\right) \\
&\leq \mu_\varphi\left(H \setminus H_{1/n}\right) + \mu_\varphi\left(H_{1/n} \setminus H\right) \\
&= \mu_\varphi\left(H \triangle H_{1/n}\right) \\
&< 1/n.
\end{aligned}$$

Notando que $\mu_\varphi\left(H_{1/n}\right) = \varphi\left(H_{1/n}\right) \in \overline{\mathbb{N}} \cup \{0\}$, al hacer $n \to \infty$ se sigue que $\mu_\varphi(H) \in \overline{\mathbb{N}} \cup \{0\}$. $\square$

Definición 2.4. *Sea $x \in G$ y N un campo aleatorio en G.*

i) Se dice que x es punto o átomo de N si

$$P\{\omega \in \Omega : N(\omega, x) > 0\} > 0.$$

ii) Se dice que N es simple si

$$P\{\omega : \exists\ x \in G \text{ con } N(\omega, x) \geq 2\} = 0.$$

Sea $\mu \in \mathcal{N}$, y $\varphi : G \to \{0, 1\}$ dada por

$$\varphi(x) = \begin{cases} 0 \text{ si } \mu(\{x\}) = 0 \\ 1 \text{ si } \mu(\{x\}) > 0 \end{cases}.$$

Definamos

$$\widehat{\mu}(\cdot) = \sup_K \sum_{x \in K} \varphi(x)\, \delta_x(\cdot)$$

donde el supremo se toma sobre todos los subconjuntos compactos de G. Nótese que se cumple $\widehat{\mu}(\{x\}) = \mu(\{x\}) \wedge 1$, $x \in G$.

Observación 2.3. *i)* $\widehat{\mu}$ tiene los mismos átomos que μ, pero $\widehat{\mu}$ es simple.

ii) De la Proposición 2.2 se sigue que $\widehat{\mu} \in \mathcal{N}$.

Proposición 2.5. *El mapeo ψ dado por $\mu \mapsto \widehat{\mu}$ es medible.*

Demostración : Sea ψ_A el mapeo dado por $\mu \mapsto \mu(A) \wedge 1$, $A \in \mathfrak{B}(G)$. Dado que ψ_A toma únicamente los valores $\{0,1\}$, se sigue que ψ_A es medible. Sea ρ una métrica para G, y $A \in \mathfrak{B}(G)$ relativamente compacto. Entonces A es totalmente acotado, es decir, para cada $\varepsilon > 0$ existe un conjunto finito de puntos $\{x_k\} \subset G$, con la propiedad que para cada $x \in A$, existe $x_l \in \{x_k\}$ tal que $\rho(x, x_l) < \varepsilon$. Entonces para $n \in \mathbb{N}$ existen conjuntos de Borel disjuntos $A_{n_1}, \ldots, A_{n_{r_n}}$ tales que

$$A = \bigcup_{j=1}^{r_n} A_{n_j} \qquad \text{y} \qquad \text{diam} A_{n_j} := \sup_{x,y \in A_{n_j}} \rho(x,y) \leq 1/n.$$

La sucesión de funciones medibles $\{\psi_n\}$, donde $\psi_n(\cdot) = \sum_{j=1}^{r_n} \psi_{A_{n_j}}(\cdot)$, es no decreciente, y cumple que $\lim_{n\to\infty} \psi_n(\mu) = \widehat{\mu}(A)$, el cual es medible. Sea φ_A el mapeo medible dado por $\varphi_A(\mu) = \mu(A)$. Notando que $\widehat{\mu}(A) = (\varphi_A \psi)\mu$ se concluye que ψ es medible. $\square$

Proposición 2.6. *Sea N un campo aleatorio y $\mathfrak{A} \subset \mathfrak{B}(G)$ un álgebra que contiene alguna base numerable de G. Entonces la distribución de $\widehat{N} = \psi N$ queda únivocamente determinada por los números*

$$P[N(A) = 0] = PN^{-1}\{\mu \in \mathcal{N} : \mu(A) = 0\}, \qquad A \in \mathfrak{A} \text{ acotado,}$$

en el sentido de que si Q es una medida de probabilidad en $\mathfrak{B}(\mathcal{N})$ tal que $Q[\mu \in \mathcal{N} : \mu(A) = 0] = P[N(A) = 0]$ para $A \in \mathfrak{A}$ acotado, entonces $Q\psi^{-1}$ es la distribución de $\widehat{\xi}$.

Demostración : En el argumento de la demostración de la proposición anterior, los conjuntos A_{n_j} pueden ser escojidos de tal forma que sean elementos de $\mathfrak{A}$. Sea ψ_A la función dada por $\mu \longmapsto \mu(A) \wedge 1$. Como ψ_A toma únicamente los valores $\{0,1\}$, se sigue que ψ_A es una función medible de los espacios

$$(\mathcal{N}, \sigma(\{\mu \in \mathcal{N} : \mu(A) = 0\}, A \in \mathfrak{A} \text{ acotado})) \big/ (\mathcal{N}, \mathfrak{B}(\mathcal{N})).$$

Debido a que $\varphi_A \psi$ es límite de $\left\{\sum_j \psi_{A_{n_j}}\right\}_{n\in\mathbb{N}}$, donde A_{n_j}, $A \in \mathfrak{A}$, se concluye que ψ también es medible en estos espacios.

Para demostrar la proposición basta probar que $PN^{-1} = Q$ en $\mathcal{A} = \sigma\{\{\mu : \mu(A) = 0\}, A \in \mathfrak{A}\}$, porque entonces tendríamos que para $B \in \mathfrak{B}(\mathcal{N})$,

$$P\widehat{N}^{-1}(B) = P(\psi N)^{-1}(B) = PN^{-1}(\psi^{-1}(B)) = Q\psi^{-1}(B) = \left(Q\psi^{-1}\right)(B),$$

lo cual demuestra la Proposición.

Para demostrar que $PN^{-1} = Q$ en $\mathcal{A}$, basta observar que la familia

$$\mathcal{H} = \{\{\mu : \mu(A) = 0\}, A \in \mathfrak{A}\}$$

es un $\pi-$sistema que genera a $\mathcal{A}$. Como $PN^{-1} = Q$ en $\mathcal{H}$, $PN^{-1} = Q$ en $\sigma(\mathcal{H}) = \mathcal{A}$. $\square$

De la Proposición anterior se sigue que la distribución de cualquier proceso puntual simple está determinada por las probabilidades de los conjuntos que no tienen puntos. El siguiente paso es determinar cuáles campos aleatorios no tienen puntos múltiples, tal es el objetivo de la siguiente proposición.

Definición 2.5. *Una medida $\lambda \in \mathcal{M}$, se llama difusa si $\lambda(\{x\}) = 0$ para toda $x \in G$.*

Proposición 2.7. *Sea N un campo aleatorio y $\mathfrak{A}$ un álgebra que contiene una base de G. Supongamos que existe una medida difusa $\lambda \in \mathcal{M}$ tal que $P[N(A) \geq 2] = (o\lambda(A))$ cuando $\lambda(A) \downarrow 0$ con $A \in \mathfrak{A}$. Entonces N es simple.*

Demostración : Sea $K \subset G$ compacto y $\varepsilon > 0$. Debido a que λ es regular, para cada $x \in K$ existe un abierto $V_x \in \mathfrak{A}$ tal que $x \in V_x$ y $P[N(A_x) \geq 2] \leq \varepsilon\lambda(V_x)$. Dado que K es compacto, un número finito de tales abiertos, digamos n, cubren a K y a partir de esta cubierta obtenemos una partición de K constitudida por conjuntos disjuntos de Borel $A_1, \ldots, A_n$, donde $A_j \in \mathfrak{A}$, con la propiedad de que $P\{N(A_j) \geq 2\} < \varepsilon\lambda(A_j)$ para $1 \leq j \leq n$. Entonces

$$\begin{aligned} P\{\exists x \in K : N\{x\} \geq 2\} &\leq \sum_{j=1}^{n} P\{N(A_j) \geq 2\} \\ &\leq \varepsilon \sum_{j=1}^{n} \lambda(A_j) \\ &= \varepsilon\lambda(K). \end{aligned}$$

Como $\varepsilon > 0$ fue arbitrario, no hay puntos multiples de N en K y dado que G es $\sigma-$compacto, no existen en general. $\square$

2.3.1. Campo aleatorio de Poisson

Un campo aleatorio de Poisson con medida de intensidad λ es un campo aleatorio cuya transformada de Laplace está dada por

$$L_N(f) = \exp\left[\int_G \left(e^{-f(x)} - 1\right)\lambda(dx)\right],$$

donde $f \in C_K^+$.

El campo aleatorio de Poisson tiene incrementos independientes, en el sentido de que $NA_1, ...NA_k$ son independientes para conjuntos de borel disjuntos $A_1, ..., A_k$ con $k \in \mathbb{N}$ y el número de partículas en un conjunto A, tiene una distribución Poisson con parámetro λ.

Proposición 2.8. *Sea N un campo aleatorio de Poisson con intensdad λ, con λ medida difusa. Entonces N no tiene átomos ni puntos multiples.*

Demostración : Como λ es difusa, entonces

$$P\left[N\left(\{x\}\right)=0\right]=\mathrm{e}^{-\lambda(\{x\})}=1$$

de donde se sigue la primera afirmación. Sea $A \in \mathfrak{B}\left(G\right)$. Entonces

$$P\left[N\left(A\right)\geq 2\right]=\sum_{n=2}^{\infty}\exp\left(-\lambda\left(A\right)\right)\frac{\left(\lambda\left(A\right)\right)^{n}}{n!}=o(\lambda\left(A\right)),$$

cuando $\lambda\left(A\right)\downarrow 0$. Aplicando la Proposición 2.7 se obtiene la segunda afirmación. □

Nótese que si λ no es difusa, es decir, existe un $x \in G$ tal que $\lambda\left(x\right)>0$, entonces N tendrá un átomo en x y además x será un punto multiple de N. En efecto

$$P\left[N\left(\{x\}\right)\leq 1\right]=\mathrm{e}^{-\lambda(\{x\})}(1+\lambda\left(x\right))<1.$$

Proposición 2.9. ***(Teorema de Rényi)*** *Sea $\mathfrak{A}$ una álgebra que contiene una base de la topología de G, y sea λ una medida de Radon difusa. Si N es un campo aleatorio tal que para todo $A \in \mathfrak{A}$ cumple*

i) $P\left[N\left(A\right)=0\right]=e^{-\lambda(A)}$,

ii) $P\left[N\left(A\right)\geq 2\right]=o(\lambda\left(A\right))$, *cuando* $\lambda\left(A\right)\downarrow 0$,

Entonces N es un campo aleatorio de Poisson con intensidad λ.

