



CENTRO DE INVESTIGACIÓN EN MATEMÁTICAS A.C

**PROCESOS ALEATORIOS CONDICIONADOS A SER
POSITIVOS Y TIEMPOS DE OCUPACIÓN**

T E S I S

QUE PARA OBTENER EL GRADO DE:
MAESTRO EN CIENCIAS CON ESPECIALIDAD EN
PROBABILIDAD Y ESTADÍSTICA

PRESENTA:
GERÓNIMO ROJAS BARRAGÁN

DIRECTORES DE TESIS:
DR. JUAN CARLOS PARDO MILLÁN
DR. ARNAUD CHARLES SIRI JEGUSSE

2015

Hoja de Datos del Jurado

- I. Dr. Víctor Manuel Rivero Mercado.
Presidente.
Centro de Investigación en Matemáticas A.C.
- II. Dr. Gerónimo Francisco Uribe Bravo.
Secretario.
Universidad Nacional Autónoma de México.
- III. Dr. Arnaud Charles Leo Siri Jégousse.
Vocal (Co-director).
Universidad de Guanajuato.
- IV. Dr. Juan Carlos Pardo Millán .
Lector especial (Co-director).
Centro de Investigación en Matemáticas A.C.
- V. Datos del trabajo escrito
Procesos aleatorios condicionados a ser positivos y tiempos de ocupación.
76 páginas.
2015.

A mi hermana y a mi madre.

We do not write in order to be understood; we write in order to understand.

C. Day Lewis

Agradecimientos

A mi hermana, quien ha sido una sabia observadora, además de estar ahí, ayudándome a poner todo en perspectiva. A mi madre, por apoyarme en cada momento y paso que he dado, incluso cuando varios no han sido los mejores. Ellas son mi familia, y, como Alex Haley dijo alguna vez: la familia es nuestra conexión con el pasado y el puente con el futuro.

A Dulce Valdivia, por soportar mis diversos dramas y berrinches, por mostrarme que el estrés no produce algo bueno; quien tuvo fe en mi en aquellos (no pocos) momentos cuando yo no la tenía.

A mis asesores, los doctores Juan Carlos Pardo Millán y Arno Charles Siri Jegusse, quienes siempre se mostraron interesados en cuidar el desarrollo de este trabajo, se preocuparon por mis inquietudes y de quienes aprendí muchas cosas, además de matemáticas.

A mis sinodales, los doctores Víctor Manuel Rivero Mercado y Gerónimo Francisco Uribe Bravo, por tomarse el tiempo de leer este escrito y por los valiosos comentarios que hicieron.

A los profesores que tuve en el CIMAT, supervisando nuestro crecimiento. En particular al Dr. Daniel Hernández Hernández, quien también se preocupó por mi y me apoyó desde el día uno.

Al CIMAT, que me acogió en su comunidad, y gracias al cual conocí a gente increíble de la que estoy muy contento de poder llamar amigos. A estos amigos, sin los cuales los dos años de maestría habrían sido insípidos. En particular a José Manuel Pedraza, Sandra Palau, Rodrigo Gachuz y Jonás Arista quienes siempre mostraron disposición para ayudarme y por las muchas ideas que me quedaron claras después de (no tan cortas) discusiones.

A ti, lector, que por alguna razón estás recorriendo estas líneas, al final, este trabajo también es para ti, esperando que te sea de utilidad.

Finalmente al Consejo Nacional de Ciencia y Tecnología por ser mi soporte económico en esta travesía de dos fructíferos años.

Índice general

Introducción	III
1. Caminata aleatoria condicionada a ser positiva	1
1.1. Preliminares	1
1.1.1. La h -transformada de Doob	2
1.2. Construcción de Bertoin	4
1.2.1. Notación	4
1.2.2. Transformadas armónicas para caminatas aleatorias	6
1.3. Construcción de Tanaka	10
2. Movimiento browniano condicionado a ser positivo	15
2.1. Proceso de Bessel	15
2.2. Preliminares	16
2.3. Construcción vía h -transformada	20
2.4. Representación de Pitman	21
3. Comportamiento asintótico de los tiempos de ocupación: Caso discreto	27
3.1. Introducción	28
3.2. Estimaciones Preliminares	29
3.3. La cota superior	45
3.4. La cota inferior	50
3.5. El inicio es irrelevante	57
4. Comportamiento asintótico de los tiempos de ocupación: Caso continuo	59
4.1. Subordinadores	59
4.2. Comportamiento asintótico de los tiempos de ocupación	62
A. Descomposición de Wiener-Hopf para caminatas aleatorias	67
A.1. Wiener-Hopf para caminatas aleatorias	67
A.2. La identidad básica	71
Bibliografía	75

Introducción

Las caminatas aleatorias conforman uno de los más investigados ejemplos de procesos estocásticos. Su relación con el movimiento browniano, y, en general, con los procesos de Lévy, nos da luz para percatarnos de lo versátil e interesante que pueden ser. Una de las principales razones de estudio radica en su aplicabilidad. Por ejemplo, en finanzas fue de interés modelar fluctuaciones de mercado con dicho objeto; en estadística y ciencias de la computación son herramientas de utilidad para simular. En particular un gran número ejemplos tienen sus raíces en física estadística (ver Lawler y Limic [15]). No obstante, existen varios fenómenos que involucran incertidumbre en donde las caminatas aleatorias resultan ser un buen modelo. Las referencias clásicas, entre la amplia gama de bibliografía existente respecto a estas, son Spitzer [19] y Feller [11]; en este escrito dirigimos nuestra atención a la última.

Partiendo de una caminata aleatoria que toma valores en \mathbb{R} , resulta natural examinar qué sucede si se le condiciona a encontrarse en un subconjunto de \mathbb{R} . En particular, cuando el subconjunto de interés es \mathbb{R}_+ ; esto da pie a un nuevo proceso llamado *caminata aleatoria condicionada a ser positiva*. Se conocen dos construcciones clásicas de este objeto. La primera de ellas, hallada por Tanaka, pero optimizada por Doney [10] consiste en una construcción trayectorial y hace uso de las bondades que poseen las caminatas aleatorias. En la segunda, investigada por Bertoin [2], se emplea la técnica de la h -transformada de Doob para describir la probabilidad de transición del proceso antes mencionado. Dicha construcción hace uso de las funciones armónicas, mediante la transformación de Doob, que son herramientas analíticas y eficaces, fuertemente relacionadas con martingalas.

Motivados por el caso discreto, nos resulta de interés abordar también el caso continuo. Específicamente, qué sucede cuando consideramos al movimiento browniano en lugar de a la caminata aleatoria. Como resultado de lo anterior veremos que el movimiento browniano de dimensión uno condicionado a ser positivo puede verse como un proceso de Bessel de dimensión tres; el cual gracias a la representación de Pitman, se encuentra en términos de un movimiento browniano de dimensión uno. La referencia clásica pertinente al movimiento browniano es Revuz y Yor [18], sin embargo también hacemos referencia a Mörters y Peres [16], donde se discute un poco más la relación entre caminatas aleatorias y movimiento browniano.

Por otro lado, Biggins [4] estudió el comportamiento asintótico de los *tiempos de ocupación* tanto de caminatas aleatorias condicionadas a ser positivas como del proceso de Bessel de dimensión tres. Los tiempos de ocupación describen cuánto tiempo un proceso se encuentra en algún subconjunto de \mathbb{R} . Cuando se analiza el comportamiento asintótico es usual buscar funciones deterministas que, en el límite, se comporten de manera similar a los procesos de interés. Los resultados más importantes en la teoría de probabilidad que hacen uso de tal idea son la ley fuerte de grandes números y la ley del

logaritmo iterado (véase Mörters y Peres [16]).

Este escrito, que en esencia consiste en una revisión bibliográfica, tiene como primer objetivo presentar de manera autocontenida y detallada a las caminatas aleatorias condicionadas a ser positivas y al movimiento browniano condicionado a ser positivo. Como segundo objetivo, nos proponemos estudiar el comportamiento asintótico de los tiempos de ocupación de los dos procesos anteriores. Aprovechamos para mencionar que este trabajo nació con la idea de desglosar Biggins [4], sin embargo el primer obstáculo que encontramos fue la caminata aleatoria condicionada a ser positiva, lo que nos llevó a estudiar Bertoin [2] y Doney [10]. Una vez examinado este objeto ganamos una fuerte intuición, volviendo el estudio de Biggins [4] más ameno. Hacemos hincapié en que dicho artículo es un tanto técnico, y, por ende, hicimos un fuerte esfuerzo en detallar cuidadosamente los cálculos, muchos de los cuales no eran del todo inmediatos; de hecho el apéndice tiene la finalidad de validar un paso en la demostración del Lema 3.5. Precizando que el artículo principal estudia caminatas aleatorias centradas y de varianza finita es natural introducir al movimiento browniano condicionado a ser positivo; por tal razón los procesos de Lévy condicionados a ser positivos no fueron estudiados, pero pueden encontrarse tanto en Bertoin [2] como en Doney [10].

Para seguir este escrito es deseable conocer herramientas de teoría de la renovación, cálculo estocástico y procesos de Markov; la estructura del trabajo se presenta a continuación.

En el primer capítulo construimos a la caminata aleatoria condicionada a ser positiva, para ello se introduce a la h -transformada de Doob. Posteriormente describimos la construcción de Bertoin y por último justificamos porqué la construcción de Tanaka, la cual es más intuitiva, corresponde al mismo proceso.

El segundo capítulo puede pensarse como el análogo a tiempo continuo del primero. En este introducimos al proceso de Bessel y demostramos su relación con el movimiento browniano condicionado a ser positivo. Para finalizar detallamos la representación de Pitman, la cual nos permite visualizar al proceso de Bessel de dimensión tres únicamente en función de un movimiento browniano de dimensión uno.

El tercer capítulo se enfoca en estudiar el comportamiento asintótico de los tiempos de ocupación para caminatas aleatorias condicionadas a ser positivas, establecido en el Teorema 4.1. Para ello desglosamos a todo detalle la parte discreta de Biggins [4]. Este capítulo se caracteriza por ser técnico; pero la intuición y pasos detrás de la demostración del teorema principal del capítulo 3 son los siguientes: Como primer paso introducimos a una variable auxiliar, la cual nos permitirá describir el comportamiento entre las excursiones de la caminata aleatoria condicionada ser positiva por debajo de los máximos sucesivos de la caminata aleatoria original. Como segundo paso estudiamos las propiedades dicha variable auxiliar, haciendo hincapié en sus momentos, transformada de Laplace y la independencia que posee respecto al proceso de altura en escalera. Una vez analizada esta variable podremos acotar, tanto por arriba (con la desigualdad maximal para supermartingalas positivas) como por abajo (explotando la monotonía del tiempo de ocupación), cantidades de interés. Finalmente, aplicamos el Lema de Borel-Cantelli a dichas cantidades de interés y con ello finalizamos la prueba del teorema.

El cuarto y último capítulo estudia el comportamiento asintótico de los tiempos de ocupación para el proceso de Bessel de dimensión tres, por ello fue necesario recordar resultados correspondientes a subordinadores y para esto tomamos como referencia a Bertoin [3]. La idea de este capítulo es, por un lado, usar cotas exponenciales del tiempo de ocupación de un proceso de Bessel de dimensión tres, las

cuales se encuentran en los artículos Gruet y Shi [13] y Ciesielski y Taylor [8], para poder hacer uso del Lema de Borel-Cantell y, por otro lado, invocar la ley del logaritmo iterado para subordinadores.

Al finalizar el tercer y cuarto capítulos se concluye el desglose de Biggins [4] y se satisfacen los objetivos propuestos para este escrito.

Por último consideramos necesario incluir un apéndice donde estudiamos la descomposición de Wiener-Hopf para caminatas aleatorias, basándonos en las notas del Dr. Andreas Kyprianou. En este apéndice se demuestran dos resultados importantes respecto a las caminatas aleatorias, los cuales se emplean las primeras dos secciones del tercer capítulo.

1 Caminata aleatoria condicionada a ser positiva

El objetivo de este capítulo reside en introducir a la *caminata aleatoria condicionada a ser positiva*, que es el objeto fundamental en el desarrollo de la tesis. Para poder hacerlo estudiamos dos construcciones. La primera se basa en la técnica de h -transformada de Doob, la cual fue desarrollada en Bertoin [2]. La segunda es la construcción trayectorial descrita por Tanaka, pero basándonos en Doney [9, 10].

1.1. Preliminares

A lo largo de este capítulo $\{\xi_i, i \geq 1\}$ es una sucesión de variables aleatorias independientes e idénticamente distribuidas. La caminata aleatoria $S = \{S_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ se define como

$$S_0 = x, \quad S_n = \sum_{i=1}^n \xi_i + x,$$

para cada $x \in \mathbb{R}$. Denotamos por \mathbb{P}_x a la ley de la caminata aleatoria que empieza en x , por simplicidad $\mathbb{P}_0 = \mathbb{P}$. La esperanza de S bajo la medida \mathbb{P}_x la expresamos como \mathbb{E}_x .

Para una caminata aleatoria S introducimos a los tiempos ascendentes en escalera o *ascending ladder times*, los cuales se definen de manera recursiva como

$$\gamma_0 = 0, \quad \gamma_k = \inf \{n > \gamma_{k-1} : S_n > S_{\gamma_{k-1}}\}, \quad \text{para } k = 1, 2, \dots \quad (1.1)$$

De manera similar, introducimos a los tiempos descendentes en escalera o *descending ladder time*, los cuales denotaremos por $\hat{\gamma}_k$. A cada *ladder time* le corresponde una altura en escalera, estas alturas las definimos como

$$H_k = S_{\gamma_k} \quad \text{y} \quad \hat{H}_k = -S_{\hat{\gamma}_k},$$

donde interpretamos a $S_\infty = \infty$.

Es claro que tanto H_k como \hat{H}_k son variables aleatorias no negativas y en virtud de la propiedad fuerte de Markov $H_k - H_{k-1} \stackrel{\mathcal{L}}{=} S_{\gamma_1}$. Con esto en mente podemos definir las medidas de renovación asociadas a $\{H_k\}$ y $\{\hat{H}_k\}$ las cuales denotaremos por U y \hat{U} respectivamente, es decir

$$U(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \mathbb{P}(H_k \leq x) \quad \text{y} \quad \hat{U}(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \mathbb{P}(\hat{H}_k \leq x), \quad \text{para } x \geq 0.$$

1.1.1. La h -transformada de Doob

La h -transformada es una técnica que nos permite realizar un cambio de medida sobre un proceso de Markov homogéneo y obtener otro proceso de Markov homogéneo que se encuentre en función del primero. Para poder definir esta transformada debemos introducir a las funciones armónicas y al vínculo que estas tienen con las martingalas.

Consideremos un proceso de Markov homogéneo X , con kernel de transición $P_t(x, dy)$, donde $t \in \mathbb{N}$ o $t \in \mathbb{R}$. El proceso estocástico X está definido sobre un espacio de probabilidad filtrado $(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_t), \mathbf{P}_x)$, con espacio de estados (E, \mathcal{E}) , y para cualquier función medible y acotada $f : E \mapsto \mathbb{R}$, se satisface la propiedad de Markov

$$\mathbf{E}_x [f(X_{t+s}) | \mathcal{F}_t] = P_s f(X_t) \quad \mathbf{P}_x - \text{c.s.}$$

Diremos que una función medible $h : E \mapsto \mathbb{R}$ es armónica si $P_t h(x) = h(x)$, es decir, para toda $x \in \mathbb{R}$

$$P_t h(x) = \int_E P_t(x, dy) h(y) = h(x). \quad (1.2)$$

Proposición 1.1. *Consideremos un proceso de Markov homogéneo X con semigrupo $\{P_t, t \geq 0\}$ y distribución inicial μ . Sea h una función armónica. Si $\mu h := \int_E \mu(dx) h(x) < \infty$ entonces $(h(X_s), s \geq 0)$ es martingala.*

Demostración. Para demostrar que $(h(X_s), s \geq 0)$ es martingala debemos probar tres puntos: la adaptabilidad del proceso, la propiedad martingala y la integrabilidad.

- (i) Observemos que al ser h una función medible se sigue que $h(X_t)$ es \mathcal{F}_t -medible.
- (ii) Gracias a la propiedad de Markov y a (1.2), obtenemos la propiedad martingala.

$$\mathbf{E}_\mu [h(X_{t+s}) | \mathcal{F}_t] = P_s h(X_t) = h(X_t).$$

(iii) Para finalizar notemos

$$\mathbf{E}_\mu [h(X_t)] = \mathbf{E}_\mu [h(X_0)] = \mu h < \infty,$$

donde la primera igualdad se da en virtud de la propiedad (ii) y la integrabilidad se sigue por hipótesis.

Por lo tanto $(h(X_s), s \geq 0)$ es martingala. □

Deseamos condicionar nuestro proceso sobre un evento $A \in \mathcal{F}$ con probabilidad positiva. Sea $\tilde{E} = \{x \in E : \mathbf{P}_x(X \in A) > 0\}$, el conjunto de estados que acceden a A y por $h(x) := \mathbf{P}_x(X \in A)$, es decir, la probabilidad de que empezando en x el proceso X se encuentre en A . Podemos definir una medida sobre \tilde{E} , la medida condicional al evento A la cual denotamos por \mathbf{P}_x^h : para $B \subset A$ se tiene

$$\mathbf{P}_x^h(X \in B) := \mathbf{P}_x(X \in B | X \in A).$$

Para ver que la función h es armónica, consideremos $x \in \tilde{E}$ y observemos

$$\mathbf{E}_x [h(X_{t+s}) | \mathcal{F}_t] = P_s h(X_t) = \int_{\tilde{E}} P_s(X_t, dy) h(y) = \int_{\tilde{E}} P_s(X_t, dy) \mathbf{P}(y, A) = \mathbf{P}_{X_t}(X \in A) = h(X_t).$$

Teorema 1.2. Bajo \mathbf{P}_x^h con $x \in \tilde{E}$, X_t es una proceso de Markov homogéneo con espacio de estados \tilde{E} y kernel de transición

$$P_t^h(x, dy) = P_t(x, dy) \frac{h(y)}{h(x)}.$$

Demostración. Las condiciones de medibilidad de P_t^h se siguen directamente de las condiciones de medibilidad de P_t , por ende solo basta verificar que se satisface la ecuación Chapman-Kolmogorov. En efecto, gracias al Teorema de Tonelli y al hecho de que $(P_t, t \geq 0)$ es un kernel de transición se sigue

$$\begin{aligned} P_{t+s}^h(x, A) &= \int_A P_{t+s}(x, dy) \frac{h(y)}{h(x)} \\ &= \int_A \frac{1}{h(x)} \int_E P_t(x, dz) P_s(z, dy) h(y) \\ &= \int_E \frac{1}{h(x)} P_t(x, dz) \int_A P_s(z, dy) h(y) \\ &= \int_E \frac{1}{h(x)} P_t(x, dz) h(z) \int_A \frac{1}{h(z)} P_s(z, dy) h(y) \\ &= \int_E P_t^h(x, dz) P_s^h(z, A). \end{aligned}$$

Debido a que h es una función armónica y positiva vemos

$$\int_E P_t^h(x, dy) = \int_E P_t(x, dy) \frac{h(y)}{h(x)} = 1.$$

El desarrollo anterior muestra que $(P_t^h, t \geq 0)$ es un kernel de transición. Observemos que gracias a que \mathbf{P}_x^h es absolutamente continua con respecto a \mathbf{P}_x tenemos

$$\begin{aligned} \mathbf{E}_x^h [\mathbf{E}_x [f(X_{t+s}) h(X_{t+s}) | \mathcal{F}_t] h^{-1}(X_t) \mathbf{1}_{\{B\}}] &= \mathbf{E}_x [h(X_t) h^{-1}(x) \mathbf{E}_x [f(X_{t+s}) h(X_{t+s}) | \mathcal{F}_t] h^{-1}(X_t) \mathbf{1}_{\{B\}}] \\ &= \mathbf{E}_x [f(X_{t+s}) h(X_{t+s}) h^{-1}(x) \mathbf{1}_{\{B\}}] \\ &= \mathbf{E}_x^h [f(X_{t+s}) \mathbf{1}_{\{B\}}]. \end{aligned}$$

Como el desarrollo anterior vale para toda $B \in \mathcal{F}_t$ se sigue que

$$\mathbf{E}_x^h [f(X_{t+s}) | \mathcal{F}_t] = \mathbf{E}_x [f(X_{t+s}) h(X_{t+s}) h^{-1}(X_t) | \mathcal{F}_t], \quad \mathbf{P}_x^h - \text{c.s.}$$

La igualdad anterior nos permite ver que la Propiedad de Markov se mantiene

$$\begin{aligned} \mathbf{E}_x^h [f(X_{t+s}) | \mathcal{F}_t] &= h^{-1}(X_t) \mathbf{E}_x [f(X_{t+s}) h(X_{t+s}) | \mathcal{F}_t] \\ &= h^{-1}(X_t) P_s(fh)(X_t) \\ &= \int_{\tilde{E}} \frac{h(y)}{h(X_t)} f(y) P_s(X_t, dy) \\ &= \int_{\tilde{E}} f(y) P_s^h(X_t, dy) \\ &= P_s^h f(X_t), \end{aligned}$$

lo que concluye la prueba. □

Con esto notamos que la h -transformada nos otorga una fórmula para encontrar la derivada de Radon-Nikodym, aunque no siempre será de manera explícita.

1.2. Construcción de Bertoin

Una vez definida la h -transformada, podemos encontrar la primera construcción de la caminata aleatoria condicionada a ser positiva descrita por Bertoin [2].

1.2.1. Notación

Consideremos $\omega : \mathbb{N} \mapsto \mathbb{R} \cup \{\delta\}$ donde δ es un punto cementerio, i.e. δ es un estado absorbente. Denotaremos por Ω al conjunto de sucesiones de la forma anterior, es decir $\omega \in \Omega$ si $\omega = (\omega(0), \omega(1), \dots)$. Sea $\zeta = \zeta(\omega) = \sup \{i : \omega(i) \neq \delta\}$ el tiempo de vida de ω . Definiremos por S la caminata aleatoria, i.e. $S_n(\omega) = \omega(n)$ con $S_0 = 0$. Para toda $i \leq \zeta$ introducimos las cadenas $\underline{S}_i = \inf \{S_j : j \leq i\}$ y $\bar{S}_i = \sup \{S_j, j \leq i\}$, además $\nu = \sup \{i \leq \zeta : S_i = \underline{S}_i\}$ representará el índice del último ínfimo. En el evento $\{\nu < \infty\}$, consideraremos la cadena post-ínfimo \underline{S} definida por

$$\underline{S}(i) = \begin{cases} S_{\nu+i} - S_\nu & \text{para } i \leq \zeta - \nu, \\ \delta & \text{para } i > \zeta - \nu, \end{cases}$$

y la cadena retornada antes del ínfimo \overleftarrow{S} ,

$$\overleftarrow{S}(i) = \begin{cases} S_{\nu-i} - S_\nu & \text{para } i \leq \nu, \\ \delta & \text{para } i > \nu. \end{cases}$$

Notemos que las dos cadenas anteriores son no negativas. Esto se debe a que ambas son desplazadas por el mínimo S_ν , y por ello $S_k - S_\nu \geq 0$ para todo $k < \zeta$.

Para considerar solo los índices donde S es positiva, introducimos a la variable A_i^+ la cual cuenta el número de veces que S se mantiene por encima de cero al tiempo i , en otras palabras

$$A_i^+ = \sum_{k=1}^i \mathbb{1}_{\{S_k > 0\}},$$

para ubicar los índices que nos interesan definimos $\alpha_i^+ := \inf \{k : A_k^+ = i\}$, es decir, el índice de la i -ésima visita a $(0, \infty)$. Una observación inmediata es que $\alpha_1 = \gamma_1$.

Denotaremos por $\Delta S_i := S_i - S_{i-1}$, el i -ésimo incremento de la cadena S . Entonces se puede definir a la cadena S^\uparrow como

$$S^\uparrow(i) = \sum_{k=1}^{\alpha_i^+} \mathbb{1}_{\{S_k > 0\}} \Delta S_k, \quad \text{para } i \leq A_\zeta^+,$$

y $S^\uparrow(i) = \delta$ para $i > A_\zeta^+$. De manera similar definimos a la cadena S^\downarrow ,

$$S^\downarrow(i) = \sum_{k=1}^{\alpha_i^-} \mathbb{1}_{\{S_k \leq 0\}} \Delta S_k, \quad \text{para } i \leq A_\zeta^-,$$

y $S^\downarrow(i) = \delta$ en otro caso, donde

$$A_i^- := \sum_{k=1}^i \mathbb{1}_{\{S_k \leq 0\}},$$

así mismo $\alpha_i^- := \inf \{k : A_k^- = i\}$. Es decir, partimos la cadena S en las partes donde es positiva y donde es no positiva, notemos que la construcción de estas dos cadenas implica S^\uparrow es positiva en $(1, \dots, A_\zeta^+)$ y S^\downarrow es no positiva en $(1, \dots, A_\zeta^-)$.

Consideremos una medida de probabilidad \mathbb{P} sobre Ω tal que S posee incrementos intercambiables, es decir $\mathbb{P}(\zeta = \infty) = 1$ y para cualquier $n \in \mathbb{N}$ y permutación σ sobre $\{1, \dots, n\}$, las n -eadas $(\Delta S_1, \dots, \Delta S_n)$ y $(\Delta S_{\sigma(1)}, \dots, \Delta S_{\sigma(n)})$ poseen la misma ley bajo \mathbb{P} . Esto resulta más general que la construcción clásica de una caminata aleatoria, pues si

$$S_n = \sum_{i \leq n} \xi_i,$$

donde $\{\xi_i\}_{i \in \mathbb{N}}$ son variables aleatorias i.i.d, entonces los incrementos de S son intercambiables.

Denotaremos por \mathbb{P}^n la ley bajo \mathbb{P} de la cadena con vida n , es decir $(S_0, S_1, \dots, S_n, \delta, \dots)$, o sea, la cadena matada al tiempo $n + 1$.

Teorema 1.3. *Para toda $n \geq 0$ las cadenas $(-\underline{S}, \underline{S})$ y $(S^\downarrow, S^\uparrow)$ poseen la misma ley bajo \mathbb{P}^n .*

Demostración. Fijemos $x_1 \leq x_2 \leq \dots \leq x_n$ donde n también es fijo. Sea Λ el conjunto de $\omega \in \Omega$ con tiempo de vida $\zeta = n$ y tales que al ordenar los incrementos de manera creciente se obtenga lo siguiente

$$(\Delta\omega_{(1)}, \dots, \Delta\omega_{(n)}) = (x_1, \dots, x_n),$$

donde $\Delta\omega_{(k)}$ es el k -ésimo incremento más pequeño. Gracias a la intercambiabilidad de los incrementos podemos definir

$$P_\Lambda(\cdot) = \mathbb{P}^n(\cdot | (S_0, \dots, S_n) \in \Lambda), \quad (1.3)$$

la cual es equiprobable en Λ . Informalmente hablando, cualquier cadena tal que $((S_0, S_1, \dots, S_n) \in \Lambda)$ tiene la misma probabilidad de ser seleccionada.

Sea M el conjunto de parejas de la forma $(\omega', \omega'') \in \Omega \times \Omega$ con tiempo de vida $\zeta(\omega') = n'$ y $\zeta(\omega'') = n''$, donde $n' + n'' = n$, tales que

$$\omega'(i) \leq 0, \quad \text{para } i \leq n' \quad \text{y} \quad \omega''(i) > 0, \quad \text{para } i \leq n'',$$

y además satisfacen $(\Delta\omega'_{(1)}, \dots, \Delta\omega'_{(n')}, \Delta\omega''_{(1)}, \dots, \Delta\omega''_{(n'')}) = (x_1, \dots, x_n)$.

Tomemos $\omega \in \Lambda$ ordenada de manera tal que $(\Delta\omega(1), \dots, \Delta\omega(n)) = (x_1, \dots, x_n)$, donde $\Delta\omega(k) = \omega(k) - \omega(k-1)$. Definamos el mapeo $\omega \mapsto (-\underline{\omega}, \underline{\omega})$, donde $\underline{\omega}$ y $\underline{\omega}$ denotan, respectivamente, a la cadena retornada antes del ínfimo y la cadena post-ínfimo asociada a ω . Por construcción las cadenas $\underline{\omega}$ y $\underline{\omega}$ son no negativas. En este caso n' corresponde al índice del ínfimo de ω . Definiendo $n'' = n - n'$ observamos que para toda $\omega \in \Lambda$ ordenada de manera tal que $(\Delta\omega(1), \dots, \Delta\omega(n)) = (x_1, \dots, x_n)$ le corresponde una cadena $(\omega', \omega'') \in M$. Análogamente, tomando a $(\omega', \omega'') \in M$ podemos considerar a $-\underline{\tilde{\omega}} = \omega'$ y a $\underline{\tilde{\omega}} = \omega''$, y por lo tanto la cadena $\tilde{\omega}$ cuyas cadenas pre-ínfimo y post-ínfimo son $\underline{\tilde{\omega}}$ y $\underline{\tilde{\omega}}$ respectivamente se encuentra en Λ . Esto muestra que el mapeo $\omega \mapsto (-\underline{\omega}, \underline{\omega})$ es una biyección entre los conjuntos Λ y M . La observación anterior implica que $P_\Lambda(-\underline{S}, \underline{S})$ es equiprobable en M .

Recordemos que $S_i = S^\uparrow(A_i^+) + S^\downarrow(A_i^-)$ para toda i , lo cual se debe a

$$\begin{aligned} S^\uparrow(A_i^+) + S^\downarrow(A_i^-) &= \sum_{k=1}^{\alpha_{A_i^+}} \mathbf{1}_{\{S_k > 0\}} \Delta S_k + \sum_{k=1}^{\alpha_{A_i^-}} \mathbf{1}_{\{S_k \leq 0\}} \Delta S_k \\ &= \sum_{k=1}^i \Delta S_k = S_i. \end{aligned}$$

Consideremos un par fijo $(\omega', \omega'') \in M$ y sea $\omega(i) = \omega'(A'_i) + \omega''(A''_i)$, donde A'_i y A''_i se definen de manera recursiva como

$$\begin{aligned} A'_n &= n', & A''_n &= n'' \\ A'_{i-1} &= A'_i - 1, & A''_{i-1} &= A''_i, & \text{en caso } \omega(i) > 0, \\ A'_{i-1} &= A'_i, & A''_{i-1} &= A''_i - 1, & \text{en caso } \omega(i) \leq 0. \end{aligned}$$

Esto es $A'_i = \sum_{k=0}^i \mathbb{1}_{\{\omega(k) > 0\}} = A_i^+$ y $A''_i = \sum_{k=0}^i \mathbb{1}_{\{\omega(k) \leq 0\}} = A_i^-$. El desarrollo anterior nos permite construir una trayectoria ω , comenzando por el punto n y procediendo de derecha a izquierda tal que $\omega \in \Lambda$, más aún, $(\omega^\downarrow, \omega^\uparrow) = (\omega', \omega'')$, lo que implica $\omega \mapsto (\omega^\downarrow, \omega^\uparrow)$ también es una biyección de Λ a M . Entonces $P_\Lambda(S^\downarrow, S^\uparrow)$ es equiprobable en M . Por lo tanto

$$\mathbb{P}^n((S^\downarrow, S^\uparrow) | (S_0, \dots, S_n) \in \Lambda) = \mathbb{P}^n((-\underline{S}, \underline{S}) | (S_0, \dots, S_n) \in \Lambda)$$

integrando con respecto a los reordenamientos crecientes, concluimos que bajo \mathbb{P}^n ,

$$(S^\downarrow, S^\uparrow) \stackrel{\mathcal{L}}{=} (-\underline{S}, \underline{S}),$$

finalizando así la prueba. \square

Corolario 1.4. Denotemos por \mathcal{F}_n la σ -álgebra generada por (S_0, S_1, \dots, S_n) . Para todo Φ , funcional acotado, $\mathcal{F}_n \otimes \mathcal{F}_n$ medible,

$$\lim_{m \uparrow \infty} \mathbb{E}^m \left[\Phi(-\underline{S}, \underline{S}) \right] = \mathbb{E} \left[\Phi(S^\downarrow, S^\uparrow) \right].$$

Demostración. Sea $(\mathbb{R}^{\mathbb{N}}, \mathcal{F} = \mathcal{B}(\mathbb{R}^{\mathbb{N}}), \mathbb{P})$ nuestro espacio de probabilidad, donde la cadena S bajo \mathbb{P} posee incrementos intercambiables. Consideremos $A \in \mathcal{F}$, denotemos por $A^m = (A_1, \dots, A_m, \delta, \dots)$ y notemos que $\mathbb{P}^m(A) = \mathbb{P}(A^m)$. Observemos además que $A^m \rightarrow A$.

$$\mathbb{P}(\liminf_m A^m) \leq \liminf_m \mathbb{P}(A^m) \leq \limsup_m \mathbb{P}(A^m) \leq \mathbb{P}(\limsup_m A^m)$$

lo que implica que \mathbb{P}^m converge débilmente a \mathbb{P} . Como siguiente paso consideremos un f un funcional $\mathcal{F}_n \otimes \mathcal{F}_n$ medible, continuo y acotado, entonces

$$\int f(-\underline{S}, \underline{S}) d\mathbb{P} = \lim_{m \uparrow \infty} \int f(-\underline{S}, \underline{S}) d\mathbb{P}^m = \lim_{m \uparrow \infty} \int f(S^\downarrow, S^\uparrow) d\mathbb{P}^m = \int f(S^\downarrow, S^\uparrow) d\mathbb{P}.$$

Por último, recordando que toda función medible se puede aproximar por funciones continuas, establecido formalmente como el Teorema de Luisn (véase capítulo 7, sección 2 de Folland [12]), se sigue el resultado. \square

1.2.2. Transformadas armónicas para caminatas aleatorias

Nuestro objetivo es encontrar la ley de la caminata aleatoria condicionada a mantenerse positiva. Gracias a que ya estudiamos la h -transformada, deseamos hallar, ahora, una expresión más conveniente para esta transformación. De hecho la expresión que obtendremos es la usada en la literatura y en particular en Biggins [4].

Consideremos una caminata aleatoria que toma valores en \mathbb{R} , la cual denotaremos por (S, \mathbb{P}) y tal que $\mathbb{P}(S_1 > 0)$ y $\mathbb{P}(S_1 < 0)$ son estrictamente positivas, para una $c > 0$ definimos

$$\mathbb{P}^{(c)} = \sum_{n=0}^{\infty} e^{-cn} (1 - e^{-c}) \mathbb{P}^n,$$

la cual consideraremos como la ley de la caminata aleatoria matada con tasa $1 - e^{-c}$. En otras palabras, la probabilidad de que la caminata tenga vida n es

$$\mathbb{P}(\zeta = n) = e^{-cn}(1 - e^{-c}),$$

donde ζ es una variable aleatoria geométrica independiente de la cadena S .

Notemos que gracias a la propiedad de pérdida de memoria de la variable aleatoria ζ , $(S, \mathbb{P}^{(c)})$ satisface la propiedad fuerte de Markov.

