



CIMAT

CENTRO DE INVESTIGACIÓN EN MATEMÁTICAS A.C

JUEGOS DE CAMPO MEDIO EN TIEMPO DISCRETO
Y
RIESGO SISTÉMICO

T E S I S

QUE PARA OBTENER EL GRADO DE:
MAESTRO EN CIENCIAS CON ESPECIALIDAD EN
PROBABILIDAD Y ESTADÍSTICA

PRESENTA:
GERMÁN SINUHÉ AYALA FUENTES

DIRECTOR DE TESIS:
DR. DANIEL HERNÁNDEZ HERNÁNDEZ

2015

Jurado Examinador

Dr. Erik Jan Baurdoux
Centro de Investigación en Matemáticas, A.C.
PRESIDENTE

Dr. Erick Treviño Aguilar
Universidad de Guanajuato
SECRETARIO

Dr. Daniel Hernández Hernández
Centro de Investigación en Matemáticas, A.C.
VOCAL Y DIRECTOR DE LA TESIS

A mis padres y hermanas.

“You can, for example, never foretell what any one man will do, but you can say with precision what an average number will be up to. Individuals vary, but percentages remain constant. So says the statistician.”

Sherlock Holmes
The Singn of the Four

Agradecimientos

A mis padres, J. Carmen y Martha Elena, quienes han sido mi mayor apoyo, guía e inspiración a lo largo de toda mi vida. A mis hermanas, Silviana Isis y Neftis Elena, quienes me brindan cariño y aliento. A Ana Bety, quien me acompañó y motivó a lo largo de esta etapa.

Agradezco especialmente a mi asesor, el Dr. Daniel Hernández Hernández, por las enseñanzas, el apoyo, la paciencia y el impulso que me proporcionó, como profesor y como director de tesis.

A mis sinodales, el Dr. Erik Jan Baurdoux y el Dr. Erick Treviño Aguilar, por su interés en este trabajo y sus valiosos comentarios.

A mi tutora, la Dra. Ekaterina Todorova Kolkovska, por su supervisión y comentarios a lo largo de la maestría.

Al Centro de Investigación en Matemáticas, por proveer el ambiente idóneo para el desarrollo académico. A los profesores de quienes tuve la fortuna de recibir clases, por compartir sus conocimientos de una manera extraordinaria. A mis compañeros y amigos, con quienes conviví durante estos dos años, intercambiando dudas, opiniones y experiencias.

Finalmente, al Consejo Nacional de Ciencia y Tecnología, por el apoyo económico brindado para la realización de mis estudios de posgrado.

Índice general

Introducción	1
1. Riesgo Sistémico	5
1.1. Sistema financiero y riesgo sistémico	5
1.2. Medición del riesgo sistémico	7
1.2.1. Efecto de un agente financiero	7
1.2.2. Efecto de la interconexión del sistema financiero	8
2. Juegos de Campo Medio: Tiempo Discreto	15
2.1. Procesos de control de Markov	17
2.1.1. Construcción canónica	19
2.1.2. Estrategias de Markov	20
2.1.3. Propiedad de Markov	22
2.1.4. Ecuación de programación dinámica	23
2.2. Teoría de juegos	24
2.2.1. Juegos estáticos	25
2.2.2. Juegos dinámicos	28
2.3. Juegos con espacio de estados finito	29
2.3.1. Equilibrio de campo medio	30
2.3.2. Juego con N jugadores	33
3. Modelo del Riesgo Sistémico	41
3.1. Modelo de préstamos interbancarios	41
3.2. Equilibrio de campo medio	46
3.3. Riesgo sistémico	52
Conclusiones	55
Apéndices	57
A. Preferencias y funciones utilidad	57
B. Espacios métricos	59
C. Teoremas de punto fijo	60
Bibliografía	63

Introducción

Un marco común para estudiar sistemas económicos dinámicos es mediante *juegos estocásticos*. Un *juego* es una representación formal de una situación en la que varios agentes interactúan en un entorno de interdependencia. En este contexto, los agentes eligen estrategias o planes contingentes para realizar acciones ante diferentes situaciones. Estas acciones afectan directamente a variables de estado, con el objetivo de optimizar la utilidad esperada, en muchos casos referida como ganancia o costo esperado.

El concepto estándar de una solución para un juego estocástico es un *equilibrio perfecto de Markov*, donde la estrategia de equilibrio de los jugadores depende del estado actual de todos los jugadores. Estos equilibrios, como una herramienta de análisis, presenta dos importantes obstáculos, especialmente cuando el número de jugadores es grande. En primer lugar, la dimensión del espacio de estados se expande con el número de jugadores en el sistema, haciendo imposible el cálculo del equilibrio perfecto de Markov en diversos problemas de interés práctico. En segundo lugar, cuando el número de jugadores es muy grande, es inverosímil asumir que todos los jugadores conocen el comportamiento exacto de sus oponentes.

Los *juegos de campo medio* fueron introducidos por Lasry y Lions (2006a,b, 2007) como juegos diferenciales con un gran número de pequeños jugadores idénticos, en el sentido de que los jugadores tienen poca influencia en el sistema completo, y todos se comportan bajo el mismo criterio de optimización. De manera independiente y cercana en tiempo, Huang et al. (2006, 2007) desarrollaron ideas similares a este tipo de juegos. El nombre se debe a una analogía con los modelos de campo medio en física, donde se analiza el comportamiento de muchas partículas idénticas. Desde su reciente introducción a la fecha, estos juegos han recibido una considerable atención, siendo ahora un área de investigación en boga, verbigracia, el Congreso de la SIAM sobre control y sus aplicaciones (SIAM Conference on Control and its applications) celebrado en julio 2015, Francia.

La característica distintiva de los juegos es su estructura retrógrada-progresiva (backward-forward); esto es, un sistema de ecuaciones donde una es retrógrada en el tiempo y otra es progresiva en el tiempo. La ecuación retrógrada es asociada con un problema de control óptimo, mientras que la ecuación progresiva está asociada a la evolución de un proceso en el espacio de medidas de probabilidad. La idea de los juegos de campo medio es asumir que los jugadores tienen una visión más simple del sistema, en la que sólo el estado actual del individuo y la distribución actual de todos los jugadores es información relevante para el desarrollo del sistema. Además, bajo algunas condiciones, cuando el número de jugadores tiende a infinito, la distribución de los jugadores en

el espacio de estados converge a una distribución estacionaria. En este caso, se puede aproximar a la estrategia óptima si todos los jugadores eligen la estrategia que es óptima para la distribución estacionaria límite.

En tiempo discreto, uno de los trabajos más importantes es el de Gomes et al. (2010), donde se estudia un modelo con espacio de estados finito y un *continuum* de jugadores. Se analiza el comportamiento asintótico cuando el horizonte de tiempo tiende a infinito y se proporcionan condiciones para la convergencia a una solución estacionaria. Maldonado Lopez (2014) estudia un modelo de campo medio en tiempo discreto y espacio de estados finito. Construye un objeto límite y lo usa para aproximar un equilibrio de Nash de un juego cuando el número de individuos tiende a infinito. Adlakha et al. (2013) analizan un modelo en tiempo discreto con espacio de estados numerable, y dan las condiciones bajo las cuales existe un equilibrio estacionario, que son las mismas condiciones para que este equilibrio aproxime adecuadamente a un equilibrio perfecto de Markov, cuando el número de agentes tiende a infinito. Bodoh Creed (2012) utiliza un modelo en tiempo discreto con espacio de estados compacto y encuentra las condiciones para asegurar que un equilibrio de campo medio aproxima un equilibrio perfecto de Markov.

Los juegos estocásticos proveen un marco general para un rango amplio de situaciones económicas, en particular para modelar sistemas financieros. Quizá haya razones de sobra para estar interesados en estudiar el riesgo sistémico del sistema financiero, pues además de la complejidad y el reto que esto conlleva, hay acontecimientos recientes que pueden motivar este estudio. Por ejemplo, la crisis global de 2007-2009, que inició como una crisis en el mercado inmobiliario de EEUU, o la crisis de deuda soberana que desde finales de 2009 se tiene en la Eurozona. Estos dos ejemplos, entre otras cosas, muestran que las fallas en el sistema financiero impactan en el crecimiento económico y en la economía real.

La característica esencial del riesgo sistémico se refiere a la degradación severa de la capacidad del sistema financiero para funcionar como fue previsto (Fouque y Langsam, 2013). El hecho de que uno o varios componentes fallen simultáneamente, ponen en riesgo tal capacidad del sistema; sin embargo, el riesgo sistémico puede ser definido sin involucrar la falla de sus componentes. En realidad, no existe un acuerdo sobre la definición de riesgo sistémico, como tampoco hay una definición formal de una crisis sistémica que permita identificar cuándo una crisis empieza y cuándo termina. Fouque y Langsam (2013) definen al riesgo sistémico como el riesgo de una interrupción de la capacidad del mercado para facilitar los flujos de capital, que se traduce en la reducción del crecimiento de la producción global. En el Capítulo 1, retomamos la definición que De Bandt y Hartmann (2000) proponen, en términos de un evento sistémico donde se ven afectados muchos componentes del sistema. Ambos enfoques mantienen la característica esencial del riesgo sistémico; sin embargo, utilizamos la segunda porque se adecua más a la forma en que evaluamos el riesgo sistémico en este trabajo.

El propósito general de esta tesis es estudiar los juegos de campo medio en tiempo discreto, y emplear estos modelos para describir el comportamiento del sistema financiero. La estructura de este trabajo es la siguiente.

En el Capítulo 1 proveemos de un marco contextual sobre los sistemas financieros y el riesgo sistémico. Posteriormente, mencionamos los dos principales enfoques con los que se ha intentado estudiar este riesgo: analizando el efecto de un agente en el sistema financiero y analizando el efecto de la interconexión del sistema financiero. Es este segundo enfoque el que subyace en el presente

trabajo, por lo que explicamos brevemente dos artículos, que de hecho, fueron nuestra motivación inicial: *Mean field games and systemic risk* (Carmona et al., 2013) y *Large deviations for a mean field model of systemic risk* (Garnier et al., 2013b). En estos artículos, la dinámica de los agentes financieros es descrita por ecuaciones diferenciales estocásticas, con interacción de campo medio. El riesgo sistémico es modelado como grandes desviaciones de un estado estable, es decir, como la probabilidad de que el proceso de la media empírica pase a estar en una condición de falla. Estos modelos muestran cómo incrementar la cooperación, o interconexión, reduce la probabilidad de que un solo agente falle, pero aumenta la probabilidad de que falle el sistema completo. Las principales referencias utilizadas en este capítulo fueron, el *Handbook on Systemic Risk* editado por Fouque y Langsam (2013), y los artículos de Carmona et al. (2013) y Garnier et al. (2013b), para describir los modelos con interacción de campo medio.

En el Capítulo 2 abordamos varios tópicos que están involucrados en los juegos de campo medio. El propósito de este capítulo es dar los fundamentos teóricos y la intuición de los juegos de campo medio en tiempo discreto. Empezamos con una motivación de estos juegos en tiempo discreto. Posteriormente, en la Sección 2.1 abordamos los procesos de control de Markov, que sirve como pilar de los juegos estocásticos. Nos enfocamos en definir las estrategias de un agente, construir el espacio de probabilidad de un proceso de control y plantear la ecuación de programación dinámica. En la Sección 2.2 establecemos el marco necesario para extender un modelo de control de Markov a un modelo de juegos estocásticos. Definimos e interpretamos los perfiles de estrategias y los equilibrios de Nash. Con estas dos secciones como base, procedemos a definir el equilibrio de campo medio y plantear las condiciones bajo las cuales existe. Las principales referencias de este capítulo son Cardaliaguet (2010) para la parte de motivación, Hernández-Lerma y Lasserre (1996) para la sección de procesos de control de Markov, Fudenberg y Tirole (1991) para la sección de juegos, y Maldonado Lopez (2014) para el equilibrio de campo medio.

En el Capítulo 3 usamos lo descrito en el Capítulo 2 para hacer una adaptación del modelo de (Carmona et al., 2013), a tiempo discreto con espacio de estados finito. Planteamos la solución del juego de campo medio en términos de un sistema de ecuaciones retrógrado-progresivo, el análogo al tiempo continuo. La ecuación retrógrada corresponde a una ecuación de programación dinámica con condición terminal dada; y la parte progresiva corresponde al proceso de medidas de probabilidad sobre el espacio de estados, que describe la evolución de la distribución de los agentes en el espacio de estados, con condición inicial dada. Resolvemos este sistema con un algoritmo computacional, mismo que bosquejamos en el escrito. Este algoritmo, más allá de la implementación computacional que sugiere, proporciona la idea de una solución del sistema de ecuaciones retrógrado-progresivo, y una idea de la construcción de un equilibrio de Nash. Finalmente, hacemos una estimación vía el método Monte Carlo para calcular el riesgo sistémico para parámetros específicos. La sección de Apéndices que incluimos, es un breve material que puede servir de apoyo para contextualizar algunos de los conceptos utilizados en los tres capítulos centrales.

1 Riesgo Sistémico

En este capítulo definimos el riesgo sistémico asociado a un sistema financiero y mencionamos algunos métodos que se han utilizado para medirlo. Aunque el riesgo sistémico no está restringido al contexto financiero, se dice que es característico de los sistemas financieros debido a que la probabilidad de que ocurra un evento que afecte severamente a todo un sistema financiero no es despreciable.

1.1. Sistema financiero y riesgo sistémico

El *sistema financiero* desempeña un papel central en el funcionamiento y desarrollo de la economía. Está integrado principalmente por intermediarios y mercados financieros, a través de los cuales una variedad de instrumentos movilizan el ahorro hacia sus usos más productivos. Merton y Bodie (1995) definen a un sistema financiero centrándose en sus funciones, e identifican seis principales:

- Compensación y liquidación de pagos para facilitar el comercio.
- Agrupación de recursos y subdivisión de acciones¹.
- Transferencia de recursos económicos a través del tiempo y del espacio.
- Gestión del riesgo.
- Proveer información sobre los precios para ayudar a coordinar la toma de decisiones descentralizada en varios sectores de la economía.
- Lidiar con problemas de incentivos.

De las anteriores, la función principal de cualquier sistema financiero es facilitar la asignación eficiente de los recursos económicos en un entorno incierto, transferir los excedentes a los déficit, a través del tiempo y del espacio.

Un sistema financiero está integrado por distintos intermediarios financieros, siendo los más conocidos y destacados, los bancos. Para proporcionar una idea de la dimensión del sistema bancario,

¹En este contexto, una *acción* es un valor emitido por una empresa que representa un derecho de propiedad de los activos de la empresa, así como el derecho a una parte proporcional de las ganancias después del pago de pasivos y obligaciones (fiscales y laborales).

mencionamos que recientemente Forbes publicó la lista de las 2000 compañías más grandes del mundo en 2015. Los bancos e instituciones financieras de servicios diversificados dominan esta lista con 434 compañías, que representa la mayor proporción de cualquier industria. Entre los bancos más grandes del mundo, China alberga la mayoría con 13 bancos, Estados Unidos 11, Canadá 6, seguidos por Inglaterra, Japón, España y Francia. En México, la Comisión Nacional Bancaria y de Valores reporta 46 bancos en operación. Como intermediarios financieros, los bancos son indispensables para la existencia y el buen funcionamiento de cualquier sistema financiero. Sin embargo, en el sistema financiero participan muchos otros intermediarios y organizaciones que ofrecen servicios de gran utilidad para la sociedad, como las aseguradoras, afianzadoras, arrendadoras, casas de bolsa y las administradoras de fondos de inversión.

Para lograr un sistema financiero estable y eficiente, se cuenta con un marco institucional, una regulación y una supervisión financiera que desempeña el *banco central*. El banco central tiene entre sus finalidades la promoción del sano desarrollo del sistema financiero a fin de lograr un sistema estable, accesible, competitivo y eficiente. A través del sistema bancario, un banco central pone en circulación la moneda nacional e instrumenta las políticas monetaria y cambiaria. La instrumentación de dichas políticas, a su vez, afecta los precios que se determinan en los mercados financieros, tales como las tasas de interés o el tipo de cambio.

Ahora, para definir al riesgo sistémico en el contexto financiero, primero aclaramos lo que es un evento sistémico. Un *evento sistémico* es un evento en el que la falla o la quiebra de un agente financiero conduce de manera secuencial a efectos adversos en otros agentes. En un sentido más amplio, un evento sistémico incluye además, efectos adversos simultáneos en un gran número de agentes como una consecuencia de choques graves y generalizados (sistemáticos). Se considera que un evento sistémico es *fuerte* si, como consecuencia del choque inicial, los agentes afectados por el contagio fallan. Por el contrario, si el efecto externo es menor que una falla, se considera que es un evento sistémico *débil*. Similarmente, eventos sistémicos relacionados con choques sistemáticos, son fuertes si una proporción significativa de los agentes son afectados simultáneamente hasta una falla, de lo contrario los consideramos débiles.

De esta manera, una *crisis sistémica* es un evento sistémico que afecta a un número considerable de agentes financieros en sentido fuerte, perjudicando gravemente el buen funcionamiento general del sistema financiero. Entendiendo como “buen funcionamiento del sistema financiero” a la eficacia y eficiencia con la que los ahorros se canalizan hacia las inversiones reales que prometen mayores rendimientos. Finalmente, el *riesgo sistémico* es definido como el riesgo de experimentar un evento sistémico en el sentido fuerte (De Bandt y Hartmann, 2000). Este tipo de eventos repercuten en la economía real y en el bienestar económico general.

Dos elementos importantes componen un evento sistémico: los choques y la propagación. La dinámica con la que se propagan los choques de un agente a otros, es el núcleo del riesgo sistémico (De Bandt y Hartmann, 2000). Los choques pueden ser idiosincrásicos o sistemáticos; los choques idiosincrásicos son aquellos que inicialmente afectan solamente a una institución financiera, mientras que un choque sistemático afecta al sistema completo. Por ejemplo, en un sistema financiero nacional, la quiebra de un banco regional debido a fraudes internos, es un choque idiosincrásico; las fluctuaciones del ciclo económico en un país o los aumentos repentinos en la tasa de inflación, son choques sistemáticos. En el sistema financiero mundial, la devaluación repentina de una moneda debido a un déficit presupuestario interno insostenible es un choque idiosincrásico; una caída severa en el mercado de valores o la escasez de liquidez de un mercado importante, como el de la Eurozona,

China o EEUU, aunque no afectan a los demás mercados e instituciones de manera uniforme, son ejemplos de choques sistemáticos. Los choques idiosincrásicos que no se propagan ampliamente son “asegurables” en el sentido que un inversor puede protegerse contra ellos a través de la diversificación, mientras que los choques sistemáticos amplios son frecuentemente “no asegurables” o no diversificables, y afectan incluso a los sectores no financieros en la economía.

1.2. Medición del riesgo sistémico

Las instituciones financieras están interconectadas en una variedad de redes de contratos y relaciones multilaterales, así como entre mercados. En condiciones normales, estas interconexiones son muy beneficiosas para el sistema financiero y sus agentes. Por ejemplo, pueden ser utilizadas por las entidades financieras para diversificar el riesgo, así como para acumular capital con objetivos específicos. Sin embargo, en condiciones de crisis, la interconexión entre las empresas financieras también puede conducir a un riesgo sistémico. En primer lugar, estas interconexiones (incluso entre mercados) pueden no funcionar en su forma normal, lo que resulta en enfrentar riesgos excesivos e inesperados de entidades particulares. En segundo lugar, muchas interconexiones no pueden ser alteradas de forma rápida y por lo tanto en una crisis, pueden transferir el riesgo y las pérdidas a través de las empresas financieras, dando lugar a una cascada de fallos. En tercer lugar, ciertas instituciones son clave en las redes financieras, y sus fallas pueden provocar fallas generalizadas, ya sea porque son demasiado grandes o porque están altamente interconectadas.

Después de la crisis financiera de 2007-2009, los gobiernos han tratado de entender por qué las regulaciones fallaron, por qué los requerimientos de capital no fueron suficientes y cómo se debe construir un fondo de garantía para hacer frente a la próxima crisis financiera. En la industria financiera, los requerimientos de capital dependen únicamente de la distribución del riesgo de la institución y no del resto de la economía. Un aspecto importante que se ha perdido en la evaluación del riesgo es su dependencia entre la institución y el sistema financiero (Bernard et al., 2012). Para implementar dicho fondo que garantice estabilidad, se necesita entender el riesgo que cada institución representa al sistema financiero, para que la regulación de cada institución esté en función del riesgo individual y con las demás instituciones, conjuntamente.

En la literatura existente para evaluar el riesgo sistémico, se pueden distinguir dos enfoques principales (Bernard et al., 2012). Uno consiste en investigar el impacto de un agente o institución financiera en el mercado y su contribución en el riesgo del sistema global. El otro enfoque es trabajar directamente con la estructura de las relaciones entre los agentes y el sistema financiero. En las siguientes secciones nos adentramos un poco más en estos dos enfoques, sobre todo en el segundo, donde se estudia el comportamiento del sistema financiero cuando las relaciones entre los agentes tienen cierta estructura.

1.2.1. Efecto de un agente financiero

Los métodos estadísticos han jugado un papel crítico en la cuantificación del riesgo inherente a diversas actividades y, sin duda, seguirán desempeñando un papel importante en el futuro. El reto con respecto al uso de métodos estadísticos para cuantificar el riesgo sistémico, inherente al

sistema financiero, es que el uso de datos históricos, sólo permite la calibración de los modelos de forma reducida. Estos modelos asumen que el sistema es estable y que los cambios estructurales son estables en el tiempo. A pesar de que los modelos estadísticos son cuestionables, dado que pueden tener errores de predicción grandes justo cuando se necesita la capacidad de predecir, los métodos estadísticos seguirán siendo la principal herramienta para la extracción de información sobre los mercados financieros.

Bernard et al. (2012) revisan las medidas estadísticas de riesgo sistémico existentes: el Valor en Riesgo Condicional (*CoVar*), el Déficit Sistémico Esperado (*SES*) y otras medidas de dependencia. Adrian y Brunnermeier (2011) introdujeron la medida *CoVaR*, cuya idea es comparar el Valor en Riesgo (*VaR*) en el sistema bajo condiciones “normales” y el *VaR* del sistema condicionado a que una institución está bajo estrés. Acharya et al. (2010) definen el *SES* en términos del déficit marginal esperado, que es el rendimiento promedio de cada empresa durante el 5% de los peores días del mercado. El riesgo sistémico está altamente relacionado con el contagio financiero, por lo que Bernard et al. (2012) explican las ventajas y desventajas de analizar los “coexcedentes” (ocurrencia simultánea de eventos extremos) y de analizar los cambios locales en la correlación de instituciones con el sistema financiero, métodos que han sido propuestos en la literatura para estudiar el contagio financiero.

En esta literatura, el riesgo sistémico está determinado por la dependencia entre la institución individual y el sistema financiero en una economía bajo estrés. Las compañías tienden a ser fuertemente dependientes en una crisis mientras que sólo débilmente dependientes en condiciones de estabilidad o expansión. La mayoría de las medidas de riesgo sistémico (excepto *CoVaR*) no sólo dependen de la relación entre la empresa y la economía, sino también de la distribución marginal del capital de la empresa. En cierto sentido, los requerimientos de capital estándar ya incorporan el riesgo representado por la distribución marginal, por lo que sería más apropiado, tener una medida que dependa únicamente de la interacción entre la empresa y el sistema financiero (Bernard et al., 2012). Una buena regulación del riesgo sistémico debe ser tal que las empresas que tienen una cantidad excesiva de riesgo no deben ser recompensadas por su suerte, deben pagar parte de los beneficios a un fondo de garantía para el sistema, pues estarían ganando beneficios gracias a actividades sistémicamente riesgosas.

1.2.2. Efecto de la interconexión del sistema financiero

La interconexión de los agentes, su forma y su evolución, juegan un papel esencial en la evaluación del riesgo sistémico. Garnier et al. (2013a) presentan un resumen del modelo que ellos mismos proponen en Garnier et al. (2013b) y describen otros tres modelos matemáticos que consideran la falla sistémica del sistema financiero. El primero es un estudio de contagio en redes aleatorias de agentes financieros con interacción (Nier et al., 2007). El resultado principal es que el grado de interconexión de la red determina si el fallo de uno, o unos pocos, de los componentes se extenderá a todo el sistema. El segundo modelo (Beale et al., 2011), se dirige a analizar cómo reducir el riesgo individual por diversificación puede incrementar el riesgo sistémico; es un modelo estático con el que se define al riesgo sistémico mediante una función de costos que cuantifica el tamaño de la falla en el sistema. Se muestra que la diversificación no es la mejor estrategia para reducir el riesgo sistémico, cuando la función de costos es convexa. Por último, el tercer modelo Battiston et al. (2012) introduce un mecanismo de retroalimentación para la aceleración de falla en un siste-

ma de difusiones que interactúan. En este modelo, el efecto de la diversificación del riesgo por la cooperación es contrarrestada por el mecanismo de aceleración de falla.

Otro trabajo sobre este tema es el de Carmona et al. (2013), que como el de Garnier et al. (2013b), utilizan modelos estocásticos y realizan análisis de grandes desviaciones para estudiar a instituciones financieras interconectadas. Con diferentes modelos, capturan la pequeña probabilidad de que la interconexión conlleve a la falla de todo el sistema. Estos dos trabajos sirvieron como motivación del presente trabajo de tesis, es por ello que a continuación describimos los dos modelos propuestos y sus resultados principales.

Modelo de préstamos interbancarios

Carmona et al. (2013) proponen un modelo de préstamos interbancarios (concedidos y recibidos) donde la evolución de las reservas monetarias logarítmicas de N bancos es descrita por un sistema de procesos de difusión relacionados por sus derivas, de modo que la estabilidad del sistema depende de la tasa de préstamos interbancarios. En este modelo cada banco controla su tasa de préstamos a un banco central. La optimización refleja el deseo de cada banco de pedir un préstamo al banco central cuando su reserva monetaria cae por debajo de un nivel crítico, y prestar si se eleva por encima del nivel crítico, donde este nivel crítico es la reserva monetaria promedio. El riesgo sistémico es caracterizado por un gran número de bancos que alcanzan un umbral de deuda predeterminado dado un horizonte de tiempo T .