Demostración : Debido a las Proposiciones 2.7 y 2.6, ξ es simple y su distribución queda determinada por los números $\left\{\mathrm{e}^{-\lambda(A)}\right\}_{A\in\mathsf{A}}$, los cuales determinan a un campo aleatorio de Poisson de intensidad λ. □

Teorema 2.2. *Si $\pi_\lambda\left(\cdot\right)$ es la distribución de un campo aleatorio de Poisson con intensidad λ, donde λ es difusa y $\lambda\left(G\right)<\infty$, entonces para $B \in \mathfrak{N}$ se verifica*

$$\pi_\lambda\left(B\right)=\sum_{n=0}^{\infty}e^{-\lambda(G)}\int_{G^n}1_B\left(\delta_{x_1}+\cdots+\delta_{x_n}\right)\lambda\left(dx_1\right)\ldots\lambda\left(dx_n\right)\diagup n!.$$

Demostración : Sea $B \in \mathfrak{B}\left(\mathcal{N}\right)$ y

$$Q\left(B\right)=\sum_{n=0}^{\infty}\mathrm{e}^{-\lambda(G)}\int\limits_{G^n}1_B\left(\delta_{x_1}+\cdots+\delta_{x_n}\right)\lambda\left(dx_1\right)\ldots\lambda\left(dx_n\right)\diagup n!.$$

Claramente Q es una medida de probabilidad en $\mathcal{N}$. Si ξ tiene distribución Q y $A \in \mathfrak{B}(G)$ entonces

$$\begin{aligned} P[N(A)=0] &= \sum_{n=0}^{\infty} \mathrm{e}^{-\lambda(G)} \int_{G^n} 1_{\{\mu:\mu(A)=0\}}(\delta_{x_1}+\cdots+\delta_{x_n})\,\lambda(dx_1)\ldots\lambda(dx_n)\,/\,n! \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \mathrm{e}^{-\lambda(G)} \int_{(A^c)^n} \lambda(dx_1)\ldots\lambda(dx_n)\,/\,n! \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \mathrm{e}^{-\lambda(G)} (\lambda(G)-\lambda(A))^n\,/\,n! \\ &= \mathrm{e}^{-\lambda(A)}. \end{aligned}$$

Análogamente se prueba que

$$P[N(A) \geq 2] = o(\lambda(A)),$$

cuando $\lambda(A) \downarrow 0$. La afirmación del teorema se sigue de la Proposición 2.9. $\square$

Capítulo 3

Convergencia débil

En este capítulo se discute la convergencia débil de medidas aleatorias y se dan algunas propiedades de dicha convergencia. Además se exponen resultados del tipo del teorema de límite central para algunos campos aleatorios en $G = \mathbb{R}^d$.

3.1. Convergencia débil

Consideremos ahora el problema de la convergencia débil de medidas aleatorias. Sean $\xi, \xi_1, \xi_2, ...$ medidas aleatorias en G. Diremos que ξ_n converge débilmente a ξ, si para toda función continua y acotada $f : \mathcal{M} \to \mathbb{R}$ se cumple

$$\mathbb{E}f(\xi_n) \longrightarrow \mathbb{E}f(\xi),$$

donde $\mathbb{E}f(\xi) = \int f(\mu)\, \mathbb{P}(d\mu)$.

Teorema 3.1. *Sean $\xi, \xi_1, \dots$ medidas aleatorias en G. Entonces*

i) ξ_n converge débilmente a ξ si y sólo si para toda $f \in C_K^+$, $\xi_n f$ converge débilmente a ξf.

ii) Si $\mathfrak{A}$ es una clase de conjuntos de Borel acotados en G que contiene una base y tal que $P[\xi(\partial A) = 0] = 1$ para $A \in \mathfrak{A}$, entonces ξ_n converge débilmente a ξ si y sólo si para toda $n \in \mathbb{N}$ y cualesquiera $A_1, \dots, A_n \in \mathfrak{A}$, $\left(\xi_j A_1, \dots, \xi_j A_n\right)$ converge débilmente a $(\xi A_1, \dots, \xi A_n)$.

Demostración : i) Necesidad. Si ξ_n converge débilmente a ξ, entonces $\varphi(\xi_n)$ converge débilmente a $\varphi(\xi)$ para toda $\varphi : \mathcal{M} \to \mathbb{R}$ medible y acotada que cumple $P[\xi \in \mathrm{Cont}(\varphi)] =$

1. En particular, considerando el mapeo φ_f dado por $\mu \mapsto \mu f$, con $f \in C_K^+$, el cual es continuo por definición de la topología vaga y cumple que $\varphi_f(\xi_n) = \xi_n f$, $\varphi_f(\xi) = \xi f$, se sigue que $\xi_n f$ converge débilmente a ξf, por lo tanto la condición i) es necesaria.

Suficiencia. Es suficiente demostrar que ξ_n converge débilmente a ξ si para toda $t \in \mathbb{R}$ y $f \in C_K^+$, $\mathbb{E}\left(\mathrm{e}^{it\xi_n f}\right) \longrightarrow \mathbb{E}\left(\mathrm{e}^{it\xi f}\right)$, o equivalentemente, una sucesión $\{P_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ de medidas de probabilidad en $\mathcal{M}$ converge débilmente a P si y sólo si $\chi(P_n) \longrightarrow \chi(P)$ (o $\mathcal{L}(P_n) \longrightarrow \mathcal{L}(P)$). Sean $G = \bigcup_{j=1}^{\infty} K_j$ y f_j como en el Lema 2.1. Por hipótesis, para $t \in \mathbb{R}$, $\chi(P_n)(tf_j) \longrightarrow \chi(P)(tf_j)$ cuando $n \to \infty$. Si $F_{\varphi_{f_j}}^n$ denota la distribución del mapeo φ_{f_j} dado por $\mu \mapsto \mu f_j$ con respecto a la medida P_n, entonces $F_{\varphi_{f_j}}^n(u) \longrightarrow F_{\varphi_{f_j}}(u)$ para $u \in \mathbb{R}$ punto de continuidad de $F_{\varphi_{f_j}}$, es decir

$$\begin{aligned} P_n[\mu f_j \leq u] &= P_n\left[\varphi_{f_j}(\mu) \leq u\right] \\ &= F_{\varphi_{f_j}}^n(u) \longrightarrow F_{\varphi_{f_j}}(u) = P[\mu f_j \leq u], \end{aligned}$$

cuando $n \to \infty$.

Sea $\varepsilon > 0$. Por la convergencia de $P\{\mu f_j \leq u\}$, se cumple que para $j \in \mathbb{N}$ existe $a_j \in \mathbb{R}$ tal que $P_n\{\mu f_j > a_j\} < \varepsilon 2^{-j}$, con $n \in \mathbb{N}$. Del Lema 2.1 se sigue que $H = \bigcap_{j=1}^{\infty}\{\mu : \mu f_j \leq a_j\}$ es vagamente compacto y del Teorema 2.1 que la sucesión $\{P_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ es tensa. Por el teorema de Prokhorov, $\{P_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ es relativamente compacta. Como $\{P_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ tiene sólo un punto de acumulación, aquél determinado por $\chi(P)$, se concluye que P_n converge débilmente a P.

ii) Necesidad. Sea $A \subseteq G$ un conjunto de Borel acotado y $\varphi_A(\mu) = \mu(A)$. Del Teorema 1.1 se sigue que φ_A es continua en μ si $\mu(\partial A) = 0$. Si

$$1 = P[\xi(\partial A) = 0] \leq P[\xi \in \mathrm{Cont}(\varphi_A)],$$

entonces $\varphi_A(\xi_n) = \xi_n(A)$ converge débilmente a $\xi(A) = \varphi_A \xi$, por lo tanto la condición en *ii*) es necesaria.

Suficiencia. Sea $G = \bigcup\limits_{j=1}^{\infty} K_j$, donde los conjuntos son como en el Lema 2.1. Para cada K_j existe una cubierta abierta $\{G_{jk}\}_{k=1}^{r_j}$ de K_j constituida por elementos de $\mathfrak{A}$. Sean f_j funciones de Urysohn que valen 1 en K_j y 0 en $\left(\bigcup_{k=1}^{r_j} G_{jk}\right)^c$, y sean $\varphi_j = \sum_{k=1}^{r_j} 1_{G_{jk}}$ para $j \in \mathbb{N}$. Por hipótesis

$$\lim_{n\to\infty} P_n\left\{\mu\varphi_j \leq u\right\} = P\left\{\mu\varphi_j \leq u\right\} \tag{3.1}$$

(usando la notación como en *i*)) en los puntos de continuidad del mapeo $s \mapsto P\left\{\mu\varphi_j \leq s\right\}$. Si $\varepsilon > 0$, dado que $0 \leq f_j \leq \varphi_j$, entonces existe $a_j \in \mathbb{R}$ tal que

$$P_n\{\mu f_j > a_j\} \leq P_n\left\{\mu\varphi_j > a_j\right\} < \varepsilon 2^{-j}.$$

La tensión de $\{P_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ se deduce de forma similar que en la demostración del caso i), así como su compacidad relativa. Debido a (3.1), cualquier punto de acumulación Q coincide con P en $\mathcal{S}_{\mathsf{A}} = \mathfrak{M}$. $\square$

Observación 3.1. La parte ii) del teorema anterior parece muy restrictiva por las condiciones que debe cumplir $\mathfrak{A}$. En realidad $\mathfrak{A}$ puede sustituirse por la familia

$$\mathcal{B}_\xi = \{B \in \mathcal{B} : \xi(\partial B) = 0 \text{ c.s}\}$$

como lo muestra la siguiente proposición.

Proposición 3.1. *Sea ξ una medida aleatoria en G y*

$$\mathcal{B}_\xi = \{B \in \mathcal{B} : \xi(\partial B) = 0 \ \textit{c.s}\}.$$

Entonces $\mathcal{B}_\xi$ contiene una base de la topología.

Demostración : Probaremos que $\mathcal{B}_\xi$ contiene a las bolas abiertas

$$S(t,r) = \{s \in G : \rho(s,t) < r\},$$

donde $t \in G$ y r es suficientemente pequeño. Como G es localmente compacto, para cada $s \in G$ existe una vecindad de s con cerradura compacta, de donde se sigue que $S(t,r) \in \mathcal{B}$ para r suficientemente pequeño, digamos $r \leq r_0$, donde r_0 es fijo. Además $\partial S(t,r) \subset \{s \in G : \rho(s,t) = r\}$ para todo $r > 0$.

Supongamos que para un $\varepsilon > 0$ se cumple que

$$P\{\xi(\partial S(t,r_j)) > \varepsilon\} > \varepsilon$$

para un conjunto infinito $r_1, r_2, ...$ de números $r_j \in (0, r_0]$. Por el lema de Fatou,

$$\begin{aligned}
\varepsilon &\leq \limsup_{n\to\infty} P[\xi(\partial S(t,r_n)) > \varepsilon] \\
&\leq P \limsup_{n\to\infty} [\xi(\partial S(t,r_n)) > \varepsilon] \\
&\leq P\{\xi(S(t,r_0)) = \infty\} \\
&= 0,
\end{aligned}$$

que contradice la condición $\varepsilon > 0$. Luego $P\{\xi(\partial S(t,r)) > \varepsilon\} > \varepsilon$ sólo para una colección finita de $r \in (0, r_0]$. Dado que $\varepsilon > 0$ fué arbitrario, $\xi(\partial S(t,r)) = 0$ c.s. para $r \in (0, r_0] \setminus N$, donde N es a lo más contable, de donde se concluye lo deseado. $\square$

Teorema 3.2. *Una sucesión $\{\xi_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ de medidas aleatorias en G es relativamente compacta en la topología vaga si y sólo si para todo $B \in \mathcal{B}$*

$$\lim_{t\to\infty} \limsup_{n\to\infty} P\left[\xi_n(B) > t\right] = 0.$$

Demostración : Supongamos que $\{\xi_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ es relativamente compacta. Como $\mathcal{M}$ es un espacio métrico, separable y completo, se sigue que $\{\xi_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ es tensa, y por lo tanto, para $\varepsilon > 0$ existe $M \subset \mathcal{M}$ compacto tal que $P\{\xi_n \notin M\} < \varepsilon$, $n \in \mathbb{N}$. Ya que M es cerrado, entonces M es vagamente relativamente compacto. Por el Teorema 1.3 se cumple que $\sup_{\mu\in M} \mu(B) < \infty$ para $B \in \mathcal{B}$, y así

$$P\left\{\xi_n(B) > \sup_{\mu\in M} \mu(B)\right\} \leq P\{\xi_n \notin M\} < \varepsilon$$

para $n \in \mathbb{N}$ y $B \in \mathcal{B}$. Luego

$$\lim_{t\to\infty} \limsup_{n\to\infty} P\{\xi_n(B) > t\} \leq \limsup_{n\to\infty} P\left\{\xi_n(B) > \sup_{\mu\in M} \mu(B)\right\} < \varepsilon.$$

Haciendo $\varepsilon \downarrow 0$ se obtiene lo deseado.

