CIMAT

Centro de Investigación en
Matemáticas A.C.

Modelos Algebraicos De Variedades Diferenciables

T E S I S

Que para obtener el grado de

Maestro en ciencias

con Especialidad en

Matemática Básica

P R E S E N T A:

Omar Enrique Garcia Caicedo

Director de Tesis:

Dr. Pedro Luis Del Ángel Rodríguez

GUANAJUATO, GTO. AGOSTO 2015

CIMAT

Centro de Investigación en Matemáticas A.C.

Modelos Algebraicos de Variedades Diferenciables

T E S I S

Que para obtener el grado de

Maestro en Ciencias

con Especialidad en

Matemática Básica

P R E S E N T A:

Omar Enrique Garcia Caicedo

Comité de Evaluación:

Dr. Xavier Gómez Mont Ávalos
(Presidente)

Dr. Jimmy Petean Humen
(Secretario)

Dr. Pedro Luis Del Ángel Rodríguez
(Director de Tesis)

GUANAJUATO, GTO. AGOSTO 2015

Agradecimientos

A mi asesor de tesis, el Dr. Pedro Luis Del Angel Rodriguez, por la dedicación, confianza y paciencia en el trabajo de la tesis. De igual forma, dirijo un especial agradecimiento a CONACYT por el apoyo financiero que ofreció para mis estudios de maestría.

A CIMAT, que a través de sus espacios me permitió continuar con mi formación en un ambiente agradable para el estudio y el intercambio cultural.

Para finalizar, hago mención que este trabajo forma parte del proyecto CONACYT No. 280303, Modelos Algebraicos de Variedades Diferenciables , dirigido por el Dr. Pedro Luis Del Angel Rodriguez.

Introducción

Las nociones de Variedad Diferenciable y Variedad Algebraica son similares sin embargo, su diferencia radica y muy importante, es que una variedad algebraica puede tener puntos singulares mientras que una variedad diferenciable no tiene. A partir de lo anterior, se formula la siguiente pregunta ***¿cuando una variedad dierenciable puede verse como una variedad algebraica?.***

Para responder esta pregunta usaremos el siguiente objeto: "*Si M es una variedad diferenciable y X es una variedad algebráica afín no-singular difeomorfa a M, se dice que X es un **Modelo Algebraico** de M*", así podemos reformular la pregunta anterior ***¿Cuando una variedad diferenciable tiene un modelo algebraico?***.

Uno de los primeros resultados relacionados con la anterior pregunta se debe a Herbert Seifert que en 1936 probó que toda variedad diferenciable cerrada de $\mathbb{R}^n$ con haz normal trivial, es *isótopa a una componente* de un conjunto algebraico no-singular de $\mathbb{R}^n$ el cual es una intersección completa ([24]), aunque este resultado no responde la pregunta, si mostró que la pregunta puede ser resuelta al menos cuando la variedad a considerar es cerrada, luego en 1952 John Nash demostró que toda variedad diferenciable cerrada y conexa de $\mathbb{R}^n$ es difeomorfa a una componente conexa de un conjunto algebraico no-singular de $\mathbb{R}^n$ ([20]), finalmente en 1973 Alberto Tognoli demostró que en efecto toda variedad diferenciable cerrada y conexa de $\mathbb{R}^n$ es difeomorfa a un conjunto algebraico no-singular de $\mathbb{R}^N$ para un N suficientemente grande ([26]).

Este trabajo se basa en la sección 1 del capitulo 14 del libro Real Algebraic Geometry de J. Bochnak, M. Coste, M. Roy([4]) págs 373 a 380 donde se exponen los resultados de Seifert, Nash y Tognoli.

En el Capítulo 1 presentaremos conceptos y resultados básicos de *topologia diferencial*, en las secciones 1.1 y 1.2 se definen los conceptos variedad diferenciable, subvariedad diferenciable, espacio tangente y espacio normal de una variedad, en la sección 1.3 se demuestran los teoremas de la pre-imagen en la sección 1.4 se define el concepto de transversalidad y se demuestra el Teorema de Densidad de la Transversalidad, en la sección 1.5 se demuestra el teorema de la vecindad tubular, en la sección 1.6 se muestra la relacion entre homopías, transversalidad y aproximación de funciones entre variedades diferenciables, en las secciones 1.7 y 1.8 se definen haz vectorial y orientabilidad de una variedad diferenciable respectivamente, en la sección 1.9 se demuestra el Teorema transversal de Isotopía necesario en el capitulo 3.

En el Capítulo 2 presentaremos conceptos y resultados básicos de geometría semi-algebraica, en la sección 2.1 se definen conjuntos semi-algebraicos y se muestran las propiedades basicas de estos, en las secciones 2.2 y 2.3 se definen las funciones polinomiales y racionales entre conjuntos algebraicos y los conceptos de regularidad y de variedad algebraica respectivamente, en la sección 2.4 se enuncian un par de teoremas sobre aproximación de funciones regulares necesarios en el capitulo 3 y finalmente en la sección 2.5 se definen el espacio proyectivo y el grassmanniano y haces vectoriales algebraicos.

Finalmente en el capitulo 3 demostraremos los resultados de Seifert, Nash y Tognoli.

Contenido

Capítulo 1
Topologia Diferencial

En este capítulo explicaremos conceptos y teoremas importantes de *Topologia Diferencial* que nos ayudarán a entender la noción de *variedad diferenciable* y sus propiedades y que serán usados a lo largo de este trabajo.

§1.1 Variedades y Subvariedades

Empezaremos definiendo el ***semiespacio superior*** en $\mathbb{R}^n$,

$$\mathbb{H}^n = \{(x_1, \cdots, x_n) \in \mathbb{R}^n | x_n \geq 0\} \subseteq \mathbb{R}^n$$

Y su ***frontera*** como

$$\partial\mathbb{H}^n = \{(x_1, \cdots, x_{n-1}, 0) | x_i \in \mathbb{R}\, \forall i = 1, ..., n-1\} = \mathbb{R}^{n-1} \times \{0\} \subseteq \mathbb{R}^n$$

Definición 1.1.1. Sea M un espacio topológico, una ***carta o sistema de coordenadas n-dimensional*** en M es un par (U, φ) donde $U \subseteq M$ es un abierto y $\varphi : U \to \mathbb{H}^n$ es un ***difeomorfismo*** de U sobre el abierto $\varphi(U) \subseteq \mathbb{H}^n$.

Observación 1.1.2. Dada una carta (U, φ) y $x \in U \subseteq M$, entonces la función inversa $\varphi^{-1} : \varphi(U) \to U$ se llama ***parametrización local en*** x.

Definición 1.1.3. Un ***atlas n-dimensional de clase*** C^∞ sobre M es una coleccion $\mathscr{A} = \{(U_i, \varphi_i) | i \in \Lambda\}$ de cartas de M donde Λ es un conjunto de indices, tal que:

1. $M = \bigcup\limits_{i \in \Lambda} U_i$.

2. Si $U_i \cap U_j \neq \phi$ entonces el cambio de coordenadas

$$\varphi_j \circ \varphi_i^{-1} : \varphi_i(U_i \cap U_j) \to \varphi_j(U_i \cap U_j)$$

es un difeomorfismo de clase C^∞ entre los abiertos $\varphi_i(U_i \cap U_j), \varphi_j(U_i \cap U_j)$ de $\mathbb{H}^n$.

Definición 1.1.4. Una carta $\psi : V \to \mathbb{H}^n$ en M es ***admisible respecto a el atlas*** $\mathscr{A}$, si $\mathscr{A} \cup \{(V, \psi)\}$ es un atlas n-dimensional de clase C^∞ en M.

Definición 1.1.5. Dados $\mathscr{A}$ y $\mathscr{B}$ atlas en M, se dice que $\mathscr{A}$ y $\mathscr{B}$ son ***compatibles*** si $\mathscr{A} \cup \mathscr{B}$ es un atlas para M. Se denota $\mathscr{A}_M^\infty$ el conjunto de todos los atlas (que posiblemente existan) de clase C^∞ de M y se define la siguiente relacion de equivalencia: *dados* $\mathscr{A}, \mathscr{B} \in \mathscr{A}_M^r$ *decimos* $\mathscr{A} \sim \mathscr{B}$ *si y sólo si* $\mathscr{A} \cup \mathscr{B} \in \mathscr{A}_M^\infty$. El conjunto cociente $\mathscr{A}_M^\infty / \sim$ se llama ***conjunto de estructuras diferenciables n-dimensionales de clase*** C^∞ ***en*** M**,** y las clases de equivalencia se denotan $[\mathscr{A}]$.

Definición 1.1.6. Una ***variedad (diferenciable n-dimensional) con frontera, de clase*** C^∞ es un par $(M, [\mathscr{A}])$, donde M es un espacio topológico y $[\mathscr{A}] \in \mathscr{A}_M^r / \sim$ es una estructura diferenciable de clase C^∞ en M.
Si en particular toda carta del atlas satisface que $\psi : V \to \mathbb{H}^n$ es un difeomorfismo de V y un abierto totalmente contenido en el interior de $\mathbb{H}^n$ se dice que $(M, [\mathscr{A}])$ es una ***variedad (diferenciable n-dimensional) sin frontera, de clase*** C^∞. El numero n es llamado ***dimensión*** de M y se escribe $n = dim(M)$, frecuentemente se usa la notacion M^n para indicar que la variedad tiene dimensión n.

Observación 1.1.7. Se tiene que:

1. Un subconjunto abierto de una variedad es una variedad a su vez.

2. La dimensión de una variedad no depende del atlas.

3. El conjunto $\partial M = \{x \in M | \phi(x) \in \mathbb{R}^{n-1} \times \{0\} \; para\, alguna\, carta\, \phi\}$ se llama la **frontera de** M, y el conjunto $M - \partial M = \{x \in M | \phi(x) \in int(\mathbb{H}^n) \, para\, alguna\, carta\, \phi\}$ se llama el **interior de** M**.** En particular ∂M y $M - \partial M$ son variedades sin frontera con $dim(\partial M) = n - 1$ y $dim(M - \partial M) = n$.

4. Para variedades sin frontera las cartas pueden darse como difeomorfismos sobre un abierto de $\mathbb{R}^n$.

5. Toda variedad es ***locamente conexa, Hausdorff y localmente compacta***, por tanto toda variedad es un ***espacio de Baire***.

Definición 1.1.8. Sea M^n una variedad. $S \subseteq M$ un subespacio topológico se dice ***subvariedad de dimensión*** $s\,(\leq n)$ ***de*** M**,** si para cada $p \in S$ existen un abierto $U \subseteq M$ con $p \in U$, y un difeomorfismo, $\varphi : U \to \mathbb{R}^s \times \mathbb{R}^{n-s}$ tal que $\varphi(U \cap S) \subseteq (\mathbb{R}^s \times \{0\})$.
En el caso de M^n una variedad con frontera, S es una ***(neat)-subvariedad de dimensión*** $s\,(\leq n)$ ***de*** M si es una subvariedad que además subconjunto cerrado que satisface:

1. $\partial S = S \cap \partial M$.

2. En cada punto $p \in \partial S$ existe una carta (U, ϕ) para M, $\phi : U \to \mathbb{R}^{n-s} \times \mathbb{H}^s$ tal que $\phi(U \cap S) \subseteq \{0\} \times \mathbb{H}^m$.

Observación 1.1.9. Se tiene,

1. A una *variedad compacta sin frontera* se le llama ***variedad cerrada.*** A una *variedad no-compacta sin frontera* se le llama ***variedad abierta.***

2. A el numero $n - s$ se le llama ***codimensión de*** S ***en*** M y se nota $codim_M(S)$.

Definición 1.1.10. Dadas $M \subseteq \mathbb{R}^n$ y $N \subseteq \mathbb{R}^m$ dos variedades, una sin frontera (podemos suponer N, pues la permutación de coordenadas $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n$ es un difeomeorfismo). Entonces $M \times N \subseteq \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m$ es una variedad con frontera $\partial(M \times N) = (\partial M) \times N$, llamada ***variedad producto***. En el caso de M una variedad sin frontera e $I = [0, 1]$ se tiene que $\partial(M \times I) = (M \times \{0\}) \cup (M \times \{1\})$. Ademas, si $(x, y) \in M \times N$ se tiene $dim(M \times N) = dim(M) + dim(N)$.