Se define al proceso de difusión X_t^i como el logaritmo de las reservas monetarias al tiempo t del i -ésimo banco. La dinámica de cada banco es descrita por la ecuación diferencial estocástica

$$dX_t^i = \frac{\theta}{N} \sum_{j=1}^N (X_t^j - X_t^i) dt + a_t^i dt + \sigma d\widetilde{W}_t^i, \quad i = 1, \dots, N, \quad (1.1)$$

con condiciones iniciales $X_0^i = \xi^i$, donde ξ^1, \dots, ξ^N son i.i.d. con media cero; θ/N representa la tasa de préstamos interbancarios, a_t^i la tasa de préstamos al banco central y

$$\widetilde{W}_t^i = \rho W_t^0 + \sqrt{1 - \rho^2} W_t^i,$$

con W_t^j , $j = 0, 1, \dots, N$ movimientos Brownianos independientes y $|\rho| \leq 1$; entonces W_t^0 representa el ruido en común o los choques sistemáticos.

De acuerdo al modelo (1.1), los préstamos interbancarios entre el banco i y el banco j dependen de las reservas monetarias de ambos bancos. Si el banco i tiene más reservas monetarias que el banco j , le proporcionará un préstamo; en caso contrario, recibirá un préstamo. Además, la tasa $a_t^i \in \mathbb{R}$ para cada $t \in [0, T]$, representa la tasa a la que el banco i pide un préstamo al banco central si $a_t^i < 0$, y la tasa a la que el banco i le otorga un préstamo si $a_t^i > 0$.

Si usamos la notación

$$\bar{X}_t := \frac{1}{N} \sum_{j=1}^N X_t^j,$$

el modelo (1.1) puede ser reescrito como

$$dX_t^i = \theta(\bar{X}_t - X_t^i)dt + a_t^i dt + \sigma d\widetilde{W}_t^i, \quad i = 1, \dots, N. \quad (1.2)$$

Entonces, las decisiones que tome el banco i , sobre la tasa de préstamos al banco central que debe elegir, sólo dependerá de su nivel de reservas monetarias y el nivel de reservas monetarias promedio. De hecho, en este modelo, el banco i controla la tasa de préstamos al banco central en el tiempo t , con el objetivo de minimizar el costo acumulado esperado

$$J^i(a^1, \dots, a^N) = \mathbb{E} \left[\int_0^T \ell_i(X_t, a_t^i) dt + g_i(X_T^i) \right],$$

donde la función de costos es

$$\ell_i(x, a^i) = \frac{1}{2}(a^i)^2 - \alpha a^i(\bar{x} - x^i) + \frac{\beta}{2}(\bar{x} - x^i)^2,$$

y la función de costo terminal es

$$g_i(x) = \frac{\gamma}{2}(\bar{x} - x^i)^2.$$

El parámetro $\alpha > 0$ controla el incentivo de préstamos, puede pensarse como un parámetro asociado al costo de realizar préstamos (con q grande, un menor impuesto). El parámetro β pondera la diferencia entre el nivel de reservas y el nivel promedio, con respecto a la magnitud del préstamo. Se asume que $\alpha^2 \leq \beta$ para que $\ell_i(x, a)$ sea convexa en (x, a) . Notemos que de acuerdo a estas funciones de costos, el banco i querrá recibir un préstamo del banco central ($a_t^i > 0$) si X_t^i es menor que la media empírica \bar{X}_t y conceder un préstamo ($a_t^i > 0$) si X_t^i es mayor que \bar{X}_t .

Se introduce un nivel de falla $\eta < 0$, y se dice que el banco i falla en el tiempo T si el logaritmo de sus reservas monetarias alcanzan el nivel η antes del tiempo T . Por lo tanto, se identifica a

$$\left\{ \min_{0 \leq t \leq T} \bar{X}_t \leq \eta \right\}$$

como un evento sistémico. En este sentido, el riesgo sistémico es la probabilidad de que ocurra este evento.

La interacción entre los agentes crea estabilidad del sistema en el sentido de que hay una alta probabilidad de que fallen muy pocos agentes; sin embargo, este comportamiento aglomerado también crea una pequeña probabilidad de que falle un gran número de agentes. La distribución resultante del número de agentes que fallan es bimodal, con una gran masa a la izquierda en un número pequeño de fallas, y una pequeña masa a la derecha, en un gran número de fallas. Bajo el modelo (1.2), los autores encuentran el proceso de la tasa de préstamo al banco central óptimo $\{a_t^i\}$, es decir, que minimiza la función de costo J^i ; y encuentran que el riesgo sistémico es

$$\mathbb{P} \left(\min_{0 \leq t \leq T} \bar{X}_t \leq \eta \right) = \begin{cases} 2\Phi \left(\frac{\eta\sqrt{N}}{\sigma\sqrt{T}} \right), & \rho = 0; \\ 2\Phi \left(\frac{\eta}{\sigma\sqrt{T}} \sqrt{\frac{N}{N\rho^2 + (1-\rho^2)}} \right), & \rho \neq 0; \end{cases} \quad (1.3)$$

donde Φ es la función de distribución acumulada de $\mathcal{N}(0, 1)$. Notemos que el riesgo sistémico no depende de la tasa θ . Es decir, incrementando la tasa de préstamos interbancarios se incrementa la estabilidad individual, pero no se previene un evento sistémico en el que falla un gran número de bancos. En el caso $\rho \neq 0$, cuando existe ruido en común, ni siquiera haciendo crecer a N , disminuye la probabilidad del riesgo sistémico.

Modelo biestable

Garnier et al. (2013b) analizan la relación entre el riesgo individual y el riesgo sistémico para una clase de agentes que están sujetos a fallas en un sistema interconectado. Proponen un modelo en el que cada agente puede estar en dos estados de equilibrio, el normal y el fallido, y puede transitar de uno a otro de acuerdo a una ecuación diferencial estocástica. El riesgo sistémico lo definen como la pequeña probabilidad de la transición del sistema global fuera del estado normal. Describen cómo, bajo este modelo, incrementar la cooperación tiende a estabilizar el riesgo individual pero también tiende a incrementar el riesgo sistémico.

Las características de la evolución dinámica son las siguientes. Primero, hay un mecanismo intrínseco de estabilización que tiende a mantener a los agentes en el estado normal. Segundo, hay una fuerza externa desestabilizadora que tiende a alejarlos del estado normal y es modelada mediante un proceso estocástico. Tercero, hay cooperación entre los agentes que actúa como un estabilizador individual. Es decir, se espera que por medio de la cooperación, decrezca el riesgo de desestabilización o de falla asociado a cada agente. Lo que no es tan obvio es el efecto de la cooperación en el sistema completo, los autores muestran que para el modelo en consideración y bajo cierto régimen de parámetros, el riesgo sistémico se incrementa cuando incrementa la cooperación.

Consideremos un sistema financiero con N agentes, y sea Y_t^i un índice de capital o de salud financiera del agente i , que toma valores en \mathbb{R} . En otras palabras, la variable Y_t^i representa la solvencia de la empresa i ; por ejemplo, puede considerarse como una función del valor de los activos de la empresa. Alternativamente, podemos imaginar que las calificaciones de crédito producidas periódicamente por las agencias calificadoras, se sustituyen por valores continuos, y que Y_t^i es una función de la calificación continua que tienen los bonos emitidos por la empresa i (Hull y White, 2000).

Los Y_t^i son modelados como procesos estocásticos en tiempo continuo y satisfacen el sistema de ecuaciones diferenciales de Itô

$$dY_t^i = -\lambda u(Y_t^i)dt + \theta(\bar{Y}_t - Y_t^i)dt + \sigma dW_t^i, \quad i = 1, \dots, N, \quad (1.4)$$

con condiciones iniciales dadas. Aquí $u(y) = v'(y)$ es la fuerza restauradora, v es un potencial que asumimos tiene dos estados estables, $\{W_t^i\}_{j=1}^N$ son movimientos Brownianos independientes, y

$$\bar{Y}_t := \frac{1}{N} \sum_{j=1}^N Y_t^j.$$

El parámetro λ controla el nivel de estabilización intrínseco, θ es el parámetro de cooperación, y σ es la magnitud de las fuerzas aleatorias desestabilizadoras.

Notemos que la interacción o cooperación es el término de reversión a la media empírica de los riesgos individuales, con tasa θ . Por lo que la interacción del agente i con todos los demás agentes es sintetizada mediante el riesgo promedio del sistema financiero. Si $\theta > 0$, el proceso de riesgo Y_t^i tiende a regresar a la media empírica, lo cual es una forma simple, pero no trivial de cooperación.

La estructura de estados biestable de $v(y)$ determina los estados normal y fallido de los agentes. Se asume

$$u(y) = y^3 - y, \quad (1.5)$$

tal que $v(y) = \frac{1}{4}y^4 - \frac{1}{2}y^2 + c$, con $c = 0$ pues no es relevante. La existencia y unicidad de una solución fuerte de la ecuación diferencial estocástica (1.4) no es inmediata; sin embargo, es establecida por el Teorema 2.4.1 en Dawson (1983). Los dos estados estables son ± 1 , donde -1 es el estado normal y $+1$ es el estado fallido. El potencial $v(y)$ asegura que cada variable de salud financiera Y_t^i permanecerá cerca de -1 ó $+1$. La evolución del sistema es caracterizada por las condiciones iniciales, los parámetros $(\lambda, \theta, \sigma)$ y por el tamaño del sistema N . Así, el riesgo sistémico es medido como la probabilidad de transición de que la media empírica del sistema financiero pase del estado normal al estado fallido. De acuerdo a Garnier et al. (2013b), podrían considerarse otros potenciales con múltiples puntos de estabilidad pero se complicaría el análisis, además, para el resultado principal sobre el riesgo sistémico, es suficiente con el modelo biestable.

Sea $M_N(t, dy) := \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \delta_{Y_t^i}(dy)$ la distribución empírica, y notemos que $\bar{Y}_t = \int y M_N(t, dy)$. De acuerdo a Dawson (1983), cuando $N \rightarrow +\infty$, $M_N(t, dy)$ converge en distribución a un proceso determinístico que satisface la ecuación de Fokker-Planck

$$\frac{\partial}{\partial t} u = h \frac{\partial}{\partial y} [(y^3 - y)u] - \theta \frac{\partial}{\partial y} \left[\left(\int y u(t, dy) - y \right) u \right] + \frac{1}{2} \sigma^2 \frac{\partial^2}{\partial y^2} u.$$

Supongamos que el equilibrio es $u_\xi^e(y)$ y su primer momento es ξ , entonces

$$h \frac{\partial}{\partial y} [(y^3 - y)u_\xi^e] - \theta \frac{\partial}{\partial y} [(\xi - y) u_\xi^e] + \frac{1}{2} \sigma^2 \frac{\partial^2}{\partial y^2} u_\xi^e = 0, \quad (1.6)$$

con la condición

$$\xi = \int y u_\xi^e(y) dy.$$

Una solución de (1.6) es $\xi = 0$; sin embargo, para λ y θ dados, existe un valor crítico σ_c tal que, si $\sigma < \sigma_c$, existen dos soluciones $\pm \xi_b$ distintas de cero. Una explicación para esta condición es que si $\sigma \geq \sigma_c$, la aleatoriedad domina la interacción entre los agentes, es decir, $\theta(\bar{Y}_t - Y_t^i)$ es despreciable. En este caso, el sistema se comporta como N difusiones independientes y por la simetría de $v(y)$, en cualquier tiempo, aproximadamente la mitad de los agentes estarán cerca de -1 y la mitad cerca de $+1$, provocando que el promedio sea 0. Sin embargo, cuando $\sigma < \sigma_c$, la interacción es una fuerza significativamente grande.

Asumamos que $\sigma < \sigma_c$ y sea $u_{-\xi_b}^e$ el estado normal del sistema y $u_{+\xi_b}^e$ el estado fallido del sistema. Cuando λ es pequeña, se puede dar una expresión para σ_c ,

$$\sigma_c = \sqrt{\frac{2\theta}{3}} + O(\lambda),$$

y resulta que

$$\pm \xi_b = \pm \sqrt{1 - \left(\frac{\sigma^2}{\sigma_c} \right)^2}$$

si y sólo si $3\sigma^2 < 2\theta$. Notemos que $|\xi_b| < 1$, y $\xi_b \rightarrow 0$ cuando $3\sigma^2/2\theta \rightarrow 1$.

Si $Y_0^i = -1$ para toda $i = 1, \dots, N$, entonces esperamos que para una N grande y una t grande, $M_{t,N} \approx u_{-\xi_b}^e$ y $\bar{Y}_t \approx -\xi_b$. Si asumimos que $M_{0,N} \rightarrow u_{-\xi_b}^e$ y $\bar{Y}_0 \rightarrow -\xi_b$ cuando $N \rightarrow +\infty$, entonces

esperaríamos que para N grande y toda t , $M_{t,N} \approx u_{-\xi_b}^e$ y $\bar{Y}_t \approx -\xi_b$. Sin embargo, como N es grande pero finita, la aleatoriedad aún importa y dado un horizonte de tiempo $[0, T]$ el evento sistémico

$$A = \{M_{t,N}, 0 \leq t \leq T : M_{0,N} \approx u_{-\xi_b}^e, M_{T,N} \approx u_{+\xi_b}^e\}$$

sucede con una pequeña pero no nula probabilidad. El evento A captura la *transición de fase*, en el sentido de que el sistema se mueve del estado normal al estado fallido. El riesgo sistémico en este contexto, es definido como $\mathbb{P}(A)$. Para una N grande, se tiene que

$$\mathbb{P}(A) \approx \exp \left\{ -N \frac{2\xi_b^2}{\sigma^2 T} \right\}.$$

El caso de λ pequeña es en realidad un supuesto realista y el único de interés. Los autores argumentan este supuesto mediante la evidencia empírica de que la estabilidad individual tiene un efecto monótono en la estabilidad del sistema, y el colapso del sistema ocurre muy raramente si hay una estabilidad individual fuerte o moderada. Otra justificación de λ pequeña es que el único incentivo para que un banco comparta el riesgo es que sus reservas de capital, modeladas de cierto modo por el parámetro λ , son relativamente pequeñas comparadas con la incertidumbre que enfrenta σ . En este caso, el banco se preocupa por el riesgo que está tomando y quiere diversificarlo. Si sus reservas de capital son relativamente altas, el banco no tiene incentivos para compartir el riesgo.

El modelo (1.4) puede ser generalizado permitiendo que cada agente tenga una tasa de reversión a la media empírica diferente. Consideremos el caso donde $\theta_1, \dots, \theta_N$ toma K distintos valores positivos, $\Theta_1, \dots, \Theta_K$. Definimos $I_k = \{i : \theta_i = \Theta_k\}$ y $\rho_k = |I_k|/N$. Asumimos que $\lim_{N \rightarrow \infty} \rho_k$ existe y es positivo para toda $k = 1, \dots, K$. Entonces, los Y_t^i satisfacen el sistema de ecuaciones diferenciales estocásticas

$$dY_t^i = -\lambda u(Y_t^i) dt + \theta_i (\bar{Y}_t - Y_t^i) dt + \sigma dW_t^i, \quad i = 1, \dots, N, \quad (1.7)$$

donde la función u es definida en (1.5) y $\theta_i \in \{\Theta_1, \dots, \Theta_K : \Theta_j > 0, k = 1, \dots, K\}$. En este caso, los agentes tienen diferentes niveles de cooperación, que puede deberse a que deciden enfrentar de manera diferente el riesgo individual al que están expuestos.

De manera similar al caso homogéneo, bajo ciertas condiciones, existen las soluciones $\pm \xi_b^{\text{div}}$ diferentes de cero si y sólo si $\sigma < \sigma_c^{\text{div}}$. Para λ pequeña,

$$\sigma_c^{\text{div}} = \sqrt{\sum_{k=1}^K \frac{\rho_k}{\Theta_k} / \sum_{k=1}^K \frac{3\rho_k}{2\Theta_k^2}} + O(\lambda),$$

y resulta que

$$\pm \xi_b^{\text{div}} = \pm \sqrt{1 - \left(\frac{\sigma^2}{\sigma_c^{\text{div}}} \right)^2}.$$

Para $\theta = \sum_{k=1}^K \rho_k \Theta_k$ y con λ pequeña, se tiene

$$\sigma_c^{\text{div}} \leq \sigma_c \quad \text{y} \quad \xi_b^{\text{div}} \leq \xi_b < 1.$$

Este modelo generalizado tiene un inconveniente, al incrementar la diversidad, es decir, aumentar el K , se incrementa la inestabilidad del sistema, aumentando la probabilidad de transición de fase.

Comentarios

Hay algunos aspectos que nos gustaría resaltar sobre los dos modelos presentados. Primero, se asume que los agentes financieros son idénticos, en el sentido de que todos se comportan con la misma dinámica descrita por los modelos (1.2) y (1.4). Incluso en el modelo (1.7) donde hay K tipos de agentes, los agentes son idénticos dentro de cada tipo, y K debe ser pequeña para mantener cierta estabilidad del sistema. Por otro lado, en los tres modelos (1.2), (1.4) y (1.7), la interacción del agente i con todos los demás agentes se simplifica al considerar sólo el proceso de la media empírica, y no la dinámica de cada uno de los $N - 1$ agentes restantes.

Además, un evento sistémico puede ser cualquier función de la distribución del proceso conjunto de los N agentes que represente la falla del sistema. Por ejemplo, para el modelo de préstamos interbancarios, se puede definir el evento que una proporción $p_\eta \in [0, 1]$ de agentes caigan por debajo del nivel η en el intervalo de tiempo $[0, T]$. Sin embargo, aunque de manera diferente, tanto en el modelo de préstamos interbancarios (1.2) como en los de equilibrio biestable (1.4) y (1.7), se definen por la transición del proceso de la media empírica de un estado saludable a un estado fallido. Nuevamente se utiliza el proceso de la media empírica para simplificar el comportamiento de todo el sistema financiero.

Por último, destacamos que en los modelos de equilibrio biestable (1.4) y (1.7), los agentes financieros no toman decisiones en el tiempo para modificar su evolución, a diferencia del modelo (1.2) donde los agentes toman decisiones a fin de minimizar una función de costos. En la realidad, en el sistema financiero interactúa un gran número de agentes que toman decisiones estratégicas a lo largo del tiempo con el objetivo de mantener o alcanzar su estabilidad y eficiencia. Este tipo de interacciones estratégicas suelen estudiarse mediante modelos de juegos; sin embargo, que haya un número grande de agentes en el juego, en muchos casos imposibilita determinar las estrategias óptimas, por lo que se recurre a simplificaciones como las que se hicieron en los modelos (1.2), (1.4) y (1.7).

En el Capítulo 2, abordaremos con algunas ideas de los procesos de control y de la teoría de juegos, con las que explicaremos el planteamiento de los *juegos de campo medio* en tiempo discreto. Estos modelos permiten construir estrategias ϵ -óptimas cuando se tiene un sistema con muchos agentes idénticos.

2

Juegos de Campo Medio: Tiempo Discreto

El objetivo de la teoría de juegos es modelar las interacciones estratégicas entre individuos con intereses propios, a los que se les suele llamar *jugadores*. Así, un *juego* es una representación formal de una situación en la cual un número de individuos interactúa en un entorno de interdependencia. Es decir, el bienestar de cada individuo depende no sólo de sus propias acciones, sino también de las acciones de los otros individuos. Además, las acciones que son las mejores para un individuo pueden depender de lo que se espera que los otros individuos hagan.

Las decisiones que toman los jugadores conducen a un resultado diferente y cada jugador asigna un valor (pago o costo) a cada resultado. Una *estrategia* es una regla de decisión, donde la *acción* que será tomada depende de información aún desconocida y que no controla el jugador; una vez que el jugador ha fijado su estrategia no puede influir en el curso de los eventos posteriores. Cualquier consecuencia de tal estrategia, después de la realización de lo que antes fue desconocido, es una acción. En este sentido, una estrategia constante coincide con la noción de una acción.

Un juego es *estático* si se realiza una sola vez, y *dinámico* si se realiza más de una vez. Los juegos dinámicos pueden ser en tiempo continuo, en tiempo discreto o en etapas que no necesariamente están asociadas a periodos de tiempo, con un horizonte finito o infinito. Los objetos interesantes para estudiar este tipo de juegos es donde algo cambia en el tiempo. Lo que significa “algo” depende específicamente del modelo. La riqueza de la teoría de los juegos dinámicos viene del hecho de que los modelos aparentemente relacionados requieren herramientas muy diferentes, procedentes de diferentes ramas de las matemáticas.

Específicamente, el objetivo de la teoría de *juegos de campo medio* es modelar situaciones con un gran número de individuos idénticos. Los juegos de campo medio fueron introducidos independientemente por Lasry y Lions (2006a,b, 2007) y Huang et al. (2006, 2007) en tiempo continuo. Su característica distintiva es la estructura *backward-forward*: cada jugador anticipa un cierto comportamiento de los otros jugadores y determina su propio comportamiento óptimo; si el comportamiento agregado es consistente con su predicción, se dice que los jugadores están en un equilibrio de juego de campo medio.

El modelo típico para un juego de campo medio (Cardaliaguet, 2010) es el sistema

$$\begin{cases} \text{(i)} & -\partial_t u - \gamma \Delta u + H(x, m, Du) = 0 & \text{en } \mathbb{R}^d \times (0, T); \\ \text{(ii)} & \delta_t m - \gamma \Delta m - \operatorname{div}(D_p H(x, m, Du)m) = 0 & \text{en } \mathbb{R}^d \times (0, T); \\ \text{(iii)} & m(0) = m_0, \quad u(x, T) = G(x, m(T)); \end{cases} \quad (2.1)$$

donde γ es un parámetro no negativo. Hay dos condiciones cruciales para este sistema, la primer condición es la convexidad de $H = H(x, m, p)$ con respecto a las últimas dos variables; esta condición implica que la ecuación (2.1.i) está asociada con un problema de control óptimo y debe ser la función de valor de un jugador pequeño típico. La segunda condición es que m_0 es una medida de probabilidad sobre \mathbb{R}^d , y por lo tanto $m(t)$ también lo es, i.e., $m : [0, T] \rightarrow \mathcal{P}(\mathbb{R}^d)$.

La ecuación de Hamilton-Jacobi (2.1.i) corresponde a la ecuación *backward* o retrógrada, y la ecuación de Fokker-Plank (2.1.ii) que describe la evolución agregada, corresponde a la ecuación *forward* o progresiva. La teoría de juegos de campo medio se ha enfocado principalmente en dos problemas: Primero investigar ecuaciones de la forma (2.1) y dar una interpretación a esos sistemas. Segundo, analizar juegos diferenciales con un número finito pero grande de jugadores y asociarlo con su comportamiento límite cuando el número de jugadores va a infinito. Sin embargo, el sistema (2.1) es un modelo complejo que involucra soluciones de viscosidad, y está fuera de los alcances de este trabajo. Las soluciones de viscosidad forman parte de una teoría general de soluciones débiles (i.e., no diferenciables) que son aplicadas a ecuaciones diferenciales parciales (PDE) de primer y segundo orden. Nosotros nos limitamos a trabajar los juegos de campo medio en tiempo discreto, y más adelante plantearemos el sistema análogo en este contexto. Para ahondar más en los juegos de campo medio en tiempo continuo, se pueden consultar trabajos como los de Lasry y Lions (2007), Cardaliaguet (2010) y Gomes y Saúde (2014).

Una motivación importante para el enfoque de campo medio en aplicaciones es que permite construir equilibrios de Nash aproximados (ver Sección 2.2) de juegos con un gran número de jugadores. Estos equilibrios son “simples” en el sentido de que se reemplaza un proceso estocástico complicado (el comportamiento de todos los adversarios) por un proceso de control de Markov vía un argumento promedio. Los juegos de campo medio han recibido una atención considerable en la literatura; sin embargo, en la mayoría de ésta se estudian en el marco de tiempo continuo.

En tiempo discreto, un trabajo importante es el de Gomes et al. (2010), donde se desarrolla un modelo en tiempo discreto, con un número finito de estados y juegos dinámicos. Para este modelo, se asume que existe un gran número de agentes idénticos que pueden estar en un número finito de estados. Cada agente se comporta de forma individual y racional, moviéndose de un estado a otro de acuerdo a ciertos criterios de optimalidad. Sus decisiones en cada tiempo, se basan únicamente en el estado actual y la fracción de agentes en cada estado; lo cual es información conocida por todos los agentes. La *hipótesis de campo medio* en este modelo es: sólo la fracción de jugadores en cada estado, en el tiempo actual, es información relevante para la evolución global. Los autores investigan el comportamiento asintótico del juego cuando el horizonte de tiempo tiende a infinito, y proveen condiciones para la convergencia a una solución estacionaria.

La principal dificultad en tiempo continuo es que no hay un patrón de información canónica. Esto a su vez implica que no existe una definición canónica de estrategias. Por lo tanto, el resultado del juego puede depender del patrón de información adoptado. Esta complicación no se plantea en tiempo discreto, donde podemos definir sin ambigüedad la información disponible para los jugadores

en el inicio de cada etapa. Otros trabajos que abordan este tipo de juegos en tiempo discreto son los de Maldonado Lopez (2014), Adlakha et al. (2013) y Bodoh Creed (2012).

En este capítulo estudiamos los modelos de campo medio en tiempo discreto, que posteriormente utilizaremos en el Capítulo 3 para analizar el riesgo sistémico del sistema financiero. En la Sección 2.1 definimos los procesos de control de Markov, donde los controles hacen alusión a acciones que se toman para controlar la evolución de un sistema. En la Sección 2.2, retomamos algunos conceptos básicos de la teoría de juegos, donde se estudia la evolución de un sistema en el que interactúan varios agentes. Finalmente, en la Sección 2.3 desarrollamos el modelo de campo medio descrito por Maldonado Lopez (2014), el cual utilizamos como base de nuestro trabajo. Este modelo es planteado para un juego estocástico dinámico en tiempo discreto y con espacio de estados finito.

