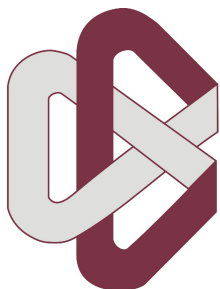


CENTRO DE INVESTIGACIÓN EN
MATEMÁTICAS



CIMAT

TESIS

que para obtener el grado de
MAESTRO EN CIENCIAS

Presenta:

HÉCTOR FABIAN CAMPOS MORA

*Simetría Especular y su relación
con las Variedades Tóricas.*

DIRIGIDO POR: DR. PEDRO LUIS DEL ÁNGEL RODRÍGUEZ.
DR. FELIPE DE JESÚS ZALDÍVAR CRUZ (UAM-IZTAPALAPA)
PRESIDENTE.
DR. ENRIQUE JAVIER ELIZONDO HUERTA (IMATE-UNAM)
SECRETARIO.
DR. PEDRO LUIS DEL ÁNGEL RODRÍGUEZ (CIMAT) VOCAL.

Abril 2015
Guanajuato, Gto. México

A la memoria de mi madre.

Agradecimientos

Quiero agradecer primeramente al CONACYT, que gracias a su apoyo he llevado a cabo mis estudios de maestría. Quiero agradecer también al CAP de Matemáticas del CIMAT que también me de la oportunidad de presentar este trabajo, y claro, no menos importantes y sin valor de orden alguno quiero agradecer a mi familia que siempre respetó mi decisión de llevar a cabo este camino y me apoyó de muchas maneras. A mi director de tesis el Dr. Pedro Luis del Ángel por aceptar ser mi tutor por segunda ocasión dándome a conocer siempre temas tan interesantes y ayudarme a comprenderlos de maneras más sencillas, así como a mis sinodales el Dr. Felipe Zaldívar y el Dr. Javier Elizondo, quienes me dieron su apoyo para presentar este trabajo. Al Dr. Carlos Ariel Pompello Gutiérrez quien compartió su tiempo para este trabajo y que también me alentó a terminarlo. A mis profesores que día a día ponen su parte para formarnos y a todos mis amigos que estaban al pendiente del avance de este trabajo.

Quiero hacer un último agradecimiento especial, a mi madre, quien en vida me preguntaba todos los días por la tesis mostrando mucho interés en los temas, siendo la única persona a la que no podía dejar de comentarle lo bueno, lo emocionante y también lo difícil. A ella, quien siempre me alentaba a trabajar duro todo el tiempo de la misma manera en que depositaba su confianza en mi trabajo aún sin poder conocerlo.

Gracias a todos ustedes esto fue posible.

Simetría especular y su relación con las
variedades tóricas.

Héctor Fabian Campos Mora.

6 de mayo de 2015

Índice general

Agradecimientos	5
Introducción	i
1. Esbozo de la simetría especular	1
2. Variedades tóricas	9
2.1. Definiciones y construcciones.	10
2.1.1. Conos	10
2.1.2. Monoides	16
2.1.3. Variedades tóricas afines	17
2.1.4. Abanicos y variedades tóricas	27
2.1.5. La acción del toro y sus órbitas	31
2.1.6. Variedad tórica asociada a un politopo	40
2.1.7. Divisores, homología, cohomología y funciones de soporte	45
2.2. La construcción de espejo de Batyrev	51

Introducción

El presente trabajo está enfocado, como su nombre lo dice, a conocer la relación que existe entre las variedades tóricas y la simetría especular. La selección del tema fue inspirado en la búsqueda de conocer la relación que existe entre las matemáticas puras, abstractas en un área diferente de sí mismas como lo es el caso de la simetría especular o de espejo, que tiene su origen en la física teórica, particularmente en la teoría de cuerdas.

El trabajo está dividido en dos capítulos. El primero es un esbozo de la simetría especular, dando a conocer ejemplos particulares del tema. Aunque como se menciona, es un esbozo, ya que la manera en que se dieron a conocer los primeros ejemplos llevan a cabo una metodología que está fuera del alcance de éste trabajo y tiene un enfoque diferente.

En el segundo capítulo, que concentra la mayor parte del trabajo, se da a conocer las variedades tóricas y sus características. La idea es poder conocer a éstos objetos de tal manera que muestren sus propiedades a partir de su definición. Al final se muestra la construcción que hizo Victor Batyrev para poder relacionar las variedades tóricas y la simetría de espejo.

Capítulo 1

Esbozo de la simetría especular

Hablaremos de manera general de la simetría especular y estaremos mencionando los términos que después definiremos para dar un panorama general.

La simetría especular surge de manera natural de las construcciones estándar de la teoría de cuerdas supersimétricas. La supersimetría ha ayudado a resolver varios aspectos difíciles de la teoría de cuerdas, o mejor dicho, las ha dotado de características muy interesantes y versátiles, así las teorías de cuerdas supersimétricas se han vuelto muy importantes en la física teórica.

Algunas de las formulaciones de la simetría especular dan lugar a que algunas variedades tengan una variedad espejo que refleje algunas de sus propiedades. Matemáticamente esto implica que problemas difíciles en geometría simpléctica (por ejemplo contar curvas) de una variedad de Calabi-Yau pueden ser reducidos a problemas relativamente fáciles de geometría compleja de otra variedad de Calabi-Yau diferente. Particularmente nosotros hablamos de que para una variedad V existe otra variedad V° cuyo diamante de Hodge es la reflexión (o imagen de espejo) por una línea de 45° del diamante de Hodge de la variedad V . De ahí el nombre simetría de espejo o simetría especular. A esta formulación en ocasiones se le conoce como la conjetura de espejo topológica. Podría enunciarse como sigue: Dada una orbifold de Calabi-Yau n -dimensional X , existe otra orbifold de Calabi-Yau n -dimensional Y para la cual $h^{i,j}(X) = h^{n-i,j}(Y)$.

Ésta y otras consecuencias se obtienen de las teorías supersimétricas que

ayudan a estudiar teóricamente fenómenos físicos y entenderlos mejor, a veces no desde el objeto de interés sino desde su dual o simétrico. Sabemos que muchos de los avances físicos se deben particularmente a la intuición y ésta les permite formular teorías (en ocasiones con poco rigor matemático) que les ayuda a prosperar enormemente y con cada experimento o validación de las mismas se van afinando para consolidarlas y llenar aquellos detalles matemáticos que pudieron haber hecho falta.

No cabe duda que usar la intuición lleva a resultados magníficos y permite avanzar a pasos agigantados. Matemáticamente también se utiliza la intuición para poder resolver o crear algo, sin embargo no es precisamente tomado en cuenta cuando se quiere convencer a alguien sobre lo que se haya propuesto y es por eso que se necesita (a veces lentamente) avanzar con precaución y mediante demostraciones rigurosas de cada afirmación hecha. Éste es el caso de una formulación de la simetría especular. No se cuenta de manera precisa con una formulación matemática general aunque se saben de formulaciones más específicas que se han llevado paso a paso a las cuales se les ha encontrado respuesta favorable. Uno de estos casos favorables tuvo respuesta gracias a la construcción de espejo de politopos reflexivos de Victor Batyrev, que nos da a lugar la creación de variedades duales para las cuales se satisface la propiedad de espejo en sus respectivos diamantes de Hodge.

El objetivo para nosotros es poder mostrar los fundamentos de variedades tóricas para enunciar algunos resultados de Victor Batyrev sobre simetría especular.

Escribiremos un ejemplo conocido sobre la validez de esta conjetura. Para ello daremos algunas definiciones.

Una métrica Riemanniana g en X es una estructura hermitiana sobre X si para cualquier punto $x \in X$ el producto por escalar g_x en $T_x X$ es compatible con la estructura casi compleja I_x . La $(1, 1)$ -forma real inducida $\omega := g(I(), ())$ es llamada la forma fundamental.

La variedad compleja X equipada con la estructura hermitiana g es llamada variedad hermitiana. La estructura hermitiana g está únicamente determinada por la estructura casi compleja I y la forma fundamental ω , $g(,) = \omega(, I())$.

Se define ahora una estructura de Kähler (o métrica de Kähler) como una estructura hermitiana g para la cual la forma fundamental ω es cerrada, i.e. $d\omega = 0$. En tal caso se llama a ω la forma de Kähler.

Una variedad compleja dotada con la estructura de Kähler se llama variedad de Kähler.

Ahora bien toda variedad diferenciable tiene su haz tangente T_X y éste su dual, el haz cotangente $\Omega_X^1 = T_X^*$. Se puede definir así el haz lineal canónico $K_X = \omega_X = \det \Omega_X^1$, el divisor (o su clase) de 1-formas no cero meromorfas en X .

Ahora definiremos las variedades de Calabi-Yau:

Una variedad de Calabi-Yau es una variedad de Kähler completa (X^{2m}, g, ω) tal que el haz canónico $K_X := \bigwedge^{m,0} X$ es trivial. Una Variedad de Calabi-Yau X , posee una cierta cantidad de parámetros, unos de los cuales están asociados a la estructura de X como variedad compleja y otros parámetros corresponden a las deformaciones de su métrica de Kähler.

Los parámetros correspondientes a las deformaciones de la estructura compleja están relacionados con el grupo de cohomología $H^{2,1}$ de $(2,1)$ -formas mientras que los parámetros correspondientes a las deformaciones de la forma de Kähler corresponden al grupo $H^{1,1}$ de $(1,1)$ -formas.

Vamos a definir formalmente los números del diamante de Hodge. Dada una variedad algebraica compleja X^n no singular, tenemos los grupos de cohomología $H^k(X, \mathbb{C}) := \frac{\{\alpha \in \Omega^k(X) | d\alpha = 0\}}{\{\alpha \in \Omega^k(X) | \alpha = d\beta\}}$. Podemos fijarnos en el conjunto $H^{i,j}(X) = H^i(X, \Omega_X^j)$ de formas cerradas α de tipo (i, j) que localmente vemos como $\alpha = \sum_{|I|=i, |J|=j} \alpha_{I,J} dz_I \wedge d\bar{z}_J$ módulo formas exactas ($\Omega_X^i := \bigwedge^i \Omega_X$ la i -ésima potencia exterior de la gavilla de 1-formas diferenciales).

Existe una descomposición de Hodge para una variedad proyectiva suave definida sobre los complejos: $H^k(X, \mathbb{C}) = \bigoplus_{i+j=k} H^{i,j}(X)$. Los números de hodge son $h^{i,j} := \dim H^{i,j}(X)$. Por la identidad $H^i(X, \Omega_X^j) = \overline{H^j(X, \Omega_X^i)}$ del teorema de la dualidad de Hodge se obtiene que $h^{i,j} = h^{j,i}$ y de la dualidad

de Poincaré $h^{n-i,n-j} = h^{i,j}$.

Así entonces los números $h^{i,j}$ pueden ser presentados en forma de diamante, como es el caso para una variedad de dimensión 3.

$$\begin{array}{ccccccc}
 & & & & h^{0,0} & & \\
 & & & & h^{1,0} & & h^{0,1} \\
 & & & h^{2,0} & h^{1,1} & & h^{0,2} \\
 h^{3,0} & & h^{2,1} & & h^{1,2} & & h^{0,3} \\
 & h^{3,1} & & h^{2,2} & & h^{1,3} & \\
 & & h^{3,2} & & h^{2,3} & & \\
 & & & h^{3,3} & & &
 \end{array}$$

Como mencionamos daremos un ejemplo conocido sobre dos variedades, una siendo el espejo de la otra. La primera a considerar es una triple cuántica $\mathbb{P}_4(5)$, una 3-hipersuperficie de grado 5 en un espacio proyectivo 4-dimensional, cuyos números $h^{1,1}$ y $h^{2,1}$ son 1 y 101, respectivamente. La variedad de espejo de esta variedad se conoce gracias a las construcciones dadas por Green y Plesser [Greene, Brian; Plesser, Ronen (1990). "Duality in Calabi Yau moduli space". Nuclear Physics B 338 (1): pp. 15 to 37], con números $h^{1,1} = 101$ y $h^{2,1} = 1$.

Para la construcción de la variedad espejo se utilizó una subfamilia M_1 uniparamétrica de hipersuperficies cuánticas dadas por los polinomios:

$$p = \sum_{k=1}^5 x_k^5 - 5\psi \prod_{k=1}^5 x_k$$

Variedades que son invariantes bajo el grupo simétrico \star generado por:

$$g_0 = (1, 0, 0, 0, 4), g_1 = (0, 1, 0, 0, 4), g_2 = (0, 0, 1, 0, 4), g_3 = (0, 0, 0, 1, 4).$$

Donde la i -ésima entrada es la potencia de la raíz quinta de la unidad multiplicada por la i -ésima coordenada. Así pues, g_1 representa la $\mathbb{Z}/5$ -acción

$$(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) \mapsto (x_1, \alpha x_2, x_3, x_4, \alpha^4 x_5)$$

donde $\alpha = e^{2\pi i/5}$. Del hecho de que el producto de los generadores de \star es la acción de multiplicar α , sólo tres de los g_i 's son independientes,

digamos g_1, g_2 y g_3 .

Una familia de variedades espejo, se obtiene entonces tomando el cociente de cada variedad de Calabi-Yau por el grupo $\mathbb{Z}/5^3$ generado por g_1, g_2 y g_3 , haciendo las respectivas identificaciones. Una manera de representar a estas variedades como hipersuperficies en espacios proyectivos pesados \mathbb{P}_4 es fijando

$$(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) = (y_1 y_3^{1/5}, y_2^{4/5} y_5^{1/5}, y_3^{4/5} y_4^{1/5}, y_4^{4/5} y_2^{1/5}, y_5^{4/5})$$

y la ecuación que las define es

$$p = y_1^5 y_3 + y_2^4 y_5 + y_3^4 y_4 + y_4^4 y_2 + y_5^4 - 5\psi \prod_{k=1}^5 y_k,$$

Ésta variedad es $\mathbb{P}_4^{(41,48,51,52,64)}(256)$.

Las 3-variedades cuánticas no singulares son variedades de Calabi-Yau. Un caso de ellas es la cuántica de Fermat dada por $V^5 + W^5 + X^5 + y^5 + z^5 = 0$ y su diamante de Hodge es el siguiente:

$$\begin{array}{cccc} & & & 1 \\ & & 0 & 0 \\ & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 101 & 101 & 1 \\ & 0 & 1 & 0 \\ & 0 & 0 & \\ & & & 1 \end{array}$$

La variedad de espejo o dual $\hat{X} := X/(\mathbb{Z}/5)^3$ tiene el siguiente diamante:

$$\begin{array}{cccc} & & & 1 \\ & & 0 & 0 \\ & 0 & 101 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ & 0 & 101 & 0 \\ & 0 & 0 & \\ & & & 1 \end{array}$$

Usando el lenguaje de los conos vamos a dar un esbozo de lo que este trabajo plantea. Sea Σ un abanico en \mathbb{R}^n y $v_1, \dots, v_k \in N \subset \mathbb{R}^n$ los vectores que generan los conos 1-dimensionales de Σ . Consideremos la ecuación:

$$(1) \sum_{i=1}^k Q^i v_i = 0 \text{ donde } Q^i \in \mathbb{R}.$$

Son n ecuaciones lineales en k variables. Entonces el espacio de soluciones S de vectores (Q^1, \dots, Q^k) que satisfacen (1), es un espacio $(k - n)$ -dimensional y eligiendo una base $\{(Q_a^1, \dots, Q_a^k)\}$ donde $a = 1, \dots, k - n$ podemos escribir a S como:

$$S = \text{span}_{\mathbb{R}}\{(Q_a^1, \dots, Q_a^k)\}$$

Lo cual define una acción de $(\mathbb{C}^*)^{k-n}$ en \mathbb{C}^k definida por lo siguiente: Dada $\lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_{k-n}) \in (\mathbb{C}^*)^{k-n}$ y $v = (v_1, \dots, v_k) \in \mathbb{C}^k$, sea

$$(2) \lambda^v := (\lambda_1^{Q_1^i} \cdot \lambda_{k-n}^{Q_i^i} \cdot v_j)$$

La variedad tórica asociada X_Σ está dada por

$$X_\Sigma := \frac{\mathbb{C}^k \setminus Z_\Sigma}{\sim}$$

donde la relación de equivalencia está definida por (2) y

$$Z_\Sigma := \bigcup_I \{(w_1, \dots, w_k) \in \mathbb{C}^k \mid w_i = 0 \forall i \in I\}$$

y la unión es tomada sobre todas las $I \subset 1, \dots, k$ tales que $\{v_i \mid i \in I\}$ no genere a ningún cono en Σ .

Se tiene que en realidad la variedad no depende de la base de S elegida sino que está determinada únicamente por Σ , por lo que sin pérdida de generalidad usualmente se eligen enteros tales que su máximo común divisor sea 1. Con lo que hemos asociado a cada v_i una coordenada homogénea w_i , y tal construcción es la generalización de $\mathbb{C}\mathbb{P}^n$.

Proposición: Una variedad tórica X_Σ tiene haz canónico trivial K_{X_Σ} sí y sólo si los vectores v_i que generan los rayos de Σ , todos caen en algún hiperespacio afín. Ésto además es equivalente a la condición de que

$\sum_{i=1}^k Q_a^i = 0$ para toda a .