Aplicando la propiedad fuerte de Markov en los *descending ladder times*, es decir, los índices en los cuales el proceso del mínimo y la caminata aleatoria coinciden, vemos que bajo $\mathbb{P}^{(c)}$, \underline{S} y \underline{S} son independientes. Esto debido a

$$\underline{S}(n) = S_{\hat{\gamma}+n} - S_{\hat{\gamma}}$$

es independiente de $\mathcal{F}_{\hat{\gamma}} = \sigma(S_0, S_1, \dots, S_{\hat{\gamma}})$ bajo $\mathbb{P}^{(c)}$. Por definición tenemos

$$\underline{S}(n) = (S_{\hat{\gamma}-n} - S_{\hat{\gamma}}) \mathbf{1}_{\{n \leq \hat{\gamma}\}} + \delta \mathbf{1}_{\{n > \hat{\gamma}\}}$$

donde observamos que $\underline{S} \in \mathcal{F}_{\hat{\gamma}}$, lo que implica la independencia establecida anteriormente.

Además podemos ver la relación entre la ley de la caminata aleatoria condicionada a ser positiva y la cadena post-ínfimo. Sea $A \in \mathcal{B}(\mathbb{R}_+^n)$, recordando que $S_0 = 0$ en la penúltima igualdad, se sigue

$$\begin{aligned} \mathbb{P}^{(c)}(S \in A | S_i > 0, i = 1, \dots, \zeta) &= \sum_{n \geq 0} e^{-cn}(1 - e^{-c}) \mathbb{P}^n(S \in A | S_i > 0, i \leq n) \\ &= \sum_{n \geq 0} e^{-cn}(1 - e^{-c}) \mathbb{P}^n((S_1, \dots, S_n) \in A | S_i > 0, i \leq n) \\ &= \sum_{n \geq 0} e^{-cn}(1 - e^{-c}) \mathbb{P}^n((S_1 - S_0, \dots, S_n - S_0) \in A | S_i - S_0 > 0, i \leq n) \\ &= \sum_{n \geq 0} e^{-cn}(1 - e^{-c}) \mathbb{P}^n\left(\left(\underline{S}(1), \dots, \underline{S}(n)\right) \in A | \underline{S}(i) > 0, i = 1 \leq n\right). \end{aligned}$$

Observemos que \underline{S} es positiva por construcción, lo que implica $\mathbb{P}^n(\underline{S}_i > 0, i = 1, \dots, n) = 1$ para toda $n \in \mathbb{N}$, por lo tanto la cadena anterior de igualdades nos permite concluir que

$$\mathbb{P}^{(c)}(S \in A | S_i > 0, i = 1, \dots, \zeta) = \mathbb{P}^{(c)}(\underline{S} \in A).$$

Es decir, bajo $\mathbb{P}^{(c)}$ la ley de \underline{S} es igual a la ley de S condicionada en $\{S_i > 0, i = 1, \dots, \zeta\}$. Recordando el Teorema 1.3, vemos que \underline{S} es igual en ley a S^\uparrow bajo $\mathbb{P}^{(c)}$.

Sea $p(x, dy) = \mathbb{P}(S_1 + x \in dy)$ el kernel de transición de S , deseamos obtener el kernel de transición de $(S^\uparrow, \mathbb{P}^{(c)})$ el cual denotaremos por $p_c^\uparrow(x, dy)$. Para ello observemos

$$\begin{aligned} \mathbb{P}_x^{(c)}(S_1 \in dy | S_i > 0, i = 1, \dots, \zeta) &= \mathbb{P}^{(c)}(S_1 + x \in dy | S_i + x > 0, i = 1, \dots, \zeta) \\ &= \frac{\mathbb{P}^{(c)}(S_1 + x \in dy, S_i > -x, i = 1, \dots, \zeta)}{\mathbb{P}^{(c)}(S_i > -x, i = 1, \dots, \zeta)} \\ &= \frac{\mathbb{P}^{(c)}(S_1 + x \in dy, S_i > -x, i = 2, \dots, \zeta)}{\mathbb{P}^{(c)}(S_i > -x, i = 1, \dots, \zeta)}. \end{aligned} \quad (1.4)$$

Nos concentramos ahora en

$$\begin{aligned} \mathbb{P}^{(c)}(S_1 + x \in dy, S_i > -x, i = 2, \dots, \zeta) &= \mathbb{P}^{(c)}(S_1 + x \in dy, S_i > S_1 - y, i = 2, \dots, \zeta) \\ &= \mathbb{P}^{(c)}(S_1 + x \in dy) \mathbb{P}^{(c)}(S_i - S_1 > -y, i = 2, \dots, \zeta) \\ &= \mathbb{P}^{(c)}(S_1 + x \in dy) \mathbb{P}^{(c)}(S_i > -y, i = 1, \dots, \zeta - 1). \end{aligned}$$

Sustituyendo esta expresión en (1.4), obtenemos

$$\mathbb{P}^{(c)}(S_1 + x \in dy) \frac{\mathbb{P}^{(c)}(S_i > -y, i = 1, \dots, \zeta - 1)}{\mathbb{P}^{(c)}(S_i > -x, i = 1, \dots, \zeta)}. \quad (1.5)$$

Observemos ahora que

$$\mathbb{P}(\zeta - 1 = n) = \mathbb{P}(\zeta = n + 1) = e^{-c(n+1)}(1 - e^{-c}),$$

lo que implica

$$\begin{aligned} \mathbb{P}^{(c)}(S_i > -y, i = 1, \dots, \zeta - 1) &= \sum_{n=0}^{\infty} \mathbb{P}^n(S_i > -y, i = 1, \dots, n) \mathbb{P}(\zeta - 1 = n) \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} e^{-c(n+1)}(1 - e^{-c}) \mathbb{P}^n(S_i > -y, i = 1, \dots, n) \\ &= e^{-c} \sum_{n=0}^{\infty} e^{-cn}(1 - e^{-c}) \mathbb{P}^n(S_i > -y, i = 1, \dots, n) \\ &= e^{-c} \mathbb{P}^{(c)}(S_i > -y, i = 1, \dots, \zeta). \end{aligned}$$

Por último notemos

$$\mathbb{P}^{(c)}(S_1 + x \in dy) = \mathbb{P}(S_1 + x \in dy),$$

y uniendo los elementos obtenidos en (1.5), concluimos que

$$\mathbb{P}_x^{(c)}(S_1 \in dy | S_i > 0, i = 1, \dots, \zeta) = p_c^\uparrow(x, dy) = p(x, dy) \frac{h_c^\uparrow(y)}{h_c^\uparrow(x)} e^{-c},$$

donde definimos

$$h_c^\uparrow(x) := \frac{\mathbb{P}^{(c)}(S_i > -x, i = 1, \dots, \zeta)}{\mathbb{P}^{(c)}(S_i > 0, i = 1, \dots, \zeta)}.$$

Debido a que la forma anterior no es tan cómoda para trabajar la re-expresaremos mediante el siguiente teorema:

Teorema 1.5. *La h -transformada correspondiente a la caminata aleatoria condicionada a mantenerse positiva bajo $\mathbb{P}^{(c)}$ tiene la siguiente expresión*

$$h_c^\uparrow(x) = 1 + \mathbb{E} \left[\sum_{n=1}^{\gamma_1 - 1} e^{-cn} \mathbb{1}_{\{S_n > -x\}} \right]. \quad (1.6)$$

Demostración. Recordando que $\bar{S}_n = \sup \{S_i, i \leq n\}$ y $\underline{S}_n = \inf \{S_i, i \leq n\}$, observemos

$$\begin{aligned} \mathbb{P}^{(c)}(S_i > -x \text{ para } i = 1, \dots, \zeta) &= \sum_{n=0}^{\infty} e^{-cn}(1 - e^{-c}) \mathbb{P}^n(S_i > -x \text{ para } i = 1, \dots, \zeta) \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} e^{-cn}(1 - e^{-c}) \mathbb{P}(S_i > -x \text{ para } i = 1, \dots, n) \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} e^{-cn}(1 - e^{-c}) \mathbb{P}(\underline{S}_n > -x) \end{aligned}$$

la segunda igualdad se debe al hecho de que la ley bajo \mathbb{P}^n tiene vida n . Recordemos la siguiente relación

$$\underline{S}_n = S_n - \bar{S}_{n-1}.$$

Por lo tanto

$$\mathbb{P}^{(c)}(S_i > -x \text{ para } i = 1, \dots, \zeta) = (1 - e^{-c}) \left(1 + \sum_{n=1}^{\infty} e^{-cn} \mathbb{P}(S_n - \bar{S}_{n-1} > x) \right). \quad (1.7)$$

Denotemos por $\gamma = \{0, \gamma_1, \dots\}$ los *ascending ladder times*, en otras palabras, el conjunto de índices donde S alcanza un nuevo supremo. Usando γ como partición de \mathbb{N} , obtenemos

$$\sum_{n=1}^{\infty} e^{-cn} \mathbb{P}(\bar{S}_{n-1} - S_n < x) = \mathbb{E} \left[\sum_{i=0}^{\infty} \exp\{-c\gamma_i\} \sum_{n=\gamma_i+1}^{\gamma_{i+1}} \exp\{-c(n - \gamma_i)\} \mathbf{1}_{\{\bar{S}_{n-1} - S_n < x\}} \right].$$

Notemos ahora que $\bar{S}_{n-1} = \bar{S}_{\gamma_i}$ para toda $\gamma_i < n \leq \gamma_{i+1}$, esto y el Teorema de convergencia monótona implican

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{\infty} e^{-cn} \mathbb{P}(\bar{S}_{n-1} - S_n < x) &= \sum_{i=0}^{\infty} \mathbb{E} \left[\exp\{-c\gamma_i\} \sum_{n=\gamma_i+1}^{\gamma_{i+1}} \exp\{-c(n - \gamma_i)\} \mathbf{1}_{\{S_n - \bar{S}_{\gamma_i} > x\}} \right] \\ &= \sum_{i=0}^{\infty} \mathbb{E} \left[\exp\{-c\gamma_i\} \mathbb{E} \left[\sum_{n=\gamma_i+1}^{\gamma_{i+1}} \exp\{-c(n - \gamma_i)\} \mathbf{1}_{\{S_n - \bar{S}_{\gamma_i} > x\}} \middle| \gamma_i \right] \right]. \end{aligned}$$

La propiedad fuerte de Markov implica $S_n - \bar{S}_{\gamma_i} \perp S_{\gamma_i}$ e igual en ley a $S_{n-\gamma_i}$, haciendo el cambio de variable $m = n - \gamma_i$ y con la observación que $\gamma_{i+1} - \gamma_i \stackrel{L}{=} \gamma_1$ vemos que la expresión anterior se puede escribir como

$$\begin{aligned} &\sum_{i=0}^{\infty} \mathbb{E} \left[\exp\{-c\gamma_i\} \mathbb{E} \left[\sum_{n=\gamma_i+1}^{\gamma_{i+1}} \exp\{-c(n - \gamma_i)\} \mathbf{1}_{\{S_n - \bar{S}_{\gamma_i} > x\}} \middle| \gamma_i \right] \right] \\ &= \mathbb{E} \left[\sum_{m=1}^{\gamma_1} \exp\{-cm\} \mathbf{1}_{\{S_m > -x\}} \right] \sum_{i=0}^{\infty} \mathbb{E}[\exp\{-c\gamma_i\}] \\ &= \mathbb{E} \left[\sum_{m=1}^{\gamma_1} \exp\{-cm\} \mathbf{1}_{\{S_m > -x\}} \right] \sum_{i=0}^{\infty} \mathbb{E} \left[\prod_{k=0}^i \exp\{-c(\gamma_k - \gamma_{k-1})\} \right] \\ &= \mathbb{E} \left[\sum_{m=1}^{\gamma_1} \exp\{-cm\} \mathbf{1}_{\{S_m > -x\}} \right] \sum_{i=0}^{\infty} \mathbb{E}[\exp\{-c\gamma_1\}]^i \\ &= \mathbb{E} \left[\sum_{m=1}^{\gamma_1} \exp\{-cm\} \mathbf{1}_{\{S_m > -x\}} \right] (1 - \mathbb{E}[\exp\{-c\gamma_1\}])^{-1}, \end{aligned}$$

donde γ_1 es el primer índice tal que $S \in (0, \infty)$. Sustituyendo en 1.7 obtenemos

$$\mathbb{P}^{(c)}(S_i > -x \text{ para } i = 1, \dots, \zeta) = (1 - e^{-c}) \left(1 + \mathbb{E} \left[\sum_{n=1}^{\gamma_1} e^{-cn} \mathbf{1}_{\{S_n > -x\}} \right] (1 - \mathbb{E}[e^{-c\gamma_1}])^{-1} \right).$$

Nos fijamos en el segundo miembro del lado derecho de la igualdad anterior y partiendo la suma obtenemos

$$\begin{aligned} &(1 - \mathbb{E}[e^{-c\gamma_1}])^{-1} \left(1 - \mathbb{E}[e^{-c\gamma_1}] + \mathbb{E} \left[\sum_{n=1}^{\gamma_1-1} e^{-cn} \mathbf{1}_{\{S_n > -x\}} \right] + \mathbb{E} \left[e^{-c\gamma_1} \mathbf{1}_{\{S_{\gamma_1} > -x\}} \right] \right) \\ &= (1 - \mathbb{E}[e^{-c\gamma_1}])^{-1} \left(1 + \mathbb{E} \left[e^{-c\gamma_1} \mathbf{1}_{\{S_{\gamma_1} < -x\}} \right] + \mathbb{E} \left[\sum_{n=1}^{\gamma_1-1} e^{-cn} \mathbf{1}_{\{S_n > -x\}} \right] \right) \\ &= (1 - \mathbb{E}[e^{-c\gamma_1}])^{-1} \left(1 + \mathbb{E} \left[\sum_{n=1}^{\gamma_1-1} e^{-cn} \mathbf{1}_{\{S_n > -x\}} \right] \right) \end{aligned}$$

con la observación que $\mathbb{1}_{\{S_{\gamma_1} < -x\}} = 0$ para toda $x \geq 0$. Recordando la definición de $h_c(x)^\dagger$ concluimos el teorema. \square

Corolario 1.6. *La h -transformada correspondiente a la caminata aleatoria condicionada a mantenerse positiva bajo \mathbb{P} es*

$$h(x) = \mathbb{E} \left[\sum_{n=0}^{\gamma_1-1} \mathbb{1}_{\{S_n > -x\}} \right].$$

Demostración. Observamos que $h_c^\dagger(x)$ es creciente como función de x , además $h_c^\dagger(0) = 1$; esto se debe a que las funciones indicadoras en (1.6) valen cero.

Por último, gracias al Teorema de convergencia monótona y la densidad de \mathbb{Q} , observamos

$$\begin{aligned} \lim_{c \downarrow 0} h_c^\dagger(x) &= 1 + \lim_{c \downarrow 0} \mathbb{E} \left[\sum_{n=1}^{\gamma_1-1} e^{-cn} \mathbb{1}_{\{S_n > -x\}} \right] \\ &= 1 + \lim_{\substack{c \downarrow 0 \\ c \in \mathbb{Q}}} \mathbb{E} \left[\sum_{n=1}^{\gamma_1-1} e^{-cn} \mathbb{1}_{\{S_n > -x\}} \right] \\ &= 1 + \mathbb{E} \left[\sum_{n=1}^{\gamma_1-1} \mathbb{1}_{\{S_n > -x\}} \right] \\ &= \mathbb{E} \left[\sum_{n=0}^{\gamma_1-1} \mathbb{1}_{\{S_n > -x\}} \right], \end{aligned}$$

esto concluye la demostración. \square

Observemos que $h(x)$ representa el número promedio de visitas al intervalo $(-x, 0]$ antes de rebasar el nivel cero. Dicha cantidad es la medida de renovación asociada a \widehat{H}_k , la cual se suele denotar por $V(x)$ y es la notación empleada en el capítulo 3. El Teorema 1.2 nos dice que la ley de la caminata aleatoria condicionada a ser positiva S^\dagger satisface la siguiente relación

$$\mathbb{P}(S_{n+1}^\dagger \in dy | S_n^\dagger = x) = \mathbb{P}(S_{n+1} \in dy | S_n = x) \frac{V(y)}{V(x)} = \mathbb{P}(S_1 \in dy - x) \frac{V(y)}{V(x)}.$$

1.3. Construcción de Tanaka

Esta sección se enfoca en obtener una construcción alternativa de la caminata aleatoria condicionada a ser positiva, la cual fue propuesta por Tanaka. Sin embargo seguiremos la demostración utilizada en Doney [10] con ideas de Doney [9].

Consideremos una caminata aleatoria oscilante S , i.e. $\limsup_{n \rightarrow \infty} S_n = \infty$ y $\liminf_{n \rightarrow \infty} S_n = -\infty$, con $S_n = \sum_{i=1}^n \xi_i$, tal que $S_0 = 0$. Definimos a R como la caminata reflejada debajo del máximo, esto es

$$R_0 = 0, \quad R_n = H_k + \sum_{i=\gamma_{k+1}+\gamma_{k+1}-n}^{\gamma_{k+1}} \xi_i, \quad \text{para } \gamma_k < n \leq \gamma_{k+1}, \quad k \geq 0.$$

Observemos que podemos expresar a R_n como

$$R_n = H_k + S_{\gamma_{k+1}} - S_{\gamma_{k+1}+\gamma_k-n}, \quad \gamma_k < n \leq \gamma_{k+1},$$

cuando $n = \gamma_{k+1}$ la expresión anterior se convierte en

$$R_n = S_{\gamma_{k+1}} = H_{k+1}.$$

Ahora, para $\gamma_k < n \leq \gamma_{k+1}$ observamos que

$$S_{\gamma_{k+1}} - S_{\gamma_{k+1} + \gamma_k - n} > 0.$$

Por ello R es una cadena que toma valores no negativos. Podemos observar en la Figura 1.1 una trayectoria reflejada.

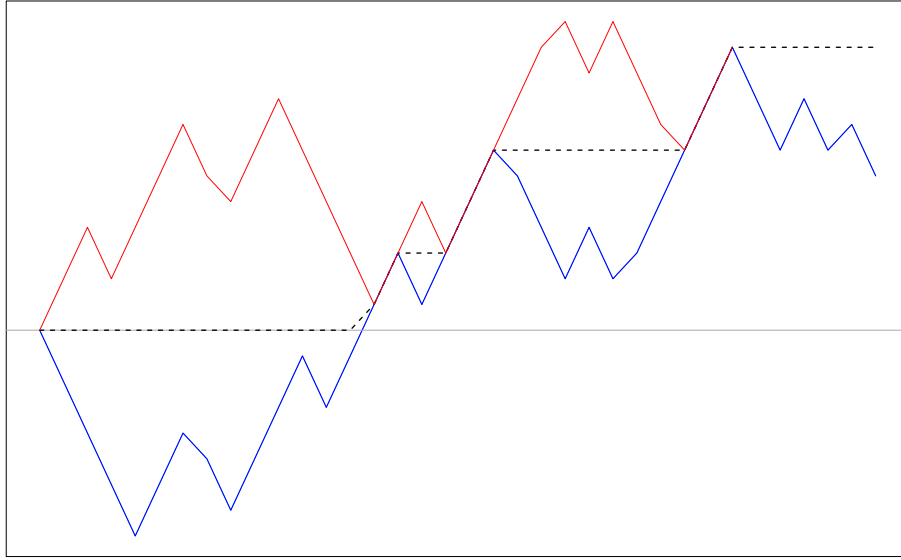


Figura 1.1: En azul vemos una caminata aleatoria que empieza en cero. En rojo vemos la caminata aleatoria reflejada debajo de los máximos. La trayectoria escalonada corresponde al proceso del máximo.

La caminata aleatoria reflejada debajo del máximo, R , puede visualizarse como la concatenación de segmentos retornados y reflejados de la siguiente manera. Sea

$$\omega_1 = (0, S_{\gamma_1} - S_{\gamma_1-1}, S_{\gamma_1} - S_{\gamma_1-2}, \dots, S_{\gamma_1} - S_1, S_{\gamma_1}).$$

Ahora tomamos $\{\omega_i, i\}$ copias independientes de ω_1 , y, para identificar a cada componente de ω_i escribimos

$$\omega_i = (\omega_i(k), k = 0, 1, \dots, \tau_i),$$

donde $\tau_i \stackrel{\mathcal{L}}{=} \gamma_1$ para toda i . Entonces

$$R_n = H_k + \omega_{k+1}(n - \gamma_k) \quad \text{para } \gamma_k < n \leq \gamma_{k+1}.$$

Hacemos hincapié en que γ_k es el momento del k -ésimo máximo, y, por ello no posee la misma ley que γ_1 . Sin embargo, por la propiedad fuerte de Markov, $\gamma_k - \gamma_{k-1} \stackrel{\mathcal{L}}{=} \gamma_1$.

Nuestro objetivo es mostrar que $R \stackrel{\mathcal{L}}{=} S^\dagger$, para ello introducimos una variable aleatoria geométrica G de parámetro ρ independiente de S y definimos

$$J_\rho = \max \left\{ n \leq G : S_n = \min_{r \leq n} S_r \right\}$$

al instante cuando la cadena matada al tiempo G alcanza el mínimo. Recordemos que la cadena retornada antes de G tiene la siguiente expresión

$$S^*(n) = (S_G - S_{G-n}, 0 \leq n \leq G).$$

Gracias a la independencia entre G y S obtenemos la siguiente relación para $A \in \mathcal{F}_n$

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(S^*(n) \in A_n, n \leq G) &= \sum_m \mathbb{P}(S^*(n) \in A_n, n \leq m | G = m) \mathbb{P}(G = m) \\ &= \sum_m \mathbb{P}(S^*(n) \in A_n, n \leq m) \mathbb{P}(G = m) \\ &= \sum_m \mathbb{P}(S_m - S_{m-n} \in A_n, n \leq m) \mathbb{P}(G = m) \\ &= \sum_m \mathbb{P}(S_n \in A_n, n \leq m) \mathbb{P}(G = m) \\ &= \mathbb{P}(S_n \in A_n, n \leq G). \end{aligned}$$

En otras palabras, cuando G es independiente de S las cadenas $(S^*(n), n \leq G)$ y $(S_n, n \leq G)$ poseen la misma ley.

Por definición $\{S^*(n), n \leq G\}$ tiene solo G puntos. Debido a que para $\rho > 0$ la variable aleatoria G es finita c.s, vemos que $\{S^*(n), n \leq G\}$ posee c.s una cantidad finita de puntos. Entonces el proceso de máximo asociado a $\{S^*(n), n \leq G\}$, posee una cantidad finita de puntos. Denotando por $\{\gamma_i^*, i \geq 1\}$ los *ascending ladder times* de $\{S^*(n), n \leq G\}$ y gracias al análisis anterior, vemos que existe un $\gamma_{K_\rho}^* = \sup \{n \leq G : S^*(n) = \sup_{r \leq G} S^*(r)\}$, el cual es finito c.s. y es el último *ladder time* asociado a $\{S^*(n), n \leq G\}$. Notemos que los *ascending ladder times* se encuentran en $(0, G - J_\rho)$. En efecto, al ser J_ρ el instante cuando $S_n = \min_{r \leq G} S_r$ obtenemos

$$\sup \{S^*(n), n \leq G\} = \sup \{S_G - S_{G-n}, n \leq G\} = S_G - S_{J_\rho},$$

es decir, al instante $G - J_\rho$ la cadena $\{S^*(n), n \leq G\}$ alcanza su máximo. Esta observación y el análisis anterior nos permiten ver que $\gamma_{K_\rho}^* = G - J_\rho$.

Recapitulando, la cadena $\{S^*(n), n \leq G\}$ posee K_ρ máximos y $\gamma_{K_\rho}^* = G - J_\rho$. Por lo tanto

$$\sup_{r \leq G} S^*(n) = S^*(\gamma_{K_\rho}^*) = S_G - S_{J_\rho}.$$

Recordemos que las excursiones por debajo de los máximos sucesivos de $\{S^*(n), n \leq G\}$, se definen de la siguiente manera

$$(S^*(\gamma_k^* + n) - S^*(\gamma_k^*), 0 \leq n \leq \gamma_{k+1}^* - \gamma_k^*), \quad \text{para } k < K_\rho$$

Definimos por $\{\omega_k, k \leq K_\rho\}$ a las excursiones completas retornadas por debajo de los máximos sucesivos de $\{S^*(n), n \leq G\}$, es decir

$$\omega_{k+1} = (S^*(\gamma_{k+1}^*) - S^*(\gamma_{k+1}^* - n), 0 \leq n \leq \gamma_{k+1}^* - \gamma_k^*), \quad \text{para } k < K_\rho.$$

y, debido a que la cadena S la matamos al tiempo G , introducimos a $\omega_{K_\rho+1}$, definida de la siguiente manera

$$\omega_{K_\rho+1} = \left(S^*(G) - S^*(G-n), 0 \leq n \leq G - \gamma_{K_\rho}^* \right),$$

con la cual obtenemos una partición de $\{0, 1, 2, \dots, G\}$. Observemos que para $k < K_\rho$

$$\begin{aligned} \omega_{k+1} &= (S^*(\gamma_{k+1}^*) - S^*(\gamma_{k+1}^* - n), 0 \leq n \leq \gamma_{k+1}^* - \gamma_k^*) \\ &= (S^*(\gamma_{k+1}^*) - S^*(\gamma_k^*) - (S^*(\gamma_{k+1}^* - n) - S^*(\gamma_k^*)), 0 \leq n \leq \gamma_{k+1}^* - \gamma_k^*) \\ &\stackrel{\mathcal{L}}{=} (S^*(\gamma_{k+1}^* - \gamma_k^*) - S^*(\gamma_{k+1}^* - \gamma_k^* - n), 0 \leq n \leq \gamma_{k+1}^* - \gamma_k^*) \\ &\stackrel{\mathcal{L}}{=} (S^*(\gamma_1^*) - S^*(\gamma_1^* - n), 0 \leq n \leq \gamma_1^*) = \omega_1. \end{aligned}$$

En otras palabras, las excursiones completas retornadas por debajo de los máximos sucesivos $(\omega_k, k \leq K_\rho)$ son idénticamente distribuidas. Denotando por $\mathcal{F}_{\gamma_k^*} = \sigma(S^*(n), n \leq \gamma_k^*)$ podemos ver, gracias a la propiedad fuerte de Markov, que $\omega_{k+1} \perp \mathcal{F}_{\gamma_k^*}$, para $k < K_\rho$. Con ello vemos que las excursiones $(\omega_k, k \leq K_\rho)$ son i.i.d. Por lo tanto son intercambiables. Entonces, al concatenar las excursiones observamos

$$[\omega_{K_\rho}, \omega_{K_\rho-1}, \dots, \omega_1] \stackrel{\mathcal{L}}{=} [\omega_1, \dots, \omega_{K_\rho-1}, \omega_{K_\rho}],$$

En virtud de los objetos anteriores, estamos en condiciones de recuperar las ideas que trabajamos en las secciones anteriores. La primera idea que recuperamos es la cadena post-ínfimo \underline{S}_ρ , es decir

$$\underline{S}_\rho = (S_{J_\rho+n} - S_{J_\rho}, 0 \leq n \leq G - J_\rho),$$

de esta cadena y la intercambiabilidad de las excursiones obtenemos

$$\begin{aligned} (S_{J_\rho+n} - S_{J_\rho}, n \leq G - J_\rho) &= [\omega_{K_\rho}, \omega_{K_\rho-1}, \dots, \omega_1] \\ &\stackrel{\mathcal{L}}{=} [\omega_1, \dots, \omega_{K_\rho}]. \end{aligned} \tag{1.8}$$

La primera igualdad se da por la construcción de la cadena S^* , en efecto, notemos que

$$\begin{aligned} (S_{J_\rho+n} - S_{J_\rho}, n \leq G - J_\rho) &= (S_{G-\gamma_{K_\rho}^*+n} - S_{G-\gamma_{K_\rho}^*}, \leq G - J_\rho) \\ &= (S_G - S_{G-\gamma_{K_\rho}^*} - (S_G - S_{G-\gamma_{K_\rho}^*+n}), \leq G - J_\rho) \\ &= (S^*(\gamma_{K_\rho}^*) - S^*(\gamma_{K_\rho}^* - n), \leq G - J_\rho) \\ &= [\omega_{K_\rho}, \dots, \omega_1]. \end{aligned}$$

Por otro lado, debido a que $(S^*(n), n \leq G) \stackrel{\mathcal{L}}{=} (S_n, n \leq G)$ se sigue que $(R_n, n \leq G) \stackrel{\mathcal{L}}{=} [\omega_1, \dots, \omega_{K_\rho}, \omega_{K_\rho+1}]$.

Gracias a la sección anterior, sabemos que la ley de la caminata aleatoria condicionada a ser positiva es

$$S^\dagger = \lim_{\rho \downarrow 0} \underline{S}_\rho \stackrel{\mathcal{L}}{=} \lim_{\rho \downarrow 0} (S_n, 0 \leq n \leq G | S_n \geq 0, n = 1, \dots, G) = (S_n, n \geq 0 | S_n \geq 0, n \geq 1).$$

Por tanto tenemos ya el límite del lado izquierdo en (1.8). Para ver el comportamiento de las excursiones por debajo del máximo basta notar que $\{\omega_1, \dots, \omega_{K_\rho}\} \stackrel{\mathcal{L}}{=} (R_n, n \leq \gamma_{K_\rho}^*)$. Al tomar el límite cuando $\rho \downarrow 0$ vemos que $K_\rho \rightarrow \infty$, lo que implica que el límite del lado derecho de (1.8) es $\{\omega_1, \dots, \} \stackrel{\mathcal{L}}{=} R$. Donde R es la caminata aleatoria condicionada a ser positiva construida por Tanaka.

2 Movimiento browniano condicionado a ser positivo

Similar al caso discreto, el movimiento browniano también puede condicionarse a ser positivo, con técnicas análogas a las empleadas en el capítulo I. El objetivo de este capítulo es definir al movimiento browniano condicionado a ser positivo y determinar la ley de tal proceso, la cual es equivalente a la de proceso de Bessel de dimensión 3. Mencionamos que Caravenna y Chaumont [5] se centra en principios de invarianza entre las caminatas aleatorias condicionadas a ser positivas y los respectivos procesos de Lévy; aún cuando no profundizamos en ello con este trabajo, resaltamos la continua investigación que se ha seguido realizando acerca de procesos condicionados a ser positivos. Este capítulo está basado en Revuz y Yor [18].

2.1. Proceso de Bessel

El proceso de Bessel juega un papel importante en el resto del capítulo. Por tal razón, en esta sección estudiamos las propiedades se utilizan para poder construir al movimiento browniano condicionado a ser positivo. A lo largo de este capítulo \mathbb{P}_a denota la ley de un movimiento browniano estándar que empieza en el punto a , cuando $a = 0$ escribimos \mathbb{P} en lugar de \mathbb{P}_0 . Consideramos la filtración completa del movimiento browniano, la cual denotamos por $(\mathcal{F}_t)_{t \geq 0}$.

Proposición 2.1. *Sea $d \in \mathbb{N}$, consideremos un movimiento browniano d -dimensional $(\mathbf{B}_t, t \geq 0)$ con la filtración natural $(\mathcal{F}_t, t \geq 0)$. El proceso $\rho_t = |\mathbf{B}_t| = \sqrt{B_1^2(t) + \dots + B_d^2(t)}$ es un \mathcal{F}_t proceso de Markov homogéneo con respecto a \mathbb{P}_x , con $x \in \mathbb{R}^d$. Para un entero $d \geq 2$, su semigrupo P_t^d , definido en $[0, \infty)$, está dado por las densidades*

$$p_t^d(x, y) = \frac{x}{t} \left(\frac{y}{x}\right)^{d/2} I_{d/2-1}(xy/t) \exp\left(-\frac{x^2 + y^2}{2t}\right), \quad x, y > 0, \quad (2.1)$$

donde

$$I_\nu(x) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{1}{m! \Gamma(m + \nu + 1)} \left(\frac{x}{2}\right)^{2m + \nu}$$

es la función modificada de Bessel de índice ν , y

$$p_t^d(0, y) = \Gamma(d/2) 2^{d/2-1} t^{-d/2} y^{d-1} \exp\left(-\frac{y^2}{2t}\right).$$

La demostración de la proposición anterior sale de los objetivos de este escrito, sin embargo puede encontrarse en la sección 3 del capítulo VII del libro Revuz y Yor [18].

Definición 2.2. Un proceso de Markov con semigrupo P_t^d es llamado **proceso de Bessel d -dimensional**.

La razón por la cual $(\rho_t, t \geq 0)$ se denomina proceso de Bessel es que la función I_ν aparece en la densidad del semigrupo. Por conveniencia escribimos $BES^d(x)$ para denotar un proceso de Bessel d -dimensional que inicia en x .

2.2. Preliminares

Para construir el movimiento browniano (uno-dimensional) condicionado a ser positivo como una h -transformada, debemos recordar los siguientes resultados. El primer resultado corresponde a determinar la probabilidad de transición de un movimiento browniano matado cuando alcanza el nivel cero.

Proposición 2.3. *La función*

$$q_t(x, y) := \frac{1}{\sqrt{2\pi t}} \left[\exp\left(-\frac{1}{2t}(y-x)^2\right) - \exp\left(-\frac{1}{2t}(y+x)^2\right) \right], \quad x > 0, y > 0, \quad (2.2)$$

define un semigrupo de transición submarkoviano Q_t con densidad q_t , en $(0, \infty)$.

Demostración. Para demostrar que Q_t es un semigrupo, debemos verificar, por un lado, que satisface las condiciones de medibilidad; y, por el otro, que satisface la ecuación Chapman-Kolmogorov.

Para demostrar que satisface las condiciones de medibilidad observemos que $q_t(x, y)$ es una función continua, lo que implica que es medible. Entonces $x \mapsto \int_A q_t(x, y) dy$ es medible para todo conjunto $A \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$. Por otra parte, para x fija, vemos que $A \mapsto \int_A q_t(x, y) dy$ es una medida.

Ahora demostraremos que satisface la ecuación de Chapman-Kolmogorov, denotamos por

$$g_t(x, y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi t}} \exp\left(-\frac{1}{2t}(y-x)^2\right)$$

a la densidad del semigrupo del movimiento browniano. Observemos que

$$q_t(x, y) = (g_t(x, y) - g_t(-x, y)) \mathbb{1}_{\{y \geq 0\}}.$$

Además, podemos ver que para cualesquiera $x, y \in \mathbb{R}$ se satisface que

$$g_t(x, y) = g_t(-x, -y) \quad \text{y} \quad g_t(x, -y) = g_t(-x, y).$$

Observemos, para $y > 0$, lo siguiente

$$\begin{aligned}
\int_0^\infty q_t(x, z)q_s(z, y)dz &= \int_0^\infty dz [g_t(x, z) - g_t(-x, z)] [g_s(z, y) - g_s(-z, y)] \\
&= \int_0^\infty dz [g_t(x, z)g_s(z, y) - g_t(x, z)g_s(-z, y) \\
&\quad - g_t(-x, z)g_s(z, y) + g_t(-x, z)g_s(-z, y)] \\
&= \int_0^\infty dz [g_t(x, z)g_s(z, y) - g_t(-x, z)g_s(z, y)] \\
&\quad + \int_0^\infty dz [g_t(x, -z)g_s(-z, y) - g_t(-x, -z)g_s(-z, y)] \\
&= \int_{-\infty}^\infty dz [g_t(x, z)g_s(z, y) + g_t(x, z)g_s(z, y)] \\
&\quad - \int_{-\infty}^\infty dz [g_t(-x, z)g_s(z, y) + g_t(-x, z)g_s(z, y)] \\
&= \int_0^\infty dz [g_t(x, z)g_s(z, y) - g_t(-x, z)g_s(z, y)] \\
&= g_{t+s}(x, y) - g_{t+s}(-x, y) \\
&= q_{t+s},
\end{aligned}$$

donde en la penúltima igualdad usamos el hecho de que el semigrupo del movimiento browniano satisface la ecuación de Chapman-Kolmogorov. Entonces q_t satisface la ecuación de Chapman-Kolmogorov y, por ende, Q_t es un semigrupo de transición.