Recíprocamente, sean $G = \bigcup_{j=1}^{\infty} K_j$ y $\{f_j\}$ como en el Lema 2.1. Dado $\varepsilon > 0$ existe $\{c_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{R}_+$ tal que $P\{\xi_n f_j > c_j\} \leq \varepsilon 2^{-j}$, para $k, n \in \mathbb{N}$. Por el Lema 2.1, el conjunto $M = \bigcap_{j=1}^{\infty} \{\mu : \mu f_j \leq c_j\}$ es vagamente compacto y

$$\begin{aligned} P\{\xi_n \notin M\} &= P\left\{\bigcup_j \{\xi_n f_j > c_j\}\right\} \\ &\leq \sum_j P\{\xi_n f_j > c_j\} \\ &\leq \varepsilon \sum_j 2^{-k} \\ &= \varepsilon. \end{aligned}$$

Del teorema de Prokhorov se concluye que la sucesión $\{\xi_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ de medidas aleatorias es relativamente compacta. □

3.2. Teoremas del límite central

Definición 3.1. *Una medida aleatoria ξ en $\mathbb{R}^d$ se dice estacionaria u homogénea si para $n \in \mathbb{N}$ y para $B_1, \ldots, B_n \in \mathfrak{B}\left(\mathbb{R}^d\right)$ acotados, la distribución del vector aleatorio*

$$\left(\xi(B_1 + x), \ldots, \xi(B_n + x)\right),$$

es independiente de $x \in \mathbb{R}^d$.

Ejemplo 3.1. El campo aleatorio de Poisson en $\mathbb{R}^d$, donde la medida de intensidad λ del campo es la medida de Lebesgue, cumple que es un campo aleatorio estacionario.

Si ξ es una medida aleatoria estacionaria diremos que ξ satisface un limite de escala clásico (LEC) si para cualesquiera rectángulos disjuntos (producto de intervalos finitos) $A_1, \ldots, A_n$, el vector aleatorio

$$\left(\frac{\xi(\lambda A_1) - \mathbb{E}\xi(\lambda A_1)}{\lambda^{d/2}}, \ldots, \frac{\xi(\lambda A_n) - \mathbb{E}\xi(\lambda A_n)}{\lambda^{d/2}} \right)$$

converge en distribución cuando $\lambda \to \infty$ a una distribución normal multivariada con vector medio 0 y matriz de covariancia diagonal $C = (C_{ij})$, con $C_{ii} = \sigma^2 |A_i|$, donde $|\cdot|$ es la medida de Lebesgue, para algún parámetro positivo σ^2. En el desarrollo de este capítulo y el siguiente se darán ejemplos de campos aleatorios que cumplen un LEC.

Una de las formas para encontrar clases de medidas aleatorias que satisfagan un LEC, es averiguando propiedades de mezcla, la cual nos asegura una independencia asintótica de medidas aleatorias, o a través de las propiedades de asociación de medidas aleatorias.

A continuacion examinaremos (sin demostrar) brevemente, los teoremas de límite central en los contextos mencionados anteriormente.

3.2.1. Condiciones de mezcla

Para cada $x \in \mathbb{R}^d$, sea T_x el operador de traslación definido en $\mathcal{N}$ por $T_x(N(A)) = N(A+x)$, $A \in \mathfrak{B}(\mathbb{R}^d)$ y $N \in \mathcal{N}$.

Si ξ es una medida aleatoria en $\mathbb{R}^d$, denotemos por $M_{(k)}(A_1, ..., A_k)$ y por $C_{(k)}(A_1, ..., A_k)$ al $k-$ ésimo momento factorial y al $k-$ ésimo factorial cumulante de $(\xi(A_1), ..., \xi(A_k))$ respectivamente, donde $A_i \in \mathfrak{B}(\mathbb{R}^d)$ para $i = 1, \ldots, k$, donde

$$M_{(k)}(A_1, ..., A_k) = \mathbb{E}(\xi(A_1) ... \xi(A_k)),$$

en [5] podemos encontrar expresiones para el $k-$ ésimo factorial cumulante. Si el $k-$ ésimo momento factorial $M_{(k)}(A_1 \times ... \times A_k)$ (resp. $k-$ ésimo factorial cumulante $C_{(k)}(A_1 \times ... \times A_k)$) es absolutamente continuo, denotemos la densidad del $k-$ ésimo momento (resp. cumulante) factorial por $P_k(x_1, ..., x_k)$ (resp. $Q_k(x_1, ..., x_k)$).

Definición 3.2. *Sea N un campo aleatorio homogéneo.*

i) Se dice que N es mezclante si se cumple

$$\left(PN^{-1}\right)\left(T_x^{-1}U \cap V\right) \longrightarrow \left(PN^{-1}\right)(U)\left(PN^{-1}\right)(V), \qquad \text{cuando } \|x\| \to \infty,$$

para todo U, $V \in \mathfrak{N}$.

ii) Se dice que N es $B-$ mezclante si para $k \geq 1$ las densidades factoriales cumulantes $Q_k(\cdot)$ existen y satisfacen

$$\int \cdots \int_{\left(\mathbb{R}^d\right)^{k-1}} |Q_k(x_1, \ldots, x_{k-1}, x_k)|\, dx_1, \ldots, dx_{k-1} < \infty,$$

para $k \geq 2$.

Teorema 3.3. *Sea N un campo aleatorio homogéneo $B-$ mezclante. Si $A \uparrow \mathbb{R}^d$, $A \in \mathfrak{B}\left(\mathbb{R}^d\right)$, entonces*

$$\frac{N(A) - \mathbb{E}N(A)}{\sqrt{Var(N(A))}}$$

converge en distribución a una distribución normal con media cero y variancia 1.

Demostración : Ver [3] Teorema 1. □

Es importante mencionar que $B-$ mezcla requiere la existencia de todas los cumulantes factoriales, lo cual es extremadamente restrictivo. Condiciones menos restrictivas son las que se analizan en el caso de asociación de medidas aleatorias que se presenta a continuación.

3.2.2. Medidas aleatorias asociadas

Consideremos el siguiente orden parcial en $\mathbb{R}^d$ dado por $(x_1, \ldots, x_d) \leq (y_1, \ldots, y_d)$ si $x_i \leq y_i$, $1 \leq i \leq d$.

Definición 3.3. *Una familia no vacia $\mathcal{R}$ de variables aleatorias se llama asociada si para cualquier subfamilia finita $Y_1, \ldots, Y_n \in \mathcal{R}$ y $f, g : \mathbb{R}^n \to [0,1]$, continuas y crecientes respecto al orden parcial anterior en $\mathbb{R}^n$ se cumple*

$$Cov\left(f(Y_1, \ldots, Y_n), g(Y_1, \ldots, Y_n)\right) \geq 0.$$

Notemos que es posible definir un orden parcial en $\mathcal{M}$ declarando $\mu \leq \nu$ si para todo $B \in \mathfrak{B}\left(\mathbb{R}^d\right)$ se cumple que $\mu(B) \leq \nu(B)$. En el caso de que μ y ν sean elementos de $\mathcal{N}$ lo anterior nos indica que cada punto o átomo de μ es también un punto o átomo de ν.

Definición 3.4. *Una medida aleatoria ξ con distribución $\mathbb{P}$ es asociada si para cualesquiera $F, G : \mathcal{M} \to [0,1]$ crecientes respecto al orden en $\mathcal{M}$ y $\mathbb{P}-$ continuas se cumple que $Cov_{\xi}(F,G) \geq 0$, donde*

$$Cov_{\xi}(F,G) = \int_{\mathcal{M}} F(\mu) G(\mu) \mathbb{P}(d\mu) - \int_{\mathcal{M}} \int_{\mathcal{M}} F(\mu) G(\nu) \mathbb{P}(d\mu) \mathbb{P}(d\nu).$$

A continuación daremos una lista de propiedades de las medidas aleatorias asociadas.

i) Si N es un campo, aleatorio de Poisson, entonces N es asociada.

ii) Si ξ y ξ' son medidas aleatorias independientes y asociadas, entonces $\xi + \xi'$ es asociada.

iii) Si ξ es una medida aleatoria asociada y $F : \mathcal{M} \to \mathcal{M}$ es creciente, entonces $F(\xi)$ es asociada.

iv) Si ξ_n converge en distribución a ξ y cada ξ_n es asociada, entonces ξ es asociada.

Teorema 3.4. *Supongamos que N es un campo aleatorio en $\mathbb{R}^d$ estacionario y asociado tal que $\mathbb{E}N^2(B) < \infty$ para $B \in \mathfrak{B}(\mathbb{R}^d)$ acotado, y tal que*

$$\sum_{k \in \mathbb{Z}^d} Cov(N(I), N(I+k)) = \eta < \infty$$

donde $I = [0,1)^d$. Entonces N satisface un LEC con parámetro η.

Demostración : Ver [4] Teorema 4.1. □

Observación 3.2. Dado que N es asociado se cumple que $\eta > 0$.

Supongamos que ξ es una medida aleatoria. Consideremos el cubo semiabierto $[-n,n)^d$, el cual a su vez dividimos en m cubos semiabiertos $A_1, \ldots, A_m$ con longitud de lado $\left(\frac{1}{2}\right)^n$, así que $m = (2n2^n)^d$. Denotaremos por $D = \{x_1, \ldots, x_m\}$ al conjunto de puntos que corresponden a las esquinas inferiores izquierdas de los cubos $A_1, \ldots, A_m$. Definamos la medida aleatoria ξ_n por

$$\xi_n(B) = \sum_{\{i : x_i \in B\}} \xi(A_i)$$

para cada $B \subseteq \mathbb{R}^d$ acotado. Claramente ξ_n converge en distribución a ξ.