De acuerdo a nuestra definición una variedad de Calabi-Yau es completa, entonces cualquier variedad que se realice como una variedad X_Σ no puede ser de Calabi-Yau, en particular $\mathbb{C}\mathbb{P}^n$ no lo es. Pues una variedad tórica X_Σ es completa sí y sólo si el abanico Σ llena a \mathbb{R}^n .

Veremos que si Δ es un politopo reticular y \mathcal{F} es una cara de Δ (no necesariamente una faceta) podemos definir a $\sigma_{\mathcal{F}}$ como el cono en $\mathbb{N}_{\mathbb{R}}$ generado por las facetas normales n_F para todas las facetas F que contienen a \mathcal{F} . Entonces $\sigma_{\mathcal{F}}$ es un cono poliédrico racional fuertemente convexo en $\mathbb{N}_{\mathbb{R}}$ y el conjunto

$$\Sigma_{\Delta} := \{\sigma_{\mathcal{F}} \mid \mathcal{F} \text{ es una cara de } \Delta\}$$

es un abanico, llamado el abanico normal de Δ . Ésto da una variedad tórica denotada por $X_{\Delta} := X_{\Sigma_{\Delta}}$.

Sea $\Delta \subset M_{\mathbb{R}}$ un politopo reticular. Entonces su abanico normal Σ_{Δ} llena $\mathbb{N}_{\mathbb{R}}$ y entonces X_{Δ} es completo.

Δ es reflexivo sí y sólo si Δ^* es reflexivo y $(\Delta^*)^* = \Delta$. Si Δ es reflexivo entonces X_{Δ^*} es una variedad tórica completa.

Describiremos algunas hipersuperficies de Calabi-Yau:

Sea $\Delta \subset M_{\mathbb{R}}$ un politopo reflexivo. Por construcción una faceta F_i de Δ corresponde a un vector normal $n_i \in N$ que corresponde a un rayo v_i de Σ_{Δ} correspondiente a la coordenada homogénea w_i de X_{Δ} .

Para cualquier punto reticular $m \in \Delta \cap M$ podemos asignar el monomio

$$w^{[m]} := \prod_{i=1}^k w_i^{\langle m, n_i \rangle + 1}$$

Por reflexividad de Δ , los exponentes de w_i no todos son cero. Si dejamos fijos los a_m como coeficientes complejos y consideramos el polinomio $P := \sum_{m \in \Delta \cap M} a_m \cdot w^{[m]}$ y a la variedad X_P de X_{Δ} definida por $P = 0$ entonces se tiene la siguiente proposición.

Proposición: Sean Δ y P como se indica anteriormente con coeficientes elegidos como vectores en posición general. Entonces X_P es una variedad completa con haz canónico trivial.

En general tanto X_Δ como X_P tienen singularidades. De cualquier manera Σ_Δ podría ser refinada a un abanico Σ que daría lugar a una variedad tórica X_Σ con mejores propiedades. En particular la hipersuperficie $\check{X}_P \subset X_\Sigma$ definida por el mismo polinomio P desingulariza a X_P . Si $n = 4$ entonces \check{X}_P es una variedad suave y por la proposición anterior, ésta es una 3-variedad de Calabi-Yau .

En este caso resulta que el haz canónico trivial obtenido es la variedad de Calabi-Yau buscada que satisface las propiedades de la simetría especular.

1

 1

[K.Hory, S. Katz, A. Klemm, (Cap 5, Cap 6)]
 [V. Bouchard (Prop. 4.8, Prop 4.10)]
 [V. Batyrev].

Capítulo 2

Variedades tóricas

Las variedades tóricas son variedades algebraicas que generalizan tanto a los espacios afines \mathbb{A}^n como a los espacios proyectivos \mathbb{P}^n . Dado que aun siendo generalizaciones tienen una estructura simple éstas proveen ejemplos prácticos donde se puede desarrollar teoría de manera general sin volverla trivial.

Podríamos definir como variedad tórica aquella variedad algebraica irreducible que contiene un toro algebraico como un subconjunto abierto de Zariski y cuya acción en sí mismo se extiende a la variedad. Sin embargo algo que hace tan ricas e interesantes a las variedades tóricas es la estructura combinatoria que las acompaña y que en nuestro caso, es la manera en que las estudiaremos.

Tales las obtenemos a partir de abanicos, que son una colección de conos con las propiedades análogas a las que tienen los complejos simpliciales y como podrá verse las propiedades de la variedad tórica se leen de las del abanico.

2.1. Definiciones y construcciones.

2.1.1. Conos

Nuestro primer concepto son los conos, pero no los conos circulares, sino los que tienen caras planas formadas por la unión de 'las orillas'. En tres dimensiones podemos pensar en cosas tales como pirámides, con bases como triángulos, cuadriláteros, etc. esto es lo que le da el nombre de conos poliédricos.

Consideremos $A = \{u_1, \dots, u_\ell\}$ un conjunto finito de vectores en \mathbb{R}^n , el conjunto

$$\sigma = \{\lambda_1 u_1 + \dots + \lambda_\ell u_\ell \in \mathbb{R}^n \mid \lambda_1, \dots, \lambda_\ell \geq 0\},$$

es llamado un cono poliédrico y el conjunto de vectores A son llamados los generadores del cono σ .

En caso de tener $A = \emptyset$ se dice que $\sigma = \{0\}$. La *dimensión* del cono σ es la dimensión del espacio lineal más pequeño que lo contenga.

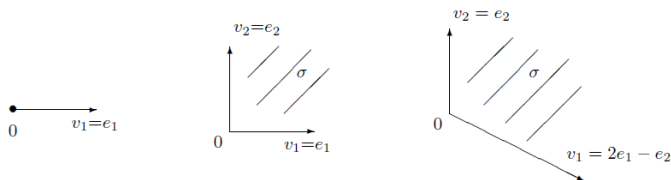


Figura 2.1: Ejemplos de Conos.

Para crear variedades tóricas se necesita un caso particular de conos, llamados racionales, para los cuales necesitamos hablar de retículas, que son subgrupos abelianos de espacios abelianos asumiendo que contienen el origen. Fijaremos a N una retícula de rango máximo; $N \cong \mathbb{Z}^n \subset \mathbb{R}^n$.

Definición 2.1. *Un cono σ en el espacio \mathbb{R}^n es un **cono racional** si todos los generadores u_i de σ están en N . Un cono es llamado **fuertemente convexo** si no contiene ninguna línea recta por el origen.*

Otro concepto fundamental para las variedades tóricas es el de cono dual asociado a un cono. Si $(\mathbb{R}^n)^*$ es el espacio dual de \mathbb{R}^n y $\langle \cdot, \cdot \rangle$ el apareamiento dual entonces para cada cono se le asocia su cono dual:

$$\check{\sigma} = \{u \in (\mathbb{R}^n)^* \mid \langle u, v \rangle \geq 0 \ \forall v \in \sigma\}.$$

Dada cualquier retícula N en \mathbb{R}^n se define su retícula dual $M = \text{Hom}_{\mathbb{Z}}(N; \mathbb{Z}) \cong \mathbb{Z}^n$ en $(\mathbb{R}^n)^*$ y se tiene la siguiente propiedad:

Observación 2.1. *Si σ es un cono racional entonces $\check{\sigma}$ es un cono racional (relativo a M). Si σ es un cono poliédrico convexo entonces $\check{\sigma}$ es un cono poliédrico convexo.*

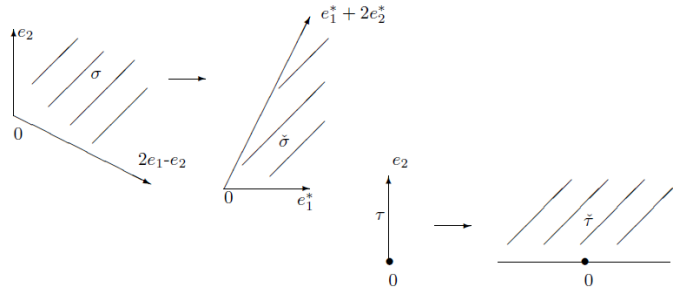


Figura 2.2: Conos y sus Duales

A pesar de que las primeras propiedades que tenemos se preservan por dualidad debemos notar que la propiedad de ser fuertemente convexo no se hereda para el cono dual. Aunque después podremos ver que tal propiedad aún cuando no se hereda es base fundamental para la creación de nuestras variedades.

Otro concepto importante es el de caras. Todo cono consta de caras y en particular, el mismo cono es cara de sí mismo. En un caso tridimensional o bidimensional el concepto de las caras de un cono es precisamente aquél que tenemos intuitivamente; 'la parte lisa de la figura'. Damos la definición general como sigue.

Definición 2.2. *Sea σ un cono y sea $\lambda \in \check{\sigma} \cap M$, entonces*

$$\tau = \sigma \cap \lambda^\perp = \{v \in \sigma \mid \langle \lambda, v \rangle = 0\}$$

se llama cara de σ y lo denotaremos como $\tau \prec \sigma$.

Cualquier cara del cono que no sea el mismo cono es una cara propia, las caras 1-dimensionales se llaman rayos y las caras de codimensión 1 son llamadas facetas. Debe notarse que la cantidad de caras de un cono es finita. Los rayos jugarán un papel importante para la variedad tórica que asociaremos, así que les daremos una notación particular. Denotaremos por ρ a las caras 1-dimensionales y por n_ρ al *elemento primitivo* de un rayo ρ que simplemente es el único generador de $\rho \cap N$. Así podemos notar que dado un cono σ éste es generado por los elementos primitivos n_ρ de sus rayos.

Además se cuenta también con una descripción del cono dual en términos de los duales de los generadores.

Proposición 2.2. *Dado σ un cono reticular generado por (v_1, \dots, v_r) , se tiene que $\check{\sigma} = \bigcap \check{\tau}_i$ donde τ_i es el rayo generado por el vector v_i .*

Demostración. :

Sea σ generado como cono por los vectores (v_1, \dots, v_r) . Si $u \in \check{\sigma}$ entonces $\langle u, v \rangle \geq 0 \forall v \in \sigma$, i.e. $\langle u, \sum_{j=1}^r \lambda_j v_j \rangle \geq 0 \forall \lambda_j \geq 0, j \in \{1, \dots, r\}$. En particular para los v de un solo sumando, de ahí que $\langle u, \lambda_j v_j \rangle \geq 0 \forall \lambda_j \geq 0$, i.e. $u \in \check{\tau}_i \forall j \in \{1, \dots, r\}$. Luego $u \in \bigcap \check{\tau}_i$.

Todas las implicaciones son un sí y sólo si, obteniendo la otra contención, implicando con eso la igualdad. □

Se tiene que las caras de un cono satisfacen la siguiente proposición.

Proposición 2.3. *Sea σ un cono poliédrico convexo racional, entonces las siguientes se satisfacen;*

- (i) *Toda cara τ es un cono poliédrico convexo racional.*
- (ii) *Toda intersección de caras de σ es una cara de σ .*
- (iii) *Toda cara de una cara es una cara.*

Demostración. :

(i) $\tau \prec \sigma \Rightarrow \exists \lambda \in \check{\sigma} \cap M$ t.q. $\tau = \lambda^\perp \cap \sigma$. Sea $\sigma = \langle v_1, \dots, v_r \rangle$ entonces $p \in \tau \Leftrightarrow p = \sum_{j=1}^r a_j v_j$, $a_j \geq 0$ y $\langle \lambda, p \rangle = 0 \Leftrightarrow \langle \lambda, \sum_{j=1}^r a_j v_j \rangle = 0 \Leftrightarrow \sum_{j=1}^r a_j \langle \lambda, v_j \rangle = 0 \Leftrightarrow \langle \lambda, v_j \rangle = 0 \forall j \in \{1, \dots, r\}$. Es decir, τ está generado por los v_j 's tales que $\langle \lambda, v_j \rangle = 0$.

(ii) Se deriva de la igualdad

$$\bigcap_i (\sigma \cap \lambda_i^\perp) = \sigma \cap \left(\sum_i \lambda_i \right)^\perp$$

con $\lambda_i \in \check{\sigma}$.

Para demostrarla consideramos lo siguiente: $p \in \bigcap_i (\sigma \cap \lambda_i^\perp) \Leftrightarrow p \in \sigma \cap \lambda_i^\perp \forall i \Leftrightarrow p \in \sigma$ y $p \in \lambda_i^\perp \forall i \Leftrightarrow p \in \sigma$ y $p \in \sigma$ y $\langle p, \sum_{j=1}^n \lambda_j \rangle = 0 \Leftrightarrow p \in \sigma$ y $p \in (\sum \lambda_j)^\perp \Leftrightarrow p \in \sigma \cap (\sum \lambda_j)^\perp$.

Entonces para caras dadas τ_1, \dots, τ_n de σ se tiene que $\bigcap_i^n \tau_i = \bigcap_i^n (\sigma \cap \lambda_i^\perp) = \sigma \cap (\sum_i^n \lambda_i)^\perp = \sigma \cap \lambda^\perp = \tau \prec \sigma$.

(iii) Si $\tau = \sigma \cap \lambda^\perp$ y $\gamma = \tau \cap \lambda'^\perp$ con $\lambda \in \check{\sigma}$ y $\lambda' \in \check{\tau}$ entonces para un $p \gg 0$ se tiene que $\lambda' + p\lambda \in \check{\sigma}$ y $\gamma = (\lambda' + p\lambda)^\perp$.

□

Observemos que de ahí podemos sacar las siguientes propiedades: si $\tau \prec \sigma$ entonces $\check{\sigma} \subset \check{\tau}$, si $\sigma = \sigma_1 + \sigma_2$, entonces se satisface $\check{\sigma} = \check{\sigma}_1 \cap \check{\sigma}_2$ y si $\tau = \sigma \cap \lambda^\perp$ (con $\lambda \in \check{\sigma}$) es una cara de σ , entonces $\check{\tau} = \check{\sigma} + \mathbb{R}_{\geq 0}(-\lambda)$.

Escribiremos la prueba para la última propiedad a fin de exhibir lo conveniente de la dualidad:

Como los dos lados de la igualdad son conos poliédricos convexos basta mostrar que sus duales son iguales. Así $(\check{\check{\tau}}) = \tau$ y de la otra parte tenemos que $(\check{\check{\sigma} + \mathbb{R}_{\geq 0}(-\lambda)}) = \sigma \cap (-\lambda) = \sigma \cap \lambda^\perp = \tau$. La segunda igualdad se sigue de lo siguiente: Si $v \in \sigma \cap (-\lambda)$ entonces $\langle v, -\lambda \rangle \geq 0$ pues $v \in (-\lambda)$ y $\langle v, \lambda \rangle \geq 0$ pues $v \in \sigma$ y $\lambda \in \check{\sigma}$, entonces $\langle v, \lambda \rangle = 0$. La otra igualdad se trata de manera similar.

Ahora para ilustrar las tres propiedades podemos ver los siguientes ejemplos:

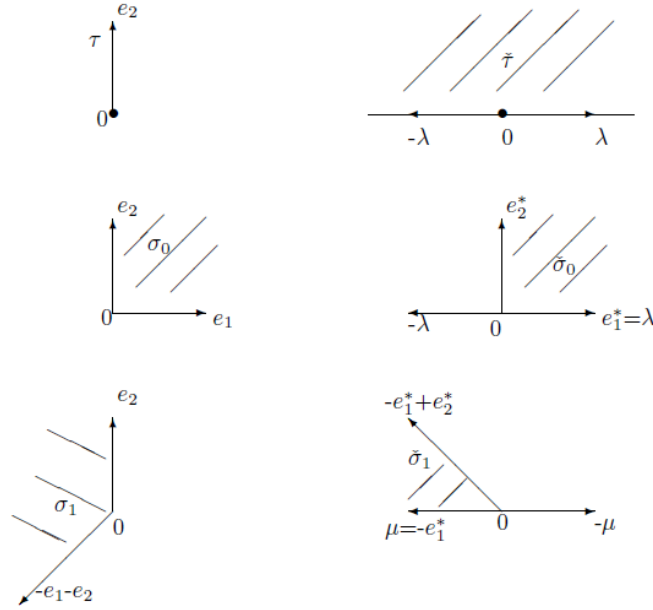


Figura 2.3: Conos y sus duales

Dentro de la fig. 3.3, en el primer ejemplo vemos que τ es una cara de σ_0 y cuando vemos los duales de cada uno notamos que $\tilde{\sigma}_0 \subset \tilde{\tau}$

Para ilustrar la segunda propiedad, consideremos que σ_1 puede ser visto como la suma de dos conos, $\sigma_3 = \langle e_2 \rangle$ y $\sigma_4 = \langle -e_2 - e_2 \rangle$. Los duales de σ_3 y σ_4 son los semiplanos (en \mathbb{R}^2) generados por $\langle \mu = -e_1^*, -\mu = e_1^* \rangle$ y $\langle -e_1^* + e_2^*, e_1^* - e_2^* \rangle$ respectivamente, al intersectarlos nos queda como vemos $\tilde{\sigma}_1$

Ilustramos la última propiedad con la figura 3.4. Aquí el vector $v = e_1^* + e_2^*$ satisface $v \in \tilde{\sigma}_0$ y $\{0\}$ es una cara de σ_0 pues $\{0\} = \sigma_0 \cap v^\perp$, que satisface $\{\check{0}\} = (\mathbb{R}^2)^* = \tilde{\sigma}_0 + \mathbb{R}_{\geq 0}(-v)$.