Lema 1.1.11. *Sea $M \subseteq N$, donde N es una variedad. Si para todo $p \in M$ existe una vecindad V de p en N tal que $M \cap V$ es subvariedad de dimensión m entonces M es una subvariedad de dimensión m de N.*

Demostración. Sea $p \in M$, por hipótesis existe una vecindad V de p en N tal que $M \cap V$ es una subvariedad de dimensión m, entonces existe $W \subseteq N$ abierto, $p \in W$ y un difeomorfismo $\psi{:}W \to \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^{n-m}$ tal que $\psi((M \cap V) \cap W) \subseteq \mathbb{R}^m \times \{0\}$. Haciendo $U = V \cap W \subseteq V$ y $\varphi = \psi|_U$ tenemos un difeomorfismo $\varphi : U \to \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^{n-m}$ tal que $\varphi(M \cap U) \subseteq \mathbb{R}^m \times \{0\}$ y por tanto M es subvariedad de N. $\square$

§1.2 Espacio Tangente, Espacio Normal

En esta sección se consideraran variedades como subconjuntos de $\mathbb{R}^N$ para algun $N \in \mathbb{N}$. Sea M una k-variedad en $\mathbb{R}^n$ y $x \in U \subseteq M$. Sea $\varphi : A \to U$ una parametrización local en x, $A \subseteq \mathbb{H}^k$ y denotemos $\phi = \varphi^{-1}$, existe un abierto $W \subseteq \mathbb{R}^n$ tal que $W \cap M = U$ y una función $\overline{\phi} : W \to \mathbb{R}^k$ tal que $\overline{\phi}|_U = \phi$, y derivando la composición $\overline{\phi} \circ \varphi : A \to \mathbb{R}^k$ resulta $Id = D_x\overline{\phi} \circ D_{\varphi^{-1}(x)}\varphi : \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}^k$, esto significa que $D_{\varphi^{-1}(x)}\varphi$ es una transformacion lineal inyectiva. Ahora consideremos otra parametrización $\psi : B \to V$ con $x \in V$ y la composición

$$\theta : \phi \circ \psi = \psi^{-1}(U \cap V) \to \phi^{-1}(U \cap V)$$

es un difeomorfismo y por tanto su derivada $D_{\psi^{-1}(x)}\theta$ es un isomorfismo. Como $\theta = \phi \circ \psi$ entonces $\varphi \circ \theta = \psi$ usando la regla de la cadena se obtiene

$$D_{\varphi^{-1}(x)}\varphi \circ D_{\psi^{-1}(x)}\theta = D_{\psi^{-1}(x)}\psi$$

Por tanto las dos transformaciones lineales inyectivas $D_{\varphi^{-1}(x)}\varphi$ y $D_{\psi^{-1}(x)}\psi$ tienen la misma imagen, que es un subespacio lineal de dimensión k de $\mathbb{R}^n$. Por lo expuesto anteriormente se puede definir sin ambigüedad:

Definición 1.2.1. El conjunto $\mathrm{Im}(D_{\varphi^{-1}(x)}\varphi) \subseteq \mathbb{R}^n$ se llama el ***Espacio Tangente a*** M ***en el punto*** x y se denota T_xM. Por todo lo anterior se tiene que $k = dim(M) = dim(T_xM)$ y que $D_{\varphi^{-1}(x)}\varphi$ es in isomorfismo de $\mathbb{R}^k$ sobre T_xM.

Observación 1.2.2. Dada (U, φ) una carta en M, entonces para todo $x \in U$ se tiene que $T_xU \cong T_xM$. En particular para todo $A \subseteq M$ abierto se tiene $T_xA \cong T_xM$, $\forall x \in A$.

Observación 1.2.3. Dadas M y N variedades para la variedad producto $M \times N$ se tiene que $T_{(x,y)}(M \times N) = T_xM \times T_yN$ para todo $(x, y) \in M \times N$.

Definición 1.2.4. Sea M^k una variedad con frontera, $x \in \partial M$, entonces para $w = (w_1, ..., w_k) \in T_xM$ se dice que:

1. ***Apunta hacia afuera de*** M, si $w_k > 0$.
2. ***Apunta hacia adentro de*** M, si $w_k < 0$.
3. ***Es tangencial a*** ∂M, si $w_k = 0$.

Consideremos ahora el conjunto

$$TM = \{(x, u) \in M \times \mathbb{R}^n | u \in T_xM\} \subseteq M \times \mathbb{R}^n \subseteq \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$$

denotamos $\tau : TM \to M$ a la resticcion de la proyeccion lineal

$$\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n : (x, u) \to x$$

Entonces el par (TM, τ) denotado TM se llama ***(Espacio Tangente Total de*** M***)*** y podemos identificar $\tau^{-1}(x)$ con T_xM. Ademas τ tiene una inversa por la derecha, denominada ***sección nula*** dada por $x \mapsto (x, 0)$, esta sección es un difeomorfismo sobre su imagen $M \times \{0\} \subseteq TM$.

Observación 1.2.5. $TM \subseteq \mathbb{R}^{2n}$ es una variedad de dimensión $2k$ y con frontera $\partial(TM) = \tau^{-1}(\partial M)$.

Definición 1.2.6. Para cada $x \in M$ se denota por N_xM el subespacio vectorial de $\mathbb{R}^n$ *ortogonal* a T_xM y se denomina ***Espacio Normal a*** M ***en el punto*** x.

Observación 1.2.7. Por todo lo anterior se tiene que $N_xM \oplus T_xM = \mathbb{R}^n$ y por tanto $dim(N_xM) = n - dim(T_xM) = n - k$.

Consideremos ahora el conjunto

$$NM = \{(x, u) \in M \times \mathbb{R}^n | u \in N_xM\} \subseteq M \times \mathbb{R}^n \subseteq \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$$

Y denotamos $\nu : NM \to M$ a la resticcion de la proyeccion lineal

$$\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n : (x, u) \to x$$

Entonces el par (NM, ν) denotado NM se llama ***Espacio Normal Total de*** M y podemos identificar $\nu^{-1}(x)$ con N_xM. Ademas ν tiene una inversa por la derecha, denominada ***sección nula*** dada por $x \mapsto (x, 0)$, esta sección es un difeomorfismo sobre su imagen $M \times \{0\} \subseteq NM$.

Observación 1.2.8. $NM \subseteq \mathbb{R}^{2n}$ es una variedad de dimensión k y con frontera $\partial(NM) = \nu^{-1}(\partial M)$ y ν es una sumersión, además para todo $(x, v) \in NM$, $T_{(x,v)}(NM) = T_xM \times N_xM$.

§1.3 Funciones Diferenciables entre Variedades

Definición 1.3.1. Dadas M^n y N^m dos variedades. Decimos que una función $f : M \to N$ es de clase C^∞ si para todo punto $x \in M$ existen cartas (U, φ) en M y (V, ψ) en N, con $x \in U$ y $f(U) \subseteq V$ tales que $\psi \circ f \circ \varphi^{-1} : \varphi(U) \to \psi(V)$ es de clase C^∞ en el punto $\varphi(x) \in \mathbb{R}^m$. La función $f_{\varphi\psi} = \psi \circ f \circ \varphi^{-1}$ es llamada ***localización*** f ***en las coordenadas*** φ, ψ (*tambien se puede obtener la localización utilizando parametrizaciones locales* ***observación 1.1.2***). En adelante a las funciónes entre variedades de clase C^∞ se les llamara ***funciones diferenciables.***

En la notación de la ***sección 1.2,*** dada una función $f : M^p \to N^q$ de clase C^∞, es decir, que para cada punto $x \in M$ existe una función $\overline{f} : U \to \mathbb{R}^m$ de clase C^∞ definida en una vecindad abierta U de x en $\mathbb{R}^n$ y tal que $\overline{f}|_{U\cap M} = f|_{U\cap M}$ y sea $y = f(x)$.

Proposición 1.3.2. *En la situación anterior:*

1. $D_x\overline{f}(T_xM) \subseteq T_yN$.
2. *La restricción* $D_xf : T_xM \to T_yN$ *de* $D_x\overline{f} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ *sólo depende de* f *y no de la extension* $\overline{f}$ *elegida.*

Demostración. Despues de una elección apropiada de vecindades U de x en $\mathbb{R}^n$ y V de y en $\mathbb{R}^m$, existen parametrizaciones $\varphi : A \to U \cap M$, $\psi : B \to V \cap N$, con $A \subseteq \mathbb{H}^p$y $B \subseteq \mathbb{H}^q$, de modo que $\overline{f}(U) \subseteq V$ tales que se tiene la *localización* $g = \psi^{-1} \circ f \circ \varphi : A \to B$ de clase C^∞ y $x = \varphi(a)$.

$$\begin{tikzcd}
U \arrow[r, "\overline{f}"] & V \\
U \cap M \arrow[u] \arrow[r, "f"] & V \cap N \arrow[u] \\
A \arrow[u, "\varphi"] \arrow[r, "g"] & B \arrow[u, "\psi"']
\end{tikzcd}$$

Así dado $z \in T_xM$, entonces $z = D_a\varphi(t)$, $t \in \mathbb{R}^p$, y se tiene

$$D_x\overline{f}(z) = D_{\varphi(a)}\overline{f} \circ D_a\varphi(t) = D_b\psi \circ D_ag(t) \in T_yN$$

lo que muestra ***1.*** Pero además, el segundo miembro no depende de la extensión $\overline{f}$, y se sigue ***2.*** $\square$

Definición 1.3.3. A la transformacion lineal $D_x f : T_x M \to T_y N$ se le llama *derivada de f en x*. La función $Df : TM \to TN \,:\, (x,z) \mapsto (f(x), D_x f(z))$ de llama *derivada de f*.

Así para cualquier función $f : M \to N$ entre variedades se tiene el siguiente diagrama:

$$\begin{tikzcd}
TM \arrow[r, "Df"] \arrow[d, "\tau_M"'] & TN \arrow[d, "\tau_N"] \\
M \arrow[r, "f"'] & N
\end{tikzcd}$$

Una función
$$h = (f,g) : P \to M \times N \,:\, z \mapsto (f(z), g(z))$$
es de clase C^∞, si y sólo si, lo son $f : P \to M$ y $g : P \to N$. Además:

$$D_z h = (D_z f, D_z g) : T_z P \to T_{f(z)} M \times T_{g(z)} N \,:\, u \mapsto (D_z f(u), D_z g(u))$$

Definición 1.3.4. Sea $f : M \times N \to P$ una función de clase C^∞. Para cada $x \in M$ y $y \in N$ se definen ***las funciones parciales*** (de clase C^∞)

$$f_x : N \to P \,:\, y \mapsto f_x(y) = f(x,y)$$

$$f_y : M \to P \,:\, x \mapsto f_y(x) = f(x,y)$$

y las transformaciones lineales

$$D_x f_y : T_x M \to T_{f(x,y)} P$$

$$D_y f_x : T_y N \to T_{f(x,y)} P$$

se denominan ***derivadas parciales,*** y se denotan respectivamente

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y),\ \frac{\partial f}{\partial y}(x,y)$$

y de este modo se tiene la fórmula

$$D_{(x,y)} f(u,v) = \frac{\partial f}{\partial x}(x,y)(u) + \frac{\partial f}{\partial y}(x,y)(v),\ \forall (u,v) \in T_x M \times T_y N = T_{(x,y)} M \times N$$

Definición 1.3.5. Dadas M^n y N^m variedades diferenciables. Se dice que un *homeomorfismo* $f : M \to N$ es un *difeomorfismo* si tanto f como f^{-1} son diferenciables. La relacion de difeomorfismo entre dos variedades se denota $M \approx N$.

Definición 1.3.6. Sea $f : M \to N$ una función diferenciable de variedades, $q = f(p)$

1. f es una ***inmersión en*** p si D_pf es inyectiva. f es una ***inmersión*** si es una inmersion en todo $p \in M$.

2. f es una ***sumersión en*** p si D_pf es sobreyectiva. f es una ***sumersión*** si es una sumersión en todo $p \in M$.

3. f es un ***difeomorfismo local en*** p si D_pf es biyectiva. f es un ***difeomorfismo local*** si es un difeomorfismo local en todo $p \in M$.

4. f es un ***encaje*** si f es una *inmersión* y un *difeomorfismo* sobre su imagen.

Observación 1.3.7. Para una variedad con frontera M, la inclusión $j : \partial M \hookrightarrow M$ es una inmersión, esto es, $T_xj : T_x(\partial M) \to T_xM$ es inyectiva y su imagen consiste en los vectores tangenciales a M.