Campo aleatorio de Poisson acumulado. Sea U un campo aleatorio de Poisson en $\mathbb{R}^d$ con medida de intensidad ρ y sea V una medida aleatoria con $\mathbb{E}(V(\mathbb{R}^d)) = \gamma \geq 0$. Definamos la medida aleatoria X por medio de los puntos de U, los cuales actuan como centros y entonces colocamos medidas aleatorias independientes identicamene distribuidas, las cuales tienen la misma distribución de V, pero centradas en los puntos de U, es decir, si $\{x_i\}$ son los puntos de U y $\{V_i\}$ son medidas aleatorias independientes, identicamente distribuidas, las cuales son independientes de U y con la distribución de V, entonces definamos para $B \in \mathfrak{B}\left(\mathbb{R}^d\right)$

$$X(B) = \sum_i V_i(B + x_i).$$

Teorema 3.5. *X definida como arriba es una medida aleatoria asociada.*

Demostración : Denotaremos a X por $[U, V]$, con U campo aleatorio de Poisson con parámetro ρ y $\mathbb{E}\left(V\left(\mathbb{R}^d\right)\right) < \infty$. A continuación probaremos en varios pasos que X es una medida aleatoria asociada.

i) Primero supongamos que V es una medida aleatoria determinista y atómica con un número finito de átomos, esto es

$$V = \sum_{i=1}^{n} a_i \delta_{x_i},$$

donde $a_i > 0$ y δ_{x_i} es la medida de Dirac concentrada en $x_i \in \mathbb{R}^d$. Entonces $X(A)$ es una medida aleatoria asociada ya que

$$X(A) = \sum_{i=1}^{n} a_i U(A - x_i)$$

es una función creciente de $U(B)$, $B \in \mathfrak{B}\left(\mathbb{R}^d\right)$ acotado, la cual es asociada dado que U es es un campo aleatorio de Poisson.

ii) A continuación supongamos que V es discreta, esto es $V = V_i$ con probalilidad p_i, $1 \leq i \leq k$ y donde V_i es determinista y atómica con a lo más un número finito de átomos. Ahora para cada i, $1 \leq i \leq k$, sean U_i campos aleatorio independientes con parámetro ρp_i. Consideremos las medidas aleatorias $[U_i, V_i]$, $1 \leq i \leq k$, las cuales son independientes y asociadas. Como X tiene a la misma distribución que $X_1 + \cdots + X_k$ y dado que esta suma es asociada (por propiedad ii)) se sigue que X es asociada.

iii) Supongamos ahora que V es cualquier medida aleatoria que satisface $\mathbb{E}(V\left(\mathbb{R}^d\right)) < \infty$. Sean $\{V_n\}$ la sucesión de medidas aleatorias que aproximan a V como en la discusión posterior a la Observación 3.2 y consideremos $X^{(n)} = [U, V_n]$, $n \in \mathbb{N}$, las cuales son asociadas. Demostraremos que $X^{(n)}$ converge en distribución a X. Sea λ_n la medida de intensidad de V_n y λ la medida de intensidad de V. Sea B_s la bola abierta de radio s, con centro en $0 \in \mathbb{R}^d$ y B_s^c su complemento. Por [9] es suficiente demostrar que

$$\lim_{s \to \infty} \sup_n \int_{B_s^c} \lambda_n(B_r - x)\, dx = 0.$$

Como

$$\begin{aligned}
\int\limits_{B_s^c} \lambda_n (B_r - x)\, dx &= \int\limits_{B_s^c}\int\limits_{\mathbb{R}^d} 1_{\{B_r - x\}}(y)\, \lambda_n(dy)\, dx \\
&= \int\limits_{\mathbb{R}^d}\int\limits_{B_s^c} 1_{B_r}(y+x)\, dx \lambda_n(dy) \\
&= \int\limits_{B_{s-r}^c}\int\limits_{B_s^c} 1_{B_r}(y+x)\, dx \lambda_n(dy) \\
&\leq \int\limits_{B_{s-r}^c} |B_r|\, \lambda_n(dy) \\
&= |B_r|\, \lambda_n\left(B_{s-r}^c\right) \\
&\leq |B_r|\, \lambda_n\left(B_{s-r-\sqrt{d}}^c\right),
\end{aligned}$$

donde λ es finita, entonces $|B_r|\, \lambda_n\left(B_{s-r-\sqrt{d}}^c\right) \longrightarrow 0$ cuando $s \to \infty$. □

Teorema 3.6. *Si X es como en el ejemplo anterior, donde V es un campo aleatorio tal que $\mathbb{E}\left[V^2\left(\mathbb{R}^d\right)\right] = \zeta < \infty$, entonces X satisface un LEC con parámetro $\rho\zeta$.*

Demostración : En vista del Teorema 3.4 es suficiente demostrar que

$$\sum_{k\in\mathbb{Z}^d} Cov(X(I), X(I+k)) = \rho\zeta < \infty.$$

Para ver esto simplemente notemos que

$$Cov(X(I), X(I+k)) = \int\limits_{\mathbb{R}^d} \mathbb{E}\{V(I+x)V(I+k+x)\}\rho dx$$

así que

$$\begin{aligned}
\sum_{k\in\mathbb{Z}^d} Cov(X(I), X(I+k)) &= \sum_{k\in\mathbb{Z}^d}\int\limits_{\mathbb{R}^d} \mathbb{E}\{V(I+x)V(I+k+x)\}\rho dx \\
&= \int\limits_{\mathbb{R}^d} \mathbb{E}\left\{V(I+x)V\left(\mathbb{R}^d\right)\right\}\rho dx \\
&= \rho\mathbb{E}\left[V^2\left(\mathbb{R}^d\right)\right] \\
&= \rho\zeta < \infty.
\end{aligned}$$

□

Capítulo 4

Sistemas de partículas

El objetivo principal de este capítulo es introducir los conceptos de procesos de Markov $\mathcal{M}-$ valuados y de procesos multiplicativos de Markov, así como dar algunos ejemplos de este tipo de procesos.

4.1. Sistemas de partículas multiplicativos de Markov

En lo que resta de este capítulo nos restringiremos al caso $G = \mathbb{R}^d$.

Nótese que si $\mu \in \mathcal{N}$ es simple, entonces se puede caracterizar a μ como una colección de puntos distribuidos de alguna forma en $\mathbb{R}^d$. En efecto, si $\{x_i, i \in I\}$ denota las posiciones de los puntos de μ donde I es un conjunto contable o finito, entonces para cada $A \in \mathfrak{B}\left(\mathbb{R}^d\right)$

$$\mu(A) = \sum_{x_i \in A} \delta_{x_i}, \tag{4.1}$$

donde δ_{x_i} es la medida puntual de Dirac en x_i.

Sea Λ la clase de sucesiones $\{x_i, i \in I\}$ de elementos de $\mathbb{R}^d$ tales que $\{x_i, i \in I\} \cap A$ es finito para cada conjunto compacto $A \subset \mathbb{R}^d$. Entonces (4.1) define un mapeo $\zeta : \Lambda \to \mathcal{N}_S$, donde $\mathcal{N}_S$ es el subespacio de $\mathcal{N}$ de las medidas simples. Este mapeo ζ es uno a uno debido a la Proposición 2.2. Frecuentemente denotaremos un elemento de $\mathcal{N}_S$ mediante su representación $\{x_i, i \in I\}$. Los conjuntos medibles de Λ son

$$\mathfrak{B}(\Lambda) = \left\{B \mid B = \zeta^{-1}C,\ C \in \mathfrak{B}(\mathcal{N}_S)\right\}.$$

Definición 4.1. *i) Un sistema de partículas markoviano es un proceso de Markov temporalmente homogéneo, $\{N_t; t \geq 0\}$, con espacio de estados $(\mathcal{N}, \mathfrak{N})$ y probabilidades de transición* *estacionarias* $P_t(\cdot \mid \mu)$, *donde para cada* $t \geq 0$ *y* $\mu \in \mathcal{N}$, $P_t(\cdot \mid \mu)$ *es una medida de probabilidad en* $(\mathcal{N}, \mathfrak{N})$ *y para cada* $A \in \mathfrak{N}$, $P_t(A \mid \cdot)$ *es una función* $\mathfrak{N}-$ *medible.*

ii) Un sistema de partículas markoviano es multiplicativo si su probabilidad de transición cumple

$$P_t(\cdot \mid \mu_1 + \mu_2) = P_t(\cdot \mid \mu_1) * P_t(\cdot \mid \mu_2),$$

donde μ_1, $\mu_2 \in \mathcal{N}$, $t \geq 0$ *y* $*$ *denota convolución.*

De $i)$ de la definición anterior se sigue que para cada $t \geq 0$, N_t es un campo aleatorio en $\mathbb{R}^d$ y $ii)$ nos dice que la distribución condicional del proceso dado el estado inicial $\mu_1 + \mu_2$, es igual a la distribución de una suma de dos versiones independientes del proceso, con condiciones iniciales μ_1 y μ_2 respectivamente.

Nótese que para sistemas de partículas multiplicativos es suficiente especificar $P_t(\cdot \mid \mu)$ sólo para $\mu \in \mathcal{N}$ simple.

Definición 4.2. *Sea* N *un campo aleatorio en* $\mathbb{R}^d$. *Se define su funcional generador de probabilidades (FGP) por*

$$G_N(f) = \mathbb{E}\left(e^{N \log f}\right) = \mathbb{E}\left(\prod_{i=1}^{\infty} f(x_i)\right)$$

donde $0 \leq f \leq 1$ *y* $1 - f \in C_K$, $\{x_i\}_{i=1}^{\infty}$ *son los puntos asociados al campo aleatorio*

Si $f \in C_K^+$, entonces $1-\mathrm{e}^{-f} \in C_K^+$ y $0 \leq 1-\mathrm{e}^{-f} \leq 1$. Además

$$G_N\left(\mathrm{e}^{-f}\right) = L_N(f).$$

Ejemplo 4.1. Cuando N es un campo aleatorio de Poisson con medida de intensidad λ, su FGP está dado por

$$G_N(f) = \exp\left[\int_{\mathbb{R}^d} (f(x) - 1)\, \lambda(dx)\right].$$

Definición 4.3. *Una medida (o campo) aleatorio* ξ *es infinitamente divisible si para todo* $r \in \mathbb{N}$ *existe una colección* $\left\{\xi_{r,k}\right\}_{k=1}^{r}$ *de medidas (o campos) aleatorios independientes idénticamente distribuidos, tal que* ξ *tiene la misma distribución que* $\sum_{k=1}^{r} \xi_{r,k}$.

Proposición 4.1. *Un campo aleatorio* N *es infinitamente divisible si y sólo si su FGP es de la forma*

$$G_N(f) = \exp\left[\int_{\mathcal{N}} \left(e^{\mu \log f} - 1\right) \Gamma(d\mu)\right],$$

donde $0 \leq f \leq 1$, $1 - f \in C_K^+$ *y* $\Gamma(\cdot)$ *es una medida no negativa en* $\mathcal{N}$ *tal que* $\Gamma(\{\phi\}) = 0$, *y* $\Gamma(\{\mu, \mu(A) > 0\}) < \infty$ *para todo* $A \in \mathfrak{B}\left(\mathbb{R}^d\right)$.

Demostración : Ver [5] teorema 8.4.V □

Ejemplo 4.2. Si N es un campo aleatorio de Poisson con intensidad λ, entonces N es infinitamente divisible y

$$\Gamma(\cdot) = \int_{\mathbb{R}^d} \delta_{\delta_x}(\cdot)\, \lambda(dx).$$

A continuación definiremos el funcional generador de probabilidades de transición (FG-PT) para un sistema de partículas markoviano.

Definición 4.4. *Sea* $\{N_t, t \geq 0\}$ *un sistema de partículas markoviano. Entonces para cada* $t \geq 0$ *el FGPT está dado por*

$$G_t(f \mid \mu) = \int_{\mathcal{N}} e^{\mu \log f} P_t(d\mu \mid \nu),$$

donde $0 \leq f \leq 1$, $(1 - f) \in C_K^+$, $\nu \in \mathcal{N}$.