Podemos también hacer una correspondencia 1-1 entre las caras de un cono σ y las de su dual $\check{\sigma}$ pero para ello necesitamos introducir una

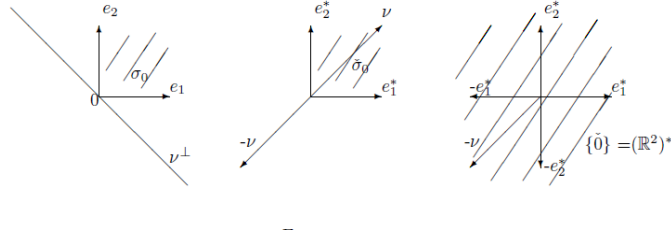


Figura 2.4: $\check{\tau} = \check{\sigma} + \mathbb{R}_{\geq 0}(-\lambda)$

definición y mencionar otra propiedad.

El *interior relativo* de un cono σ es el interior topológico del espacio $\mathbb{R} \cdot \sigma$ generado por σ . Un punto en el interior relativo se obtiene tomando combinaciones lineales estrictamente positivas de $n = \dim(\sigma)$ vectores linealmente independientes entre los generadores de σ . Si además σ es un cono racional entonces tales vectores pueden ser elementos de la retícula. Además se tiene que para cualquier vector $v \in \sigma$, existe una cara $\tau \prec \sigma$ tal que v está en el interior relativo de τ .

Establecemos ahora la propiedad mencionada acerca de las correspondencias de las caras de σ y $\check{\sigma}$:

Propiedad 1.1 *Si $\tau \prec \sigma$, entonces $\check{\sigma} \cap \tau^\perp$ es una cara de $\check{\sigma}$ con $\dim(\tau) + \dim(\check{\sigma} \cap \tau^\perp) = n$, dando así una correspondencia 1-1 (que revierte orden) entre las caras de σ y caras de $\check{\sigma}$.*

Demostración. Las caras de $\check{\sigma}$ son conos $\check{\sigma} \cap v^\perp$ con $v \in (\check{\sigma})^\circ \cap N = \sigma \cap N$. Si τ es el cono conteniendo v en su interior relativo, entonces $\check{\sigma} \cap v^\perp = \check{\sigma} \cap (\check{\tau} \cap v^\perp) = \check{\sigma} \cap \tau^\perp$, entonces cada cara de $\check{\sigma}$ es de el tipo que se indica.

La correspondencia $\tau \mapsto \tau^* = \check{\sigma} \cap \tau^\perp$ invierte orden y se tiene que $\tau \subset (\tau^*)^*$, entonces $\tau^* = ((\tau^*)^*)^*$ y así la correspondencia es biyectiva.

□

Aquí podemos retomar una proposición anterior diciendo un poco más sobre el cono dual.

Proposición 2.4. *Si $\sigma \subset \mathbb{R}^n$ es un cono poliédrico racional fuertemente convexo, entonces su dual $\check{\sigma} \subset \mathbb{R}^n$ es un cono poliédrico racional de dimensión n .*

Para demostrar esta proposición, basta tomar $\{0\} \prec \sigma$, así $\{0\}^\perp = \mathbb{R}^{n*}$ y entonces $\mathbb{R}^{n*} \cap \check{\sigma} = \check{\sigma}$ es una cara de $\check{\sigma}$ de dimensión n .

Estas propiedades en realidad juegan un papel importante cuando se quieren demostrar características de las variedades relacionadas a los conos, pues es ésta la estructura que las define y además nos pueden ayudar a visualizar geoméricamente lo que sucede entre los conos, sus caras y sus respectivos duales.

La siguiente sección nos ayuda a obtener la estructura base que necesitamos para generar las variedades tóricas.

2.1.2. Monoïdes

Los conos tienen una estructura asociada llamada monoïde, digamos S , que es un semigrupo conmutativo con elemento cero que además satisface la ley de cancelación:

$$s + t = s' + t \Rightarrow s = s' \text{ para cualesquier } s, s', t \in S.$$

Dado un cono σ , $\sigma \cap N$ es un monoïde. Se dice que un monoïde S es finitamente generado si existen elementos $a_1, \dots, a_k \in S$ tales que para cualquier $s \in S$

$$s = \lambda_1 a_1 + \dots + \lambda_k a_k \text{ con } \lambda_i \in \mathbb{Z}_{\geq 0}.$$

Los a_1, \dots, a_k son los *generadores* del monoïde.

El siguiente lema llamado el lema de Gordan, nos asegura que cualquier monoïde asociado a uno de nuestros conos es finitamente generado.

Lema 2.5 (Gordan). *Si σ es un cono reticular poliédrico, entonces $\sigma \cap N$ es un monoïde finitamente generado.*

Demostración. :

Sea $A = v_1, \dots, v_r$ el conjunto de generadores que definen el cono σ . Cada uno de los v_i es un elemento de $\sigma \cap N$ por definición. Considérese el conjunto $K = \sum t_i v_i$, $0 \leq t_i \leq 1$. Como K es compacto y N es discreto entonces el conjunto $K \cap N$ es finito. Afirmamos que tal intersección genera a $\sigma \cap N$. Dado $v \in \sigma \cap N$, éste se puede escribir como $v = \sum (n_i + r_i) v_i$ donde $n_i \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ y $0 \leq r_i \leq 1$. Así $v = \sum n_i v_i + \sum r_i v_i$. Como cada v_i y la suma $\sum r_i v_i$ pertenecen a $K \cap N$, entonces $K \cap N$ genera a $\sigma \cap N$. □

Como el lema se puede aplicar también al cono reticular poliédrico $\check{\sigma}$, denotaremos por S_σ al monoide $\check{\sigma} \cap M$.

Ya que las caras por sí mismas son también conos, se tiene un monoide asociado y existe una buena descripción de éstos en términos del monoide del cono que las contienen.

Proposición 2.6. *Sea σ un cono racional poliédrico convexo y $\tau = \sigma \cap \lambda^\perp$ una cara de σ , con $\lambda \in S_\sigma = \check{\sigma} \cap M$, entonces*

$$S_\tau = S_\sigma + \mathbb{Z}_{\geq 0}(-\lambda).$$

Demostración. :

Para demostrar $S_\tau = S_\sigma + \mathbb{Z}_{\geq 0}(-\lambda)$ recordemos que $S_\tau = \check{\tau} \cap M$ y $S_\sigma = \check{\sigma} \cap M$, así hay que demostrar que $\check{\tau} \cap M = \check{\sigma} \cap M + \mathbb{Z}_{\geq 0}(-\lambda)$. De las propiedades antes mencionadas tenemos que $\check{\tau} = \check{\sigma} + \mathbb{R}_{\geq 0}(-\lambda)$ y la igualdad se reduce a $[\check{\sigma} + \mathbb{R}_{\geq 0}(-\lambda)] \cap M = \check{\sigma} \cap M + \mathbb{Z}_{\geq 0}(-\lambda)$, lo cual se sigue dado que $\lambda \in \check{\sigma} \cap M$. □

Algo inmediato de notar es el hecho de que entre más pequeño es el cono, más grande es el semigrupo asociado al cono dual, lo cual no es de sorprender pues el cono dual crece conforme el cono decrece.

2.1.3. Variedades tóricas afines

Como comentamos pudimos haber empezado la definición de una variedad tórica como una variedad irreducible que contiene un toro algebraico

como subconjunto abierto de Zariski cuya acción sobre sí misma se extiende a toda la variedad. En realidad también se podría decir que una variedad tórica es dar un toro algebraico y algunas cosas extra, que para el caso afín, esas cosas extra sería determinar cuáles polinomios de Laurent pueden ser definidos sobre la variedad.

Para tratar todo ello comenzamos con algunas definiciones. Denotaremos por $\mathbb{C}[z, z^{-1}] = \mathbb{C}[z_1, z_1^{-1}, \dots, z_n, z_n^{-1}]$ al anillo de polinomios de Laurent. Un monomio de Laurent se escribe como $\lambda \cdot z^a = \lambda z_1^{a_1} \cdots z_n^{a_n}$, con $\lambda \in \mathbb{C}^*$ y $a = (a_1, \dots, a_n) \in \mathbb{Z}^n$.

Uno de los aspectos importantes que intervienen en la definición de variedad tórica es el hecho de que el morfismo

$$\begin{aligned} \theta : \mathbb{Z}^n &\rightarrow \mathbb{C}[z, z^{-1}] \\ a = (a_1, \dots, a_n) &\mapsto z^a = z_1^{a_1} \cdots z_n^{a_n} \end{aligned}$$

es un isomorfismo entre el grupo aditivo \mathbb{Z}^n y el grupo multiplicativo de monomios mónicos de Laurent. Es aquí donde podemos ver que los puntos de la retícula que caen en el cono dual se relacionan con los monomios de Laurent que se definirán sobre la variedad.

Dado un polinomio de Laurent f , se define el *soporte* de $f = \sum_{finita} \lambda_a z^a$ por

$$\text{supp}(f) = \{a \in \mathbb{Z}^n \mid \lambda_a \neq 0\}.$$

Tenemos la siguiente proposición que se sigue inmediatamente del lema de Gordan.

Proposición 2.7. *Para un cono racional σ , el anillo*

$$R_\sigma = \{f \in \mathbb{C}[z, z^{-1}] \mid \text{supp}(f) \subset \check{\sigma} \cap M\}$$

es una álgebra monomial finitamente generada (i.e. es una \mathbb{C} -álgebra generada por monomios de Laurent).

Ahora bien, dado cualquier anillo A , podemos considerar $\text{Spec}(A)$, el conjunto de ideales primos contenidos en A . Estaremos hablando más que de los ideales primos, de los ideales maximales y seguiremos utilizando la misma

notación en vez de la correspondiente $\text{Specmax}(A)$ lo que nos permite dar la siguiente definición.

Definición 2.3. *La variedad tórica afín correspondiente a un cono poliédrico racional fuertemente convexo es la variedad $X_\sigma := \text{Spec}(R_\sigma)$.*

Sabemos que R_σ puede representarse como un anillo coordinado de diferentes maneras (todas ellas homomorfas) de la forma $R_\sigma = \mathbb{C}[\xi]/I_\sigma$. Para determinar una representación consideremos a_1, \dots, a_k un sistema de generadores de S_σ , donde cada uno de los a_i se escribe como $a_i = (a_{1,i}, \dots, a_{n,i}) \in \check{\sigma} \cap M$. Por el isomorfismo θ dado anteriormente, obtenemos monomios de Laurent $u_i = \theta(z) = z^{a_i} = z_1^{a_{1,i}} \dots z_n^{a_{n,i}} \in \mathbb{C}[z, z^{-1}]$ para $i = 1, \dots, k$. La \mathbb{C} -álgebra $R_\sigma = \mathbb{C}[u_1, \dots, u_k]$ se representa como:

$$R_\sigma = \mathbb{C}[\xi_1, \dots, \xi_k]/I_\sigma$$

Para determinar I_σ escribimos las relaciones entre los generadores de S_σ

$$(*) \quad \sum_{j=1}^k \nu_j a_i = \sum_{j=1}^k \mu_j a_i \quad \mu_j, \nu_j \in \mathbb{Z}_{\geq 0},$$

obteniendo las relaciones monomiales

$$(z^{a_1})^{\nu_1} \dots (z^{a_k})^{\nu_k} = (z^{a_1})^{\mu_1} \dots (z^{a_k})^{\mu_k}$$

dando las relaciones

$$(u_1)^{\nu_1} \dots (u_k)^{\nu_k} = (u_1)^{\mu_1} \dots (u_k)^{\mu_k}$$

entre las coordenadas, lo que nos da las relaciones binomiales

$$(**) \quad (\xi_1)^{\nu_1} \dots (\xi_k)^{\nu_k} = (\xi_1)^{\mu_1} \dots (\xi_k)^{\mu_k}$$

en $\mathbb{C}[\xi_1, \dots, \xi_k]$ y son las que generan el ideal I_σ .

Esto nos lleva al siguiente teorema.

Teorema 2.8. *Sea σ un cono racional en \mathbb{R}^n y $A = (a_1, \dots, a_k)$ un sistema de generadores de S_σ , la variedad tórica correspondiente X_σ se representa por la variedad tórica afín $V(I_\sigma) \subset \mathbb{C}^k$ donde I_σ es un ideal de $\mathbb{C}[\xi_1, \dots, \xi_k]$ generado por una cantidad finita de binomios de la forma $(**)$ que corresponden a las relaciones $(*)$ entre elementos de A .*

Para la demostración de este teorema necesitamos algunos lemas y teoremas que involucran algunos conceptos técnicos como por ejemplo las **relaciones lineales positivas**. Para cualquier conjunto $X = \{a_1, \dots, a_r\} \subset \mathbb{Z}^n$ al vector $(\lambda, \mu) \in (\mathbb{R}_{\geq 0})^r \times (\mathbb{R}_{\geq 0})^r$ se le dice que es una relación lineal positiva de X si $\sum_{i=1}^r \lambda_i a_i = \sum_{i=1}^r \mu_i a_i$. Se denota por $\text{poslin}X$ al conjunto de todas las relaciones lineales positivas de X .

Se define como conjunto poliédrico a toda intersección finita de semi-espacios cerrados en \mathbb{R}^n . Hay un teorema que indica que todo politopo es un conjunto poliédrico acotado y todo conjunto poliédrico acotado es un politopo. [[6] *G. Ewald. II, 1.4, 1.5*]. Como corolario del mismo se tiene que cualquier subespacio afín L de \mathbb{R}^n interseca cualquier conjunto poliédrico (politopo) dado P , en un conjunto poliédrico (politopo).

Ahora comenzamos con el lema que necesitamos para nuestro teorema.

Lema 2.9. (a) $\text{poslin}X$ es un cono racional en \mathbb{R}^{2r} .

(b) $\mathbb{Z}^{2r} \cap \text{poslin}X$ es un monoide finitamente generado en \mathbb{R}^{2r} .

Demostración (del lema). :

Si $\alpha, \beta \in \text{poslin}X$ entonces $\alpha + \beta \in \text{poslin}X$ y también se tiene que $t\alpha \in \text{poslin}X$ para todo $t \in \mathbb{R}_{\geq 0}$. Entonces $\text{poslin}X$ es un cono en $(\mathbb{R})^{2r}$. Su espacio vectorial generado V se define como el conjunto de elementos $v_1 + v_2$ donde $v_1 \in \text{poslin}X$ y $v_2 \in -\text{poslin}X$ (el negativo de $\text{poslin}X$), y entonces $\text{poslin}X = V \cap \mathbb{R}_{\geq 0}^{2r}$.

Como $\mathbb{R}_{\geq 0}^{2r}$ es una intersección de semiespacios, es entonces un cono poliédrico en \mathbb{R}^{2r} por el lema que mencionamos anteriormente. Claramente tiene generadores racionales al ser $X \subset \mathbb{Z}^n$ lo que lo convierte en un cono racional.

El inciso (b) se sigue del lema de Gordan. □

Demostración (del teorema). :

Por el inciso (b) del lema, el monoide de todas las relaciones lineales positivas (*) es finitamente generado. Basta mostrar que cada elemento de I_σ es una suma de binomios del tipo anterior. Dado un polinomio

$f = \sum \lambda_\nu \xi^\nu$, $f(u) = \sum \lambda_\nu u^\nu = \sum \lambda_\nu z^{\nu \cdot A}$, así para todo $a \in \sigma \cap \mathbb{Z}^n$, el coeficiente c_a de z^a es $\sum_{\nu; \nu \cdot A = a} \lambda_\nu$. Ahora bien $f \in I_A$ sí y sólo si todas las c_a 's son cero. En tal caso, si $\lambda_\nu \neq 0$ para algún multi-índice $\nu \in \mathbb{Z}_{\geq 0}^k$, existe otro, digamos $\mu \neq \nu$, que satisface $\nu \cdot A = \mu \cdot A$ y $\lambda_\mu \neq 0$. El binomio correspondiente $\lambda_\nu (\xi^\nu - \xi^\mu)$ está en I_A . Extrayéndolo de f tenemos un polinomio en I_A con una cantidad de términos estrictamente menor que los de f . La demostración se sigue entonces por inducción. \square

Justo para ejemplificar el teorema consideremos el cono σ generado por los vectores $2e_1 - e_2$ y e_2 .