Para concluir, debemos mostrar que el semigrupo es submarkoviano, es decir $Q_t(x, \mathbb{R}^+) < 1$. Para ello introducimos a la función $\phi_t(A)$ que es la medida del conjunto A bajo una ley gaussiana centrada de varianza t , para $A \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$. Ahora observemos que para $x \geq 0$ se tiene

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}_+} q_t(x, y)dy &= \int_{\mathbb{R}_+} \frac{1}{\sqrt{2\pi t}} \exp\left(-\frac{1}{2t}(y-x)^2\right) dy - \int_{\mathbb{R}_+} \frac{1}{\sqrt{2\pi t}} \exp\left(-\frac{1}{2t}(y+x)^2\right) dy \\
&= \phi_t(-x, \infty) - \phi_t(x, \infty).
\end{aligned}$$

Debido a que $(x, \infty) \subset (-x, \infty)$ y que $\phi(-x, \infty) < 1$, para toda $x \geq 0$, se sigue que $Q_t(x, \mathbb{R}_+) < 1$ para $x \geq 0$. \square

Teorema 2.4. *La función identidad es invariante bajo Q_t , es decir*

$$\int_0^\infty yQ_t(x, dy) = x.$$

Demostración. Gracias a la proposición anterior sabemos que Q_t posee densidad, ahora

$$\begin{aligned}
\int_0^\infty yQ_t(x, dy) &= \int_0^\infty yq_t(x, y)dy \\
&= \int_0^\infty \frac{1}{\sqrt{2\pi t}} y \exp\left(-\frac{1}{2t}(y-x)^2\right) dy - \int_0^\infty \frac{1}{\sqrt{2\pi t}} y \exp\left(-\frac{1}{2t}(y+x)^2\right) dy \\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi t}} \left[\int_{-x}^\infty (u+x) \exp\left(-\frac{1}{2t}u^2\right) du - \int_x^\infty (v-x) \exp\left(-\frac{1}{2t}v^2\right) dv \right] \\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi t}} \int_{-x}^x u \exp\left(-\frac{1}{2t}u^2\right) du + x\phi_t(-x, \infty) + x\phi_t(x, \infty).
\end{aligned}$$

Observemos que

$$\int_{(-x,x)} u \exp \left[-\frac{1}{2t} u^2 \right] = 0, \quad \text{para toda } x > 0,$$

puesto que la función es impar. Entonces

$$\begin{aligned} \int_0^\infty Q_t(x, dy)y &= x\phi_t(-x, \infty) + x\phi_t(x, \infty) \\ &= x\phi_t(-x, x) + 2x\phi_t(x, \infty) \\ &= x\phi_t(-x, x) + x\phi_t(x, \infty) + x\phi_t(-\infty, x) \\ &= x, \end{aligned}$$

la penúltima igualdad se da gracias a que $\phi_t(x, \infty) = \phi_t(-\infty, -x)$. □

Como resultado del teorema anterior tenemos el siguiente Corolario.

Corolario 2.5. *Los operadores H_t definidos como*

$$H_t f(x) = \frac{1}{x} \int_0^\infty y Q_t(x, dy) f(y), \quad x, y > 0,$$

también forman un semigrupo. Más aún, podemos extender el dominio a $[0, \infty)$ al definir

$$H_t(0, dy) = \sqrt{\frac{2}{\pi t^3}} y^2 \exp \left(-\frac{y^2}{2t} \right).$$

Demostración. Las condiciones de medibilidad se siguen directamente de las condiciones de medibilidad de Q_t , entonces sólo basta probar que los operadores H_t satisfacen la ecuación de Chapman-Kolmogorov. Observemos que

$$\begin{aligned} H_{t+s}(x, A) &= \int_A \frac{1}{x} Q_{t+s}(x, dy)y \\ &= \int_A \frac{1}{x} \int_E Q_t(x, dz) Q_s(z, dy)y \\ &= \int_E \frac{1}{x} Q_t(x, dz) \int_A Q_s(z, dy)y \\ &= \int_E \frac{1}{x} Q_t(x, dz) z \int_A \frac{1}{z} Q_s(z, dy)y \\ &= \int_E H_t(x, dz) H_s(z, A), \end{aligned}$$

donde hicimos uso de que Q_t satisface la ecuación de Chapman-Kolmogorov en la segunda igualdad y el Teorema de Tonelli en la tercera. Por lo tanto $(H_t, t > 0)$ forman un semigrupo de transición.

Notemos que el desarrollo anterior se da en el intervalo $(0, \infty)$, para poder extenderlo a $[0, \infty)$ empleamos un argumento límite, es decir

$$H_t(0, dy) := \lim_{x \downarrow 0} H_t(x, dy) = \sqrt{\frac{2}{\pi t^3}} y^2 \exp \left(-\frac{y^2}{2t} \right) dy. \quad (2.3)$$

En efecto

$$\begin{aligned}
\lim_{x \downarrow 0} H_t(x, dy) &= \lim_{x \downarrow 0} \frac{1}{x} q_t(x, y) y dy \\
&= y q_t'(0, y) dy \\
&= y \frac{1}{\sqrt{2\pi t}} \left[\exp\left(-\frac{y^2}{2t}\right) \frac{y}{t} + \exp\left(-\frac{y^2}{2t}\right) \frac{y}{t} \right] dy \\
&= \sqrt{\frac{2}{\pi t^3}} y^2 \exp\left(-\frac{y^2}{2t}\right) dy,
\end{aligned}$$

finalizando así el Corolario. \square

Proposición 2.6. Sean $I_t = \inf_{s \leq t} B_s$ y $a > 0$, bajo la medida de probabilidad \mathbb{P}_a restringida a $\{I_t > 0\}$, la variable aleatoria B_t tiene densidad

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi t}} \left[\exp\left(-\frac{(b-a)^2}{2t}\right) - \exp\left(-\frac{(b+a)^2}{2t}\right) \right], \quad b > 0.$$

Demostración. Buscamos una expresión para

$$\mathbb{P}_a(B_t \in db, I_t > 0).$$

Para ello observemos que

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}_a(B_t \in db, I_t > 0) &= \mathbb{P}_a(B_t \in db) - \mathbb{P}_a(B_t = b, I_t \leq 0) \\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi t}} \exp\left(-\frac{(b-a)^2}{2t}\right) - \mathbb{P}_a(B_t \in db, I_t \leq 0)
\end{aligned} \tag{2.4}$$

Analicemos el segundo término del lado derecho de (2.4). Para esto introducimos a $\tilde{B}_t \stackrel{\mathcal{L}}{=} -B_t$ y $\tilde{S}_t = \sup_{0 \leq s \leq t} \tilde{B}_s$, entonces

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}_a(B_t > b, I_t \leq 0) &= \mathbb{P}_a(-B_t < -b, -I_t > 0) \\
&= \mathbb{P}_a\left(\tilde{B}_t < -b, \sup_{0 \leq s \leq t} (-B_s) > 0\right) \\
&= \mathbb{P}_a\left(\tilde{B}_t < -b, \tilde{S}_t > 0\right) \\
&= \mathbb{P}\left(\tilde{B}_t < -(a+b), \tilde{S}_t > -a\right) \\
&= \mathbb{P}\left(\tilde{B}_t < -(a+b) - 2(-a)\right) \\
&= \mathbb{P}\left(\tilde{B}_t < a-b\right).
\end{aligned}$$

Sabemos que el semigrupo del movimiento browniano tiene densidad, por ello la cadena de igualdades puede resumirse como

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}\left(\tilde{B}_t < a-b\right) &= \int_{-\infty}^{a-b} \frac{1}{\sqrt{2\pi t}} \exp\left(-\frac{x^2}{2t}\right) dx \\
&= \int_{-\infty}^{-b} \frac{1}{\sqrt{2\pi t}} \exp\left(-\frac{(y-a)^2}{2t}\right) dy.
\end{aligned}$$

Ahora, gracias a la continuidad de la densidad vemos que

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(B_t \in db, I_t \leq 0) &= -\frac{d}{db} \mathbb{P}(B_t > b, I_t \leq 0) \\ &= -\frac{d}{db} \int_{-\infty}^{-b} \frac{1}{\sqrt{2\pi t}} \exp\left(-\frac{(y-a)^2}{2t}\right) dy \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi t}} \exp\left(-\frac{(-b-a)^2}{2t}\right) = \frac{1}{\sqrt{2\pi t}} \exp\left(-\frac{(b+a)^2}{2t}\right). \end{aligned}$$

Sustituyendo esta expresión en (2.4) concluimos

$$\mathbb{P}_a(B_t \in db, I_t > 0) = \frac{1}{\sqrt{2\pi t}} \left[\exp\left(-\frac{(b-a)^2}{2t}\right) - \exp\left(-\frac{(b+a)^2}{2t}\right) \right],$$

lo que finaliza la demostración. \square

Proposición 2.7. *Sea B un movimiento browniano, δ un punto cementerio y $T = \inf \{t \geq 0 : B_t = 0\}$. Para cualquier medida de probabilidad \mathbb{P}_x tal que $x > 0$, el proceso X definido mediante*

$$X_t = \begin{cases} B_t & \text{en } \{t < T\} \\ \delta & \text{en } \{t \geq T\} \end{cases}$$

es un proceso de Markov en $(0, \infty)$ cuyo kernel de transición está dado en la Proposición 2.3

Demostración. Debido a que el movimiento browniano empieza en $x > 0$ podemos escribir la densidad del proceso X como

$$\mathbb{P}_x(X_t \in dy) = \mathbb{P}_x(B_t \in dy, T > t) = \mathbb{P}_x(B_t \in dy, I_t > 0).$$

En virtud de la proposición anterior, la densidad del proceso X satisface

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi t}} \left[\exp\left(-\frac{(y-x)^2}{2t}\right) - \exp\left(-\frac{(y+x)^2}{2t}\right) \right], \quad x, y > 0,$$

el cual es, precisamente, el kernel de transición de la Proposición 2.3 \square

2.3. Construcción vía h -transformada

Gracias a los resultados de la sección anterior, la construcción del proceso de Bessel de dimensión 3, visto como h -transformada, se sigue de colocar las piezas adecuadas en el orden adecuado. Para ello recordemos que la densidad de un proceso de Bessel de dimensión d , la cual denotaremos por p_t^d , está dada por la expresión (2.1).

Haremos uso de la siguiente propiedad de la función Gamma

$$\Gamma\left(n + \frac{1}{2}\right) = \frac{(2n-1)!}{2^{2n-1}(n-1)!} \sqrt{\pi}.$$

Cuando $d = 3$ tenemos que la función de Bessel $I_{1/2}(x)$ satisfice

$$\begin{aligned}
I_{1/2}(x) &= \sum_{m=0}^{\infty} \frac{1}{m! \Gamma(m + 1/2 + 1)} \left(\frac{x}{2}\right)^{2m+1/2} \\
&= \sum_{m=0}^{\infty} \frac{2^{2(m+1)-1} m!}{m! (2(m+1) - 1)! \sqrt{\pi}} \left(\frac{x}{2}\right)^{2m+1/2} \\
&= \sqrt{\frac{x}{2\pi}} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{2^{2m+1}}{(2m+1)!} \left(\frac{x}{2}\right)^{2m} \\
&= \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{x^{2m+1}}{(2m+1)!} \\
&= \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \sinh(x).
\end{aligned}$$

En particular, la densidad de un proceso de Bessel de dimensión 3 toma la forma

$$\begin{aligned}
p_t^3(a, b) &= \left(\frac{a}{t}\right) \left(\frac{b}{a}\right)^{3/2} I_{1/2}(ab/t) \exp\left(-\frac{a^2 + b^2}{2t}\right) \\
&= \sqrt{\frac{2t}{\pi ab}} \left(\frac{a}{t}\right) \left(\frac{b}{a}\right)^{3/2} \sinh(ab/t) \exp\left(-\frac{a^2 + b^2}{2t}\right) \\
&= \sqrt{\frac{2t}{\pi ab}} \left(\frac{a}{t}\right) \left(\frac{b}{a}\right)^{3/2} \left(\frac{e^{ab/t} - e^{-ab/t}}{2}\right) \exp\left(-\frac{a^2 + b^2}{2t}\right) \\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi t}} \frac{b}{a} \left[\exp\left(-\frac{(b-a)^2}{2t}\right) - \exp\left(-\frac{(b+a)^2}{2t}\right) \right]. \tag{2.5}
\end{aligned}$$

Recapitulando, gracias a la Proposición 2.7 sabemos que la densidad de transición del movimiento browniano matado al alcanzar el nivel cero es

$$q_t(a, b) = \frac{1}{\sqrt{2\pi t}} \left[\exp\left(-\frac{(b-a)^2}{2t}\right) - \exp\left(-\frac{(b+a)^2}{2t}\right) \right].$$

Por otro lado, la Proposición 2.4 nos dice que la función identidad es invariante bajo la densidad $q_t(a, b)$, lo que implica que la h -transformada para $q_t(a, b)$ es $a^{-1}q_t(a, b)b$, la cual es igual a (2.5). En otras palabras,

$$p_t^3(a, b) = \frac{1}{a} q_t(a, b) b,$$

debido a que la densidad caracteriza al semigrupo, concluimos que la h -transformada de un movimiento browniano condicionado a ser positivo es un proceso de Bessel de dimensión tres.

Resaltamos que el desarrollo anterior se da en el intervalo $(0, \infty)$. Podemos extenderlo a $[0, \infty)$ invocando un argumento límite, lo cual hicimos ya en (2.3).

2.4. Representación de Pitman

La representación de Pitman nos permite observar el proceso de Bessel de dimensión 3 desde otra perspectiva; en lugar de pensar en tres movimientos brownianos independientes basta fijarnos en un movimiento browniano y su proceso de máximo. Esta representación nos será de utilidad en el capítulo 4. Para ello necesitamos los siguientes resultados.

Proposición 2.8. Si $(\rho_t, t \geq 0)$ es un BES³(x), con $x > 0$, entonces existe un movimiento browniano $\beta = (\beta_t, t \geq 0)$, tal que

$$\rho_t = x + \beta_t + \int_0^t \rho_s^{-1} ds.$$

Más aún, ρ_t^{-1} es una martingala local.

Demostración. Sabemos que el proceso de Bessel puede verse como el módulo de un movimiento browniano, es decir,

$$\rho_t = \sqrt{B_1^2(t) + B_2^2(t) + B_3^2(t)}$$

donde $B_i(t)$, $i = 1, 2, 3$, son movimientos brownianos independientes. Consideremos a la función $f(x_1, x_2, x_3) = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2}$.

Aplicando la fórmula de Itô a $f(B_1(t), B_2(t), B_3(t))$ y gracias a la independencia entre los movimientos brownianos, vemos que

$$\begin{aligned} \rho_t = f(B_1(t), B_2(t), B_3(t)) &= x + \int_0^t \sum_{i=1}^3 \frac{B_i(s) dB_i(s)}{\sqrt{B_1^2(s) + B_2^2(s) + B_3^2(s)}} + \\ &+ \frac{1}{2} \int_0^t \frac{2(B_1^2(s) + B_2^2(s) + B_3^2(s))}{(B_1^2(s) + B_2^2(s) + B_3^2(s))^{3/2}} ds \\ &= x + \int_0^t \sum_{i=1}^3 \frac{B_i(s)}{\rho_s} dB_i(s) + \int_0^t \rho_s^{-1} ds. \end{aligned}$$

Basta mostrar que $\int_0^t \sum_{i=1}^3 \frac{B_i(s)}{\rho_s} dB_i(s)$ es un movimiento browniano, observemos que

$$\left\langle \int_0^t \sum_{i=1}^3 \frac{B_i(s)}{\rho_s} dB_i(s) \right\rangle = \left\langle \sum_{i=1}^3 \int_0^t \frac{B_i(s)}{\rho_s} dB_i(s) \right\rangle = \sum_{i=1}^3 \left\langle \int_0^t \frac{B_i(s)}{\rho_s} dB_i(s) \right\rangle = \sum_{i=1}^3 \int_0^t \frac{B_i^2(s)}{\rho_s^2} ds = t.$$

Por el Teorema de caracterización de Lévy concluimos la primera parte al definir

$$\beta_t = \int_0^t \sum_{i=1}^3 \frac{B_i(s)}{\rho_s} dB_i(s).$$

Para mostrar que ρ_t^{-1} es martingala local basta aplicar la fórmula de Itô y percatarnos de que no hay componente de variación finita. Para ello definamos a la función

$$g(x_1, x_2, x_3) = (x_1^2 + x_2^2 + x_3^2)^{-1/2}.$$

Aplicando la fórmula de Itô a $g(B_1(t), B_2(t), B_3(t))$ obtenemos

$$\begin{aligned} \rho_t^{-1} = g(B_1(t), B_2(t), B_3(t)) &= x^{-1} - \int_0^t B_i(s) \sum_{i=1}^3 g(B_1(s), B_2(s), B_3(s))^3 dB_i(s) \\ &+ \frac{1}{2} \int_0^t \sum_{i=1}^3 g(B_1(s), B_2(s), B_3(s))^5 \left(2B_i^2(s) - \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^3 B_j^2(s) \right) ds. \quad (2.6) \end{aligned}$$

Analicemos ahora la parte correspondiente al proceso de variación finita. Es decir, el tercer término del lado derecho de la igualdad anterior y notemos

$$\sum_{i=1}^3 \left(2B_i^2(s) - \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^3 B_j^2(s) \right) = 2 \sum_{i=1}^3 B_i^2(s) - 2 \sum_{i=1}^3 B_i^2(s) = 0.$$

Sustituyendo está última expresión en (2.6) vemos que

$$\rho_t^{-1} = x^{-1} - \int_0^t B_i(s) \sum_{i=1}^3 g(B_1(s), B_2(s), B_3(s))^3 dB_i(s).$$

Por lo tanto ρ_t^{-1} es martingala local. Una observación importante en todo el desarrollo anterior es que ρ_t nunca visita cero después del tiempo cero. Esto se debe a que el movimiento browniano en dimensión mayor a tres no visita puntos. \square

La proposición anterior nos permite ver al proceso de Bessel como solución de una ecuación diferencial estocástica. Observemos que la variación del proceso de Bessel de dimensión tres es

$$\langle \rho \rangle_t = \left\langle x + \beta + \int_0^t \rho_s^{-1} ds \right\rangle_t = \langle \beta \rangle_t = t,$$

sin embargo el Teorema de caracterización de Lévy no se puede aplicar a ρ debido a que es una semimartingala, véase capítulo 4 sección 3 de Revuz y Yor [18].

Proposición 2.9. *Sea \mathbb{P}_x^3 la ley de un $BES^3(x)$, con $x > 0$, sea T_a el tiempo de entrada al nivel a para ρ , es decir*

$$T_a = \inf \{t \geq 0 : \rho_t = a\}.$$

Entonces, para $0 < a < x < b$,

$$\mathbb{P}_x^3 [T_a < T_b] = \frac{b^{-1} - x^{-1}}{b^{-1} - a^{-1}}$$

y $\mathbb{P}_x^3 [T_a < \infty] = \frac{a}{x}$. Más aún, $J_0 = \inf_{s \geq 0} \rho_s$ posee una distribución uniforme en el intervalo $[0, x]$.

Demostración. Gracias a la proposición anterior tenemos que ρ_t^{-1} es una martingala local, por ende $\rho_{t \wedge T_a}^{-1}$ es una martingala uniformemente integrable, a la cual le podemos aplicar el Teorema de paro de Doob. Definamos

$$T = T_a \wedge T_b = \inf \{t : \rho_t = b \text{ o } \rho_t = a\}.$$

Por continuidad y en virtud de que $\rho_t \rightarrow \infty$ cuando $t \rightarrow \infty$ c.s, ya que es transitorio, vemos que

$$\mathbb{P}_x^3 [T_a < T_b] + \mathbb{P}_x^3 [T_b < T_a] = 1. \quad (2.7)$$

Al ser $(\rho_{t \wedge T_a}^{-1}, t \geq 0)$ una martingala uniformemente integrable tenemos, por un lado, que $\mathbb{E}_x^3 [\rho_{t \wedge T_a}^{-1}] = \mathbb{E}_x^3 [\rho_0^{-1}] = x^{-1}$. Por otro lado, observamos la siguiente relación

$$\begin{aligned} \mathbb{E}_x^3 [\rho_{t \wedge T}^{-1}] &= \mathbb{E}_x^3 [\rho_{t \wedge T}^{-1} \mathbf{1}_{\{T_a < T_b\}}] + \mathbb{E}_x^3 [\rho_{t \wedge T}^{-1} \mathbf{1}_{\{T_b < T_a\}}] \\ &= a^{-1} \mathbb{P}_x^3 (T_a < T_b) + b^{-1} \mathbb{P}_x^3 (T_b < T_a) = x^{-1}. \end{aligned} \quad (2.8)$$

Por ello el problema se reduce a resolver un sistema de ecuaciones lineales, las cuales son (2.7) y (2.8). Ahora, despejando de (2.7) obtenemos

$$\mathbb{P}_x^3 [T_a < T_b] = 1 - \mathbb{P}_x^3 [T_b < T_a].$$

Sustituyendo en (2.8) y desarrollando conseguimos

$$\begin{aligned} a^{-1} (1 - \mathbb{P}_x^3 [T_b < T_a]) + b^{-1} \mathbb{P}_x^3 [T_b < T_a] &= x^{-1} \\ \mathbb{P}_x^3 [T_b < T_a] (b^{-1} - a^{-1}) &= x^{-1} - a^{-1} \\ \mathbb{P}_x^3 [T_b < T_a] &= \frac{x^{-1} - a^{-1}}{b^{-1} - a^{-1}}, \end{aligned}$$

de donde se sigue que

$$\mathbb{P}_x^3 [T_b < T_a] = 1 - \frac{x^{-1} - a^{-1}}{b^{-1} - a^{-1}} = \frac{b^{-1} - x^{-1}}{b^{-1} - a^{-1}},$$

lo que concluye la primera parte de la proposición. Para obtener la segunda parte, el Teorema de convergencia dominada implica

$$\mathbb{P}_x^3 [T_a < \infty] = \lim_{b \rightarrow \infty} \mathbb{P}_x^3 [T_a < T_b] = \lim_{b \rightarrow \infty} \frac{b^{-1} - x^{-1}}{b^{-1} - a^{-1}} = \frac{a}{x}.$$

Por último observemos que

$$\mathbb{P}_x^3 [J_0 \leq a] = \mathbb{P}_x^3 \left[\inf_{s \geq 0} \rho_s \leq a \right] = \mathbb{P}_x^3 [T_a < \infty] = \frac{a}{x},$$

es decir, J_0 es uniforme en el intervalo $[0, x]$. \square

Los resultados anteriores nos permiten obtener una demostración del Teorema de Pitman. La prueba se basa de Revuz y Yor [18].

Teorema 2.10. *Sean $B = (B_t, t \geq 0)$ un movimiento browniano estándar y $\rho = (\rho_t, t \geq 0)$ un proceso de Bessel de dimensión 3, definimos a $S_t = \sup_{s \leq t} B_s$ y $J_t = \inf_{s \geq t} \rho_s$. Entonces $(2S_t - B_t, S_t)$ y (ρ_t, J_t) poseen la misma ley.*

Demostración. Sea ρ un $BES^3(0)$ y definamos $X_t = 2J_t - \rho_t$. Probaremos que para cada $t > 0$ fija, $J_t \stackrel{\mathcal{L}}{=} \sup_{s \leq t} X_s$. Para ello estudiemos dos casos. El primer caso; $J_t \stackrel{\mathcal{L}}{=} \rho_t$, implica claramente que $X_t \stackrel{\mathcal{L}}{=} \rho_t$. Notemos que para toda $s \leq t$ tenemos, por definición, que $J_s \leq \rho_s$, entonces

$$X_s = 2J_s - \rho_s \leq J_s \leq J_t = X_t,$$

consecuentemente $X_s \leq J_t$, por lo tanto, $\sup_{s \leq t} X_s = J_t$.

El segundo caso, $J_t \neq \rho_t$, implica, por definición, que $J_t < \rho_t$ y $X_t < J_t$. Por continuidad vemos que existe un $g_t = \sup \{s < t : J_s = \rho_s\}$, gracias al cual podemos escribir $J_t = J_{g_t}$; lo que nos permite regresar al primer caso y ver que $J_{g_t} = \sup_{s \leq g_t} X_s$, esto es

$$J_{g_t} = \sup_{s \leq g_t} X_s = \sup_{s \leq t} X_s,$$

concluyendo nuestra primera afirmación. Es decir, hemos mostrado que $J_t = \sup_{s \leq t} X_s$.

Nuestro objetivo ahora es demostrar que X es un movimiento browniano, para ello usaremos el Teorema de caracterización de Lévy. Por ende basta probar que X es martingala local continua, pues sabemos que

$$\langle X \rangle_t = \langle 2J_s - \rho_s \rangle = \langle \rho \rangle_t = t,$$

debido a que $(J_s, s \geq 0)$ es un proceso de variación finita, ya que es creciente. Para mostrar que X es martingala debemos probar que satisface tres condiciones: medibilidad, integrabilidad y la propiedad de martingala.

Para verificar medibilidad lo primero que observamos es $J_s = J_t \wedge \inf_{s \leq u \leq t} \rho_u$ para $s < t$. De manera informal, si conocemos J_t y $(\rho_s, s \leq t)$ entonces conocemos $J_s, s \leq t$. El comentario anterior se expresa matemáticamente de la siguiente manera $\mathcal{F}_t^X \subset \mathcal{F}_t^\rho \vee \sigma(J_t)$. Por otro lado, debido a que $J_t = \sup_{s \leq t} X_s$, es suficiente tener conocimiento de X_t para conocer J_t , es decir, $\sigma(J_t) \subset \mathcal{F}_t^X$. Aún

más, si conocemos X , debido a que podemos deducir J_t , entonces también tenemos determinado $\rho_t = 2J_t - X_t$, es decir $\mathcal{F}_t^\rho \subset \mathcal{F}_t^X$. En otras palabras

$$\mathcal{F}_t^\rho \subset \mathcal{F}_t^X \quad \text{y} \quad \sigma(J_t) \subset \mathcal{F}_t^X \quad \implies \quad \mathcal{F}_t^\rho \vee \sigma(J_t) \subset \mathcal{F}_t^X.$$

Por lo tanto $\mathcal{F}_t^X = \mathcal{F}_t^\rho \vee \sigma(J_t)$.

Ahora veamos que X es integrable. Por un lado tenemos $X_t \leq \rho_t$, lo cual es claro, puesto que $X_t = 2J_t - \rho_t$ y $J_t \leq \rho_t$ por definición de J_t . Por el otro lado sabemos que J_t es un proceso positivo, entonces $-X_t = \rho_t - 2J_t \leq \rho_t$. Por lo tanto, para cada t la variable aleatoria X_t es integrable.

Con base en los dos párrafos anteriores solo resta probar la propiedad de martingala, es decir,

$$\mathbb{E}_b^3 [X_t | \mathcal{F}_s^X] = X_s, \quad \mathbb{P}_b^3 - \text{c.s.}$$

donde $b > 0$ y $s \leq t$. Para ello basta probar

$$\mathbb{E}_b^3 [X_t \mathbb{1}_{\{J_s > a\}} H] = \mathbb{E}_b^3 [X_s \mathbb{1}_{\{J_s > a\}} H], \quad (2.9)$$

donde $a > 0$ y H es \mathcal{F}_s^ρ medible y acotada. Empezamos por desarrollar el lado izquierdo de (2.9), al cual llamaremos LI .

$$\begin{aligned} LI &= \mathbb{E}_b^3 [(2J_t - \rho_t) \mathbb{1}_{\{J_s > a\}} H] \\ &= \mathbb{E}_b^3 \left[(2J_t - \rho_t) \mathbb{1}_{\{J_t > a\}} \mathbb{1}_{\left\{ \inf_{s \leq u \leq t} \rho_u > a \right\}} H \right] \\ &= \mathbb{E}_b^3 \left[(2J_0 - \rho_0) \mathbb{1}_{\{J_0 > a\}} \circ \theta_t \mathbb{1}_{\left\{ \inf_{s \leq u \leq t} \rho_u > a \right\}} H \right] \\ &= \mathbb{E}_b^3 \left[\mathbb{E}_b^3 \left[(2J_0 - \rho_0) \mathbb{1}_{\{J_0 > a\}} \circ \theta_t \mathbb{1}_{\left\{ \inf_{s \leq u \leq t} \rho_u > a \right\}} H \middle| \mathcal{F}_t^\rho \right] \right] \\ &= \mathbb{E}_b^3 \left[\mathbb{E}_b^3 \left[(2J_0 - \rho_0) \mathbb{1}_{\{J_0 > a\}} \circ \theta_t \middle| \mathcal{F}_t^\rho \right] \mathbb{1}_{\left\{ \inf_{s \leq u \leq t} \rho_u > a \right\}} H \right], \end{aligned}$$

donde θ_t denota al operador traslación, y en la segunda igualdad usamos $J_s = J_t \wedge \inf_{s \leq u \leq t} \rho_u$. Por la propiedad de Markov y debido a que H y $\mathbb{1}_{\{\inf_{s \leq u \leq t} \rho_u > a\}}$ son \mathcal{F}_t^ρ medibles, la última igualdad se puede escribir como

$$\mathbb{E}_b^3 \left[\mathbb{E}_{\rho_t}^3 [(2J_0 - \rho_0) \mathbb{1}_{\{J_0 > a\}}] \mathbb{1}_{\left\{ \inf_{s \leq u \leq t} \rho_u > a \right\}} H \right]. \quad (2.10)$$

Analicemos la parte interna de la ecuación anterior, donde sustituiremos a ρ_t por un valor fijo x .

$$\mathbb{E}_x^3 [(2J_0 - \rho_0) \mathbb{1}_{\{J_0 > a\}}] = 2\mathbb{E}_x^3 [J_0 \mathbb{1}_{\{J_0 > a\}}] - \mathbb{E}_x^3 [x \mathbb{1}_{\{J_0 > a\}}]$$

Gracias a la Proposición 2.9 sabemos que J_0 se distribuye uniforme, lo que implica que

$$\mathbb{E}_x^3 [J_0 \mathbb{1}_{\{J_0 > a\}}] = \int_a^x \frac{u}{x} du = \frac{1}{2x} (x^2 - a^2) \mathbb{1}_{\{a \leq x\}} = \frac{1}{2} (x - a^2 x^{-1}) \mathbb{1}_{\{a \leq x\}}.$$

Por otro lado, la misma proposición nos permite observar que

$$\mathbb{E}_x^3 [\rho_0 \mathbf{1}_{\{J_0 > a\}}] = x \mathbb{E}_x^3 [\mathbf{1}_{\{J_0 > a\}}] = x \mathbb{P}_x^3 [J_0 > a] = x(1 - ax^{-1}) \mathbf{1}_{\{a \leq x\}} = (x - a) \mathbf{1}_{\{a \leq x\}}.$$

Sustituyendo el desarrollo anterior en (2.10), obtenemos

$$LI = \mathbb{E}_b^3 \left[\mathbf{1}_{\{a \leq \rho_t\}} (a - a^2 \rho_t^{-1}) \mathbf{1}_{\left\{ \inf_{s \leq u \leq t} \rho_u > a \right\}} H \right]$$

Ahora observemos que $\left\{ \inf_{s \leq u \leq t} \rho_u > a \right\} = \{T_a \circ \theta_s > t - s\} \cap \{\rho_s > a\}$, es decir, el primer instante en que el proceso alcanza el nivel a empezando en el tiempo s ocurre después de $t - s$ unidades de tiempo. Con tal observación resumimos la cadena de igualdades mediante

$$\begin{aligned} LI &= \mathbb{E}_b^3 [(a - a^2 \rho_t^{-1}) \mathbf{1}_{\{T_a \circ \theta_s > t - s\}} H] \\ &= \mathbb{E}_b^3 [\mathbb{E}_b^3 [(a - a^2 \rho_t^{-1}) \mathbf{1}_{\{\rho_s > a\}} \mathbf{1}_{\{T_a \circ \theta_s > t - s\}} | \mathcal{F}_s^\rho] \mathbf{1}_{\{\rho_s > a\}} H] \\ &= \mathbb{E}_b^3 [\mathbb{E}_b^3 [(a - a^2 \rho_{t-s}^{-1}) \mathbf{1}_{\{T_a > t - s\}} \circ \theta_s | \mathcal{F}_s^\rho] \mathbf{1}_{\{\rho_s > a\}} H] \\ &= \mathbb{E}_b^3 [\mathbb{E}_{\rho_s}^3 [(a - a^2 \rho_{t-s}^{-1}) \mathbf{1}_{\{T_a > t - s\}}] \mathbf{1}_{\{\rho_s > a\}} H] \\ &= \mathbb{E}_b^3 [\mathbb{E}_{\rho_s}^3 [(a - a^2 \rho_{(t-s) \wedge T_a}^{-1})] \mathbf{1}_{\{\rho_s > a\}} H], \end{aligned}$$

donde la penúltima igualdad es válida gracias a la Propiedad de Markov. En virtud de la Proposición 2.8 tenemos que $\rho_{t \wedge T_a}$ es martingala uniformemente integrable, a la cual le podemos aplicar el Teorema de paro de Doob, entonces

$$\mathbb{E}_x^3 [a - a^2 \rho_t \wedge T_a] = a - a^2 x^{-1}.$$

Por lo tanto

$$LI = \mathbb{E}_b^3 [(a - a^2 \rho_s^{-1}) \mathbf{1}_{\{\rho_s > a\}} H].$$

El procedimiento para el lado derecho de (2.9), al cual llamaremos LD , es análogo. Para verlo, gracias al desarrollo anterior, los argumentos se resumen en

$$\begin{aligned} LD &= \mathbb{E}_b^3 [(2J_s - \rho_s) \mathbf{1}_{\{\rho_s > a\}} H] = \mathbb{E}_b^3 [\mathbb{E}_b^3 [(2J_0 - \rho_0) \circ \theta_s | \mathcal{F}_s^\rho] \mathbf{1}_{\{\rho_s > a\}} H] \\ &= \mathbb{E}_b^3 [\mathbb{E}_{\rho_s}^3 [2J_0 - \rho_0] \mathbf{1}_{\{\rho_s > a\}} H] \\ &= \mathbb{E}_b^3 [(a - a^2 \rho_s^{-1}) \mathbf{1}_{\{\rho_s > a\}} H], \end{aligned}$$

lo que nos permite deducir que (2.9) es cierta, concluyendo así el resultado. \square

3 Comportamiento asintótico de los tiempos de ocupación: Caso discreto

Con el material visto en los capítulos anteriores, estamos en condiciones de estudiar el comportamiento asintótico de los tiempos de ocupación de la caminata aleatoria condicionada a ser positiva. Para ello trabajaremos una serie de lemas a todo detalle, con el objeto de demostrar los resultados principales de Biggins [4]. Nuestro objetivo es demostrar al siguiente teorema:

Teorema 3.1. *Sea $S = (S_n, n \geq 0)$ una caminata aleatoria tal que $\mathbb{E}[S_1] = 0$ y $\mathbb{E}[S_1^2] = 1$. Sea $R = (R_n, n \geq 0)$, la caminata aleatoria condicionada a ser positiva asociada a S . Definamos $D(x) = \sum_{n \geq 1} \mathbb{1}_{\{R_n < x\}}$, como el tiempo de ocupación del intervalo $[0, x)$ para la cadena R . Existen constantes U y L tales que los siguientes límites son válidos casi seguramente.*

$$(i) \quad \limsup_{x \rightarrow \infty} \frac{D(x)}{x^2 \log \log(x)} \leq U < \infty.$$

$$(ii) \quad \liminf_{x \rightarrow \infty} \frac{D(x)}{x^2 / \log \log(x)} \geq L > 0.$$

Una de las razones por las cuales resulta útil estudiar este tipo de objetos deriva directamente de la aplicabilidad de las caminatas aleatorias, tal como mencionamos en la introducción. El conocer las funciones normalizadoras adecuadas, salvo un múltiplo escalar, nos permite obtener estimaciones más finas; las cuales pueden responder preguntas pertinentes al comportamiento del fenómeno de estudio.