Nótese que si el proceso de Markov $\{N_t, t \geq 0\}$ es multiplicativo y $\nu \in \mathcal{N}_S$, entonces

$$G_t(f \mid \mu) = G_t(f \mid \{x_i, i \in I\}) = \prod_{i \in I} G_t(f \mid x_i),$$

donde $G_t(f \mid x)$ es el funcional generador de probabilidades de transición cuando la población inicial consiste de un individuo $\delta_x, x \in \mathbb{R}^d$.

Proposición 4.2. *El FGPT de un sistema de partículas markoviano multiplicativo con una partícula inicial* $x \in \mathbb{R}^d$, *satisface*

$$G_{t+s}(f \mid x) = G_s(G_t(f \mid \cdot) \mid x) \tag{4.2}$$

$$G_0(f \mid x) = f(x), \tag{4.3}$$

donde $s, t \geq 0$.

Demostración : Demostraremos únicamente la primera afirmación; la segunda se demuestra de forma similar.

Por definición,

$$G_{t+s}(f \mid x) = \int_{\mathcal{N}} \mathrm{e}^{\mu \log f} P_{t+s}(d\mu \mid x).$$

De la propiedad de Markov se sigue que

$$\begin{aligned}
\int\limits_{\mathcal{N}} e^{\mu \log f} P_{t+s}(d\mu \mid x) &= \int\limits_{\mathcal{N}} \int\limits_{\mathcal{N}} e^{\mu \log f} P_t\left(d\mu \mid \mu'\right) P_s\left(d\mu' \mid x\right) \\
&= \int\limits_{\mathcal{N}} e^{\mu' \log G_t(f|\cdot)} P_s\left(d\mu' \mid x\right) \\
&= G_t\left(G_s(f \mid \cdot) \mid x\right).
\end{aligned}$$

□

En lo que resta de esta sección nos restringiremos al caso de sistemas finitos de partículas, es decir, supondremos que

$$P\left[N_t\left(\mathbb{R}^d\right) < \infty\right] = 1, \qquad t \geq 0,$$

y además que $\{N_t, t \geq 0\}$ es un proceso de Markov fuerte. De lo dicho al principio de esta sección se sigue que el espacio de estados del proceso $\{N_t, t \geq 0\}$ es el espacio de medidas siguiente

$$\mathcal{E} = \left\{\sum_{i=1}^{k} \delta_{x_i} \mid x_i \in \mathbb{R}^d,\ i = 1, 2, ..., k;\ k = 0, 1, 2...\right\},$$

Nótese que el espacio de estados del proceso $\{N_t, t \geq 0\}$ puede describirse como

$$\mathcal{E} = \left\{x^k = (x_1, x_2, ..., x_k) \mid k = 0, 1, 2, ..., x_i \in \mathbb{R}^d\right\}.$$

Trabajaremos con la segunda representación del espacio de estados, pero sin dejar a un lado la primera. Consideremos el espacio $\left(\mathbb{R}^d\right)^{(n)} := \left(\mathbb{R}^d\right)^n \big/ \sim$, donde $(x_1, \ldots, x_n) \sim \left(x_{\pi(1)}, \ldots, x_{\pi(n)}\right)$ para toda permutación $\pi \in S_n$, y definamos $\Lambda_F = \cup_{n=0}^{\infty} \left(\mathbb{R}^d\right)^{(n)}$. Nótese que el proceso $\{N_t, t \geq 0\}$ está caracterizado por las probabilidades de transición $P_t\left(A \mid x^k\right)$ de un estado $x^k \in \left(\mathbb{R}^d\right)^{(k)}$ al conjunto $A \in \mathfrak{B}(\Lambda_F)$ donde x^k representa un conjunto finito de partículas $\{x_1, \ldots, x_k\}$ localizadas en los puntos $(x_1, \ldots, x_k)$.

Notemos además que la transición del estado x^k al conjunto $A \in \mathfrak{B}(\Lambda_F)$ puede traer como consecuencia un cambio en el tamaño de la población, y que la probabilidad de transición $P_t\left(A \mid x^k\right)$ satisface la ecuación integral

$$P_t\left(A \mid x^k\right) = P_t^0\left(A \mid x^k\right) + \sum_{j=0}^{\infty} \int_0^t \int\limits_{\left(\mathbb{R}^d\right)^{(j)}} P_{t-s}\left(A \mid y^j\right) Q^{(j)}\left(dy^j, ds \mid x^k\right), \tag{4.4}$$

donde

i) P_t^0 es una probabilidad de transisición incompleta; $P_t^0\left(A \mid x^k\right)$ representa la probabilidad de transición (sin saltos) del estado x^k a $A \in \mathfrak{B}\left(\Lambda_F\right)$ durante el intervalo de tiempo $[0,t)$. En este tipo de transiciones no existen cambios en el tamaño de la población, por tanto $P_t^0\left(\left(\mathbb{R}^d\right)^{(n)} \mid x^k\right) = 0$ si $n \neq k$.

ii) La distribución conjunta del primer tiempo de salto y del estado inmediato

$$Q = \sum\nolimits_{j=0}^{\infty} Q^{(j)},$$

es una distribución de probabilidad condicional, donde $Q\left(A, t \mid x^k\right)$, es la probabilidad de que el primer tiempo de salto τ se encuentre en el intervalo $[0,t)$ y que el estado inmediato a este primer salto pertenezca a $A \in \mathfrak{B}\left(\Lambda_F\right)$ dado el estado inicial x^k; $Q^{(j)}$ representa el j-ésimo tiempo de salto y la distribución del estado inmediato. Así, la distribución cumulativa de τ condicionado al estado inicial x^k es

$$Q\left(\Lambda_F, t \mid x^k\right).$$

Multiplicando la relación (4.4) por $\exp\left(\sum_{i=1}^{k} \ln f\left(x_i\right)\right)$ e integrando se obtiene el FGPT, el cual está dado por

$$G_t\left(f \mid x^k\right) = G_t^0\left(f \mid x^k\right) + \sum_{j=0}^{\infty} \int\limits_0^t \int\limits_{\left(\mathbb{R}^d\right)^{(j)}} G_{t-s}\left(f \mid y^j\right) Q^{(j)}\left(dy^j, ds \mid x^k\right), \tag{4.5}$$

donde G_t^0 es el FGPT correspondiente P_t^0. La relación (4.5) es llamada la ecuación de Moyal.

Cuando $\{N_t,\, t \geq 0\}$ es un proceso de Markov multiplicativo, entonces su FGPT satisface

$$G_t\left(f \mid x^k\right) = \prod_{i=1}^{k} G_t\left(f \mid x_i\right),$$

donde $x^k = (x_1, \ldots, x_k)$. Por lo tanto es suficiente considerar la restricción de la ecuación de Moyal a poblaciones iniciales compuestas por un solo individuo δ_x, resultando

$$\begin{aligned} G_t\left(f \mid x\right) &= G_t^0\left(f \mid x\right) + \sum_{j=0}^{\infty} \int\limits_0^t \int\limits_{\left(\mathbb{R}^d\right)^{(j)}} \left[\prod_{i=1}^{j} G_{t-s}\left(f \mid y_i\right)\right] Q^{(j)}\left(dy^j, ds \mid x\right) \\ &= G_t^0\left(f \mid x\right) + H\left\{G_{t-s}\left(f \mid \cdot\right) \mid x\right\} \end{aligned} \tag{4.6}$$

A la ecuación (4.6) se le llama la ecuación de Skorokhod (S-ecuación).

La pregunta que surge ahora es ¿Qué condiciones deben cumplir G^0 y Q para asegurar que exista una única solución de la ecuación (4.5)? Para responder a dicha pregunta, procederemos a investigar la existencia y unicidad de las soluciones de la ecuación (4.6), para lo cual supondremos que

1) $G_t^0(\varphi \mid x)$ es el FGPT de la probabilidad de transición $P_t^0(A \mid x)$, donde $A \in \Lambda_F$. Dicha probabilidad de transición cumple que $P_t^0(\Lambda_F \mid x) \leq 1$ y $G_t^0(\varphi \mid x)$ satisface (4.2) y (4.3).

2) $Q(A, t \mid x) = \sum_{j=0}^{\infty} Q^{(j)}\left(A^{(j)}, t \mid x\right)$ donde $A^{(j)} = A \cap \left(\mathbb{R}^d\right)^{(j)}$. $Q(A, t \mid \cdot)$ se supone $\mathfrak{B}\left(\mathbb{R}^d\right)-$ medible para todo $A \in \mathfrak{B}(\Lambda_F)$ y $Q(\cdot, t \mid x)$ es una medida de probabilidad en $\mathfrak{B}(\Lambda_F)$ para todo $x \in \mathbb{R}^d$.

3) P^0 y Q satisfacen las condiciones

$$P_t^0\left(\Lambda_F \mid x^k\right) + Q\left(\Lambda_F, t \mid x^k\right) = 1, \tag{4.7}$$

$$Q\left(A, t+s \mid x^k\right) = Q\left(A, t \mid x^k\right) + \int_{\left(\mathbb{R}^d\right)^{(k)}} Q\left(A, s \mid y^k\right) P_t^0\left(dy^k \mid x^k\right). \tag{4.8}$$

Teorema 4.1. *Sea* $0 \leq f(x) \leq 1$*. Supongamos que* P_t^0 *y* Q_t *satisfacen las condiciones* 1), 2), 3)*. Entonces*

i) La relación recursiva

$$\begin{aligned} G_t^{(0)}(f \mid x) &= G_t^0(f \mid x), \\ G_t^{(n+1)}(f \mid x) &= G_t^{(0)}(f \mid x) + \sum_{j=0}^{\infty} \int_0^t \int_{\left(\mathbb{R}^d\right)^{(j)}} \left[\prod_{i=1}^{j} G_{t-s}^{(n)}(f \mid y_i)\right] Q^{(j)}\left(dy^j, ds \mid x\right), \end{aligned} \tag{4.9}$$

donde $0 \leq f \leq 1$*, la cual define una sucesión no decreciente* $\left\{G^{(n)}\right\}_{n\in\mathbb{N}}$ *de funcionales que converge a una función* $G_t^{\infty} \leq 1$*, y* G_t^{∞} *es la solución no negativa mas pequeña de (4.6) y satisface la relación (4.2).*

ii) G_t^{∞} *es el FGPT de una probabilidad de transición incompleta* $P_t^{\infty}(\cdot \mid \cdot)$.

iii) G_t^{∞} *es la única solución acotada de la ecuación (4.6) si y sólo si* $P_t^{\infty}(\Lambda_F \mid x) = 1$ *para todo* $x \in \mathbb{R}^d$ *y* $t > 0$.