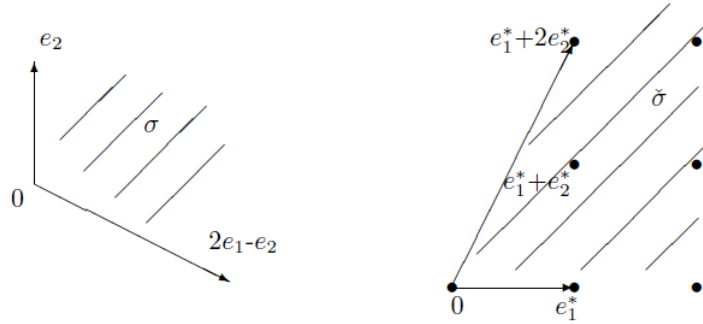


Figura 2.5: Conos y sus puntos reticulares duales

Se tiene que $S_\sigma = \check{\sigma} \cap M$ está generado por los tres vectores $(e_1^*, e_1^* + e_2^*, e_1^* + 2e_2^*) = (a_1, a_2, a_3)$. Por el isomorfismo θ éstos corresponden a monomios mónicos de Laurent $u_1 = z_1$, $u_2 = z_1 z_2$ y $u_3 = z_1 z_2^2$. La \mathbb{C} -álgebra R_σ puede representarse como

$$R_\sigma = \mathbb{C}\{u_1, u_2, u_3\} = \mathbb{C}[\xi_1, \xi_2, \xi_3]/I_\sigma$$

donde la relación $a_1 + a_3 = 2a_2$ da la relación $u_1 u_3 = u_2^2$ entre coordenadas. El ideal I_σ es generado por la relación binomial $\xi_1 \xi_3 = \xi_2^2$ y la variedad tórica afín correspondiente al cono σ está representado en \mathbb{C}^3 como el cono cuadrático

$$X_\sigma = V(I_\sigma) = \{x = (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{C}^3 : x_1 x_3 = x_2^2\}.$$

Ahora vamos a considerar el siguiente ejemplo, que es en principio muy básico. Sea $\sigma = 0$, el cono cero. Su cono dual es $\check{\sigma} = (\mathbb{R}^n)^*$. No es difícil

ver que los siguientes conjuntos forman (cada uno de ellos) un sistema de generadores de S_σ ;

$$A_1 = (e_1^*, \dots, e_n^*, -e_1^*, \dots, -e_n^*) \text{ y } A_2 = (e_1^*, \dots, e_n^*, -(e_1^* + \dots + e_n^*)).$$

Para el primer sistema de generadores la correspondiente \mathbb{C} -álgebra monomial es

$$\mathbb{C}[z_1, \dots, z_n, z_1^{-1}, \dots, z_n^{-1}] = \mathbb{C}[\xi_1, \dots, \xi_{2n}]/I_\sigma$$

donde $I_\sigma = \mathbb{C}[\xi](\xi_1 \xi_{n+1} - 1) + \dots + \mathbb{C}[\xi](\xi_n \xi_{2n+1} - 1)$ de ahí que $X_\sigma = V((\xi_1 \xi_{n+1} - 1), \dots, (\xi_n \xi_{2n+1} - 1))$.

Para $n = 1$, la variedad que se obtiene es una hipérbola compleja cuyas asíntotas son los rayos $\xi_1 = 0$ y $\xi_2 = 0$. Se puede proyectar biyectivamente sobre el rayo $\xi_2 = 0$ y la imagen es \mathbb{C}^* .

De manera general podemos ver que X_σ es homeomorfa al toro $\mathbb{T} = (\mathbb{C}^*)^n$ usando las proyecciones sobre las primeras coordenadas $\mathbb{C}^{2n} \rightarrow \mathbb{C}^n$.

Con el segundo conjunto de generadores A_2 , $R_\sigma = \mathbb{C}[\xi_1, \dots, \xi_n, \xi_{n+1}]/I_\sigma$ donde $I_\sigma = \mathbb{C}[\xi](\xi_1 \cdots \xi_n \xi_{n+1} - 1)$ obteniendo así otra representación de X_σ . homeomorfa a \mathbb{T} pero en \mathbb{C}^{n+1} .

Hay que hacer notar que \mathbb{T} contiene al toro topológico como $\mathbb{T} \cong (S^1)^n \times x(\mathbb{R}_{\geq 0})^n$ y que \mathbb{T} es un subconjunto cerrado de \mathbb{C}^{2n} pero como subespacio de \mathbb{C}^n no es cerrado.

Esto se puede ver de manera general con la siguiente proposición.

Proposición 2.10. *Sea σ un cono racional en \mathbb{R}^n . Entonces la variedad tórica afín X_σ contiene al toro $T = (\mathbb{C}^*)^n$ como un subconjunto abierto denso de Zariski.*

Demostración. Sea (a_1, \dots, a_k) un sistema de generadores para el monoide S_σ y sea $V(I_\sigma) \subset \mathbb{C}^k$ una representación de X_σ . Con las coordenadas de \mathbb{R}^n , cada uno de los a_i se escribe como $a_i = (a_i^1, \dots, a_i^n)$ donde $a_i^j \in \mathbb{Z}$ y $t \in T$ se escribe como $t = (t_1, \dots, t_n)$ con $t_j \in \mathbb{C}^*$. El encaje $h : T \hookrightarrow X_\sigma$ está dado por:

$t = (t_1, \dots, t_n) \mapsto (t^{a_1}, \dots, t^{a_k}) \in V(I_\sigma) \cap (\mathbb{C}^*)^k$ donde $t^{a_i} = t_1^{a_i^1} \dots t_n^{a_i^n} \in \mathbb{C}^*$.

Veamos que h es una biyección de $(\mathbb{C}^*)^n$ a $X_\sigma \cap (\mathbb{C}^*)^k$. Como $h(t)$ satisface las relaciones binomiales se sigue que $h(t) \in X_\sigma \cap (\mathbb{C}^*)^k$.

Que h es inyectiva: sea $a \in S_\sigma$ tal que todos los puntos $a + e_i^*$ caen en S_σ , con los e_i^* base de $(\mathbb{R})^*$. Los monomios de Laurent $z^a = f_0(u)$, $z^{a+e_i^*} = f_i(u)$ están en $R_\sigma = \mathbb{C}[u] \subset \mathbb{C}[z, z^{-1}]$. Sea $h(t) = x$ un punto en $X_\sigma \cap (\mathbb{C}^*)^k$, entonces $f_i(h(t)) = t_i t^a = t_i f_0(h(t))$ y los t_i están determinados por $t_i = f_i(h(t))/f_0(h(t))$.

Que h es suprayectiva: cualquier punto $x \in X_\sigma \cap (\mathbb{C}^*)^k$ se puede escribir como

$$x = h(f_1(x)/f_0(x), \dots, f_n(x)/f_0(x))$$

pues los f_i no son cero en el punto x . □

Haciendo referencia al ejemplo de la Fig. 3.5, el encaje está dado por

$$(t_1, t_2) \mapsto (t_1, t_1 t_2, t_1 t_2^2) \in V(I) \cap (\mathbb{C}^*)^3$$

Continuando con algunas propiedades, notemos que por la proposición 3.10 si σ es un cono reticular en \mathbb{R}^n entonces $\dim_{\mathbb{C}} X_\sigma = n$.

Veamos el siguiente ejemplo:



Figura 2.6: $X_\sigma = \mathbb{C}^2$

Aquí S_σ es generado por (e_1^*, e_2^*) , $R_\sigma = \mathbb{C}[\xi_1, \xi_2]$, entonces $I_\sigma = \{0\}$ y X_σ es \mathbb{C}^2 . El mismo resultado se obtiene si consideramos el caso general para σ

generado por una base de la retícula N .

Vamos a tomar ahora un ejemplo menos obvio. Tomando $\tau \in \mathbb{R}^2$ como se muestra en la figura:

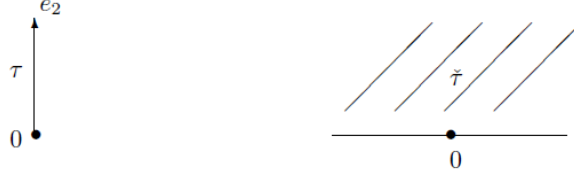


Figura 2.7: $X_\sigma = \mathbb{C}_{\xi_1}^* \times \mathbb{C}_{\xi_2}$

En este caso S_τ es generado por $(e_1^*, -e_1^*, e_2^*)$ y $R_\tau = \mathbb{C}[u_1, u_2, u_3]$ con $u_2 = u_1^{-1}$. De ahí se puede obtener $R_\tau = \mathbb{C}[\xi_1, \xi_2, \xi_3]/(\xi_1\xi_2 - 1)$ y X_τ es $\mathbb{C}_{\xi_1}^* \times \mathbb{C}_{\xi_2}$.

Otros ejemplos son: Dado $\sigma \in \mathbb{R}^3$ un cono generado por e_1, e_2, e_3 y $a_4 = e_1 - e_2 + e_3$, se tiene que S_σ está generado por $e_1^*, e_3^*, e_1^* + e_2^*$ y $e_2^* + e_3^*$, y

$$R_\sigma = \mathbb{C}\{u_1, u_3, u_1u_2, u_2u_3\} = \mathbb{C}[\xi_1, \xi_2, \xi_3, \xi_4]/I_\sigma$$

donde I_σ está generado por $\xi_1\xi_4 = \xi_2\xi_3$. La variedad tórica X_σ es una hipersuperficie en \mathbb{C}^4 definida por $x_1x_4 = x_2x_3$, un cono sobre una cuádrica.

El último ejemplo será más general pero sencillo. Si σ es el cono en \mathbb{R}^n generado por e_1, \dots, e_p con $p \leq n$, entonces S_σ está generado por $(e_1^*, \dots, e_p^*, e_{p+1}^*, -e_{p+1}^*, \dots, e_n^*, -e_n^*)$. De ahí se sigue que

$$R_\sigma = \mathbb{C}[z_1, \dots, z_p, z_{p+1}, z_{p+1}^{-1}, \dots, z_n, z_n^{-1}]$$

y así $X_\sigma = \mathbb{C}^p \times (\mathbb{C}^*)^{n-p}$. El mismo resultado se obtiene si σ es generado por p vectores que sean parte de una base de la retícula N .

La manera en que los generadores $\mathbf{m}_1, \dots, \mathbf{m}_l$ de S_σ generan X_σ lo vemos considerando el morfismo:

$$\begin{aligned} \varphi: (\mathbb{C}^*)^n &\rightarrow \mathbb{C}^l \\ \varphi(t_1, \dots, t_n) &= (\mathbf{t}^{\mathbf{m}_1}(t_1, \dots, t_n), \dots, \mathbf{t}^{\mathbf{m}_l}(t_1, \dots, t_n)) \end{aligned}$$

donde $\mathbf{t}^{\mathbf{m}^j}(t_1, \dots, t_n) = t_1^{m_1^j} \cdots t_n^{m_n^j}$. La cerradura de Zariski de este morfismo es precisamente la variedad X_σ .

Se tiene que $(\mathbb{C}^*)^n \rightarrow X_\sigma$ bajo φ es una inclusión, que $\mathbf{t}^{\mathbf{m}^i}$ se extiende a la función $U_\sigma \rightarrow \mathbb{C}$ dada por la proyección de $U_\sigma \subset \mathbb{C}^l$ en la i -ésima coordenada, de ahí que $\mathbf{t}^{\mathbf{m}^i}$ esté definida en toda U_σ . Además cualquier elemento \mathbf{m} de $\check{\sigma} \cap \mathbb{Z}^n$ se expresa como combinación entera no negativa de los \mathbf{m}_i , con lo cual $\mathbf{t}^{\mathbf{m}}$ se extiende a una función en U_σ , siendo U_σ la variedad más pequeña donde se pueden definir $\mathbf{t}^{\mathbf{m}}$ por ser la cerradura de Zariski.

Resulta ser que de esta manera la variedad tórica asociada es normal si σ es un cono racional poliédrico fuertemente convexo. Más aún si $\mathbf{m}_1, \dots, \mathbf{m}_l$ son los generadores de S_σ para un cono con tales propiedades, usando los $\mathbf{t}^{\mathbf{m}^i}$ se obtiene un morfismo como antes:

$$(\mathbb{C}^*)^n \rightarrow \mathbb{C}^s$$

y bajo esas condiciones; el siguiente teorema.

Teorema 2.11. *La cerradura de Zariski de la imagen del morfismo es la variedad tórica afín normal X_σ determinada por σ y \mathbb{Z}^n sí y sólo si $\check{\sigma} \cap \mathbb{Z}^n$ es generado sobre $\mathbb{Z}_{\geq 0}$ por los $\mathbf{m}_1, \dots, \mathbf{m}_l$.*

Así las variedades tóricas afines son normales (sus anillos locales son enteramente cerrados en sus campos de fracciones) cuando se utilizan todos los puntos reticulares en el cono dual.

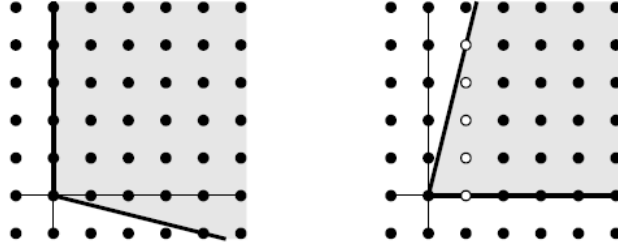
Para ejemplificar lo que significa la normalidad en términos de las retículas tomaremos el ejemplo de la figura 3.8 en el cual los generadores de $\check{\sigma} \cap \mathbb{Z}^2$ son $\mathbf{m}_i = (1, i)$ para $i = 0, \dots, 4$.

Se sigue que $U_\sigma \subset \mathbb{C}^5$ es la cerradura de Zariski de la imagen de la parametrización $(\mathbb{C}^*)^2 \rightarrow \mathbb{C}^5$ definido por

$$(*) \quad (t, u) \mapsto (t, tu, tu^2, tu^3, tu^4).$$

Veamos qué sucede si sólo se usan algunos de estos monomios.

Primero supongamos que utilizamos únicamente $\mathbf{m}_0 = (1, 0)$ y $\mathbf{m}_4 = (1, 4)$. Sobre $\mathbb{R}_{\geq 0}$, estos dos generan $\check{\sigma}$ y nos dan el morfismo

Figura 2.8: Un cono σ y su dual.

$(\mathbb{C}^*)^2 \rightarrow \mathbb{C}^2$ definido por $(t, u) \mapsto (t, tu^4)$. La cerradura de Zariski es \mathbb{C}^2 pero es $4 - 1$. Esto sucede porque \mathbf{m}_0 y \mathbf{m}_4 no generan \mathbb{Z}^2 sobre \mathbb{Z} . El punto es que la variedad tórica incluye la información del cono y de la retícula. Entonces estos generadores no funcionan pues cambian la retícula aún cuando generan el cono dual.

Ahora tomemos $\mathbf{m}_0, \mathbf{m}_1$ y \mathbf{m}_4 . Son generadores del cono dual sobre $\mathbb{R}_{\geq 0}$ y dan el morfismo $(\mathbb{C}^*)^2 \rightarrow \mathbb{C}^3$ definido por $(t, u) \mapsto (t, tu, tu^4)$. Este morfismo es $1 - 1$. Sin embargo la cerradura de Zariski de la imagen de este morfismo es $y^4 = x^3z$. Se puede apreciar que su zona singular es la línea $x = y = 0$, con lo cual esta variedad no es normal (la zona singular de toda variedad normal tiene al menos codimensión 2).

En el caso de la variedad U_σ determinada por el cono σ y retícula \mathbb{Z}^2 generada como la cerradura de Zariski de $(*)$ se utilizan todos los \mathbf{m}_i , que van de $(\mathbb{C}^*)^2$ en \mathbb{C}^5 , mientras que en los casos anteriores sólo se proyecta la imagen a \mathbb{C}^2 y \mathbb{C}^3 respectivamente. Éstas no son las proyecciones a la variedad tórica normal asociada a σ y \mathbb{Z}^2 ya que en el primer caso se mantiene el cono dual pero se cambia la retícula y en el segundo se mantiene la retícula y el cono dual pero se pierde normalidad.

A las variedades tóricas afines podríamos pensarlas como las piezas básicas de las variedades tóricas. Cualesquier dos variedades tóricas que contengan el mismo toro algebraico pueden 'pegarse' para formar una variedad más grande. Éste es el caso de las variedades tóricas cuya construcción necesita que hablemos de abanicos.

2.1.4. Abanicos y variedades tóricas

Como se mencionó hay que pegar las variedades tóricas afines, y la manera de definir las variedades tóricas asociadas a los objetos llamados abanicos será creándolas como variedades abstractas. Damos así la definición de un abanico.

Definición 2.4. *Un abanico Σ en \mathbb{R}^n es una colección finita de conos tales que:*

1. *Todo cono de Σ es un cono racional, poliédrico y fuertemente convexo en \mathbb{R}^n .*
2. *Si $\sigma \in \Sigma$ y $\tau \prec \sigma$, entonces $\tau \in \Sigma$.*
3. *Si $\tau, \sigma \in \Sigma$, entonces $\sigma \cap \tau$ es una cara común.*

Es inevitable pensar en la similitud que tiene la definición con la que tienen los simplejos simpliciales pero hay que recordar que los conos no son acotados, mientras que los complejos simpliciales son formados por r_i -simplejos, que son la envoltura convexa de un conjunto de r_i puntos en posición general con $r_i, i \in \mathbb{N}$.