2.1. Procesos de control de Markov

En un problema de control óptimo, se tiene un sistema cuyo comportamiento puede ser influenciado o regulado mediante la elección de algunas variables del sistema, las cuales son llamadas *controles* o *acciones*. Los controles que son aplicados de acuerdo a “reglas” son llamados *políticas de control* o *estrategias*. Además, se tiene una función llamada *criterio de desempeño* definido en el conjunto de estrategias, el cual mide o evalúa en algún sentido la respuesta del sistema a la estrategia usada. Entonces, el problema de control óptimo es determinar una política de control que optimiza (minimiza o maximiza) el criterio de desempeño.

Antes de abordar formalmente los procesos de control de Markov, establecemos un poco de notación. Nos referimos a \mathcal{X} como *espacio de Borel* si es un subconjunto de Borel de un espacio métrico completo y separable, y a la σ -álgebra de Borel sobre \mathcal{X} la denotamos por $\mathcal{B}(\mathcal{X})$. Por convención, nos referimos a los conjuntos o funciones “Borel medibles” simplemente como “medibles”. Denotamos por $\mathcal{P}(\mathcal{X})$ el espacio de medidas de probabilidad sobre el espacio \mathcal{X} . Si \mathcal{X} y \mathcal{Y} son espacios de Borel, un *kernel estocástico* sobre \mathcal{X} dado \mathcal{Y} es una función $\mathbb{P}(\cdot|\cdot)$ tal que

- a) $\mathbb{P}(\cdot|y)$ es una medida de probabilidad sobre \mathcal{X} para cada $y \in \mathcal{Y}$,
- b) $\mathbb{P}(B|\cdot)$ es una función medible en \mathcal{Y} para cada $B \in \mathcal{B}(\mathcal{X})$ fijo.

El conjunto de kernels estocásticos sobre \mathcal{X} dado \mathcal{Y} es denotado por $\mathcal{P}(\mathcal{X}|\mathcal{Y})$.

Definición 2.1. Un *modelo de control de Markov* es

$$(\mathcal{X}, \mathcal{A}, \{\mathcal{A}(x) : x \in \mathcal{X}\}, Q, \ell). \quad (2.2)$$

Donde

- a) \mathcal{X} es un *espacio de estados*;
- b) \mathcal{A} es un *espacio de acciones*;
- c) $\{\mathcal{A}(x)|x \in \mathcal{X}\}$ es una familia no vacía de subconjuntos medibles $\mathcal{A}(x) \in \mathcal{A}$, donde $\mathcal{A}(x)$ denota el conjunto de *acciones factibles* cuando el sistema está en el estado $x \in \mathcal{X}$, y con

la propiedad de que el conjunto de parejas estados-acciones factibles

$$\mathcal{K} := \{(x, a) : x \in \mathcal{X}, a \in \mathcal{A}(x)\}$$

es un subconjunto medible de $\mathcal{X} \times \mathcal{A}$;

- d) Q es un kernel estocástico sobre \mathcal{X} dado \mathcal{K} , llamado *ley de transición*;
- e) $\ell : \mathcal{K} \rightarrow \mathbb{R}$ es una función medible llamada *función de costos* (costos por periodo).

Sea $T \leq +\infty$ el *horizonte de planificación* o *de optimización* y definamos al conjunto $\mathcal{T} = \{0, 1, \dots, T\}$. El modelo de control (2.2) representa un sistema estocástico controlado que es observado en los periodos $t \in \mathcal{T}$. En algunos casos, se considera una *función de pagos* por periodo en lugar de la función de costos por periodo ℓ . Además, para asegurar que el conjunto de estrategias no es vacío, se asume que \mathcal{K} contiene la gráfica de una función medible de \mathcal{X} a \mathcal{A} ; esto es, existe una función medible $\psi : \mathcal{X} \rightarrow \mathcal{A}$ tal que $\psi(x) \in \mathcal{A}(x)$ para todo $x \in \mathcal{X}$.

Sean X_t y A_t , el estado del sistema y el control o acción aplicado al tiempo t , respectivamente, $t \in \mathcal{T}$. La evolución del sistema puede ser descrita como sigue: Si el sistema se encuentra en el estado $X_t = x_t \in \mathcal{X}$ al tiempo t y la acción $A_t = a_t \in \mathcal{A}(x_t)$ es aplicada, implica que se incurre en el costo $\ell(x_t, a_t)$ y que el sistema se mueva al siguiente estado X_{t+1} , que es una variable aleatoria que toma valores en \mathcal{X} con distribución $Q(\cdot | x_t, a_t)$. Una vez que el nuevo estado ha ocurrido, se elige una nueva acción y el proceso se repite.

Observación 2.2. Utilizaremos letras mayúsculas para denotar a las variables aleatorias y letras minúsculas para denotar sus realizaciones. ◇

Observación 2.3. En algunas aplicaciones, la evolución de un proceso de control de Markov es especificado por una ecuación en diferencias de la forma

$$X_{t+1} = f(X_t, A_t, W_t), \quad t \in \mathcal{T};$$

con condición inicial $X_0 = x_0$. Donde $\{W_t\}$ es una sucesión de variables aleatorias i.i.d. que toma valores en un espacio \mathcal{W} y distribución común μ independiente del estado inicial X_0 . La sucesión $\{W_t\}$ es llamada un *proceso de disturbios* o *perturbaciones*. En este caso la ley de transición es

$$\begin{aligned} Q(B|x, a) &= \mu(\{w \in \mathcal{W} : f(x, a, w) \in B\}) \\ &= \int_{\mathcal{W}} \mathbf{1}_B[f(x, a, w)] \mu(dw) \\ &= \mathbb{E} [\mathbf{1}_B[f(x, a, W)]] \end{aligned}$$

donde W denota una variable aleatoria genérica con distribución μ . ◇

Para cada $t \in \mathcal{T}$, definamos a \mathcal{H}_t como el *espacio de historias admisibles* hasta el tiempo t ,

$$\mathcal{H}_t := \mathcal{K}^t \times \mathcal{X} = \mathcal{K} \times \mathcal{H}_{t-1}, \quad t = 1, 2, \dots,$$

y $\mathcal{H}_0 := \mathcal{X}$. Un elemento genérico $h_t \in \mathcal{H}_t$, es un vector de la forma

$$h_t = (x_0, a_0, \dots, x_{t-1}, a_{t-1}, x_t),$$

con $(x_s, a_s) \in \mathcal{K}$ para $s = 0, \dots, t-1$, y $x_t \in \mathcal{X}$. Observemos que \mathcal{H}_t es un subespacio de

$$\bar{\mathcal{H}}_t := (\mathcal{X} \times \mathcal{A})^t \times \mathcal{X} = (\mathcal{X} \times \mathcal{A}) \times \bar{\mathcal{H}}_{t-1}, \quad t = 1, 2, \dots,$$

con $\bar{\mathcal{H}}_0 := \mathcal{X}$.

Definición 2.4. Una *estrategia aleatorizada* es una sucesión $\pi = \{\pi_t\}_{t=0}^\infty$, donde $\pi_t \in \mathcal{P}(\mathcal{A}|\mathcal{H}_t)$, y para todo $t = 0, 1, \dots$, se satisface la restricción

$$\pi_t(\mathcal{A}(x_t)|h_t) = 1, \quad h_t \in \mathcal{H}_t. \quad (2.3)$$

El conjunto de todas estas estrategias lo denotamos por Π .

2.1.1. Construcción canónica

Ahora procedemos a construir el espacio de probabilidad sobre el cual está definido el proceso de control de Markov (2.2). El siguiente resultado es fundamental para tal construcción.

Proposición 2.5. (Teorema de Ionescu Tulcea) *Sea $\mathcal{X}_0, \mathcal{X}_1, \dots$ una sucesión de espacios de Borel, y definamos a $\mathcal{Y}_t := \mathcal{X}_0 \times \dots \times \mathcal{X}_t$ para $t \in \mathcal{T}$, y $\mathcal{Y} := \prod_{t=0}^\infty \mathcal{X}_t$. Sea $\nu \in \mathcal{P}(\mathcal{X}_0)$ y sea $\mathbb{P}_t(dx_{t+1}|y_t) \in \mathcal{P}(\mathcal{X}_{t+1}|\mathcal{Y}_t)$, para cada $t \in \mathcal{T}$. Entonces existe una única medida de probabilidad $\mathbb{P}_\nu \in \mathcal{P}(\mathcal{Y})$ tal que, para cada rectángulo medible $B_0, \times \dots \times B_t \in \mathcal{Y}_t$,*

$$\mathbb{P}_\nu(B_0 \times \dots \times B_t) = \int_{B_0} \nu(dx_0) \int_{B_1} \mathbb{P}_0(dx_1|x_0) \cdots \int_{B_t} \mathbb{P}_t(dx_t|x_0, \dots, x_{t-1}). \quad (2.4)$$

Además, para cualquier función medible no negativa u sobre \mathcal{Y} , la función

$$x \mapsto \int u(y) \mathbb{P}_x(dy)$$

es medible sobre \mathcal{X}_0 , donde \mathbb{P}_x es \mathbb{P}_ν cuando ν está concentrada en $x \in \mathcal{X}_0$.

Sea (Ω, \mathcal{F}) el espacio muestral canónico, donde $\Omega := \mathcal{H}_\infty = (\mathcal{X} \times \mathcal{A})^\infty$ y \mathcal{F} la σ -álgebra de Borel de Ω . Los elementos de Ω son sucesiones de la forma $\omega = (x_0, a_0, x_1, a_1, \dots)$ con $x_t \in \mathcal{X}$ y $a_t \in \mathcal{A}$ para toda $t \in \mathcal{T}$. Observemos que Ω contiene al espacio $\mathcal{H}_\infty = \mathcal{K}^\infty$ de historias admisibles $(x_0, a_0, x_1, a_1, \dots)$ con $(x_t, a_t) \in \mathcal{K}$ para toda $t \in \mathcal{T}$. Sea $\pi = \{\pi_t\} \in \Pi$ una estrategia y sea $\nu \in \mathcal{P}(\mathcal{X})$ una medida de probabilidad a la que nos referiremos como “distribución inicial”. Entonces, por el Teorema de Ionescu-Tulcea, existe una única medida de probabilidad \mathbb{P}_ν^π sobre (Ω, \mathcal{F}) la cual, por (2.3), satisface que $\mathbb{P}_\nu^\pi(\mathcal{H}_\infty) = 1$, además para todo $B \in \mathcal{B}(\mathcal{X})$, $C \in \mathcal{B}(\mathcal{A})$ y $h_t \in \mathcal{H}_t$,

$$\mathbb{P}_\nu^\pi(X_0 \in B) = \nu(B), \quad (2.5)$$

$$\mathbb{P}_\nu^\pi(A_t \in C | h_t) = \pi_t(C|h_t), \quad (2.6)$$

$$\mathbb{P}_\nu^\pi(X_{t+1} \in B | h_t, a_t) = Q(B|x_t, a_t). \quad (2.7)$$

Definición 2.6. El proceso estocástico $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P}_\nu^\pi, \{X_t\}_{t=0}^\infty)$ es llamado *proceso de control de Markov* en tiempo discreto.

El proceso $\{x_t\}$ en la Definición 2.6 depende de la estrategia usada π y de la distribución inicial ν . El operador de la esperanza con respecto a \mathbb{P}_ν^π es denotado por \mathbb{E}_ν^π . Si ν es concentrado en un estado inicial $x \in \mathcal{X}$, entonces escribimos \mathbb{P}_x^π y \mathbb{E}_x^π , respectivamente. La ecuación (2.7) se asemeja a la propiedad de Markov, pero en general, $\{X_t\}$ no es un proceso de Markov en el sentido usual, pues su ley de transición también depende de la estrategia π . Sin embargo, si se restringe π a ser una estrategia de la clase adecuada, de la clase de *estrategias de Markov*, entonces $\{X_t\}$ sí es un proceso de Markov.

El proceso de control de Markov (2.2) es llamado *estacionario* porque sus componentes no dependen del parámetro t . El modelo *no estacionario* es de la forma

$$(\mathcal{X}_t, \mathcal{A}_t, \{A_t(x) : x \in \mathcal{X}_t\}, Q_t, \ell_t) \quad t \in \mathcal{T}.$$

Sin embargo, un modelo no estacionario puede ser reducido a la forma estacionaria (Hernández-Lerma y Lasserre, 1996).

2.1.2. Estrategias de Markov

De acuerdo a la Definición 2.4, cuando se usa una estrategia aleatorizada, la acción en cualquier tiempo t fijo es una variable aleatoria que depende de la historia completa h_t . Sin embargo, las estrategias pudieran sólo depender del estado actual x_t . Este tipo de estrategias son importantes, tanto computacional como teóricamente, pues es más fácil implementarlas y lidiar analíticamente con ellas.

Definición 2.7. Sea Φ que denota el conjunto de todos los kernels estocásticos $\varphi \in \mathcal{P}(\mathcal{A}|\mathcal{X})$ tales que $\varphi(A(x)|x) = 1$ para todo $x \in \mathcal{X}$, y sea Ψ el conjunto de todas las funciones medibles $\psi : \mathcal{X} \rightarrow \mathcal{A}$ que satisfacen que $\psi(x) \in A(x)$ para todo $x \in \mathcal{X}$. Las funciones en Ψ son llamadas *selectores* de la correspondencia (función valuada en conjuntos) $x \mapsto A(x)$.

Una función $\psi \in \Psi$ puede ser definida con el kernel estocástico $\varphi \in \Phi$, donde $\varphi(\cdot|x)$ es la medida de Dirac en $\psi(x)$ para todo $x \in \mathcal{X}$; es decir,

$$\varphi(\cdot|x) = \delta_{\psi(x)}, \quad x \in \mathcal{X},$$

por lo que $\Psi \subset \Phi$.

Definición 2.8. Una estrategia $\pi = \{\pi_t\}_{t=0}^\infty \in \Pi$ se dice que es una

- a) *estrategia de Markov aleatorizada* si existe una sucesión $\{\varphi_t\}$ de kernels estocásticos $\varphi_t \in \Phi$ tal que para $t = 0, 1, \dots$,

$$\pi_t(\cdot|h_t) = \varphi_t(\cdot|x_t), \quad h_t \in \mathcal{H}_t;$$

b) *estrategia estacionaria aleatorizada* si existe un $\varphi \in \Phi$ tal que para $t = 0, 1, \dots$,

$$\pi_t(h_t) = \varphi(\cdot|x_t), \quad h_t \in \mathcal{H}_t;$$

c) *estrategia pura o determinista* si existe una sucesión $\{\sigma_t\}$ de funciones medibles $\sigma_t : \mathcal{H}_t \rightarrow \mathcal{A}$ tales que para $t = 0, 1, \dots$,

$$\pi_t(\cdot|h_t) = \delta_{\sigma_t(h_t)}, \quad h_t \in \mathcal{H}_t;$$

d) *estrategia de Markov pura* si existe una sucesión $\{\psi_t\}$ de funciones $\psi_t \in \Psi$ tal que para $t = 0, 1, \dots$,

$$\pi_t(\cdot|h_t) = \delta_{\psi_t(x_t)}, \quad h_t \in \mathcal{H}_t;$$

e) *estrategia estacionaria pura* si hay una función $\psi \in \Psi$ tal que para $t = 0, 1, \dots$,

$$\pi_t(\cdot|h_t) = \delta_{\psi(x_t)}, \quad h_t \in \mathcal{H}_t.$$

Denotemos al conjunto de estrategias aleatorizadas de Markov y estrategias estacionarias aleatorizadas por Π_M y Π_S , respectivamente, y notemos que

$$\Pi_S \subset \Pi_M \subset \Pi.$$

También, denotemos al conjunto de estrategias puras, estrategias de Markov puras y estrategias puras estacionarias por Σ , Σ_M y Σ_S , respectivamente, y notemos que

$$\Sigma_S \subset \Sigma_M \subset \Sigma \subset \Pi.$$

Definimos para cada $x \in \mathcal{X}$ y $\varphi \in \Pi$,

$$\ell(x, \varphi) := \int_A \ell(x, a) \varphi(da|x)$$

y

$$Q(\cdot|x, \varphi) := \int_A Q(\cdot|x, a) \varphi(da|x).$$

En particular, para una función $\psi \in \Psi$,

$$\ell(x, \psi) = \ell(x, \psi(x))$$

y

$$Q(B|x, \psi) = Q(B|x, \psi(x)).$$

2.1.3. Propiedad de Markov

Sea $\{P_t\}$ una sucesión tal que $P_t \in \mathcal{P}(\mathcal{X}|\mathcal{X})$, y sea $\{X_t\}$ un proceso estocástico que toma valores en \mathcal{X} . Entonces $\{X_t\}$ es un *proceso no homogéneo* con kernels de transición $\{P_t\}$ si, para cada $B \in \mathcal{B}(\mathcal{X})$,

$$\mathbb{P}(X_{t+1} \in B | x_0, \dots, x_t) = \mathbb{P}(X_{t+1} \in B | x_t) = P_t(B|x_t), \quad t \in \mathcal{T}.$$

Si P_t es invariante en el tiempo, i.e., existe $P \in \mathcal{P}(\mathcal{X}|\mathcal{X})$ tal que $P_t = P$ para toda $t \in \mathcal{T}$, entonces $\{X_t\}$ es un *proceso de Markov homogéneo* con kernel de transición P .

Proposición 2.9. *Sea ν una distribución inicial arbitraria. Si $\pi = \{\varphi_t\} \in \Pi_M$, entonces $\{X_t\}$ es un proceso de Markov no homogéneo con kernels de transición $\{Q(\cdot|\cdot, \varphi_t)\}$; i.e., para cada $B \in \mathcal{B}(\mathcal{X})$,*

$$\mathbb{P}_\nu^\pi(X_{t+1} \in B | x_0, \dots, x_t) = \mathbb{P}_\nu^\pi(X_{t+1} \in B | x_t) = Q(B|x_t, \varphi_t), \quad t \in \mathcal{T}.$$

Demostración. Sea $B \in \mathcal{B}(\mathcal{X})$ y $t \in \mathcal{T}$. Usando la propiedad de torre de la esperanza condicional,

$$\begin{aligned} \mathbb{P}_\nu^\pi(X_{t+1} \in B | h_t) &= \mathbb{E}_\nu^\pi [\mathbb{P}_\nu^\pi(X_{t+1} \in B | h_t, a_t) | h_t] \\ &= \mathbb{E}_\nu^\pi [Q(B|x_t, a_t) | h_t] && \text{[Por (2.7)]} \\ &= \int_{\mathcal{A}} Q(B|x_t, a_t) \pi_t(da_t|h_t). && \text{[Por (2.6)]} \end{aligned}$$

En particular, para $\pi = \{\varphi_t\} \in \Pi_M$,

$$\begin{aligned} \mathbb{P}_\nu^\pi(X_{t+1} \in B | h_t) &= \int_{\mathcal{A}} Q(B|x_t, a_t) \varphi_t(da_t|h_t) \\ &= Q(B|x_t, \varphi_t). \end{aligned}$$

Ahora, utilizando la última igualdad y nuevamente la propiedad de la torre, tenemos

$$\begin{aligned} \mathbb{P}_\nu^\pi(X_{t+1} \in B | x_0, \dots, x_t) &= \mathbb{E}_\nu^\pi [\mathbb{P}_\nu^\pi(X_{t+1} \in B | h_t) | x_0, \dots, x_t] \\ &= \mathbb{E}_\nu^\pi [Q(B|x_t, \varphi_t) | x_0, \dots, x_t] \\ &= Q(B|x_t, \varphi_t). \end{aligned}$$

De manera similar,

$$\begin{aligned} \mathbb{P}_\nu^\pi(X_{t+1} \in B | x_t) &= \mathbb{E}_\nu^\pi [\mathbb{P}_\nu^\pi(X_{t+1} \in B | h_t) | x_t] \\ &= \mathbb{E}_\nu^\pi [Q(B|x_t, \varphi_t) | x_t] \\ &= Q(B|x_t, \varphi_t). \end{aligned}$$

Con lo que tenemos las dos igualdades. □

Si $Q(\cdot|\cdot, \varphi)$, con $\varphi \in \Phi$, es el kernel de transición de Markov en la Proposición 2.9, la probabilidad de transición en t periodos es denotada por $Q^t(\cdot|\cdot, \varphi)$, que es

$$Q^t(B|x, \varphi) := \mathbb{P}_x^\varphi(X_t \in B), \quad t \geq 0, \quad B \in \mathcal{B}(\mathcal{X}), \quad x \in \mathcal{X},$$

con $Q^1(\cdot|x, \varphi) := Q(\cdot|x, \varphi)$ y $Q^0(\cdot|x, \varphi) := \delta_x$. Podemos escribir recursivamente

$$Q^t(B|x, \varphi) = \int Q(B|y, \varphi)Q^{t-1}(dy|x, \varphi) = \int Q^{t-1}(B|x, \varphi)Q(dy|y, \varphi), \quad t \geq 1.$$

2.1.4. Ecuación de programación dinámica

Consideremos el modelo de control de Markov (2.2) con $T < +\infty$. Nos interesa minimizar el criterio de desempeño de horizonte finito

$$J(\pi, x) := \mathbb{E}_x^\pi \left[\sum_{t=0}^{T-1} \ell(X_t, A_t) + g(X_T) \right],$$

donde g es una función medible sobre \mathcal{X} que llamamos *función de costo terminal*, y para cada $t \in \mathcal{T}$ fijo, A_t es una variable aleatoria asociada a la medida de probabilidad $\pi_t(\cdot|H_t)$, con $H_t = (h_{t-1}, a_{t-1}, X_t)$.

Sea

$$J(x) := \inf_{\Pi} J(\pi, x), \quad x \in \mathcal{X},$$

el problema es encontrar $\hat{\pi} \in \Pi$ tal que

$$J(x) = J(\hat{\pi}, x), \quad \forall x \in \mathcal{X}.$$

Proposición 2.10. Sean J_0, J_1, \dots, J_T funciones en \mathcal{X} definidas por

$$J_t(x) := \min_{a \in \mathcal{A}(x)} \left\{ \ell(x, a) + \int_{\mathcal{X}} J_{t+1}(y)Q(dy|x, a) \right\}, \quad (2.8)$$

con condición terminal $J_T(x) := g(x)$. Supongamos que estas funciones son medibles y que, para cada $t \in \mathcal{T}$ existe un selector $\psi_t \in \Psi$ tal que $\psi_t(x) \in \mathcal{A}(x)$ alcanza su mínimo en (2.8) para todo $x \in \mathcal{X}$; es decir, para todo $x \in \mathcal{X}$

$$J_t(x) = \ell(x, \psi_t) + \int_{\mathcal{X}} J_{t+1}(y)Q(dy|x, \psi_t), \quad t \in \mathcal{T}.$$

Entonces la estrategia de Markov pura $\hat{\pi} = \{\psi_t\}_{t \in \mathcal{T}} \in \Sigma_M$ es óptima y

$$J(x) = J_0(x) = J(\hat{\pi}, x) \quad x \in \mathcal{X}.$$

Demostración. Sea $\pi = \{\pi_t\} \in \Pi$, y definimos la función de valor

$$V_s(\pi, x) := \mathbb{E}^\pi \left[\sum_{t=s}^{T-1} \ell(X_t, A_t) + g(X_T) \middle| X_s = x \right]$$

con condición terminal $V_T(\pi, x) := g(x)$.

Mostraremos por inducción retrógrada que para todo $x \in \mathcal{X}$

$$V_t(\pi, x) \geq J_t(x) \quad t \in \mathcal{T}, \quad (2.9)$$

con igualdad si $\pi = \hat{\pi} \in \Sigma_M$, i.e.,

$$V_t(\hat{\pi}, x) = J_t(x) \quad t \in \mathcal{T}. \quad (2.10)$$

Observemos que para $t = T$ se cumple, pues por las condiciones terminales de V_t y J_t ,

$$V_t = J_t = g(x).$$

Supongamos que se cumple para $t = s + 1$, para alguna $s \in \mathcal{T}$,

$$V_{s+1}(\pi, x) \geq J_{s+1}(x), \quad x \in \mathcal{X}.$$

Entonces,

$$\begin{aligned} V_s(\pi, x) &= \mathbb{E}^\pi \left[\ell(X_s, a_t) + \sum_{t=s+1}^{T-1} \ell(X_t, A_t) + g(X_T) \middle| X_s = x \right] \\ &= \int_{\mathcal{A}} \left[\ell(x, a) + \int_{\mathcal{X}} V_{s+1}(\pi, y) Q(dy|x, a) \right] \pi_t(da|x) && \text{[Por (2.6) y (2.7)]} \\ &\geq \int_{\mathcal{A}} \left[\ell(x, a) + \int_{\mathcal{X}} J_{s+1}(y) Q(dy|x, a) \right] \pi_t(da|x) && \text{[Hipótesis de inducción]} \\ &\geq \min_{\mathcal{A}(x)} \left\{ \ell(x, a) + \int_{\mathcal{X}} J_{s+1}(y) Q(dy|x, a) \right\} \\ &= J_s(x). \end{aligned}$$

Lo que prueba (2.9). Si además incluimos en la hipótesis de inducción que (2.10) se cumple para $t = s + 1$, en el desarrollo previo obtenemos que se cumple para $t = s$, recordando que $\pi_t(\cdot|h_t) = \delta_{\psi_t(x_t)}$. Por lo tanto, se cumple para $t \in \mathcal{T}$, y en particular se cumple para $t = 0$, por lo que $J_0(x) = J(\hat{\pi}, x)$. \square

2.2. Teoría de juegos

En la sección anterior, se abordó el problema de control óptimo en procesos de Markov en tiempo discreto, que consiste en encontrar la estrategia que optimice un criterio de desempeño. De esta manera, se optimiza la evolución de un sistema que se comporta como una sola unidad. En esta sección introduciremos algunas ideas de la teoría de juegos, para estudiar la evolución de un sistema en el que interactúan varios agentes, y cada uno busca optimizar su propio criterio, como en los juegos no cooperativos. Un juego es *no cooperativo* si cada jugador persigue sus propios intereses, que están parcialmente en conflicto con los intereses de los demás. Este tipo de juegos son los de mayor interés, debido a que los juegos cooperativos, en general, pueden ser reducidos a un problema de control óptimo, determinando una sola función de pagos (o de costos) a optimizar por todos los jugadores, lo que de alguna manera elimina el aspecto de “juego” del problema (Basar y Olsder, 1999).