Lema 1.3.8. *Sea $f : M \to N$ una función diferenciable entre variedades*

1. *Si f es una inmersión entonces $dim(M) \leq dim(N)$.*

2. *Si f es una sumersión entonces $dim(M) \geq dim(N)$.*

3. *Si f es un difeomorfismo local entonces $dim(M) = dim(N)$.*

Proposición 1.3.9. *Dadas $M \subseteq \mathbb{R}^n$ y $N \subseteq \mathbb{R}^m$ dos variedades con frontera y $f : M \to N$ un difeomorfismo, entonces $f(\partial M) = \partial N$.*

Demostración. [9] pag. 7. □

Definición 1.3.10. Una función $f : M \to N$ entre variedades con frontera se dice que ***conserva la frontera*** en $T \subseteq M$ si todo punto $x \in T$ tiene una vecindad U tal que $f(U \cap \partial M) \subseteq \partial N$. Convenimos que esto se cumple trivialmente si $T \subseteq int(M)$, se denota $\partial f = f|_{\partial M}$.

A continuacion se enuncian el ***Teorema de Inversión Local (1.3.11)*** y el ***Teorema de Inmersión de Whitney (1.3.12)*** y el ***Teorema de Sard-Brown (1.3.15)*** cuyas demostraciones se puede ver en [9]

Teorema 1.3.11. ***(Teorema de Inversión Local)***
Dadas $M \subseteq \mathbb{R}^n$, $N \subseteq \mathbb{R}^m$ variedades (con frontera). $f : M \to N$ es un difeomorfismo local en $x \in M$ si y sólo si la derivada $D_xf : T_xM \to T_{f(x)}N$ es un isomorfismo (y f conserva la frontera en x).

Demostración. [9] pag. 16. □

Teorema 1.3.12. ***(Teorema de encaje de Whitney)***
Sea $X \subseteq \mathbb{R}^m$ una variedad de C^∞ y dimensión p. Entonces existe un encaje cerrado $f : X \to \mathbb{R}^{2p+1}$.

Demostración. [9] pag. 67. □

Definición 1.3.13. Sea $f : M \to N$ una función diferenciable de variedades

1. $p \in M$ es un ***punto regular de*** f si $D_p f$ es sobreyectiva, en caso contrario se dice que p es un ***punto crítico de*** f.

2. $q \in N$ es un ***valor regular de*** f si todo punto de $f^{-1}(q)$ es un punto regular de f, en caso contrario se dice que q es un ***valor crítico de*** f. Notemos que el conjunto de los valores regulares de f incluye a todos los puntos de $N - f(M)$, es decir, si para algun $q \in M$ se tiene $f^{-1}(q) = \emptyset$ entonces trivialmente q es un valor regular de f.

Observación 1.3.14. Del ***Lema 1.3.8 (2.)*** se tiene que si $dim(M) < dim(N)$ entonces todos los puntos de M son puntos críticos de f. El *conjunto de puntos regulares* f se denota $\mathcal{R}_f$ y el *conjunto de los puntos críticos de* f se denota $\mathcal{C}_f = M - \mathcal{R}_f$. El *conjunto de los valores regulares de* f se denota $\mathcal{V}_f$ y notemos que $\mathcal{V}_f \cap f(M) \subseteq f(\mathcal{R}_f)$, en general estos conjuntos no son iguales y como consecuencia del ***Teorema De La función Implicita***

$$\mathcal{R}_f \subseteq M,\ f(\mathcal{R}_f) \subseteq N,\ \mathcal{V}_f \subseteq N$$

son abiertos, en particular los puntos donde f es sumersión también es un abierto.

Teorema 1.3.15. ***(Teorema de Sard-Brown)***
Sean M^p y N^q variedades, $f \in C^r(M, N)$. Si $r > p - q$ el conjunto $\mathcal{V}_f$ de valores regulares de f es residual, y por tanto denso en N.

Demostración. [9] pag. 62 □

Lema 1.3.16. *Sea $U \subseteq \mathbb{R}^n$ un abierto y sea $f \in C^\infty(U, \mathbb{R}^m)$. Sea $q \in \mathcal{V}_f$, entonces, $f^{-1}(q) = \emptyset$ ó $M = f^{-1}(q)$ es una subvariedad de codimensión m. Además para cada $p \in M$ se tiene que $T_p M = ker(D_p f)$.*

Demostración. Si $f^{-1}(q) = \emptyset$ no hay nada que probar. Supongamos entonces que $f^{-1}(q) \neq \emptyset$. Dado $p \in M = f^{-1}(q)$ la hipótesis dice que $D_p f$ es sobreyectiva, entonces por la ***forma local de las sumersiones,*** $\mathbb{R}^n = \mathbb{R}^{n-m} \times \mathbb{R}^m$ con $p = (v_0, w_0)$ existe un difeomorfismo, $h_p : V \times W \to Z_p$ tal que para $(v, w) \in V \times W$, $(f \circ h)(v, w) = w$, donde $V \subseteq \mathbb{R}^{n-m}$, $W \subseteq \mathbb{R}^n$ y $Z_p \subseteq U$ son abiertos, con $v_0 \in V$, $q \in W$ y $p \in Z_p$. Haciendo $\varphi_p : V \to Z_p$ definida por $\varphi_p(x, h_p(x))$, obtenemos una parametrización local de M en p. Por tanto M es una subvariedad de U con cartas (Z_p, φ_p^{-1}).

Ahora, sea $v \in T_pM$, existe una curva, $\lambda :]-\epsilon, \epsilon[\to M$, $\lambda(0) = p$ tal que $\frac{d\lambda}{dt}(0) = v$. Luego,

$$D_pf(v) = D_{\lambda(0)}f \circ D_0\lambda(1) = D_0(f \circ \lambda)(1) = \frac{d(f \circ \lambda)}{dt}(0) = 0$$

pues $(f \circ \lambda)(0) = q$. Por tanto, $v \in ker(D_pf)$. Ahora como $dimT_pM = dim(ker(D_pf)) = n - m$, se sigue que $T_pM = ker(D_pf)$. □

Teorema 1.3.17. ***(Teorema De La Pre-imagen)***
Sean M^n, N^m variedades sin frontera, $f \in C^\infty(M, N)$. Para todo $q \in \mathcal{V}_f \cap \mathcal{V}_{\partial f}$, $W = f^{-1}(q)$ es vacío o es una subvariedad cerrada de M de codimensión m. Además, el espacio tangente a W en un punto $w \in W$ es precisamente el kernel de D_wf.

Demostración. Si $f^{-1}(q) = \emptyset$ no hay nada que probar. Supongamos entonces que $f^{-1}(q) \neq \emptyset$. Dado $p \in W = f^{-1}(q)$ y cartas (U, φ) de p en M y (V, ψ) de q en N con $f(U) \subseteq V$

$$\varphi : U \to \mathbb{R}^n,\ p \in U \qquad y \qquad \psi : V \to \mathbb{R}^m,\ q \in V$$

entonces $\psi(q)$ es un valor regular de $f_{\varphi\psi} = \psi \circ f \circ \varphi^{-1} : \varphi(U) \subseteq \mathbb{R}^n \to \psi(V) \subseteq \mathbb{R}^m$ por el ***lema 1.3.16*** $(f_{\varphi\psi})^{-1}(\psi(q))$ es una subvariedad de codimensión m, así $(f_{\varphi\psi})^{-1}(\psi(q)) = W \cap U$ es una subvariedad de codimensión m y por ***lema 1.1.11*** $W = f^{-1}(q)$ es una subvariedad de codimensión m de M.
Por otra parte

$$T_pW \cong T_{\varphi(p)}((f_{\varphi\psi})^{-1}(\psi(q)) = ker(D_p(f_{\varphi\psi})) = ker(D_q\psi \circ D_pf \circ D_{\varphi(p)}\varphi^{-1}) = ker(D_pf)$$

pues $D_q\psi \cong D_{\varphi(p)}\varphi^{-1}$. □

Lema 1.3.18. *Sea S una variedad sin forntera y $\pi : S \to \mathbb{R}$ una función diferenciable tal que 0 es un valor regular de π. Entonces $\{s \in S | \pi(s) \geq 0\}$ es vacío o es una subvariedad de la misma dimensión de S y con frontera igual a $\{s \in S | \pi(s) = 0\}$.*

Demostración. El conjunto $\{s \in S | \pi(s) > 0\} \subseteq S$ es abierto y por tanto una subvariedad de S. Así que sea $s \in S$ tal que $\pi(s) = 0$ (y por hipótesis $s \in \mathcal{R}_f$). Por la ***forma local de las sumersiones,*** podemos asumir que π es la proyección coordenada en un vecindad de $s \in S$ y entonces el resultado es obvio. □

Teorema 1.3.19. ***(Teorema de la Pre-imagen generalizado)***
Sean M^n variedad con frontera, N^m variedad sin frontera, $f \in C^\infty(M, N)$. Para todo valor regular q de f y ∂f. Entonces $W = f^{-1}(q)$ es vacío o es una (neat)-subvariedad de M de codimensión m. Además, el espacio tangente a W en un punto $w \in W$ es precisamente el kernel de D_wf.

Demostración. Si $f^{-1}(q) = \emptyset$ no hay nada que probar. Supongamos entonces que $f^{-1}(q) \neq \emptyset$. Dado $p \in W = f^{-1}(q)$ y cartas (U, φ) de p en M y (V, ψ) de q en N con $f(U) \subseteq V$

$$\varphi : U \to \mathbb{H}^n,\ p \in U \qquad y \qquad \psi : V \to \mathbb{R}^m,\ q \in V$$

entonces $\psi(q) \in \mathbb{R}^m$ es un valor regular de $f_{\varphi\psi} = \psi \circ f \circ \varphi^{-1} : \varphi(U) \subseteq \mathbb{H}^n \to \psi(V) \subseteq \mathbb{R}^m$. Por lo que sin perdida de generalidad suponemos que $f : \mathbb{H}^n \to \mathbb{R}^m$ y que $p = 0 \in \mathbb{H}^n$, $q = 0 \in \mathbb{R}^m$. Sea $x \in f^{-1}(0)$. Si $x \in int(\mathbb{H}^n)$ entonces por el ***teorema 1.3.17*** se tiene el resultado. Sea entonces $x \in \partial\mathbb{H}^n$, como f es diferenciable existen $U' \subseteq \mathbb{R}^n$ abierto con $x \in U'$ y $g : U' \to \mathbb{R}^m$ una función diferenciable tal que $g|_{U' \cap \mathbb{H}^n} = f|_{U' \cap \mathbb{H}^n}$, y se cumple $D_{x'}g = D_{x'}f$, $\forall x' \in U' \cap \mathbb{H}^n$, de esta forma *si x es punto regular de f entonces es tambien punto regular de g*. Como x es un punto regular de g y el conjunto de puntos regulares es abierto (***observación 1.3.12***) podemos considerar que U' es suficientemente pequeño de manera que todos sus puntos sean puntos regulares de g. Esto significa que 0 es valor regular de g, y por el ***lema 1.3.16*** $g^{-1}(0)$ es una subvariedad de codimensión m. También podemos suponer U' suficientemente pequeño tal que $g^{-1}(0) \cap U' = S$ es una subvariedad de codimensión m. De aquí se tiene que $\mathbb{H}^n \cap S = f^{-1}(0) \cap U'$ y por tanto, debemos mostrar que $\mathbb{H}^n \cap S$ es subvariedad con frontera $\partial\mathbb{H}^n \cap S$.

Consideremos la restricción a S de la proyección en la última coordenada, esto es, $\pi : S \to \mathbb{R}$, $\pi(x_1, ..., x_n) = x_n$, veamos que $0 \in \mathcal{V}_\pi$. En efecto, dado $z \in \pi^{-1}(0)$, veamos que $D_z\pi$ es no-nulo. Como π es la restricción de una transformacion lineal, se tiene que $D_z\pi$ es también la proyección en la última coordenada, de esta forma

$$D_z\pi(v) = 0,\ \forall v \in T_zS \ \Leftrightarrow\ T_zS \subseteq \mathbb{R}^{n-1} \times \{0\} \cong \mathbb{R}^{n-1}$$

veamos que $T_zS \nsubseteq \mathbb{R}^{n-1}$. Como 0 es valor regular de ∂f entonces 0 es valor regular de ∂g y $z \in S \cap \pi^{-1}(0) = S \cap \mathbb{H}^n$ entonces $D_z(\partial g)$ es sobreyectiva, pero g es una extensión de ∂g, así que $D_z(\partial g) = (D_zg)|_{T_z(\partial\mathbb{H}^n)} = (D_zg)|_{\mathbb{R}^{n-1}} : \mathbb{R}^{n-1} \to \mathbb{R}^n$. Por el ***Teorema de Rango-Nulidad*** tenemos

$$n - 1 = dim(ker((D_zg)|_{\mathbb{R}^{n-1}})) + m$$

de donde

$$dim(ker((D_zg)|_{\mathbb{R}^{n-1}})) = n - m - 1\ (\clubsuit)$$

como $ker(D_zg) = T_zS$ esto implica que $dim(T_zS) = n - m$, por tanto $T_zS \nsubseteq \mathbb{R}^{n-1}$, pues por $(\clubsuit)$ la dimensión de T_zS seria $n - m - 1$ lo que es una contradicción.