A continuación resumimos las ideas desarrolladas en la demostración del teorema anterior. Primero definimos a la variable $\nu_k(\cdot)$; con la cual podemos analizar el comportamiento de R , la caminata aleatoria condicionada a ser positiva, entre los *ascending ladder times* de S , la caminata aleatoria original. Mostramos, en el Lema 3.4 que $\nu_r(\cdot)$ y $H_k - H_r$ son independientes para $r < k$. Es gracias a esta independencia que podemos construir una supermartingala positiva, debido a que podemos acotar la transformada de Laplace de $\nu_k(\cdot)$ (Lema 3.7). Una vez hallada la supermartingala positiva adecuada empleamos la desigualdad maximal para supermartingalas, establecida en la Proposición 3.12, y, con base en esta, invocamos al Lema de Borel Cantelli, probando así la cota superior (Lema 3.13). Para demostrar la cota inferior (Lema 3.17) construimos una sucesión de v.a.i.i.d no negativas en términos de $\nu_r(\cdot)$ y $H_k - H_r$ para $r < k$. Posteriormente utilizamos la cota exponencial del Lema 3.16, a la cual aplicaremos el Lema condicional de Borel-Cantelli. La demostración de ambas cotas explota la monotonía del tiempo de ocupación, i.e de la función D .

3.1. Introducción

Sea $\{\xi_i, i \geq 1\}$ una sucesión de v.a.i.i.d y construimos a la caminata aleatoria $S = \{S_n, n \geq 0\}$ como $S_n = \sum_{i=1}^n \xi_i$ y $S_0 = 0$. De ahora en adelante consideramos una caminata aleatoria oscilante S , tal que $\mathbb{E}[S_1] = 0$ y $\mathbb{E}[S_1^2] = 1$.

Recordamos del capítulo 1 a los *ascending ladder times*, los cuales están definidos recursivamente mediante

$$\gamma_0 = 0, \quad \gamma_k = \inf \{n > \gamma_{k-1} : S_n > S_{\gamma_{k-1}}\}, \quad \text{para } k = 1, 2, \dots,$$

con ellos construimos el proceso escalera, $\{(\gamma_k, H_k), k \geq 0\}$, donde $H_k := S_{\gamma_k}$. Resaltamos que $(H_k, k \geq 1)$ es un proceso positivo y creciente. De manera análoga definimos al proceso escalera descendente, el cual denotamos por $(\hat{\gamma}_i, -\hat{H}_k, k \geq 0)$.

La suposición de media cero implica que ambos procesos escalera son propios, es decir, ninguno tiene un átomo en $+\infty$. La suposición de varianza uno implica que $\mathbb{E}[H_1]$ y $\mathbb{E}[\hat{H}_1]$ son finitos y que $2\mathbb{E}[H_1]\mathbb{E}[-\hat{H}_1] = 1$; véase la Proposición A.3. Para facilitar notación denotamos por $b^+ := \mathbb{E}[H_1]$ y por $b^- := \mathbb{E}[-\hat{H}_1]$.

Lema 3.2. *Para j fija, definimos a la cadena retornada en el tiempo j como*

$$S_i^* = S_j - S_{j-i}, \quad i \leq j.$$

Consideremos a f una función positiva. Entonces

$$f(-S_j)\mathbb{1}_{\{\gamma_1 > j\}} \stackrel{\mathcal{L}}{=} f(-S_j^*)\mathbb{1}_{\{(j, S_j^*) \text{ es un punto escalera descendente}\}}.$$

Además

$$\mathbb{E} \left[\sum_{j=0}^{\gamma_1-1} f(-S_j) \right] = \int f(y) \hat{U}(dy).$$

Demostración. Gracias a la propiedad de incrementos independientes y estacionarios para caminatas aleatorias observamos, para $i \leq j$ lo siguiente,

$$S_i^* = S_j - S_{j-i} \stackrel{\mathcal{L}}{=} S_i.$$

Por otra parte, debido a que S posee incrementos independientes y estacionarios vemos que S^* también. Como lo anterior es válido para $i \leq j$ concluimos

$$\{S_i^*, i \leq j\} \stackrel{\mathcal{L}}{=} \{S_i, i \leq j\}.$$

Dicho resultado es conocido como *retorno de tiempo* para caminatas aleatorias. Debido a que $S_0 = 0$ observamos que $S_j = S_j^*$ c.s. En el evento $\{j < \gamma_1\}$, tenemos $S_j \leq 0$ entonces

$$S_j^* \leq S_i^* \quad \text{c.s.} \quad \text{para } i \leq j.$$

Por lo tanto S_j^* es el menor valor de la cadena S_i^* para $i \leq j$, consecuentemente S_j^* es un punto escalera descendente. Este pequeño artificio nos permite concluir que

$$f(-S_j)\mathbb{1}_{\{\gamma_1 > j\}} \stackrel{\mathcal{L}}{=} f(-S_j^*)\mathbb{1}_{\{(j, S_j^*) \text{ es un punto escalera descendente}\}}.$$

probando el primer resultado. Para obtener el segundo observemos que, al sumar sobre j , se sigue

$$\begin{aligned} \mathbb{E} \left[\sum_{j=0}^{\gamma_1-1} f(-S_j) \right] &= \sum_{j=0}^{\infty} \mathbb{E} \left[f(-S_j^*) \mathbf{1}_{\{(j, S_j^*) \text{ es un punto escalera descendente}\}} \right] \\ &= \sum_{j=0}^{\infty} \mathbb{E} \left[f(-\widehat{H}_j) \right] = \sum_{j=0}^{\infty} \int f(x) d\widehat{F}_j(dx) = \int \sum_{j=0}^{\infty} f(x) d\widehat{F}_j(dx) \\ &= \int f(y) \widehat{U}(dy), \end{aligned}$$

lo que prueba el resultado. \square

Observación. En particular, si $f(-S_j) = \mathbf{1}_{\{S_j > -x\}}$ se sigue que

$$V(x) := \mathbb{E} \left[\sum_{j=0}^{\gamma_1-1} \mathbf{1}_{\{S_j > -x\}} \right] = \int \mathbf{1}_{\{y < x\}} \widehat{U}(dx).$$

En otras palabras, $V(x)$ representa el número promedio de visitas al intervalo $(-x, 0]$ antes de rebasar el nivel cero.

Por conveniencia recordamos la construcción de Tanaka para la caminata aleatoria condicionada a ser positiva, la cual denotamos por $(R_k, k \geq 0)$. Consideremos a

$$\tau_n = \gamma_n - \gamma_{n-1},$$

observemos que gracias a la propiedad fuerte de Markov $\{\tau_n, n \geq 1\}$ son v.a.i.i.d, tales $\tau_n \stackrel{\mathcal{L}}{=} \gamma_1$, para toda n . Con ellas podemos definir

$$\omega_n = (0, S_{\tau_n} - S_{\tau_n-1}, S_{\tau_n} - S_{\tau_n-2}, \dots, S_{\tau_n}).$$

Para identificar cada componente de ω_n escribimos

$$\omega_n = (\omega_n(k), k = 0, 1, \dots, \tau_n), \quad \text{i.e.} \quad \omega_n(k) = S_{\tau_n} - S_{\tau_n-k}.$$

Entonces

$$R_n = H_k + \omega_{k+1}(n - \gamma_k), \quad \text{para } \gamma_k < n \leq \gamma_{k+1}. \quad (3.1)$$

3.2. Estimaciones Preliminares

Nuestro objetivo es estudiar el comportamiento de $D(x)$. Como primer acercamiento consideramos a las siguientes variables aleatorias

$$D_k := D(H_k) = \sum_{n=0}^{\infty} \mathbf{1}_{\{R_n < H_k\}}$$

el cual denota el número de veces que la caminata aleatoria condicionada a ser positiva está por debajo de H_k .

Debido a que en bastantes operaciones empleamos argumentos asintóticos introducimos la notación usual del símbolo \approx , el cual leemos como *asintóticamente equivalente* a , es decir, $a(x) \approx b(x)$ si $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{a(x)}{b(x)} = 1$.

La siguiente proposición nos será de utilidad en las demostraciones subsecuentes.

Proposición 3.3. *Con la notación mantenida hasta ahora tenemos*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{V(H_n)}{n} = \frac{b^+}{b^-} \quad c.s.$$

Demostración. Por la ley fuerte de grandes números sabemos que $H_n/n \rightarrow b^+ c.s.$ Es decir, para toda $\epsilon > 0$ existe una $N := N(\epsilon)$ lo suficientemente grande, tal que para toda $n > N$ se tiene $|H_n/n - b^+| < \epsilon c.s.$ En otras palabras, para toda $n > N$

$$n(b^+ - \epsilon) < H_n < n(b^+ + \epsilon), \quad c.s.$$

Por otro lado, el Teorema elemental de renovación nos dice

$$\lim_{x \rightarrow \infty} V(x)/x = \frac{1}{b^-}.$$

Con los elementos anteriores podemos ver que la siguiente desigualdad es válida *c.s.*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{V(H_n)}{n} \leq \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{V(n(b^+ + \epsilon))}{n(b^+ + \epsilon)} \frac{n(b^+ + \epsilon)}{n} = \frac{b^+ + \epsilon}{b^-}.$$

Gracias a que V es creciente, un razonamiento análogo nos otorga la cota inferior, y debido a que $\epsilon > 0$ fue arbitraria concluimos el resultado. \square

Lema 3.4. *Considerando los objetos definidos anteriormente. Sea*

$$v_r(x) = \sum_{j=1}^{\tau_r} \mathbb{1}_{\{\omega_r(j) < x + \omega_r(\tau_r)\}}.$$

Entonces

$$D_k = \sum_{r=1}^k v_r(H_k - H_r),$$

con (v_1, \dots, v_r) independiente de $(H_k - H_{k-1}, \dots, H_k - H_r)$. Además $\mathbb{E}[v_r(x)] = V(x)$ y

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{1}{k^2} \mathbb{E}[D_k] = \frac{b^+}{2b^-}.$$

Demostración. Denotemos por $\mathcal{F}_r = \sigma(S_0, S_1, \dots, S_r)$, consideremos $x \in \mathbb{R}$ fija y observemos que $v_r(x) \in \mathcal{F}_{\gamma_r}$, pues $\tau_r \in \mathcal{F}_{\gamma_r}$. De manera informal, si conocemos \mathcal{F}_{γ_r} la función $v_r(x)$ se encuentra completamente determinada. Debido a que la caminata aleatoria posee incrementos independientes y estacionarios, i.e

$$H_k - H_r = S_{\gamma_k} - S_{\gamma_r} \text{ es independiente de } \mathcal{F}_{\gamma_r}, \quad \text{para toda } r < k.$$

Por lo tanto $v_r(x)$ es independiente de $H_k - H_r$.

Notemos que por construcción de R , la función $\mathbb{1}_{\{R_n < H_k\}} = 0$ para toda $n \geq \gamma_k$. Esta observación, la ecuación (3.1) y el hecho que $\omega_r(i) = S_{\tau_r} - S_{\tau_r - i}$ nos permiten ver

$$D(H_k) = \sum_{n=0}^{\gamma_k} \mathbb{1}_{\{R_n < H_k\}} = \sum_{r=1}^k \sum_{i=1}^{\tau_r} \mathbb{1}_{\{H_{r-1} + \omega_r(i) < H_k\}} = \sum_{r=1}^k \sum_{i=1}^{\tau_r} \mathbb{1}_{\{\omega_r(i) < H_k - H_{r-1}\}},$$

Por otro lado, gracias a la propiedad fuerte de Markov, sabemos que

$$H_{r-1} + \omega_r(\tau_r) = H_{r-1} + S_{\gamma_r - \gamma_{r-1}} \stackrel{\mathcal{L}}{=} H_r.$$

Entonces, por definición de la función v_r , vemos

$$\sum_{r=1}^k \sum_{i=1}^{\tau_r} \mathbb{1}_{\{\omega_r(i) < H_k - H_r + \omega_r(\tau_r)\}} = \sum_{r=1}^k v_r(H_k - H_r),$$

lo que prueba la primera parte. Notando que $\gamma_1 = \tau_1$ observamos

$$\mathbb{E}[v_1(x)] = \mathbb{E}\left[\sum_{i=1}^{\gamma_1} \mathbb{1}_{\{\omega_1(i) < x + \omega_1(\gamma_1)\}}\right] = \mathbb{E}\left[\sum_{i=1}^{\gamma_1} \mathbb{1}_{\{S_{\gamma_1} - S_{\gamma_1-i} < x + S_{\gamma_1}\}}\right] = \mathbb{E}\left[\sum_{i=1}^{\gamma_1} \mathbb{1}_{\{S_{\gamma_1-i} > -x\}}\right] = V(x),$$

en la última igualdad usamos un cambio de variable. Observemos ahora el comportamiento asintótico, para ello denotemos por $\mathcal{B}_i = \sigma(H_k - H_i)$, debido a que $v_i(x)$ es independiente de \mathcal{B}_i vemos que $\mathbb{E}[v_i(H_k - H_i) | \mathcal{B}_i] = V(H_k - H_i)$. Entonces

$$\mathbb{E}[D_k] = \mathbb{E}\left[\sum_{i=1}^k v_i(H_k - H_i)\right] = \mathbb{E}\left[\sum_{i=1}^k \mathbb{E}[v_i(H_k - H_i) | \mathcal{B}_i]\right] = \mathbb{E}\left[\sum_{i=1}^k V(H_k - H_i)\right].$$

Por la propiedad fuerte de Markov sabemos que $H_k - H_i \stackrel{\mathcal{L}}{=} H_{k-i}$, luego

$$\frac{1}{k^2} \mathbb{E}[D_k] = \frac{1}{k^2} \sum_{i=1}^k \mathbb{E}[V(H_k - H_i)] = \frac{1}{k^2} \sum_{i=0}^{k-1} \mathbb{E}[V(H_i)]. \quad (3.2)$$

De la Proposición 3.3 deducimos que para toda $\epsilon > 0$ existe $N := N(\epsilon) \in \mathbb{N}$ tal que para toda $n \geq N$ se sigue $V(H_n) < n \frac{b^+}{b^-} (1 + \epsilon)$ c.s. Con lo anterior tenemos, por un lado, para $k > N$

$$\sum_{i=0}^{k-1} \mathbb{E}[V(H_i)] = \sum_{i=0}^{N-1} \mathbb{E}[V(H_i)] + \sum_{i=N}^{k-1} \mathbb{E}[V(H_i)] = \sum_{i=0}^{N-1} \mathbb{E}[V(H_i)] + \sum_{i=N}^{k-1} i \frac{b^+}{b^-} (1 + \epsilon)$$

Por otro lado notemos

$$\sum_{i=0}^{N-1} \mathbb{E}[V(H_i)] \leq (N-1) \mathbb{E}[V(H_k)] \leq (N-1) k \frac{b^+}{b^-} (1 + \epsilon)$$

donde en la desigualdad anterior hicimos uso de la monotonía de la función V . Debido a que la expresión anterior es del orden de k , cuando k es suficientemente grande, se sigue que

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{1}{k^2} \sum_{i=0}^{N-1} \mathbb{E}[V(H_i)] = 0.$$

Por lo tanto

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{1}{k^2} \mathbb{E}[D_k] \leq (1 + \epsilon) \frac{b^+}{b^-} \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{1}{k^2} \sum_{i=M}^{k-1} i = (1 + \epsilon) \frac{b^+}{b^-} \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{1}{k^2} \left(\frac{(k-1)k}{2} - \frac{M(M+1)}{2} \right) = (1 + \epsilon) \frac{b^+}{2b^-},$$

la cota superior se sigue considerando ϵ suficientemente cercana a cero. El argumento para la cota inferior es análogo, por lo que se concluye la prueba. \square

En los siguientes lemas usaremos una $v_i(\cdot)$ genérica, por ello escribimos $v(\cdot) := v_1(\cdot)$. El siguiente lema tiene como objetivo acotar los momentos de v . Cabe señalar que algunos resultados subsecuentes usan los mismos argumentos que el siguiente lema.

Lema 3.5. Sean

$$K(x) = \text{Var}(v(x)) = \mathbb{E}[(v(x) - V(x))^2]$$

y

$$W(x) = \sup \left\{ \int_0^y V(x-y+z)U(dz) : 0 \leq y \leq x \right\}.$$

Entonces

$$(i) \quad K(x) = 2 \int_0^x \int_0^y V(x-y+z)U(dz)\widehat{U}(dy) - V(x)^2 - V(x).$$

$$(ii) \quad x^{-3}K(x) \longrightarrow \frac{2}{3b^+(b^-)^2} \text{ cuando } x \longrightarrow \infty; \text{ lo que implica que para una } C \text{ finita, } K(x) \leq C(x+1)^3.$$

$$(iii) \quad \mathbb{E}[v(x)^k] \leq k!V(x)W(x)^{k-1}.$$

Demostración. Para $x > 0$ definimos a $V(x, y)$ como el número esperado de visitas de $(S_n - y, n \geq 0)$ (la caminata aleatoria que empieza en $-y$), en el intervalo $(-x, 0]$ antes de su primera visita al intervalo $(0, \infty)$; la cual es consistente con la notación original $V(x, 0) = V(x)$. La siguiente relación es válida gracias a la propiedad de Markov

$$\mathbb{E} \left[\sum_{k=j}^{\gamma_1-1} \mathbf{1}_{\{S_k > -x\}} \middle| \mathcal{F}_j \right] = \mathbf{1}_{\{\gamma_1 > j\}} V(x, -S_j), \quad \text{donde } \mathcal{F}_j = \sigma(S_0, S_1, \dots, S_j). \quad (3.3)$$

Ahora notemos que $K(x) = \mathbb{E}[v(x)^2] - 2\mathbb{E}[v(x)V(x)] + \mathbb{E}[V(x)^2]$. Notando que para x fija, $V(x)$ es determinista, tenemos $\mathbb{E}[v(x)^2] - V(x)^2$.

Recordando la relación

$$\left(\sum_{j=0}^n a_j \right)^2 = 2 \sum_{j=0}^n \sum_{k=j}^n a_j a_k - \sum_{i=0}^n a_i^2,$$

podemos desarrollar

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[v(x)^2] &= \mathbb{E} \left[\left(\sum_{j=0}^{\gamma_1-1} \mathbf{1}_{\{S_j > -x\}} \right)^2 \right] \\ &= \mathbb{E} \left[2 \sum_{j=0}^{\gamma_1-1} \mathbf{1}_{\{S_j > -x\}} \sum_{k=j}^{\gamma_1-1} \mathbf{1}_{\{S_k > -x\}} - \sum_{j=0}^{\gamma_1-1} \mathbf{1}_{\{S_j > -x\}} \right] \\ &= 2\mathbb{E} \left[\sum_{j=0}^{\gamma_1-1} \mathbf{1}_{\{S_j > -x\}} \sum_{k=j}^{\gamma_1-1} \mathbf{1}_{\{S_k > -x\}} \right] - V(x) \\ &= 2\mathbb{E} \left[\sum_{j=0}^{\gamma_1-1} \mathbb{E} \left[\mathbf{1}_{\{S_j > -x\}} \sum_{k=j}^{\gamma_1-1} \mathbf{1}_{\{S_k > -x\}} \middle| \mathcal{F}_j \right] \right] - V(x) \\ &= 2\mathbb{E} \left[\sum_{j=0}^{\gamma_1-1} \mathbf{1}_{\{S_j > -x\}} V(x, -S_j) \right] - V(x) \\ &= 2 \int_0^x V(x, y)\widehat{U}(dy) - V(x). \end{aligned}$$

Para concluir la prueba de (i) basta mostrar

$$V(x, y) = \int_0^y V(x - y + z)U(dz).$$

Para ello observemos que, por homogeneidad espacial

$$V(x, y) = \mathbb{E}_{-y} \left[\sum_{n=0}^{\gamma_0-1} \mathbb{1}_{\{S_n > -x\}} \right] = \mathbb{E} \left[\sum_{n=0}^{\gamma^y-1} \mathbb{1}_{\{S_n > y-x\}} \right],$$

donde $\gamma^y = \inf \{n > 0 : S_n > y\}$, es decir, la primera vez que una caminata aleatoria que inicia en cero sobrepase el nivel y . La idea es aplicar la descomposición de Wiener-Hopf para caminatas aleatorias (descrita en el Apéndice A). Para ello introducimos a Γ_p una variable aleatoria geométrica de parámetro p , independiente de la cadena S . Definamos $q = 1 - p$ y observemos que

$$\mathbb{E} \left[\sum_{n=0}^{\gamma^y-1} \mathbb{1}_{\{S_n > y-x\}} \right] = \lim_{q \rightarrow 1} \mathbb{E} \left[\sum_{n=0}^{\infty} \mathbb{1}_{\{S_n > y-x\}} \mathbb{1}_{\{n < \gamma^y\}} \right] q^n.$$

Ahora trabajemos con la caminata aleatoria matada a tasa geométrica. Es decir

$$\begin{aligned} \mathbb{E} \left[\sum_{n=0}^{\infty} \mathbb{1}_{\{S_n > y-x\}} \mathbb{1}_{\{n < \gamma^y\}} \right] q^n &= \frac{1}{p} \mathbb{E} \left[\mathbb{1}_{\{S_{\Gamma_p} > y-x\}} \mathbb{1}_{\{\Gamma_p < \gamma^y\}} \right] \\ &= \frac{1}{p} \mathbb{E} \left[\mathbb{1}_{\{S_{\Gamma_p} > y-x\}} \mathbb{1}_{\{\bar{S}_{\Gamma_p} < y\}} \right], \end{aligned} \quad (3.4)$$

donde $\bar{S}_{\Gamma_p} = \sup \{S_n, n \leq \Gamma_p\}$ y $\underline{S}_{\Gamma_p} = \inf \{S_n, n \leq \Gamma_p\}$.

El siguiente desarrollo necesita recordar tanto la descomposición de Wiener-Hopf para caminatas aleatorias como la identidad básica. Denotamos por $\chi(s, t) := \mathbb{E} [s^\gamma e^{itS_\gamma}]$, de manera análoga a $\hat{\chi}(s, t) = \mathbb{E} [s^{\hat{\gamma}} e^{itS_{\hat{\gamma}}}]$. La función característica de la v.a X la denotaremos por $\phi_X(\cdot)$. El Corolario A.2, al que nos referimos como la identidad básica, nos dice

$$1 - s\phi_{S_1}(t) = (1 - \chi(s, t))(1 - \hat{\chi}(s, t)).$$

Lo primero que observamos es

$$1 - s = (1 - \chi(s, 0))(1 - \hat{\chi}(s, 0)). \quad (3.5)$$

El inciso (i) de la descomposición de Wiener-Hopf (Teorema A.1) nos dice que $\bar{S}_{\Gamma_p} - S_{\Gamma_p}$ es independiente de \bar{S}_{Γ_p} y posee la misma distribución que \underline{S}_{Γ_p} .

Gracias a los comentarios anteriores, estamos en condiciones de resumir la ecuación (3.4), la cual se convierte en

$$\begin{aligned} \frac{1}{p} \mathbb{E} \left[\mathbb{1}_{\{\bar{S}_{\Gamma_p} - S_{\Gamma_p} < x-y+\bar{S}_{\Gamma_p}\}} \mathbb{1}_{\{\bar{S}_{\Gamma_p} < y\}} \right] &= \frac{1}{1-q} \int_{(0,y)} \mathbb{E} \left[\mathbb{1}_{\{\bar{S}_{\Gamma_p} - S_{\Gamma_p} < x-y+z\}} \right] \mathbb{P}(\bar{S}_{\Gamma_p} \in dz) \\ &= \frac{1}{1-q} \int_{(0,y)} \mathbb{P}(\bar{S}_{\Gamma_p} \in dz) \int_{(0,x-y+z)} \mathbb{P}(\bar{S}_{\Gamma_p} - S_{\Gamma_p} \in dw) \\ &= \int_{(0,y)} \frac{\mathbb{P}(\bar{S}_{\Gamma_p} \in dz)}{1 - \chi(q, 0)} \int_{(0,x-y+z)} \frac{\mathbb{P}(-\underline{S}_{\Gamma_p} \in dw)}{1 - \hat{\chi}(q, 0)}, \end{aligned}$$

la última igualdad se da gracias a (3.5). Invocando los incisos (ii) y (iii) del Teorema A.1 conseguimos, por un lado

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}} e^{itz} \frac{\mathbb{P}(\bar{S}_{\Gamma_p} \in dz)}{1 - \chi(q, 0)} &= \frac{1}{1 - \chi(q, 0)} \mathbb{E} \left[e^{it\bar{S}_{\Gamma_p}} \right] \\ &= \exp \left\{ - \int_{(0, \infty)} \sum_{n=1}^{\infty} (1 - e^{itx}) \frac{q^n}{n} F^{*n}(dx) + \int_{(0, \infty)} \sum_{n=1}^{\infty} q^n e^{itx} \frac{1}{n} F^{*n}(dx) \right\} \\ &= \exp \left\{ \int_{(0, \infty)} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{q^n}{n} e^{itx} F^{*n}(dx) \right\}. \end{aligned} \quad (3.6)$$

Recordemos que U es la medida de renovación asociada al proceso de altura $(H_k, k \geq 0)$. En otras palabras $U(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \mathbb{P}(H_n \leq x)$. Por otro lado, esta observación y el Teorema de Tonelli nos otorgan

$$\phi_U(t) = \int_0^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} e^{itx} H_n(dx) = \sum_{n=0}^{\infty} \int_0^{\infty} e^{itx} H_n(dx) = \sum_{n=0}^{\infty} (\phi_H(t))^n = \frac{1}{1 - \phi_H(t)}.$$

Debido a que $\phi_H(t) = \chi(1, t)$ y haciendo uso, nuevamente, del inciso (iii) del Teorema A.1 conseguimos

$$\phi_U(t) = \exp \left\{ - \int_{(0, \infty)} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} e^{itx} F^{*n}(dx) \right\}.$$

Por lo tanto, gracias al Teorema de convergencia monótona aplicado a la ecuación (3.6) y a la unicidad de la función característica concluimos

$$\lim_{q \rightarrow 1} \frac{1}{1 - \chi(q, 0)} \mathbb{P}(\bar{S}_{\Gamma_p} \in dz) = U(dz).$$

Un procedimiento completamente análogo nos otorga

$$\lim_{q \rightarrow 1} \frac{1}{1 - \hat{\chi}(q, 0)} \mathbb{P}(\bar{S}_{\Gamma_p} \in dz) = \hat{U}(dz).$$

Por lo tanto,

$$\lim_{q \rightarrow 1} \frac{1}{1 - q} \mathbb{E} \left[\mathbf{1}_{\{S_{\Gamma_p} > y - x\}} \mathbf{1}_{\{\bar{S}_{\Gamma_p} < y\}} \right] = \int_0^y \int_0^{x-y+z} \hat{U}(dw) U(dz) = \int_0^y V(x - y + z) U(dz),$$

lo que concluye la prueba del primer inciso.

Para demostrar el segundo inciso sabemos, por el Teorema elemental de renovación (véase capítulo 3 sección 10 de Resnick [17]), que

$$\frac{1}{x^3} (V(x)^2 + V(x)) \longrightarrow 0 \quad \text{cuando } x \longrightarrow \infty.$$

Por ello únicamente nos concentramos en el primer miembro de $K(x)$, i.e.

$$\begin{aligned} \frac{2}{x^3} \int_0^x \int_0^y V(x - y + z) U(dz) \hat{U}(dy) &\leq \frac{2}{x^3} \int_0^x \int_0^y V(x + z) U(dz) \hat{U}(dy) \\ &\leq \frac{2}{x^3} \int_0^x V(2x) \int_0^x U(y) \hat{U}(dy) \\ &\leq \frac{2}{x^3} V(2x) U(x) \hat{U}(x) \end{aligned}$$

Debido a que el límite de un producto es el producto de los límites (cuando estos existen), al aplicar el Teorema elemental de renovación a cada componente vemos

$$4 \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{V(2x)}{2x} \frac{U(x)}{x} \frac{\widehat{U}(x)}{x} = \frac{4}{b^+(b^-)^2} < \infty,$$

en otras palabras, para x suficientemente grande, digamos $x > N$, la función $V(2x)U(x)\widehat{U}(x)$ puede acotarse por una función de la forma C_1x^3 , con $C_1 \in \mathbb{R}$. Por otro lado, la monotonía de las funciones de renovación nos permite ver que

$$V(2x)U(x)\widehat{U}(x) \leq V(2N)U(N)\widehat{U}(N), \quad \text{para } x < N.$$

Por lo tanto existe una C tal que $K(x) \leq C(x+1)^3$.

Ahora deseamos una aproximación más fina. Notemos que los últimos dos términos de $K(x)$ se comportan como $o(x^3)$, por ello nos concentramos únicamente en el primero, i.e.

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x^3} K(x) = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2}{x^3} \int_0^x \int_0^y V(x-y+z)U(dz)\widehat{U}(dy).$$

Gracias al Teorema elemental de renovación sabemos que $\lim_{x \rightarrow \infty} V(x)/x = 1/b^-$. Es decir, para toda $\epsilon > 0$ existe una $N \in \mathbb{R}$ tal que si $x > N$ se tiene que $|V(x)/x - 1/b^-| < \epsilon$. Entonces, para x suficientemente grande existe $N' \in \mathbb{R}$ tal que $x - y + N' \geq N$,

$$\begin{aligned} & \frac{1}{x^3} \int_0^x \int_0^y V(x-y+z)U(dz)\widehat{U}(dy) \\ &= \frac{1}{x^3} \int_0^x \left(\int_0^{N'} V(x-y+z)U(dz) + \int_{N'}^y V(x-y+z)U(dz) \right) \widehat{U}(dy) \\ &\approx \frac{1}{x^3} \int_0^x \left(\int_0^{N'} V(x-y+z)U(dz) + \frac{1}{b^-} \int_{N'}^y (x-y+z)U(dz) \right) \widehat{U}(dy), \end{aligned}$$

observemos que el primer sumando se puede acotar por arriba por

$$\frac{1}{x^3} \int_0^x V(x-y+N')U(N')\widehat{U}(dy) \leq \frac{1}{x^3} V(x+N')U(N')\widehat{U}(x)$$

al notar que $V(x+N')U(N')\widehat{U}(x)$ es del orden de x^2 , deducimos que cuando $x \rightarrow \infty$ el primer sumando tiende a cero. Por lo tanto

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \int_0^x \int_0^y V(x-y+z)U(dz)\widehat{U}(dy) = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x^3 b^-} \int_0^x \int_{N'}^y (x-y+z)U(dz)\widehat{U}(dy).$$

Con el fin de hacer las operaciones más simples probaremos la siguiente igualdad.

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x^3 b^-} \int_0^x \int_{N'}^y (x-y+z)U(dz)\widehat{U}(dy) = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x^3 b^-} \int_0^x \int_0^y (x-y+z)U(dz)\widehat{U}(dy).$$

Para verificarla basta notar que

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x^3 b^-} \int_0^x \int_0^{N'} (x-y+z)U(dz)\widehat{U}(dy) = 0, \quad (3.7)$$

lo cual es claro pues

$$\int_0^x \int_0^{N'} (x-y+z)U(dz)\widehat{U}(dy) \leq (x+N') \int_0^x \int_0^{N'} U(dz)\widehat{U}(dy) = (x+N')U(N')\widehat{U}(x),$$

y la última expresión es del orden de x^2 , lo que implica que (3.7) es cierta. Por ende

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2}{x^3} \int_0^x \int_0^y V(x-y+z)U(dz)\widehat{U}(dy) = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2}{x^3 b^-} \int_0^x \int_0^y (x-y+z)U(dz)\widehat{U}(dy).$$

Los comentarios anteriores nos permiten ver que

$$\begin{aligned} \frac{1}{x^3} K(x) &\approx \frac{2}{x^3} \int_0^x \int_0^y \frac{x-y+z}{b^-} U(dz)\widehat{U}(dy) \\ &= \frac{2}{x^3 b^-} \int_0^x \int_0^y (x-y+z)U(dz)\widehat{U}(dy) \\ &= \frac{2}{x^3 b^-} \int_0^x \left((x-y)U(y) + \int_0^y zU(dz) \right) \widehat{U}(dy). \end{aligned}$$

Usando integración por partes en el segundo sumando, resumimos la cadena de igualdades como

$$\begin{aligned} \frac{1}{x^3} K(x) &\approx \frac{2}{x^3 b^-} \int_0^x \left((x-y)U(y) + yU(y) - \int_0^y U(z)dz \right) \widehat{U}(dy) \\ &= \frac{2}{x^3 b^-} \left(\int_0^x xU(y)\widehat{U}(dy) - \int_0^x \int_0^y U(z)dz\widehat{U}(dy) \right) \\ &= \frac{2}{b^-} \left(\frac{1}{x^2} \int_0^x U(y)\widehat{U}(dy) - \frac{1}{x^3} \int_0^x \int_0^y U(z)dz\widehat{U}(dy) \right). \end{aligned} \quad (3.8)$$

Calcularemos el comportamiento asintótico de cada sumando de (3.8) por separado. Para el primer término deseamos obtener

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x^2} \int_0^x U(y)\widehat{U}(dy) = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{d}{dx} \int_0^x U(y)\widehat{U}(dy)}{2x}, \quad \text{casi dondequiera,} \quad (3.9)$$

lo anterior será válido si $\int_0^x U(y)\widehat{U}(dy)$ es diferenciable. Para demostrar que es cierto debemos verificar que

1. $\limsup_{h \downarrow 0} \frac{1}{h} \int_x^{x+h} U(y)\widehat{U}(dy) < \infty.$
2. $\limsup_{h \downarrow 0} \frac{1}{h} \int_x^{x+h} U(y)\widehat{U}(dy) = \liminf_{h \downarrow 0} \frac{1}{h} \int_{x-h}^x U(y)\widehat{U}(dy).$

En efecto, gracias al Lema de Fatou y al hecho que toda función monótona definida en un intervalo posee derivada finita casi dondequiera (véase capítulo 9, sección 31 de Kolmogorov y Fomin [14]), se sigue para casi toda $x \in \mathbb{R}$.