Mostremos entonces algunos ejemplos de abanicos:

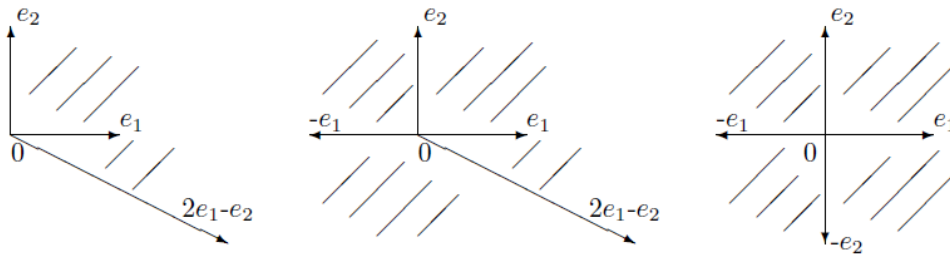


Figura 2.9: Abanicos

De manera inmediata se da la siguiente definición.

Definición 2.5. *Dado un abanico Σ en \mathbb{R}^n , X_Σ es la variedad obtenida de las variedades afines X_σ , $\sigma \in \Sigma$, pegando X_σ y X_τ a lo largo de su subconjunto abierto común $X_{\sigma \cap \tau}$ para cualesquier $\tau, \sigma \in \Sigma$.*

Recordemos que cualquier cono tiene el conjunto $\{0\}$ como una de sus caras, y que además el toro afín correspondiente a $\{0\}$ es el toro \mathbb{T} , de ahí que éste esté contenido en X_Σ como un subconjunto abierto de Zariski. Más aún es posible mostrar que tal variedad es normal y que todas las variedades tóricas normales son de esta forma, i.e., toda variedad tórica normal se determina por un abanico.

Veamos un poco más de cerca la manera de pegar las variedades afines que se dan en Σ . Si tenemos $\tau \prec \sigma$, ambos en el abanico Σ , sabemos que $S_\tau = S_\sigma + \mathbb{Z}_{\geq 0}(-\lambda)$ con $\delta \in \check{\sigma} \cap M$ y $\tau = \sigma \cap \lambda^\perp$.

El monoide S_τ , como hicimos ya notar, se obtiene de S_σ agregando un generador, $-\lambda$. Como σ puede ser elegido como un elemento de un sistema de generadores (a_1, \dots, a_k) para S_σ podemos asumir que $\lambda = a_k$ y denotamos por $a_{k+1} = -\lambda$. Para obtener las relaciones que se tienen en S_τ , consideramos las relaciones que existen en S_σ y agregar la relación $a_k + a_{k+1} = 0$.

Esta relación corresponde a la relación multiplicativa $u_k u_{k+1} = 1$ en R_τ y en este caso es la única relación que se necesita agregar para obtener R_τ de R_σ . Como los generadores u_i son precisamente las funciones coordenadas en las variedades tóricas X_σ y X_τ , entonces la proyección $\mathbb{C}^{k+1} \rightarrow \mathbb{C}^k$ en las primeras k coordenadas identifica X_τ con el subconjunto abierto de X_σ definido por $x_k \neq 0$. Lo cual escribimos como el siguiente lema.

Lema 2.12. *Existe una identificación natural $X_\tau \cong X_\sigma \setminus (u_k = 0)$.*

Así para una cara común τ de dos conos σ y σ' este lema nos permite pegar X_σ y $X_{\sigma'}$ a lo largo de X_τ . Si (v_1, \dots, v_l) son las coordenadas en $X_{\sigma'}$. Existe un homeomorfismo $X_\tau \cong X_{\sigma'} \setminus (v_l = 0)$ y se obtiene un morfismo de pegado:

$$\psi_{\sigma, \sigma'} : X_\sigma \setminus (u_k = 0) \xrightarrow{\cong} X_\tau \xrightarrow{\cong} X_{\sigma'} \setminus (v_l = 0).$$

Podemos escribir entonces la definición como un teorema.

Teorema 2.13. *Sea Σ un abanico en \mathbb{R}^n . Considérese la unión disjunta $\bigcup_{\sigma \in \Sigma} X_\sigma$ donde dos puntos $x \in X_\sigma$ y $x' \in X_{\sigma'}$ están identificados si $\psi_{\sigma, \sigma'}(x) = x'$. El espacio topológico resultante X_Σ se le llama variedad tórica y tiene la propiedad de que es un espacio topológico dotado de una cubierta abierta por las variedades tóricas afines X_σ con $\sigma \in \Sigma$. Es también una variedad algebraica cuyas cartas están definidas por relaciones binomiales.*

Se ha visto que dados $\tau \prec \sigma$ se dan las siguientes inclusiones:

$$\begin{aligned} \tau &\hookrightarrow \sigma \\ \check{\tau} &\hookleftarrow \check{\sigma} \\ R_\tau &\hookleftarrow R_\sigma \\ X_\tau &\hookrightarrow X_\sigma \end{aligned}$$

Notemos que éstas propiedades son las mismas que se necesitan para manejar algunas propiedades de los abanicos, ya que los argumentos se reducen a usar los conos vistos como caras uno dentro de otro.

Recordemos que algunas de las propiedades de las variedades tóricas provienen del cono asociado e igualmente sucede con las propiedades del abanico del cual surgieron. Existe una correspondencia 1-1 entre los siguientes objetos:

- Los límites $\lim_{t \rightarrow 0} \lambda^u(t)$ con $u \in |\Sigma| := \bigcup_{\sigma \in \Sigma} \sigma$.
- Los conos $\sigma \in \Sigma$.
- Las órbitas de la acción del toro en X_Σ .

Estas correspondencias se dan como sigue: una órbita corresponde a un cono σ sí y sólo si $\lim_{t \rightarrow 0} \lambda^u(t)$ existe y cae en una órbita para todo u en el interior relativo de σ . Además para una órbita σ se satisfacen;

1. $\dim \sigma + \dim \text{orb}(\sigma) = n$.
2. $\text{orb}(\sigma) \subset \overline{\text{orb}(\tau)}$ sí y sólo si $\tau \subset \sigma$.

Podemos notar que por 1, los puntos fijos de la acción del toro corresponden a conos n -dimensionales en el abanico. Ahora, defínanse los siguientes conceptos:

1. Un cono se dice *suave* si es generado por un subconjunto de una base de N .
2. Un cono se dice *simplicial* si es generado por un subconjunto de una base de \mathbb{R}^n .
3. Un abanico se dice *completo* si su soporte $|\Sigma| = \mathbb{R}^n$.
4. Un abanico es *politopal* si existe un politopo Δ tal que $0 \in \Delta$ y Σ es generado por las caras de Δ . Recordemos que un politopo es la envoltura convexa de un conjunto finito de puntos en \mathbb{R}^n .

Ésto nos permite escribir el siguiente teorema en lenguaje más corto:

Teorema 2.14. *Sea X_Σ la variedad tórica determinada por un abanico Σ en \mathbb{R}^n . Entonces*

1. X_Σ es completa \Leftrightarrow el abanico Σ es completo.
2. X_Σ es suave \Leftrightarrow todo $\sigma \in \Sigma$ es suave.
3. X_Σ tiene a lo más singularidades cociente finitas \Leftrightarrow todo $\sigma \in \Sigma$ es simplicial. Tal variedad es llamada simplicial.

Proposición 2.15. :

- (i) Una variedad tórica afín es suave sí y sólo si $X_\sigma = \mathbb{C}^p \times (\mathbb{C}^*)^{n-p}$ con $p = \dim(\sigma)$
- (ii) Si Σ es completo, entonces X_Σ es una compactificación de $\mathbb{T} = (\mathbb{C}^*)^n$.

Demostración. :

Podemos ver que un cono σ es un abanico si consideramos el abanico formado por todas las caras del cono σ y éstos generan la misma variedad. La variedad tórica afín X_σ es suave sí y sólo si σ es suave y en particular se tiene que σ es suave y es generado por un subconjunto de una base de N , luego, sin pérdida de generalidad podemos pensar que el conjunto es determinado por $\{e_1, \dots, e_p\}$ con $p = \dim(\sigma)$, ya que la dimensión es la del menor espacio que lo contiene. Así estamos en el caso de un ejemplo ya mencionado de las páginas 36-37.

Para el segundo inciso notemos que si Σ es completo significa que X_σ es completa, luego al ser el toro \mathbb{T} denso en X_σ , $\overline{\mathbb{T}} = X_\sigma$, es decir una compactificación del toro algebraico. \square

Un concepto introducido anteriormente es el de politopo, el cual será de utilidad posteriormente. Se verá que un politopo reticular n -dimensional P determina una variedad tórica proyectiva de dimensión n , las cuales son de nuestro interés en este trabajo.

2.1.5. La acción del toro y sus órbitas

La acción del toro.

El toro \mathbb{T} es un grupo que actúa sobre sí mismo por multiplicación. La acción de éste sobre cada variedad tórica afín X_σ podemos describirla como sigue:

Si (a_1, \dots, a_k) es un sistema de generadores del monoide S_σ donde como antes, con las coordenadas de \mathbb{R}^n cada $a_i = (\dots, a_i^j, \dots)$ con $a_i^j \in \mathbb{Z}$. Si tenemos un $t = (t_1, \dots, t_n) \in \mathbb{T}$, $t \in \mathbb{C}^*$ y un $x = (x_1, \dots, x_n) \in X_\sigma \subset \mathbb{C}^k$ entonces podemos describir la acción del toro sobre la variedad así:

$$\begin{aligned} \mathbb{T} \times X_\sigma &\rightarrow X_\sigma \\ (t, x) &\mapsto t \cdot x = (t^{a_1} x_1, \dots, t^{a_k} x_k) \end{aligned}$$

Donde $t^{a_i} = t_1^{a_i^1} \dots t_n^{a_i^n} \in \mathbb{C}^*$.

En caso del ejemplo de la figura 3.5 se tiene que $a_1 = (1, 0)$, $a_2 = (1, 1)$, y $a_3 = (1, 2)$. Dado cualquier $t \in \mathbb{T}$ se tiene que $t^{a_1} = t_1$, $t^{a_2} = t_1 t_2$ y $t^{a_3} = t_1 t_2^2$. Así para cualquier $x \in X_\sigma$ el punto $tx = (t^{a_1} x_1, t^{a_2} x_2, t^{a_3} x_3) = (t_1 x_1, t_1 t_2 x_2, t_1 t_2^2 x_3)$ también está en X_σ .

Además para cualquier abanico Σ en \mathbb{R}^n y cualquier cara τ de cualquier cono $\sigma \in \Sigma$, la identificación $X_\tau \cong X_\sigma \setminus (u_k = 0)$ es compatible con la acción del toro, lo que implica que los morfismos de pegado $\phi_{\sigma, \sigma'}$ también son compatibles con la acción del toro.

Así tenemos el siguiente teorema.

Teorema 2.16. *Sea Σ un abanico en \mathbb{R}^n . La acción del toro sobre las variedades afines X_σ asociadas a los conos $\sigma \in \Sigma$, proveen una acción del toro sobre la variedad X_Σ .*

Órbitas

Vamos a empezar a describir las órbitas de la acción del toro empezando por un caso sencillo. Sea $\Sigma = 0 \in \mathbb{R}^n$. Sabemos que 0 es un cono y entonces también es un abanico. Hemos visto también que $X_\Sigma = (\mathbb{C}^*)^n$. Sólo existe una órbita y es el espacio total X_σ siendo además la órbita que corresponde al punto cuyas coordenadas son $(1, \dots, 1)$ en \mathbb{C}^n .

De manera general para cualquier abanico Σ en \mathbb{R}^n el vértice $\sigma = 0$ de Σ da una órbita abierta densa que no es más que el encaje del toro $\mathbb{T} = (\mathbb{C}^*)^n$.

Para describir las órbitas recordemos que existe la siguiente correspondencia:

$$\mathbb{C}^k \leftrightarrow \{ \mathcal{M} \subset \mathbb{C}[\xi] \mid \mathcal{M} \text{ es un ideal máximo} \} \leftrightarrow \text{Hom}_{\mathbb{C}\text{-alg}}(\mathbb{C}[\xi], \mathbb{C}).$$

Con esta correspondencia, el punto $x = (x_1, \dots, x_k)$ corresponde al ideal $\mathcal{M}_x = \mathbb{C}[\xi](\xi_1 - x_1) + \dots + \mathbb{C}[\xi](\xi_k - x_k)$ y el homomorfismo $\varphi : \mathbb{C}[\xi] \mapsto \mathbb{C}$ tal que $\text{Ker}(\varphi) = \mathcal{M}_x$, i.e. $\varphi(f) = f(x)$.

Si I es un ideal en $\mathbb{C}[\xi]$, entonces $V = V(I) = \{x \in \mathbb{C}^k \mid I \subset \mathcal{M}_x\}$ y $I_V = I(V(I))$. El conjunto V es un conjunto algebraico afín cuyo anillo coordinado es $R_V = \mathbb{C}[\xi]/I_V$ y tenemos la siguiente correspondencia

$$V \leftrightarrow \{ \mathcal{M} \subset R_V \mid \mathcal{M} \text{ es ideal máximo} \} \leftrightarrow \text{Hom}_{\mathbb{C}\text{-alg}}(R_V, \mathbb{C}).$$

Como semigrupo, la retícula dual M se genera por los vectores $\pm e_i^*$, $i = 1, \dots, n$ y el anillo de polinomios de Laurent $\mathbb{C}[M]$ está generado por z_i, z_i^{-1} , $i = 1, \dots, n$. Se obtienen así las identificaciones siguientes

$$\mathbb{T} = \text{Spec}(\mathbb{C}[M]) \cong \text{Hom}(M, \mathbb{C}^*) \cong N \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{C}^* \cong (\mathbb{C}^*)^n$$

donde $N \cong \text{Hom}_{\mathbb{Z}}(M, \mathbb{Z})$ y $\text{Hom}(M, \mathbb{C}^*)$ son homomorfismos de grupos.

Todos los semigrupos $S_\sigma = \check{\sigma} \cap M$ son semigrupos de la retícula M y $\mathbb{C}[S_\sigma]$ es una subálgebra de $\mathbb{C}[M]$, subálgebras generadas por los monomios en variables u_i .

Si S_σ es generado por (a_1, \dots, a_k) , entonces los $u_i = z^{a_i}$, $i = 1, \dots, k$ son generadores de la \mathbb{C} -subálgebra $\mathbb{C}[S_\sigma]$ que denotamos por $\mathbb{C}[u_1, \dots, u_k]$. Para cualquier $a \in S_\sigma$, z^a es el correspondiente elemento de $\mathbb{C}[S_\sigma]$.

Los puntos de $\text{Spec}(\mathbb{C}[S_\sigma])$ corresponden a homomorfismos de semigrupos de S_σ en \mathbb{C} visto $\mathbb{C} = \mathbb{C}^* \cup \{0\}$ como un semigrupo abeliano vía multiplicación.

$$X_\sigma = \text{Spec}(\mathbb{C}[S_\sigma]) \cong \text{Hom}_{sg}(S_\sigma, \mathbb{C}).$$

Si $\varphi \in \text{Hom}_{sg}(S_\sigma, \mathbb{C})$, el punto x correspondiente a φ satisface que $\varphi(a) = z^a(x)$ (la evaluación en x) para todo $a \in S_\sigma$, lo cual significa que $\varphi(a_i)$ es la i -ésima coordenada de x , i.e. $x = (\varphi(a_1), \dots, \varphi(a_k)) \in \mathbb{C}^k$.

La acción del toro \mathbb{T} sobre X_σ se puede interpretar en términos de homomorfismos.

Un elemento $t \in \mathbb{T}$ podemos identificarlo con un homomorfismo de grupos $M \xrightarrow{t} \mathbb{C}^*$, un elemento $x \in X_\sigma$ se identifica con el homomorfismo de semigrupos $S_\sigma \xrightarrow{x} \mathbb{C}$ y entonces $t \cdot x \in X_\sigma$ se identifica con el homomorfismo de semigrupos $S_\sigma \rightarrow \mathbb{C}$, $u \mapsto t(u) \cdot x(u)$.

Con esto en mente debemos mencionar que existen, digamos que de cierta manera natural, algunos puntos distinguidos. Si bien no para todos podrían ser naturales al menos sí tienen relación directa con la variedad que define un cono.

Definición 2.6. *Sea σ un cono y X_σ la variedad tórica afín que define. A cada una de las caras τ de σ le asociamos un punto x_τ al que llamaremos distinguido, que corresponde al homomorfismo de semigrupos definido sobre los generadores de S_σ mediante:*

$$\varphi_\tau(a) = \begin{cases} 1 & \text{si } a \in \tau^\perp \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

En el ejemplo de la figura 3.5 los generadores de S_σ son $a_1 = (1, 0)$, $a_2 = (1, 1)$ y $a_3 = (1, 2)$. Si τ_1 es la cara generada por $2e_1 - e_2$, entonces sólo $a_3 \in \tau_1^\perp$. Así pues $\varphi_{\tau_1}(a_1) = \varphi_{\tau_1}(a_2) = 0$ y $\varphi_{\tau_1}(a_3) = 1$. Con ello las coordenadas del punto x_{τ_1} son $z^{a_1}(x_{\tau_1}) = z^{a_2}(x_{\tau_1}) = 0$ y $z^{a_3}(x_{\tau_1}) = 1$, i.e. $z^{a_1}(x_{\tau_1}) = (0, 0, 1)$.