Ahora por el ***lema 1.3.18*** $\pi^{-1}([0, +\infty))$ es una subvariedad de S de dimensión $n - m$ y su frontera es $\pi^{-1}(0)$. Pero $\pi^{-1}([0, +\infty)) = S \cap \mathbb{H}^n = U' \cap f^{-1}(0)$ como x es arbitrario y U' una vecindad de x, se deduce que $f^{-1}(0)$ es una (neat)-subvariedad, además

$$\pi^{-1}(0) = S \cap \partial\mathbb{H}^n = U' \cap f^{-1}(0) \cap \partial\mathbb{H}^n = \partial(U' \cap f^{-1}(0))$$

como x es arbitrario y U' una vecindad de x, se tiene $\partial(f^{-1}(0)) = f^{-1}(0) \cap \partial\mathbb{H}^n$. $\square$

§1.4 Transversalidad

Definición 1.4.1. ***(Transversalidad de Subvariedades)***
Sean M, N subvariedades de una variedad P. Se dice que M ***es transversal a*** N en el punto $p \in M \cap N$ si

$$T_pM \oplus T_pN = T_pP$$

y se denota $M \pitchfork_p N$. Si M es transversal a N en todo punto $p \in M \cap N$, entonces se dira que M ***es transversal a*** N y se denota $M \pitchfork N$.

Observación 1.4.2. Si $M \pitchfork N$ se tiene que $M \cap N$ es una subvariedad de P de dimensión $dim\,(M) + dim\,(N) - dim\,(P)$.

Definición 1.4.3. ***(Transversalidad de una función y una subvariedad)***
Sean M^n, N^m variedades sin frontera, $f \in C^\infty(M, N)$ y $Z \subseteq N$ una subvariedad. Se dice que f ***es transversal a*** Z en el punto $p \in f^{-1}(Z)$ si

$$D_pf(T_pM) \oplus T_{f(p)}Z = T_{f(p)}N$$

y se denota $f \pitchfork_p Z$. Si f es transversal a Z en todo punto $p \in f^{-1}(Z)$, entonces se dira que f ***es transversal a*** Z y se denota $f \pitchfork Z$.

Observación 1.4.4. Se tiene,

1. Dada S una subvariedad de N de tal manera que $f(M) \cap S = \emptyset$, entonces f es transversal a S trivialmente.
2. Dada $f \in C^\infty(M, N)$ y $Z \subseteq N$ cerrada en N, entonces los puntos de M en los que f es transversal a Z forman un conjunto abierto.
3. $f : M \to N$ es sumersión en $x \in M$ si y sólo si f es transversal a x en la variedad $Z = \{f(x)\} \subset N$.
4. Si $f : M \to N$ es una sumersión entonces f es transversal a toda subvariedad de N.
5. Si f es un *encaje,* entonces $f \pitchfork Z$ es lo mismo que decir que $f(M) \pitchfork Z$.

Definición 1.4.5. ***(Transversalidad de dos funciones)***
Sean M^n, N^m, P^k variedades sin frontera, $f \in C^\infty(M, P)$, $g \in C^\infty(N, P)$. Se dice que f ***es transversal a*** g, si para todo $(x, y) \in M \times N$ con $f\,(x) = g\,(y)$ tenemos

$$D_xf(T_xM) \oplus D_yg(T_yN) = T_{f(x)}P$$

y se denota $f \pitchfork g$.

Observación 1.4.6. Si $f \pitchfork g$ entonces el conjunto $\{(x, y) \in M \times N \mid f(x) = g(y)\}$ es una subvariedad de $M \times N$.

Sea una función diferenciable $f : M \to N$ y S una subvariedad de N tal que $f^{-1}(S) \neq \emptyset$. Entonces para cada $q \in S$ existe un abierto $q \in V \subseteq N$ y un difeomorfismo $\varphi : V \to \mathbb{R}^s \times \mathbb{R}^{n-s}$ tal que $\varphi(S \cap V) \subseteq \mathbb{R}^s \times \{0\}$. Se elige un abierto $U \subseteq M$ tal que $f(U) \subseteq V$, considere además la proyección $\pi : \mathbb{R}^s \times \mathbb{R}^{n-s} \to \mathbb{R}^{n-s}$. Notemos que $\pi(\mathbb{R}^s \times \{0\}) = \{0\}$.

Lema 1.4.7. *En la situacion anterior, si $f \in C^\infty(M, N)$ es transversal a S en los puntos $p \in U \cap f^{-1}(S)$ entonces 0 es valor regular de $\pi \circ \varphi \circ (f|_U) : U \to \mathbb{R}^{n-s}$.*

Demostración. Veamos primero que $U \cap f^{-1}(S) = (\pi \circ \varphi \circ f|_U)^{-1}(0)$, en efecto, dado $p \in U \cap f^{-1}(S)$ se tiene que $p \in U$ y $p \in f^{-1}(S)$ de donde $f(p) \in f(U) \subseteq V$ y $f(p) \in S$, es decir, $f(p) \in f(U) \cap S$. De aquí resulta que $\varphi(f(p)) \in \varphi(f(U) \cap S) \subseteq \varphi(V \cap S) \subseteq \mathbb{R}^s \times \{0\}$ y se concluye que $\pi(\varphi(f(p))) = 0$ y así $p \in (\pi \circ \varphi \circ f|_U)^{-1}(0)$. Si $p \in (\pi \circ \varphi \circ f|_U)^{-1}(0)$ como $p \in U \subseteq M$ satisface $f(U) \subseteq V$ y $\varphi(V \cap S) \subseteq \mathbb{R}^s \times \{0\}$ se tiene que $\pi(\varphi(f(p))) = 0$ implica $\varphi(f(p)) \in \varphi(V \cap S) \subseteq \mathbb{R}^s \times \{0\}$ y por tanto $f(p) \in V \cap S$ así $p \in U \cap f^{-1}(S)$.
Dado $p \in U \cap f^{-1}(S)$ arbitrario, $q = f(p)$ y $E = D_p(\varphi \circ f)(T_pM) = (D_{f(p)}\varphi \circ D_pf)(T_pM)$, como φ es un difeomeorfismo, entonces su restricción $\varphi|_{V \cap S}$ también lo es, por lo tanto $D_q\varphi(T_qN) = \mathbb{R}^s \times \mathbb{R}^{n-s}$ y $D_q\varphi(T_qS) = \mathbb{R}^s \times \{0\}$, supongamos $f \pitchfork_p S$, se cumple que

$$D_pf(T_pM) \oplus T_qS = T_qN$$

Usando el isomorfismo $D_q\varphi : T_qN \to \mathbb{R}^s \times \mathbb{R}^{n-s}$ obtenemos

$$D_q\varphi(D_pf(T_pM) \oplus T_qS) = D_q\varphi(T_qN) = \mathbb{R}^s \times \mathbb{R}^{n-s} \qquad (\spadesuit)$$

pero

$$D_q\varphi(D_pf(T_pM) \oplus T_qS) = E \oplus (\mathbb{R}^s \times \{0\})$$

En efecto, sea $v \in D_q\varphi(D_pf(T_pM) \oplus T_qS)$, existe $w \in D_pf(T_pM) \oplus T_qS$ tal que $v = D_q\varphi(w)$, además $w = w_1 + w_2$, con $w_1 \in D_pf(T_pM)$, $w_2 \in T_qS$, de esta forma

$$v = D_q\varphi(w) = D_q\varphi(w_1 + w_2) = D_q\varphi(w_1) + D_q\varphi(w_2)$$

y por tanto $D_q\varphi(w_1) \in E$ y $D\varphi(w_2) \in \mathbb{R}^s \times \{0\}$, en consecuencia $v \in E \oplus (\mathbb{R}^s \times \{0\})$. Si $w \in E \oplus (\mathbb{R}^s \times \{0\})$, entonces $w = w_1 + w_2$ con $w_1 \in E$, $w_2 \in \mathbb{R}^s \times \{0\}$, entonces existen $v_1 \in D_q\varphi(T_pM)$ y $v_2 \in T_qS$ tales que $w_1 = D_q\varphi(v_1)$, $w_2 = D_q\varphi(v_2)$, como $v_1 + v_2 \in D_pf(T_pM) \oplus T_qS$, se tiene

$$w = w_1 + w_2 = D_q\varphi(v_1) + D_q\varphi(v_2) = D_q\varphi(v_1 + v_2) \in D_q\varphi(D_pf(T_pM) \oplus T_qS)$$

de $(\spadesuit)$ se tiene que $E \oplus (\mathbb{R}^s \times \{0\}) = \mathbb{R}^s \times \mathbb{R}^{n-s}$ y usando la proyección $\pi : \mathbb{R}^s \times \mathbb{R}^{n-s} \to \mathbb{R}^{n-s}$ se obtiene $\pi(E \oplus (\mathbb{R}^s \times \{0\})) = \pi(\mathbb{R}^s \times \mathbb{R}^{n-s}) = \mathbb{R}^{n-s}$.
Ahora se prueba que $\pi(E \oplus (\mathbb{R}^s \times \{0\})) = \pi(E)$, en efecto, si $v \in \pi(E \oplus (\mathbb{R}^s \times \{0\}))$ entonces

existe $w \in E \oplus (\mathbb{R}^s \times \{0\})$ tal que $\pi(w) = v$, así $w = w_1 + w_2$ con $w_1 \in E$, $w_2 = (a, 0) \in \mathbb{R}^s \times \{0\}$ en consecuencia $v = \pi(w) = \pi(w_1 + w_2) = \pi(w_1) + \pi(a, 0) = \pi(w_1) \in \pi(E)$.
Si $v \in \pi(E)$, se tiene $v = \pi(w)$, con $w \in E$, y así

$$\pi(w) = \pi(w) + \pi(a, 0) = \pi(w + (a, 0)) \in \pi\left(E \oplus (\mathbb{R}^s \times \{0\})\right)$$

para cualquier $(a, 0) \in \mathbb{R}^s \times \{0\}$. Por tanto resulta que $\pi(E) = \mathbb{R}^{n-s}$. Finalmente

$$D_p(\pi \circ \varphi \circ f|_U)(T_pM) = (D_{\varphi(q)}\pi \circ D_q\varphi \circ D_pf)(T_pM) = \pi(D_q\varphi \circ D_pf))(T_pM)$$

$$= \pi((D_q(\varphi \circ f))(T_pM)) = \pi(E) = \mathbb{R}^{n-s}$$

en consecuencia p es un punto regular de $\pi \circ \varphi \circ f|_U$, como $U \cap f^{-1}(S) = (\pi \circ \varphi \circ f|_U)^{-1}(0)$ y p era arbitrario se concluye que 0 es valor regular de $\pi \circ \varphi \circ f|_U$. □

Teorema 1.4.8. ***(Teorema Transversal de la Pre-imagen)***
Sea $f \in C^\infty(M, N)$ y $Z \subseteq N$ una subvariedad de codimensión k, donde Z y N no tienen frontera. Suponga que $f \pitchfork Z$ y $\partial f \pitchfork Z$. Entonces $W = f^{-1}(Z)$ es una (neat)-subvariedad de M de codimensión k. Además, $T_pW = (D_pf)^{-1}(T_{f(p)}Z)$.

Demostración. Se sigue inmediatamente del ***lema 1.4.7*** y del ***Teorema 1.3.19.*** □

Teorema 1.4.9. ***(Densidad de la Transversalidad)***
Sean A, M, N variedades C^∞; A, N sin frontera, $Z \subseteq N$ subvariedad C^∞ sin frontera. Sea $F : A \times M \to N$ una función C^∞ tal que F y ∂F son transversales a Z y denotamos por A_Z al conjunto de los $a \in A$ tales que la función parcial $F_a : M \to N$ y su restricción ∂F_a son transversales a Z, entonces A_Z es residual y por tanto denso en A.