- a) $\limsup_{h \downarrow 0} \frac{1}{h} \int_x^{x+h} U(y)\widehat{U}(dy) \leq \limsup_{h \downarrow 0} U(x+h) \cdot \limsup_{h \downarrow 0} \frac{1}{h} \int_x^{x+h} \widehat{U}(dy) \leq U(x) \cdot \widehat{U}'(x)$
- b) $\liminf_{h \downarrow 0} \frac{1}{h} \int_{x-h}^x U(y)\widehat{U}(dy) \geq \liminf_{h \downarrow 0} U(x-h) \cdot \liminf_{h \downarrow 0} \frac{1}{h} \int_{x-h}^x \widehat{U}(dy) \geq U(x) \cdot \widehat{U}'(x).$

Gracias a lo anterior (3.9) es válida. Por lo tanto

$$\frac{\frac{d}{dx} \int_0^\infty U(y)\widehat{U}(dy)}{2x} = \frac{U(x)}{2x} \widehat{U}'(x)$$

Al tomar el límite cuando $x \rightarrow \infty$, el Teorema elemental de renovación nos dice, por un lado

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{U(x)}{2x} = \frac{1}{2b+}.$$

Por otro lado, también nos dice que $\widehat{U}(x)$ es asintóticamente lineal, i.e $\lim_{x \rightarrow \infty} \widehat{U}(x)/x = 1/b^-$. Por ende, su derivada (la cual existe casi dondequiera), satisfice

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \widehat{U}'(x) = \frac{1}{b^-}.$$

Colocando las piezas en el orden adecuado concluimos

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{U(x)}{2x} \widehat{U}'(x) = \frac{1}{2b+b^-}. \quad (3.10)$$

Para el segundo sumando, tomando x suficiente grande observamos

$$\begin{aligned} \frac{1}{x^3} \int_0^x \int_0^y U(z) dz \widehat{U}(dy) &= \frac{1}{x^3} \int_0^x \int_z^x \widehat{U}(dy) U(z) dz \\ &= \frac{1}{x^3} \int_0^x (\widehat{U}(x) - \widehat{U}(z)) U(z) dz \\ &= \frac{1}{x^3} \widehat{U}(x) \int_0^x U(z) dz - \frac{1}{x^3} \int_0^x \widehat{U}(z) U(z) dz \end{aligned}$$

Tomando límites, invocando el Teorema elemental de renovación y aplicando la regla de L'hospital (en la tercera igualdad), las siguientes igualdades son ciertas casi dondequiera

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{x^3} \widehat{U}(x) \int_0^x U(z) dz - \frac{1}{x^3} \int_0^x \widehat{U}(z) U(z) dz \right) &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x^3} \widehat{U}(x) \int_0^x U(z) dz - \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x^3} \int_0^x \widehat{U}(z) U(z) dz \\ &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x^2 b^-} \int_0^x U(z) dz - \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x^3} \int_0^x \widehat{U}(z) U(z) dz \\ &= \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{U(x)}{2x b^-} - \frac{\widehat{U}(x) U(x)}{3x^2} \right) \\ &= \frac{1}{2b+b^-} - \frac{1}{3b+b^-} \\ &= \frac{1}{6b+b^-}. \end{aligned} \quad (3.11)$$

Para concluir tomamos el límite cuando $x \rightarrow \infty$ en la ecuación (3.8) y usamos las estimaciones (3.10) y (3.11). Es decir

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x^3} K(x) = \frac{2}{3b+(b^-)^2}$$

Denotemos por $I(k, n)$ al conjunto de k -eadas no decrecientes que toman valores en $\{1, \dots, n\}$. Por ejemplo

$$\{(1, 2, \dots, k), (2, 3, \dots, k+1), \dots, (n-k+1, n-k, \dots, n)\} \subset I(k, n)$$

Para una sucesión no negativa $\{a_i, i = 1, 2, \dots, n\}$ consideramos $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_k) \in I(k, n)$. Denotamos por

$$a_\alpha = \prod_{i=1}^k a_{\alpha_i}.$$

Recordemos el Teorema multinomial, el cual establece la siguiente igualdad

$$\left(\sum_{i=1}^n a_i \right)^k = \sum_{r_1+r_2+\dots+r_n=k} \binom{k}{r_1, r_2, \dots, r_n} \prod_{1 \leq i \leq n} a_i^{r_i}.$$

Con base en lo anterior obtenemos

$$\left(\sum_{i=1}^n a_i \right)^k = \sum_{i=1}^n a_i^k + k \sum_{1 \leq i_1 \neq i_2 \leq n} a_{i_1}^{k-1} a_{i_2} + \cdots + k! \sum_{1 \leq i_1 \neq i_2 \neq i_3 \cdots \neq i_k \leq n} a_{i_1} a_{i_2} \cdots a_{i_k} \leq k! \sum_{\alpha \in I(k,n)} a_\alpha.$$

Si tomamos $a_i = \mathbb{1}_{\{S_i > -x\}}$ y $n = \gamma_1 - 1$ vemos

$$\begin{aligned} \mathbb{E} [v(x)^k] &= \mathbb{E} \left[\left(\sum_{i=1}^{\gamma_1-1} \mathbb{1}_{\{S_{\gamma_1} - S_{\gamma_1-i} < x + S_{\gamma_1}\}} \right)^k \right] \\ &= \mathbb{E} \left[\left(\sum_{i=1}^{\gamma_1-1} \mathbb{1}_{\{S_{\gamma_1-i} > -x\}} \right)^k \right] = \mathbb{E} \left[\left(\sum_{i=1}^{\gamma_1-1} \mathbb{1}_{\{S_i > -x\}} \right)^k \right] \\ &\leq k! \mathbb{E} \left[\sum_{\alpha \in I(k,n)} a_\alpha \right]. \end{aligned} \quad (3.12)$$

Recordando la ecuación (3.3) vemos que

$$\mathbb{E} \left[\sum_{i=j}^n a_i \middle| \mathcal{F}_j \right] = \mathbb{1}_{\{\gamma > j\}} V(x, -S_j).$$

Además, al estar ordenada la sucesión en $I(k, n)$ sabemos que $a_i \in \mathcal{F}_i$. Observemos que si tomamos a_α con $\alpha \in I(k, n)$, podemos partirlo fijándonos en dos componentes. El primero una $k-1$ -eada (que toma valores en $\{1, \dots, n\}$) y el segundo, un valor $a_i > a_{\alpha_{k-1}}$. En otras palabras

$$\sum_{\alpha \in (k,n)} a_\alpha = \sum_{\alpha \in I(k-1,n)} a_\alpha \left(\sum_{i=\alpha_{k-1}}^n a_i \right).$$

Entonces, haciendo uso de la igualdad anterior

$$\begin{aligned} \mathbb{E} \left[\sum_{\alpha \in I(k,n)} a_\alpha \right] &= \mathbb{E} \left[\sum_{\alpha \in I(k-1,n)} a_\alpha \left(\sum_{i=\alpha_{k-1}}^n a_i \right) \right] \\ &= \mathbb{E} \left[\mathbb{E} \left[\sum_{\alpha \in I(k-1,n)} a_\alpha \left(\sum_{i=\alpha_{k-1}}^n a_i \right) \middle| \mathcal{F}_{\alpha_{k-1}} \right] \right] \\ &= \mathbb{E} \left[\sum_{\alpha \in I(k-1,n)} a_\alpha V(x, -S_{\alpha_{k-1}}) \right], \end{aligned}$$

usando (3.3) en la última igualdad. Notando que por definición, $V(x, -S_{\alpha_{k-1}}) \leq W(x)$, la cadena de igualdades implica

$$\mathbb{E} \left[\sum_{\alpha \in I(k,n)} a_\alpha \right] \leq W(x) \mathbb{E} \left[\sum_{\alpha \in I(k-1,n)} a_\alpha \right].$$

Repetiendo el procedimiento $k-2$ veces, obtenemos

$$\mathbb{E} \left[\sum_{\alpha \in I(k,n)} a_\alpha \right] \leq W(x)^{k-1} \mathbb{E} \left[\sum_{\alpha \in I(1,n)} a_\alpha \right] = W(x)^{k-1} \mathbb{E} \left[\sum_{i=1}^{\gamma-1} \mathbb{1}_{\{S_i > -x\}} \right] = W(x)^{k-1} V(x).$$

Finalmente, sustituyendo la expresión anterior en la ecuación (3.12) se concluye el lema. \square

La función W juega un papel importante en la estimación de los momentos de v . El siguiente lema tiene como objetivo acotar W , para poder simplificar las estimaciones

Lema 3.6. Recordando que $W(x) = \sup \left\{ \int_0^y V(x-y+z)U(dz) : 0 \leq y \leq x \right\}$, se tiene

(i) Para una $c < \infty$, $(x+1)^{-2}W(x) \leq c$, para toda $x \geq 0$.

(ii) Más aún $x^{-2}W(x) \rightarrow 1$ cuando $x \rightarrow \infty$.

Demostración. Para la primera parte observemos que

$$W(x) \leq V(2x)U(x),$$

invocando el Teorema de renovación elemental y recordando que $2b^+b^- = 1$ obtenemos

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{W(x)}{x^2} \leq \lim_{x \rightarrow \infty} 2 \frac{V(2x)}{2x} \frac{U(x)}{x} = 2 \frac{1}{b^-b^+} = 4.$$

El comentario anterior nos dice que $W(x)$ es asintóticamente del orden de x^2 . Por otro lado, recordando la definición de W vemos que podemos elegir a una c tal que $W(x) \leq c(x+1)^2$, lo que prueba el primer inciso.

Para el segundo inciso lo primero que observamos es

$$\frac{1}{x^2}W(x) = \frac{1}{x^2} \sup_{0 \leq y \leq x} \int_0^y V(x-y+z)U(dz) \geq \frac{1}{x^2} \int_0^x V(z)U(dz),$$

gracias al desarrollo del inciso (ii) del Lema 3.5 y a que $2b^+b^- = 1$ se sigue que

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x^2}W(x) \geq \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x^2} \int_0^x V(z)U(dz) = \frac{1}{2b^+b^-} = 1.$$

Para obtener la otra desigualdad notamos que para $x > 1$ la función $x^{-2}W(x) \leq 4$ es positiva y acotada (gracias al inciso (i)). Por ello se puede acotar por algún término de la siguiente forma

$$x^{-2} \sup \left\{ \int_0^y V(x-y+z)U(dz) : (\eta - \epsilon)x \leq y \leq \eta x \right\},$$

para toda $\epsilon > 0$ y para alguna $\eta \in (0, 1]$. Por monotonía tenemos

$$\frac{1}{x^2} \sup_{(\eta - \epsilon)x \leq y \leq \eta x} \int_0^y V(x-y+z)U(dz) \leq \frac{1}{x^2} \int_0^{\eta x} V(x - (\eta - \epsilon)x + z)U(dz).$$

Procediendo de manera análoga que en el inciso (ii) del Lema 3.5 podemos ver

$$\begin{aligned} \frac{1}{x^2} \int_0^{\eta x} V(x - (\eta - \epsilon)x + z)U(dz) &\approx \frac{1}{x^2} \int_0^{\eta x} \frac{x(1 - \eta + \epsilon) + z}{b^{-1}} U(dz) \\ &= \frac{1}{x^2 b^-} \left(x(1 - \eta + \epsilon)U(\eta x) + \int_0^{\eta x} zU(dz) \right) \\ &= \frac{1}{x^2 b^-} \left(x(1 - \eta + \epsilon)U(\eta x) + \eta x U(\eta x) - \int_0^{\eta x} U(z)dz \right) \\ &= \frac{1}{x^2 b^-} \left(x(1 - \eta + \epsilon)U(\eta x) + \eta x U(\eta x) - \int_0^{\eta x} U(z)dz \right) \\ &= (1 + \epsilon) \frac{U(\eta x)}{x b^-} - \frac{1}{x^2 b^-} \int_0^{\eta x} U(z)dz. \end{aligned} \quad (3.13)$$

Tomando límites en (3.13), aplicando el Teorema elemental de renovación y la regla L'hôpital, observamos

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow \infty} x^{-2} \sup \left\{ \int_0^y V(x-y+z)U(dz) : (\eta - \epsilon) \leq y \leq \eta x \right\} &\leq (1 + \epsilon) \frac{\eta}{b^- b^+} - \frac{\eta^2}{b^-} \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{U(x)}{2x} \\ &= (1 + \epsilon) \frac{\eta}{b^- b^+} - \frac{\eta^2}{2b^- b^+} \\ &= \frac{2(1 + \epsilon)\eta - \eta^2}{2b^- b^+}. \end{aligned}$$

Por último recordemos que $2b^- b^+ = 1$ y notemos que, para $\eta \in (0, 1]$, $\eta^2 \leq \eta$. Entonces la función $f(\eta) := 2(1 + \epsilon)\eta - \eta^2$ es creciente en $(0, 1]$. Por lo tanto

$$f(\eta) \leq f(1) = 1 + 2\epsilon, \quad \eta \in (0, 1],$$

concluyendo así el lema. □

Lema 3.7. *Para $d < 1$ existe una κ , independiente de x , tal que*

$$\mathbb{E} \left[\exp \left\{ \theta(v(x) - V(x)) - \theta^2 \left(\frac{K(x) + \kappa(x+1)^3}{2} \right) \right\} \right] \leq 1,$$

donde θ satisface $0 \leq \theta W(x) \leq d$.

Demostración. Tomemos C tal que $C > \frac{V(x)}{x+1}$ para toda $x \geq 0$. La cual existe gracias al Teorema elemental de renovación y haciendo uso de argumentos similares a los del inciso (ii) del Lema 3.5. Sea C' tal que, utilizando la c del inciso (i) del Lema 3.6, se satisface $d = \frac{C'}{C'+c}$. Como primer paso, observamos

$$C' = \frac{cd}{1-d}.$$

Debido a que $c > (x+1)^{-2}W(x)$ las siguientes desigualdades son válidas

$$C' = \frac{cd}{1-d} \geq \frac{W(x)}{(x+1)^2} \frac{d}{1-d} \geq \frac{W(x)}{(x+1)^2} \frac{\theta W(x)}{1-\theta W(x)}.$$

Ahora, recordando el inciso (iii) del Lema 3.5 podemos ver

$$\begin{aligned} \sum_{k=3}^{\infty} \frac{\theta^k}{k!} \mathbb{E} [v(x)^k] &\leq \sum_{k=3}^{\infty} \frac{\theta^k}{k!} [k!V(x)W(x)^{k-1}] \\ &= \theta V(x) \sum_{k=3}^{\infty} \theta^{k-1} W(x)^{k-1} \\ &= \theta V(x) \left(\frac{1}{1-\theta W(x)} - 1 - \theta W(x) \right), \end{aligned} \tag{3.14}$$

donde la última igualdad se debe a la hipótesis. Notando que

$$\frac{1}{1-\theta W(x)} - (1 + \theta W(x)) = \frac{1}{1-\theta W(x)} (1 - (1 - \theta^2 W(x)^2)) = \frac{\theta^2 W(x)^2}{1-\theta W(x)}$$

y recordando que C y C' son cotas superiores, la ecuación (3.14) se convierte en

$$\begin{aligned} \sum_{k=3}^{\infty} \frac{\theta^k}{k!} \mathbb{E} [v(x)^k] &\leq \frac{\theta^3 V(x)W(x)^2}{1-\theta W(x)} \\ &= \theta^2 (1+x)^3 \left(\frac{V(x)}{1+x} \right) \left(\frac{\theta W(x)}{1-\theta W(x)} \frac{W(x)}{(1+x)^2} \right) \\ &\leq \theta^2 (1+x)^3 C C'. \end{aligned} \tag{3.15}$$

Utilizando la representación de series de Taylor para la función exponencial y el Teorema de Tonelli, vemos que

$$\begin{aligned}
\mathbb{E} [\exp \{\theta v(x)\}] &= \mathbb{E} \left[\sum_{k=0}^{\infty} \frac{\theta^k v(x)^k}{k!} \right] \\
&= \sum_{k=0}^{\infty} \mathbb{E} \left[\frac{\theta^k v(x)^k}{k!} \right] \\
&= 1 + \theta V(x) + \frac{\theta^2}{2} \mathbb{E}[v(x)^2] + \sum_{k=3}^{\infty} \frac{\theta^k}{k!} \mathbb{E}[v(x)^k] \\
&\leq 1 + \theta V(x) + \frac{\theta^2}{2} (K(x) + V(x)^2) + \theta^2(1+x)^3 CC',
\end{aligned}$$

donde la última desigualdad se obtuvo usando (3.15) y la primera parte del Lema 3.5. Ahora, es claro que

$$1 + \theta V(x) + \frac{\theta^2}{2} V(x)^2 \leq \exp \{\theta V(x)\}$$

entonces

$$\mathbb{E} [\exp \{\theta v(x)\}] \leq \exp \{\theta V(x)\} + \frac{\theta^2}{2} (K(x) + (1+x)^3 2CC').$$

Para finalizar usamos la siguiente propiedad de la función exponencial. Sean $u, w \geq 0$, entonces

$$e^u + w = e^u(1 + we^{-u}) \leq e^u(1 + w) \leq e^{u+w}.$$

Llamando $\kappa = 2CC'$ y tomando $u = V(x)$ y $w = \frac{\theta^2}{2} (K(x) + \kappa(1+x)^3)$ se sigue el resultado. \square

Lema 3.8. Sean $Y_{i,k}$ variables aleatorias idénticamente distribuidas, con media μ . Suponga, además, que $Y_{i,k}$ son independientes cuando i varía y k se mantiene fijo. Si $\liminf_k \frac{n(k+1)}{n(k)} > 1$ entonces, para toda $\epsilon > 0$,

$$\sum_k \mathbb{P} \left(\left| \sum_{i=1}^{n(k)} (Y_{i,k} - \mu) \right| > n(k)\epsilon \right) < \infty.$$

Para demostrar este lema, haremos uso de dos resultados de Asmussen y Hering [1]

Proposición 3.9. Sea $\{n(k)\}_{k \geq 1}$ una sucesión no negativa tal que $\liminf \frac{n(k+1)}{n(k)} > 1$. Entonces

$$(i) \sum_{k=0}^{\infty} n(k) \mathbb{1}_{\{x > n(k)\}} = O(x)$$

$$(ii) \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{n(k)} \mathbb{1}_{\{x \leq n(k)\}} = O\left(\frac{1}{x}\right)$$

Demostración. Definamos $N(x) := \sup \{k : n(k) < x\}$, gracias a la hipótesis, existe $M \in \mathbb{N}$ tal que para toda $k > M$ se satisface $\frac{n(k+1)}{n(k)} \geq 1 + \epsilon$, para alguna $\epsilon > 0$. Por otro lado, para $k \leq M$ se tiene que $C := \sup_{k \leq M} n(k) < \infty$. Tomemos $r \in \mathbb{N}$, $k > M$ y notemos que

$$\frac{n(k+r)}{n(k)} = \underbrace{\frac{n(k+r)}{n(k+r-1)} \frac{n(k+r-1)}{n(k+r-2)} \dots \frac{n(k+1)}{n(k)}}_{r \text{ términos}} \geq (1 + \epsilon)^r$$

lo que implica $\frac{n(k)}{n(k+r)} \geq (1+\epsilon)^{-r}$. Supongamos que $N(x) > M$ y observemos

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^{\infty} n(k) \mathbb{1}_{\{x > n(k)\}} &= \sum_{k=0}^{N(x)} n(k) = \sum_{k=0}^M n(k) + \sum_{k=M+1}^{N(x)} n(k) \\ &= n(N(x)) \left(\sum_{k=0}^M \frac{n(k)}{n(N(x))} + \sum_{k=M+1}^{N(x)} \frac{n(k)}{n(N(x))} \right) \\ &\leq x \left((M+1)C + \sum_{k=M+1}^{N(x)} (1+\epsilon)^{k-N(x)} \right) \\ &\leq x \left((M+1)C + \sum_{k=0}^{\infty} (1+\epsilon)^{-k} \right) \\ &= x \left((M+1)C + \frac{1}{\epsilon} \right). \end{aligned}$$

Notemos que el caso $N(x) < M$ se sigue del anterior, pues acotamos la suma por un número finito. Con esto probamos el primer inciso.

Para el segundo inciso supongamos nuevamente que $N(x) > M$, entonces

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{n(k)} \mathbb{1}_{\{x \leq n(k)\}} &= \sum_{k=N(x)+1}^{\infty} \frac{1}{n(k)} \\ &= \frac{1}{n(N(x)+1)} \sum_{k=N(x)+1}^{\infty} \frac{n(N(x)+1)}{n(k)} \\ &\leq \frac{1}{x} \sum_{k=N(x)+1}^{\infty} (1+\epsilon)^{N(x)+1-k} \leq \frac{1}{\epsilon x}. \end{aligned}$$

Si suponemos $N(x) < M$ entonces solo consideramos un número finito de sumandos, probando así la proposición. \square

Proposición 3.10. Sean X_1, \dots, X_n variables aleatorias independientes de media cero, tales que $|X_k|$ se encuentra dominado estocásticamente por una distribución integrable Q con soporte en $[0, \infty)$. i.e

$$\mathbb{P}(|X_k| > t) \leq 1 - Q(t) \quad y \quad \int_0^{\infty} tQ(dt) < \infty.$$

Defina $\bar{X}_n := \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n X_k$. Entonces

$$\mathbb{P}(|\bar{X}_n| > \delta) \leq c_1 n \int_n^{\infty} dQ(x) + c_2 \frac{1}{n} \int_0^n x^2 dQ(x),$$

donde las constantes c_1 y c_2 no dependen de n .

Demostración. Definamos a

$$Y_k = \begin{cases} -n, & X_k \leq -n, \\ X_k, & -n < X_k < n, \\ n, & X_k \geq n. \end{cases}$$

Denotamos $\bar{Y}_n = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n (Y_k - \mu_k)$, con $\mathbb{E}[Y_k] = \mu_k$. Ahora, recordando que $\mathbb{E}[X_k] = 0$ obtenemos

$$|\mu_k| = |\mathbb{E}[Y_k] - \mathbb{E}[X_k]| \leq \mathbb{E}[|X_k| \mathbb{1}_{\{|X_k| > n\}}]$$

Observando que la función $x\mathbb{1}_{\{x>n\}}$ es no decreciente en $[0, \infty)$ y recordando que $|X_k|$ se encuentra dominada estocásticamente por una distribución Q , obtenemos

$$|\mu_k| \leq \mathbb{E}[|X_k|\mathbb{1}_{\{|X_k|>n\}}] \leq \int_0^\infty x\mathbb{1}_{\{x>n\}}dQ(x) = \int_n^\infty xdQ(x) \leq \frac{\delta}{2}.$$

Gracias a la desigualdad del triángulo vemos

$$\frac{|\mu_1 + \cdots + \mu_n|}{n} \leq \frac{|\mu_1| + \cdots + |\mu_n|}{n} \leq \frac{\delta}{2}.$$

Antes de continuar, necesitamos verificar la siguiente contención de conjuntos

$$\{|\bar{X}_n| > \delta\} \subseteq \left\{ \bigcup_{k=1}^n \{X_k \neq Y_k\} \right\} \cup \left\{ |\bar{Y}_n| > \frac{\delta}{2} \right\}. \quad (3.16)$$

Observamos que lo anterior es equivalente a

$$\{|\bar{X}_n| \leq \delta\} \supseteq \left\{ \bigcap_{k=1}^n \{X_k = Y_k\} \right\} \cap \left\{ |\bar{Y}_n| \leq \frac{\delta}{2} \right\},$$

para probarlo notemos

$$\begin{aligned} \left\{ \bigcap_{k=1}^n \{X_k = Y_k\} \right\} \cap \left\{ |\bar{Y}_n| \leq \frac{\delta}{2} \right\} &= \left\{ \bigcap_{k=1}^n \{X_k = Y_k\} \right\} \cap \left\{ \frac{1}{n} |Y_1 - \mu_1 + \cdots + Y_n - \mu_n| \leq \frac{\delta}{2} \right\} \\ &\subseteq \left\{ \bigcap_{k=1}^n \{X_k = Y_k\} \right\} \cap \left\{ \frac{1}{n} (|Y_1 + \cdots + Y_n| - |\mu_1 + \cdots + \mu_n|) \leq \frac{\delta}{2} \right\} \\ &\subseteq \left\{ \frac{1}{n} (|X_1 + \cdots + X_n| - |\mu_1 + \cdots + \mu_n|) \leq \frac{\delta}{2} \right\} \\ &\subseteq \{|\bar{X}_n| \leq \delta\}, \end{aligned}$$

de donde se sigue que (3.16) es válida. Entonces

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(|\bar{X}_n| > \delta) &\leq \mathbb{P}\left(\bigcup_{k=1}^n \{X_k \neq Y_k\}\right) + \mathbb{P}\left(|\bar{Y}_n| > \frac{\delta}{2}\right) \\ &\leq \sum_{k=1}^n \mathbb{P}(X_k \neq Y_k) + 4 \frac{\text{Var}(\bar{Y}_n)}{\delta^2} \\ &= \sum_{k=1}^n \mathbb{P}(|X_k| > n) + 4 \frac{\text{Var}(\bar{Y}_n)}{\delta^2}. \end{aligned} \quad (3.17)$$

Notemos que

$$\begin{aligned} \text{Var}(\bar{Y}_n) &= \frac{1}{n^2} \text{Var}(Y_1 + Y_2 + \cdots + Y_n - (\mu_1 + \cdots + \mu_n)) = \frac{1}{n^2} \text{Var}(Y_1 + \cdots + Y_n) \\ &= \frac{1}{n^2} \sum_{k=1}^n \text{Var}(Y_k) = \frac{1}{n^2} \sum_{k=1}^n (\mathbb{E}[Y_k^2] - \mu_k^2) \leq \frac{1}{n^2} \sum_{k=1}^n \mathbb{E}[Y_k^2]. \end{aligned}$$

Al sustituir el desarrollo anterior en (3.17) obtenemos

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(|\bar{X}_n| > \delta) &\leq \sum_{k=1}^n \left(\mathbb{P}(|X_k| > n) + \frac{4}{n^2\delta^2} \mathbb{E}[Y_k^2] \right) \\
&\leq n \int_n^\infty dQ(x) + \frac{4}{n^2\delta^2} \int_0^\infty (n \wedge x)^2 dQ(x) \\
&\leq n \int_n^\infty dQ(x) + \frac{4}{n\delta^2} \int_0^\infty (n \wedge x)^2 dQ(x) \\
&= n \int_n^\infty dQ(x) + \frac{4}{n\delta^2} \int_0^n x^2 dQ(x) + \frac{4n}{\delta^2} \int_n^\infty dQ(x)
\end{aligned}$$

Identificando $c_1 = 1 + \frac{4}{\delta^2}$ y $c_2 = \frac{4}{\delta^2}$, se sigue el resultado. \square

Demostración de Lema 3.8. Sin pérdida de generalidad supondremos que $\mathbb{E}[Y_{i,k}] = 0$. Con el fin de mantener una notación similar a la empleada en las proposiciones anteriores, denotamos por

$$\bar{Y}_k := \frac{Y_{1,k} + Y_{2,k} + \cdots + Y_{n(k),k}}{n(k)}.$$

Notemos que para k fijo, \bar{Y}_k es la suma de variables aleatorias independientes. La hipótesis de que $Y_{i,k}$ sean idénticamente distribuidas e integrables implica que $Y_{i,k}$ está dominada estocásticamente por la distribución de $|Y_{i,k}|$; la cual juega el papel de Q al aplicar la Proposición 3.10. Por ende, nuestro problema se resume en mostrar $\sum_{k=1}^\infty \mathbb{P}(|\bar{Y}_k| > \epsilon) < \infty$. En efecto, gracias a la Proposición 3.10, al Teorema de Tonelli y a la Proposición 3.9 se sigue

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^\infty \mathbb{P}(|\bar{Y}_k| > \epsilon) &\leq \sum_{k=1}^\infty \left(c_1 n(k) \int_{n(k)}^\infty dQ(x) + c_2 \frac{1}{n(k)} \int_0^{n(k)} x^2 dQ(x) \right) \\
&= \int_0^\infty \left(c_1 \sum_{k=1}^\infty n(k) \mathbb{1}_{\{x > n(k)\}} + c_2 x^2 \sum_{k=1}^\infty \frac{1}{n(k)} \mathbb{1}_{\{x \leq n(k)\}} \right) dQ(x) \\
&= \int_0^\infty \left(c_1 O(x) + c_2 x^2 O\left(\frac{1}{x}\right) \right) dQ(x) \\
&= \int_0^\infty Cx dQ(x) < \infty.
\end{aligned}$$

La finitud en la última ecuación se da por la hipótesis de integrabilidad de Q , finalizando así el lema. \square

El Lema 3.8 es crucial en la demostración tanto de la cota superior como de la cota inferior y puede apreciarse que posee una forma familiar

$$\mathbb{P} \left(\limsup_{k \rightarrow \infty} \left| \frac{\sum_{i=1}^{n(k)} Y_{i,k}}{n(k)} - \mu \right| > \epsilon \right) = 0 \quad \implies \quad \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{\sum_{i=1}^{n(k)} Y_{i,k}}{n(k)} = \mu \quad c.s.$$

En otras palabras, el Lema 3.8 juega un papel similar a la Ley fuerte de grandes números cuando el número de sumandos es una sucesión $n(k)$ que satisface $\liminf n(k+1)/n(k) > 1$.

3.3. La cota superior

En esta sección desarrollamos la cota superior del comportamiento asintótico de los tiempos de ocupación para la caminata aleatoria condicionada a ser positiva. La idea es trabajar con supermartingalas positivas, por ello, recordamos dos resultados clásicos.

Proposición 3.11. Supermartingalas acopladas Para $i = 1, 2$ consideramos $\{(X_n^{(i)}, \mathcal{F}_n), n \geq 0\}$ supermartingalas positivas. Sea ν un tiempo de paro tal que en $[\nu < \infty]$ tenemos $X_\nu^{(1)}(\omega) \geq X_\nu^{(2)}(\omega)$. Definamos

$$X_n(\omega) = \begin{cases} X_n^{(1)}(\omega), & \text{si } n < \nu(\omega), \\ X_n^{(2)}(\omega), & \text{si } n \geq \nu(\omega). \end{cases}$$

Entonces $\{(X_n, \mathcal{F}_n), n \geq 0\}$ es una supermartingala positiva llamada **supermartingala acomplada**.

Demostración. Sea $X_n := X_n^{(1)} \mathbb{1}_{\{n < \nu\}} + X_n^{(2)} \mathbb{1}_{\{n \geq \nu\}}$, entonces $X_n \in \mathcal{F}_n$. Al ser $\{(X_n^{(i)}, \mathcal{F}_n), n \geq 0\}$, para $i = 1, 2$, supermartingalas positivas entonces

$$\begin{aligned} \mathbb{E} \left[X_{n+1}^{(1)} \mathbb{1}_{\{n < \nu\}} + X_{n+1}^{(2)} \mathbb{1}_{\{n \geq \nu\}} \mid \mathcal{F}_n \right] &= \mathbb{E} \left[X_{n+1}^{(1)} \mid \mathcal{F}_n \right] \mathbb{1}_{\{n < \nu\}} + \mathbb{E} \left[X_{n+1}^{(2)} \mid \mathcal{F}_n \right] \mathbb{1}_{\{n \geq \nu\}} \\ &\leq X_n^{(1)} \mathbb{1}_{\{n < \nu\}} + X_n^{(2)} \mathbb{1}_{\{n \geq \nu\}} \\ &= X_n. \end{aligned}$$

Por hipótesis $X_n^{(1)} \geq X_n^{(2)}$ en $[\nu = n]$, luego

$$\begin{aligned} X_{n+1}^{(1)} \mathbb{1}_{\{n < \nu\}} + X_{n+1}^{(2)} \mathbb{1}_{\{n \geq \nu\}} &= X_{n+1}^{(1)} \mathbb{1}_{\{n+1 < \nu\}} + X_{n+1}^{(1)} \mathbb{1}_{\{n+1 = \nu\}} + X_{n+1}^{(2)} \mathbb{1}_{\{n \geq \nu\}} \\ &\geq X_{n+1}^{(1)} \mathbb{1}_{\{n+1 < \nu\}} + X_{n+1}^{(2)} \mathbb{1}_{\{n+1 = \nu\}} + X_{n+1}^{(2)} \mathbb{1}_{\{n \geq \nu\}} \\ &= X_{n+1}^{(1)} \mathbb{1}_{\{n+1 < \nu\}} + X_{n+1}^{(2)} \mathbb{1}_{\{n+1 \geq \nu\}} \\ &= X_{n+1}. \end{aligned}$$

Con los dos desarrollos anteriores concluimos que

$$\mathbb{E} [X_{n+1} \mid \mathcal{F}_n] \leq \mathbb{E} \left[X_{n+1}^{(1)} \mathbb{1}_{\{n < \nu\}} + X_{n+1}^{(2)} \mathbb{1}_{\{n \geq \nu\}} \mid \mathcal{F}_n \right] \leq X_n,$$

es decir, la propiedad de supermartingala se satisface. \square

Proposición 3.12. Sea $\{(X_n, \mathcal{F}_n), n \geq 0\}$ una supermartingala positiva. Entonces

(i) $\sup_{n \in \mathbb{N}} X_n < \infty$ c.s en el evento $\{X_0 < \infty\}$

(ii) $\mathbb{P} \left(\sup_{n \in \mathbb{N}} X_n \geq a \mid \mathcal{F}_0 \right) \leq \min \left\{ \frac{X_0}{a}, 1 \right\}$ para cualquier constante $a > 0$.