Empezamos con juegos estáticos, donde introducimos el concepto de equilibrio de Nash, así como una interpretación de este equilibrio y de las estrategias aleatorizadas que se introdujeron en la sección anterior en un contexto temporal más amplio. Finalmente, definimos el equilibrio en el contexto de juegos dinámicos con N agentes.

2.2.1. Juegos estáticos

Consideremos un *juego estático* o de una sola etapa. Sea \mathcal{I} el conjunto de jugadores, tal que $|\mathcal{I}| = N$; denotemos por $i \in \mathcal{I}$ a un jugador genérico, y por $-i$ a todos los jugadores distintos de i , a los que nos referimos como “los oponentes de i ”. Sea \mathcal{H}^i el conjunto de información del jugador i y \mathcal{A}^i el espacio de acciones factibles del jugador i .

Una *estrategia pura* para el jugador i es una función $\sigma^i : \mathcal{H}^i \rightarrow \mathcal{A}^i$. Definimos a Σ^i como el espacio de *estrategias puras* y asumimos que es un conjunto finito. Sea u_i una *función de pagos*, que da al jugador una utilidad de von Neumann-Morgenstern $u_i(\sigma)$ para cada *perfil de estrategias* $\sigma = (\sigma^1, \dots, \sigma^N)$, con $\sigma^i \in \Sigma^i$. Una función de utilidad de *utilidad de von Neumann-Morgenstern* está asociada a una representación numérica de una relación de preferencias sobre un espacio de distribuciones de probabilidad. Es una función estrictamente cóncava, estrictamente creciente y continua; y representa el valor que un agente económico asigna a los elementos de un conjunto de posibles elecciones (ver Apéndice A). En este juego cada jugador intentará maximizar su propia función de pagos.

Una *estrategia mixta* $\sigma^i : \mathcal{H}^i \rightarrow \mathcal{P}(\Sigma^i)$ es una distribución de probabilidad sobre las estrategias puras. Cada aleatorización de los jugadores es estadísticamente independiente de las de sus oponentes, y el pago de un *perfil de estrategias mixtas* es el valor esperado de los pagos de las estrategias puras correspondientes. Denotamos al espacio de estrategias mixtas del jugador i por Π^i , donde $\pi^i(\sigma^i)$ es la probabilidad que π^i asigna a σ^i . El espacio de *perfiles de estrategias mixtas* es denotado por $\Pi = \Pi^1 \times \dots \times \Pi^N$, cuyos elementos genéricos los denotamos por $\pi = (\pi^1, \dots, \pi^N)$. El pago del jugador i para el perfil π , es la esperanza con respecto a la probabilidad inducida por π en los perfiles de estrategias puras. Es decir, abusando un poco de la notación,

$$u_i(\pi) = \sum_{\sigma \in \Sigma} [\pi^1(\sigma^1) \dots \pi^N(\sigma^N)] u_i(\sigma),$$

con $\Sigma = \Sigma^1 \times \dots \times \Sigma^N$ y $\sigma = (\sigma^1, \dots, \sigma^N)$.

Observación 2.11. Notemos que el pago de un perfil de estrategias mixtas $u_i(\pi)$ es una función lineal de la probabilidad π^i del jugador i . Notemos también que $u_i(\pi)$ es una función polinomial del perfil de estrategias $\pi = (\pi^1, \dots, \pi^N)$, y por lo tanto es continua. Por último, notemos que el conjunto de estrategias mixtas contiene a las estrategias puras, por ser distribuciones de probabilidad degeneradas. \diamond

En general, un *equilibrio de Nash* es un perfil de estrategias tal que la estrategia de cada jugador es una respuesta óptima a las estrategias de los otros jugadores. En particular, para juegos estáticos un *equilibrio de Nash en estrategias puras* es un perfil de estrategias puras $\hat{\sigma}$ que satisface

$$u_i(\hat{\sigma}^i, \hat{\sigma}^{-i}) \geq u_i(\sigma^i, \hat{\sigma}^{-i}), \quad \sigma^i \in \Sigma^i.$$

Un *equilibrio de Nash en estrategias mixtas* es un perfil de estrategias mixtas $\hat{\pi}$ tal que, para todo jugador i ,

$$u_i(\hat{\pi}^i, \hat{\pi}^{-i}) \geq u_i(\pi^i, \hat{\pi}^{-i}), \quad \pi^i \in \Pi^i,$$

o equivalentemente,

$$u_i(\hat{\pi}^i, \hat{\pi}^{-i}) \geq u_i(\sigma^i, \hat{\pi}^{-i}), \quad \sigma^i \in \Sigma^i.$$

Como la utilidad esperada es lineal en las probabilidades, si un jugador usa una estrategia mixta no degenerada en un equilibrio de Nash, debe ser indiferente entre todas las estrategias puras a las que asigna una probabilidad positiva. Un equilibrio de Nash (en estrategias puras) es *estricto* si cada jugador tiene una única mejor respuesta a las estrategias de sus oponentes. Esto es, $\hat{\sigma}$ es un equilibrio estricto si y sólo si es un equilibrio de Nash y, para toda i

$$u_i(\hat{\sigma}^i, \hat{\sigma}^{-i}) > u_i(\sigma^i, \hat{\sigma}^{-i}), \quad \sigma^i \neq \hat{\sigma}^i.$$

Por definición, un equilibrio estricto es necesariamente una estrategia pura de equilibrio. Sin embargo, no siempre existe un equilibrio estricto; incluso un equilibrio que es una estrategia pura, no necesariamente es un equilibrio estricto (Fudenberg y Tirole, 1991). Por otro lado, un *equilibrio de Nash aproximado* o ϵ -*equilibrio de Nash* en estrategias mixtas, para $\epsilon > 0$, es un perfil de estrategias mixtas $\pi \in \Pi$ que satisface

$$u_i(\hat{\pi}^i, \hat{\pi}^{-i}) + \epsilon \geq u_i(\pi^i, \hat{\pi}^{-i}), \quad \pi^i \in \Pi^i.$$

Una idea similar a la de las estrategias mixtas son las estrategias de comportamiento, en el sentido de que no es una función determinista. Una *estrategia de comportamiento* para el jugador i , es una función $\pi_i : \mathcal{H}^i \rightarrow \mathcal{P}(\mathcal{A}^i)$. Una estrategia de comportamiento especifica una distribución de probabilidad sobre las acciones en cada conjunto de información, siendo independientes las distribuciones de probabilidad en diferentes conjuntos de información. A diferencia de una estrategia mixta, una estrategia de comportamiento asigna una probabilidad al espacio de acciones y no al espacio de estrategias puras, por lo que, en general el espacio de estrategias mixtas y el espacio de estrategias de comportamiento no es el mismo. Un *equilibrio de Nash en estrategias de comportamiento* es un perfil de estrategias tal que ningún jugador puede incrementar su ganancia esperada usando una estrategia de comportamiento diferente.

A continuación presentamos el Teorema de Nash (1950), sobre la existencia de equilibrios para *juegos finitos*, es decir, juegos donde $\Sigma = \Sigma^1 \times \cdots \times \Sigma^N$ es un espacio finito. La prueba es un arquetipo de la existencia de equilibrios en la teoría de juegos, y consiste en asegurar la existencia de un punto fijo de una correspondencia del espacio de estrategias mixtas en sí mismo.

Proposición 2.12. (Teorema de Nash) *Para cualquier juego estratégico finito, existe una estrategia mixta que es un equilibrio de Nash.*

Demostración. Sea $r_i : \Pi \rightarrow 2^{\Pi^i}$ la correspondencia que asigna a cada perfil de estrategias π el conjunto $\{\hat{\pi}^i : u_i(\hat{\pi}^i, \pi^{-i}) \geq u_i(\tau^i, \pi^{-i}) \forall \tau^i \in \Pi^i\}$, y sea la correspondencia $r : \Pi \rightarrow \Pi$ el producto cartesiano $r(\pi) = r_1(\pi) \times \cdots \times r_N(\pi) \equiv \{\hat{\pi} : \hat{\pi}^i \in r_i(\pi), i = 1, \dots, N\}$.

- i) Primero notemos que $\Pi = \Pi^1 \times \cdots \times \Pi^N$ es un subconjunto compacto, convexo y no vacío de un espacio euclidiano de dimensión finita. Pues Π^i es el conjunto de medidas de probabilidad de Σ^i , es decir, Π^i es un simplex de dimensión $(|\Sigma^i| - 1)$.

- ii) Por otro lado, para toda $\pi \in \Pi$, $r(\pi)$ es no vacío. Por la Observación 2.11, cada función u_i es lineal en π^i y por lo tanto continua, y como Π es compacto, u_i alcanza un máximo para cada $i \in I$.
- iii) Además, para toda $\pi \in \Pi$, $r(\pi)$ es convexo. Si $\hat{\pi}_1, \hat{\pi}_2 \in r(\pi)$, entonces para cada $i \in \mathcal{I}$ y $\lambda \in (0, 1)$,

$$u_i(\lambda \hat{\pi}_1^i + (1 - \lambda) \hat{\pi}_2^i, \pi^{-i}) = \lambda u_i(\hat{\pi}_1^i, \pi^{-i}) + (1 - \lambda) u_i(\hat{\pi}_2^i, \pi^{-i});$$

entonces también $\lambda \hat{\pi}_1 + (1 - \lambda) \hat{\pi}_2 \in r(\pi)$.

- iv) Ahora, verificamos que r tiene una gráfica cerrada (hemi-continuidad por arriba), es decir, $(\pi_n, \hat{\pi}_n) \rightarrow (\pi, \hat{\pi})$ con $\hat{\pi}_n \in r(\pi_n)$, entonces $\hat{\pi} \in r(\pi)$. Supongamos que no, que existe una sucesión $(\pi_n, \hat{\pi}_n) \rightarrow (\pi, \hat{\pi})$, tal que $\hat{\pi}_n \in r(\pi_n)$, pero $\hat{\pi} \notin r(\pi)$. Entonces $\hat{\pi}^i \notin r_i(\pi)$ para algún jugador $i \in \mathcal{I}$, lo que implica que existe $\epsilon > 0$ y $\tau^i \in \Pi^i$ tal que

$$u_i(\tau^i, \pi^{-i}) > u_i(\hat{\pi}^i, \pi^{-i}) + 3\epsilon.$$

Como u_i es continua y $(\pi_n, \hat{\pi}_n) \rightarrow (\pi, \hat{\pi})$, para n suficientemente grande tenemos,

$$u_i(\tau^i, \pi_n^{-i}) > u_i(\tau^i, \pi^{-i}) - \epsilon > u_i(\hat{\pi}_n^i, \pi^{-i}) + 2\epsilon > u_i(\hat{\pi}_n^i, \pi_n^{-i}) + \epsilon.$$

Entonces $u_i(\tau^i, \pi_n^{-i}) > u_i(\hat{\pi}_n^i, \pi_n^{-i})$, pero esto contradice que $\hat{\pi}_n^i \in r_i(\pi_n)$. Por lo tanto, r tiene una gráfica cerrada.

Por el teorema del punto fijo de Kakutani (ver Apéndice C), existe una estrategia perfil que es un punto fijo de r , es decir, $\hat{\pi} \in r(\hat{\pi})$, donde para cada jugador $\hat{\pi}^i \in r_i(\hat{\pi})$, y por lo tanto es un equilibrio de Nash. \square

La idea del equilibrio de Nash se puede plantear como el resultado del aprendizaje o evolución de los jugadores. Supongamos que hay un gran número de jugadores y aleatoriamente se agrupan para que entren a un juego específico. En cada ronda, cada jugador elige una estrategia, observa la estrategia elegida por sus oponentes y recibe la recompensa correspondiente. Si hay un gran número de jugadores, entonces es poco probable que un par de jugadores que fueron oponentes en una ronda vuelvan a serlo en otra, por lo que los jugadores no tienen que preocuparse por cómo sus acciones afectarán el juego de sus futuros oponentes. Entonces, en cada periodo los jugadores deberían tender a jugar la estrategia que maximiza la ganancia esperada de ese periodo. La expresión “tenden a jugar” se debe a que se permite la posibilidad de que los jugadores ocasionalmente experimenten con sus elecciones.

El siguiente paso es especificar cómo los jugadores ajustan sus expectativas sobre el juego de sus oponentes a la luz de su experiencia. El proceso de ajuste no necesariamente converge a una distribución estacionaria, pues son posibles muchas especificaciones diferentes. Sin embargo, si los jugadores observan las estrategias de sus oponentes al final de cada ronda, y los jugadores eventualmente acumulan un gran número de observaciones, entonces una especificación natural es que las expectativas de cada jugador sobre el juego de sus oponentes converja a la distribución de probabilidad correspondiente a la media muestral del juego que ha observado en el pasado. En este

caso, si el sistema converge a un estado estacionario, el estado estacionario debe ser un equilibrio de Nash.

La idea de grandes poblaciones de jugadores también puede ser usada para proveer una interpretación de las estrategias mixtas y un equilibrio de estrategias mixtas. En lugar de suponer que los jugadores aleatorizan entre varias estrategias, una estrategia mixta puede ser vista como la descripción de una situación en la cual diferentes fracciones de la población siguen diferentes estrategias puras. Un equilibrio de Nash requiere que todas las estrategias que tienen probabilidad positiva sean igualmente buenas respuestas. Pues si una estrategia pura fuese mejor que otra, esperaríamos que a través del proceso de aprendizaje, los jugadores cambiaran su juego a la estrategia con mayor ganancia.

2.2.2. Juegos dinámicos

Sea $\mathcal{T} = \{0, 1, \dots, T-1\}$ el conjunto de los periodos del juego, donde $T \leq +\infty$. Un juego dinámico es *con acciones observadas* si los jugadores eligen sus acciones simultáneamente en cada periodo t , y cuando las eligen, todos los jugadores conocen las acciones elegidas en los periodos previos $0, 1, \dots, t-1$. Por “elegir simultáneamente” nos referimos a que en cada periodo, los jugadores eligen sus acciones sin conocimiento alguno sobre las acciones que eligen sus oponentes en el mismo periodo.

Sea $\mathcal{A}^i(x)$ el conjunto de acciones factibles de i cuando se encuentra en x . Sea $\mathbf{a} = (a^1, \dots, a^N)$ un *perfil de acciones* y $\mathbf{x} = (x^1, \dots, x^N)$ un *perfil de estados*. Sea el conjunto

$$\mathcal{K} := \{(\mathbf{x}, \mathbf{a}) : x^i \in \mathcal{X}, a^i \in \mathcal{A}(x^i), i \in \mathcal{I}\}.$$

Para cada $t \in \mathcal{T}$ definamos el espacio \mathcal{H}_t de *historias admisibles* hasta el tiempo t , como

$$\mathcal{H}_t := \mathcal{K}^t \times \mathcal{X} = \mathcal{K} \times \mathcal{H}_{t-1},$$

y $\mathcal{H}_0 = \mathcal{X}$. Un elemento genérico $h_t \in \mathcal{H}_t$, es un vector de la forma

$$h_t = (\mathbf{x}_0, \mathbf{a}_0, \dots, \mathbf{x}_{t-1}, \mathbf{a}_{t-1}, \mathbf{x}_t),$$

con $(\mathbf{x}_s, \mathbf{a}_s) \in \mathcal{K}$ para $s = 0, \dots, t-1$, y $x_t \in \mathcal{X}$.

Una *estrategia pura* para el jugador i es una sucesión $\{\sigma_t^i\}_{t=0}^{T-1}$, donde cada $\sigma_t^i : \mathcal{H}_t \rightarrow \mathcal{A}^i$. Representamos el vector de pagos del perfil de estrategias puras σ como $u(\sigma)$. Para juegos dinámicos, un *equilibrio de Nash de estrategias puras* es un perfil de estrategias $\hat{\sigma}$ tal que ningún jugador i puede obtener una mayor ganancia con otra estrategia, es decir,

$$u_i(\hat{\sigma}^i, \hat{\sigma}^{-i}) \geq u_i(\sigma^i, \hat{\sigma}^{-i}), \quad \forall \sigma^i = (\sigma_t^i)_{t=0}^{T-1}.$$

Los juegos donde los jugadores conocen toda la información relevante sobre los demás, incluyendo el pago que cada uno recibe de varios resultados del juego, son llamados juegos con *información completa*. Sin embargo este es un supuesto muy fuerte, por ejemplo, las empresas en una industria no necesariamente conocen los costos de las demás empresas. Cuando algunos jugadores no conocen

el pago de los demás, se dice que el juego tiene *información incompleta*. Un juego de este tipo es conocido como *juego Bayesiano*.

Cuando existen eventos exógenos a los jugadores, éstos son representados como movimientos de la “Naturaleza”, y se les asocia una distribución de probabilidad. El juego de información incompleta se formula de tal manera que se puede interpretar como un juego de información imperfecta, incorporando a la naturaleza en el juego, siendo ésta quien determina el tipo de cada jugador. El *tipo* de un jugador incluye toda información privada que es relevante para la toma de decisiones de los jugadores. Se asume que los tipos de los jugadores $\{\theta_i\}_{i \in I}$ son realizaciones de una distribución $p(\theta_1, \dots, \theta_N)$, donde $\theta_i \in \Theta_i$. Sólo θ_i es observado por el jugador i y $p(\theta_{-i}|\theta_i)$ denota la probabilidad condicional del jugador i sobre los tipos de sus oponentes θ_{-i} dado θ_i , asumiendo que la marginal $p_i(\theta_i)$ es estrictamente positiva para todo $\theta_i \in \Theta_i$.

2.3. Juegos con espacio de estados finito

Denotamos por \mathcal{T} el conjunto $\{0, 1, \dots, T - 1\}$ que representa el conjunto de *periodos* del juego. Sea \mathcal{A} el conjunto de *acciones*, un subconjunto compacto de un espacio métrico. Denotamos por $\mathcal{P}(\mathcal{A})$ al conjunto de medidas de probabilidad sobre los subconjuntos de Borel de \mathcal{A} . El conjunto $\mathcal{P}(\mathcal{A})$ es compacto con la topología débil-* y es metrizable por la distancia de Kantorovich-Rubinstein (ver Apéndice B).

Denotamos por \mathcal{X} el espacio de *estados*, el cual vamos a asumir que es un conjunto finito. El conjunto de distribuciones de probabilidad sobre \mathcal{X} lo denotamos por $\mathcal{P}(\mathcal{X})$, el cual está en $\mathbb{R}^{|\mathcal{X}|}$ y está equipado con la métrica euclidiana.

Definimos a la *función de costos*

$$\ell : \mathcal{X} \times \mathcal{A} \times \mathcal{P}(\mathcal{X}) \longrightarrow \mathbb{R}_+, \quad (2.11)$$

y a la *función de costo terminal*

$$g : \mathcal{X} \times \mathcal{P}(\mathcal{X}) \longrightarrow \mathbb{R}_+. \quad (2.12)$$

Ambas funciones de costos las asumimos uniformemente acotadas, conjuntamente continuas. Además, Lipschitz continuas en la última variable uniformemente con respecto al resto de variables, con constantes de Lipschitz L_ℓ y L_g , respectivamente; es decir, para todo $(x, a, m, m') \in \mathcal{X} \times \mathcal{A} \times \mathcal{P}(\mathcal{X}) \times \mathcal{P}(\mathcal{X})$,

$$\|\ell(x, a, m) - \ell(x, a, m')\| \leq L_\ell \|m - m'\|, \quad (2.13)$$

$$\|g(x, m) - g(x, m')\| \leq L_g \|m - m'\|. \quad (2.14)$$

La *función de transición* la definimos como

$$Q : \mathcal{X} \times \mathcal{A} \times \mathcal{P}(\mathcal{X}) \rightarrow \mathcal{P}(\mathcal{X}) \quad (2.15)$$

y asumimos que es conjuntamente continua y acotada en norma. Además, para todo $(x, a, a', m, m') \in \mathcal{X} \times \mathcal{A} \times \mathcal{A} \times \mathcal{P}(\mathcal{X}) \times \mathcal{P}(\mathcal{X})$, satisface las siguientes condiciones Lipschitz,

$$\|Q(x, a, m) - Q(x, a', m)\|_\infty \leq L_Q \|a - a'\|, \quad (2.16)$$

$$\|Q(x, a, m) - Q(x, a, m')\|_\infty \leq \|m - m'\|_\infty. \quad (2.17)$$

Observación 2.13. Notemos que los jugadores que estamos considerando son homogéneos, en el sentido de que tienen las mismas funciones de costos ℓ y g , y la misma función de transición Q . Además, este modelo corresponde a un *juego estocástico anónimo*, debido a que las funciones de costos y la función de transición dependen de los estados de los otros jugadores sólo a través de su distribución actual $m_t \in \mathcal{P}(\mathcal{X})$. \diamond

$\varpi \varsigma \varrho$

Sea $\tilde{\mathcal{H}}_t$ la historia hasta el tiempo t , definida por

$$\tilde{\mathcal{H}}_t := (\mathcal{X} \times \mathcal{A} \times \mathcal{P}(\mathcal{X}))^t. \quad (2.18)$$

Una *estrategia de comportamiento* para el jugador i es una sucesión $\pi^i = \{\pi_t^i\}_{t=0}^\infty$, donde cada $\pi_t^i : \tilde{\mathcal{H}}_t \rightarrow \mathcal{P}(\mathcal{A})$. Denotamos por $\tilde{\Pi}$ el conjunto de estrategias de comportamiento para cada jugador. Una *estrategia de comportamiento de Markov* para el jugador i es una sucesión $\tau^i = \{\tau_t^i\}_{t=0}^\infty$ donde cada $\tau_t^i : \mathcal{X} \times \mathcal{P}(\mathcal{X}) \rightarrow \mathcal{P}(\mathcal{A})$. Denotamos por $\tilde{\Pi}_M$ al conjunto de estrategias de comportamiento de Markov, y notemos que $\tilde{\Pi}_M \subset \tilde{\Pi}$. Un *perfil de estrategias de comportamiento* es una sucesión $\pi = \{\pi^i\}_{i \in I}$, donde π^i es una estrategia de comportamiento del jugador i , para $i \in I$.

Sea $(\tilde{\mathcal{H}}_\infty, \mathcal{B}(\tilde{\mathcal{H}}_\infty))$ el espacio canónico muestral. Por el Teorema de Ionescu-Tulcea (Proposición 2.5), existe una única medida de probabilidad $\mathbb{P}_{m_0}^\pi$ sobre $(\tilde{\mathcal{H}}_\infty, \mathcal{B}(\tilde{\mathcal{H}}_\infty))$ la cual satisface que $\mathbb{P}_{m_0}^\pi(\tilde{\mathcal{H}}_\infty) = 1$, además para todo $B \in \mathcal{B}(\mathcal{X})$, $C \in \mathcal{B}(\mathcal{A})$ y $h_t \in \tilde{\mathcal{H}}_t$,

$$\begin{aligned} \mathbb{P}_{m_0}^\pi(X_0 \in B) &= m_0(B), \\ \mathbb{P}_{m_0}^\pi(A_t \in C | h_t) &= \pi_t(C | h_t), \\ \mathbb{P}_{m_0}^\pi(X_{t+1} \in B | h_t, a_t) &= Q(x_t, a_t, m_t)(B). \end{aligned}$$

Definimos el proceso de control de Markov en tiempo discreto $(\tilde{\mathcal{H}}_\infty, \mathcal{B}(\tilde{\mathcal{H}}_\infty), \mathbb{P}_{m_0}^\pi, \{X_t\}_{t=0}^\infty)$.

2.3.1. Equilibrio de campo medio

En un juego con un gran número de jugadores, podríamos esperar que la distribución de los jugadores sobre el espacio de estados alcance un nivel medio, y por lo tanto la distribución permanezca más o menos constante, después de un tiempo. Como el efecto de los oponentes de un jugador sobre éste es sólo a través de la distribución en los estados, cuando el número de jugadores crece, un solo jugador debería tener un efecto despreciable en el juego. Basados en esta intuición, consideramos un modelo con un número infinito de jugadores en el que cada jugador optimiza sus costos asumiendo que la distribución en el espacio de estados será constante en el largo plazo. Entonces, la estrategia de cada jugador depende de su propio estado actual, y ya no depende de la distribución de todos los agentes en el espacio de estados. A este tipo de jugadores se les conoce como *jugadores inconscientes*, aludiendo a la simplificación de sus estrategias, también conocidas como *estrategias inconscientes* (Adlakha et al., 2013).

En principio, nosotros no asumiremos una distribución estacionaria m de los jugadores sobre el espacio de estados en los periodos $t = 0, \dots, T$, sino, una sucesión de distribuciones $\{m_t\}_{t=0}^T$ para

los periodos $t = 0, \dots, T$. Este caso es más general, pues si $m_t = m$ para todo $t = 1, \dots, T$, tenemos el supuesto de una distribución estacionaria.

Sea la sucesión $\mathbf{m} = \{m_t\}_{t=0}^T$ un parámetro externo fijo, donde $m_t \in \mathcal{P}(\mathcal{X})$. Consideremos el juego de *un jugador* con \mathbf{m} conocido, denotado por $\Gamma_{\mathbf{m}}$, de la siguiente manera: El estado inicial del jugador es elegido usando la distribución m_0 . En el periodo $t \in \mathcal{T}$, el jugador observa su propio estado x_t y elige una acción a_t . Una vez elegida la acción, asume el costo $\ell(x_t, a_t, m_t)$. El nuevo estado X_{t+1} es una variable aleatoria cuya distribución corresponde a la función de transición $Q(x_t, a_t, m_t)$ y la situación es repetida. Al tiempo $t = T$ asume el costo terminal $g(x_T, m_T)$.