Demostración. Por hipótesis sobre F, $Q = F^{-1}(Z) \subseteq A \times M$ es subvariedad de codimensión igual a la de Z. Aplicando el ***Teorema 1.3.15 (Sard-Brown)*** a la función C^∞, $\pi : Q \to A$ que es la restricción de la proyección sobre la primera coordenada, se tiene que el conjunto $\mathcal{V}_\pi$ es residual en A. Por otra parte, la frontera de Q es la intersección $Q \cap (A \times \partial M)$ y por tanto $\mathcal{V}_{\partial\pi}$ es residual en A.
Sea ahora $a \in \mathcal{V}_\pi$ y veamos que $f = F_a$ es transversal a Z en $x \in M$ con $F(a, x) \in Z$. Denotamos $g : A \to N$ la función parcial de F correspondiente a fijar la segunda variable x. Se tiene

$$D_{(a,x)}F : T_aA \times T_xM \to T_zN \;:\; (\alpha, \beta) \mapsto D_ag(\alpha) + D_xf(\beta)$$

por tanto, $F \pitchfork Z$ implica

$$T_zN = T_zZ \oplus (D_ag(T_aA) + D_xf(T_xM))$$

Se trata pues de estudiar $D_ag(\omega)$ con $\omega \in T_aA$. Como $a \in \mathcal{V}_\pi$ y $(a, x) \in Q$, esto implica que $D_{(a,x)}\pi : T_{(a,x)}N \to T_aA$ es sobreyectiva, así $\omega = D_{(a,x)}\pi(\alpha, \beta)$, con $(\alpha, \beta) \in T_{(a,x)}N \subseteq T_aA \times T_xM$. Como π es una proyección, se tiene que $D_{(a,x)}\pi$ es también una proyección y resulta que $\alpha = \omega$, luego tenemos $\beta \in T_xM$ tal que $(\omega, \beta) \in T_{(a,x)}Q = (D_{(a,x)}F)^{-1}(T_zZ)$, es decir, $D_ag(\omega)+D_xf(\beta) = D_{(a,x)}F(\omega, \beta) \in T_zZ$ con lo que $D_ag(\omega) = D_{(a,x)}F(\omega, \beta)-D_xf(\beta) \in T_zZ \oplus D_xf(T_xM)$, y se concluye que

$$T_zN = T_zZ \oplus D_xf(T_xM)$$

y por tanto $f \pitchfork_x Z$. En el caso $a \in \mathcal{V}_{\partial\pi}$ se razona análogamente y vemos que $\partial f = \partial F_a$ es transversal a Z. En consecuencia

$$\mathcal{V}_\pi \cap \mathcal{V}_{\partial\pi} \subseteq A_Z$$

y por tanto A_Z es residual. □

§1.5 Vecindades Tubulares

Proposición 1.5.1. *Sea $M^p \subseteq \mathbb{R}^n$ una variedad sin frontera, sea NM su espacio normal total y la función*

$$e : NM \to \mathbb{R}^n \, : \, (x, u) \mapsto x + u$$

entonces existe una vecindad abierta Ω de $M \times \{0\}$ en NM tal que:

1. *$\mathcal{W} = e(\Omega)$ es una vecindad abierta de M en $\mathbb{R}^n$.*

2. *La restricción $e|_\Omega : \Omega \to \mathcal{W}$ es un difeomorfismo C^∞.*

Demostración. Veamos que e es un difeomorfismo local en todo punto $(a, 0) \in X \times \{0\}$. Por el ***Teorema 1.3.11*** basta ver que $D_{(a,0)}e$ *es isomorfismo,* y puesto que $dim(NM) = dim(\mathbb{R}^n)$ basta ver que es *sobreyectiva.* Entonces componiendo e con ν (la *sección nula* de NM), $e \circ \nu : X \to \mathbb{R}^n$ (obtenemos la inclusión) y por la *regla de la cadena*

$$D_a(e \circ v) = D_{(a,0)}e \circ D_a\nu$$

esto implica que $T_aM \subseteq Im(D_{(a,o)}e)$. De la misma forma componiendo e con la inclusión $i : N_aM \to NM$ $(u \mapsto (a, u))$, $e \circ i : N_aM \to \mathbb{R}^n$ obtenemos

$$D_u(e \circ i) = D_{(a,u)}e \circ D_ui$$

y como D_ui es la inclusión (y ademas el espacio tangente a N_aM es isomorfo a N_aM) se tiene que $N_aX \subseteq Im(D_{(a,o)}e)$. En fin se tiene que $\mathbb{R}^n = T_aX \oplus N_aM \subseteq Im(D_{(a,o)}e)$ y en consecuencia D_ae es sobreyectiva.
Visto lo anterior, concluiremos lo que queremos si encontramos una vecindad abierta Ω de $M \times \{0\}$ en NM, tal que $e|_\Omega$ es inyectiva, para esto definamos

$$\xi : M \to \mathbb{R} \, : \, \xi(x)\, es\, el\, ínfimo\, de\, los\, s \in \mathbb{R}\, tales\, que\, existen\, u \in \mathbb{R}^n\, y\, (y, v) \in NM$$

$$con\ \|v\| \leq \|u\| = s,\ x \neq y,\ e(x, u) = e(y, v).$$

Evidentemente, e es inyectiva en el conjunto

$$E = \{(x,u) \in NM | \, \|u\| < \xi(x)\}$$

y para terminar veamos que E es una vecindad de $M \times \{0\}$, y asi bastará tomar $\Omega = int(E)$. En efecto, dado $a \in M$ arbitrario, como e es un *difeomorfismo local,* e es inyectiva en una vecindad V de $(a,0)$ que podemos elegir de la forma

$$V = \{(x,u) \in NM | \, \|x-a\| + \|u\| < \varepsilon\} \, con \, \varepsilon > 0$$

Un calculo sencillo muestra que $\xi(x) \geq \varepsilon/6$ si $\|x-a\| < \varepsilon/2$, de donde se deduce

$$E \supseteq V_1 = \{(x,u) \in NM | \, \|x-a\| < \varepsilon/2, \|u\| < \varepsilon/6\}, \; V_1 \, abierto \, que \, contiene \, a \, (a,0).$$

por tanto E es una vecindad de $M \times \{0\}$. □

Segun la ***proposición 1.5.1,*** obtenemos un diagrama conmutativo

$$\begin{tikzcd} NM \arrow[r, "e"] & \mathbb{R}^n \\ \Omega \arrow[u] \arrow[r, "e|_\Omega"] \arrow[dr, "\nu|_\Omega"'] & \mathcal{W} \arrow[u] \arrow[d, "\pi"] \\ & M \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} (x,u) \arrow[r, "e|_\Omega"] \arrow[dr, "\nu|_\Omega"'] & x+u \arrow[d, "\pi"] \\ & x \end{tikzcd}$$

que fijamos en todo lo que sigue. Observemos que π es una sumersión (por serlo ν) y una ***retraccion fuerte sobre*** M *(es decir,* $\pi|_M = Id_M$*).*

Proposición 1.5.2. *En la situación anterior, existe una función continua y estrictamente positiva* $\varepsilon : M \to \mathbb{R}$ *tal que la restricción*

$$\pi|_{\mathcal{W}_{\overline{\varepsilon}}} : \mathcal{W}_{\overline{\varepsilon}} \to M \qquad ; \mathcal{W}_{\overline{\varepsilon}} = \{z \in \mathcal{W} | \, \|z - \pi(z)\| \leq \varepsilon(\pi(z))\}$$

es propia.

Demostración. Por ser $e|_\Omega : \Omega \to \mathcal{W}$ difeomorfismo, basta buscar ε tal que

$$\nu|\Omega_{\overline{\varepsilon}} : \Omega_{\overline{\varepsilon}} \to M \qquad ; \Omega_{\overline{\varepsilon}} = \{(x,u) \in \Omega | \, \|u\| \leq \varepsilon(x)\}$$

sea propia. Como Ω es una vecindad abierta de $M \times \{0\}$ en NM, y la función

$$\varepsilon : M \to \mathbb{R} \, : \, x \mapsto \frac{1}{2} d((x,0), NM - \Omega)$$

es continua y estrcitamente positiva. Ahora, si $(x,u) \in NM$ y $\|u\| \leq \varepsilon(x)$ resulta $d((x,0),(x,u)) = \|u\| < d((x,0), NM - \Omega)$,con lo que $(x,u) \in \Omega$. Resta probar que la restricción $\nu|_{\Omega_{\overline{\varepsilon}}}$ es propia, para esto, dada una sucesión $\{(x_k,u_k)\}_{k\in\mathbb{N}} \subseteq \Omega_{\overline{\varepsilon}}$ tal que la sucesión $\{x_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ y $a = \lim\limits_{k\to\infty} x_k$.

Entonces $\|u_k\| \leq \varepsilon(x_k) \leq C$ para k suficientemente grande (*por la continuidad de ε y la convergencia de $\{x_k\}_{k\in\mathbb{N}}$*), y por tanto la sucesión $\{u_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ tiene una subsucesión convergente $\{u_{k_l}\}_{l\in\mathbb{N}}$ a algún $u \in \mathbb{R}^n$, veamos que $u \in N_aM$, en efecto como $N_aM \oplus T_aM = \mathbb{R}^n$ podemos encontrar funciónes diferenciables $g_1, ..., q_{m-p} : U \to \mathbb{R}^n$ definidas en una vecindad U de a, de modo que $g_1(x), ..., g_{m-p}(x)$ son base de N_xM para cada $x \in U$. Por tanto, para l suficientemente grande:

$$rango(u_{k_l,}g_1(x_{k_l}), ..., g_{m-p}(x_{k_l})) = m - p$$

y pasando al límite

$$rango(u_,g_1(a), ..., g_{m-p}(a)) = m - p$$

luego $u \in N_aM$. Finalmente, $\|u_k\| \leq \varepsilon(x_k)$, $\forall k \in \mathbb{N}$, implica $\|u\| \leq \varepsilon(a)$ y por la nota inicial $(a, u) \in \Omega_{\overline{\varepsilon}}$. En consecuencia $\nu|_{\Omega_{\overline{\varepsilon}}}$ es propia. □

Observación 1.5.3. Se tiene,

1. Si M es una *variedad cerrada, podemos elegir ε de manera que $\mathcal{W}_{\overline{\varepsilon}}$ sea cerrado en $\mathbb{R}^n$ y así $\overline{\mathcal{W}_\varepsilon} \subseteq \mathcal{W}_{\overline{\varepsilon}}$.*

2. Si M es una variedad compacta, $\varepsilon : M \to \mathbb{R}$ tendrá un mínimo, con lo que reemplazando la función con su mínimo, podemos suponerla constante.

Definición 1.5.4. A el conjunto $\mathcal{W}_\varepsilon = \{z \in \mathcal{W} |\, \|z - \pi(z)\| < \varepsilon(\pi(z))\} \subseteq \mathcal{W}_{\overline{\varepsilon}} \subseteq \mathcal{W}$ se le llama ***vecindad tubular de*** M***.***

§1.6 Homotopías, Transversalidad y Aproximación

Teorema 1.6.1. *Supongamos $M \subseteq \mathbb{R}^m$ es un conjunto arbitrario y N una variedad sin frontera, sea $f : M \to N$ continua(resp. propia). Entonces toda función $g : M \to N$ continua (resp. propia) suficientemente próxima a f en la topologia fuerte, es homótopa (resp. propiamente homótopa) a f.*

Demostración. Por el ***Teorema De Inmersión De Whitney*** podemos suponer que N es una subvariedad cerrada de $\mathbb{R}^n$, tomamos una vecindad tubular $\mathcal{W}$ de N en $\mathbb{R}^n$, de modo que tenemos la retracción $\pi : \overline{\mathcal{W}} \to N$ esta bien definida y es propia. Entonces la función

$$\varepsilon : M \to \mathbb{R} \,:\, x \mapsto d(f(x), \mathbb{R}^n - \mathcal{W})$$

es continua y estrictamente positiva. Sea $g \in C^\infty(M, N)$ tal que $\|f - g\| < min\{1, \varepsilon\}$. Podemos definir

$$F : [0, 1] \times M \to \mathcal{W} \,:\, (t, x) \mapsto tf(x) + (1 - t)g(x)$$

en efecto, tenemos

$$\|f(x) - F(t,x)\| = \|f(x) - (tf(x) + (1-t)g(x))\|$$

$$= |1-t|\,\|f(x) - g(x)\| < \varepsilon(x) = d(f(x), \mathbb{R}^n - \mathcal{W})$$

luego $F(t,x) \in \mathcal{W}$. De esta forma $H = \pi \circ F : [0,1] \times M \to N$ es una homotopía con $H_0 = g$ y $H_1 = f$.
Si f es propia, veamos que H también lo es. Como $\pi : \overline{\mathcal{W}} \to N$ es propia, basta ver que F es propia. Dada $\{(t_k, x_k)\}_{k\in\mathbb{N}}$ sucesión cuya sucesión de imagenes $\{y_k = F(t_k, x_k)\}_{k\in\mathbb{N}}$ convergen a un punto $b \in \overline{\mathcal{W}}$. Buscamos una subsucesión convergente de los (t_k, x_k), como

$$\|f(x_k)\| \leq \|f(x_k) - F(t_k, x_k)\| + \|F(t_k, x_k)\|$$

$$\leq |1-t_k|\,\|f(x_k) - g(x_k)\| + \|y_k\| \leq 1 + \|y_k\|$$

y como los y_k convergen, su norma es acotada. Como N es cerrada en $\mathbb{R}^n$, resulta que $f : M \to \mathbb{R}^n$, y se sigue que los x_k tienen una subsucesión convergente, la correspondiente sucesión de los t_k en $[0,1]$ tendra tambien una subsucesión convergente, y obtenemos la subsucesión convergente de los (t_k, x_k) buscada, y en consecuencia F es propia. □