Demostración. Consideremos dos supermartingalas $\{(X_n^{(i)}, \mathcal{F}_n), n \geq 0\}$, para $i = 1, 2$, definidas como $X_n^{(1)} := X_n$ y $X_n^{(2)} := a$. Definimos al tiempo de paro $\nu_a = \inf \{n : X_n \geq a\}$. Debido a que $X_{\nu_a}^{(1)} \geq X_{\nu_a}^{(2)}$ en el evento $\{\nu_a < \infty\}$, somos capaces de construir a la supermartingala acoplada gracias a la Proposición 3.11, es decir

$$Y_n = \begin{cases} X_n, & \text{si } n < \nu_a, \\ a, & \text{si } n \geq \nu_a, \end{cases}$$

es una supermartingala positiva, lo que implica que $\mathbb{E}[Y_n|\mathcal{F}_0] \leq Y_0$, para $n \geq 0$. La construcción de Y_n implica que $Y_n \geq a\mathbb{1}_{\{\nu_a \leq n\}}$, observemos que

$$Y_0 = X_0\mathbb{1}_{\{0 < \nu_a\}} + a\mathbb{1}_{\{0 = \nu_a\}} = X_0\mathbb{1}_{\{X_0 < a\}} + a\mathbb{1}_{\{X_0 \geq a\}} = \min\{X_0, a\}.$$

Las observaciones anteriores nos permiten ver que

$$\begin{aligned} \min\{X_0, a\} &\geq \mathbb{E}[Y_n|\mathcal{F}_0] \\ &\geq \mathbb{E}[a\mathbb{1}_{\{\nu_a \leq n\}}|\mathcal{F}_0] \\ &= a\mathbb{P}(\nu_a \leq n|\mathcal{F}_0), \end{aligned}$$

gracias al Teorema de convergencia dominada se sigue que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{P}(\nu_a \leq n|\mathcal{F}_0) = \mathbb{P}(\nu_a < \infty) = \mathbb{P}\left(\sup_{n \in \mathbb{N}} X_n \geq a \mid \mathcal{F}_0\right) = \min\left\{\frac{X_0}{a}, 1\right\},$$

lo que prueba el segundo inciso de la proposición. Para obtener el primer inciso observemos que al integrar objetos no negativos y haciendo uso de (ii) obtenemos

$$\begin{aligned} \mathbb{E}\left[\mathbb{1}_{\{X_0 < \infty\}} \min\left\{\frac{X_0}{a}, 1\right\}\right] &\geq \mathbb{E}\left[\mathbb{1}_{\{X_0 < \infty\}} \mathbb{E}\left[\mathbb{1}_{\{\sup_{n \in \mathbb{N}} X_n \geq a\}} \mid \mathcal{F}_0\right]\right] \\ &= \mathbb{P}\left(\sup_{n \in \mathbb{N}} X_n \geq a, X_0 < \infty\right). \end{aligned}$$

Por último, es claro que

$$\mathbb{1}_{\{X_0 < \infty\}} \min\left\{\frac{X_0}{a}, 1\right\} \leq 1,$$

al aplicar el Teorema de convergencia dominada una vez más, concluimos

$$0 = \lim_{a \rightarrow \infty} \mathbb{E}\left[\mathbb{1}_{\{X_0 < \infty\}} \min\left\{\frac{X_0}{a}, 1\right\}\right] \geq \lim_{a \rightarrow \infty} \mathbb{P}\left(\sup_{n \in \mathbb{N}} X_n \geq a, X_0 < \infty\right) = \mathbb{P}\left(\sup_{n \in \mathbb{N}} X_n = \infty, X_0 < \infty\right).$$

La expresión anterior implica el primer inciso. \square

Lema 3.13 (La cota superior). *Existe una constante $U < \infty$ tal que*

$$\limsup_{x \rightarrow \infty} \frac{D(x)}{x^2 \log \log x} \leq U < \infty.$$

Demostración. La idea para demostrar este lema es construir una supermartingala positiva, aplicar la desigualdad de la Proposición 3.12 e invocar al Lema de Borel-Cantelli. Para empezar, tomemos $u > 1$, eligamos κ como en el Lema 3.7 Sea $s \in \mathbb{N}$ e introduzcamos a las variables aleatorias

$$\begin{aligned} X_s &= v_{n-s}(H_n - H_{n-s}) - V(H_n - H_{n-s}) \\ 2A_s &= K(H_n - H_{n-s}) + \kappa(H_n - H_{n-s} + 1)^3. \end{aligned}$$

Gracias al Lema 3.4 observamos

$$\sum_{s=0}^{n-1} X_s = \sum_{s=1}^n v_s(H_n - H_s) - \sum_{s=0}^{n-1} V(H_n - H_{n-s}) = D_n - \sum_{s=0}^{n-1} V(H_n - H_{n-s}). \quad (3.18)$$

Para una n fija definimos a $\mathcal{H}_r^n := \sigma(\omega_n, \omega_{n-1}, \dots, \omega_{n-r+1})$. Observemos que $H_n - H_{n-r} \in \mathcal{H}_r^n$, debido a que

$$H_n - H_{n-r} = \omega_{n-r+1}(\tau_{n-r+1}) + \dots + \omega_n(\tau_n).$$

En otras palabras, la longitud del salto $H_n - H_{n-r}$ solo depende de elementos en \mathcal{H}_r^n . También podemos ver que $v_{n-s}(\cdot) \in \mathcal{H}_r^n$ para $s = 0, \dots, r-1$. Sin embargo, gracias al Lema 3.4 se tiene que v_{n-r} es independiente de \mathcal{H}_r^n . El análisis anterior nos permite ver que $\sum_{s=0}^{r-1} (X_s - \theta A_s) \in \mathcal{H}_r^n$.

Tomemos $0 \leq \theta y \leq u^{-1}$ y veamos que el siguiente proceso es una supermartingala

$$\left(\mathbb{1}_{\{W(H_n - H_{n-r}) \leq y\}} \exp \left\{ \theta \sum_{s=0}^{r-1} (X_s - \theta A_s) \right\}, \mathcal{H}_r^n \right).$$

En efecto, las condiciones de integrabilidad y medibilidad son inmediatas, verifiquemos ahora la propiedad de supermartingala.

$$\begin{aligned} & \mathbb{E} \left[\mathbb{1}_{\{W(H_n - H_{n-r-1}) \leq y\}} \exp \left\{ \theta \sum_{s=0}^r (X_s - \theta A_s) \right\} \middle| \mathcal{H}_r^n \right] \\ &= \exp \left\{ \theta \sum_{s=0}^{r-1} (X_s - \theta A_s) \right\} \mathbb{E} \left[\mathbb{1}_{\{W(H_n - H_{n-r-1}) \leq y\}} \exp \{ \theta (X_r - \theta A_r) \} \middle| \mathcal{H}_r^n \right] \\ &\leq \exp \left\{ \theta \sum_{s=0}^{r-1} (X_s - \theta A_s) \right\} \mathbb{1}_{\{W(H_n - H_{n-r}) \leq y\}} \mathbb{E} [\exp \{ \theta (X_r - \theta A_r) \} | \mathcal{H}_r^n], \end{aligned}$$

en la última desigualdad usamos el hecho que $W(H_n - H_r)$ es creciente en r , lo que nos permite ver que $\mathbb{1}_{\{W(H_n - H_{n-r-1}) \leq y\}} \leq \mathbb{1}_{\{W(H_n - H_{n-r}) \leq y\}}$. Gracias a la independencia entre v_{n-r} y \mathcal{H}_r^n y al hecho de que $H_n - H_{n-r} \in \mathcal{H}_r^n$ podemos ver

$$f(H_n - H_{n-r}) = \mathbb{E} [\exp \{ \theta (X_r - \theta A_r) \} | \mathcal{H}_r^n].$$

Invocando al Lema 3.7 observamos que $f(x) \leq 1$ siempre y cuando $\theta W(x) < u^{-1}$, lo cual se satisface gracias a la hipótesis de $\theta y \leq u^{-1}$ y a la función indicadora en la expresión anterior. Por lo tanto

$$\mathbb{1}_{\{W(H_n - H_{n-r}) \leq y\}} \mathbb{E} [\exp \{ \theta (X_r - \theta A_r) \} | \mathcal{H}_r^n] \leq \mathbb{1}_{\{W(H_n - H_{n-r}) \leq y\}}. \quad (3.19)$$

La expresión anterior nos otorga la propiedad de supermartingala.

Para facilitar notación, denotemos por $M_r^n := \mathbb{1}_{\{W(H_n - H_{n-r}) \leq y\}} \exp \left\{ \theta \sum_{s=0}^{r-1} (X_s - \theta A_s) \right\}$ y observemos que

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(M_n^n \geq e^{\theta a}) &= \mathbb{P} \left(W(H_n) \leq y, \exp \left\{ \theta \sum_{s=0}^{n-1} (X_s - \theta A_s) \right\} > e^{\theta a} \right) \\ &= \mathbb{P} \left(W(H_n) \leq y, \theta \sum_{s=0}^{n-1} (X_s - \theta A_s) > \theta a \right), \end{aligned}$$

debido a que

$$\mathbb{P}(M_n^n \geq e^{\theta a}) \leq \mathbb{P} \left(\sup_{r \in \mathbb{N}} M_r^n \geq e^{\theta a} \right),$$

podemos invocar la desigualdad maximal de la Proposición 3.12 para obtener

$$\mathbb{P} \left(W(H_n) \leq y, \theta \sum_{s=0}^{n-1} (X_s - \theta A_s) > \theta a \right) \leq \frac{M_1^n}{e^{\theta a}}.$$

De la ecuación (3.19) y la propiedad de supermartingala vemos

$$M_1^n \leq \mathbb{E} [M_2^n | \mathcal{H}_1^n] \leq 1.$$

Por lo tanto

$$\mathbb{P}\left(W(H_n) \leq y, \theta \sum_{s=0}^{n-1} (X_s - \theta A_s) > \theta a\right) \leq e^{-\theta a}.$$

Nuestro objetivo ahora es usar tal desigualdad para invocar al Lema de Borel-Cantelli. Para esto tomemos $y = (nu^2b^+)^2$, $\theta y = u^{-1}$, lo que implica $\theta = (\lambda n^2)^{-1}$, con $\lambda = u^5(b^+)^2$, y $\theta a = u \log \log(n)$. Considerando a los eventos $B = \left\{\theta \sum_{s=0}^{n-1} (X_s - \theta A_s) > \theta a\right\}$ y $A = \{W(H_n) \leq y\}$, y recordando que $\mathbb{P}(B) = \mathbb{P}(B \cap A) + \mathbb{P}(B \cap A^C)$ obtenemos

$$\mathbb{P}\left(\frac{1}{\lambda n^2} \sum_{s=0}^{n-1} X_s - \frac{1}{\lambda^2 n^4} \sum_{s=0}^{n-1} A_s > u \log \log(n)\right) \leq e^{-u \log \log(n)} + \mathbb{P}(W(H_n) > (nu^2b^+)^2). \quad (3.20)$$

Debido a que $u > 1$ y al segundo inciso del Lema 3.6, tenemos, para x suficientemente grande, que $\frac{W(x)}{x^2} \leq u^2$. Por ende, para una n suficientemente grande, digamos $n > N$, con $N \in \mathbb{N}$, se tiene

$$\mathbb{P}(W(H_n) > (nu^2b^+)^2) = \mathbb{P}\left(\frac{W(H_n)}{H_n^2} H_n^2 > (nu^2b^+)^2\right),$$

ahora

$$\left\{\frac{W(H_n)}{H_n^2} H_n^2 > (nu^2b^+)^2\right\} \subseteq \{u^2 H_n^2 > (nu^2b^+)^2\},$$

entonces

$$\mathbb{P}(W(H_n) > (nu^2b^+)^2) \leq \mathbb{P}(u^2 H_n^2 > (nu^2b^+)^2) \leq \mathbb{P}(H_n > nub^+) + \mathbb{P}(H_n < nu^{-1}b^+).$$

Recordando que $H_n = S_{\gamma_n} = \sum_{i=1}^n (S_{\gamma_i} - S_{\gamma_{i-1}})$, con $\mathbb{E}[S_{\gamma_1}] = b^+$, se sigue que

$$\mathbb{P}(H_n > nub^+) + \mathbb{P}(H_n < nu^{-1}b^+) \leq \mathbb{P}\left(\left|\frac{H_n}{n} - b^+\right| > \epsilon\right)$$

para ϵ tal que $\min\{u-1, 1-u^{-1}\} \leq \epsilon \leq \max\{u-1, 1-u^{-1}\}$.

Denotemos por $[x]$ a la parte entera de x y llamemos $\Sigma(u) = \{[u^k], k \in \mathbb{N}\}$. Por un lado, la sucesión $\Sigma(u)$ es creciente y tiende a $+\infty$, debido a que $u > 1$. Por otro lado,

$$\liminf_{k \rightarrow \infty} \frac{[u^{k+1}]}{[u^k]} = u > 1.$$

Sustituyendo el desarrollo anterior en (3.20) podemos ver que

$$\sum_{n \in \Sigma(u)} \left(e^{-u \log \log(n)} + \mathbb{P}(H_n > nub^+) + \mathbb{P}(H_n < ndb^+)\right) \leq \sum_{n \in \Sigma(u)} \left(e^{-u \log \log n} + \mathbb{P}\left(\left|\frac{H_n}{n} - b^+\right| > \epsilon\right)\right)$$

y la segunda serie del lado derecho de la desigualdad anterior es finita gracias al Lema 3.8. Verifiquemos que la primera serie del lado derecho también es finita. En efecto

$$\begin{aligned} \sum_{n \in \Sigma(u)} e^{-u \log \log(n)} &= \sum_{n \in \Sigma(u)} \log(n)^{-u} = \sum_{k=1}^{\infty} \log([u^k])^{-u} \\ &\leq \sum_{k=1}^{\infty} \log([u]^k)^{-u} = \log([u])^{-u} \sum_{k=1}^{\infty} k^{-u} < \infty, \end{aligned}$$

la desigualdad se debe a que $\lfloor u^k \rfloor \geq [u]^k$ para $u > 1$. El desarrollo anterior y el Lema de Borel-Cantelli nos permiten ver que

$$\begin{aligned} & \mathbb{P} \left(\limsup_{n \in \Sigma(u)} \left\{ \frac{1}{\lambda n^2 \log \log(n)} \sum_{s=0}^{n-1} X_s - \frac{1}{\lambda^2 n^4 \log \log(n)} \sum_{s=0}^{n-1} A_s \right\} > u \right) \\ &= \mathbb{P} \left(\limsup_{k \rightarrow \infty} \left\{ \frac{1}{\lambda \lfloor u^k \rfloor^2 \log \log(\lfloor u^k \rfloor)} \sum_{s=0}^{\lfloor u^k \rfloor - 1} X_s - \frac{1}{\lambda^2 \lfloor u^k \rfloor^4 \log \log(\lfloor u^k \rfloor)} \sum_{s=0}^{\lfloor u^k \rfloor - 1} A_s \right\} > u \right) = 0, \end{aligned}$$

consecuentemente

$$\limsup_{n \in \Sigma(u)} \frac{1}{n^2 \log \log(n)} \sum_{s=0}^{n-1} X_s \leq \lambda^{-1} \limsup_{n \in \Sigma(u)} \frac{1}{n^4 \log \log(n)} \sum_{s=0}^{n-1} A_s + \lambda u \quad \text{c.s.} \quad (3.21)$$

Ahora, el segundo inciso del Lema 3.5 implica que existe una constante C_1 finita tal que

$$\begin{aligned} \frac{1}{2n^2 \log \log(n)} \sum_{s=0}^{n-1} 2A_s &= \frac{1}{2n^4 \log \log(n)} \sum_{s=0}^{n-1} (K(H_n - H_{n-s}) + \kappa(H_n - H_{n-s} + 1)^3) \\ &\leq \frac{1}{2n^4 \log \log(n)} \sum_{s=0}^{n-1} C_1 \kappa(H_n - H_{n-s} + 1)^3 \\ &\leq \frac{n C_1 \kappa}{2n^4 \log \log(n)} (H_n + 1)^3 \\ &= \frac{C_1 \kappa}{2 \log \log(n)} \left(\frac{H_n}{n} + \frac{1}{n} \right)^3. \end{aligned}$$

La ley fuerte de grandes números nos dice que $\lim_{n \rightarrow \infty} n^{-1} H_n = b^+$ c.s, entonces

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{C_1 \kappa}{2 \log \log(n)} \left(\frac{H_n}{n} + \frac{1}{n} \right)^3 \stackrel{\text{c.s.}}{=} 0,$$

debido a que $A_s \geq 0$ concluimos

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{2n^2 \log \log(n)} \sum_{s=0}^{n-1} 2A_s \stackrel{\text{c.s.}}{=} 0. \quad (3.22)$$

De la monotonía de V obtenemos

$$\frac{1}{n^2 \log \log(n)} \sum_{s=1}^n V(H_n - H_s) \leq \frac{1}{n^2 \log \log(n)} n V(H_n - H_1).$$

La Proposición 3.3 implica

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\log \log(n)} \frac{V(H_n - H_1)}{H_n - H_1} \frac{H_n - H_1}{n-1} \frac{n-1}{n} \stackrel{\text{c.s.}}{=} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\log \log(n)} \frac{b^+}{b^-} = 0. \quad (3.23)$$

En otras palabras

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n^2 \log \log(n)} \sum_{s=1}^n V(H_n - H_s) = 0, \quad \text{c.s.}$$

Recordando la ecuación (3.18) podemos ver

$$\begin{aligned} \limsup_{n \in \Sigma(u)} \frac{D_n}{n^2 \log \log(n)} &= \limsup_{n \in \Sigma(u)} \frac{1}{n^2 \log \log(n)} \left(\sum_{s=0}^{n-1} X_s + \sum_{s=1}^n V(H_n - H_{n-s}) \right) \\ &\leq \lambda^{-1} \limsup_{n \in \Sigma(u)} \frac{1}{n^4 \log \log(n)} \sum_{s=0}^{n-1} A_s + \lambda u + \limsup_{n \in \Sigma(u)} \frac{1}{\log \log(n)} \sum_{s=1}^n V(H_n - H_s) \\ &= \lambda u = u^6 (b^+)^2 < \infty \end{aligned}$$

donde la desigualdad se debe a la ecuación (3.21) y la última igualdad nos la otorgaron las ecuaciones (3.22) y (3.23). Haciendo uso de que $D_n = D(H_n)$ y el Lema 3.8 obtenemos

$$\begin{aligned} \limsup_{n \in \Sigma(u)} \frac{D(H_n)}{H_n^2 \log \log(H_n)} &= \limsup_{n \in \Sigma(u)} \frac{D(H_n)}{n^2 \log \log(n)} \frac{n^2 \log \log(n)}{H_n^2 \log \log(H_n)} \\ &\leq u^6 (b^+)^2 \frac{1}{(b^+)^2} \limsup_{n \in \Sigma(u)} \frac{\log \log(n)}{\log \log(H_n)}. \end{aligned}$$

Analicemos ahora el límite de la parte derecha en la desigualdad anterior. Para n suficientemente grande sabemos que $H_n \approx nb^+$, entonces, con dos aplicaciones de la regla de L'hospital obtenemos

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\log \log(n)}{\log \log(H_n)} &\stackrel{c.s.}{=} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\log \log(n)}{\log \log(nb^+)} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{1}{\log(n)} \frac{1}{n}}{\frac{1}{\log(nb^+)} \frac{1}{n}} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\log(nb^+)}{\log(n)} = 1. \end{aligned}$$

Por lo tanto

$$\limsup_{n \in \Sigma(u)} \frac{D(H_n)}{H_n^2 \log \log(H_n)} \leq u^6.$$

Para finalizar, por la monotónia de D observamos

$$\sup_{x > N} \frac{D(xb^+)}{(xb^+)^2 \log \log(xb^+)} \leq \sup_{x > N} \frac{D(\lfloor x \rfloor + 1)b^+}{(\lfloor x \rfloor b^+)^2 \log \log(\lfloor x \rfloor b^+)},$$

recordemos que $u > 1$, debido a que $H_k/k \rightarrow b^+$ *c.s.*, se sigue que existe una $M_1 \in \mathbb{N}$ tal que para toda $x > M_1$ se tenga $D(\lfloor x \rfloor + 1)b^+ \leq uD(H_{\lfloor x \rfloor + 1})$ *c.s.*; con el mismo argumento vemos también que existe $M_2 \in \mathbb{N}$ tal que para toda $x > M_2$ se tenga $(\lfloor x \rfloor b^+)^{-2} \leq u(H_{\lfloor x \rfloor})^{-2}$ *c.s.* Por ello, al considerar $N > \max\{M_1, M_2\}$ se sigue

$$\sup_{x > N} \frac{D(\lfloor x \rfloor + 1)b^+}{(\lfloor x \rfloor b^+)^2 \log \log(\lfloor x \rfloor b^+)} \leq \sup_{x > N} \frac{D(H_{\lfloor x \rfloor + 1})}{(H_{\lfloor x \rfloor})^2 \log \log(H_{\lfloor x \rfloor})} \frac{\log \log(H_{\lfloor x \rfloor})}{\log \log(\lfloor x \rfloor b^+)} u^2,$$

la expresión anterior implica las siguientes desigualdades *c.s.*

$$\limsup_{x \rightarrow \infty} \frac{D(x)}{x^2 \log \log x} \leq \limsup_{n \in \Sigma(u)} \frac{D(H_n)}{H_n^2 \log \log(H_n)} u^2 \leq u^8,$$

concluyendo así la cota superior y demostrando el primer inciso del Teorema 3.1. □

3.4. La cota inferior

Par obtener la cota inferior necesitamos tres resultados preliminares. Los primeros dos se obtuvieron de Chow y Teicher [7]. Los últimos dos corresponden al artículo de Biggins [4].

Como primer paso definamos

$$\begin{aligned} h(x) &= (1+x) \log(1+x) - x, \quad x \geq 0, \\ g(x) &= x^{-2}(e^x - 1 - x), \quad x \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

Analicemos un poco el comportamiento de dichas funciones. Por un lado,

$$\int_0^1 \int_0^u e^{xy} dy du = \frac{1}{x} \int_0^1 (e^{xu} - 1) du = \frac{1}{x^2} \left(\int_0^1 x e^{xu} du - x \right) = g(x),$$

lo que implica que la función g es no negativa y creciente. Por otro lado

$$h'(x) = 1 + \log(1+x) - 1 = \log(1+x) \geq 0, \quad x \geq 0,$$

implicando que h es una función creciente en $x \geq 0$. También notemos que $h(x) \approx x^2/2$ cuando $x \rightarrow 0$, pues

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{h(x)}{x^2/2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\log(1+x)}{x} = 1. \quad (3.24)$$

Teorema 3.14. Sean $\{X_i, i \geq 1\}$ variables aleatorias independientes con $\mathbb{E}[X_i] = 0$ y $\mathbb{E}[X_i^2] = \sigma_i^2$. Definamos $Z_n = \sum_{i=1}^n X_i$ y $s_n^2 = \sum_{i=1}^n \sigma_i^2$.

(i) Si $\mathbb{P}(X_i \leq c_n s_n) = 1$ para $i = 1, 2, \dots, n$. Entonces

$$\mathbb{E} \left[e^{tZ_n/s_n} \right] \leq e^{t^2 g(c_n t)}. \quad (3.25)$$

(ii) Si además $c_n x_n \leq a_n$, entonces para toda λ_n y x_n tales que $a_n x_n > 0$ y $a_n \lambda_n > 0$, donde x_n, λ_n y a_n son sucesiones en \mathbb{R} , tenemos que

$$\mathbb{P} \left(\max_{1 \leq i \leq n} Z_i \geq \lambda_n x_n s_n \right) \leq e^{-h(a_n \lambda_n) x_n^2 / a_n^2}.$$

Demostración. Probaremos primero el primer inciso. Gracias a la hipótesis y al hecho de que las v.a son centradas, observamos

$$\begin{aligned} \mathbb{E} \left[e^{tX_i/s_n} \right] &= 1 + \mathbb{E} \left[e^{tX_i/s_n} - 1 - \frac{tX_i}{s_n} \right] \\ &= 1 + \mathbb{E} \left[\frac{t^2 X_i^2}{s_n^2} g \left(\frac{tX_i}{s_n} \right) \right] \\ &\leq 1 + t^2 \mathbb{E} \left[\frac{X_i^2}{s_n^2} g \left(\frac{tc_n s_n}{s_n} \right) \right] \\ &= 1 + t^2 g(tc_n) \frac{\sigma_i^2}{s_n^2} \\ &\leq \exp \left\{ t^2 g(tc_n) \frac{\sigma_i^2}{s_n^2} \right\}, \end{aligned}$$

donde se usa el hecho de que g es una función creciente, y la segunda desigualdad se da en virtud del desarrollo en series de Taylor de la función exponencial, puesto que $t^2 g(tc_n) \sigma_i^2 / s_n^2 \geq 0$. Por último, gracias al supuesto de independencia, obtenemos

$$\mathbb{E} [\exp tZ_n/s_n] = \prod_{i=1}^n \mathbb{E} [\exp tX_i/s_n] \leq \prod_{i=1}^n \exp \left\{ t^2 g(tc_n) \sigma_i^2 / s_n^2 \right\} = \exp \left\{ t^2 g(tc_n) \right\}.$$

Probemos ahora el segundo inciso. Debido a que $\{Z_n, n \geq 1\}$ es una martingala (con la filtración natural) tenemos que $\{\exp \{Z_n\}, n \geq 1\}$ es una submartingala no negativa. Recordemos que para toda submartingala positiva $(M_n, n \geq 1)$ se cumple

$$\mathbb{P} \left(\max_{1 \leq i \leq n} M_i \geq a \right) \leq a^{-1} \mathbb{E} [M_n]. \quad (3.26)$$

Aplicando la desigualdad de Markov, la desigualdad (3.26) y recordando a la ecuación (3.25) vemos

$$\begin{aligned} \mathbb{P}\left(\max_{1 \leq i \leq n} tZ_i \geq t\lambda_n x_n s_n\right) &= \mathbb{P}\left(\max_{1 \leq i \leq n} e^{tZ_i} \geq \exp\{t\lambda_n x_n s_n\}\right) \\ &\leq \exp\{-t\lambda_n x_n s_n\} \mathbb{E}[\exp\{tZ_i\}] \\ &\leq \exp\{-t\lambda_n x_n s_n\} \exp\{t^2 s_n^2 g(tc_n s_n)\} \\ &= \exp\{-b\lambda_n x_n^2 + b^2 x_n^2 g(bc_n x_n)\} \end{aligned}$$

donde última igualdad se sigue de definir $t = bx_n/s_n$. Ahora, por hipótesis $c_n x_n \leq a_n$ y $g(x)$ es una función creciente, entonces

$$\mathbb{P}\left(\max_{1 \leq i \leq n} tZ_i \geq t\lambda_n x_n s_n\right) \leq \exp\{-x_n^2(b\lambda_n - b^2 g(ba_n))\}, \quad (3.27)$$

recordando la definición de $g(x)$, el argumento de la función exponencial en la última desigualdad es

$$-x_n^2(b\lambda_n - a_n^{-2}(e^{ba_n} - 1 - ba_n)).$$

Nuestro objetivo es minimizar el valor del lado derecho de (3.27), para ello basta encontrar el punto dónde se maximiza la función $f(b) = b\lambda_n - a_n^{-2}(e^{ba_n} - 1 - ba_n)$. Para ello observemos que

$$f'(b) = \lambda_n - a_n^{-2}(a_n e^{ba_n} - a_n),$$

entonces

$$f'(b) = 0 \iff b = a_n^{-1} \log(1 + a_n \lambda_n).$$

El valor encontrado de b nos garantiza un máximo, pues $f''(b) = -e^{a_n b} < 0$, consecuentemente tenemos

$$\begin{aligned} b\lambda_n - a_n^{-2}(e^{ba_n} - 1 - ba_n) &= a_n^{-1} \lambda_n \log(1 + a_n \lambda_n) - a_n^{-2}((1 + a_n \lambda_n) - 1 - \log(1 + a_n \lambda_n)) \\ &= a_n^{-1} \lambda_n \log(1 + a_n \lambda_n) - a_n^{-1} \lambda_n + a_n^{-2} \log(1 + a_n \lambda_n) \\ &= \frac{1}{a_n^2} [\log(1 + a_n \lambda_n)(1 + a_n \lambda_n) - a_n \lambda_n] \\ &= \frac{1}{a_n^2} h(a_n \lambda_n). \end{aligned}$$

Por lo tanto, al sustituir el desarrollo anterior en (3.27) concluimos que

$$\mathbb{P}\left(\max_{1 \leq i \leq n} Z_i \geq \lambda_n x_n s_n\right) \leq \exp\left\{-\frac{x_n^2}{a_n^2} h(a_n \lambda_n)\right\},$$

lo que finaliza la demostración. □

El siguiente corolario es útil para obtener aproximaciones más finas.

Corolario 3.15. Sean $\{X_i, i \geq 1\}$ variables aleatorias independientes tales que $\mathbb{E}[X_i] = 0$ y $\mathbb{E}[X_i^2] = \sigma_i^2$, definamos $Z_n = \sum_{i=1}^n X_i$, supongamos que $s_n^2 = \sum_{i=1}^n \sigma_i^2 \rightarrow \infty$ cuando $n \rightarrow \infty$. Si $\mathbb{P}(X_n \leq d_n) = 1$, para $n \geq 1$, donde $d_n > 0$, entonces,

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{Z_n}{s_n \sqrt{\log \log(s_n^2)}} \leq \begin{cases} \sqrt{2}, & \text{si } \log \log(s_n^2) d_n / s_n \rightarrow 0, \\ \frac{1}{a} h^{-1}(a^2), & \text{si } \log \log(s_n^2) d_n / s_n \rightarrow a > 0. \end{cases} \quad \text{c.s.}$$

Demostración. Es claro que $s_n(\log \log(s_n^2))^{-1/2} \uparrow \infty$, gracias a la regla de L'hospital. Para facilitar notación denotemos por $b_n := s_n(\log \log(s_n^2))^{-1/2}$, la cual es creciente a partir cierta n gracias al comentario anterior. Supongamos que $d_n/b_n \rightarrow a > 0$, es decir $d_n \approx ab_n$. Como b_n es asintóticamente creciente vemos que d_n también es asintóticamente creciente, sin pérdida de generalidad podemos considerar a d_n una sucesión creciente. Para $\alpha > 1$, definimos $n_0 = \inf \{n \geq 1 : s_n \geq \alpha\}$, $n_k = \inf \{n \geq n_{k-1} : s_n \geq \alpha s_{n_{k-1}}\}$, para $k \geq 1$. Ahora $n_{k-1} \leq n_k - 1$, lo que implica que $s_{n_{k-1}} \leq s_{n_k-1}$, a su vez, esto implica que $s_{n_{k-1}}/s_{n_k-1} < 1$, por ende

$$s_{n_{k-1}} \leq s_{n_k-1} < \alpha s_{n_{k-1}},$$

así $s_{n_{k-1}} \geq s_{n_{k-2}} \geq \alpha s_{n_{k-2}} \geq \dots \geq \alpha^k$, por ende $\alpha^k \leq s_{n_{k-1}} \leq \alpha^{k+1}$, sin embargo $\log \log(\alpha^k) \approx \log \log(\alpha^{k+1})$, en efecto

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{\log \log(\alpha^k)}{\log \log(\alpha^{k+1})} = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{\frac{1}{\log(\alpha^k)} \frac{k}{\alpha}}{\frac{1}{\log(\alpha^{k+1})} \frac{k+1}{\alpha}} = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{\frac{k+1}{\alpha}}{\frac{k}{\alpha}} = 1,$$

entonces $\log \log(s_{n_{k-1}}^2) \approx \log \log(s_{n_k-1}^2)$. Notemos que, para toda $m \geq 1$ tenemos

$$\bigcup_{n \geq m} \left\{ Z_n > \lambda \alpha^2 s_n (\log \log(s_n^2))^{1/2} \right\} \subseteq \bigcup_{n \geq m} \left\{ \max_{n_{k-1} \leq n < n_k} Z_n > \lambda \alpha^2 s_{n_{k-1}} (\log \log(s_{n_{k-1}}^2))^{1/2} \right\}.$$

Recordando que $\limsup_n A_n = \{A_n \text{ i.s.}\}$, donde *i.s.* significa *infinitamente seguido* o *para una infinidad*. Por lo tanto

$$\begin{aligned} \mathbb{P} \left(Z_n > \lambda \alpha^2 s_n (\log \log(s_n^2))^{1/2} \text{ i.s.} \right) &\leq \mathbb{P} \left(\max_{n_{k-1} \leq n < n_k} Z_n > \lambda \alpha^2 s_{n_{k-1}} (\log \log(s_{n_{k-1}}^2))^{1/2} \text{ i.s.} \right) \\ &\leq \mathbb{P} \left(\max_{1 \leq n < n_k} Z_n > \lambda s_{n_{k-1}} (\log \log(s_{n_{k-1}}^2))^{1/2} \text{ i.s.} \right). \end{aligned} \quad (3.28)$$

Observemos que (3.28) tiene una forma similar al segundo inciso del Teorema 3.14. La idea es aplicar el Lema de Borel-Cantelli para concluir el resultado. Para ello necesitamos acomodar las piezas a nuestro favor. Debido a que ya tenemos a la sucesión $s_{n_{k-1}}$ en la cota, definimos $n(k) = n_k - 1$. Como segundo paso denotamos por $x_n = (\log \log(s_n^2))^{1/2}$, recordando que $d_n/b_n \rightarrow a$ se sigue que, para $u > a$, $x_n d_n/s_n = d_n/b_n < a$. Por último, definimos $\lambda = \frac{1}{u} h^{-1}(\beta)$ para cualquier $\beta > 0$. Entonces, al sustituir lo anterior en (3.28), el segundo inciso del Teorema 3.14 y el hecho de que $s_{n_{k-1}} \geq \alpha^k$ implican

$$\begin{aligned} \mathbb{P} \left(\max_{1 \leq n < n_k} Z_n > \frac{1}{u} h^{-1}(\beta) s_{n_{k-1}} (\log \log(s_{n_{k-1}}^2))^{1/2} \right) &\leq \exp \left\{ -\frac{\log \log(s_{n_{k-1}}^2)}{u^2} h(h^{-1}(\beta)) \right\} \\ &\leq \exp \left\{ -\frac{\beta}{u^2} \log \log(\alpha^{2k}) \right\} \\ &= (2k \log(\alpha))^{-\frac{\beta}{u^2}}. \end{aligned}$$

Para $\beta > u^2$, el Lema de Borel-Cantelli implica

$$\mathbb{P} \left(Z_n > \lambda \alpha^2 s_n (\log \log(s_n^2))^{1/2} \text{ i.s.} \right) = \mathbb{P} \left(Z_n > \frac{\alpha^2}{u} h^{-1}(\beta) s_n (\log \log(s_n^2))^{1/2} \text{ i.s.} \right) = 0,$$

en otras palabras, con probabilidad uno,

$$\frac{Z_n}{s_n \sqrt{\log \log(s_n^2)}} \leq \frac{\alpha^2}{u} \inf_{\beta > u^2} h^{-1}(\beta) \leq \frac{\alpha^2}{a} \inf_{\beta > u^2} h^{-1}(\beta) \downarrow \frac{1}{a} h^{-1}(a^2),$$

lo anterior debido a que α es muy cercano a uno y h es estrictamente creciente. Esto prueba el segundo caso.

El caso $a = 0$ se deduce del anterior. Para verlo, recordemos que cuando $x \rightarrow 0$ se tiene $h(x) \approx x^2/2$, lo que implica que $h^{-1}(x) \approx \sqrt{2x}$. Por lo tanto

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x} h^{-1}(x^2) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x} \sqrt{2x^2} = \sqrt{2},$$

finalizando la demostración del corolario. \square

Lema 3.16. Sean Y_i variables aleatorias independientes, no negativas, idénticamente distribuidas, con media μ y varianza σ^2 ; sea $Z_n = \sum_{i=1}^n Y_i$. Entonces, para cualquier sucesión $\{x_n > 0, n \in \mathbb{N}\}$ tal que para alguna $a > 0$, $x_n \mu \leq a\sigma\sqrt{n}$ y para cualquier $u > 1$ existe una constante finita $\lambda = \lambda(a, u) > \sqrt{2}$, que no depende de la distribución de Y ni de n , tal que

$$\mathbb{P}(Z_n \leq n\mu - \lambda\sigma x_n \sqrt{n}) \leq \exp\{-x_n^2 u\}.$$

Tomando $(u - 1)$ lo suficientemente pequeño, λ se puede acercar arbitrariamente a $\sqrt{2}$.