Demostración : i) Abreviaremos las relaciones (4.6) y (4.9) como

$$G_t = G_t^{(0)} + H\left[G_{t-s}\right]$$

y

$$G_t^{(n+1)} = G_t^{(0)} + H\left[G_{t-s}^{(n)}\right].$$

respectivamente. Por definición sabemos que $G_t^{(0)} \leq 1$ es el FGPT de una distribución condicional incompleta P_t^0. Procederemos por inducción. Supongamos que lo anterior se cumple para $G_t^{(j)}$ para $j = 1, ..., n$ y que y que

$$G_t^{(0)} \leq G_t^{(1)} \leq \ldots \leq G_t^{(n)} \leq 1.$$

De la relación (4.9) se sigue que $G_t^{(n+1)}$ existe y es el FGPT de una distribución condicional incompleta, digamos

$$\begin{aligned} P_t^{n+1}(A \mid x) &= P_t^0(A \mid x) \\ &+ \sum_{j=0}^{\infty} \int_0^t \int_{(\mathbb{R}^d)^{(j)}} P_{t-s}^n(A \mid y^j)\, Q^{(j)}\left(dy^j, ds \mid x^k\right). \end{aligned}$$

Como $G_t^{(n)} \leq 1$, se cumple que

$$H\left\{G_t^{(n)}(f \mid x)\right\} \leq H[1 \mid x] = Q(\Lambda_F, t \mid x)$$

y además

$$G_t^{(0)}(f \mid x) \leq G_t^{(0)}(1 \mid x) = P_t^0(\Lambda_F \mid x).$$

Luego, de las dos relaciones anteriores y de (4.7) se sigue que $G_t^{(n+1)} \leq 1$. Dado que $G_t^{(n-1)} \leq G_t^{(n)}$ para toda $t \in \mathbb{R}_+$, se cumple que

$$H\left[G_{t-s}^{(n-1)}\right] \leq H\left[G_{t-s}^{(n)}\right],$$

y por tanto

$$G_t^{(n)} = G_t^{(0)} + H\left[G_{t-s}^{(n-1)}\right] \leq G_t^{(0)} + H\left[G_{t-s}^{(n)}\right] = G_t^{(n+1)}.$$

Hemos probado lo deseado. Probaremos ahora que G_t^{∞} es la solución no negativa más pequeña de (4.6). Haciendo $n \to \infty$ en ambos lados de la relación (4.9) se cumple que G_t^{∞} satisface la relación (4.6) y es la menor solución no negativa de (4.6). En efecto, supongamos que G_t' es otra solución, entonces se tiene que

$$G_t^{(0)} \leq G_t^{(0)} + H\left[G_{t-s}'\right] = G_t'.$$

Ahora supongamos que $G_t^{(j)} \leq G_t'$. Entonces $H\left[G_t^{(j)}\right] \leq H\left[G_t'\right]$ y por tanto

$$G_t^{(j+1)} = G_t^{(0)} + H\left[G_{t-s}^{(j)}\right] \leq G_t'.$$

Inductivamente se sigue que $G' \geq G_t^{(n)}$ para todo $n \in \mathbb{N}$, por lo que se tiene que $G_t^{\infty} \leq G_t'$. Probaremos ahora que G_t^{∞} satisface la relación (4.2). Dado que $G_t^{(0)}$ satisface la relación (4.2) y por la condición 3 se sigue que

$$G_{t+s}^{(n+1)}(f \mid x) = G_s^{(0)}\left\{G_t^{(n+1)}(f \mid \cdot) \mid x\right\} + H\left[G_t^{(n)}(f \mid \cdot) \mid x\right],$$

y al hacer $n \to \infty$ en ambos lados de igualdad anterior se obtiene lo deseado, es decir

$$G_{t+s}^{\infty} = G_s^{\infty}\left\{G_t^{\infty}(f \mid \cdot) \mid x\right\}.$$

ii) En la demostración de *i*), se probó que cada $G_t^{(n)}$ es el FGPT de una distribución condicional incompleta P_t^n. A continuación demostraremos que G_t^{∞} es el FGPT de una probabilidad de transición incompleta P_t^{∞}. Para x, t fijos sea $\mathcal{U}$ la clase de todos los conjuntos $A \in \mathfrak{B}(\Lambda_F)$ tales que la sucesión $\{P_t^n(A \mid x)\}$ es no decreciente. Nótese que dicha clase $\mathcal{U}$ es una clase monótona. Ahora, como $\left\{G_t^{(n)}\right\}$ es una sucesión no decreciente y acotada por $G_t^{\infty} \leq 1$, se cumple que

$$P_t^n(A \mid x) \leq P_t^{n+1}(A \mid x) \leq 1, \quad n = 1, 2, ...,$$

siempre que A sea un conjunto producto medible. Así $\mathcal{A} \subset \mathcal{U}$, donde $\mathcal{A}$ es la clase de todos las uniones finitas de productos de conjuntos medibles. Es fácil verificar que $\mathcal{A}$ es un álgebra. Como $\mathfrak{B}(\Lambda_F)$ es la $\sigma-$ álgebra generada por $\mathcal{A}$, se sigue que $\mathfrak{B}(\Lambda_F) \subset \mathcal{U}$ y por lo tanto $\mathfrak{B}(\Lambda_F) = \mathcal{U}$. De lo anterior se sigue que $\{P_t^n(\cdot \mid x)\}$ es no decreciente, y por tanto converge a una medida $P_t^{\infty}(\cdot \mid x)$ en $\mathfrak{B}(\Lambda_F)$. Como lo anterior se cumple para cada $x \in \mathbb{R}^d$, se sigue que $P_t^{\infty}(A \mid \cdot)$ es una función medible en $\mathbb{R}^d$ para cada $A \in \mathfrak{B}(\Lambda_F)$, $t > 0$. Luego $P_t^{\infty}(\cdot \mid \cdot)$ es una distribución condicional incompleta en $\mathfrak{B}(\Lambda_F) \times \mathbb{R}^d$. Entonces $\left\{G_t^{(n)}\right\}$ converge al FGPT de P_t^{∞}, el cual es G_t^{∞}, y dado que G_t^{∞} satisface la relación (4.2), se sigue que P_t^{∞} es una probabilidad de transición multiplicativa incompleta .

iii) Para demostrar lo deseado es suficiente verificar que P_t^{∞} es idéntico a una solución regular, entonces G_t^{∞} es la única solución acotada de la ecuación (4.6) si y sólo si $P_t^{\infty}(\Lambda_F \mid x) = 1$, ver [16]. □

4.2. Ejemplos de sistemas de partículas

En esta sección se introducen 3 ejemplos de sistemas de partículas. Uno de estos ejemplos corresponde a un sistema de partículas con el tamaño de la población finito para todo tiempo $t \geq 0$, y los otros dos corresponden a sistemas de partículas en los que el tamaño de la población puede ser infinito.

4.2.1. Proceso de difusión de ramificación simple

Definición 4.5. *Un proceso de difusión de ramificación simple (PDRS) es un sistema de partículas markoviano cuyo FGPT con una partícula inicial $x \in \mathbb{R}^d$ está dado por*

$$G_t(f \mid x) = e^{-Vt}T_t(f) + (1-\alpha)\left(1-e^{-Vt}\right) + V\alpha \int_0^t e^{-Vs}T_s\left[G_{t-s}^2(f \mid x)\right]ds,$$

donde $V > 0$ y $T_t(f) = \int_{\mathbb{R}^d} f(y)\,p(t,x,y)\,dy$ con $p(t,x,y) = (2\pi t)^{-d/2}\exp\left(-|x-y|^2/2t\right)$, $x,y \in \mathbb{R}^d$, $t \geq 0$.

A continuación daremos una descripción intuitiva del PDRS

El PDRS puede describirse intuitivamente como una población en $\mathbb{R}^d$ en la que cada individuo migra y se ramifica de la siguiente forma:

a) **Movimiento Browniano**. Durante su tiempo de vida cada partícula se mueve de acuerdo a un movimiento Browniano en $\mathbb{R}^d$, independientemente de las otras partículas.

b) **Tasa de ramificación**. La distribución del tiempo de vida de una partícula tiene distribución exponencial con parametro V. Al parametro V se le llama la tasa de ramificación.

c) **Mecanismo de ramificación binaria**. Cuando una partícula se ramifica, ésta muere con probabilidad $1-\alpha$, o es reemplazada en el mismo lugar por dos descendientes con probabilidad α, donde $0 < \alpha < 1$. Las partículas evolucionan independientemente, siguiendo la misma dinámica.

Dado que la evolución de los descendientes es independiente, se sigue que el PDRS es multiplicativo.

En términos del sistema de partículas multiplicativas de Markov se tiene que para el PDRS

$$\begin{aligned} G_t^0(f \mid x) &= T_t^0(f) = \mathrm{e}^{-Vt}\int_{\mathbb{R}^d} f(y)\,p(t,x,y)\,dy \\ Q^{(j)}\left(dy^j, ds \mid x\right) &= \begin{cases} V\mathrm{e}^{-Vs}(1-\alpha)\,ds & j=0 \\ V\mathrm{e}^{-Vs}\alpha p(s,x,y)\,\delta_y^2 ds & j=2 \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases} \end{aligned}$$

donde δ_y^2 denota dos partículas localizadas en el punto $y \in \mathbb{R}^d$.

Para este proceso la S-ecuación está dada por

$$\begin{aligned} G_t(f \mid x) &= \mathrm{e}^{-Vt} \int_{\mathbb{R}^d} f(y)\, p(t,x,y)\, dy + (1-\alpha)\left(1-\mathrm{e}^{-Vt}\right) \\ &\quad + V\alpha \int_0^t \int_{\mathbb{R}^d} G_{t-s}^2(f \mid y)\, \mathrm{e}^{-Vs} p(s,x,y)\, dyds. \end{aligned}$$

Si $H_t(1-f \mid x) = 1 - G_t(f \mid x)$, entonces H_t satisface la ecuación

$$\begin{aligned} H_t(1-f \mid x) &= \mathrm{e}^{-Vt} \int_{\mathbb{R}^d} (1-f(y))\, p(t,x,y)\, dy \\ &\quad + 2V\alpha \int_0^t \int_{\mathbb{R}^d} H_{t-s}(1-f \mid y)\, \mathrm{e}^{-Vs} p(s,x,y)\, dyds \\ &\quad - V\alpha \int_0^t \int_{\mathbb{R}^d} H_{t-s}^2(1-f \mid y)\, \mathrm{e}^{-Vs} p(s,x,y)\, dyds, \end{aligned}$$

donde $H_0(1-f \mid x) = 1 - f(x)$.

La última igualdad se puede reescribir como

$$\begin{aligned} H_t(1-f \mid x) &= T_t^0 H_0(1-f \mid x) + 2V\alpha \int_0^t T_s^0 H_{t-s}(1-f \mid y)\, ds \\ &\quad - V\alpha \int_0^t T_s^0 H_{t-s}^2(1-f \mid y)\, ds. \end{aligned}$$

La ecuación anterior tiene la siguiente forma diferencial:

$$\frac{\partial}{\partial t} H_t(1-f \mid x) = (\triangle + V(2\alpha - 1)I) H_t(1-f \mid x) - V\alpha H_t^2(1-f \mid x),$$

donde $H_0(1-f \mid x) = 1 - f(x)$, $\triangle$ es el Laplaciano $d-$ dimensional e I es el operador identidad.

4.2.2. Campo aleatorio de Poisson con ramificación

Definición 4.6. *El campo aleatorio de Poisson con ramificación, es un PDRS cuyo estado inicial es un campo aleatorio de Poisson en $\mathbb{R}^d$. La medida de intensidad de dicho campo aleatorio es una medida de Radon λ en $\mathbb{R}^d$.*

Teorema 4.2. *Sea $G_t(f \mid x)$ el FGPT del PDRS y $G_t(f)$ el FGP del campo aleatorio de Poisson con ramificación. Si $\int_A \left[\int_{\mathbb{R}^d} p(t,x,y)\,\lambda(dx)\right] dy < \infty$ para cada $A \subset \mathbb{R}^d$ compacto, entonces*

$$G_t(f) = \exp\left[-\int_{\mathbb{R}^d} H_t(1-f \mid x)\,\lambda(dx)\right]$$

donde $H_t(1-f \mid x) = 1 - G_t(f \mid x)$.