Observación 1.6.2. Otra forma de enunciar el Teorema anterior es: *las clases de homotopía forman un conjunto abierto en la topologia fuerte.* En particular, *las funciones propias forman un conjunto abierto en la topologia fuerte.*

Teorema 1.6.3. ***(Teorema de Aproximación Diferenciable)***
Sean $M \subseteq \mathbb{R}^m$ un conjunto localmente cerrado, $N \subseteq \mathbb{R}^n$ una variedad sin frontera de clase C^∞, $\mathcal{C} \subseteq M$ un subconjunto cerrado, entonces toda función continua $f : M \to N$ cuya restricción a una vecindad abierta de $\mathcal{C}$ es de clase C^∞ puede aproximarse arbitrariamente en la topologia fuerte por funciones de clase C^∞ que coinciden con f en una vecindad de $\mathcal{C}$.

Demostración. Como M es un conjunto localmente cerrado, se sigue que es cerrado en un cierto abierto U de $\mathbb{R}^m$. Por hipótesis, existe una vencidad abierta U' de $\mathcal{C}$ en U tal que $f|_{U'\cap M}$ es de clase C^∞. En consecuencia, por el ***Teorema de Extensión de Tietze,*** existe una función $f' : U' \to \mathbb{R}^n$ de clase C^∞ que coincide con f en $U' \cap M$. A continuación, como $\mathcal{C}$ es cerrado en U, podemos elegir una vecindad abierta V de $\mathcal{C}$ en U tal que $\overline{V} \subseteq U'$, y definimos del modo evidente mediante f y f', una extensión continua de f a $D = \overline{V} \cup M$ que toma valores en $\mathbb{R}^n$; note que esta extensión es de clase C^∞ en el abierto V. Como D es cerrado en U, por el ***Teorema de Extensión de Tietze,*** obtenemos una extensión continua a todo U. De este modo, tenemos una función $U \to \mathbb{R}^n$, que es de clase C^∞ en una vecindad abierta V de $\mathcal{C}$ en U, y extiende a la función $f : M \to N$ inicial; se denota esta extensión final con la misma letra $f : U \to \mathbb{R}^n$.
Ahora consideremos una función $\varepsilon : M \to \mathbb{R}$ continua y estrictamente positiva. Por el ***Teorema de Extensión de Tietze,*** esta función tiene una extensión continua en U, que

se denota con la misma letra $\varepsilon : U \to \mathbb{R}$ y reemplazando U por $\{x \in U | \varepsilon(x) > 0\}$ podemos suponer ε continua y estrcitamente positiva en U.
Despues de este preambulo se continua la demostración en dos etapas:
Aproximación de $f : U \to \mathbb{R}^n$: Como f es continua, cada $x \in U - \mathcal{C}$ tiene una vecindad $U^x \subseteq U - \mathcal{C}$ tal que $\|f - f(x)\| < \varepsilon$ en U^x. Sea $\{\theta, \theta_x\}_{x \in U - \mathcal{C}}$ una partición diferenciable de la unidad subordinada al recubrimiento $\{V, U^x\}$ de U, y definamos

$$h = f\theta + \sum_{x \in U - \mathcal{C}} f(x)\theta_x : U \to \mathbb{R}^n$$

Es claro que h es de clase C^∞, y se verifica

$$\|h(z) - f(z)\| = \left\| \sum_{x \in U - \mathcal{C}} (f(x)\theta_x(z)) - \left(\sum_{x \in U - \mathcal{C}} \theta_x(z) \right) f(z) \right\|$$

$$\leq \sum_{x \in U - \mathcal{C}} (\theta_x(z) \|f(x) - f(z)\|) < \varepsilon(z)$$

(pues si $\|f(x) - f(z)\| \geq \varepsilon(z)$, entonces $z \notin U^x$, con lo que $\theta_x(z) = 0$). Además,

$$F = \bigcup_{x \in U - \mathcal{C}} \overline{\{\theta_x \neq 0\}} \subseteq \bigcup_{x \in U - \mathcal{C}} U^x \subseteq U - \mathcal{C}$$

y como la unión es locamente finita, F es cerrado en U, con lo que $U - F$ es una vecindad abierta de $\mathcal{C}$ en el que todas las θ_x se anulan, luego se tiene $\theta \equiv 1$ en $U - F$ y $h = f$.
Restricción de la Aproximación anterior mediante una vecindad tubular: Sea $\mathcal{W}$ una vecindad tubular de N en $\mathbb{R}^n$, y $\pi : \mathcal{W} \to N$ la retracción correspondiente. Ahora la función $\varepsilon' : U \to \mathbb{R} : x \mapsto \varepsilon'(x) = d(f(x), \mathbb{R}^n - \mathcal{W})$ es continua y estrictamente positiva en M. Podemos por tanto reemplazar U por $\{x \in U | \varepsilon'(x) > 0\}$, o simplemente $f(U) \subseteq \mathcal{W}$. usando $min\{\varepsilon, \varepsilon'\}$ en lugar de ε en la etapa anterior, tendremos $h(U) \subseteq \mathcal{W}$.
Para $x \in M$, sea K_x una vecindad compacta de x en U y $\varepsilon_x > 0$ el minimo de ε en K_x. El conjunto

$$V_x = \{y \in \mathcal{W} | \, \|\pi(y) - f(x)\| < {}^{\varepsilon_x}\!/_2\}$$

(observe que $f(x) = \pi(f(x))$ es una vecindad abierta de $f(x)$ en $\mathbb{R}^n$ y contiene una bola de centro $f(x)$ y radio $\delta_x < \varepsilon_x$. Sea B_x la bola de centro $f(x)$ y radio ${}^{\delta_x}\!/_2$. Ahora, por continuidad, en una vecindad abierta $A^x \subseteq f^{-1}(B_x) \cap K_x$ de x en U se tiene $\|f - f(x)\| < {}^{\delta_x}\!/_2$. Si reemplazamos U por la unión de los A^x podemos suponer que recubren a U, y mediante una partición de la unidad $\{\zeta_x\}_{x \in M}$ subordinada a $\{A^x\}_{x \in M}$, definimos

$$\varepsilon'' : \sum_{x \in M} \tfrac{\delta_x}{2} \zeta_x : U \to \mathbb{R}$$

que es continua y estrictamente positva. A continuación reemplazamos ε por $min\{\varepsilon, \varepsilon', \varepsilon''\}$ en la primera etapa, y afirmamos que la composición $g = \pi \circ h$ (que está bien definida y es de clase C^∞ pues $h(U) \subseteq \mathcal{W}$) resulve el problema. En efecto, obsérvese primero que h coincide con f en una vecindad de $\mathcal{C}$, en cada punto z de esa vecindad, $h(z) = f(z) \in N$, luego $g(z) = (\pi \circ h)(z) = \pi(h(z)) = \pi(f(z)) = f(z)$. Dicho esto, resta estimar $\|g - f\|$ en M. Para ello, sea $z \in M$ y $\zeta_x(z) \neq 0$ exactamente para $x = x_1, ..., x_s \in M$. Entonces

$$\varepsilon''(z) = \sum_{1 \leq i \leq s} \tfrac{\delta_x}{2} \zeta_x(z) \leq {}^{\delta_{x_1}}\!/_2$$

siendo, por ejemplo, $\delta_{x_1} = \max_{1 \leq i \leq s} \{\delta_{x_i}\}$. Como $z \in A^x$, $f(z) \in B_{x_1}$, luego

$$\|h(z) - f(x_1)\| \leq \|h(z) - f(z)\| + \|f(z) - f(x_1)\| < \varepsilon''(z) + {}^{\delta_{x_1}}\!/_2 \leq \delta_{x_1}$$

con lo que $h(z) \in V_{x_1}$ y $\|\pi(h(z)) - f(x_1)\| < {}^{\varepsilon_{x_1}}\!/_2$. Por otra parte, $z \in A^{x_1}$ también implica $\|f(z) - f(x_1)\| < {}^{\varepsilon_{x_1}}\!/_2$, esto es

$$\|g(z) - f(z)\| \leq \|\pi(h(z)) - f(x_1)\| + \|f(z) - f(x_1)\| < \varepsilon_{x_1}$$

y $\varepsilon_{x_1} < \varepsilon(z)$ pues $z \in A^{x_1} \subseteq K_{x_1}$. □

Observación 1.6.4. Si en el enunciado se toma $\mathcal{C} = \emptyset$, tenemos un resultado de aproximación simple sin restricciones sobre la función aproximante. Además no se incluye la formulación para la aproximación de una función propia f, la razón es que no es necesario hacerlo pues por la ***observacion 1.6.2*** la funciones propias forman un abierto del espacio de funciones, así cualquier función diferenciable que este suficientemente cercana a f será propia.

Corolario 1.6.5. *Toda función continua (resp. propia) $f : M \to N$ entre variedades C^∞ es homótopa (resp. propiamente homótopa) a una funcion de clase C^∞.*

Teorema 1.6.6. *Sean $M \subseteq \mathbb{R}^m$ un conjunto localmente cerrado, $N \subseteq \mathbb{R}^n$ una variedad cerrada de clase C^∞, $f, g : M \to N$ dos funciones de clase C^∞ y homótopas (resp. propiamente homótopas), entonces lo són por una homotopía (resp. homotopía propia) de clase C^∞.*

Demostración. Sea $H : [0,1] \times M \to N$ continua (resp. propia) con $H_0 = f$ y $H_1 = g$. Consideramos una *función meseta C^∞*, $\eta : [0,1] \to [0,1]$, con $\eta \equiv 0$, para $0 \leq t \leq {}^1\!/_3$ y $\eta \equiv 1$ para ${}^2\!/_3 \leq t \leq 1$ y modificamos la homotopía anterior como

$$H' : [0,1] \times M \to N \;:\; (t,x) \mapsto H(\eta(t), x)$$

Esta nueva homotopia satisface $H' \equiv f$ para $0 \leq t \leq {}^1\!/_3$ y $H' \equiv g$ para ${}^2\!/_3 \leq t \leq 1$, con lo que es una función C^∞ en una vecindad de $\mathcal{C} = \{0,1\} \times M$. Así por el ***Teorema 1.6.3 (Aproximación Diferenciable)***, podemos reemplazar H' por una función C^∞, que coincide con H' en una vecindad de $\mathcal{C}$, y que es por tanto una homotopía (resp. homotopía propia) de clase C^∞ entre f y g. □

Definición 1.6.7. Sean M, N variedades C^∞, $H : M \times I \to N$ una homotopía de clase C^∞, se dice que h es una ***isotopía,*** si cada H_t es un *encaje.* Además, si $M = N$ y cada H_t es un difeomorfismo con $H_0 = Id_M$, se dice que H es una ***difeotopía.*** Una *isotopía* tiene ***soporte compacto*** si es la identidad fuera de un conjunto compacto. *Si B es una subvariedad de M, $H : B \times I \to M$ es una isotopía de la inclusión $i_B : B \hookrightarrow M$ si $H_0 = i_B$.*

Siempre podemos suponer que una isotopía esta definida para todo $t \in \mathbb{R}$, en lugar de solamente el intervalo I. Por ejemplo, sea μ una función meseta de clase C^∞ tal que $\mu(t) = 0$ para todo $t \leq 0$, $\mu(t) = 1$ para $t \geq 1$ y $\mu'(t) \geq 0$ para todo t, entonces considere $F(x,t) = h(x, \mu(t))$.
El ***camino*** de una isotopía H es el encaje

$$\hat{H} : M \times \mathbb{R} \to N \times \mathbb{R} \,:\, (x,t) \mapsto (H(x,t), t)$$

note que $\hat{H}$ ***preserva niveles*** pues preserva la coordenada t.