Demostración. Sean $X_i := \mu - Y_i$, entonces $\mathbb{E}[X_i] = 0$ y $\mathbb{E}[X_i^2] = \sigma^2$. Es claro que $\mathbb{P}[X_i \leq \mu] = 1$. Manteniendo la notación del Teorema 3.14, vemos que $c_n = \frac{\mu}{\sigma\sqrt{n}}$, además, gracias a las hipótesis, $c_n x_n = \frac{\mu}{\sigma\sqrt{n}} \leq a$. Por lo tanto podemos aplicar el Teorema 3.14 y ver

$$\mathbb{P}(Z_n \leq n\mu - \lambda x_n \sigma \sqrt{n}) = \mathbb{P}(n\mu - Z_n \geq \lambda x_n \sigma \sqrt{n}) \leq \exp\left\{-\frac{x_n^2}{a^2} h(\lambda a)\right\}.$$

Recordando la ecuación (3.24), que nos describe el comportamiento de h cerca de cero, observamos

$$h(\lambda x)/x^2 \rightarrow \frac{\lambda^2}{2}, \quad \text{cuando } x \rightarrow 0.$$

Definiendo $u = h(\lambda x)/x^2$ vemos que

$$u > 1 \iff \frac{\lambda^2}{2}.$$

Por ello podemos tomar λ arbitrariamente cercana a $\sqrt{2}$. \square

Lema 3.17 (La cota inferior). Existe una constante $L > 0$ tal que

$$\liminf_{x \rightarrow \infty} \frac{D(x)}{x^2 / \log \log(x)} \geq L > 0.$$

Demostración. Sea $\psi(x) = x^{-1} \lfloor \frac{x\beta^2}{\log \log(x)} \rfloor$ para alguna $\beta > 0$, de esta forma $n\psi(n)$ es un natural cuando $n \in \mathbb{N}$, además

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \psi(x) \log \log(x) = \lim_{x \rightarrow \infty} x^{-1} \left\lfloor \frac{x\beta^2}{\log \log(x)} \right\rfloor \log \log(x) = \beta^2.$$

Definamos

$$C_n = \sum_{r=1}^{n(1-\psi(n))} v_r(H_n - H_{n(1-\psi(n))}),$$

y observemos que $D_n \geq C_n$. En efecto, en virtud de la monotonía de v , la observación de que $H_n - H_r \geq H_n - H_{n(1-\psi(n))}$ y del Lema 3.4 conseguimos

$$D_n = \sum_{r=1}^n v_r(H_n - H_r) \geq \sum_{r=1}^{n(1-\psi(n))} v_r(H_n - H_r) \geq \sum_{r=1}^{n(1-\psi(n))} v_r(H_n - H_{n(1-\psi(n))}) = C_n.$$

Sea $\mathcal{G}^n := \sigma(\omega_n, \dots, \omega_{n(1-\psi(n))+1})$. Observemos que

$$H_n - H_{n(1-\psi(n))} = \omega_{n(1-\psi(n))+1} + \dots + \omega_n(\tau_n).$$

en otras palabras $H_n - H_{n(1-\psi(n))} \in \mathcal{G}^n$. También notemos que $\{v_r(H_n - H_{n(1-\psi(n))}), r \leq n(1-\psi(n))\}$ son variables aleatorias independientes idénticamente distribuidas (y son las variables que aparecen en C_n). Denotemos su media y varianza condicionadas en \mathcal{G}^n por μ_n y σ_n^2 respectivamente, es decir.

$$\mu_n = V(H_n - H_{n(1-\psi(n))}) \quad \text{y} \quad \sigma_n^2 = K(H_n - H_{n(1-\psi(n))}).$$

De la misma forma que para la cota superior tomemos $u > 1$ y denotamos por $\Sigma(u) = \{[u^k], k = 1, 2, \dots\}$. Es claro que $\lim_{k \rightarrow \infty} \Sigma(u) = \infty$, entonces de la Proposición 3.3 y el Lema 3.8 vemos

$$\lim_{n \in \Sigma(u)} \frac{\mu_n}{n\psi(n)} = \lim_{n \in \Sigma(u)} \frac{V(H_n - H_{n(1-\psi(n))})}{n\psi(n)} \stackrel{c.s.}{=} \frac{b^+}{b^-},$$

Utilizando las mismas ideas, esto es, los Lemas 3.5 y 3.8 en la primera igualdad y la Proposición 3.3 en la segunda igualdad, obtenemos

$$\lim_{n \in \Sigma(u)} \frac{\sigma_n^2}{(n\psi(n))^3} = \frac{2}{3b^+(b^-)^2} \lim_{n \in \Sigma(u)} \frac{(H_n - H_{n(1-\psi(n))})^3}{(n\psi(n))^3} \stackrel{c.s.}{=} \frac{2}{b^+(b^-)^2} (b^+)^3 = \frac{2(b^+)^2}{3(b^-)^2}. \quad (3.29)$$

Por lo tanto, existe un $a > 0$ que satisface $x_n \mu \leq a\sigma\sqrt{n}$. Nuestro objetivo ahora es aplicar el Lema 3.16 cuando $x_n^2 = \log \log(n)$. Para ello observemos que

$$\begin{aligned} \lim_{n \in \Sigma(u)} \frac{\mu_n \sqrt{\log \log(n)}}{\sigma_n \sqrt{n(1-\psi(n))}} &= \lim_{n \in \Sigma(u)} \frac{\mu_n \sqrt{\psi(n) \log \log(n)}}{\sigma_n \sqrt{\psi(n)n(1-\psi(n))}} \\ &= \lim_{n \in \Sigma(u)} \frac{\beta \mu_n}{\sigma_n \sqrt{n\psi(n)(1-\psi(n))}} \\ &= \beta \lim_{n \in \Sigma(u)} \frac{\mu_n}{n\psi(n)} \frac{(n\psi(n))^{1/2}}{\sigma_n (1-\psi(n))^{1/2}} \\ &= \beta \sqrt{\frac{3}{2}} \lim_{n \in \Sigma(u)} \frac{1}{n\psi(n)(1-\psi(n))^{1/2}} = 0. \end{aligned} \quad (3.30)$$

Consideremos a los siguientes eventos:

$$\begin{aligned} A_n &= \left\{ \mu_n (\log \log(n))^{1/2} > a\sigma_n (n(1-\psi(n))^{1/2}) \right\} \\ B_n &= \left\{ C_n \leq n(1-\psi(n))\mu_n - \lambda\sigma_n (n(1-\psi(n)) \log \log(n))^{1/2} \right\}. \end{aligned}$$

Recordemos que C_n es la suma de $n(1-\psi(n))$ v.a.i.i.d no negativas, entonces, aplicando la desigualdad del Lema 3.16 conseguimos

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(B_n | \mathcal{G}_n) &= \mathbb{1}_{\{A_n\}} \mathbb{P}(B_n | \mathcal{G}_n) + \mathbb{1}_{\{A_n^c\}} \mathbb{P}(B_n | \mathcal{G}_n) \\ &\leq \mathbb{1}_{\{A_n\}} + \mathbb{1}_{\{A_n^c\}} e^{-u \log \log(n)} \\ &= \mathbb{1}_{\{A_n\}} + \mathbb{1}_{\{A_n^c\}} \frac{1}{(\log(n))^u}. \end{aligned}$$

Con base en (3.30) se sigue que para toda $a > 0$ existe una $M := M(a) \in \mathbb{N}$ tal que

$$\frac{\mu_n (\log \log(n))^{1/2}}{\sigma_n \sqrt{n(1-\psi(n))}} < a, \quad \text{para} \quad n > M,$$

entonces

$$\sum_{n \in \Sigma(u)} \mathbb{P}(B_n | \mathcal{G}_n) \leq \sum_{n \in \Sigma(u)} \left(\mathbb{1}_{\{A_n\}} + \mathbb{1}_{\{A_n^c\}} \frac{1}{(\log(n))^u} \right) \leq M + \sum_{n \in \Sigma(u)} \frac{1}{(\log(n))^u}$$

y observemos que

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(\log \lfloor u^k \rfloor)^u} \leq \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(\log \lfloor u^k \rfloor)^u} \leq \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(\log \lfloor u \rfloor^k)^u} = \frac{1}{(\log(\lfloor u \rfloor))^u} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^u} < \infty,$$

gracias al Lema Condicional de Borel Cantelli (véase capítulo 5 de Chandra [6]) obtenemos

$$\sum_{n \in \Sigma(u)} \mathbb{P}(B_n | \mathcal{G}_n) < \infty \quad \iff \quad \mathbb{P} \left(\limsup_{n \in \Sigma(u)} B_n \right) = 0.$$

Por lo tanto las siguientes desigualdades son válidas casi seguramente

$$\begin{aligned} \liminf_{n \in \Sigma(u)} \frac{C_n}{n^2 / (\log \log(n))} &\geq \liminf_{n \in \Sigma(u)} \left(\frac{n(1 - \psi(n))\mu_n}{n^2 / (\log \log(n))} - \lambda \frac{\sigma_n(n(1 - \psi(n)) \log \log(n))^{1/2}}{n^2 / (\log \log(n))} \right) \\ &\geq \liminf_{n \in \Sigma(u)} \frac{\psi(n) \log \log(n) (1 - \psi(n)) \mu_n}{n\psi(n)} \\ &\quad - \lambda \liminf_{n \in \Sigma(u)} \frac{\sigma_n(\psi(n) \log \log(n))^{3/2} (1 - \psi(n))^{1/2}}{(n\psi(n))^{3/2}} \\ &= \beta^2 \liminf_{n \in \Sigma(u)} \frac{(1 - \psi(n))\mu_n}{n\psi(n)} - \lambda \beta^3 \liminf_{n \in \Sigma(u)} \frac{\sigma_n(1 - \psi(n))^{1/2}}{(n\psi(n))^{3/2}} \\ &= \beta^2 \frac{b^+}{b^-} \left(\liminf_{n \in \Sigma(u)} (1 - \psi(n)) - \lambda \beta \sqrt{\frac{2}{3}} \liminf_{n \in \Sigma(u)} (1 - \psi(n)) \right) \\ &= \beta^2 \frac{b^+}{b^-} \left(1 - \lambda \beta \sqrt{\frac{2}{3}} \right). \end{aligned}$$

Para facilitar la lectura definamos $f(\beta) = \frac{b^+}{b^-} \beta^2 \left(1 - \lambda \beta \sqrt{\frac{2}{3}} \right)$, y observemos que alcanza un máximo (finito). En efecto, la función f posee como primeras dos derivadas a

$$f'(\beta) = \frac{b^+}{b^-} \left(2\beta - 3\lambda \sqrt{\frac{2}{3}} \beta^2 \right) \quad \text{y} \quad f''(\beta) = \frac{b^+}{b^-} \left(2 - 6\lambda \sqrt{\frac{2}{3}} \beta \right).$$

El punto crítico corresponde a un máximo pues

$$f'(\beta) = 0 \iff \beta = \lambda^{-1} \sqrt{\frac{2}{3}} \quad \text{y} \quad f'' \left(\lambda^{-1} \sqrt{\frac{2}{3}} \right) = -4 \frac{b^+}{b^-} < 0.$$

Denotemos a dicho máximo por $\frac{b^+}{b^-} \kappa(\lambda)$. Al ser $D_n \geq C_n$ se sigue que

$$\liminf_{n \in \Sigma(u)} \frac{D_n}{n^2 / \log \log(n)} \geq \frac{b^+}{b^-} \kappa(\lambda).$$

Para finalizar, por monotonía de la función D y debido a $H_n/n \rightarrow b$ c.s se tiene que para toda $\epsilon > 0$ existe $N(\epsilon) := N \in \mathbb{N}$ tal que para toda $n > N$ $D(nb^+) \geq D(H_n)(1 - \epsilon)$ c.s. Por ende

$$\inf_{x > N} \frac{D(xb^+)}{(xb^+)^2 / \log \log(xb^+)} \geq \inf_{x > N} \frac{D(\lfloor x \rfloor b^+)}{[\lfloor x \rfloor]^2 / \log \log(\lfloor x \rfloor)} \left(\frac{\lfloor x \rfloor}{xb^+} \right)^2 \frac{\log \log(x)}{\log \log(\lfloor x \rfloor)} (1 - \epsilon)$$

la expresión anterior implica las siguientes desigualdades *c.s*

$$\liminf_{x \rightarrow \infty} \frac{D(x)}{x^2 / \log \log(x)} \geq \liminf_{n \in \Sigma(u)} \frac{D(H_n)}{n^2 / \log \log(n)} \frac{1 - \epsilon}{(b^+)^2} \geq (1 - \epsilon) \kappa(\lambda) \frac{1}{b^+ b^-},$$

debido a que ϵ es arbitrario y recordando que $b^+ b^- = 2^{-1}$, deducimos

$$\liminf_{x \rightarrow \infty} \frac{D(x)}{x^2 / \log \log(x)} \geq 2\kappa(\lambda),$$

concluyendo así el lema y demostrando el segundo inciso del Teorema 3.1. \square

3.5. El inicio es irrelevante

En esta sección mostramos que el comportamiento de $D(x)$ sigue siendo válido para cualquier punto inicial (no negativo), además de cero.

Lema 3.18. *Consideremos $x > 0$. Sea \mathcal{X} el evento $\{R_n > x, n = 1, 2, 3, \dots\}$. Para $y \geq x$ definamos $Q_y = \mathbb{P}(\mathcal{X} | R_0 = y)$. En otras palabras, el proceso que inicia en y nunca pase por debajo del nivel x . Entonces $Q_y = \frac{V(y-x)}{V(x)}$.*

Demostración. Definamos $Q_y^n := \mathbb{P}(R_i > x, i = 1, \dots, n | R_0 = y)$, en palabras: la probabilidad de que el proceso no caiga por debajo del nivel x en los primeros n pasos. Sea \mathbb{E}_y la esperanza de la caminata aleatoria iniciada en y . En particular, para $y \geq x$ tenemos

$$V(y-x) = \mathbb{E}[\mathbf{1}_{\{S_1+y-x>0\}} V(S_1+y-x)] = \mathbb{E}_y[\mathbf{1}_{\{S_1-x>0\}} V(S_1-x)].$$

De la definición de R tenemos

$$Q_y^n = \mathbb{E}_y \left[\frac{V(S_n)}{V(y)} \mathbf{1}_{\{S_i > x, i=1, \dots, n\}} \right].$$

Pensando V como una función de renovación sabemos, por el Teorema de Blackwell, que

$$V(y) - V(y-x) \rightarrow \frac{x}{b^-}, \quad \text{cuando } y \rightarrow \infty.$$

En otras palabras, existe un punto, digamos N tal que para $y > N$ se puede pensar a $V(y) - V(y-x)$ como una función lineal. Recordemos que $V(0) = 0$ y $V(N) < \infty$, entonces existe una C finita tal que

$$\sup_y |V(y) - V(y-x)| \leq C(x+1).$$

Por lo tanto

$$\begin{aligned} |V(y)Q_y^n - V(y-x)| &= |\mathbb{E}_y[(V(S_n) - V(S_n-x)) \mathbf{1}_{\{S_i > x, i=1, 2, \dots, n\}}]| \\ &\leq C(x+1) \mathbb{E}_y[\mathbf{1}_{\{S_i > x, i=1, 2, \dots, n\}}]. \end{aligned}$$

Al ser S una caminata aleatoria oscilante tenemos que $\tau = \inf\{n > 0, S_n > x\}$ es un tiempo de paro finito *c.s*. Gracias al Teorema de convergencia dominada se sigue

$$\lim_{n \rightarrow \infty} |V(y)Q_y^n - V(y-x)| \leq C(x+1) \lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{P}(S_i > x, i = 1, 2, \dots, n) = C_x \mathbb{P}(\tau = \infty) = 0.$$

Por lo tanto

$$V(y)Q_y^n - V(y-x) = 0 \quad \iff \quad Q_y^n = \frac{V(y-x)}{V(y)},$$

concluyendo el lema. \square

Lema 3.19. *La construcción de Tanaka aplica para la altura por encima de $x \geq 0$ del proceso R que inicia en x y condicionado a no caer por debajo de x .*

Demostración. Gracias al Lema 3.18 anterior el evento bajo el cual condicionamos, $\mathcal{X} = \{R_n > x, n = 1, 2, \dots\}$, tiene probabilidad positiva para $y \geq x$. Denotemos por \tilde{R} al proceso condicionado, i.e

$$\mathbb{P}(\tilde{R}_1 \in dz | \tilde{R}_0 = y) = \mathbb{P}(\tilde{R}_1 \in dz | R_0 = y) = \mathbb{P}_y(R_1 \in dz | \mathcal{X}).$$

Ahora, al aplicar la fórmula de Bayes observemos que

$$\mathbb{P}_y(R_1 \in dz | \mathcal{X}) = \mathbb{P}_y(R_1 \in dz) \frac{\mathbb{P}_y(\mathcal{X} | R_0 = z) \mathbb{1}_{\{z > x\}}}{\mathbb{P}_y(\mathcal{X})} = \mathbb{P}_y(R_1 \in dz) \frac{\mathbb{P}_z(\mathcal{X}) \mathbb{1}_{\{z > x\}}}{\mathbb{P}_y(\mathcal{X})}.$$

Debido a que la cadena $R = \{R_n, n \geq 0\}$ es un proceso de Markov se sigue que $\tilde{R} = \{\tilde{R}_n, n \geq 0\}$ también es proceso de Markov. Ahora observemos la probabilidad de transición. Sea $A \subset (0, \infty)$ y notemos

$$\mathbb{P}_y(\tilde{R}_1 \in x + A) = \mathbb{E} \left[\frac{V(y + S_1)}{V(y)} \mathbb{1}_{\{y + S_1 \in x + A\}} \frac{Q_{y + S_1}}{Q_y} \right] = \mathbb{E} \left[\frac{V(S_1 + y - x)}{V(y - x)} \mathbb{1}_{\{y + S_1 \in x + A\}} \right].$$

Por homogeneidad espacial la expresión anterior es igual a

$$\mathbb{E}_x \left[\frac{V(S_1 + y)}{V(y)} \mathbb{1}_{\{S_1 + y \in A\}} \right].$$

Por lo tanto la probabilidad de transición de $\{\tilde{R}_n - x, n \geq 0\}$ es igual a la probabilidad de transición de R . Entonces, el proceso $\{\tilde{R}_n - x, n \geq 0\}$ es igual en ley a $\{R_n, n \geq 0\}$. \square

Teorema 3.20. *Cuando el proceso inicia en $x > 0$, la construcción de Tanaka aplica al desarrollo del proceso a partir de su ínfimo.*

Demostración. Sea R la caminata aleatoria condicionada a ser positiva, definimos a

$$T(0) = 0, \quad T(i) = \inf \{n > T(i-1) : R_n = \underline{R}_n\}, \quad \text{para } i \geq 1,$$

donde $\underline{R}_n = \inf_{0 \leq i \leq n} R_i$. Debido a que la R deriva a c.s a infinito se sigue que $\underline{R}_\infty = R_{T(i)}$ para alguna $i \in \mathbb{N}$. Notemos además que $\underline{R}_\infty \leq x$ y gracias a la propiedad fuerte de Markov obtenemos

$$\mathbb{P}_x(T(i) = k) = \mathbb{P}_x(R_n \geq R_k, n \geq k) \geq \mathbb{E} \left[\frac{1}{V(R_k)} \right] \geq \frac{1}{V(x)}.$$

Por lo tanto cada $T(i)$ tiene probabilidad positiva de ser el ínfimo de todo el proceso. Sea $I = \sup \{i : T(i) < \infty\}$, el momento en que el ínfimo del proceso ocurre. Gracias a los comentarios anteriores se sigue que I es finito c.s. Ahora al aplicar la propiedad fuerte de Markov y el lema anterior condicionando en el evento $\{I = i\} = \{T(i) < \infty, T(i+1) = \infty\}$ vemos que a partir de $T(i)$ el proceso $\{\tilde{R}_{n+T(i)} - R_{T(i)}, n \geq 0\}$ es igual en ley a R . \square

4 Comportamiento asintótico de los tiempos de ocupación: Caso continuo

Motivados por los capítulos anteriores estamos interesados en estudiar el comportamiento asintótico de los tiempos de ocupación para el movimiento browniano condicionado a ser positivo. En el capítulo 2 demostramos que dicho proceso se puede pensar como un proceso de Bessel de dimensión tres. El objetivo de este capítulo es demostrar el siguiente resultado, el cual es el análogo en tiempo continuo del Teorema 3.1. La base bibliográfica de este capítulo es Bertoin [3] y Biggins [4].

Teorema 4.1. *Sea $R = \{R_t, t \geq 0\}$ un proceso de Bessel de dimensión 3, defina $D(x) = \int_0^\infty \mathbf{1}_{\{R_t < x\}} dt$, el tiempo de ocupación asociado al proceso R . Entonces los siguientes límites son válidos c.s*

$$\limsup_{x \rightarrow \infty} \frac{D(x)}{x^2 \log \log(x)} = \frac{8}{\pi^2} \quad y \quad \liminf_{x \rightarrow \infty} \frac{D(x)}{x^2 / \log \log(x)} = \frac{1}{2}. \quad (4.1)$$

Más aún, si $R_0 = 0$ c.s entonces

$$\limsup_{x \rightarrow 0^+} \frac{D(x)}{x^2 \log \log(x)} = \frac{8}{\pi^2} \quad y \quad \liminf_{x \rightarrow 0^+} \frac{D(x)}{x^2 / \log \log(x)} = \frac{1}{2}. \quad (4.2)$$

El siguiente lema, cuya demostración no incluimos pues sale de los objetivos de la tesis, se puede encontrar en Gruet y Shi [13] y Ciesielski y Taylor [8], estudia el comportamiento asintótico de $D(1)$. La idea es usar estas cotas exponenciales para demostrar el Teorema 4.1.

Lema 4.2. *Para $D(1)$ se tiene,*

$$\lim_{y \rightarrow \infty} \exp \left\{ \frac{\pi^2 y}{8} \right\} \mathbb{P}(D(1) > y) = \frac{4}{\pi} \quad y \quad \lim_{y \rightarrow \infty} y \exp \left\{ \frac{y^2}{2} \right\} \mathbb{P}(D(1)^{-1} > y^2) = 2\sqrt{\frac{2}{\pi}}. \quad (4.3)$$

4.1. Subordinadores

Esta sección estudia los resultados de subordinadores necesarios para poder demostrar al Teorema 4.1. Para ello necesitamos primero recordar a los procesos de Lévy y su vínculo con las distribuciones infinitamente divisibles. Con base en esto definimos a los subordinadores, que son una familia de procesos de Lévy.

Definición 4.3. *Sea $X = (X_t, t \geq 0)$ un proceso estocástico definido sobre el espacio de probabilidad $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ que toma valores en \mathbb{R} . Se dice que X es un proceso de Lévy si posee las siguientes propiedades.*

- (i) Las trayectorias de X son continuas por la derecha con límites por la izquierda (càdlàg) c.s.
- (ii) Para cualesquiera $t, s > 0$ se tiene que $X_{t+s} - X_t \stackrel{\mathcal{L}}{=} X_s$.
- (iii) Para cualesquiera $t, s > 0$ se tiene que $X_{t+s} - X_t$ es independiente de $\sigma(X_u, u \leq t)$.

Definición 4.4. Un subordinador es un proceso de Lévy con valores en $[0, \infty)$.

De la definición anterior vemos que si X es un subordinador entonces sus trayectorias son crecientes c.s. Más aún, al ser las trayectorias crecientes se sigue que X es de variación finita.

Definición 4.5. Sea $\lambda > 0$. La transformada de Laplace de X se define como $\mathbb{E}[\exp\{-\lambda X_t\}]$, cuando la expresión anterior es finita.

La transformada de Laplace (cuando existe) nos permite caracterizar leyes y su convergencia débil. Recordando que los procesos de Lévy se encuentran relacionados con las leyes infinitamente divisibles vía el Teorema de Lévy-Khintchine, ver Bertoin [3]. Esto nos permite ver que cuando X es un proceso de Lévy cuya transformada de Laplace existe, entonces

$$\mathbb{E}[\exp\{-\lambda X_t\}] = \exp t\Phi(\lambda)$$

donde la función $\Phi : [0, \infty) \mapsto [0, \infty)$ se conoce como el *exponente de Laplace*. En particular los subordinadores cuentan con dicho exponente. A partir de ahora X denotará un subordinador. Las siguientes proposiciones nos permiten trabajar con la transformada de Laplace para caracterizar al subordinador X .

Proposición 4.6 (Martingala exponencial). Sea $Y = \{Y_t, t \geq 0\}$ un proceso estocástico con incrementos independientes y estacionarios tal que su transformada de Laplace existe. Entonces el proceso $M_t = \exp\{\lambda Y_t - t\Phi(\lambda)\}$ es martingala.

Demostración. Denotemos por $\mathcal{F}_t = \sigma(Y_s, s \leq t)$ y probaremos que M satisface la propiedades definitorias de una martingala. Primero probaremos la medibilidad, para ello observemos que $M_s \in \mathcal{F}_s$. En efecto, al ser $Y_s \in \mathcal{F}_s$ y $M_s = g(Y_s)$ donde g es una función continua se sigue que $M_s \in \mathcal{F}_s$ al ser la composición de funciones \mathcal{F}_s medibles. En segundo lugar verifiquemos que M_s es integrable. Debido a que $\{M_s, s \geq 0\}$ es positiva y recordando que Φ es el exponente de Laplace de Y vemos

$$\mathbb{E}[|M_s|] = \mathbb{E}[M_s] = \exp\{-s\Phi(\lambda)\} \mathbb{E}[\exp\{\lambda Y_s\}] = 1.$$

Por último verificamos la propiedad de martingala. Consideremos $t, s \geq 0$ y notemos

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[M_{t+s} | \mathcal{F}_s] &= \mathbb{E}[\exp\{\lambda Y_{t+s} - (t+s)\Phi(\lambda)\} | \mathcal{F}_s] \\ &= \exp\{\lambda Y_s - (t+s)\Phi(\lambda)\} \mathbb{E}[\exp\{\lambda(Y_{t+s} - Y_s)\} | \mathcal{F}_s] \\ &= \exp\{\lambda Y_s - (t+s)\Phi(\lambda)\} \mathbb{E}[\exp\{\lambda Y_t\}] \\ &= \exp\{\lambda Y_s - s\Phi(\lambda)\} = M_s, \end{aligned}$$

donde en la segunda igualdad se debe al hecho de que $Y_s \in \mathcal{F}_s$ y la tercera se obtiene por los incrementos independientes y estacionarios de Y . \square

Proposición 4.7. Sea $B = (B_t, t \geq 0)$ un movimiento browniano estándar. Definamos a $\tau_x = \inf \{t \geq 0 : B_t \geq x\}$, la primera vez que el proceso B pasa por el nivel x , entonces

$$\mathbb{E}[\exp \{-\lambda \tau_x\}] = \exp \left\{ -x\sqrt{2\lambda} \right\}, \quad \text{para toda } \lambda \geq 0.$$

Más aún, el proceso $\{\tau_x, x \geq 0\}$ es un subordinador.

Demostración. Recordando la martingala exponencial se sigue que el proceso $M_t := \exp \left\{ qB_t - t\frac{q^2}{2} \right\}$ es martingala. Sabemos que τ_x es tiempo de paro, entonces $M_{t \wedge \tau_x}$ es martingala. Además observemos que para toda $t > 0$ fija $M_t \leq \exp \{qB_t\}$, lo que implica que $M_{t \wedge \tau_x} \leq e^{qx}$, es decir, la martingala $M_{t \wedge \tau_x}$ está acotada, entonces es uniformemente integrable. Por ende estamos en condiciones de aplicar el Teorema de paro de Doob para deducir

$$1 = \mathbb{E}[M_0] = \mathbb{E}[M_{t \wedge \tau_x}] = \mathbb{E} \left[\exp \left\{ qB_{t \wedge \tau_x} - t \wedge \tau_x \frac{q^2}{2} \right\} \right],$$

ahora, aplicando el Teorema de convergencia dominada se sigue que

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \mathbb{E}[M_{t \wedge \tau_x}] = \mathbb{E}[M_{\tau_x}] = \mathbb{E} \left[\exp \left\{ qx - \tau_x \frac{q^2}{2} \right\} \right] = 1,$$

consecuentemente

$$\mathbb{E} \left[\exp \left\{ -\tau_x \frac{q^2}{2} \right\} \right] = \exp \{-qx\}.$$

Tomando $\lambda = q^2/2$ vemos que $q = \sqrt{2\lambda}$, lo anterior nos permite ver la forma explícita del exponente de Laplace Φ , i.e $\Phi(\lambda) = \sqrt{2\lambda}$.

Para ver que $\{\tau_t, t \geq 0\}$ es un subordinador lo primero que notamos es que $\tau_0 \stackrel{\text{c.s.}}{=} 0$. Al ser τ_t la inversa generalizada de un proceso continuo se sigue que τ_t es continuo por la derecha. Observando que el proceso τ_t es no decreciente se sigue que τ_t posee trayectorias càdlàg. Por lo tanto satisface la primera condición de un proceso de Lévy.

Gracias a la propiedad de Markov fuerte de B y a que $\tau_t < \infty$ c.s. tenemos, por un lado

$$\{B_{\tau_t+s} - B_{\tau_t}, s \geq 0\} \stackrel{\mathcal{L}}{=} \{B_s, s \geq 0\}.$$

Por otro lado, para $t, s \geq 0$, vemos

$$\begin{aligned} \inf \{r \geq 0 : B_r \geq t+s\} &= \inf \{r \geq \tau_t : B_r \geq t+s\} \\ &= \inf \{r \geq 0 : B_r \geq s\} + \inf \{u \geq 0 : B_{u+\tau_t} > t+s\}, \end{aligned}$$

notando que

$$\inf \{u > 0 : B_{u+\tau_t} > t+s\} \stackrel{\mathcal{L}}{=} \inf \{u > 0 : \tilde{B}_u > s\} = \tilde{\tau}_s,$$

donde \tilde{B} es una copia independiente de B , se sigue que el proceso $\{\tau_t, t \geq 0\}$ posee incrementos independientes. \square

Proposición 4.8. Considere la representación de Pitman para un proceso de Bessel de dimensión tres. Es decir, $R_t = 2S_t - B_t$, donde $S_t = \sup_{s \leq t} B_s$ y B es un movimiento browniano estándar. Sea τ_a el primer tiempo que el movimiento browniano B pasa por encima del nivel a , entonces τ_a es la última vez que el proceso R visita a .

Demostración. Debemos mostrar que $\sup\{R_t \geq a : t > 0\} = \tau_a$. En otras palabras, basta mostrar que $u > \tau_a$ implica $R_u > a$. Primero notemos

$$R_u = 2S_u - B_u = S_u + (S_u - B_u)$$

Ahora tomemos $u > \tau_a$ y observemos los sumandos. Por un lado $S_u = B_u$ implica que B ha alcanzado un nuevo supremo. Entonces $S_u > S_{\tau_a} = a$ c.s. Por otro lado, $S_u = a$ implica $S_u - B_u > 0$ c.s. Por lo tanto, uniendo ambas partes, vemos

$$S_u + (S_u - B_u) > a \quad \text{c.s.}$$

lo que concluye la prueba. □

El siguiente resultado nos permite estudiar la ley del logaritmo iterado cuando el exponente de Laplace es de variación regular, véase Capítulo III de Bertoin [3].

Teorema 4.9. *Sea X un subordinador con exponente de Laplace Φ . Denotemos por φ a la función inversa de Φ .*

(i) *Considere a*

$$f(t) = \frac{\log |\log(t)|}{\varphi(t^{-1} \log |\log(t)|)} \quad \text{para } 0 < t < e^{-1}, \quad (4.4)$$

y suponga que Φ es de variación regular en ∞ de índice $\alpha \in (0, 1)$. Entonces

$$\lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{X_t}{f(t)} = \alpha(1 - \alpha)^{\frac{1-\alpha}{\alpha}} \quad \mathbb{P} - \text{c.s.}$$

(ii) *Considere a*

$$f(t) = \frac{\log \log(t)}{\varphi(t^{-1} \log \log(t))}, \quad \text{para } t > e,$$

y suponga que Φ es de variación regular en $0+$ de índice $\alpha \in (0, 1)$. Entonces

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{X_t}{f(t)} = \alpha(1 - \alpha)^{\frac{1-\alpha}{\alpha}} \quad \mathbb{P} - \text{c.s.}$$

4.2. Comportamiento asintótico de los tiempos de ocupación

Las herramientas que hemos discutido anteriormente nos son ahora de utilidad para poder demostrar el Teorema 4.1. Este teorema establece el comportamiento asintótico de los tiempos de ocupación para un proceso de Bessel de dimensión tres. La siguiente proposición será de utilidad para probar al Teorema 4.1 .

Proposición 4.10. *Consideremos la notación empleada hasta ahora. La siguiente igualdad en ley es válida: $D(1) = \frac{D(x)}{x^2}$.*

Demostración. Sea $x > 0$, recordando la representación de Pitman observamos

$$2S_t - B_t < x \iff \frac{2S_t - B_t}{x} < 1 \iff 2 \sup_{s \leq t} x^{-1} B_s - x^{-1} B_t < 1.$$

En virtud de la propiedad de escala del movimiento browniano sabemos que $x^{-1}B_t \stackrel{\mathcal{L}}{=} B_{x^{-2}t}$, entonces

$$2 \sup_{s \leq t} x^{-1}B_s - x^{-1}B_t \stackrel{\mathcal{L}}{=} 2S_{x^{-2}t} - B_{x^{-2}t}.$$

Por lo tanto

$$\int_0^\infty \mathbb{1}_{\{2S_t - B_t < x\}} dt \stackrel{\mathcal{L}}{=} \int_0^\infty \mathbb{1}_{\{2S_{x^{-2}t} - B_{x^{-2}t} < 1\}} dt = x^2 \int_0^\infty \mathbb{1}_{\{2S_u - B_u < 1\}} du,$$

de donde se sigue el resultado. \square

Demostración del Teorema 4.1. Sea $u > 1$ y x suficientemente grande, digamos $x > N$, con $N \in \mathbb{R}$. Entonces gracias a la Proposición 4.10 y a la primera estimación del Lema 4.2 conseguimos

$$\mathbb{P}\left(\frac{D(x)}{x^2} > \frac{u8}{\pi^2} \log \log(x)\right) = \mathbb{P}\left(D(1) > \frac{u8}{\pi^2} \log \log(x)\right) \leq \frac{4}{\pi} \exp\{-u \log \log(x)\} = \frac{4}{\pi(\log(x))^u}.$$

Consideremos a la sucesión $\{D(y^n)/y^{2n} : n \geq 1\}$ para cualquier $y > 1$, usando la desigualdad anterior obtenemos

$$\mathbb{P}\left(\frac{D(y^n)}{y^{2n}} > \frac{u8}{\pi^2} \log \log(y^n)\right) \leq \min\left\{1, \frac{4}{\pi(\log(y^n))^u}\right\} = \min\left\{1, \frac{4}{\pi n^u (\log(y))^u}\right\}.$$

Ahora, en virtud de que la sucesión $\{y^{2n}, n \geq 1\}$ es creciente y deriva a infinito se sigue que existe $M \in \mathbb{N}$ tal que $y^{2n} > N$ para toda $n > M$. Por ende se sigue que

$$\sum_{n \geq 1} \mathbb{P}\left(\frac{D(y^n)}{y^{2n}} > \frac{u8}{\pi^2} \log \log(y^n)\right) \leq M + \sum_{n \geq M} \frac{4}{\pi n^u (\log(y))^u} < \infty.$$

Para $u > 1$ la serie $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n^u}$ converge; entonces podemos aplicar el Lema de Borel-Cantelli y deducir que

$$\mathbb{P}\left(\limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{D(y^n)}{y^{2n} \log \log(y^n)} \leq \frac{8u}{\pi^2}\right) = 1.$$

Por último, de la monotonía de $D(x)$ se concluye la cota superior para del límite superior.