Podemos repetir los cálculos fácilmente para encontrar el punto distinguido correspondiente a la cara τ_2 generada por e_2 pues τ_2^\perp es la línea recta generada por e_1 y $x_{\tau_2} = (\varphi_{\tau_2}(a_1), \varphi_{\tau_2}(a_2), \varphi_{\tau_2}(a_3)) = (0, 0, 1)$.

Considerando a σ como cara de sí mismo se tiene que $\sigma^\perp = \{0\}$, con lo que ningún a_i está en σ^\perp y $x_\sigma = (0, 0, 0)$.

Finalmente considerando $\{0\}$ como cara de σ , $\{0\}^\perp = \mathbb{R}^2$ que contiene a todos los a_i y entonces $x_{\{0\}} = (1, 1, 1)$.

Todos estos puntos en realidad resultan ser más interesantes de lo que a simple vista pueden parecer. La siguiente definición nos ayuda a dar una relación de las órbitas de la acción del toro y los puntos distinguidos.

Definición 2.7. *Sea σ un cono en \mathbb{R}^n y τ una cara de σ . La órbita de \mathbb{T} en X_σ correspondiente a la cara τ es la órbita del punto distinguido que denotaremos por O_τ .*

Parece simplemente que se ha hecho una definición para satisfacer una relación forzada entre el cono y las órbitas, pero en realidad el siguiente teorema nos indica que hay una conexión más profunda.

Teorema 2.17. *Sea Σ un abanico en \mathbb{R}^n . Para cada $\sigma \in \Sigma$ se puede asociar un punto distinguido $x_\sigma \in X_\sigma \subset X_\Delta$ y la órbita $O_\sigma \subset X_\sigma$ de x_σ satisfaciendo:*

1. $X_\sigma = \coprod_{\tau \prec \sigma} O_\tau$,
2. si V_τ denota la cerradura de la órbita O_τ , entonces $V_\tau = \coprod_{\tau \prec \sigma} O_\sigma$.
3. $O_\tau = V_\tau \setminus \bigcup_{\tau \neq \sigma} V_\sigma$.

Demostración. Para demostrar 1 notemos que un punto de U_σ está dado por un homomorfismo de semigrupos $x : \check{\sigma} \cap M \rightarrow \mathbb{C}$. Este punto está en

$\mathbb{T}_N = O_{\{0\}}$ exactamente cuando x no toma el valor 0, el cual se extiende a un homomorfismo de M a \mathbb{C}^* .

En general $x^{-1}(\mathbb{C}^*) = \check{\sigma} \cap \tau^\perp \cap M$ para alguna cara τ de σ : la suma de dos elementos en $\check{\sigma}$ no pueden estar en $x^{-1}(\mathbb{C}^*)$ a menos que ambos estén en $x^{-1}(\mathbb{C}^*)$. Esto significa precisamente que x corresponde a un punto de $O_\tau \subset U_\sigma(\tau)$.

Para 3, trabajemos con la variedad tórica V_τ , y podemos asumir que $\tau = \{0\}$, en cuyo caso debemos de mostrar que

$$\mathbb{T}_N = X_\Sigma \setminus \bigcup_{\gamma \neq \{0\}} V_\gamma.$$

Intersecando con conjuntos abiertos de la forma U_σ , la igualdad se sigue de 1. Ahora 2 se sigue de 3 por inducción en la dimensión. \square

Se sigue de esta proposición que X_Σ es unión disjunta de las órbitas O_τ de la acción \mathbb{T}_N . Además una órbita O_σ está contenida en la cerradura de O_τ justo cuando τ es una cara de σ .

Veamos un ejemplo sobre los puntos límites y las órbitas.

Ejemplo: Consideremos $\mathbb{P}^2 \cong X_\Sigma$ para el abanico Σ del espacio proyectivo (figura 3.10).

Un subgrupo a un parámetro $u \in \mathbb{Z}^2$ da lugar a un morfismo $\lambda^u : \mathbb{C}^* \mapsto \mathbb{P}^2$. Como \mathbb{P}^2 es compacto el límite

$$\lim_{t \rightarrow 0} \lambda^u(t)$$

existe en \mathbb{P}^2 . Si $u = (a, b) \in \mathbb{Z}^2$ entonces $\lambda^u(t) = \lim_{t \rightarrow 0} (1, t^a, t^b)$.

Después de unos cálculos se obtiene que

$$\begin{aligned} \lim_{t \rightarrow 0} \lambda^u(t) &= \lim_{t \rightarrow 0} (1, t^a, t^b) = \\ (1, 0, 0) & \quad a, b > 0 \\ (1, 0, 1) & \quad a > 0, b = 0 \\ (1, 1, 0) & \quad a = 0, b > 0 \end{aligned}$$

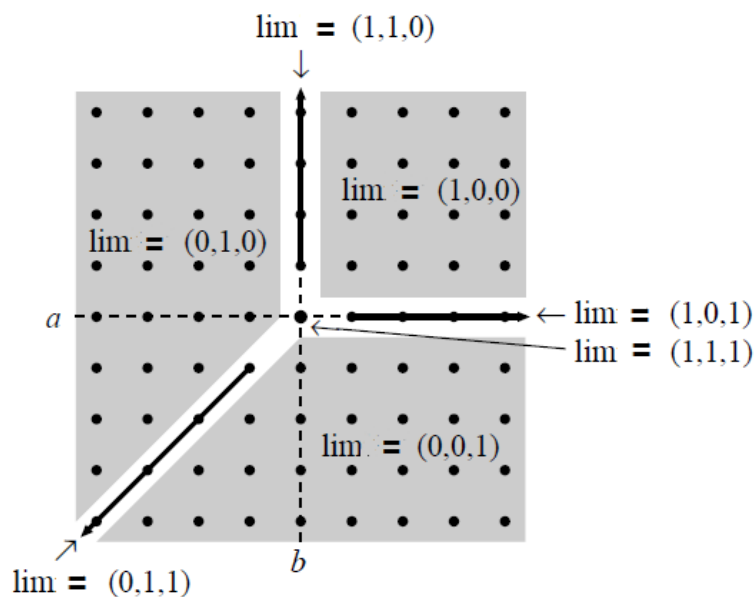


Figura 2.10: Puntos límite y órbitas.

$$\begin{array}{ll}
 (1, 1, 1) & a = b = 0 \\
 (0, 0, 1) & a > b, b < 0 \\
 (0, 1, 0) & a < 0, a < b \\
 (1, 0, 0) & a < 0, a = b.
 \end{array}$$

Las desigualdades mostradas descomponen el espacio en 7 regiones disjuntas, tres conjuntos abiertos, dos rayos y un punto. La colección de estos conjuntos en este caso es el abanico correspondiente a la variedad tórica \mathbb{P}^2 .

Una pregunta muy natural al hacer una asociación de un objeto a otro es si la asociación creada tiene su parte inversa. Es decir si hemos creado una variedad tórica a partir de un abanico, ¿podemos asociar un abanico a ciertas variedades tóricas?

Hagamos el siguiente proceso:

Para un $k \in \mathbb{Z}$, tenemos un homomorfismo de grupos algebraicos

$$\mathbb{C}^* \rightarrow \mathbb{C}^* \quad z \mapsto z^k$$

dando lugar al isomorfismo $Hom_{alg.gr}(\mathbb{C}^*, \mathbb{C}^*) = \mathbb{Z}$.

Sea N una retícula, con retícula dual M . Se tiene que $\mathbb{T} = \mathbb{T}_N = Hom(M, \mathbb{C}^*)$ y eligiendo una base para N se tienen isomorfismos $Hom(\mathbb{C}^*, \mathbb{T}) \cong Hom(\mathbb{Z}, N) \cong N$. Como todo subgrupo a un parámetro $\lambda : \mathbb{C}^* \rightarrow \mathbb{T}$ corresponde a un único $v \in N$, denotando como λ_v el subgrupo a un parámetro correspondiente a v , se tiene que $v = (v_1, \dots, v_n) \in \mathbb{Z}^n$ $\lambda_v(z) = (z^{v_1}, \dots, z^{v_n})$. Dualmente se tiene el isomorfismo $Hom(\mathbb{T}, \mathbb{C}^*) \cong Hom(N, \mathbb{Z}) \cong M$.

Ahora bien, para cada carácter $\chi : \mathbb{T} \rightarrow \mathbb{C}^*$ existe un único $u \in M$, sea entonces $\chi^u \in Hom(\mathbb{T}, \mathbb{C}^*)$ un carácter correspondiente a $u = (u_1, \dots, u_n) \in M$. Si $t = (t_1, \dots, t_n) \in \mathbb{T}$ entonces $\chi^u(t) = t_1^{u_1} \dots t_n^{u_n}$. Denotaremos de igual manera como χ^u a la correspondiente función en el anillo coordenado $\mathbb{C}[M]$ (recordando que una base para el espacio vectorial complejo $\mathbb{C}[M]$ está dada por elementos de la forma χ^u con $u \in M$).

Si $z \in \mathbb{C}^*$ entonces $\lambda_v(z) \in \mathbb{T}$, y entonces $\lambda_v(z)$ corresponde a un homomorfismo de grupos de M en \mathbb{C}^* . Explícitamente tenemos

$$\lambda_v(z)(u) = \chi^u(\lambda_v(z)) = z^{\langle u, v \rangle}$$

donde \langle, \rangle es el apareamiento dual $M \otimes N \rightarrow \mathbb{Z}$

$$\begin{aligned} u v &\mapsto \langle u, v \rangle \\ M \times N &\rightarrow \mathbb{Z} \\ Hom(\mathbb{T}, \mathbb{C}^*) \times Hom(\mathbb{C}^*, \mathbb{T}) &\rightarrow Hom(\mathbb{C}^*, \mathbb{C}^*) \\ \chi \lambda &\mapsto z \mapsto z^{\langle u, v \rangle} = \chi(\lambda_v(z)) \end{aligned}$$

Con esta descripción uno puede recobrar la retícula N del toro $\mathbb{T} = \mathbb{T}_N$. Conversamente, para recobrar el cono σ del encaje $\mathbb{T} \hookrightarrow X_\sigma$ debemos de fijarnos en el comportamiento del límite $\lim_{z \rightarrow 0} \lambda_v(z)$ cuando v varía en N . Resulta que los posibles puntos límites son los puntos distinguidos x_τ para $\tau < \sigma$.

Proposición 2.18. *Si $v \in |\Sigma|$ y τ es el cono de Σ que contiene a v en su interior relativo, entonces $\lim_{z \rightarrow 0} \lambda_v(z) = x_\tau$.*

Demostración. Nos fijamos en X_σ para todo σ que contenga a τ como cara. Sabemos que se identifica a $\lambda_v(Z)$ con el homomorfismo de M en C^* , $u \mapsto z^{\langle u, v \rangle}$. Como v está en el interior relativo de τ y $\tau \prec \sigma$, entonces para cualquier $u \in S_\sigma = \check{\sigma} \cap M$ se tiene que $\langle u, v \rangle \geq 0$ y la igualdad se satisface para los elementos $u \in \tau^\perp$. Como el homomorfismo de semigrupos que corresponde a x_τ es el homomorfismo $S_\sigma \rightarrow \mathbb{C}$ que manda u en 1 si $u \in \tau^\perp$ y lo manda a 0 en cualquier otro caso, entonces el homomorfismo límite de S_σ en \mathbb{C} es precisamente el mismo, el que define x_τ . □

Proposición 2.19. *Si v no está en ningún cono de Σ , entonces $\lim_{z \rightarrow 0} \lambda_v(z)$ no existe en X_Σ*

Demostración. Si v no está en σ entonces los puntos $\lambda_v(z)$ no tienen puntos límite en X_σ cuando z tiende a 0. Ésto lo podemos ver ya que dado un $u \in \check{\sigma}$ tal que $\langle u, v \rangle < 0$, entonces $\chi^u(\lambda_v(z)) = z^{\langle u, v \rangle}$ tiende a infinito cuando z tiende a cero. □

Entonces $\sigma \cap N$ es el conjunto de vectores $v \in N$ tales que $\lambda_v(z)$ admite un límite en X_σ cuando z tiende a cero y el límite es el punto x_σ si v está en el interior relativo de σ . Si v no pertenece a $|\Sigma|$ (la unión de los conos de Σ) entonces el límite no existe.

Proposición 2.20. *Si X_Σ es completa entonces Σ es completo.*

Demostración. Si $|\Sigma|$ no es todo $N_{\mathbb{R}}$ entonces existe un vector v tal que v no pertenece a ningún cono. En tal caso $\lambda_v(z)$ no tiene ningún límite en X_Σ cuando z tiende a 0 dando así una contradicción con la completez. □

Proposición 2.21. *Las variedades tóricas son normales.*

Demostración. Una variedad algebraica es normal si para cualquier punto x el anillo local R_x es enteramente cerrado. En el caso de las variedades tóricas el anillo local en x_σ es R_σ . Si (v_1, \dots, v_r) son los generadores de σ por el lema que dice que $\check{\sigma} = \cap \check{\tau}_i$ se tiene que $R_\sigma = \cap R_{\tau_i}$ donde los τ_i son los rayos correspondientes a los generadores v_i . Como $R_{\tau_i} \cong \mathbb{C}[x_1, x_1^{-1}, \dots, x_{i-1}, x_{i-1}^{-1}, x_i, x_{i+1}, x_{i+1}^{-1}, x_n, x_n^{-1}]$ es enteramente cerrado y la intersección de dominios enteramente cerrados son enteramente cerrados, se sigue el resultado. □

Proposición 2.22. *Si la variedad tórica X_Σ asociada al abanico Σ es suave entonces el abanico Σ es regular.*

Demostración. Consideremos primero el caso en el que el abanico generado por el cono σ es tal que $\dim(\sigma) = n$. Si $S_\sigma = \check{\sigma} \cap M$ está generado por (a_1, \dots, a_k) se tiene que

$$\mathbb{C}[S_\sigma] = R_\sigma = \mathbb{C}[z^{a_1}, \dots, z^{a_k}] = \mathbb{C}[\xi_1, \dots, \xi_k]/I,$$

el anillo local de x_σ . Denotemos por \mathcal{M} el ideal maximal de A_σ correspondiente al punto x_σ . Entonces

$$X_\sigma \text{ es suave} \iff R_\sigma \text{ es regular} \stackrel{\text{def}}{\iff} \dim R_\sigma = \dim_k \mathcal{M}/\mathcal{M}^2$$

donde $\mathcal{M}/\mathcal{M}^2$ está identificado con el espacio cotangente. Como $\dim R_\sigma = \dim X_\sigma = \dim \mathbb{T} = n$, se tiene que:

$$X_\sigma \text{ es suave} \iff \dim \mathcal{M}/\mathcal{M}^2 = n$$

\mathcal{M} es generado por todos los elementos de la forma χ^u para $u \neq 0$ en S_σ y \mathcal{M}^2 está generado por todos los elementos de la forma χ^u tal que u es la suma de dos elementos de $S_\sigma - \{0\}$.

$\mathcal{M}/\mathcal{M}^2$ tiene como base la imagen de los elementos χ^u donde $u \in S_\sigma - \{0\}$ que no son suma de dos vectores en $S_\sigma - \{0\}$. En particular, los primeros elementos en \mathcal{M} sobre los rayos de $\check{\sigma}$ (elementos primitivos) son elementos de $\mathcal{M}/\mathcal{M}^2$. Si X_σ es suave, $\check{\sigma}$ no puede tener más de n rayos y los generadores primitivos de estos rayos deben generar a S_σ . Como σ es fuertemente convexo, $\check{\sigma}$ genera a $M_{\mathbb{R}}$ y S_σ genera a M como grupo ($M = S_\sigma + (-S_\sigma)$). Los generadores primitivos de S_σ dan una base de M y por dualidad, σ es generado por una base de N . Esto implica que $X_\sigma \cong \mathbb{C}^n$. Consideremos ahora el caso general en que $\dim \sigma = p \leq n$. En tal caso consideremos la sub-retícula $N_\sigma = (\sigma \cap N) + (-\sigma \cap N) \subset N$ generada (como subgrupo) por $\sigma \cap N$. Dando a lugar la descomposición $N = N_\sigma \oplus N''$ tal que $\sigma = \sigma' \oplus \{0\}$, y el cono σ' , en N_σ satisface $\dim \sigma' = \dim \sigma = \dim N_\sigma$. Utilizando la descomposición dual $M = M' \oplus M''$ se tiene

$$S_\sigma = ((\sigma') \cap M') \oplus M'' \text{ y}$$

$$X_\sigma = X_{\sigma'} \times \mathbb{T}_{N''} \cong X_{\sigma'} \times (\mathbb{C}^*)^{n-p}$$

y $X_{\sigma'}$ es la variedad tórica correspondiente al cono σ' en la retícula N_{σ} (con respecto al toro $\mathbb{T}_{N_{\sigma}}$). Si X_{σ} es suave, entonces $X_{\sigma'}$ debe ser suave y σ' debe ser una base para N_{σ} .

□

2.1.6. Variedad tórica asociada a un politopo

Un aspecto bastante interesante dentro de la teoría es el concepto de los politopos. En principio de algo meramente geométrico al utilizar sus propiedades combinatorias se deduce una hermosa relación con cierto tipo de variedades tóricas.