Demostración : Sea $\{D_k\}$ una sucesión creciente de conjuntos compactos tal que $D_k \uparrow \mathbb{R}^d$. Supongamos que el campo aleatorio de Poisson inicial se encuentra concentrado en D_k. Entonces inicialmente existe una población finita $\{x_1,\ldots,x_j\}$ con probabilidad uno. Sea $G_t^k(f)$ el correspondiente FGP. Luego

$$\begin{aligned}
G_t^k(f) &= \mathbb{E}\left[\exp\int \log f(x)\,N_t(dx)\right] \\
&= \mathbb{E}\left[\mathbb{E}\left[\exp\int \log f(x)\,N_t(dx) \mid \{x_1,\ldots,x_j\}\right]\right] \\
&= \mathbb{E}\left[G_t(f \mid \{x_1,\ldots,x_j\})\right] \\
&= \mathbb{E}\left[\prod_{i=1}^{j} G_t(f \mid x_i)\right] \\
&= \sum_{j=0}^{\infty} \frac{\mathrm{e}^{-\lambda(D_k)}}{j!}\left(\int_{D_k} G_t(f \mid x)\,\lambda(dx)\right)^j \\
&= \exp\left[\int_{D_k} \left[G_t(f \mid x) - 1\right]\lambda(x)\right] \\
&= \exp\left[-\int_{D_k} H_t(1-f \mid x)\,\lambda(x)\right].
\end{aligned}$$

Aplicando el teorema de convergencia monótona se concluye que

$$G_t^k(f) \longrightarrow G_t(f) = \exp\left[-\int_{\mathbb{R}^d} H_t(1-f \mid x)\,\lambda(x)\right].$$

Resta por demostrar que $G_t(\cdot)$ es el FGP de un campo aleatorio. El funcional $G_t(f)$ puede ser escrito como

$$G_t(f) = \exp\left[\int_{\mathbb{R}^d}\left\{\int_{\mathcal{N}}\left(\mathrm{e}^{N\log f} - 1\right)P_t(dN \mid x)\right\}\lambda(dx)\right] = \exp\left[\int_{\mathcal{N}}\left(\mathrm{e}^{N\log f} - 1\right)\Lambda_t(dN)\right],$$

donde $\Lambda_t(A) = \int_{\mathbb{R}^d} P_t(A \mid x)\lambda(dx),\ A \in \mathfrak{N},\ \Lambda_t(\{\phi\}) = 0$ y $P_t(\cdot \mid x)$ es la función de probabilidad de transición del PDRS. Sólo falta demostrar que para cualquier conjunto compacto K, $\Lambda_t\{N \in \mathcal{N} : N(K) \neq 0\} < \infty$. Supongamos que una partícula viva al tiempo cero tiene exactamente k descendientes vivos al tiempo t con probabilidad $q_k(t)$. De la Proposición (4.1) de [6] se deduce que $\sum_{k=0}^{\infty} k \cdot q_k(t) = \mathrm{e}^{V(2\alpha-1)t}$. Ahora la probabilidad de que cualquier descendiente particular del ancestro original x se encuentre en el conjunto K al tiempo t es $\int_K p(t,x,y)\,dy$. Entonces la probabilidad que al menos uno de los descendientes de x se encuentre en el conjunto K al tiempo t es

$$\begin{aligned} P_t(N(K) \neq 0 \mid x) &\leq \sum_{k=0}^{\infty} k \cdot q_k(t) \int_K p(t,x,y)\,dy \\ &= e^{V(2\alpha-1)t} \int_K p(t,x,y)\,dy. \end{aligned}$$

Entonces

$$\begin{aligned} \Lambda_t(N(K) \neq 0) &= \int_{\mathbb{R}^d} P_t(N(K) \neq 0 \mid x)\,\lambda(dx) \\ &\leq e^{V(2\alpha-1)t} \int_K \int_{\mathbb{R}^d} p(t,x,y)\,\lambda(dx)\,dy \\ &< \infty. \end{aligned}$$

□

El siguiente corolario es una consecuencia del teorema anterior y de la proposición 4.1.

Corolario 4.1. *El campo aleatorio de Poisson con ramificación al tiempo t es un campo aleatorio infinitamente divisible.* □

Sea ξ una medida aleatoria en $\mathbb{R}^d$. Si $M_{(k)}(A_1, ..., A_k)$ es el $k-$ésimo momento factorial de $(\xi(A_1), ..., \xi(A_k))$, entonces $M_{(k)}(A_1, ..., A_k)$ cumple la siguiente relación

$$M_{(k)}(A_1 \times ... \times A_k) = \mathrm{lím}_{\eta\uparrow 1}\left\{\frac{\partial^k}{\partial\lambda_1 \cdots \partial\lambda_k} G_\xi\left(\eta + \sum_{i=1}^{k} \lambda_i \delta_i\right)\right\}_{\lambda_1=\cdots=\lambda_k=0}$$

donde $\delta_i(x) = \chi_{A_i}(x)$, $i = 1, ..., k$, ($\chi_A(x)$ es la función indicadora de A). Si $C_{(k)}(A_1, ..., A_k)$ es el $k-$ ésimo factorial cumulante de $(\xi(A_1), ..., \xi(A_k))$, una relación análoga a la anterior existe entre $C_{(k)}$ y $\log G_\xi$, es decir

$$C_{(k)}(A_1 \times ... \times A_k) = \mathrm{lím}_{\eta\uparrow 1}\left\{\frac{\partial^k}{\partial\lambda_1 \cdots \partial\lambda_k} \log G_\xi\left(\eta + \sum_{i=1}^{k} \lambda_i \delta_i\right)\right\}_{\lambda_1=\cdots=\lambda_k=0}.$$

Corolario 4.2. *Sea $N_t(\cdot)$ el campo aleatorio al tiempo t asociado a un PDRS con campo aleatorio de Poisson inicial con intensidad $\lambda\mu$, donde λ es una constante y μ es la medida de Lebesgue en $\mathbb{R}^d$. Entonces*

$$\frac{N_t(A) - \mathbb{E}N_t(A)}{\sqrt{Var(N_t(A))}}$$

converge en distribución a una distribución normal con media cero y varianza 1, cuando $A \uparrow \mathbb{R}^d$.

Demostración: Por el Teorema 3.3 es suficiente demostrar N_t es $B-$ mezclante. Pero el $k-$ ésimo factorial cumulante de N_t puede expresarse como

$$C_{(k)}(t, A_1 \times ... \times A_k) = \text{lím}_{\eta\uparrow 1} \left\{ \frac{\partial^k}{\partial\lambda_1 \cdots \partial\lambda_k} \log G_t \left(\eta + \sum_{i=1}^{k} \lambda_i \delta_i \right) \right\}_{\lambda_1 = \cdots = \lambda_k = 0}.$$

Del Teorema 4.2 se sigue que

$$G_t(f) = \exp\left[-\int_{\mathbb{R}^d} H_t(1 - f \mid x)\, \lambda(dx) \right],$$

y por lo tanto

$$\begin{aligned} C_{(k)}(t, A_1 \times ... \times A_k) &= \text{lím}_{\eta\uparrow 1} \left\{ \frac{\partial^k}{\partial\lambda_1 \cdots \partial\lambda_k} \left(\lambda \int \left(G_t \left(\eta + \sum_{i=1}^{k} \lambda_i \delta_i \mid x \right) - 1 \right) dx \right) \right\}_{\lambda_1 = \cdots = \lambda_k = 0} \\ &= \lambda \int M_{(k)}(t, A_1 \times ... \times A_k)\, dx. \end{aligned}$$

De lo anterior y de la Proposición (4.1) de [6] se sigue que

$$Q_{(k)}(t, y_1, ..., y_k) = \lambda V \alpha \int_0^t \int e^{V(2\alpha-1)u} f_k(t-u, z, y_1, \ldots, y_k)\, dz du,$$

donde

$$\begin{aligned} & f_k(t, z, y_1, \ldots, y_k) \\ = & \sum_{j=1}^{k-1} \sum_{\rho \in S_k^j} P_{(j)}\left(t, z, y_{\rho(1)}, ..., y_{\rho(j)}\right) P_{(k-j)}\left(t, z, y_{\rho(j+1)}, ..., y_{\rho(k)}\right), \end{aligned}$$

y $\sum_{\rho \in S_k^j}$ indica la sumatoria sobre todas las posibles combinaciones de k elementos en dos conjuntos, uno de tamaño j y el otro de tamaño $k-j$, y $P_{(k)}$ se obtiene de la siguiente relación recursiva:

$$\begin{aligned} P_{(1)}(t, x, z) &= e^{V(2\alpha-1)t} p(t, x, z) \\ P_{(k)}(t, x, y_1, ..., y_k) &= V\alpha \int_0^t \int e^{V(2\alpha-1)u} p(u, x, z) f_k(t-u, z, y_1, \ldots, y_k)\, dz du \end{aligned}$$

Entonces basta demostrar que

$$\begin{aligned}
& \int \cdots \int_{\left(\mathbb{R}^d\right)^{k-1}} \left|Q_{(k)}\left(t, y_1, \ldots, y_{k-1}, y_k\right)\right| dy_1 \ldots dy_k dz du \\
= \ & \lambda V \alpha \int_0^t \mathrm{e}^{V(2\alpha-1)u} \int_{\mathbb{R}^d} \\
& \cdot \int_{\left(\mathbb{R}^d\right)^{k-1}} f_k\left(t-u, z, y_1, \ldots, y_{k-1}, y_k\right) dy_1 \ldots dy_{k-1} dz du \qquad (4.10) \\
< \ & \infty,
\end{aligned}$$

donde

$$\begin{aligned}
& \int_{\left(\mathbb{R}^d\right)^{k-1}} f_k\left(t-u, z, y_1, \ldots, y_{k-1}, y_k\right) dy_1 \ldots dy_{k-1} \\
= \ & \sum_{j=1}^{k-1} \sum_{\rho \in S_k^j} \int_{\left(\mathbb{R}^d\right)^{k-1}} P_{(j)}\left(t-u, z, y_{\rho(1)}, \ldots, y_{\rho(j)}\right) \\
& \cdot P_{(k-j)}\left(t-u, z, y_{\rho(j+1)}, \ldots, y_{\rho(k)}\right) dy_1 \ldots dy_{k-1}. \qquad (4.11)
\end{aligned}$$

Empleando inducción se prueba que

$$\int_{\left(\mathbb{R}^d\right)^j} P_{(j)}\left(t, z, y_1, \ldots, y_j\right) dy_1 \ldots dy_j = \begin{cases} j!\mathrm{e}^{V(2\alpha-1)t}\left(\frac{\alpha\left(\mathrm{e}^{V(2\alpha-1)t}-1\right)}{(2\alpha-1)}\right)^{j-1}, & \alpha \neq 1/2 \\ j!\left(\frac{Vt}{2}\right)^{j-1}, & \alpha = 1/2 \end{cases}.$$