Definamos a $\mathcal{H}_t := (\mathcal{X} \times \mathcal{A})^t$, y sea $\varpi = (\varpi_t)_{t \in \mathcal{T}}$ una estrategia de comportamiento inconsciente, es decir, $\varpi_t : \mathcal{H}_t \rightarrow \mathcal{A}$. Denotamos por Π el conjunto de estrategias de comportamiento inconscientes. El funcional del *costo total esperado* para el jugador con estado inicial x , cuando usa la estrategia inconsciente ϖ , es denotado por $J_1 : \mathcal{X} \times \Sigma \times \mathcal{P}(\mathcal{X})^{T+1} \rightarrow \mathbb{R}_+$, y definido por

$$J_1(x, \varpi, \mathbf{m}) := \mathbb{E}_x^\varpi \left[\sum_{t \in \mathcal{T}} \ell(X_t, \varpi_t(H_t), m_t) + g(X_T, m_T) \right].$$

donde \mathbb{E}_x^ϖ denota la esperanza con respecto a \mathbb{P}_x^ϖ , y H_t es una variable que depende de X_t y toma valores en \mathcal{H}_t .

Suposición 2.14. Denotemos por \mathcal{V} al conjunto de funciones $v : \mathcal{T} \times \mathcal{X} \times \mathcal{P}(\mathcal{X})^{T+1} \rightarrow \mathbb{R}_+$. Supongamos que para todo $(s, x, \mathbf{m}, v) \in \mathcal{T} \times \mathcal{X} \times \mathcal{P}(\mathcal{X})^{T+1} \times \mathcal{V}$,

$$a \mapsto \left\{ \ell(x, a, m_s) + \sum_{y \in \mathcal{X}} Q(x, a, m_s)(y) \cdot v(s+1, y, \mathbf{m}) \right\}$$

alcanza su mínimo en un único punto $\hat{a}(s, x, \mathbf{m}, v)$.

Introducimos la siguiente función de valor para el jugador cuando está en el estado $x \in \mathcal{X}$ al tiempo $s = 0, \dots, T$ como

$$V(s, x, \mathbf{m}) := \inf_{\varpi \in \Pi} \mathbb{E}^\varpi \left[\sum_{t \geq s}^{T-1} \ell(X_t, \varpi_t(H_t), m_t) + g(X_T, m_T) \mid X_s = x \right].$$

Esta función de valor satisface la ecuación de programación dinámica

$$V(s, x, \mathbf{m}) = \min_{a \in \mathcal{A}} \left\{ \ell(x, a, m_s) + \sum_{y \in \mathcal{X}} Q(x, a, m_s)(y) \cdot V(s+1, y, \mathbf{m}) \right\}, \quad (2.19)$$

con condición terminal $V(T, x, \mathbf{m}) = g(x, m_T)$. Por la Proposición 2.10, como consecuencia la Suposición 2.14 y de la ecuación de programación dinámica (2.19), existe una *estrategia Markov pura* óptima (inconsciente). Es decir, una sucesión $\sigma = \{\sigma_t\}_{t \in \mathcal{T}}$ donde $\sigma_t : \mathcal{X} \rightarrow \mathcal{A}$. Denotamos por Σ_M el conjunto de estrategias de Markov puras (inconscientes).

Ahora supongamos que m_0 es la distribución inicial y que todos los jugadores son inconscientes y siguen la estrategia $\sigma \in \Sigma_M$. Entonces, la evolución del juego está dada por la ecuación progresiva

$$m_{t+1}^\sigma(x) := \sum_{y \in \mathcal{X}} Q(y, \sigma_t(y), m_t^\sigma)(x) \cdot m_t^\sigma(y), \quad t \in \mathcal{T}, \quad (2.20)$$

con condición inicial $m_0^\sigma := m_0$.

Definición 2.15. Un *equilibrio de campo medio* es un par $(\sigma, \mathbf{m}) \in \Sigma \times \mathbb{P}(\mathcal{X})^{T+1}$ tal que

- a) σ es una estrategia óptima en el juego de un jugador $\Gamma_{\mathbf{m}}$, calculada mediante la ecuación de programación dinámica (2.19).
- b) \mathbf{m} es la trayectoria que sigue m_0 de acuerdo a la ecuación (2.20), para la estrategia σ .

Observación 2.16. La interpretación que Maldonado Lopez (2014) proporciona sobre el equilibrio de campo medio es como un equilibrio para un juego con un *continuum* de jugadores en tiempo discreto, llamado *equilibrio distribucional*. Un juego con un continuum de jugadores es un juego donde los jugadores no son átomos. Un equilibrio distribucional es una sucesión de distribuciones $\{\Delta_t\}_{t \in \mathcal{T}}$ sobre el espacio producto estados-acciones, es decir, $\Delta_t \in \mathcal{P}(\mathcal{X} \times \mathcal{A})$, tal que el proceso $\{\Delta_t\}$ evoluciona de acuerdo a una estrategia óptima Δ_t -c.s. en cada periodo t , que todos los jugadores siguen. Nos referimos a una estrategia “óptima” en el sentido de que es un equilibrio de Nash.

Sea $\mathcal{I} = [0, 1]$ el conjunto de jugadores. Para el espacio de estados-acciones, definamos la distribución conjunta $\Delta_t \in \mathcal{P}(\mathcal{X} \times \mathcal{A})$ y la distribución marginal $\Delta_{t,\mathcal{X}} \in \mathbb{P}(\mathcal{X})$. Sea $\nu \in \mathbb{P}(\mathcal{X})$ la distribución inicial de los jugadores.

El juego consiste en lo siguiente: Al tiempo $t \in \mathcal{T}$, el jugador i observa su propio estado x_t^i y la distribución de los jugadores $\Delta_{t,\mathcal{X}}$ y elige una acción a_t^i . Las acciones son elegidas simultanea e independientemente por todos los jugadores. Una vez que se elige la acción, los jugadores asumen el costo $\ell(x_t^i, a_t^i, \Delta_{t,\mathcal{X}})$ y la correspondiente distribución en el espacio de estados-acciones $\Delta_t \in \mathcal{P}(\mathcal{X} \times \mathcal{A})$ es anunciada. La nueva distribución en los estados está dada por

$$\Delta_{t+1,\mathcal{X}}^\#(\cdot) := \int_{\mathcal{X} \times \mathcal{A}} Q(y, a, \Delta_{t,\mathcal{X}})(\cdot) \Delta_t(dy, da).$$

y la situación se repite. Supongamos por un momento que la sucesión $\Delta := \{\Delta_t\}_{t \in \mathcal{T}}$ está fija, donde $\Delta_t \in \mathcal{P}(\mathcal{X} \times \mathcal{A})$. Definamos la sucesión

$$V_s(x, \Delta) := \min_{a \in \mathcal{A}} \left\{ \ell(x, a, \Delta_{t,\mathcal{X}}) + \int_{\mathcal{X}} V_{s+1}(y, \Delta) \Delta_{t+1,\mathcal{X}}^\#(dy) \right\},$$

con condición terminal $V_T(x, \Delta) = g(x, \Delta_{T,\mathcal{X}}^\#)$. Definamos también

$$J_\infty(x, a, \Delta_s) := \ell(x, a, \Delta_{s,\mathcal{X}}) + \int_{\mathcal{X}} V_{s+1}(y, \Delta) \Delta_{s+1,\mathcal{X}}^\#(dy).$$

Dado m_0 , la sucesión Δ es un *equilibrio distribucional* si

- a) $\Delta_{0,\mathcal{X}} = \nu$ y $\Delta_{t+1,\mathcal{X}} = \Delta_{t+1,\mathcal{X}}^\#$.
- b) $\Delta_t(\{(x, a) \in \mathcal{X} \times \mathcal{A} : J_\infty(x, a, \Delta_t) \geq J_\infty(x, a', \Delta_t), \forall a' \in \mathcal{A}\}) = 1, \quad \forall t \in \mathcal{T}$.

◇

Teorema 2.17. (Maldonado Lopez, 2014) *Sea m_0 la distribución inicial de los jugadores en el espacio de estados \mathcal{X} . Bajo la Suposición 2.14, existe un equilibrio de campo medio.*

Demostración. Sea $\Phi : \mathcal{P}(\mathcal{X})^{T+1} \rightarrow \Sigma_M$ el mapeo de \mathbf{m} a la estrategia Markoviana óptima $\sigma^{\mathbf{m}} = \{\sigma_t^{\mathbf{m}}\}_{t \in \mathcal{T}}$ en el juego $\Gamma_{\mathbf{m}}$. Notemos que $\sigma^{\mathbf{m}}$ es única, por la Suposición 2.14. Como asumimos que la función de transición Q y las funciones de costos ℓ y g son conjuntamente continuas, por un argumento de inducción sobre los periodos $t = 0, \dots, T$ en la ecuación de programación dinámica (2.19), se sigue que Φ es continua.

De manera similar, el mapeo $\Psi : \Sigma_M \rightarrow \mathcal{P}(\mathcal{X})^{T+1}$ que manda a la estrategia Markoviana $\{\sigma_t\}_{t \in \mathcal{T}}$ al vector \mathbf{m}^σ , calculado por (2.20), también es continuo.

Como $\Psi \circ \Phi : \mathcal{P}(\mathcal{X})^{T+1} \rightarrow \mathcal{P}(\mathcal{X})^{T+1}$ es la composición de mapeos continuos y $\mathcal{P}(\mathcal{X})^{T+1}$ es compacto y convexo, entonces existe un punto fijo por el teorema del punto fijo de Schauder. \square

Observación 2.18. Enfatizamos la importancia del Teorema 2.17, pues garantiza la existencia de una estrategia pura de Markov σ que sólo depende del estado actual del jugador, tal que si todos los jugadores la siguen, el sistema está en equilibrio distribucional para todo $t \in \mathcal{T}$. Además, notemos que el resultado sigue siendo válido cuando \mathcal{X} es un espacio métrico compacto. \diamond

2.3.2. Juego con N jugadores

Sea \mathcal{I} el conjunto de jugadores, tal que $|\mathcal{I}| = N$. Por otra parte, sea $X_{t,N}^j$ una variable aleatoria que describe la posición del jugador j al tiempo t .

El juego de N jugadores se lleva a cabo de la siguiente manera: los estados de los jugadores al tiempo $t = 0$ son i.i.d. con distribución m_0 , lo cual proporciona una distribución empírica de los jugadores en los estados, denotada por $m_{0,N}$. Al tiempo $t \in \mathcal{T}$, cada jugador i observa su propio estado $x_{t,N}^i$ y la distribución empírica en los estados $m_{t,N}$, con esta información elige una acción $a_{t,N}^i$. Las acciones son elegidas simultánea e independientemente por todos los jugadores. Una vez que el jugador i ha elegido su acción, asume el costo $\ell(x_{t,N}^i, a_{t,N}^i, m_{t,N})$. El nuevo estado $X_{t,N}^i$ es una variable aleatoria con distribución $Q(x_{t,N}^i, a_{t,N}^i, m_{t,N})$. La distribución empírica aleatoria en el espacio de estados \mathcal{X} es denotada por $M_{t,N} := \frac{1}{N} \sum_{j \in \mathcal{I}} \delta_{X_{t,N}^j}$. Al inicio de cada periodo $t + 1$, las realizaciones de $X_{t,N}^i$ y $M_{t,N}$, denotadas respectivamente por $x_{t,N}^i$ y $m_{t,N}$, son observadas, y la situación se repite. Al tiempo $t = T$, cada jugador i asume el costo final $g(x_{T,N}^i, m_{T,N})$.

Sea \tilde{H}_t definida como en (2.18). Recordemos que un perfil de estrategias de comportamiento es una sucesión $\pi = \{\pi^i\}_{i \in \mathcal{I}}$, donde $\pi^i = \{\pi_t^i\}_{t \in \mathcal{T}} \in \tilde{\Pi}$ es una estrategia de comportamiento del jugador i . El costo total esperado del jugador i , cuando usa la estrategia π^i y sus adversarios usan el perfil de estrategias $\pi^{-i} \in \tilde{\Pi}^{N-1}$ es

$$J_N^i(x, m_0, \pi^i, \pi^{-i}) := \mathbb{E}_{m_0}^\pi \left[\sum_{t \in \mathcal{T}} \ell(X_{t,N}^i, A_{t,N}^i, M_{t,N}) + g(X_{T,N}^i, M_{T,N}) \right],$$

donde ℓ y g están definidas por (2.11) y (2.12), respectivamente, y $\mathbb{E}_{m_0}^\pi$ denota la esperanza con respecto a $\mathbb{P}_{m_0}^\pi$.

Definición 2.19. Un ϵ -equilibrio de Nash, donde $\epsilon > 0$, es un perfil de estrategias de comporta-

miento $(\hat{\pi}^i)_{i \in I}$ tal que, para todos los jugadores i ,

$$J_N^i(x, m_0, \hat{\pi}^i, \hat{\pi}^{-i}) \leq J_N^i(x, m_0, \pi^i, \hat{\pi}^{-i}) + \epsilon, \quad \pi^i \in \tilde{\Pi}.$$

Teorema 2.20. (Maldonado Lopez, 2014) *Sea (σ, \mathbf{m}) un equilibrio de campo medio de la Definición 2.15. Para todo $\epsilon > 0$ existe N_ϵ tal que, si $N \geq N_\epsilon$, la estrategia de Markov $\sigma \in \Sigma_M$ es un ϵ -equilibrio de Nash en el juego de N jugadores.*

Además, si $J_N^i(x, \sigma, \mathbf{m})$ denota el costo del jugador i en el juego de N jugadores cuando todos los jugadores siguen la estrategia σ y el estado inicial del jugador i es x , entonces

$$|J_N^i(x, \sigma, \mathbf{m}) - J_1(x, \sigma, \mathbf{m})| \longrightarrow 0 \quad \text{c.s.}$$

cuando $N \rightarrow +\infty$.

Observación 2.21. El Teorema 2.20 es el principal resultado de los juegos de campo medio en tiempo discreto y espacio de estados finitos. Su importancia radica en el siguiente planteamiento: Si para todo $\epsilon > 0$ existe una N tal que, el juego de N jugadores está en un ϵ -equilibrio de Nash cuando siguen la estrategia de campo medio σ (Definición 2.15), entonces utilizar la estrategia σ cuando hay N jugadores es una estrategia ϵ -óptima para todos los jugadores, donde $\epsilon = \epsilon(N)$. \diamond

Para demostrar el Teorema 2.20 utilizaremos los algunos lemas que enunciamos y probamos a continuación, por lo que la haremos más adelante.

Lema 2.22. *Suponga que $0 \leq p_N \leq 1$ para toda N , y que $p_N \rightarrow p$ cuando $N \rightarrow +\infty$. Para cada N , sean $Z_{1,N}, \dots, Z_{N,N}$ variables aleatorias i.i.d Bernoulli con parámetro p_N . Entonces,*

$$\frac{1}{N} \sum_{k=1}^N Z_{k,N} \longrightarrow p \quad \text{c.s.}$$

cuando $N \rightarrow +\infty$.

Demostración. Sea $\epsilon > 0$, por la desigualdad de Hoeffding,

$$\mathbb{P} \left(\left| \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N Z_{k,N} - p_N \right| > \epsilon \right) \leq 2e^{-2N\epsilon^2}.$$

Por el Lema de Borel-Cantelli,

$$\mathbb{P} \left(\left[\left| \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N Z_{k,N} - p_N \right| > \epsilon \right] \text{ i.o.} \right) = 0.$$

Es decir, existe $N_0 \in \mathbb{N}$ tal que el evento $[\left| \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N Z_{k,N} - p_N \right| > \epsilon]$ se cumple casi seguramente sólo para $N < N_0$. Por otro lado, existe N_1 tal que si $N > N_1$ entonces $|p_N - p| < \epsilon$.

Como $\left| \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N Z_{k,N} - p \right| \leq \left| \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N Z_{k,N} - p_N \right| + |p_N - p|$, definiendo a $N_2 = \max\{N_0, N_1\}$ tenemos que

$$\mathbb{P} \left(\left[\left| \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N Z_{k,N} - p \right| < \epsilon \right] \forall N > N_2 \right) = 1.$$

De donde se sigue que $\frac{1}{N} \sum_{k=1}^N Z_{k,N}$ converge casi seguramente a p . \square

En lo sucesivo, se debe tener presente que denotamos al equilibrio de campo medio (Definición 2.15) por (σ, \mathbf{m}) , donde $\sigma = \{\sigma_t\}_{t \in \mathcal{T}}$ y $\mathbf{m} = \{m_t\}_{t=0}^T$. En el juego de N jugadores, $\{M_{t,N}\}_{t=0}^T$ denota el proceso de la distribución empírica sobre el espacio de estados y $\{X_{t,N}^i\}_{t=0}^T$ denota el proceso del agente i . El lema siguiente muestra que cuando N es grande, la distribución empírica $M_{t,N}$ se aproxima a la distribución de equilibrio m_t , cuando todos los jugadores excepto uno siguen la estrategia del equilibrio de campo medio σ .

Lema 2.23. *Sea (σ, \mathbf{m}) un equilibrio de campo medio y x un estado inicial fijo. En el juego de N jugadores, suponga que el jugador i sigue la estrategia $\tau \in \tilde{\Pi}$ y todos sus oponentes siguen la estrategia de equilibrio de campo medio σ . Entonces, para todo $t \in \mathcal{T}$,*

$$\|M_{t,N} - m_t\|_{\infty} \longrightarrow 0 \quad \text{c.s.}$$

cuando $N \rightarrow +\infty$.

Demostración. Procedemos por inducción. Primero observemos que el caso $t = 0$ se cumple por la ley fuerte de los grandes números. Supongamos que se cumple para alguna $t \in \mathcal{T}$.

Sea $M_{t+1,\sigma,N}^{-i}$ la distribución promedio en los estados de los oponentes de i , definida como

$$M_{t+1,\sigma,N}^{-i} := \frac{1}{N-1} \sum_{j \neq i} \delta_{X_{t+1,N}^j}.$$

Fijemos $z \in \mathcal{X}$ y definamos para cada $y \in \mathcal{X}$, a $\{Y_{t,\sigma,N}^{y,k}\}_{k=1}^{(N-1)m_{t,\sigma,N}(y)}$ como una sucesión de variables aleatorias Bernoulli i.i.d. tales que

$$Y_{t,\sigma,N}^{y,k} = \begin{cases} 1, & \text{con probabilidad } Q(y, \sigma_t(y), m_{t,N})(z); \\ 0, & \text{con probabilidad } 1 - Q(y, \sigma_t(y), m_{t,N})(z). \end{cases}$$

Entonces, se cumple la siguiente igualdad en distribución

$$\begin{aligned} (N-1) M_{t+1,\sigma,N}^{-i}(z) &\stackrel{d}{=} \sum_{y \in \mathcal{X}} \left(\sum_{k=1}^{(N-1)m_{t,\sigma,N}(y)} Y_{t,\sigma,N}^{y,k} \right) \\ &= \sum_{y \in \mathcal{X}} (N-1) m_{t,N}(y) \left(\frac{1}{(N-1) m_{t,N}(y)} \sum_{k=1}^{(N-1)m_{t,\sigma,N}(y)} Y_{t,\sigma,N}^{y,k} \right). \end{aligned}$$

En la última igualdad, convenimos que el término entre paréntesis es cero si $m_{t,N}(y) = 0$. Para los estados $y \in \mathcal{X}$ tales que $m_t(y) > 0$, por el Lema 2.22,

$$\frac{1}{(N-1)m_{t,\sigma,N}(y)} \sum_{k=1}^{(N-1)m_{t,\sigma,N}(y)} Y_{t,\sigma,N}^{y,k} \longrightarrow Q(y, \sigma_t(y), m_{t,N})(z) \quad \text{c.s.}$$

Como

$$M_{t+1,N} = \frac{1}{N} \left(\delta_{X_{t+1,N}^i} + (N-1)M_{t+1,\sigma,N}^{-i} \right),$$

por (2.16) y por la hipótesis de inducción $\|M_{t,N} - m_t\|_\infty \rightarrow 0$, tenemos

$$M_{t+1,N}(z) \longrightarrow \sum_{y \in \mathcal{X}} Q(y, \sigma_t(y), m_t)(z) \cdot m_t(y) = M_{t+1}(z), \quad z \in \mathcal{X}.$$

Por lo tanto, se cumple para $t+1$. □

El siguiente lema muestra que para una N grande, la trayectoria de un individuo en el juego de N jugadores, cuando todos sus oponentes usan la estrategia de equilibrio, se aproxima a la trayectoria de un individuo en el juego de un jugador cuando se asume la distribución de equilibrio.

Lema 2.24. *Sea (σ, \mathbf{m}) un equilibrio de campo medio, x el estado inicial fijo y $\{a_{t,N}^i\}_{t \in \mathcal{T}}$ una sucesión arbitraria de acciones del jugador i . Considere las siguientes dos trayectorias:*

1. *La trayectoria $\{X_{t,N}^i\}_{t=0}^T$ del jugador i en el juego de N jugadores, donde todos sus adversarios siguen la estrategia de equilibrio σ , definida por*

$$X_{t+1,N}^i \sim Q(X_{t,N}^i, a_{t,N}^i, M_{t,N}).$$

2. *La trayectoria generada por*

$$X_{t+1}^i \sim Q(X_t^i, a_{t,N}^i, m_t).$$

Entonces, para todo $y \in \mathcal{X}$ y para todo $t \in \mathcal{T}$,

$$|\mathbb{P}(X_{t,N}^i = y) - \mathbb{P}(X_t^i = y)| \longrightarrow 0 \quad \text{c.s.}$$

cuando $N \rightarrow +\infty$.

Demostración. Procedemos por inducción. Para el caso $t = 0$, como el estado inicial del jugador i es x ,

$$\mathbb{P}(X_{0,N}^i = x) = \mathbb{P}(X_0^i = x) = 1,$$

y por lo tanto se cumple. Supongamos que se cumple para alguna $t \in \mathcal{T}$ y observemos que

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(X_{t+1,N}^i = y) &= \sum_{z \in \mathcal{X}} \mathbb{P}(X_{t,N}^i = z) \cdot Q(z, a_{t,N}^i, M_{t,N})(y), \\ \mathbb{P}(X_{t+1}^i = y) &= \sum_{z \in \mathcal{X}} \mathbb{P}(X_t^i = z) \cdot Q(z, a_{t,N}^i, m_t)(y). \end{aligned}$$

Ahora,

$$\begin{aligned}
& \mathbb{P}(X_{t+1,N}^i = y) - \mathbb{P}(X_{t+1}^i = y) \\
&= \sum_{z \in \mathcal{X}} \mathbb{P}(X_{t,N}^i = z) \cdot Q(z, a_{t,N}^i, M_{t,N})(y) - \sum_{z \in \mathcal{X}} \mathbb{P}(X_t^i = z) \cdot Q(z, a_{t,N}^i, m_t)(y) \\
&= \sum_{z \in \mathcal{X}} \mathbb{P}(X_{t,N}^i = z) \cdot Q(z, a_{t,N}^i, M_{t,N})(y) - \sum_{z \in \mathcal{X}} \mathbb{P}(X_t^i = z) \cdot Q(z, a_{t,N}^i, m_t)(y) \\
&\quad + \sum_{z \in \mathcal{X}} \mathbb{P}(X_{t,N}^i = z) \cdot Q(z, a_{t,N}^i, m_t)(y) - \sum_{z \in \mathcal{X}} \mathbb{P}(X_{t,N}^i = z) \cdot Q(z, a_{t,N}^i, m_t)(y) \\
&= \sum_{z \in \mathcal{X}} \left(\mathbb{P}(X_{t,N}^i = z) - \mathbb{P}(X_t^i = z) \right) \cdot Q(z, a_{t,N}^i, m_t)(y) \\
&\quad + \sum_{z \in \mathcal{X}} \mathbb{P}(X_{t,N}^i = z) \cdot \left(Q(z, a_{t,N}^i, M_{t,N})(y) - Q(z, a_{t,N}^i, m_t)(y) \right).
\end{aligned}$$

Usando la desigualdad del triángulo y la hipótesis (2.16),

$$\begin{aligned}
|\mathbb{P}(X_{t+1,N}^i = y) - \mathbb{P}(X_{t+1}^i = y)| &\leq \sum_{z \in \mathcal{X}} \left| \mathbb{P}(X_{t,N}^i = z) - \mathbb{P}(X_t^i = z) \right| \cdot Q(z, a_{t,N}^i, m_t)(y) \\
&\quad + \sum_{z \in \mathcal{X}} \mathbb{P}(X_{t,N}^i = z) \cdot \left| Q(z, a_{t,N}^i, M_{t,N})(y) - Q(z, a_{t,N}^i, m_t)(y) \right| \\
&\leq \sum_{z \in \mathcal{X}} \left| \mathbb{P}(X_{t,N}^i = z) - \mathbb{P}(X_t^i = z) \right| \cdot Q(z, a_{t,N}^i, m_t)(y) \\
&\quad + L_Q \|M_{t,N} - m_t\|.
\end{aligned}$$

De la hipótesis de inducción $|\mathbb{P}(X_{t,N}^i = z) - \mathbb{P}(X_t^i = z)| \rightarrow 0$ c.s., y del Lema 2.23 $\|M_{t,N} - m_t\| \rightarrow 0$ c.s., por lo tanto el resultado se cumple para $t + 1$. \square

Los lemas anteriores mostraron aproximaciones de la distribución empírica a la de equilibrio, de las trayectorias de los individuos en juego de N a las correspondientes en el juego $\Gamma_{\mathbf{m}}$, lo único que nos falta es mostrar que también los costos se aproximan en los dos distintos esquemas de juego: el juego “real” donde hay N jugadores, y el juego donde se asume la distribución de equilibrio fija.