Un politopo racional Δ en \mathbb{R}^n es la envoltura convexa de un subconjunto finito de \mathbb{Z}^n . En general para cualquier politopo sus puntos no necesariamente caen en \mathbb{Z}^n , pero ésto es lo que nos permite relacionarlo con las variedades tóricas tal como las hemos estado construyendo. Si fijamos una retícula N pediremos que tal subconjunto finito esté en la retícula.

La dimensión de un politopo se define como la dimensión del menor subespacio que lo contenga. Así por ejemplo un punto tiene dimensión cero, dos puntos generan un segmento (si no son el mismo punto) teniendo dimensión uno, tres puntos no colineales forman un politopo de dimensión 2, etcétera.

Lo que esperamos es que un politopo reticular Δ , n -dimensional genere una variedad tórica proyectiva X_{Δ} de dimensión n .

Dado un politopo Δ racional n -dimensional en \mathbb{R}^n lo podemos expresar como intersección finita de semiespacios; para cada faceta F de Δ existe un vector normal primitivo n_F que apunta hacia adentro del politopo y un entero a_F tales que

$$\Delta = \bigcap_{F \text{ es una faceta}} \{\mathbf{m} \in \mathbb{R}^n \mid \langle \mathbf{m}, \mathbf{n}_F \rangle \geq -a_F\}.$$

Esta descripción nos permite (sugiere) hacer la siguiente construcción:

Dada una cara \mathcal{F} de Δ en \mathbb{R}^n , sea $\sigma_{\mathcal{F}}$ el cono generado por la colección de vectores $\{n_F \mid \mathcal{F} \subset F\}$ y F es una faceta. Así definimos el *abanico normal*

de Δ como

$$\Sigma_{\Delta} = \{\sigma_{\mathcal{F}} | \mathcal{F} \prec \Delta\}.$$

La variedad tórica asociada a Σ_{Δ} es la variedad tórica $X_{\Sigma_{\Delta}}$ que denotaremos simplemente como X_{Δ} .

Por ejemplo el cuadrado unitario, es un politopo con vértices $(0, 0), (1, 0), (0, 1), (1, 1)$ que podemos representar como

$$\begin{aligned} \square &= \{a \geq 0\} \cap \{a \leq 1\} \cap \{b \geq 0\} \cap \{b \leq 1\} \\ &= \{a \geq 0\} \cap \{-a \geq -1\} \cap \{b \geq 0\} \cap \{-b \geq -1\}. \end{aligned}$$

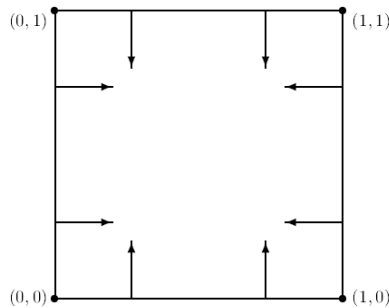


Figura 2.11: Cuadrado y sus normales interiores.

Sus normales interiores son los vectores $\pm e_1, \pm e_2$ en \mathbb{Z}^2 . Obtenemos así un abanico que corresponde al producto cruz de dos espacios \mathbb{P}^1 , es decir $X_{\square} = \mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$.

Consideremos el siguiente ejemplo:

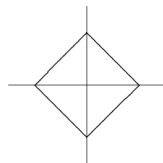


Figura 2.12: Cuadrado con vértices en los rayos.

Para ver que existe también una construcción dual de X_Δ supongamos que $P \subset \mathbb{R}^n$ es un politopo n -dimensional reticular que contiene al origen como un punto interior. Entonces se puede obtener un abanico Σ_P en \mathbb{R}^n tomando los conos (relativos al origen) sobre las caras de P . El resultado será la variedad tórica X_P . En este caso tomamos la fig. 3.12 y como vemos el resultado es precisamente el ejemplo anterior, en el que los vectores $\pm e_1, \pm e_2$ generan un abanico cuya variedad es $X_P = \mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$.

La relación que hay entre los politopos y las variedades proyectivas es el siguiente teorema.

Teorema 2.23. *La variedad tórica normal de un abanico Σ en \mathbb{R}^n es proyectiva sí y sólo si Σ es el abanico normal de un politopo racional n -dimensional en \mathbb{R}^n .*

Demostración. Sean m_1, m_2, \dots, m_ℓ los puntos racionales del politopo Δ con $\ell = |\Delta \cap \mathbb{Z}^n|$. El morfismo

$$\varphi(t_1, \dots, t_n) = (\mathbf{t}^{m_1}(t_1, \dots, t_n), \dots, \mathbf{t}^{m_\ell}(t_1, \dots, t_n)) \in \mathbb{P}^{\ell-1}$$

de $(\mathbb{C}^*)^n$ a $\mathbb{P}^{\ell-1}$ se extiende a un morfismo $X_\Delta \rightarrow \mathbb{P}^{\ell-1}$. Es una versión proyectiva del caso afín, así que basta ver que para $v \gg 0$ el morfismo correspondiente a $v\Delta$ es un encaje. □

El siguiente concepto importante es el de politopo dual de un politopo. Esto es, dado un politopo Δ en \mathbb{R}^n se puede asociar un politopo Δ° en \mathbb{R}^n llamado polar, de la siguiente manera:

$$\Delta^\circ = \{v \in (\mathbb{R}^n)^* \mid \langle u, v \rangle \geq -1 \forall u \in \Delta\}.$$

En efecto Δ° es un politopo y si Δ es racional entonces Δ° también lo es. Particularmente si el politopo Δ contiene al cero en su interior, podemos hacer una descripción de las caras de Δ° . Supongamos que es el caso.

De manera general las caras F de Δ las podemos escribir de la siguiente manera;

$$F = \{u \in \Delta \mid \langle u, v \rangle = r \text{ donde } v \in \mathbb{R}^n \text{ es tal que } \langle u, v \rangle \geq r, \forall u \in \Delta\}.$$

Con el cero dentro de Δ se tiene que

$$F^* = \{v \in \Delta^\circ \mid \langle u, v \rangle = -1, \forall u \in F\}$$

es una cara de Δ° .

Para tomar ejemplos están las siguientes figuras (3.13) (en ambos casos se denota por P al politopo): un triángulo cuyo polar es otro triángulo y un octaedro con centro en el origen y vértices con coordenadas 0 o ± 1 cuyo polar es un cubo de vértices con coordenadas ± 1 .

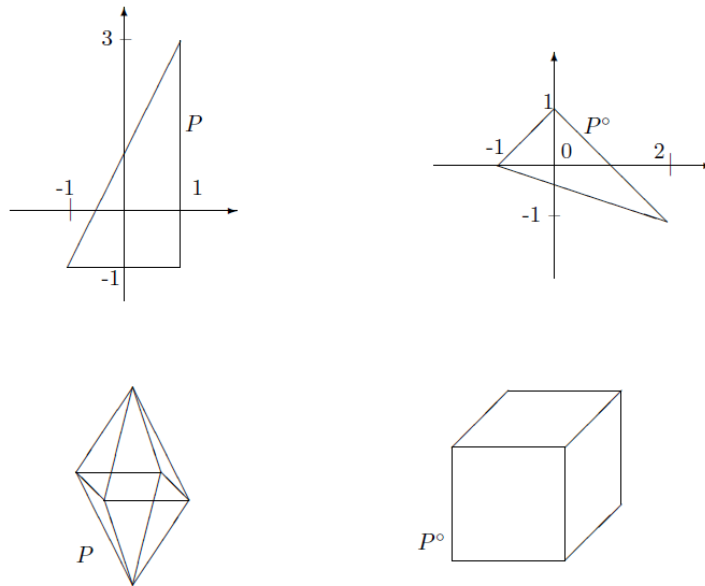


Figura 2.13: Politopo polar.

Tenemos el siguiente lema que nos describe cómo es la relación entre las caras de un politopo y su dual.

Lema 2.24. .

(a) Existe una correspondencia 1-1 entre caras de Δ y caras de Δ° ; $F \leftrightarrow F^*$ que revierte orden.

(b) $\dim F + \dim F^* = n - 1$.

Demostración. :

Definamos como σ el cono sobre $\Delta \times 1$. Las caras de σ se pueden ver como los conos sobre las caras de Δ , siendo el cono $\{0\}$ el correspondiente a la cara vacía de Δ . El cono dual $\check{\sigma}$ corresponde a aquellos $u \times r$ en $(\mathbb{R}^n)^* \times \mathbb{R}$ tal que $\langle u, v \rangle + r \geq 0$ para todo v en Δ . De ahí tenemos que $\check{\sigma}$ es el cono sobre $\Delta^\circ \times 1$ en $(\mathbb{R}^n)^* \times \mathbb{R}$. De ahí se siguen las proposiciones aplicadas a los conos del resultado que llamamos Propiedad 1.1 de la sección 3.1.1. \square

Abanico asociado a un politopo

Resulta además que existe una manera de asociar un abanico a un politopo Δ . Esto se hace asociando un cono σ_F a cada cara F del politopo de la siguiente manera:

$$\sigma_F = \{v \in N_R | \langle u, v \rangle \leq \langle u', v \rangle \forall u \in F, \forall u' \in \Delta\}$$

El cono dual $\check{\sigma}_F$ en $(\mathbb{R}^n)^*$ es generado por los vectores $u' - u$ con $u \in F$ y $u' \in \Delta$. El cono σ_F en \mathbb{R}^n tiene a F^* como base.

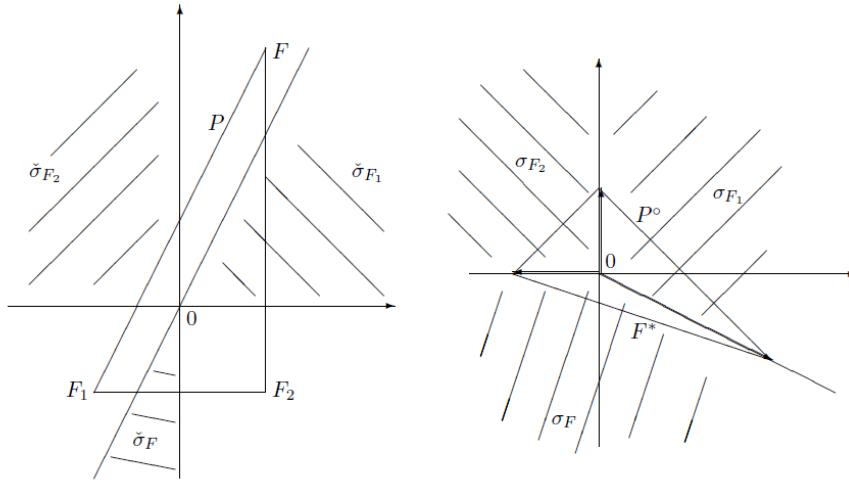


Figura 2.14: Abanico asociado a un politopo P .

En la imagen tenemos que la imagen polar del politopo Δ ($\Delta = P$)

es precisamente Δ° . A la cara F de Δ , que en este caso es un vértice le asociamos la cara F^* de Δ° , el cono σ_F en \mathbb{R}^n y su dual $\check{\sigma}_F$ en $(\mathbb{R}^n)^*$.

Como mencionamos antes, estos conos son los que generan un abanico al que llamaremos Σ_Δ .

Proposición 2.25. .

a) los conos σ_F forman un abanico, Σ_Δ

b) Si $\{0\}$ está en el interior de Δ , entonces Σ_Δ está formado por los conos que tienen como base las caras del politopo polar Δ° .

Demostración. :

Si el origen está en el interior de Δ , se sigue de la definición que σ_F es el cono sobre la cara dual F^* de Δ° , de donde se sigue (b). También se sigue de la definición que Σ_P es invariante cuando Δ se traslada por un elemento u de M o cuando se multiplica por un entero positivo m : $\Sigma_{m\Delta+u} = \Sigma_\Delta$. Como cualquier Δ que genere $M_{\mathbb{R}}$ puede ser intercambiado por cualquier otro que contenga al origen como un punto interior ya sea por traslación o expansión, se obtiene (a).

□

2.1.7. Divisores, homología, cohomología y funciones de soporte

Divisores

Demos la definición de un divisor de manera general para una variedad algebraica compleja X .

Definición 2.8. *Un divisor de Weil es un elemento del grupo abeliano libre $W(X)$ generado por las subvariedades cerradas irreducibles de codimensión (compleja) 1 en X .*

Tales divisores se pueden escribir como:

$$\sum n_i A_i - \sum m_j B_j \quad \text{con } n_i, m_j > 0$$

donde A_i y B_j son subvariedades de codimensión 1 en X .

Consideremos por ejemplo el espacio \mathbb{C}^2 con coordenadas (z_1, z_2) . Denotemos por A al rayo $z_1 = 0$ y por B al rayo $z_2 = 0$. Un ejemplo de un divisor de Weil es $2A - B$.

Podemos considerar otro tipo de divisores. Denotemos por $\mathcal{R}(U)$ el conjunto de funciones racionales en un conjunto abierto U de X .

Definición 2.9. *Un divisor de Cartier (o divisor localmente principal) $D = (U_\alpha, f_\alpha)$ es la colección de una cubierta $X = \bigcup U_\alpha$ de X por conjuntos abiertos afines y funciones racionales no cero $f_\alpha \in \mathcal{R}(U_\alpha)$ que satisfacen la siguiente propiedad: si $U_\alpha \cap U_\beta \neq \emptyset$, entonces $f_\alpha/f_\beta \in \mathcal{O}^*(U_\alpha \cap U_\beta)$ (funciones holomorfas que no son idénticamente cero). El conjunto de divisores de Cartier es un grupo denotado como $C(X)$.*

Tomemos nuevamente $X = \mathbb{C}^2$ cubierto por un solo abierto $U = \mathbb{C}^2$. Consideremos en U la función racional $f(z_1, z_2) = z_1^2/z_2$, obtenemos así un divisor de Cartier $D = (U, f)$.

Si X es una variedad normal, existe una inclusión $C(X) \hookrightarrow W(X)$. Con el ejemplo anterior: si $A = \{f = 0\}$ es el conjunto de ceros de f contando multiplicidades y $B = \{1/f = 0\}$ es el conjunto de polos de f contando multiplicidades, entonces el divisor de Weil $2A - B$ corresponde al divisor de Cartier $D = (U, f)$ del ejemplo antes considerado.

En general el morfismo $C(X) \hookrightarrow W(X)$ se define por

$$D \mapsto [D] = \sum_{\text{codim}(V,X)=1} \text{ord}_V(D) \cdot V$$

Estaremos interesados en divisores de una variedad tórica $X = X(\Delta)$ que bajo el morfismo del toro $\mathbb{T} = T_N$ son invariantes. Las subvariedades irreducibles de codimensión 1 que son \mathbb{T} estables corresponden a los rayos (o rayos) del abanico. denotemos a los rayos por τ_1, \dots, τ_d y v_j el primer punto reticular que interseca el rayo τ_j . Estos divisores son las cerraduras de las órbitas $D_i = V(\tau_i)$. Los T -divisores de Weil son las sumas de estos elementos

con coeficientes enteros. Queremos describir los divisores de Cartier que son \mathbb{T} invariantes. Consideremos el caso afín $X = U_\sigma$ con $\dim(\sigma) = n$. Sea D el divisor invariante por \mathbb{T} , correspondiente al ideal $I = \Gamma(X, \mathcal{O}(D))$. Se asegura que I es generado por una función χ^u para un único $u \in \check{\sigma} \cap M$.

El hecho de que el divisor sea \mathbb{T} -invariante implica que I está graduado por M , es decir, I es una suma directa de espacios $\mathbb{C} \cdot \chi^u$ sobre algún conjunto u en M . Como I es un ideal principal en el punto distinguido x_σ , $I/\mathfrak{m}I$ debe de ser 1-dimensional, donde \mathfrak{m} es la suma de todos los $\mathbb{C} \cdot \chi^u$ donde $u \neq 0$. De ahí se sigue que existe un único u tal que $I = A_\sigma \cdot \chi^u$. Entonces un T -divisor de Cartier general en U_σ tiene la forma $\text{div}(\xi^u)$ para un único $u \in M$.

Divisores y funciones de soporte.

Recordamos que la acción del toro tiene una cantidad finita de órbitas actuando sobre la variedad definida por un abanico Σ y además existe una inclusión uno a uno que revierte orden entre las cerraduras de las órbitas y los conos de Σ . Así pues cada uno de los $\rho \in \Sigma(1)$ corresponden a un divisor irreducible T_N -invariante $D_\rho \subset X_\Sigma$. Con ello podemos hacer lo siguiente: para cada $m \in M$ corresponde un carácter $\chi^m : T_N \rightarrow \mathbb{C}^*$ y viendo a χ^m como una función racional sobre X se puede definir

$$[\text{div}(\chi^m)] = \sum_{\rho} \langle m, v_\rho \rangle D_\rho.$$

Así pues a cada elemento m le asociamos un divisor de Weil. En el caso de las variedades tóricas definidas por un abanico Σ , un divisor de Weil $D = \sum_{\rho} a_\rho D_\rho$ es de Cartier sí y sólo sí para cada $\sigma \in \Sigma$ existe un $m_\sigma \in M$ tal que $\langle m_\sigma, v_\sigma \rangle = -a_\rho$ cada vez que $\rho \subset \sigma$.