En efecto, para $j=1$ se tiene

$$\int_{\mathbb{R}^d} P_{(1)}(t, z, y)\, dy = \int_{\mathbb{R}^d} p(t, z, y)\, \mathrm{e}^{V(2\alpha-1)t} dy = \mathrm{e}^{V(2\alpha-1)t},$$

entonces,

$$\int_{\mathbb{R}^d} P_{(1)}(t, z, y)\, dy = \begin{cases} \mathrm{e}^{V(2\alpha-1)t}, & \alpha \neq 1/2 \\ 1, & \alpha = 1/2 \end{cases}.$$

Para $j = 2$ tenemos

$$
\begin{aligned}
&\int\limits_{(\mathbb{R}^d)^2} P_{(2)}(t, z, y_1, y_2)\, dy_1 dy_2 \\
=\;& \int\limits_{(\mathbb{R}^d)^2} V\alpha \int\limits_0^t \int \mathrm{e}^{V(2\alpha-1)u} p(u, z, y)\, f_2(t-u, y, y_1, y_2)\, dy du dy_1 dy_2 \\
=\;& V\alpha \int\limits_0^t \int \mathrm{e}^{V(2\alpha-1)u} p(u, z, y) \int\limits_{(\mathbb{R}^d)^2} f_k(t-u, y, y_1, y_2)\, dy_1 dy_2 dy du \\
=\;& 2V\alpha \int\limits_0^t \int \mathrm{e}^{V(2\alpha-1)u} p(u, z, y) \int\limits_{\mathbb{R}^d} P_{(1)}(t-u, y, y_1) \\
& \cdot \int\limits_{\mathbb{R}^d} P_{(1)}(t-u, y, y_2)\, dy_2 dy_1 dy du \\
=\;& 2V\alpha \int\limits_0^t \int \mathrm{e}^{V(2\alpha-1)u} p(t, z, y)\, \mathrm{e}^{2V(2\alpha-1)(t-u)} dy du \\
=\;& 2V\alpha \mathrm{e}^{V(2\alpha-1)t} \int \mathrm{e}^{-V(2\alpha-1)u} du \\
=\;& \begin{cases} 2!\mathrm{e}^{V(2\alpha-1)t}\left(\frac{\alpha\left(\mathrm{e}^{V(2\alpha-1)t}-1\right)}{(2\alpha-1)}\right), & \alpha \neq 1/2 \\ 2!\left(\frac{Vt}{2}\right), & \alpha = 1/2 \end{cases},
\end{aligned}
$$

y así sucesivamente para todo $j \in \mathbb{N}$. De forma similar se obtiene que

$$
\begin{aligned}
&\int\limits_{(\mathbb{R}^d)^{j-1}} P_{(j)}(t, z, y_1, ..., y_{j-1}, y_j)\, dy_1, ..., dy_{j-1} \\
=\;& \begin{cases} p(t, z, y_j)\, j!\mathrm{e}^{V(2\alpha-1)t}\left(\frac{\alpha(V(2\alpha-1)-1)}{(2\alpha-1)}\right)^{j-1}, & \alpha \neq 1/2 \\ p(t, z, y_j)\, t, & \alpha = 1/2 \end{cases}.
\end{aligned}
$$

Entonces usando las integrales anteriores se sigue que la relación (4.11) puede expresarse como

$$
\begin{aligned}
&\int\limits_{(\mathbb{R}^d)^{k-1}} f_k(t-u, z, y_1, \ldots, y_{k-1}, y_k)\, dy_1 \ldots dy_{k-1} \\
=\;& \sum_{j=1}^{k-1} \sum_{\rho \in S_k^j} p(t, z, y_j)\, j!\,(k-j)!\mathrm{e}^{V(2\alpha-1)(t-u)} \left(V\alpha m_{t-u}\right)^{k-2},
\end{aligned}
$$

donde

$$m_t = \begin{cases} \frac{e^{V(2\alpha-1)t}-1}{V(2\alpha-1)}, & \alpha \neq 1/2 \\ t, & \alpha = 1/2 \end{cases}.$$

Sustituyendo (4.11) en (4.10) e integrando se obtiene que

$$\begin{aligned} & \int_{(\mathbb{R}^d)^{k-1}} \left|Q_{(k)}(t, y_1, \ldots, y_{k-1}, y_k)\right| dy_1 \ldots dy_{k-1} \\ = & \sum_{j=1}^{k-1} \sum_{\rho \in S_k^j} j!\,(k-j)!\lambda e^{V(2\alpha-1)t} (V\alpha m_t)^{k-1} < \infty. \end{aligned}$$

Entonces el campo aleatorio es $B-$ mezclante y por lo tanto se cumple lo deseado. □

4.2.3. Campos aleatorios ramificados con inmigración

Definición 4.7. *El campo aleatorio ramificado con inmigración (CARI), es un proceso de difusión con ramificación cuyo estado inicial es un campo aleatorio de Poisson con intensidad $\gamma|\cdot|$ donde $|\cdot|$ es la medida de Lebesgue en $\mathbb{R}^d$, y en el que inmigran partículas de acuerdo a un campo aleatorio de Poisson en espacio tiempo con intensidad $\beta \shortparallel \cdot \shortparallel$, donde $\shortparallel \cdot \shortparallel$ es la medida de Lebesgue en $\mathbb{R}^d \times [0, \infty)$.*

Supongamos que la ley de ramificación $\{p_n\}_{n=1}^{\infty}$ tiene media m_1 y segundo momento factorial m_2 finitos, y que la tasa de ramificación es exponencial con parámetro $V > 0$.

Sea $N_t^{\mathcal{I}}(\cdot)$ el campo aleatorio al tiempo t asociado a un CARI. Nótese que $N_t^{\mathcal{I}}$ es un campo aleatorio estacionario y asociado y cumple que para toda $\varphi, \psi : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ medibles y acotadas y $s \leq t$

$$\begin{aligned} & Cov(\langle N_s^{\mathcal{I}}, \varphi\rangle, \langle N_t^{\mathcal{I}}, \psi\rangle) \\ = & e^{\alpha t}(\gamma + \beta\left(1 - e^{-\alpha s}\right) / \alpha) \int_{\mathbb{R}^d} \varphi(x)\, T_{t-s}\psi(x)\, dx + \\ & + e^{\alpha t}\gamma m_2 V \int_0^s e^{\alpha(s-r)} \int_{\mathbb{R}^d} \varphi(x)\, T_{t-s}\psi(x)\, dxdr + \\ & + e^{\alpha t}\beta m_2 V \int_0^s e^{\alpha(s-r)} \left(1 - e^{-\alpha r}\right) / \alpha \\ & \cdot \int_{\mathbb{R}^d} \varphi(x)\, T_{t+s-2r}\psi(x)\, dxdr \end{aligned} \tag{4.12}$$

donde $\{T_t, t \geq 0\}$ es el semigrupo Browniano y $\alpha = V(m_1 - 1)$, ver [15].

Corolario 4.3. *Sea* $N_t^{\mathcal{I}}(\cdot)$ *el campo aleatorio al tiempo* t *asociado a un CARI con campo aleatorio Poisson inicial con intensidad* $\gamma|\cdot|$ *donde* $|\cdot|$ *es la medida de Lebesgue en* $\mathbb{R}^d$*. Entonces para toda* $n \in \mathbb{N}$ *y rectángulos finitos disjuntos* $A_1, ..., A_n \in \mathbb{R}^d$

$$\left(\frac{N_t^{\mathcal{I}}(\lambda A_1) - \mathbb{E}N_t^{\mathcal{I}}(\lambda A_1)}{\lambda^{d/2}}, \ldots, \frac{N_t^{\mathcal{I}}(\lambda A_n) - \mathbb{E}N_t^{\mathcal{I}}(\lambda A_n)}{\lambda^{d/2}}\right)$$

converge en distribución a una distribución normal multivariada con vector medio 0 *y matriz de covariancia diagonal con coeficientes*

$$q(t,t)|A_1|, ..., q(t,t)|A_n|$$

cuando $\lambda \to \infty$*.*

Demostración: En vista del Teorema 3.4 es suficiente demostrar que

$$\sum_{k\in\mathbb{Z}^d} Cov(N_t^{\mathcal{I}}(I), N_t^{\mathcal{I}}(I+k)) < \infty, \qquad t \geq 0.$$

Para ver ésto, en la relación 4.12 consideremos $s = t$, $\varphi = \chi_I(x)$ y $\psi = \chi_{I+k}(x)$. Entonces se obtiene

$$\begin{aligned} & \sum_{k\in\mathbb{Z}^d} Cov(N_t^{\mathcal{I}}(I), N_t^{\mathcal{I}}(I+k)) = \mathrm{e}^{\alpha t}(\gamma + \beta\left(1 - \mathrm{e}^{-\alpha t}\right)/\alpha) \\ & +\mathrm{e}^{\alpha t}\gamma m_2 V \int_0^t \mathrm{e}^{\alpha(t-r)} dr + \mathrm{e}^{\alpha t}\beta m_2 V \int_0^t \mathrm{e}^{\alpha(t-r)}\left(1 - \mathrm{e}^{-\alpha r}\right)/\alpha dr \\ = \; & q(t,t) < \infty. \end{aligned}$$

$\square$

Bibliografía

[1] Ash R., Probability and Measure Theory, 2da. ed., Academic Press, San Diego, 2000.

[2] Billingsley P., Convergence of Probability Measures, 2da. ed., John Wiley and Sons, New York, 1999.

[3] Brillinger D. R., Statistical inference for stationary point processes, in Stochastic Processes and Related Topics, ed. M. D. Puri. Academic, New York 1975.

[4] Burton R., Waymire E., Scaling limits for associated random measures, The Annals of Probability, Vol 13, 1267-1278 (1985).

[5] Daley D. J., Vere-Jones D., An Introduction to the Theory of Point Processes, Springer-Verlag, New York, 1988.

[6] Dawson D., Ivanoff G., Branching Diffusions and Random Measures, Advances in Probability and Related Topics Vol. 5, 61-102 (1978).

[7] Dawson D., Maisonneuve B., Spencer J., Lecture Notes in Mathematics, Ecole d ´Eté de Probabilités de Saint-Flour XXI-1991, Springer-Verlag, Berlin 1993.

[8] Ethier S., Kurtz T., Markov Processes Characterization and Convergence, John Wiley and Sons, New York, 1986.

[9] Fleischman K., Continuity properties of clustered stochastic point processes and applications to spatially homogeneous branching processes, Colloquia Mathematica Societatis Janos Bolyai: Point processes and queueing problems, 49-67 (1978).

[10] Grandell J., Point Processes and Random Measures, Advances in Applied Probability, Vol. 9, 502-526 (1977).

[11] Halmos P. R., Measure Theory, Springer Verlag, New York, 1974.

[12] Ivanoff G., Central Limit Theorems for Point Processes, Stochastic Processes and their Applications, Vol 12, 171-186 (1982).

[13] Jagers P., Aspects of Random Measures and Processes, Advances in Probability, Vol 3, 179-239 (1974).

[14] Kallenberg O., Random Measures, Akademie-Verlag, Berlin, and Academic Press, London, 1983.

[15] López-Mimbela J. A., Fluctuation Limits of Multitype branching Random Fields, J. Multivariate Analysis, Vol. 40, 56-83 (1992).

[16] Moyal J. E., Multiplicative Population Processes, Journal Applied Probability Vol. 1, 267-283 (1964).

[17] Revuz D., Yor M., Continuous Martingales and Brownian Motion, Springer Verlag, New York, 1991.