Lema 2.25. *Considere las trayectorias del Lema 2.24. Entonces para todo $t \in \mathcal{T}$,*

$$\limsup_{N \rightarrow +\infty} \mathbb{E}_x^{\tau^i, \sigma^{-i}} \left[\ell(X_{t,N}^i, a_{t,N}^i, M_{t,N}) - \ell(X_t^i, a_t^i, m_t) \right] \leq 0.$$

Demostración. Tenemos que

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}_x^{\tau^i, \sigma^{-i}} \left[\ell(X_{t,N}^i, a_{t,N}^i, M_{t,N}) - \ell(X_t^i, a_t^i, m_t) \right] &= \mathbb{E}_x^{\tau^i, \sigma^{-i}} \left[\ell(X_{t,N}^i, a_{t,N}^i, M_{t,N}) - \ell(X_{t,N}^i, a_t^i, m_t) \right] \\
&\quad + \mathbb{E}_x^{\tau^i, \sigma^{-i}} \left[\ell(X_{t,N}^i, a_t^i, m_t) - \ell(X_t^i, a_t^i, m_t) \right].
\end{aligned}$$

Primero observemos el primer término del lado derecho, usando la hipótesis (2.13),

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}_x^{\tau^i, \sigma^{-i}} \left[\ell(X_{t,N}^i, a_{t,N}^i, M_{t,N}) - \ell(X_{t,N}^i, a_t^i, m_t) \right] &\leq \sum_{y \in \mathcal{X}} \mathbb{P}(X_{t,N}^i = y) \max_{a \in \mathcal{A}} |\ell(y, a, M_{t,N}) - \ell(y, a, m_t)| \\
&\leq L_\ell \|M_{t,N} - m_t\|,
\end{aligned}$$

lo cual tiende a cero c.s. por el Lema 2.23. Observemos ahora el segundo término,

$$\mathbb{E}_x^{\tau^i, \sigma^{-i}} \left[\ell(X_{t,N}^i, a_{t,N}^i, m_t) - \ell(X_t^i, a_t^i, m_t) \right] \leq \sum_{y \in \mathcal{X}} |\mathbb{P}(X_{t,N}^i = y) - \mathbb{P}(X_t^i = y)| \cdot \|\ell\|$$

lo cual también tiende a cero c.s. por el Lema 2.24. \square

Ahora procedemos a demostrar el teorema de aproximación del equilibrio de campo medio. El objetivo es mostrar que utilizar la estrategia de campo medio es una estrategia ϵ -óptima para todos los jugadores, donde $\epsilon \rightarrow 0$ cuando $N \rightarrow +\infty$.

Demostración del Teorema 2.20.

Sea τ^i cualquier estrategia del jugador i en el juego de N jugadores y sea (σ, \mathbf{m}) un equilibrio de campo medio. Si el jugador i usa la estrategia τ^i y todos sus oponentes usan la estrategia σ , el costo total esperado del jugador i es

$$J_N^i(x, m_0, \tau^i, \sigma^{-i}) = \mathbb{E}_x^{\tau^i, \sigma^{-i}} \left[\sum_{t \in \mathcal{T}} \ell(X_{t,N}^i, \tau^i(X_{t,N}^i, M_{t,N}^{-i}), M_{t,N}) + g(X_{T,N}^i, M_{T,N}) \right].$$

Recordemos que el costo para la estrategia τ^i en el juego de un jugador $\Gamma_{\mathbf{m}}$, es

$$J_1(x, \tau^i, \mathbf{m}) := \mathbb{E}_x^{\tau^i, \sigma^{-i}} \left[\sum_{t \in \mathcal{T}} \ell(X_{t,N}^i, \tau^i(X_{t,N}^i, M_{t,N}^{-i}), m_t) + g(X_{T,N}^i, m_T) \right].$$

De la Definición 2.15, tenemos

$$\inf_{\tau^i \in \Sigma} J_1(x, \tau^i, \mathbf{m}) = J_1(x, \sigma, \mathbf{m}),$$

entonces, para todo $\tau^i \in \Sigma$,

$$\begin{aligned} & J_N^i(x, m_0, \sigma^i, \sigma^{-i}) - J_N^i(x, m_0, \tau^i, \sigma^{-i}) \\ &= J_N^i(x, m_0, \sigma^i, \sigma^{-i}) - J_1(x, \sigma, \mathbf{m}) + J_1(x, \sigma, \mathbf{m}) - J_N^i(x, m_0, \tau^i, \sigma^{-i}) \\ &\leq \left[J_N^i(x, m_0, \sigma^i, \sigma^{-i}) - J_1(x, \sigma, \mathbf{m}) \right] + \left[J_1(x, \tau^i, \mathbf{m}) - J_N^i(x, m_0, \tau^i, \sigma^{-i}) \right] \\ &\leq \left| J_N^i(x, m_0, \sigma^i, \sigma^{-i}) - J_1(x, \sigma, \mathbf{m}) \right| + \left| J_1(x, \tau^i, \mathbf{m}) - J_N^i(x, m_0, \tau^i, \sigma^{-i}) \right|. \end{aligned}$$

Primero observemos el segundo término del lado derecho,

$$\begin{aligned}
& J_1(x, \tau^i, \mathbf{m}) - J_N^i(x, m_0, \tau^i, \sigma^{-i}) \\
&= \mathbb{E}_x^{\tau^i, \sigma^{-i}} \left[\sum_{t \in \mathcal{T}} \ell(X_{t,N}^i, \tau^i(X_{t,N}^i, M_{t,N}^{-i}), m_t) + g(X_{T,N}^i, m_T) \right] \\
&\quad - \mathbb{E}_x^{\tau^i, \sigma^{-i}} \left[\sum_{t \in \mathcal{T}} \ell(X_{t,N}^i, \tau^i(X_{t,N}^i, M_{t,N}^{-i}), M_{t,N}) + g(X_{T,N}^i, M_{T,N}) \right] \\
&= \sum_{t \in \mathcal{T}} \mathbb{E}_x^{\tau^i, \sigma^{-i}} \left[\ell(X_{t,N}^i, \tau^i(X_{t,N}^i, M_{t,N}^{-i}), m_t) - \ell(X_{t,N}^i, \tau^i(X_{t,N}^i, M_{t,N}^{-i}), M_{t,N}) \right] \\
&\quad + \mathbb{E}_x^{\tau^i, \sigma^{-i}} \left[g(X_{T,N}^i, m_T) - g(X_{T,N}^i, M_{T,N}) \right] \\
&\leq \sum_{t \in \mathcal{T}} \mathbb{E}_x^{\tau^i, \sigma^{-i}} \left[\left| \ell(X_{t,N}^i, \tau^i(X_{t,N}^i, M_{t,N}^{-i}), m_t) - \ell(X_{t,N}^i, \tau^i(X_{t,N}^i, M_{t,N}^{-i}), M_{t,N}) \right| \right] \\
&\quad + L_g \|M_{T,N} - m_T\|.
\end{aligned}$$

Por el Lema 2.23 y el Lema 2.25,

$$\limsup_{N \rightarrow +\infty} \left[J_1(x, \tau^i, \mathbf{m}) - J_N^i(x, m_0, \tau^i, \sigma^{-i}) \right] \leq 0.$$

De manera análoga para el primer término,

$$\limsup_{N \rightarrow +\infty} \left[J_N^i(x, m_0, \sigma^i, \sigma^{-i}) - J_1(x, \sigma, \mathbf{m}) \right] \leq 0.$$

Por lo tanto,

$$\limsup_{N \rightarrow +\infty} \left[J_N^i(x, m_0, \sigma^i, \sigma^{-i}) - J_N^i(x, m_0, \tau^i, \sigma^{-i}) \right] \leq 0, \quad \tau^i \in \Sigma.$$

Lo que implica que

$$|J_N^i(x, \sigma, \mathbf{m}) - J_1(x, \sigma, \mathbf{m})| \longrightarrow 0 \quad \text{c.s.}$$

cuando $N \rightarrow +\infty$. Por lo tanto, para todo $\epsilon > 0$ existe N_ϵ tal que, si $N > N_\epsilon$, σ es un ϵ -equilibrio de Nash en el juego de N jugadores. \square

3

Modelo del Riesgo Sistémico

En este capítulo, utilizamos un modelo de juegos de campo medio en tiempo discreto para describir el comportamiento de un sistema bancario con N bancos. La manera en que los bancos interactúan es mediante préstamos interbancarios, que realizan con una tasa global θ . Además, cada banco tiene la posibilidad de realizar transacciones monetarias con un banco central, a lo que nos referiremos también como préstamos con un banco central, recibidos y concedidos. La evolución del logaritmo de las reservas es determinada por la interacción con tasa global, los préstamos con el banco central y un componente estocástico exógeno. Consideramos que un banco al tiempo t está en falla, si el logaritmo de sus reservas monetarias están por debajo de un nivel η . El riesgo sistémico, lo caracterizamos por un gran número de bancos que fallan en un horizonte de tiempo finito T . Este modelo es una adaptación del modelo de préstamos interbancarios propuesto por (Carmona et al., 2013), descrito en la sección 1.2.2.

3.1. Modelo de préstamos interbancarios

Consideremos un sistema bancario con N agentes idénticos donde se permiten los préstamos interbancarios y préstamos con un banco central (préstamos concedidos y recibidos). Denotemos por \mathcal{I} al conjunto de los N bancos, y sea $\mathcal{T} = \{0, 1, \dots, T - 1\}$ el conjunto de periodos de tiempo que el sistema es observado, donde el horizonte temporal $T < +\infty$.

El flujo monetario interbancario se efectúa de la siguiente manera. Denotemos por y_t^i a las reservas monetarias del banco i al tiempo t , $i \in \mathcal{I}$ y $t \in \mathcal{T}$. Para $i, j \in \mathcal{I}$ con $i \neq j$, definimos a la relación

$$b_t^{ij} := \left(\frac{y_t^j}{y_t^i} \right)^\theta,$$

donde $\theta \geq 0$ representa la tasa global de préstamos interbancarios. Si $b_t^{ij} > 1$, el banco i recibe un préstamo al banco j por $y_t^i(b_t^{ij} - 1)$; si $b_t^{ij} < 1$, el banco i otorga un préstamo al banco j por $y_t^i(1 - b_t^{ij})$; y no hay ningún intercambio de capital entre los bancos i y j cuando $b_t^{ij} = 1$. Notemos que si $\theta > 1$, el préstamo es mayor a la diferencia entre ambos bancos; es decir, en el caso $b_t^{ij} > 1$, las reservas monetarias del banco i que recibe el préstamo, superarían las reservas del banco j que

concede el préstamo; de hecho, superarían las reservas de j antes de que conceda el préstamo. En general, vamos a asumir que la tasa global $\theta \in [0, 1]$.

Denotemos por x_t^i a una aproximación de las reservas monetarias de cada banco, es decir, $x_t^i \approx \log y_t^i$. La aproximación es de tal manera que x_t^i toma valores en un *espacio de estados* finito \mathcal{X} . Definamos el espacio de estados de la forma

$$\mathcal{X} = \left\{ -K, -K\left(1 - \frac{1}{k}\right), -K\left(1 - \frac{2}{k}\right), \dots, 0, \dots, K\left(1 - \frac{2}{k}\right), K\left(1 - \frac{1}{k}\right), K \right\};$$

donde $k \in \mathbb{N}$ y $K > 0$. En otras palabras, \mathcal{X} es una partición equidistante de tamaño $2k + 1$ del intervalo $[-K, K] \subset \mathbb{R}$.

Definimos, para $r \in [-2K, 2K]$, la función

$$\lfloor r \rfloor = \text{máx} \{x < r : x \in \mathcal{X} + \mathcal{X}\}, \quad (3.1)$$

donde $\mathcal{X} + \mathcal{X} = \{x + x' : x \in \mathcal{X}, x' \in \mathcal{X}\}$. Notemos que $\lfloor \cdot \rfloor$ está definida para la suma de dos elementos cualesquiera de $[-K, K]$, esto se debe a la dinámica de las reservas monetarias de cada agente, de acuerdo al modelo (3.2) que abordamos más adelante. Además, si $r \in [-K, K]$, entonces $\lfloor r \rfloor \in \mathcal{X}$.

Para $t \in \mathcal{T}$, consideremos el modelo determinista

$$x_{t+1,N}^i = x_{t,N}^i + \left[\frac{\theta}{N} \sum_{j=1}^N (x_{t,N}^j - x_{t,N}^i) \right] + a_{t,N}^i + w_{t,N}^i, \quad i \in \mathcal{I}; \quad (3.2)$$

donde la tasa global θ es la tasa de reversión a la media, con $\theta \in [0, 1]$; $a_{t,N}^i$ y $w_{t,N}^i$ toma valores en los conjuntos finitos \mathcal{A} y \mathcal{W} , respectivamente. La variable de control $a_{t,N}^i$ representa la tasa de préstamos del banco i con un banco central; y $w_{t,N}^i$ es una variable exógena que representa una perturbación.

Vamos a construir los espacios \mathcal{A} y \mathcal{W} de tal manera que $x_t^i \in \mathcal{X}$ en (3.2). Definamos a las dos familias de conjuntos

$$\bar{\mathcal{A}}(x) := \{a \in \mathbb{R} : x + a \in \mathcal{X}\}, \quad x \in \mathcal{X},$$

y

$$\bar{\mathcal{W}}(x) := \{w \in \mathbb{R} : x + a + w \in \mathcal{X}, a \in \bar{\mathcal{A}}(x)\}, \quad x \in \mathcal{X}.$$

Sea \mathcal{A} el *espacio de acciones*, tal que $\mathcal{A} := \bigcup_{x \in \mathcal{X}} \mathcal{A}(x)$, donde $\mathcal{A}(x) \subset \bar{\mathcal{A}}(x)$ y el cero está contenido en $\mathcal{A}(x)$, para todo $x \in \mathcal{X}$. De manera similar, sea \mathcal{W} el *espacio de perturbaciones*, tal que $\mathcal{W} := \bigcup_{x \in \mathcal{X}} \mathcal{W}(x)$, es simétrico con respecto al cero, y para todo x , el cero está contenido en $\mathcal{W}(x)$. Notemos que \mathcal{A} y \mathcal{W} son conjuntos finitos, debido a que \mathcal{X} es finito.

Denotamos por $\mathcal{P}(\mathcal{X})$ al conjunto de distribuciones de probabilidad sobre el espacio de estados \mathcal{X} , y por $m_{t,N} \in \mathcal{P}(\mathcal{X})$ a la distribución de los bancos sobre \mathcal{X} al tiempo t . Entonces, podemos reescribir el modelo (3.2) como

$$x_{t+1,N}^i = x_{t,N}^i + \left[\theta(\bar{m}_{t,N} - x_{t,N}^i) \right] + a_{t,N}^i + w_{t,N}^i, \quad i \in \mathcal{I}; \quad (3.3)$$

donde $a_{t,N}^i \in \mathcal{A}$, $w_{t,N}^i \in \mathcal{W}$, y $\bar{m}_{t,N}$ representa la media al tiempo t , es decir,

$$\bar{m}_{t,N} = \sum_{x \in \mathcal{X}} x m_{t,N}(x).$$

Ahora, vamos a definir una cadena de Markov de estados finitos para representar las perturbaciones estocásticas de cada banco i , en el modelo (3.3), donde la intensidad de las perturbaciones está asociada a un parámetro $\varepsilon > 0$. Este método para modelar perturbaciones ha sido empleado en problemas de control robusto sensible al riesgo (Fleming y Hernández Hernández, 1997; Basar y Olsder, 1999). Sea $d : \mathcal{W} \rightarrow \mathbb{R}_+$, la función de *magnitud* de la perturbación definida por

$$d(w) = w^2, \quad w \in \mathcal{W}.$$

Sea $D : \mathcal{X} \times \mathcal{A} \times \mathcal{X} \rightarrow \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ la función que representa la *magnitud mínima* asociada a las perturbaciones que hacen pasar a un banco del estado x al estado y en un periodo, definida por

$$D(x, a, m; y) = \min\{d(w) : y = x + \lfloor \theta(\bar{m} - x) \rfloor + a + w, w \in \mathcal{W}\},$$

bajo la convención usual de que el mínimo de un conjunto vacío es $+\infty$.

Para cada $a \in \mathcal{A}$, $m \in \mathcal{P}(\mathcal{X})$, definimos la matriz de transición

$$P_\varepsilon^{a,m}(x, y) = \frac{1}{Z_\varepsilon(x, a, m)} \exp\left\{-\frac{1}{\varepsilon} D(x, a, m; y)\right\}, \quad (3.4)$$

donde $\varepsilon > 0$ es un parámetro de ruido y $Z_\varepsilon(x, a, m)$ es una constante de normalización, tal que

$$\sum_{y \in \mathcal{X}} P_\varepsilon^{a,m}(x, y) = 1.$$

Notemos que de acuerdo a la matriz $P_\varepsilon^{a,m}$, las perturbaciones de mayor magnitud tienen una menor probabilidad de ocurrencia. Además, para cada $a \in \mathcal{A}$ y $m \in \mathcal{P}(\mathcal{X})$, la matriz estocástica satisface

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} P_\varepsilon^{a,m}(x, y) = \begin{cases} 1, & y = x + \lfloor \theta(\bar{m} - x) \rfloor + a; \\ 0, & \text{de otro modo.} \end{cases}$$

De acuerdo a esta condición, podemos “modular” la pesadez de las colas de la distribución de los disturbios, en el sentido que podemos ajustar el parámetro ε para modelar sistemas con poco ruido.

Por la manera en que modelamos de las perturbaciones, podemos definir directamente la función de transición $Q : \mathcal{X} \times \mathcal{A} \times \mathcal{P}(\mathcal{X}) \rightarrow \mathcal{P}(\mathcal{X})$, fijando el parámetro $\varepsilon > 0$ y haciendo

$$Q(x, a, m)(y) := P_\varepsilon^{a,m}(x, y), \quad y \in \mathcal{X}. \quad (3.5)$$

Definamos la función de costos $\ell : \mathcal{X} \times \mathcal{A} \times \mathcal{P}(\mathcal{X}) \rightarrow \mathbb{R}_+$ como

$$\ell(x, a, m) = \frac{1}{2}a^2 - \alpha a (\bar{m} - x) + \frac{\beta}{2} (\bar{m} - x)^2, \quad (3.6)$$

y la función de costo terminal $g : \mathcal{X} \times \mathcal{P}(\mathcal{X}) \rightarrow \mathbb{R}_+$,

$$g(x, m) = \frac{\gamma}{2} (\bar{m} - x)^2. \quad (3.7)$$

En la ecuación (3.6), asumimos $\alpha^2 \leq \beta$, para que $\ell(x, a, m)$ sea una función convexa en (x, a, m) . El parámetro $\alpha > 0$ controla el “incentivo” de conceder y recibir préstamos. De acuerdo a (3.6), el banco i deseará pedir prestado ($a_t^i > 0$) si x_t^i es menor que el promedio \bar{m}_t , y deseará prestar ($a_t^i < 0$) si x_t^i es mayor que \bar{m}_t .

Finalmente, tenemos el siguiente modelo de juego estocástico que describe la dinámica de las reservas de los N bancos. Sea $X_{t,N}^i$ el logaritmo de las reservas monetarias del banco i que toma valores en \mathcal{X} , y sea $M_{t,N}$ la distribución de los bancos sobre el espacio de estados \mathcal{X} ,

$$M_{t,N} := \frac{1}{N} \sum_{j \in \mathcal{I}} \delta_{X_{t,N}^j}.$$

Al tiempo $t = 0$, los agentes se distribuyen i.i.d. en el espacio de estados \mathcal{X} de acuerdo a una distribución inicial $m_0 \in \mathcal{P}(\mathcal{X})$. Para $t \in \mathcal{T}$,

$$X_{t+1,N}^i \sim Q(X_{t,N}^i, A_{t,N}, M_{t,N}) \quad i \in \mathcal{I}; \quad (3.8)$$

con funciones de costos cuadráticos dadas por (3.6) y (3.7), donde $A_{t,N} \in \mathcal{A}$. Notemos que las funciones de costos y la función de transición, ℓ , g y Q , dependen de los otros bancos vía la distribución empírica y no de la identidad específica de los bancos. Además, los parámetros θ y ε están implícitos en la función de transición Q .

El modelo (3.8) es una adaptación a tiempo discreto y espacio de estados finito del modelo (1.1), propuesto por Carmona et al. (2013). La Figura 3.1 muestra el efecto de incorporar en el modelo las acciones de los agentes; se muestra una realización del modelo (3.8) con $N = 10$ bancos. En la Figura 3.1a ningún agente realiza préstamos con el banco central, mientras que en la Figura 3.1b, si están por debajo de la media piden un préstamo ($a_{t,N}^i = 0.1$) y si están por arriba conceden un préstamo ($a_{t,N}^i = -0.1$).

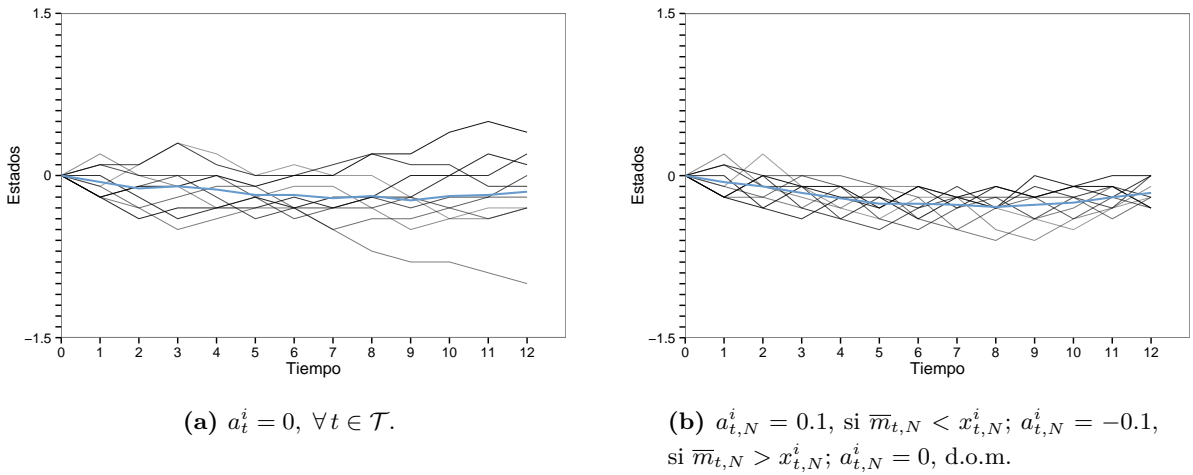


Figura 3.1: Una realización del modelo (3.8) con $N = 10$ trayectorias (mismos incrementos). Los espacios que se consideraron fueron $\mathcal{X} = \{-1.5, -1.4, \dots, 1.4, 1.5\}$, $\mathcal{A} = \{-0.1, 0, 0.1\}$, $\mathcal{W} = \{-0.2, -0.1, 0, 0.1, 0.2\}$; y los parámetros $T = 12$, $\theta = 0$ y $\varepsilon = 0.5$.

Definamos a $\tilde{\mathcal{H}} := (\mathcal{X} \times \mathcal{A} \times \mathcal{P}(\mathcal{X}))^t$ como el conjunto de posibles historias hasta el tiempo $t = 1, \dots, T$. Sea la sucesión $\pi^i = (\pi_t^i)_{t \in \mathcal{T}}$ una *estrategia de comportamiento* para el jugador i , es decir, $\pi_t^i : \tilde{\mathcal{H}}_t \rightarrow \mathcal{P}(\mathcal{A})$. Denotamos por $\tilde{\Pi}$ el conjunto de estrategias de comportamiento para cada jugador.

El banco i elige la estrategia π^i de préstamos con el banco central a modo de minimizar el costo total esperado, cuando sus oponentes usan el perfil de estrategias $\pi^{-i} \in \tilde{\Pi}^{N-1}$,

$$J_N^i(x, m_0, \pi^i, \pi^{-i}) := \mathbb{E}_{m_0}^\pi \left[\sum_{t \in \mathcal{T}} \ell(X_{t,N}^i, a_{t,N}^i, M_{t,N}) + g(X_{T,N}^i, M_{T,N}) \right],$$

donde ℓ y g están definidas por (3.6) y (3.7), respectivamente, y $\mathbb{E}_{m_0}^\pi$ denota la esperanza con respecto a la medida de probabilidad $\mathbb{P}_{m_0}^\pi$.

Un equilibrio perfecto de Markov es un perfil de estrategias $\pi = \{\pi^i\}$ donde $\pi_i \in \tilde{\Pi}$, que simultáneamente minimiza el costo esperado de cada individuo, dadas las estrategias de los demás agentes. Sin embargo, para calcular este equilibrio es necesario realizar un seguimiento y un pronóstico de la evolución de la distribución empírica en el espacio de estados. Es por ello que encontrar el equilibrio exacto de Markov no es posible cuando el número de bancos es grande ni cuando la cardinalidad del espacio de estados \mathcal{X} es grande. Por este motivo, encontraremos una estrategia de préstamos con el banco central ϵ -óptima mediante un equilibrio de campo medio.

Si asumimos que hay un número infinito de bancos y cada uno sigue una estrategia inconsciente $\sigma \in \Sigma_M$, es decir, $\sigma^i = \{\sigma_t\}_{t \in \mathcal{T}}$, tal que $\sigma_t : \mathcal{X} \times \mathcal{P}(\mathcal{X}) \rightarrow \mathcal{A}$. Además, m_0 es la distribución inicial, entonces el proceso de distribuciones sobre el espacio de estados para cada $t = 0, \dots, T$, está dado por

$$m_{t+1}^\sigma(x) = \sum_{y \in \mathcal{X}} Q(y, \sigma_t(y), m_t^\sigma)(x) \cdot m_t^\sigma(y), \quad (3.9)$$

con $m_0^\sigma = m_0$. Donde Q es la función de transición definida por (3.5).

La Figura 3.2 muestra la evolución del sistema bancario, de acuerdo a (3.9), cuando no se permiten préstamos con un banco central; es decir, cuando $a_t^i = 0$ para todo $t \in \mathcal{T}$. Se consideran diferentes niveles de cooperación en el modelo (3.8), $\theta = 0, 0.4, 0.6, 1$, y se puede apreciar cómo la distribución se concentra en una menor región cuando este parámetro es mayor. También se puede notar que el proceso de la media (línea punteada) muestra una ligera tendencia decreciente en los primeros periodos, esto es un sesgo que se debe a la definición del espacio de estados \mathcal{X} y a la función de aproximación (3.1).