Lema 1.6.8. *Si tenemos una función $H : M \times \mathbb{R} \to N \times \mathbb{R}$ tal que $H(x,t) = H(h(x,t),t)$, entonces H es un encaje si y sólo si h es una isotopía.*

Lo que nos dice el ***Lema 1.6.8*** es que *las isotopías de funciones de M a N estan en correspondencia uno a uno con los encajes que preservan niveles de $M \times \mathbb{R}$ en $N \times \mathbb{R}$.*

Observación 1.6.9. Hay una conexión importante entre difeotopías de M y campos vectoriales en $M \times I$. Sea $\hat{H} : M \times I \to M \times I$ el camino de una difeotopía H, así que $\hat{H}$ preserva niveles, cada punto de $M \times I$ pertenece a un único arco $\hat{H}(\{x\} \times I)$ para algún $x \in M$, así los vectores tangentes a este arco forman un campo vectorial que no se anula X_H en $M \times I$ tal que la imagen de X_H bajo la proyección $M \times I \to I$ es 1. Por tanto se tiene una función $X_F : M \times I \to TM$ tal que

$$X_F(y,t) = (H(y,t), 1) \in T_yM \times \mathbb{R} = T_{(x,y)}(M \times I)$$

la isotopía F es el flujo Φ de X_F aplicado a $M \times \{0\}$

$$\begin{tikzcd} M \arrow[r, "\approx"] \arrow[d, "H_t"'] & M \times \{0\} \arrow[d, "\Phi_t"] \\ M \arrow[r, "\approx"'] & M \times \{t\} \end{tikzcd}$$

Teorema 1.6.10. ***(Teoremas de Extensión de Isotopías)****:*

1. *Sea $V \subseteq M$ una subvariedad compacta y $F : V \times I \to M$ una isotopía de la inclusión i_V. Si $F(V \times I) \subseteq \partial M$ ó $F(V \times I) \subseteq M - \partial M$, entonces F se extiende a una difeotopía de M que tiene soporte compacto.*

2. *$U \subseteq M$ un abierto y $A \subseteq U$ un compacto, $F : U \times I \to M$ una isotopía de la inclusión i_U tal que $\hat{F}(U \times I) \subseteq M \times I$ es abierto, entonces F se extiende a una difeotopía de M que tiene soporte compacto que coincide con F en una vecindad de $A \times I$.*

Demostración. [12] pag. 180. ☐

Definición 1.6.11. Si $\mathbb{P}$ es una propiedad de una función $f : M \to N$. entonces $\mathbb{P}$ se dice ***estable*** si para cada homotopía $F : M \times I \to N$ de f (i.e, $F_0 = f$), F_t posee la propiedad $\mathbb{P}$, para todo $0 \leq t \leq \varepsilon$, para algún $\varepsilon > 0$.

Teorema 1.6.12. ***(Teorema de Estabilidad)***
Sean M una variedad cerrada, N un variedad y $f : M \to N$ una función de clase C^∞. Entonces todas las propiedades siguientes son estables:

1. *f es una inmersión.*
2. *f es una sumersión*
3. *f es un difeomorfismo local.*
4. *f es transversal a una subvariedad Z dada.*
5. *f es un encaje.*
6. *f es un difeomorfismo.*

Demostración. [25] pag. 96. □

Proposición 1.6.13. ***(Lema de Deformación por Homotopía)***
Sean $M \subseteq \mathbb{R}^m$ un conjunto localmente cerrado, N una variedad sin frontera de clase C^∞ y $\gamma : M \to [0,1]$ una función C^∞. Dada $f : M \to N$ (resp, f función propia) de clase C^∞, entonces existe una función $F : B \times M \to N$ de clase C^∞, donde B es la bola euclidiana centrada en el origen y radio 1 de $\mathbb{R}^n$, tal que

1. $F(0,x) = f(x)$ *para cada* $x \in M$.
2. Todas las funciones parciales $F_a : M \to N$, $a \in B$, son homótopas (resp. propiamente homótopas) a f.
3. Si $x \in M$ satisface $\gamma(x) \neq 0$, la función parcial $F_x : B \to N$ es una sumersión.
4. Si $x \in M$ satisface $\gamma(x) = 0$, entonces se tiene $F(a,x) = f(x)$ y

$$\frac{\partial F}{\partial a}(a,x) = 0 \quad , \quad \frac{\partial F}{\partial x}(a,x) = D_x f, \forall a \in B.$$

Demostración. Por el ***Teorema De Inmersión De Whitney*** podemos suponer que N es una subvariedad cerrada de $\mathbb{R}^n$, tomamos una vecindad tubular $\mathcal{W}$ tal que la retracción $\pi : \overline{\mathcal{W}} \to N$ está bien definida y es propia. Consideremos $\varepsilon : N \to \mathbb{R}$ de clase C^∞ como sigue. Primero recubrimos con abiertos $\{U_i\}_{i\in I}$ de $\mathbb{R}^n$ cuya clausura $\overline{U}_i$ en $\mathbb{R}^n$ y esté contenida en $\mathcal{W}$ y para cada $i \in I$ denotamos

$$d_i = min\left\{d(z, \mathbb{R}^n - \mathcal{W}) | z \in \overline{U}_i\right\} > 0$$

despues mediante una partición de la unidad $\{\theta_i\}_{i\in I}$ subordinada al recubrimiento abierto $\{U_i\}_{i\in I}$ definimos para $y \in N$

$$\varepsilon(y) = \sum_{i\in I} \theta_i(y) min\,\{1, d_i\} > 0$$

como $\theta_i(y) \neq 0$ implica $y \in U_i$, resulta $\varepsilon(y) \leq d(y, \mathbb{R}^n - \mathcal{W})$. Sea B la bola euclídea de $\mathbb{R}^n$ centrada en el origen y radio 1. Para cada $a \in B$, la función

$$F_a : M \to N \,:\, x \mapsto \pi(f(x) + \gamma^2(x)\varepsilon(f(x))a)$$

está bien definida, pues

$$\left\| f(x) - (f(x) + \gamma^2(x)\varepsilon(f(x))a) \right\| = \gamma^2(x)\varepsilon(f(x))\,\|a\| < \varepsilon(f(x)) \leq d(f(x), \mathbb{R}^n - \mathcal{W})$$

y así $f(x) + \gamma^2(x)\varepsilon(f(x))a \in \mathcal{W}$. Claramente, la función asociada

$$F : B \times M \to N \,:\, (a, x) \mapsto \pi(f(x) + \gamma^2(x)\varepsilon(f(x))a)$$

es de clase C^∞ y $F_o \equiv f$. Y se ha probado ***1.***
La afirmación ***2.*** resulta de que para cada $a \in B$, la función

$$H(t, x) : [0, 1] \times M \,:\, (t, x) \mapsto F_{ta}(x) = \pi(f(x) + \gamma^2(x)\varepsilon(f(x))ta)$$

es una homotopía (propia si lo es f).
Ahora, para $x \in M$ fijo con $\gamma(x) \neq 0$, la función

$$a \mapsto f(x) + \gamma^2(x)\varepsilon(f(x))a$$

es una traslación seguida de una homotecia, luego una sumersión. Como π es una sumersión, se tiene que la composición F_x de las dos es una sumersión y por tanto se tiene ***3.***
Finalmente, sea $x \in M$ tal que $\gamma(x) = 0$.Entonces $\frac{\partial F}{\partial a}(a, x) = 0$ pues es la derivada de la función constante $F_x \equiv f(x)$, $\forall a \in B$. Además

$$D_x\gamma^2 = 2\gamma(x)D_x\gamma = 0$$

y resulta

$$\frac{\partial F}{\partial x}(a, x) = D_xF_a = D_{f(x)}\pi \circ D_xf = D_x(\pi \circ f) = D_xf$$

lo que demuestra ***4.*** □

Teorema 1.6.14. *Sean M una variedad posiblemente sin frontera, N una variedad sin frontera, $Z \subseteq N$ una subvariedad cerrada en N de clase C^∞, $\mathcal{C}$ un subconjunto cerrado en M, entonces, para cada $f : M \to N$ continua (resp. propia) que es de clase C^∞ en una vecindad de $\mathcal{C}$ y tal que f y ∂f son transversales a Z en $\mathcal{C} - \partial M$ y $\mathcal{C} \cap \partial M$ respectivamente, existe* *una función $g \in C^\infty(M,N)$ tal que:*

1. g es homótopa (resp. propiamente homótopa) a f.

2. g coincide con f en una vecindad de $\mathcal{C}$.

3. g y ∂g son transversales a Z.

Demostración. En primer lugar por el ***Teorema 1.6.3 (Aproximación Diferenciable),*** podemos suponer sin perdida de generalidad que f es de clase C^∞. Puesto que la transversalidad es una propiedad abierta, existe una vecindad abierta $\mathcal{W}$ de $\mathcal{C}$ en M tal que $f \pitchfork_{\mathcal{W}} Z$, de igual manera podemos suponer que $\partial f \pitchfork_{\mathcal{W}\cap\partial M} Z$. Ahora, sea U una vecindad abierta de $\mathcal{C}$ tal que $\overline{U} \subseteq \mathcal{W}$ y por el ***Lema de Urysohn diferenciable,*** existe una función $\gamma : M \to [0,1]$ tal que $\gamma \equiv 0$ en $\overline{U}$ y $\gamma \equiv 1$ en $M - \mathcal{W}$. Ahora aplicando la ***Proposición 1.6.13*** obtenemos

$$F_a : M \to N \,:\, x \mapsto \pi(f(x) + \gamma^2(x)\varepsilon(f(x))a),\ a \in B$$

que son todas homótopas a f y coinciden con f en U. Veamos F es transversal a Z. Sea $F(a,x) \in Z$. Si $\gamma(x) \neq 0$, entonces F_x es sumersión y el resultado se tiene (***observación 1.4.4 (4)***). En caso contrario, si $\gamma(x) = 0$, se tiene que $x \in \mathcal{W}$ y además $\frac{\partial F}{\partial a}(a,x) = 0$ y $\frac{\partial F}{\partial x}(a,x) = D_x f$ así $D_{(a,x)}F = D_x f$ y por tanto tienen la misma imagen $E \subseteq T_{f(x)}N$ en consecuencia

$$f \pitchfork_x Z \qquad y \qquad (\partial f) \pitchfork_x Z,\ x \in \partial M$$

De estas dos condiciones se deducen las dos que siguen

$$F \pitchfork_{(a,x)} Z \qquad y \qquad (\partial f) \pitchfork_{(a,x)} Z,\ (a,x) \in B \times \partial M$$

por tanto, podemos aplicar el ***Teorema 1.4.9 (Densidad de la Tranversalidad)*** y al función buscada es $g = F_a$ para cualquier $a \in B_Z$. $\square$

Teorema 1.6.15. *Sea M una variedad posiblemente sin frontera, N una variedad sin frontera, $Z \subseteq N$ una subvariedad cerrada en N de clase C^∞, $\mathcal{C}$ un subconjunto cerrado en M, entonces, para cada función propia $f : M \to N$ de clase C^∞ en una vecindad de $\mathcal{C}$ y tal que f y ∂f son transversales a Z en $\mathcal{C} - \partial M$ y $\mathcal{C} \cap \partial M$ respectivamente, existe una función $g \in C^\infty(M,N)$ tal que:*

1. g está arbitrariamente próxima a f en la topologia fuerte.

2. g coincide con f en una vecindad de $\mathcal{C}$.

3. g y ∂g son transversales a Z.