El soporte del divisor D es el conjunto de puntos en X_Σ donde las funciones f_i se anulan. En tal sentido podemos decir que los soportes de los divisores de Cartier son localmente ceros de funciones. La función $\phi_D : |\Sigma| \rightarrow \mathbb{R}$, definida por $\phi_D(v) = \langle m_\sigma, v \rangle$ con $v \in \sigma$, se llama la *función de soporte* de D .

Existen muchas relaciones bonitas entre estos objetos y los politopos. Por ejemplo, considerando varios politopos $\Delta_1, \dots, \Delta_k$ podemos definir la envoltura convexa de $\Delta_1 \cup \dots \cup \Delta_k$ denotada por $Conv(\Delta_1, \dots, \Delta_k)$ el cual es un politopo.

Otra forma de crear un nuevo politopo y posiblemente más interesante es la suma de Minkowski, que se define como el conjunto

$$\Delta_1 + \dots + \Delta_k = \{m_1 + \dots + m_k \mid m_i \in \Delta_i\}.$$

Si $k\Delta = \Delta + \dots + \Delta$ (k -veces), entonces por convexidad $k\Delta = \{km \mid m \in \Delta\}$. Algunas construcciones de la simetría de espejo hacen uso fundamental de las envolturas convexas y las sumas de Minkowski.

En el caso de una variedad completa X y $D = \sum_{\rho} a_{\rho} D_{\rho}$ de Cartier se tiene que

$$\begin{aligned} \Delta_D &= \{m \in M_{\mathbb{R}} : \langle m, v \rangle \geq \phi_D(v) \text{ para todo } v \in N_{\mathbb{R}}\} \\ &= \{m \in M_{\mathbb{R}} : \langle m, v \rangle \geq -a_{\rho} \text{ para todo } \rho\} \end{aligned}$$

es un politopo. Se satisface además que $\Delta_{kD} = k\Delta_D$, $\Delta_{D+div(\chi^m)} = \Delta_D - m$, D es generado por secciones globales $\Leftrightarrow \Delta_D$ es la envoltura convexa del conjunto $\{m_{\sigma} \mid \sigma \in \Sigma(n)\}$ y D es amplio $\Leftrightarrow m_{\sigma} \neq m_{\tau}$ para $\sigma \neq \tau \in \Sigma(n)$ y Δ_D es un politopo n -dimensional con vértices $\{m_{\sigma} \mid \sigma \in \Sigma(n)\}$.

En los dos casos Δ_D es un politopo entero o reticular. Más aún, si D es amplio entonces existe una correspondencia biyectiva entre caras no vacías de Δ_D y conos de Σ . En particular las facetas de Δ corresponden a elementos de $\Sigma(1)$.

Otra observación útil es que $\Delta_D \cap M$ se identifica naturalmente con los T_N eigenectores de $H^0(X, \mathcal{O}(D))$, dando un morfismo T_N -equivariante

$$H^0(X, \mathcal{O}(D)) \cong \bigoplus_{m \in \Delta_D \cap M} \mathbb{C}_{\chi^m}.$$

Para ver su validez podemos pensar en las secciones de $\mathcal{O}(D)$ como funciones racionales f en X tales que $(f) + D \geq 0$. Entonces $div(\chi^m) + D \geq 0$

es equivalente a $\langle m, v_\rho \rangle \geq -a\rho$ para todo ρ . La demostración se puede consultar en ([Fulton3, sección 3.4]).

Hemos dado ya una manera de proceder para asociar una variedad a un politopo. Lo hicimos exhibiendo un abanico asociado. Sin embargo podemos también hacer lo siguiente; dado Δ podemos considerar monomios de la forma $t_0^k \chi^m$ donde $m \in k\Delta$. Estos monomios se multiplican por la regla $t_0^k \chi^m \cdot t_0^l \chi^{m'} = t_0^{k+l} \chi^{m+m'}$ pues $m \in k\Delta$ y $m' \in l\Delta$ implican $m + m' \in (k+l)\Delta$. La \mathbb{C} -álgebra generada por los $t_0^k \chi^m$ se denota por S_Δ y este anillo es graduado declarando la graduación mediante

$$\deg(t_0^k \chi^m) = k.$$

Llamamos a S_Δ el anillo politopal de Δ . Entonces la correspondiente variedad proyectiva asociada a Δ de ésta manera es la variedad

$$\mathbb{P}_\Delta = \text{Proj}(S_\Delta).$$

Resulta ser cierto que esta variedad es precisamente la que se asoció con anterioridad mediante el abanico normal. Recordando los politopos polares supongamos que 0 está en el interior de Δ y describamos a \mathbb{P}_Δ de acuerdo a la siguiente proposición.

Proposición 2.26. *El abanico en $N_{\mathbb{R}}$ obtenido de los conos sobre las caras propias de Δ° es el abanico normal de Δ y entonces se obtiene la variedad tórica $X_\Delta = \mathbb{P}_\Delta$.*

Demostración. Es suficiente mostrar que $\sigma_F = \{\lambda v | v \in F^\circ, \lambda \geq 0\}$ para cada cara propia F de Δ . Primero obsérvese que $v \in \sigma_F$ sí y sólo si $\langle m, v \rangle \geq \langle m', v \rangle$ para todo $m \in \Delta$ y $m' \in F$. También notemos que $v \neq 0$ implica que $\langle m, v \rangle \geq 0$ para toda $m \in \Delta$. Lo cual no es posible pues 0 está en el interior de Δ .

Si $v \in F^\circ$, entonces $\langle m, v \rangle \geq \langle m', v \rangle = 1$ y entonces $\lambda v \in \sigma_F$. Ahora supongamos que $\langle m, v \rangle \leq \langle m', v \rangle$ para toda $m \in \Delta$ y $m' \in F$. Podemos asumir que $v \neq 0$. Para un m' fijo en el interior relativo de F , $\langle m', v \rangle = -1$ implica que $v' \in F^\circ$ pues m' está en el interior relativo de F .

□

La clase anticanónica de un espacio proyectivo es amplia y más generalmente cualquier variedad suave completa con esta propiedad se dice ser de Abanico. Para propósitos de la simetría de espejo es necesario considerar variedades de Abanico singulares.

La noción de **politopo reflexivo** de Batyrev es la que le permitió encontrar el tipo de variedades que buscaba.

Definición 2.10. *Un politopo $\Delta \subset M_{\mathbb{R}} \cong \mathbb{R}^n$, n -dimensional entero es reflexivo si las siguientes dos condiciones se satisfacen:*

- (i) *Todas las facetas Γ de Δ están soportadas por un hiperplano afín de la forma $\{m \in M_{\mathbb{R}} \mid \langle m, v_{\Gamma} \rangle = -1\}$ para algún $v_{\Gamma} \in N$.*
- (ii) *$\text{Int}(\Delta) \cap M = \{0\}$.*

Los politopos reflexivos tienen propiedades combinatorias de dualidad realmente atractivas. A parte de que engendra $(\Delta^{\circ})^{\circ} = \Delta$, Batyrev muestra que la dualidad básica que existe entre Δ y Δ° es la siguiente:

Lema 2.27. *Δ es reflexivo sí y sólo si Δ° es reflexivo.*

Los politopos reflexivos se vuelven interesantes en nuestro contexto porque el siguiente resultado caracteriza cuándo \mathbb{P}_{Δ} es de Abanico.

Proposición 2.28. *Δ es reflexivo sí y sólo si \mathbb{P}_{Δ} es de Abanico.*

El ejemplo más sencillo de una variedad de Abanico es el espacio proyectivo \mathbb{P}^n . El siguiente caso a considerar es el espacio proyectivo pesado pero con un detalle a considerar sobre sus pesos.

Lema 2.29. *Sea $X = \mathbb{P}(q_0, \dots, q_n)$ un espacio proyectivo pesado y $q = \sum_{i=0}^n q_i$. Entonces X es de Abanico sí y sólo si $q_i \mid q$ para todo i .*

Demostración. El abanico de $X = \mathbb{P}(q_0, \dots, q_n)$ tiene conos generadores v_0, \dots, v_n que satisfacen $\sum_{i=0}^n q_i v_i = 0$ en la retícula n -dimensional N , y los conos maximales del abanico son generados por los subconjuntos de n -elementos de $\{v_0, \dots, v_n\}$.

Para cada i , se tiene un único $m_i \in M \otimes \mathbb{Q}$ tal que $\langle m_i, v_j \rangle = -1$ para todo $j \neq i$. Entonces el divisor D es de Cartier sí y sólo si $m_i \in M$ para

todo i . La relación $\sum_{i=0}^n q_i v_i = 0$ implica que $\langle m_i, v_j \rangle = \frac{\sum_{j \neq i} q_j}{q_i} = \frac{q}{q_i} - 1$. Como v_0, \dots, v_n genera N , vemos que $m_i \in M$ sí y sólo si $q_i | q$ para todo i . Ahora que sabemos que éste es de Cartier, el criterio de amplitud se reduce a la desigualdad $\langle m_i, v_i \rangle > -1$ que como fue visto anteriormente implica la amplitud del divisor. □

Dada una dimensión fija, sólo existe una cantidad finita de politopos reflexivos salvo transformaciones unimodulares lo que significa que sólo existe un número finito de variedades de Abanico de dimensión n salvo isomorfismo.

Como los politopos reflexivos vienen en pares Δ, Δ° , se obtienen entonces variedades de Abanico \mathbb{P}_Δ y $\mathbb{P}_{\Delta^\circ}$ que son duales en cierto sentido. Estas variedades son las que se utilizan para crear hipersuperficies de Calabi-Yau que son importantes en la simetría de espejo.

2.2. La construcción de espejo de Batyrev

Los primeros ejemplos explícitos de variedades simétricas en física fueron dados por los físicos Greene y Plesser que habían encontrado el espejo de la variedad como cociente de una hipersuperficie de Fermat y un espacio proyectivo pesado.

El matemático ruso Victor Batyrev encontró una descripción tórica que generaliza resultados anteriores sobre la construcción de espejo de Greene-Plesser. Como hemos comentado, el concepto básico que se necesita son los llamados politopos reflexivos. Un politopo reflexivo da lugar a una variedad tórica Abanico y su politopo dual también es reflexivo. Se encuentra así la dualidad entre los politopos Δ y Δ° que resulta en una dualidad entre familias de hipersuperficies de Calabi-Yau en ciertas variedades tóricas relacionadas cercanamente a \mathbb{P}_Δ y $\mathbb{P}_{\Delta^\circ}$.

Para el desarrollo de la teoría es necesario que al crear \mathbb{P}_Δ se utilicen abanicos simpliciales que refinan al abanico de \mathbb{P}_Δ . Recordemos que el abanico de \mathbb{P}_Δ es el abanico normal de Δ que consiste de los conos generados sobre las caras propias de $\Delta^\circ \subset N_{\mathbb{R}}$. Más aún, como Δ es reflexivo se sigue que

los conos generadores del abanico normal son los vértices de Δ° , que caen en $\Delta^\circ \cap N - \{0\}$.

Definición 2.11. *Dado un politopo reflexivo $\Delta \subset M_{\mathbb{R}}$, un abanico Σ en $N_{\mathbb{R}}$ es una subdivisión proyectiva si tiene las siguientes propiedades:*

- Σ refina el abanico normal de Δ .
- $\Sigma(1) \subset \Delta^\circ \cap N - \{0\}$.
- X_Σ es proyectiva y simplicial.

Además se dice que Σ es maximal si $\Sigma(1) = \Delta^\circ \cap N - \{0\}$.

La siguiente proposición muestra cómo crear variedades de Calabi-Yau usando el sistema lineal anticanónico en X_Σ y \mathbb{P}_Δ .

Proposición 2.30. *Si Δ es un politopo reflexivo de dimensión n , entonces el miembro general $\bar{V} \in |-K_{\mathbb{P}_\Delta}|$ es una variedad de Calabi-Yau de dimensión $n - 1$. Más aún, si Σ es una subdivisión proyectiva y $X = X_\Sigma$, entonces:*

(i) *El miembro general $V \in |-K_X|$ es una orbidad de Calabi-Yau.*

(ii) *Si Σ es maximal, entonces el miembro general $V \in |-K_X|$ es una orbidad de Calabi-Yau minimal.*

Se puede ahora describir la construcción de espejo de Batyrev. Sea Δ un politopo reflexivo y Σ una subdivisión proyectiva maximal de su abanico normal. Esto da lugar a una familia de hipersuperficies de Calabi-Yau $V \subset X_\Sigma$ para $V \in |-K_{X_\Sigma}|$ y cada uno de los miembros de la familia viene equipado con un cono de Kähler complejificado, obteniendo así una familia $\{(V, \omega)\}$ que consiste de todos los posibles pares de hipersuperficies de Calabi-Yau y clases de Kähler complejificadas.

Del hecho de que Δ es reflexivo, se tiene que Δ° es reflexivo, por lo que podemos repetir la construcción anterior usando el politopo Δ° . Entonces para una subdivisión proyectiva maximal Σ° del abanico normal de Δ° en $M_{\mathbb{R}}$, $|-K_{X_{\Sigma^\circ}}|$ da lugar a una familia de hipersuperficies de Calabi-Yau $V^\circ \subset X_{\Sigma^\circ}$. Agregándoles los conos de Kähler complejificados se obtiene una familia $\{(V^\circ, \omega^\circ)\}$ que se llama el espejo de Batyrev de la familia original $\{(V, \omega)\}$.

En física se cree que estas familias son simétricas en un sentido físico sobre teorías de campos superconformes. Más explícitamente existe la siguiente conjetura física:

Conjetura 2.31. *Las familias $\{(V, \omega)\}$ y $\{(V^\circ, \omega^\circ)\}$ inducen teorías de campos superconformes isomorfas cuyas $N = 2$ representaciones superconformes son la misma, salvo un cambio de signo.*

Esta conjetura de simetría especular no ha sido probada aún en física. Dada la falta de rigurosidad en los fundamentos de las teorías de campos superconformes, la conjetura física mencionada no es una conjetura en el sentido estándar matemático. Sin embargo es posible formular consecuencias matemáticas precisas de estas igualdades en las teorías de campos superconformes. En particular la simetría de espejo implica que lo siguiente debe ser verdad:

- El grupo de cohomología $H^{1,1}(V)$ ($H^{1,1}(V^\circ)$ respectivamente) debe de ser isomorfo a $H^{n-2,1}(V^\circ)$ ($H^{n-2,1}(V)$ respectivamente).
- De acuerdo a la simetría de espejo, el móduli de Kähler de V (V° , respectivamente) debe de ser localmente isomorfo (vía el morfismo de espejo) al móduli complejo de V° (V respectivamente).
- La función de correlación del modelo A de V (V° , respectivamente) debe de corresponder (vía el morfismo de espejo) a la adecuada función de correlación normalizada del modelo B de V° (V , respectivamente).

En cuanto a éstas Batyrev ha demostrado la primera que se establece en el siguiente teorema:

Teorema 2.32. *Si Δ es un politopo reflexivo n -dimensional y V es una hipersuperficie anticanónica general en X_σ , donde σ es una subdivisión proyectiva maximal del abanico de Δ , entonces los números de Hodge de V y V° (relativo a Δ°) entonces:*

$$h^{1,1}(V) = h^{n-2,1}(V^\circ) \quad y \quad h^{n-2,1}(V) = h^{1,1}(V^\circ)$$

[D. Cox and S. Katz pp. 57-60]

El reto para los matemáticos es probar tales consecuencias de manera general. Muchos progresos se han hecho cuando V° es el espejo de Batyrev de V .

Bibliografía

- [1] V. Danilov, *The geometry of toric varieties*, Russian Math. Surveys 33:2 (1987), 97-154.
- [2] Jean-Paul Brasselet, *Introduction to toric varieties*, IMPA Mathematical Publications 23, (2001).
- [3] David Cox, *What is a toric variety?*, Topics in algebraic geometry and geometric modeling, Contemp. Math. 334, Amer. Math. Soc., pp. 203-223.
- [4] W. Fulton, *Introduction to toric varieties*, Annals of Math. Studies, Princeton Univ. Press (1993).
- [5] D. Cox and S. Katz, *Mirror Symmetry and Algebraic Geometry*, Math. Surveys Monogr. 68, AMS (1999).
- [6] G. Ewald, *Combinatorial convexity and Algebraic Geometry.*, Graduate Texts in Mathematics. 168. (1996).
- [7] T. Oda, *Convex Bodies and Algebraic Geometry*. *Ergebn. Math. Grenzgeb.* (3. Folge), Bd. 15, Springer-Verlag. Berlin, (1988).
- [8] Günter M. Ziegler, *Lectures on Polytopes*. Volumen 152 de Graduate Texts in Mathematics, Springer, (1995)
- [9] K. Hori, S. Katz, A. Klemm, *Mirror Symmetry* American Mathematical Society, 2003.
- [10] V. Bouchard, *Lectures on Complex Geometry, Calabi-Yau manifolds and Toric Geometry*. Lecture notes, University of Oxford, 2005.

- [11] V. Batyrev, *Dual Polyhedra and the mirror symmetry for Calabi-Yau hypersurfaces in toric varieties*. J. Algebraic Geometry, 3, 1994.