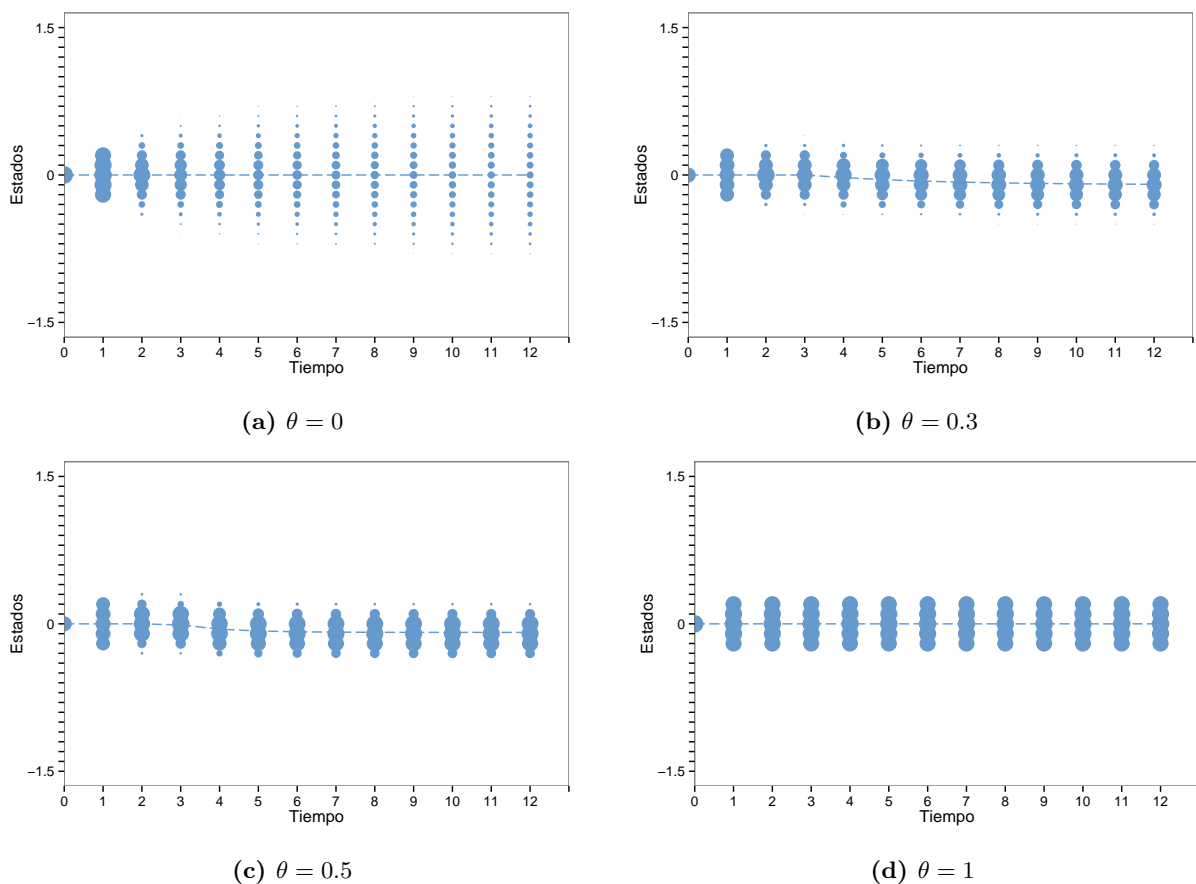


Figura 3.2: Evolución de $\{m_t\}_{t=0}^T$, con $m_0 = \delta_0$ y $a_t = 0, \forall t \in \mathcal{T}$. Los espacios que se consideraron fueron $\mathcal{X} = \{-1.5, -1.4, \dots, 1.4, 1.5\}$, $\mathcal{A} = \{0\}$, $\mathcal{W} = \{-0.2, -0.1, 0, 0.1, 0.2\}$; y los parámetros $T = 12$ y $\varepsilon = 0.5$.

3.2. Equilibrio de campo medio

Consideremos que el proceso $\mathbf{m} = \{m_t\}$ es un parámetro externo fijo, donde $m_t \in \mathcal{P}(\mathcal{X})$ para $t = 0, \dots, T$. Sea $\mathcal{H}_t := (\mathcal{X} \times \mathcal{A})^t$ y $\varpi = (\varpi_t)_{t \in \mathcal{T}}$ una estrategia de comportamiento inconsciente, es decir, $\varpi_t : \mathcal{H}_t \rightarrow \mathcal{A}$. El funcional del *costo total esperado* para el jugador con estado inicial x , cuando usa la estrategia inconsciente ϖ , es definido por

$$J_1(x, \varpi, \mathbf{m}) := \mathbb{E}^{\varpi} \left[\sum_{t \in \mathcal{T}} \ell(X_t, \varpi_t(H_t), m_t) + g(X_T, m_T) \middle| X_0 = x \right].$$

donde H_t es una variable que depende de X_t y toma valores en \mathcal{H}_t , y las funciones de costos l y g están dadas por (3.6) y (3.7), respectivamente.

La función de valor para el jugador cuando está en el estado $x \in \mathcal{X}$ al tiempo $s = 0, \dots, T$, es

$$V(s, x, \mathbf{m}) := \inf_{\varpi \in \Pi} \mathbb{E}^{\varpi} \left[\sum_{t \geq s}^{T-1} \ell(X_t, \varpi_t(H_t), m_t) + g(X_T, m_T) \middle| X_s = x \right].$$

Bajo la Suposición 2.14, por la Proposición 2.10, existe una estrategia pura de Markov $\sigma \in \Sigma_M$ que es óptima. Lo cual asegura que cada banco puede tomar una decisión óptima sólo conociendo su estado actual en cada periodo $t \in \mathcal{T}$. Por lo tanto, podemos expresar la función de valor como

$$V(s, x, \mathbf{m}) := \inf_{\sigma \in \Sigma_M} \mathbb{E}^{\sigma} \left[\sum_{t \geq s}^{T-1} \ell(X_t, \sigma_t(X_t), m_t) + g(X_T, m_T) \middle| X_s = x \right], \quad s = 0, \dots, T.$$

Esta función de valor satisface la ecuación de programación dinámica,

$$V(s, x, \mathbf{m}) = \min_{a \in \mathcal{A}} \left\{ \ell(x, a, m_s) + \sum_{y \in \mathcal{X}} Q(x, a, m_s)(y) \cdot V(s+1, y, \mathbf{m}) \right\}, \quad (3.10)$$

con condición terminal $V(T, x, \mathbf{m}) = g(x, m_T)$.

Ahora supongamos que m_0 es la distribución inicial y que todos los jugadores son inconscientes y siguen la estrategia $\sigma \in \Sigma_M$. Entonces, la evolución del juego está dada por la ecuación progresiva

$$m_{t+1}^{\sigma}(x) := \sum_{y \in \mathcal{X}} Q(y, \sigma_t(y), m_t^{\sigma})(x) \cdot m_t^{\sigma}(y), \quad t \in \mathcal{T}, \quad (3.11)$$

con condición inicial $m_0^{\sigma} := m_0$.

La ecuación (3.10) determina la estrategia óptima de un banco, asumiendo \mathbf{m} fijo. Para parámetros específicos, podemos utilizando algoritmos computacionales para encontrar tal estrategia. En la Figura 3.3 se muestran simulaciones de trayectorias del nivel de reservas monetarias de un banco, que utiliza una estrategia óptima dada por la ecuación (3.10), para diferentes parámetros arbitrarios $\mathbf{m} = \{m_t\}_{t=0}^T$, donde cada m_t representa la distribución de los agentes en el tiempo t sobre el espacio de estados \mathcal{X} . Se puede apreciar cómo se mantiene cerca del proceso de medias $\{\bar{m}_t\}_{t=0}^T$.

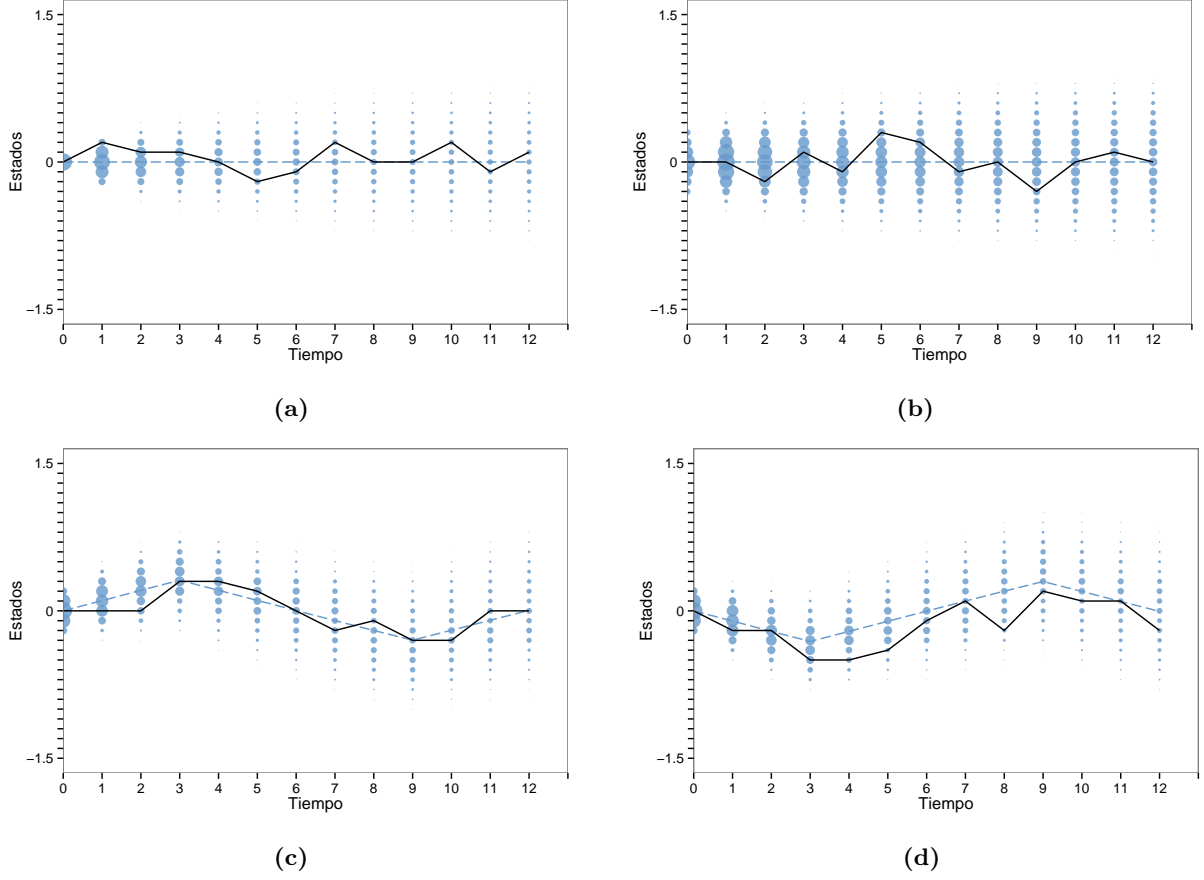


Figura 3.3: Simulación de trayectorias de un banco que sigue la estrategia óptima en el juego de un jugador, para cuatro parámetros \mathbf{m} arbitrarios. Los espacios que se consideraron fueron $\mathcal{X} = \{-1.5, -1.4, \dots, 1.4, 1.5\}$, $\mathcal{A} = \{-0.2, -0.1, 0, 0.1, 0.2\}$, $\mathcal{W} = \{-0.2, -0.1, 0, 0.1, 0.2\}$; y los parámetros $T = 12$, $\theta = 0.3$, $\alpha = \sqrt{0.8}$, $\beta = 1$, $\gamma = 2$ y $\varepsilon = 0.5$.

Por el Teorema 2.20, cuando N es grande, podemos aproximar el equilibrio del juego de N jugadores mediante un equilibrio de juego de campo medio, (σ, \mathbf{m}) , donde

- (i) $\sigma \in \Sigma_M$ es una estrategia óptima que satisface la ecuación retrógrada,

$$V(s, x, \mathbf{m}) = \min_{a \in \mathcal{A}} \left\{ \ell(x, a, m_s) + \sum_{y \in \mathcal{X}} Q(x, a, m_s)(y) \cdot V(s+1, y, \mathbf{m}) \right\}.$$

- (ii) \mathbf{m} satisface la ecuación progresiva,

$$m_{t+1}(x) = \sum_{y \in \mathcal{X}} Q(y, \sigma_t(y), m_t)(x) \cdot m_t(y)$$

- (iii) m_0 dado, y $V(T, x, \mathbf{m}^\sigma) = g(x, m_T^\sigma)$.

Como el espacio de estados \mathcal{X} , el espacio de acciones \mathcal{A} y el espacio de disturbios \mathcal{W} son finitos, podemos encontrar la solución al juego de campo medio utilizando algoritmos computacionales.

Pseudocódigo. (*Equilibrio de campo medio*)

Sean $K_{\mathcal{X}}, K_{\mathcal{A}}, K_{\mathcal{W}} \in \mathbb{R}_+$ y $k \in \mathbb{N}$. Definimos a los espacios

\mathcal{X} como una secuencia de $-K_{\mathcal{X}}$ a $K_{\mathcal{X}}$ con distancia entre puntos de $1/k$.

\mathcal{A} como una secuencia de $-K_{\mathcal{A}}$ a $K_{\mathcal{A}}$ con distancia entre puntos de $1/k$.

\mathcal{W} como una secuencia de $-K_{\mathcal{W}}$ a $K_{\mathcal{W}}$ con distancia entre puntos de $1/k$.

Definimos la función de magnitud mínima

$$D(x, a, m, y) = \begin{cases} (y - x - \lfloor \theta(\bar{m} - x) \rfloor - a)^2, & (y - x - \lfloor \theta(\bar{m} - x) \rfloor - a) \in \mathcal{W}; \\ +\infty, & \text{d.o.m.} \end{cases}$$

Definimos la función de transición

$$Q(x, a, m)(y) = \frac{1}{\sum_{y \in \mathcal{X}} \exp \left\{ -\frac{1}{\varepsilon} D(x, a, m, y) \right\}} \exp \left\{ -\frac{1}{\varepsilon} D(x, a, m, y) \right\}.$$

(*Procedimiento progresivo*)

Sea m_0 la distribución inicial al tiempo $t = 0$.

Sea $\{m_{t,i}; i \in I_t\}$ la familia de posibles distribuciones sobre \mathcal{X} al tiempo $t = 0, \dots, T$ (notemos que $|I_0| = 1$).

Para $t = 1, 2, \dots, T$:

Para $i = 1, 2, \dots, |I_t|$:

Sea $\mathcal{X}_{t,i}^0 = \{x \in \mathcal{X} : m_{t,i}(x) > 0\}$.

Para $x \in \mathcal{X}_{t,i}^0$:

Para $a_x \in \mathcal{A}(x)$:

Generamos $q_{t+1,i}(x, a_x) = Q(x, a_x, m_{t,i})$.

Generamos $\{m_{t+1,x,a_x}; x \in \mathcal{X}_{t,i}^0, a_x \in \mathcal{A}(x)\}$ y $\{\sigma_{t+1,x,a_x}; x \in \mathcal{X}_{t,i}^0, a_x \in \mathcal{A}(x)\}$, la familia de distribuciones posibles originadas a partir de $m_{t,i}$ y su correspondiente familia de estrategias, tal que

$$m_{t+1,x,a_x}(y) = \sum_{x \in \mathcal{X}} m_{t,i}(x) \cdot q_{t+1,i}(x, a_x)(y),$$

$$\sigma_{t,x,a_x}(x) = a_x;$$

y las denotamos por $\{m_{t+1,j_i}, j_i \in I_{t+1,i}\}$ y $\{\sigma_{t,j_i}, j_i \in I_{t+1,i}\}$, respectivamente.

Generamos las familias

$$\{m_{t+1,j}; j \in I_t\} = \bigcup_{i \in I_t} \{m_{t+1,j_i}, j_i \in I_{t+1,i}\},$$

$$\{\sigma_{t,j}; j \in I_t\} = \bigcup_{i \in I_t} \{\sigma_{t,j_i}, j_i \in I_{t+1,i}\}.$$

(Procedimiento retrógrado)

Generamos $\{V_{T,i}; i \in I_T\}$, la familia de costos para cada posible distribución en I_T .

Para $t = T - 1, \dots, 0$:

Para $i = 1, \dots, |I_{t-1}|$:

Sea $\{v_{t+1,j_i}; j_i \in I_{t,i}\}$ la familia de costos para cada distribución en $I_{t,i}$.

Para $x \in \mathcal{X}_{t,i}^0$:

Generamos $\{v_{t,j_i}; j_i \in I_{t,i}(x)\}$

$$v_{t,j_i}(x) = \min_{a_x} \left\{ \ell(x, a_x, m_{t,i}) + \sum_{y \in \mathcal{X}} v_{t+1,j_i}(y) \cdot q_{t+1,j_i}(x, a_x)(y) \right\}$$

Sea

$$I_{t,i}^* = \bigcap_{x \in \mathcal{X}_{t,i}^0} I_{t,i}(x)$$

(notemos que las estrategias indexadas por I_t^* representan los equilibrios de Nash).

Sea

$$I_t^* = \bigcup_{i \in I_t} I_{t,i}^*$$

Sea

$$I_{t+1}^* = I_{t+1} \cap I_{t+1}^*$$

El equilibrio de campo medio es $\{\sigma, \mathbf{m}\}$ tal que

$$\begin{aligned} \sigma_t &= \sigma_{t,j}, & j \in I_0^*, & t = 0, \dots, T-1; \\ m_t &= m_{t,j}, & j \in I_0^*, & t = 0, \dots, T. \end{aligned}$$

◇

El Pseudocódigo para encontrar el equilibrio de campo medio, tiene la intención de ser ilustrativo, no de mostrar una manera eficiente de resolver el juego de campo medio. El Pseudocódigo, por ejemplo, no incorpora técnicas que consideren la rapidez de cálculo o el aprovechamiento de memoria. Aún así, notemos que en cada periodo t , el conjunto de posibles distribuciones $I_{t+1,i}$ dada la distribución “inicial” $m_{t,i}$, es de dimensión $|\mathcal{A}|^{|\mathcal{X}_{t,i}^0|}$, pues el conjunto de acciones es el mismo para todos los agentes, excepto para los que se encuentran en la frontera del espacio de estados. Este incremento en la dimensión, puede hacer que la solución del juego sea inviable.

Los ejemplos de la Figura 3.4 son “sencillos”, pues fue necesario reducir el espacio de acciones \mathcal{A} y el horizonte de tiempo para que el cálculo se pudiera realizar, sobre todo por el aspecto de almacenamiento. Sin embargo, estos parámetros son suficientes para deducir la solución del juego de campo medio para un horizonte de tiempo más largo, e incluso para espacios \mathcal{X} , \mathcal{A} y \mathcal{W} más grandes, pero manteniendo a la distribución inicial como δ_0 .

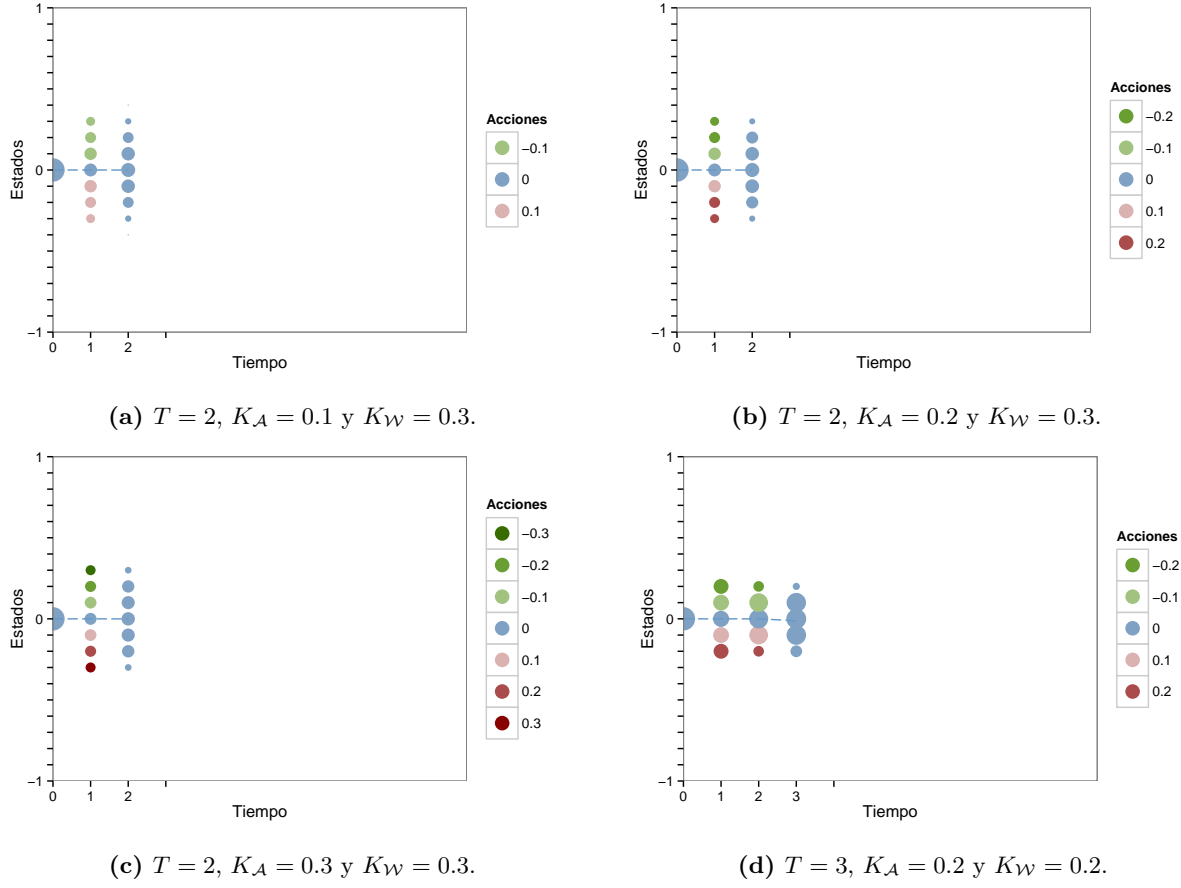


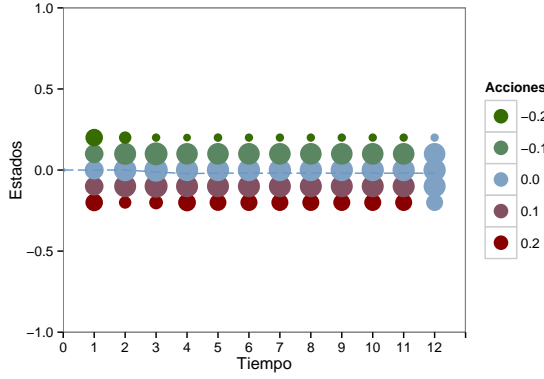
Figura 3.4: Solución del equilibrio de campo medio. El color de los círculos representa la estrategia óptima de acuerdo al estado del banco y la distribución de todos los bancos, al tiempo $t \in \mathcal{T}$. Los espacios que se consideraron fueron $\mathcal{X} = \{-1, -0.9, \dots, 0.9, 1\}$, $\mathcal{A} = \{-K_A, \dots, 0, \dots, K_A\}$, $\mathcal{W} = \{-K_W, \dots, 0, \dots, K_W\}$; y los parámetros $\theta = 0.3$, $\alpha = 1$, $\beta = 1$, $\gamma = 1$ y $\varepsilon = 0.25$.

A pesar de la sencillez de los ejemplos ilustrados en la Figura 3.4, estos ejemplos nos permiten inferir la estrategia del equilibrio de campo medio $\sigma \in \Sigma_M$. Esta estrategia es inconsciente porque no depende de la distribución de actual de los agentes, sino que supone que el proceso $\{m_t\}$ se comportará de cierta manera hasta, posiblemente, alcanzar una distribución estacionaria. Dados los costos cuadráticos ℓ y g , con la restricción de que $\alpha^2 \leq \beta$ en (3.6), todos los agentes preferirán mantenerse cerca de la media \bar{m}_t que minimizar el costo del préstamo a_t . La estrategia de campo medio es pedir prestado si se está por debajo del cero y conceder un préstamo si se está por encima, es decir,

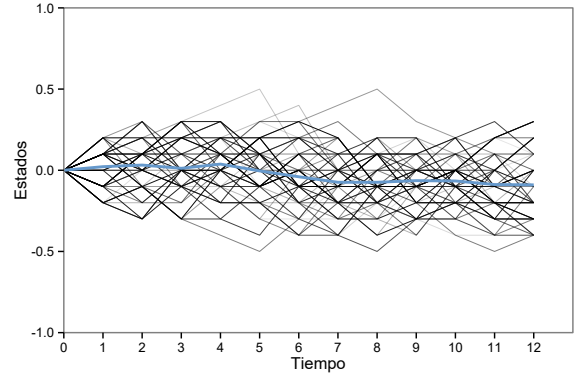
$$\sigma(x_t) = \arg \min_{a \in \mathcal{A}} |a - x_t|.$$

De esta manera, el proceso $\{m_{t,N}\}$, dado por la ecuación progresiva (3.9) cuando todos los agentes utilizan la estrategia de campo medio, converge a una distribución estacionaria m , centrada en cero. En la Figura 3.5 se ilustra que, con los parámetros considerados, la distribución se alcanza aproximadamente desde $t = 3$. Debido a la aproximación que se utilizó, se nota una asimetría en la distribución, sin embargo, se reduce conforme se refina el espacio de estados \mathcal{X} , mediante el parámetro k .

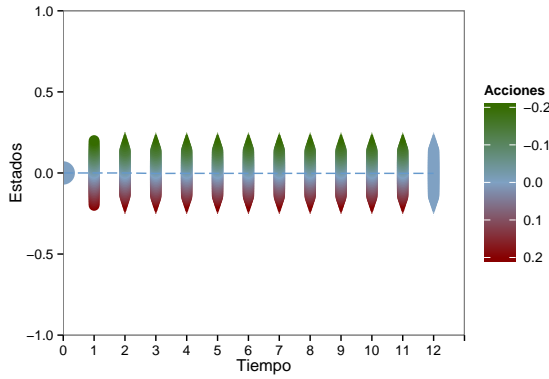
El proceso $\{m_{t,N}\}$ converge a una distribución estacionaria m , centrada en cero, si todos los agentes utilizan la estrategia de campo medio.