Obtendremos ahora las cotas para el límite inferior. Análogo al desarrollo anterior tomemos $u > 1$ y usando la segunda estimación del Lema 4.2 observamos que existe $N \in \mathbb{R}$ tal que para toda $x > N$ se satisface

$$\mathbb{P}\left(\frac{1}{D(1)} > 2u \log \log(x)\right) \leq C \frac{1}{\sqrt{2u \log \log(x)}} \exp\{-u \log \log(x)\} = C \frac{1}{\sqrt{2u \log \log(x)}} \frac{1}{(\log(x))^u},$$

donde $C > 2\sqrt{2/\pi}$ es una constante. Considerando nuevamente la sucesión $\{y^{2n}, n \geq 1\}$ y notando que para $x > e$

$$\frac{1}{\sqrt{2u \log \log(x)}} \frac{1}{(\log(x))^u} \leq \frac{1}{(\log(x))^u},$$

una aplicación del Lema de Borel-Cantelli implica que

$$\mathbb{P}\left(\limsup_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2}{D(x) \log \log(x)} > 2u\right) = 0.$$

Por lo tanto

$$\mathbb{P}\left(\liminf_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2}{D(x) \log \log(x)} \leq 2u\right) = \mathbb{P}\left(\liminf_{x \rightarrow \infty} \frac{D(x)}{x^2 / \log \log(x)} \geq \frac{1}{2u}\right) = 1.$$

Basta verificar que

$$\liminf_{x \rightarrow \infty} \frac{D(x)}{x^2 / \log \log(x)} \leq \frac{1}{2},$$

para hallar el límite inferior. Consideremos la representación de Pitman para el proceso de Bessel de dimensión tres R , i.e.

$$R_t = 2S_t - B_t,$$

donde B es un movimiento browniano estándar y $S_t = \sup_{s \leq t} B_s$. Sea τ_x la primera vez que el movimiento browniano alcanza el nivel x . Observemos que en virtud de la Proposición 4.7 τ_x es un subordinador, además la Proposición 4.8 nos dice que la última vez que el proceso R visita el nivel x es, precisamente, τ_x ; por ende

$$\int_0^\infty \mathbb{1}_{\{R_t \leq x\}} dt = \int_0^{\tau_x} \mathbb{1}_{\{R_t \leq x\}} dt \leq \tau_x,$$

es decir $D(x) \leq \tau_x$. También sabemos, gracias a la Proposición 4.7, que el exponente de Laplace de τ_x , el cual denotamos por $\Phi(\lambda) = \sqrt{2\lambda}$, es de variación regular de índice $\frac{1}{2}$ para $0+$ y para ∞ , i.e

$$\lim_{\lambda \rightarrow 0+} \frac{\Phi(q\lambda)}{\Phi(\lambda)} = \sqrt{q} \quad y \quad \lim_{\lambda \rightarrow \infty} \frac{\Phi(q\lambda)}{\Phi(\lambda)} = \sqrt{q}.$$

Por último, denotando por $\varphi = \Phi^{-1}$ observamos que $\varphi(x) = \frac{x^2}{2}$. Los comentarios anteriores implican que la función f de (4.4) toma la siguiente forma

$$f(t) = \frac{\log \log(t)}{\varphi(t^{-1} \log \log(t))} = \frac{2t^2}{\log \log(t)}.$$

Por lo tanto, aplicando el segundo inciso del Teorema 4.9 observamos que

$$\liminf_{x \rightarrow \infty} \frac{D(x)}{x^2 / \log \log(x)} \leq \liminf_{x \rightarrow \infty} \frac{\tau_x}{x^2 / \log \log(x)} = 2 \liminf_{x \rightarrow \infty} \frac{\tau_x}{f(x)} = \frac{1}{2},$$

lo que concluye la cota para el límite inferior.

Ahora mostraremos que el inicio es irrelevante. Para ello denotaremos por $D(a; x) = \int_{\tau_a}^\infty \mathbb{1}_{\{R_t < a+x\}} dt$, el tiempo que el proceso R pasa por debajo del nivel $a+x$ después de su última visita al nivel a . Observando que gracias a la representación de Pitman tenemos,

$$\begin{aligned} R_t = 2S_t - B_t &= 2 \sup_{\tau_a \leq s \leq t} B_s - B_t = 2 \sup_{\tau_a \leq s \leq t} (B_s - B_{\tau_a} + a) - B_t \\ &\stackrel{\mathcal{L}}{=} 2 \sup_{\tau_a \leq s \leq t} (B_{s-\tau_a}) - (B_t - a) + a \stackrel{\mathcal{L}}{=} 2 \sup_{\tau_a \leq s \leq t} (B_{s-\tau_a}) - (B_{t-\tau_a}) + a \\ &= 2S_{t-\tau_a} - B_{t-\tau_a} + a = R_{t-\tau_a} \end{aligned}$$

Por lo tanto

$$D(a; x) = \int_{\tau_a}^{\tau_{a+x}} \mathbb{1}_{\{R_t \leq a+x\}} dt \stackrel{\mathcal{L}}{=} \int_{\tau_a}^{\tau_{a+x}} \mathbb{1}_{\{R_{t-\tau_a} \leq x\}} dt = \int_0^{\tau_{a+x}-\tau_a} \mathbb{1}_{\{R_s \leq x\}} ds \stackrel{\mathcal{L}}{=} D(x).$$

La primera estimación del Lema 4,2 nos permite ver, para $0 < d < 1$

$$\left(\frac{D(a; x)}{x^2} > \frac{d8}{\pi^2} \log \log(x) \right) = \mathbb{P} \left(D(1) > \frac{d8}{\pi^2} \log \log(x) \right) \geq \frac{C''}{(\log(x))^d}$$

La representación de Pitman también implica que $D(a; x)$ y \mathcal{F}_{τ_a} son independientes, pues $R_t \in \mathcal{F}_{\tau_a}$ implica que $D(a; x)$ es independiente de $\{R_t, 0 < t < \tau_a\}$. Consideremos a $x > 1$ y a la sucesión de v.a $\{D(x^n, x^n(x-1)), n \geq 1\}$, las cuales son independientes conforme n varía. Por lo tanto

$$\mathbb{P}\left(\frac{D(x^n; x^n(x-1))}{(x^n(x-1))^2} > \frac{8d}{\pi^2} \log \log(x^n(x-1))\right) \geq \frac{C''}{(\log(x^n(x-1)))^d}.$$

Observemos que

$$\sum_{n \geq 1} \frac{1}{(\log(x^n(x-1)))^d} = \sum_{n \geq 1} \frac{1}{(\log(x-1) + n \log x)^d} = \infty.$$

Por la ley 0-1 de Borel-Cantelli deducimos que

$$\mathbb{P}\left(\limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{D(x^n; x^n(x-1))}{(x^n(x-1))^2} > \frac{8d}{\pi^2} \log \log(x^n(x-1))\right) = 1,$$

En otras palabras

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{D(x^n; x^n(x-1))}{(x^n(x-1))^2 \log \log(x^n(x-1))} > \frac{8d}{\pi^2}, \quad c.s. \quad (4.5)$$

Para finalizar, notemos que por monotónia de D se satisface la siguiente desigualdad

$$D(x^{n+1}) \geq D(x^n; x^n(x-1)),$$

y recordando (4.5) concluimos

$$\begin{aligned} \limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{D(x^{n+1})}{(x^{n+1})^2 \log \log(x^{n+1})} &\geq \limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{D(x^n; x^n(x-1))}{(x^{n+1})^2 \log \log(x^{n+1})} \\ &= \left(\frac{x-1}{x}\right)^2 \limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{D(x^n; x^n(x-1))}{(x^n(x-1))^2 \log \log(x^n)} \frac{\log \log(x^n)}{\log \log(x^{n+1})} \\ &= \left(\frac{x-1}{x}\right)^2 \frac{8}{\pi^2}. \end{aligned}$$

Debido a que esto se satisface para x suficientemente grande hemos hallado la cota inferior del límite superior. Con todo lo anterior vemos que (4.1) es válida.

La demostración del comportamiento asintótico cuando x tiendo cero, en otras palabras, la ecuación (4.2) es completamente análogo, con el único cambio de que usamos el primer inciso del Teorema 4.9 en lugar del segundo. \square

A Descomposición de Wiener-Hopf para caminatas aleatorias

A.1. Wiener-Hopf para caminatas aleatorias

Sea $\{\xi_i, i \geq 1\}$ una sucesión de variables aleatorias independientes e idénticamente distribuidas (v.a.i.i.d), con distribución común F . Definamos

$$S_0 = 0, \quad \text{y } S_n = \sum_{i=0}^n \xi_i,$$

con lo cual construimos la caminata aleatoria $S = \{S_n, n \geq 0\}$. Para evitar casos no interesantes asumiremos que

$$\min\{F(0, \infty), F(-\infty, 0)\} > 0,$$

es decir, la caminata posee saltos tanto positivos como negativo. Por conveniencia asumiremos que F no posee átomos.

Debido a que la descomposición de Wiener-Hopf hace uso de leyes infinitamente divisibles, daremos un breve repaso de estas. Una variable aleatoria X definida sobre $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ es infinitamente divisible si

$$X \stackrel{\mathcal{L}}{=} \sum_{i=1}^n X_{i,n}, \quad \text{para toda } n$$

donde las variables aleatorias $\{X_{i,n}, i = 1, \dots, n\}$ son independientes idénticamente distribuidas. Denotaremos por $\phi_X(t)$ a la función característica de la v.a X , es decir

$$\phi_X(t) = \mathbb{E}[e^{itX}].$$

En virtud de la unicidad de la función característica, lo anterior se expresa $\phi_X(t) = (\phi_{X_{i,n}})^n$. A veces resulta conveniente expresar la función de distribución de una v.a infinitamente divisible en términos de convoluciones. Supongamos que la función de distribución de la v.a infinitamente divisible, X , es G , y la función de distribución de $X_{i,n}$ es G_i . Entonces $G = G_i^{*n}$, donde G_i^{*n} denota la n -ésima convolución de la función de G_i .

En particular, la variable aleatoria geométrica de parámetro p , definida sobre $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$, la cual denotamos por Γ_p , es infinitamente divisible. Para verlo recordemos

$$\phi_{\Gamma_p}(t) = \sum_{i=0}^{\infty} p(qe^{it})^i = \frac{p}{1 - qe^{it}},$$

donde $q = 1 - p$, y observemos que $\frac{p}{1-qe^{it}} = \left(\left(\frac{p}{1-qe^{it}} \right)^{1/n} \right)^n$, donde identificamos a $\left(\frac{p}{1-qe^{it}} \right)^{1/n}$ como la función característica de una variable aleatoria Binomial Negativa de parámetros $(p, 1/n)$.

Las siguientes propiedades, aún con su simpleza, son de una gran utilidad en el desarrollo de esta sección.

1. La primera propiedad es $P(\Gamma_p \geq n) = q^n$, la cual es inmediata

$$P(\Gamma_p \geq n) = \sum_{i=n}^{\infty} pq^i = pq^n \sum_{i=0}^{\infty} q^i = q^n.$$

2. La v.a geométrica carece de memoria, es decir $\mathbb{P}(\Gamma_p \geq n + m | \Gamma_p \geq m) = \mathbb{P}(\Gamma_p \geq n)$, la cual también es inmediata, gracias a la propiedad anterior

$$\mathbb{P}(\Gamma_p \geq n + m | \Gamma_p \geq m) = \frac{\mathbb{P}(\Gamma_p \geq n + m)}{\mathbb{P}(\Gamma_p \geq m)} = \frac{q^{n+m}}{q^m} = q^n.$$

3. La suma geométrica de v.a.i.i.d es infinitamente divisible. Es decir, sea $\{\xi_i, i \geq 1\}$ un sucesión de v.a.i.i.d y Γ_p una v.a geométrica independiente de la sucesión anterior. Entonces la variable aleatoria $\sum_{i=1}^{\Gamma_p} \xi_i$ es infinitamente divisible, lo cual es claro pues

$$\mathbb{E} \left[e^{it \sum_{i=1}^{\Gamma_p} \xi_i} \right] = \mathbb{E} \left[\mathbb{E} \left[e^{it \sum_{i=1}^{\Gamma_p} \xi_i} \middle| \Gamma_p \right] \right] = \sum_{n=0}^{\infty} p(q\phi_{\xi}(t))^n = \frac{p}{1 - q\phi_{\xi}(t)} = \left(\mathbb{E} \left[e^{it\Lambda_{1/n,p}} \right] \right)^n$$

e identificamos a $\Lambda_{1/n,p}$ como una v.a binomial negativa de parámetros $(1/n, p)$.

La fórmula de Lévy-Khintchine nos dice que toda v.a infinitamente divisible X posee un exponente característico de la siguiente forma,

$$\psi(t) = iat + \frac{1}{2}b^2 + \int_{\mathbb{R}} (1 - e^{itx} + itx \mathbb{1}_{\{|x|<1\}}) \Pi(dx),$$

es decir $\mathbb{E}[e^{itX}] = e^{-\Psi(t)}$, donde $a, b \in \mathbb{R}$ y Π es una medida con soporte en $\mathbb{R} \setminus \{0\}$, tal que

$$\int_{\mathbb{R}} (1 \wedge |x|^2) \Pi(dx) < \infty.$$

Nos enfocamos ahora en la descomposición de Wiener-Hopf, teniendo en mente todos los objetos anteriores. Fijemos $0 < p < 1$ y definamos

$$G = \inf \{k = 0, \dots, \Gamma_p S_k = \bar{S}_{\Gamma_p}\},$$

donde Γ_p es una v.a geométrica independiente de la caminata aleatoria S y $\bar{S}_{\Gamma_p} = \sup_{k=0, \dots, \Gamma_p} S_k$. Ahora definimos

$$\gamma_1 = \inf \{n > 0 : S_n > 0\},$$

es decir, la primera visita al intervalo $(0, \infty)$ después del tiempo cero.

Teorema A.1 (La descomposición de Wiener-Hopf para caminatas aleatorias).

Sea $S = \{S_n, n \geq 0\}$ una caminata aleatoria que inicia en cero, tal que la distribución de S_1 es F . Sea Γ_p una v.a geométrica de parámetro fijo $p \in (0, 1)$, independiente de S . Defina G y γ de la misma forma que antes. Entonces

(i) (G, S_G) es independiente de $(\Gamma_p - S, S_{\Gamma_p} - G)$ y ambos pares son infinitamente divisibles.

(ii) Para $0 < s \leq 1$ y $t \in \mathbb{R}$

$$\mathbb{E}[s^G e^{S_G}] = \exp \left\{ - \int_{(0, \infty)} \sum_{n=1}^{\infty} (1 - s^n e^{itx}) \frac{q^n}{n} F^{*n}(dx) \right\}.$$

(iii) Para $0 < s \leq 1$ y $t \in \mathbb{R}$

$$\mathbb{E}[s^{\gamma_1} e^{S_{\gamma_1}}] = 1 - \exp \left\{ - \int_{(0, \infty)} \sum_{n=1}^{\infty} s^n e^{itx} \frac{1}{n} F^{*n}(dx) \right\}.$$

Demostración. Denotemos por γ_k los tiempos en que la caminata aleatoria y el proceso del máximo coinciden, de la manera usual,

$$\gamma_0 = 0, \quad \gamma_{k+1} = \inf \{n > \gamma_k : S_n > S_{\gamma_k}\}, \quad k \geq 0,$$

la cual es consistente con γ_1 introducida anteriormente, pues la caminata inicia en cero; es decir $\gamma_1 = \inf \{n > 0 : S_n > 0\}$, corresponde al primer máximo. Definamos a las excursiones que parten de los máximos como δ_k , es decir,

$$\omega_k = (S_n, \gamma_{k-1} \leq n \leq \gamma_k), \quad \text{para } k \geq 0.$$

Gracias a la propiedad fuerte de Markov, podemos ver (como ya lo hicimos en el capítulo 1), que $\omega_k \stackrel{\mathcal{L}}{=} \omega_1$. Debido a que únicamente estamos considerando a la caminata aleatoria hasta el tiempo Γ_p , esta trayectoria se puede descomponer en un número aleatorio, ν , de excursiones (completas) ω_k y una excursión adicional ω_{Γ_p} la cual delimita la trayectoria original. En otras palabras

$$\omega_{\Gamma_p} = (S_n, \gamma_\nu \leq n \leq \Gamma_p).$$

Observemos que

$$\mathbb{P}(\nu = 0) = \mathbb{P}(\gamma_1 > \Gamma_p) = 1 - \mathbb{P}(\gamma_1 \leq \Gamma_p).$$

Ahora, condicionado en el evento $\{\gamma_1 \leq \Gamma_p\}$, tenemos al menos una excursión completa. Como estas tienen la misma ley, podemos ver que

$$\mathbb{P}(\nu = k) = \mathbb{P}(\gamma_1 \leq \Gamma_p)^k (1 - \mathbb{P}(\gamma_1 \leq \Gamma_p)),$$

lo que implica que ν se distribuye como una v.a geométrica de parámetro $1 - \mathbb{P}(\gamma_1 \leq \Gamma_p)$. Por lo tanto

$$(G, S_G) \stackrel{\mathcal{L}}{=} \sum_{i=1}^{\nu} (\tau_i, S_{\tau_i}),$$

donde $\tau_i = \gamma_i - \gamma_{i-1}$. Gracias a la propiedad fuerte de Markov tenemos, para toda $i \geq 1$ que $\tau_i \stackrel{\mathcal{L}}{=} \gamma_1$ y $S_{\tau_i} \stackrel{\mathcal{L}}{=} S_{\gamma_1}$. Observamos que (G, S_G) es infinitamente divisible puesto que es la suma geométrica de v.a.i.i.d. En caso de que $\nu = 0$, interpretamos a $(G, S_G) = (0, 0)$. La independencia entre (G, S_G) y $(\Gamma_p - G, S_{\Gamma_p} - S_G)$ se sigue de la propiedad fuerte de Markov y de la descomposición anterior. Por último observemos que gracias al retorno de tiempo

$$\begin{aligned} S_{\Gamma_p} - S_G &= S_{\Gamma_p} - \bar{S}_{\Gamma_p} = S_{\Gamma_p} + \inf \{-S_n, n = 0, \dots, \Gamma_p\} \\ &= \inf \{S_{\Gamma_p} - S_{\Gamma_p - n}, n = 0, \dots, \Gamma_p\} \stackrel{\mathcal{L}}{=} \underline{S}_{\Gamma_p}, \end{aligned}$$

lo anterior nos dice

$$(\Gamma_p - S_G, S_{\Gamma_p} - S_G) \stackrel{\mathcal{L}}{=} (D, S_D),$$

donde $D = \sup \left\{ k = 0, 1, \dots, \Gamma_p : S_k = \underline{S}_{\Gamma_p} \right\}$ y $\underline{S}_{\Gamma_p} = \inf_{k=0,1,\dots,\Gamma_p} S_k$.

Para el segundo inciso notemos que el par (Γ_p, S_{Γ_p}) es la suma geométrica de v.a.i.i.d, entonces es infinitamente divisible. Consideremos $s \in (0, 1)$ y $t \in \mathbb{R}$ fijas, recordando que $q = 1 - p$ y que $\phi_X(t) = \mathbb{E}[e^{itX}]$, tenemos, por un lado

$$\mathbb{E}[s^{\Gamma_p} e^{S_{\Gamma_p}}] = \mathbb{E} \left[[s^{\Gamma_p} e^{S_{\Gamma_p}} | \Gamma_p] \right] \mathbb{E} \left[\sum_{n=0}^{\infty} p(q\phi_{S_1}(t))^n \right] = \frac{p}{1 - q\phi_{S_1}(t)}.$$

Por otro lado, usando el Teorema de Tonelli-Fubini, recordando que la distribución de S_n es F^{*n} y la propiedad multiplicativa de la función característica, tenemos

$$\begin{aligned} \exp \left\{ - \int_{\mathbb{R}} \sum_{n=1}^{\infty} (1 - s^n e^{itx}) \frac{q^n}{n} F^{*n}(dx) \right\} &= \exp \left\{ - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{q^n}{n} \left(1 - s^n \int_{\mathbb{R}} e^{itx} F^{*n}(dx) \right) \right\} \\ &= \exp \left\{ - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{q^n}{n} (1 - s^n \phi_{S_n}(t)) \right\} \\ &= \exp \left\{ - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{q^n}{n} (1 - (s\phi_{S_1}(t))^n) \right\} \\ &= \exp \{ \log(1 - q) - \log(1 - s\phi_{S_1}(t)) \} \\ &= \frac{p}{1 - s\phi_{S_1}(t)}. \end{aligned}$$

Para justificar la penúltima igualdad observemos que cuando $|a| < 1$, sabemos que $(1-a)^{-1} = \sum_{n=0}^{\infty} a^n$ e integrando en función de a obtenemos

$$-\log(1 - a) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a^{n+1}}{n+1} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a^n}{n},$$

la cual es conocida como serie de Mercator-Newton. Comparando las dos series obtenidas concluimos que

$$\mathbb{E}[s^{\Gamma_p} e^{S_{\Gamma_p}}] = \exp \left\{ - \int_{\mathbb{R}} \sum_{n=1}^{\infty} (1 - s^n e^{itx}) \frac{q^n}{n} F^{*n}(dx) \right\}.$$

Sabemos, además, que (Γ_p, S_{Γ_p}) es infinitamente divisible e igual en ley a la suma de las v.a. infinitamente divisibles $(G, S_G) + (\Gamma_p - G, S_{\Gamma_p} - S_G)$. Notemos que, al ser $S_G > 0$, el primer sumando está definido en $\{1, 2, \dots\} \times (0, \infty)$, y el segundo, en $\{1, 2, \dots\} \times (-\infty, 0)$. Debido a que ambas funciones son analíticas pueden ser extendidas. La fórmula de Lévy-Khintchine implica que

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[s^G e^{S_G}] &= \exp \left\{ - \int_{(0, \infty)} \sum_{n=1}^{\infty} (1 - s^n e^{itx}) \frac{q^n}{n} F^{*n}(dx) \right\}, \quad (\text{A.1}) \\ \mathbb{E}[s^{\Gamma_p - G} e^{\Gamma_p - S_G}] &= \exp \left\{ - \int_{(-\infty, 0)} \sum_{n=1}^{\infty} (1 - s^n e^{itx}) \frac{q^n}{n} F^{*n}(dx) \right\}. \end{aligned}$$

Por último demostramos el tercer inciso. Gracias al inciso (i) podemos ver que

$$\mathbb{E}[s^G e^{itS_G}] = \mathbb{E} \left[s^{\sum_{k=1}^{\nu} \tau_k} e^{it \sum_{k=1}^{\nu} S_{\tau_k}} \right],$$

donde los pares $\{\tau_k, S_{\tau_k}, k \geq 1\}$ son independientes e iguales en distribución a $\{\gamma_1, S_{\gamma_1}\}$ bajo el evento $\{\gamma_1 \leq \Gamma_p\}$. Puesto que ν se distribuye de manera geométrica de parámetro $1 - \mathbb{P}(\gamma_1 \leq \Gamma_p)$, se sigue

$$\begin{aligned} \mathbb{E} \left[s^{\sum_{k=1}^{\nu} \tau_k} e^{it \sum_{k=1}^{\nu} S_{\tau_k}} \right] &= \mathbb{E} \left[\mathbb{E} \left[s^{\sum_{k=1}^{\nu} \tau_k} e^{it \sum_{k=1}^{\nu} S_{\tau_k}} \mid \nu \right] \right] \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \mathbb{P}(\gamma_1 > \Gamma_p) \mathbb{P}(\gamma_1 \leq \Gamma_p)^n \mathbb{E} \left[s^{\sum_{k=1}^n \tau_k} e^{it \sum_{k=1}^n S_{\tau_k}} \right] \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \mathbb{P}(\gamma_1 > \Gamma_p) \left(\mathbb{P}(\gamma_1 \leq \Gamma_p) \mathbb{E} \left[s^{\gamma_1} e^{it S_{\gamma_1}} \mid \gamma_1 \leq \Gamma_p \right] \right)^n \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \mathbb{P}(\gamma_1 > \Gamma_p) \left(\mathbb{E} \left[s^{\gamma_1} e^{it S_{\gamma_1}} \mathbf{1}_{\{\gamma_1 \leq \Gamma_p\}} \right] \right)^n, \end{aligned}$$

debido γ_1 es un tiempo de paro de la cadena S , y Γ_p es independiente de esta, tenemos

$$\begin{aligned} \mathbb{E} \left[s^{\gamma_1} e^{it S_{\gamma_1}} \mathbf{1}_{\{\gamma_1 \leq \Gamma_p\}} \right] &= \mathbb{E} \left[\mathbb{E} \left[s^{\gamma_1} e^{it S_{\gamma_1}} \mathbf{1}_{\{\gamma_1 \leq \Gamma_p\}} \mid \Gamma_p \right] \right] \\ &= \mathbb{E} \left[s^{\gamma_1} e^{it S_{\gamma_1}} \right] \mathbb{P}(\gamma_1 \leq \Gamma_p) = \mathbb{E} \left[s^{\gamma_1} e^{it S_{\gamma_1}} \right] \mathbb{E} [q^{\gamma_1}], \end{aligned}$$

donde la última igualdad se debe a la propiedad 1 de la v.a geométrica. Este pequeño paréntesis nos permite resumir el desarrollo anterior de la siguiente manera

$$\begin{aligned} \sum_{n=0}^{\infty} \mathbb{P}(\gamma_1 > \Gamma_p) \left(\mathbb{E} \left[s^{\gamma_1} e^{it S_{\gamma_1}} \mathbf{1}_{\{\gamma_1 \leq \Gamma_p\}} \right] \right)^n &= \sum_{n=0}^{\infty} \mathbb{P}(\gamma_1 > \Gamma_p) \left(\mathbb{E} \left[(qs)^{\gamma_1} e^{it S_{\gamma_1}} \right] \right)^n \\ &= \frac{\mathbb{P}(\gamma_1 > \Gamma_p)}{1 - \mathbb{E} \left[(qs)^{\gamma_1} e^{it S_{\gamma_1}} \right]}. \end{aligned}$$

Observemos que, por continuidad, podemos tomar $s = 0$ tanto en la ecuación (A.1) como en la igualdad anterior, lo que nos conduce a

$$\mathbb{P}(\gamma_1 > \Gamma_p) = \exp \left\{ - \int_{(0, \infty)} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{q^n}{n} F^{*n}(dx) \right\}.$$

Colocando las piezas en el orden adecuado y haciendo uso nuevamente de (A.1) obtenemos

$$\begin{aligned} 1 - \mathbb{E} \left[(qs)^{\gamma_1} e^{it S_{\gamma_1}} \right] &= \frac{\mathbb{P}(\gamma_1 > \Gamma_p)}{\mathbb{E} [s^{\gamma_1} e^{it S_{\gamma_1}}]} \\ &= \exp \left\{ \int_{(0, \infty)} \sum_{n=1}^{\infty} (1 - s^n e^{itx}) \frac{q^n}{n} F^{*n}(dx) - \int_{(0, \infty)} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{q^n}{n} F^{*n}(dx) \right\} \\ &= \exp \left\{ - \int_{(0, \infty)} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(qs)^n}{n} e^{itx} F^{*n}(dx) \right\}, \end{aligned}$$

lo que concluye la prueba. \square

A.2. La identidad básica

La descomposición de Wiener-Hopf nos permite responder preguntas pertinentes a los procesos escalera, tanto ascendentes como descendentes. Un resultado inmediato del inciso (iii) en el Teorema

A.1 es calcular $\mathbb{E}[s^{\hat{\gamma}} e^{S_{\hat{\gamma}}}]$, donde $\hat{\gamma} = \inf \{k \geq 0 : S_k < 0\}$, la cual posee una expresión similar sobre $(-\infty, 0)$, es decir

$$\mathbb{E}[s^{\hat{\gamma}} e^{S_{\hat{\gamma}}}] = 1 - \exp \left\{ - \int_{(-\infty, 0)} \sum_{n=0}^{\infty} s^n e^{itx} \frac{1}{n} F^{*n}(dx) \right\}.$$

Corolario A.2 (La identidad básica). Consideremos la notación empleada hasta ahora, entonces

$$1 - s\mathbb{E}[e^{itS_1}] = \left(1 - \mathbb{E}[s^{\hat{\gamma}} e^{S_{\hat{\gamma}}}] \right) \left(1 - \mathbb{E}[s\gamma_1 e^{S_{\gamma_1}}]\right).$$

Demostración. Gracias al Teorema de Tonelli-Fubini, la propiedad multiplicativa de la función característica y la serie de Mercator-Newton conseguimos

$$\begin{aligned} \left(1 - \mathbb{E}[s^{\hat{\gamma}} e^{S_{\hat{\gamma}}}] \right) \left(1 - \mathbb{E}[s\gamma_1 e^{S_{\gamma_1}}]\right) &= \exp \left\{ - \int_{\mathbb{R}} \sum_{n=0}^{\infty} s^n e^{itx} \frac{1}{n} F^{*n}(dx) \right\} \\ &= \exp \left\{ - \sum_{n=0}^{\infty} s^n \frac{1}{n} \int_{\mathbb{R}} e^{itx} F^{*n}(dx) \right\} \\ &= \exp \left\{ - \sum_{n=0}^{\infty} \frac{s^n}{n} \phi_{S_1}(t)^n \right\} \\ &= \exp \left\{ - \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(s\phi_{S_1}(t))^n}{n} \right\} \\ &= 1 - s\phi_{S_1}(t), \end{aligned}$$

lo que concluye la prueba. □

Observación: al tomar $s = 1$ en el corolario anterior, obtenemos la siguiente relación de funciones características

$$1 - \phi_{S_1}(t) = (1 - \phi_{S_{\hat{\gamma}}}(t)) (1 - \phi_{S_{\gamma_1}}(t)).$$

Proposición A.3. Suponga que $\mathbb{E}[S_1] = 0$ y $\mathbb{E}[S_1^2] = 1$. Entonces, tanto $\mathbb{E}[S_{\gamma_1}]$ como $\mathbb{E}[S_{\hat{\gamma}}]$ son finitas. Más aún

$$\mathbb{E}[-S_{\hat{\gamma}}] \mathbb{E}[S_{\gamma_1}] = \frac{1}{2}.$$

Demostración. Recordemos la siguiente propiedad de la función característica.

$$\phi_X^{(k)}(0) = i^k \mathbb{E}[X^k], \quad \forall t \in \mathbb{R}. \quad (\text{A.2})$$

Entonces, haciendo uso de la hipótesis, tenemos

$$\phi_{S_1}''(0) = -\mathbb{E}[S_1^2] = -1. \quad \text{y} \quad \phi_{S_1}'(0) = i\mathbb{E}[S_1] = 0.$$

Por ende

$$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{1 - \phi_{S_1}(t)}{t^2} = \lim_{t \rightarrow 0} \left(\frac{1 - \phi_{S_{\hat{\gamma}}}(t)}{t} \right) \lim_{t \rightarrow 0} \left(\frac{1 - \phi_{S_{\gamma_1}}(t)}{t} \right).$$

Por un lado, gracias a la ecuación (A.2), el lado derecho de la igualdad anterior es $-\mathbb{E}[S_{\hat{\gamma}}] \mathbb{E}[S_{\gamma_1}]$.

Por otro lado

$$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{1 - \phi_{S_1}(t)}{t^2} = \lim_{t \rightarrow 0} -\frac{\phi_{S_1}'(t)}{2t} = -\frac{1}{2} \lim_{t \rightarrow 0} \phi_{S_1}''(t) = \frac{1}{2}.$$

Finalmente acomodando las piezas en el orden adecuado notamos

$$\mathbb{E}[-S_{\hat{\gamma}}] \mathbb{E}[S_{\gamma_1}] = \frac{1}{2},$$

concluyendo el resultado. □

Bibliografía

- [1] Asmussen, S. y Hering, H. (1983). *Branching processes, volume 3 of Progress in Probability and Statistics*. Birkhäuser Boston Inc., Boston, MA.
- [2] Bertoin, J. (1993). Splitting at the infimum and excursions in half-lines for random walks and lévy processes. *Stochastic processes and their applications*, 47(1), 17–35.
- [3] Bertoin, J. (1996). *Lévy processes*, volume 121. Cambridge university press.
- [4] Biggins, J. (2003). Random walk conditioned to stay positive. *Journal of the London Mathematical Society*, 67(01), 259–272.
- [5] Caravenna, F. y Chaumont, L. (2008). Invariance principles for random walks conditioned to stay positive. In *Annales de l'IHP Probabilités et statistiques*, volume 44 (pp. 170–190).
- [6] Chandra, T. K. (2012). *The Borel-Cantelli Lemma*. Springer Science y Business Media.
- [7] Chow, Y. S. y Teicher, H. (2012). *Probability theory: independence, interchangeability, martingales*. Springer Science y Business Media.
- [8] Ciesielski, Z. y Taylor, S. (1962). First passage times and sojourn times for brownian motion in space and the exact hausdorff measure of the sample path. *Transactions of the American Mathematical Society*, (pp. 434–450).
- [9] Doney, R. (1989). Last exit times for random walks. *Stochastic Processes and their Applications*, 31(2), 321–331.
- [10] Doney, R. A. (2005). Tanaka's construction for random walks and lévy processes. In *Séminaire de Probabilités XXXVIII* (pp. 1–4). Springer.
- [11] Feller, W. (2008). *An introduction to probability theory and its applications*, volume 2. John Wiley y Sons.
- [12] Folland, G. B. (2013). *Real analysis: modern techniques and their applications*. John Wiley y Sons.
- [13] Gruet, J.-C. y Shi, Z. (1996). The occupation time of brownian motion in a ball. *Journal of Theoretical Probability*, 9(2), 429–445.
- [14] Kolmogorov, A. y Fomin, S. (1975). *Introductory real analysis*, volume 100.

- [15] Lawler, G. F. y Limic, V. (2010). *Random walk: a modern introduction*, volume 123. Cambridge University Press.
- [16] Mörters, P. y Peres, Y. (2010). *Brownian motion*, volume 30. Cambridge University Press.
- [17] Resnick, S. I. (2013). *Adventures in stochastic processes*. Springer Science y Business Media.
- [18] Revuz, D. y Yor, M. (1999). *Continuous martingales and Brownian motion*, volume 293. Springer Science y Business Media.
- [19] Spitzer, F. (2013). *Principles of random walk*, volume 34. Springer Science y Business Media.