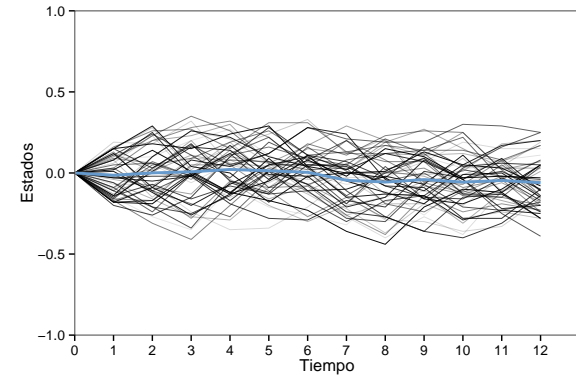
(a) Equilibrio de campo medio (\mathbf{m}, σ) , con $k = 10$.



(b) Realización de $N = 50$ bancos que siguen la estrategia de campo medio σ , $k = 10$.



(c) Equilibrio de campo medio (\mathbf{m}, σ) , con $k = 100$.



(d) Realización de $N = 50$ bancos que siguen la estrategia de campo medio σ , $k = 100$.

Figura 3.5: Comparación del equilibrio de campo medio y del juego de N agentes. Los espacios que se consideraron fueron $\mathcal{X} = \{-1, \dots, 1\}$, $\mathcal{A} = \{-0.2, \dots, 0.2\}$, $\mathcal{W} = \{-0.2, \dots, 0.2\}$; y los parámetros $T = 12$, $\theta = 0.3$, $\alpha = 1$, $\beta = 1$, $\gamma = 1$ y $\varepsilon = 0.5$.

3.3. Riesgo sistémico

El riesgo sistémico es caracterizado por un gran número de bancos que alcanzan un umbral de deuda predeterminado en un horizonte de tiempo T . Sea $\eta < 0$ tal que $\eta \in \mathcal{X}$. Consideramos a un banco *en falla* si el logaritmo de sus reservas monetarias caen por debajo del nivel η en los periodos $\{0, 1, \dots, T\}$.

Bajo esta caracterización del riesgo sistémico, hay al menos dos eventos sistémicos. Uno, donde la media empírica está por abajo del umbral η ,

$$\left\{ \min_{0 \leq t \leq T} [\bar{m}_t] \leq \eta \right\}.$$

El segundo evento, es definir una proporción "grande" de bancos por abajo del umbral η ,

$$\left\{ \max_{0 \leq t \leq T} \frac{1}{N} \mathbb{1}_{\{X_t \leq \eta\}} \geq p_\eta \right\},$$

donde $p_\eta \in [0, 1]$.

Utilizaremos el primer evento sistémico, por similitud con el utilizado por Carmona et al. (2013). Para los espacios

$$\mathcal{X} = \{-1, \dots, 1\}, \quad \mathcal{A} = \{-0.2, \dots, 0.2\}, \quad \mathcal{W} = \{-0.2, \dots, 0.2\}.$$

y los parámetros como en la Figura 3.5c,

$$T = 12, \quad \theta = 0.3, \quad \alpha = 1, \quad \beta = 1, \quad \gamma = 1, \quad \varepsilon = 0.5.$$

Para fijar el valor de η , utilizamos la distribución estacionaria, y definimos al umbral por la ecuación

$$\mathbb{P}(X_T \leq \eta) = 0.05.$$

donde X_T tiene distribución m_T . De donde obtenemos que $\eta = -0.2$.

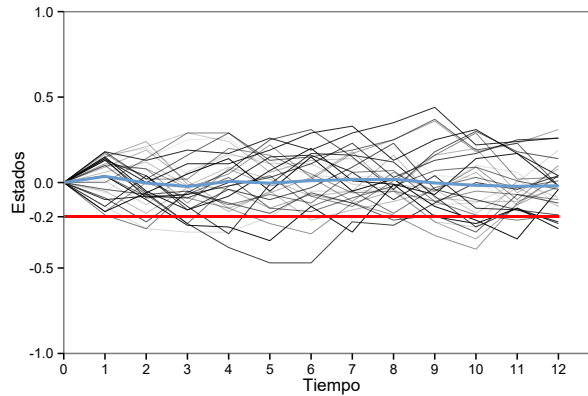


Figura 3.6: Realización de $N = 30$ agentes que siguen la estrategia de campo medio, el umbral $\eta = -0.2$.

Utilizamos el método de Monte Carlo para calcular el riesgo sistémico, con los parámetros mencionados.

Cuadro 3.1: Estimación numérica del riesgo sistémico; 10 000 repeticiones.

N	10	20	30	50	100
Riesgo Sistémico	0.1045	0.0224	0.0062	0.0003	0.0001
Error Estándar	0.0031	0.0015	0.0008	0.0002	0.0001
Error Relativo	2.93 %	6.61 %	12.66 %	57.73 %	100.00 %

De acuerdo al Cuadro 3.1, el riesgo sistémico decrece conforme N crece. Este resultado concuerda con los resultados de Carmona et al. (2013) cuando no se consideran choques generalizados. Por

supuesto, estos resultados pueden variar si elegimos otro régimen de parámetros, en particular, si elegimos un ε diferente, podemos hacer que el sistema sea más estable o inestable.

Conclusiones

Los modelos de control estocástico en tiempo discreto, además del interés que puedan generar por su planteamiento *per se*, tienen ventajas en cuanto a su aplicabilidad. En el Capítulo 3 presentamos un modelo de préstamos interbancarios donde cada agente tiene la posibilidad de conceder y recibir préstamos de un banco central. Se asume un comportamiento de reversión a la media empírica, en el que los agentes estarán dispuestos a pagar un costo para permanecer agrupados. Los periodos de tiempo que se consideran pueden ser referidos a los periodos en que se evalúan los agentes financieros, con lo que se obtiene información para la toma de decisiones de cada banco.

En este modelo, los agentes son afectados mediante perturbaciones aleatorias independientes, que representan los choques idiosincrásicos. Una ventaja del modelo propuesto es que se puede controlar la probabilidad de las perturbaciones de diferente magnitud, mediante el parámetro ε . Esto es, en situaciones de “estrés” es de esperarse una mayor volatilidad, lo cual se consigue con un ε relativamente grande.

A través de un algoritmo computacional, encontramos la estrategia de equilibrio (aproximado) del juego mediante la solución del sistema de ecuaciones retrógrado-progresivo. Sin embargo, esta solución sigue siendo muy demandante en cuanto a recursos de cómputo. Conforme el número de periodos aumenta, el espectro de posibles distribuciones es muy amplio, lo que puede hacer imposible su solución, como en el caso de los equilibrios perfectos de Markov. En el ejemplo desarrollado en el Capítulo 3, resolvimos el sistema de ecuaciones sólo para un horizonte de tiempo $T = 3$, y posteriormente se dedujo la estrategia de equilibrio para un *continuum* de agentes, sabiendo que alcanzaría una distribución estacionaria, aunque no se asumió desde el inicio.

Esta estrategia es un ϵ -equilibrio de Nash para todos los agentes, debido a la homogeneidad de éstos, lo cual se pudo corroborar mediante simulaciones Monte-Carlo. Se muestra que cuando no se consideran choques sistemáticos, el riesgo sistémico disminuye conforme el número de agentes crece (Cuadro 3.1), como en el modelo de Carmona et al. (2013) (ecuación (1.3) con $\rho = 0$). Sin embargo, el modelo tiene algunas limitantes, como la reducción y discretización del espacio de estados, así como el hecho de no considerar choques sistemáticos o generalizados.

Respecto a que el espacio de estados sea un espacio finito, Adlakha et al. (2013) proponen un modelo con espacio de estados numerable, incorporando supuestos para que la distribución de los agentes sobre el espacio de estados sea de *colas ligeras*. Incluso, se podría estudiar el modelo propuesto por Bodoh Creed (2012), con espacio de estados compacto, para no realizar una discretización. Una extensión en otro sentido, sería considerar un juego donde hay pocos agentes grandes

y muchos agentes pequeños, y analizar si, bajo condiciones de estrés, el riesgo sistémico disminuye cuando se rescata a los bancos grandes, se rescata a los bancos pequeños, o si se elimina a los agentes en falla.

Apéndices

A. Preferencias y funciones utilidad

El propósito de esta sección es dar un contexto de las funciones de utilidad de Neumann-Morgenstern. Nuestra principal referencia es Föllmer y Schied (2004), misma que puede ser consultada para ahondar más en el tema.

Sea \mathcal{A} un conjunto no vacío. Un elemento $a \in \mathcal{A}$ representa una posible elección de un agente económico.

Definición A.1. Una *relación de preferencias* sobre \mathcal{A} es una relación binaria \succ con dos propiedades.

- a) *Asimetría*: Si $a \succ b$, entonces $b \not\succeq a$.
- b) *Transitividad negativa*: Si $a \succ b$ y $c \in \mathcal{A}$, entonces $a \succ c$ o $c \succ b$ o ambos.

Una relación de preferencias \succ sobre \mathcal{A} induce una *relación de preferencias débil* \succeq definida por

$$a \succeq b \quad \text{si y sólo si} \quad b \not\succeq a,$$

y una *relación de indiferencia* \sim definida por

$$a \sim b \quad \text{si y sólo si} \quad a \succeq b, \quad \text{y} \quad b \succeq a.$$

Definición A.2. Una *representación numérica* de una relación de preferencias \succ es una función $U : \mathcal{A} \rightarrow \mathbb{R}$ tal que

$$b \succ a \quad \text{si y sólo si} \quad U(b) > U(a).$$

Notemos que entonces $b \succeq a$ si y sólo si $U(b) \geq U(a)$. Además, notemos que esa representación numérica U no es única, si f es cualquier función estrictamente creciente, entonces $\tilde{U}(a) := f(U(a))$ es otra representación numérica.

Si \mathcal{A} un espacio topológico, una relación de preferencias \succ es *continua* si para todo $a \in \mathcal{A}$,

$$\overline{\mathcal{B}}(a) := \{b \in \mathcal{A} : b \succ a\} \quad \text{y} \quad \underline{\mathcal{B}}(a) := \{b \in \mathcal{A} : a \succ b\}$$

son subconjuntos abiertos de \mathcal{A} .

Ahora identificamos a \mathcal{A} como un subconjunto \mathcal{M} del conjunto $\mathcal{M}_1(\Sigma, \mathfrak{S})$ de todas las distribuciones de probabilidad sobre un espacio medible (Σ, \mathfrak{S}) . A los elementos de \mathcal{M} a veces se les llama *loterías*.

Definición A.3. Una representación numérica U de una relación de preferencias \succ sobre \mathcal{M} es llamada una *representación de von Neumann-Morgenstern* si es de la forma

$$U(\mu) = \int u(x)\mu(dx), \quad \mu \in \mathcal{M},$$

donde u es una función real sobre \mathcal{S} .

Cualquier representación de von Neumann-Morgenstern U es *afín* en \mathcal{M} , en el sentido de que para $\alpha \in [0, 1]$,

$$U(\alpha\mu + (1 - \alpha)\nu) = \alpha U(\mu) + (1 - \alpha)U(\nu), \quad \mu, \nu \in \mathcal{M}.$$

La afinidad de U implica que una relación de preferencias \succ sobre \mathcal{M} satisface el *axioma de independencia*, es decir, para todos $\mu, \nu \in \mathcal{M}$ la relación $\mu \succ \nu$ implica que para $\alpha \in [0, 1]$,

$$\alpha\mu + (1 - \alpha)\lambda \succ \alpha\nu + (1 - \alpha)\lambda, \quad \lambda \in \mathcal{M}.$$

Y también satisface el *axioma Arquimiliano*, es decir, para $\mu \succ \lambda \succ \nu$ existen $\alpha, \beta \in (0, 1)$ tales que

$$\alpha\mu + (1 - \alpha)\nu \succ \lambda \succ \beta\mu + (1 - \beta)\nu.$$

Proposición A.4. Sea $\mathcal{M} := \mathcal{M}_1(\Sigma)$ el espacio de todas las medidas de probabilidad sobre Σ dotado con la topología débil, y sea \succ una relación de preferencias continua sobre \mathcal{M} que satisface el *axioma de independencia*. Entonces existe una representación de von Neumann-Morgenstern

$$U(\mu) = \int u(\sigma)\mu(d\sigma)$$

para el cual la función $u : \Sigma \rightarrow \mathbb{R}$ es acotada y continua. Además, U y u son únicas excepto por transformaciones positivas afines.

Demostración. Föllmer y Schied (2004) p.57. □

Definición A.5. Una función de $u : \Sigma \rightarrow \mathbb{R}$ es llamada una *función de utilidad* si es estrictamente cóncava, estrictamente creciente, y continua en Σ .

Una *distribución simple de probabilidad* es una medida de probabilidad μ sobre Σ que puede ser escrita como una combinación convexa finita de medidas de Dirac, i.e., existen $\sigma_1, \dots, \sigma_N \in \mathcal{S}$ y $\alpha_1, \dots, \alpha_N \in (0, 1)$ tales que

$$\mu = \sum_{i=1}^N \alpha_i \delta_{\sigma_i}.$$

Si \mathcal{M} es el conjunto de todas las distribuciones simples de probabilidad sobre Σ , por la Proposición A.4, existe una representación numérica. Sea

$$u(\sigma) := U(\delta_\sigma), \quad \sigma \in \Sigma.$$

Si $\mu \in \mathcal{M}$ es de la forma $\mu = \alpha_1 \delta_{\sigma_1} + \dots + \alpha_N \delta_{\sigma_N}$, la afinidad de U implica

$$U(\mu) = \sum_{i=1}^N \alpha_i U(\delta_{\sigma_i}) = \int u(\sigma) \mu(d\sigma),$$

que es una representación de von Neumann-Morgenstern.

B. Espacios métricos

Sea \mathcal{S} es un conjunto no vacío. El espacio (\mathcal{S}, d) es un *espacio métrico* si d es una función de $\mathcal{S} \times \mathcal{S} \rightarrow [0, \infty)$ tal que

- $d(x, y) = d(y, x)$ para toda $x, y \in \mathcal{S}$,
- $d(x, y) = 0$ si y sólo si $x = y$ para todo $x, y \in \mathcal{S}$,
- $d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z)$ para todos $x, y, z \in \mathcal{S}$.

Un conjunto $\mathcal{G} \subset \mathcal{S}$ es un *abierto* si para todo $x \in \mathcal{G}$, existe un $\epsilon > 0$ tal que para $y \in \mathcal{S}$, $d(x, y) < \epsilon$, implica que $y \in \mathcal{G}$. El conjunto

$$B_d(x, \epsilon) := \{y : d(x, y) < \epsilon\}$$

es llamado una *bola abierta* de radio $\epsilon > 0$ con centro en $x \in \mathcal{S}$. La colección de bolas abiertas $B_d(x, \epsilon)$ es una base para una topología en \mathcal{S} , llamada la *topología métrica* inducida por d .

Una función $f : \mathcal{S} \rightarrow \mathbb{R}$ es *continua* si $f^{-1}((a, b))$ es abierto para cualesquiera $-\infty < a < b < +\infty$. Una familia \mathcal{G} de subconjuntos abiertos en \mathcal{S} es llamada una *cubierta abierta* de un subconjunto $B \in \mathcal{S}$ si para cada $x \in B$ existe $G \in \mathcal{G}$ tal que $x \in G$. Un conjunto $K \subset \mathcal{S}$ es llamado *compacto* si dada cualquier cubierta abierta \mathcal{G} de K , existe una subfamilia finita $\mathcal{G}' \subset \mathcal{G}$ tal que \mathcal{G}' es una cubierta de K .

Sea $\mathcal{B}(\mathcal{S})$ la σ -álgebra de Borel sobre \mathcal{S} , i.e, la σ -álgebra generada por los conjuntos abiertos de \mathcal{S} con respecto a la métrica d . Una medida en el espacio medible $(\mathcal{S}, \mathcal{B}(\mathcal{S}))$ a veces es referida simplemente como una media sobre (\mathcal{S}, d) .

Sea \mathcal{A} un espacio métrico compacto y sea $\mathcal{P}(\mathcal{A})$ el conjunto de medidas de probabilidad sobre \mathcal{A} . Una sucesión $\{m_N\}_{N \geq 1} \in \mathcal{P}(\mathcal{A})$ converge a $m \in \mathcal{P}(\mathcal{A})$ en la *topología débil*-* si,

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \int_{\mathcal{A}} f(x) dm_N(x) = \int_{\mathcal{A}} f(x) dm(x), \quad \forall f \in \mathcal{C}^0(\mathcal{A}),$$

donde $\mathcal{C}_0(\mathcal{A}) := \{f \mid f : \mathcal{S} \rightarrow \mathbb{R}, f \text{ es continua y } \forall \epsilon > 0 \text{ existe un compacto } K \text{ tal que } |f(x)| < \epsilon \text{ para todo } x \notin K\}$. En este caso, se dice que el conjunto $\mathcal{P}(\mathcal{A})$ está equipado con *topología de convergencia débil**. $\mathcal{P}(\mathcal{A})$ es un espacio métrico compacto para esta topología, y es metrizable por la *distancia de Kantorowich-Rubinstein*, definida por

$$\mathbf{d}_1(\mu, \nu) = \sup \left\{ \int_{\mathcal{A}} f d(\mu - \nu) \mid f : \mathcal{A} \rightarrow \mathbb{R} \text{ es 1-Lipschitz continua} \right\}.$$

Una función $u_N : \mathcal{A}^N \rightarrow \mathbb{R}$ es *simétrica* si

$$u_N(a_1, \dots, a_N) = u_N(a_{\varrho(1)}, \dots, a_{\varrho(N)})$$

para cualquier permutación ϱ sobre $\{1, \dots, N\}$.

Para mostrar que $\{u_N\}$ tiene un límite, asumimos lo siguiente.

a) $\{u_N\}$ es uniformemente acotada. Es decir, existe $C > 0$ tal que

$$\|u_N\|_{\infty} \leq C, \tag{12}$$

b) $\{u_N\}$ es uniformemente continua. Es decir, existe un módulo de continuidad ω independiente de N tal que

$$|u_N(a) - u_N(b)| \leq \omega(\mathbf{1}(m_a^N, m_b^N)), \quad a, b \in \mathcal{A}^N, \forall N \in \mathbb{N}, \tag{13}$$

donde $m_a^N = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \delta_{a_i}$ y $m_b^N = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \delta_{b_i}$, si $a = (a_1, \dots, a_N)$ y $b = (b_1, \dots, b_N)$.

Proposición B.1. Si u_N es simétrica y satisface (12) y (13), entonces existe una subsucesión $\{u_{N_k}\}$ de $\{u_N\}$ y una función continua $u : \mathcal{P}(\mathcal{A}) \rightarrow \mathbb{R}$ tal que

$$\lim_{k \rightarrow +\infty} \sup_{a \in \mathcal{A}^{N_k}} |u_{N_k}(a) - u(m_a^{N_k})| = 0.$$

C. Teoremas de punto fijo

Un *punto fijo* de una función $f : \mathcal{S} \rightarrow \mathcal{R}$, donde $\mathcal{S} \cap \mathcal{R} \neq \emptyset$, es un punto $s \in \mathcal{S}$ tal que $f(s) = s$. Los teoremas de punto fijo son útiles para establecer la existencia de soluciones a un sistema de ecuaciones no lineales.

Proposición C.1. (Teorema del punto fijo de Brouwer) Si \mathcal{S} es un subconjunto de \mathbb{R}^n compacto y convexo, y $f : \mathcal{S} \rightarrow \mathcal{S}$ es continua, entonces f tiene un punto fijo en \mathcal{S} .

Proposición C.2. (Teorema del punto fijo de Schauder)

Si \mathcal{S} es un conjunto convexo, compacto y no vacío en un espacio localmente convexo \mathcal{R} , y $f : \mathcal{S} \rightarrow \mathcal{S}$ es continua, entonces f tiene un punto fijo en \mathcal{S} .

Sean \mathcal{S} y \mathcal{R} dos conjuntos cualesquiera. Una correspondencia r de \mathcal{S} sobre \mathcal{R} es una relación que asocia a cada elemento $s \in \mathcal{S}$ un único subconjunto no vacío $r(x)$ de \mathcal{R} . Sea $2^{\mathcal{R}}$ el conjunto potencia de \mathcal{R} , entonces, se puede expresar la correspondencia r entre \mathcal{S} y \mathcal{R} como $r : \mathcal{S} \rightarrow 2^{\mathcal{R}}$. Un *punto fijo de una correspondencia* $r : \mathcal{S} \rightarrow 2^{\mathcal{S}}$ es un punto s tal que $s \in r(s)$.

Proposición C.3. (Teorema del punto fijo de Kakutani) *Sea \mathcal{S} un subconjunto de \mathbb{R}^n no vacío, compacto y convexo. Sea $r : \mathcal{S} \rightarrow 2^{\mathcal{S}}$ una correspondencia en \mathcal{S} con una gráfica cerrada tal que $r(s)$ es no vacío y convexo para todo $s \in \mathcal{S}$. Entonces r tiene un punto fijo en \mathcal{S} .*

Bibliografía

- Acharya, V. V., Pedersen, L. H., Philippon, T., y Richardson, M. P. (2010). Measuring systemic risk.
- Adlakha, S., Johari, R., y Weintraub, G. Y. (2013). Equilibria of dynamic games with many players: Existence, approximation, and market structure. *Journal of Economic Theory*.
- Adrian, T. y Brunnermeier, M. K. (2011). Covar. FRB of New York Staff Report No. 348.
- Basar, T. y Olsder, G. J. (1999). Dynamic noncooperative game theory (classics in applied mathematics).
- Battiston, S., Gatti, D. D., Gallegati, M., Greenwald, B., y Stiglitz, J. E. (2012). Liaisons dangereuses: Increasing connectivity, risk sharing, and systemic risk. *Journal of Economic Dynamics and Control*, 36(8), 1121–1141.
- Beale, N., Rand, D. G., Battley, H., Crosson, K., May, R. M., y Nowak, M. A. (2011). Individual versus systemic risk and the regulator’s dilemma. *Proceedings of the National Academy of Sciences*, 108(31), 12647–12652.
- Bernard, C., Brechmann, E. C., y Czado, C. (2012). Statistical assessments of systemic risk measures.
- Bodoh Creed, A. (2012). *Approximation of large dynamic games*. Technical report, mimeo-Cornell University.
- Cardaliaguet, P. (2010). *Notes on mean field games*. Technical report, Technical report.
- Carmona, R., Fouque, J. P., y Sun, L. H. (2013). Mean field games and systemic risk. *ArXiv e-prints*.
- Dawson, D. A. (1983). Critical dynamics and fluctuations for a mean-field model of cooperative behavior. *Journal of Statistical Physics*, 31(1), 29–85.
- De Bandt, O. y Hartmann, P. (2000). Systemic risk: a survey.
- Fleming, W. H. y Hernández Hernández, D. (1997). Risk-sensitive control of finite state machines on an infinite horizon i. *SIAM Journal on Control and Optimization*, 35(5), 1790–1810.
- Föllmer, H. y Schied, A. (2004). Stochastic finance, volume 27 of de gruyter studies in mathematics.
- Fouque, J. P. y Langsam, J. A. (2013). *Handbook on Systemic Risk*. Cambridge University Press.
- Fudenberg, D. y Tirole, J. (1991). *Game Theory*. MIT Press.
- Garnier, J., Papanicolaou, G., y Yang, T. W. (2013a). Diversification in financial networks may increase systemic risk. *Handbook on Systemic Risk*, (pp. 432).
- Garnier, J., Papanicolaou, G., y Yang, T. W. (2013b). Large deviations for a mean field model of systemic risk. *SIAM Journal on Financial Mathematics*, 4(1), 151–184.

- Gomes, D. A., Mohr, J., y Souza, R. R. (2010). Discrete time, finite state space mean field games. *Journal de Mathématiques Pures et Appliquées*, 93(3), 308–328.
- Gomes, D. A. y Saúde, J. (2014). Mean field games models—a brief survey. *Dynamic Games and Applications*, 4(2), 110–154.
- Hernández-Lerma, O. y Lasserre, J. B. (1996). *Discrete-time Markov control processes: basic optimality criteria*, volume 30. Springer Science y Business Media.
- Huang, M., Caines, P. E., y Malhamé, R. P. (2007). Large-population cost-coupled lqg problems with nonuniform agents: Individual-mass behavior and decentralized ε -nash equilibria. *Automatic Control, IEEE Transactions on*, 52(9), 1560–1571.
- Huang, M., Malhamé, R. P., Caines, P. E., et al. (2006). Large population stochastic dynamic games: closed-loop mckean-vlasov systems and the nash certainty equivalence principle. *Communications in Information y Systems*, 6(3), 221–252.
- Hull, J. C. y White, A. (2000). Valuing credit default swaps ii: modeling default correlations.
- Lasry, J. M. y Lions, P. L. (2006a). Jeux à champ moyen. i—le cas stationnaire. *Comptes Rendus Mathématique*, 343(9), 619–625.
- Lasry, J. M. y Lions, P. L. (2006b). Jeux à champ moyen. ii—horizon fini et contrôle optimal. *Comptes Rendus Mathématique*, 343(10), 679–684.
- Lasry, J. M. y Lions, P. L. (2007). Mean field games. *Japanese Journal of Mathematics*, 2(1), 229–260.
- Maldonado Lopez, J. P. (2014). *Some links between discrete and continuous aspects in dynamic games*. PhD thesis. Thèse de doctorat dirigée par Sorin, Sylvain Mathématiques Appliquées Paris 6 2014.
- Merton, R. C. y Bodie, Z. (1995). A conceptual framework for analyzing the financial system. *The global financial system: A functional perspective*, (pp. 3–31).
- Nier, E., Yang, J., Yorulmazer, T., y Alentorn, A. (2007). Network models and financial stability. *Journal of Economic Dynamics and Control*, 31(6), 2033–2060.