Demostración. Usando las funciones definidas en la demostración del ***Teorema 1.6.14,*** basta demostrar que las F_a aproximan suficientemente a f. Para ello fijamos una función continua y estrictamente positiva $\rho : M \to \mathbb{R}$, retomamos la construcción de las F_a con su notación para concluir que $\|f - F_a\| < \rho$. En efecto, se habia demostrado que

$$\left\|f(x) - (f(x) + \gamma^2(x)\varepsilon(f(x))a)\right\| < \varepsilon(f(x)),\ \forall x \in M$$

para cierta función $\varepsilon : N \to \mathbb{R}$. A continuación modificaremos esta ε de modo que se deduzca

$$\|f(x) - F_a(x)\| < \rho(x),\ \forall x \in M$$

Para hacer esto, recordemos que ε estaba definida mediante una particion diferenciable de la unidad $\{\theta_i\}_{i\in I}$ subordinada a un recubrimiento $\{U_i\}_{i\in I}$ de N por abiertos de la vecindad tubular $\mathcal{W}$ cuyas clausuras $\overline{U_i}$ en $\mathbb{R}^n$ son compactas, con precisión, la fórmula era

$$\varepsilon(y) = \sum_{i\in I} \theta_i(y)min\left\{1, d_i\right\} > 0,\ y \in N$$

Podemos dar otro recubrimiento abierto $\{W_i\}_{i\in I}$ de $\mathcal{W}$ tal que cada $\overline{W_i}$ es compacto y $\overline{U_i} \subseteq W_i$. Por otra parte, π es continua en $\mathcal{W}$ que contiene a cada compacto $\overline{W_i}$, de modo que π es uniformemente continua en $\overline{W_i}$, así para $\rho_i > 0$ existe $\eta_i > 0$ tal que si $\|y - z\| < \eta_i$ se tiene

$$\|\pi(y) - \pi(z)\| < \rho_i \qquad (\clubsuit)$$

Como $f : M \to N$ es propia, N es cerrado en $\mathbb{R}^n$, cada imagen inversa $f^{-1}(\overline{U_i})$ es compacta, y elegimos

$$\rho_i = mín\left\{\rho(x)|x \in f^{-1}(U_i)\right\} > 0$$

observe que para la acotación uniforme ($\clubsuit$) debemos suponer $y, z \in \overline{W_i}$, pero tomando $\eta_i < d(\overline{U_i}, \mathbb{R}^n - W_i)$ la condición $\|y - z\| < \eta_i$ y la suposición $y \in \overline{U_i}$ implica que $z \in \overline{W_i}$. en fin, modificamos la definición de ε así

$$\varepsilon(y) = \sum_{i\in I} \theta_i(y)mín\left\{1, d_i, \eta_i\right\} > 0$$

Veamos que esta es la eleccion acertada. Dado $x \in M$, y denotando $z = f(x)+\gamma^2(x)\varepsilon(f(x))a$, de manera que , $F_a(x) = \pi(z)$ y $\|f(x) - z\| < \varepsilon(f(x))$. obtenemos la estimacion siguiente

$$\varepsilon(f(x)) \leq máx\left\{\eta_i|x \in f^{-1}(\overline{U_i})\right\}$$

luego existe i con $f(x) \in \overline{U_i}$, tal que $\|f(x) - z\| < \eta_i$ con lo que por la acotación uniforme ($\clubsuit$) implica

$$\|f(x) - F_a(x)\| = \|\pi(f(x)) - \pi(z)\| < \rho_i \leq \rho(x)$$

Asi, tal como se explico al principio, queda demostrado el *Teorema*. $\square$

§1.7 Haces Vectoriales y Campos Vectoriales

Definición 1.7.1. Sea M una variedad. Un ***haz vectorial de rango*** k ***sobre*** M es un trio (E, π, M) donde$E$ es una variedad junto con una función sobreyectiva diferenciable $\pi : E \to M$ que satisface:

1. Para cada $p \in M$, el conjunto $E_p = \pi^{-1}(p) \subseteq E$ (llamado ***la fibra de*** E ***sobre*** p) está dotado de la estructura de un espacio vectorial k-dimensional.

2. Para cada $p \in M$, existe una vecindad U de p en M y un homeomorfismo $\Phi : \pi^{-1}(U) \to U \times \mathbb{R}^k$ (llamada ***trivialización local de*** E ***sobre*** U), tal que el siguiente diagrama conmuta (donde π_1 es la proyección en el primer factor) y además para cada $q \in U$, la restricción de Φ a E_q es un isomorfismo lineal de E_q a $\{q\} \times \mathbb{R}^k \cong \mathbb{R}^k$

$$\begin{tikzcd}
\pi^{-1}(U) \arrow[r, "\Phi"] \arrow[dr, "\pi"'] & U \times \mathbb{R}^k \arrow[d, "\pi_1"] \\
& U
\end{tikzcd}$$

E se llama ***espacio total*** del haz, M se llama ***espacio base*** y π se llama ***proyección.*** Si $U \subseteq M$ es un abierto, entonces por definición el subconjunto $E_U = \pi^{-1}(U)$ es un haz vectorial con la restricción de π como su proyección llamado ***restricción de*** E ***a*** U***.***
Si existe una trivialización local sobre todo M (llamada una ***trivialización global de*** E), entonces E se dice ***haz trivial de rango*** k, en este caso E es *difeomorfo a* $M \times \mathbb{R}^k$ y la proyeccion sobre el espacio base es la proyeccion en la primera coordenada π_1.

Ejemplo 1.7.2. Sea $M \subseteq \mathbb{R}^n$ una k-variedad diferenciable, entonces de la ***sección 1.2*** se tiene que (TM, τ) y (NM, ν) son *haces vectoriales de rango* k *y* $n-k$ *respectivamente sobre* M*.*

Definición 1.7.3. Una ***sección*** *de un haz vectorial* $\pi : E \to M$ es una función diferenciable $s : M \to E$ tal que $\pi \circ s = Id_M$, i.e, $s(x) \in E_x$ para todo $x \in M$.

Observación 1.7.4. Sea M una variedad diferenciable

1. Sea $\pi : E = M \times \mathbb{R}^k \to M$ el haz trivial de rango k, una sección del haz es una función $s : M \to E$ de la forma:
$$s = (Id_M, f) : M \to M \times \mathbb{R}^k$$
para alguna función $f : M \to \mathbb{R}^k$. Esta función va a ser diferenciable si y sólo si f lo es. En consecuencia una sección de un haz vectorial trivial es esencialmente una función diferenciable $M \to \mathbb{R}^k$.

2. Un haz vectorial $\pi : E \to M$ es trivial (de rango k), si y sólo si, E admite k secciones $s_1, ..., s_k$ tales que los vectores $s_1(x), ..., s_k(x)$ son base de E_x para todo $x \in M$.

Proposición 1.7.5. *Sea $M \subseteq \mathbb{R}^n$ una subvariedad cerrada y $k = codim_{\mathbb{R}^n}(M)$, si M tiene haz normal trivial, entonces existe una vecindad U de M en $\mathbb{R}^n$ y una sumersión $\Phi : U \to \mathbb{R}^k$ tal que $M = \Phi^{-1}(0)$.*

Demostración. Sea U una vecindad tubular de M en $\mathbb{R}^n$, como M tiene haz normal trivial (de rango k) en $\mathbb{R}^n$, U es difeomorfa a $M \times \mathbb{R}^k$, sea $\varphi : U \to M \times \mathbb{R}^k$ que satisface $\varphi(x) = (x, 0)$ para todo $x \in M$, $\pi_2 : M \times \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}^k$ la proyección en la segunda coordenada. Entonces la función

$$\Phi : U \to \mathbb{R}^k, \quad \Phi(u) = (\pi_2 \circ \varphi)(u)$$

es una sumersión y $M = \Phi^{-1}(0)$. $\square$

Definición 1.7.6. Sea M una k-variedad C^∞. Un ***campo vectorial*** X ***en*** M***,*** es una sección del haz tangente TM. El ***soporte*** de X, denotado $supp(X)$, se define como la clausura del conjunto $\{p \in M | X_p = 0\}$.

Sea $(\varphi_\alpha, U_\alpha)$ una carta de M y

$$\tilde{\varphi}_\alpha : TM|_{U_\alpha} \equiv \tau^{-1}(U_\alpha) \to U_\alpha \times \mathbb{R}^k, \qquad \tilde{\varphi}_\alpha(v) = (\tau(v), D_{\tau(v)}\varphi_\alpha(v))$$

una trivialización de TM sobre $U_\alpha \subseteq M$;se define una sección s_i para cada $i = 1, ..., k$ como:

$$s_i(x) \equiv \tilde{\varphi}_\alpha^{-1}(x, e_i) \equiv \frac{\partial}{\partial x_i}(x), \; \forall x \in U_\alpha$$

esta sección se llama ***i-ésimo campo vectorial coordenado.*** Por tanto, un vampo vectorial $X : M \to TM$ es diferenciable si y sólo si para toda carta $(\varphi_\alpha, U_\alpha)$ las funciones

$$c_1, ..., c_k : U_\alpha \to \mathbb{R}, \text{definidas mediante } X(p) = c_1(p)\frac{\partial}{\partial x_1}(p) + \cdots + c_k(p)\frac{\partial}{\partial x_k}(x), \qquad \forall p \in U_\alpha$$

son diferenciables. El valor $X(p) \in T_pM$ de X en p se denota X_p.

Proposición 1.7.7. *Sea M una variedad C^∞ con frontera o sin frontera, y sea $A \subseteq M$ un subconjunto cerrado. Suponga que X es un campo vectorial en A. Dado cualquier abierto U que contiene a A, existe un campo vectorial $\tilde{X}$ en M tal que $\tilde{X}|_A = X$ y $supp(\tilde{X}) \subseteq U$.*

Demostración. Para cada $p \in A$, se escoge una vecindad W_p de p y un campo vectorial $\tilde{X}(p)$ en W_p que coincide con X en $W_p \cap A$. Reemplazando W_p por $W_p \cap U$ podemos suponer que $W_p \subseteq U$. La familia de conjuntos $\{W_p\}_{p \in A} \cup \{M - A\}$ es un recubrimiento abierto de M. Sea $\{\psi_p\}_{p \in A} \cup \{\psi_0\}$ una particion de la unidad subordinada a a este recubrimiento, con $supp(\psi_p) \subseteq W_p$ y $supp(\psi_0) \subseteq M - A$.
Para cada $p \in A$, el producto $\psi_p \tilde{X}_p$ es diferenciable en W_p y tiene una extensión diferenciable a todo M si se define como cero en $M - supp(\psi_p)$ (*la función extendida es diferenciable porque*

las dos funciones coinciden en el abierto $W_p - supp(\psi_p)$ *donde se solapan*), por tanto podemos definir $\tilde{X}: M \to TM$ como

$$\tilde{X}(x) = \sum_{p \in A} \psi_p(x)\tilde{X}_p(x)$$

como la colección de soportes $\{supp(\psi_p)\}$ es localmente finita, esta suma tiene sólo un numero finito de terminos no cero en una vecindad de cualquier punto de M, y por tanto define una función diferenciable. Si $x \in A$, entonces $\psi_0(x) = 0$ y $\tilde{X}_p(x) = X(x)$ para cada p tal que $\psi_p(x) \neq 0$, así

$$\tilde{X}(x) = \sum_{p \in A} \psi_p(x)\tilde{X}_p(x) = \left(\psi_0(x) + \sum_{p \in A} \psi_p(x)\right) X(x) = X(x)$$

así que $\tilde{X}$ es una extensión de X, además

$$supp(\tilde{X}) = \overline{\bigcup_{p \in A} supp(\psi_p)} = \bigcup_{p \in A} supp(\psi_p) \subseteq U$$

$\square$

Proposición 1.7.8. *Sea M una variedad con frontera, existe un campo vectorial en M cuya restricción a ∂M siempre apunta hacia adentro, y uno cuya restricción a ∂M apunta hacia afuera.*

Demostración. Escribimos $k = dim(M)$ y sea $\{(\varphi_\alpha, U_\alpha)\}_{\alpha \in \Lambda}$ un atlas de ∂M. Para cada $\alpha \in \Lambda$, $x \in U_\alpha$ existen dos vectores unitarios en T_xM que son perpendiculares a $T_x(\partial M)$ uno que apunta hacia afuera y otro que apunta hacia adentro (estos siempre existen pues $T_x(\partial M)$ tiene codimensión 1 en T_xM) tomamos el vector que apunta hacia afuera denotado N_x y X_α el campo vectorial asociado a tal vector (es decir X_α es un campo vectorial en U_α tal que $X_\alpha(x) = N_x$). Sea $\{\psi_\alpha\}_{\alpha \in \Lambda}$ una partición de la unidad subordinada al recubrimiento $\{U_\alpha\}_{\alpha \in \Lambda}$, entonces

$$X = \sum_{\alpha \in \Lambda} \psi_\alpha X_\alpha$$

es un campo vectorial definido en $U = \bigcup_{\alpha \in \Lambda} U_\alpha$ (en particular para $\partial M \subseteq U$) que siempre apunta hacia afuera (pues cada X_α apunta hacia afuera), por la ***proposición 1.7.7*** existe un campo vectorial $\tilde{X}$ tal que $\tilde{X}|_{\partial M} = X$ y así $\tilde{X}$ apunta hacia afuera. Tomando $-\tilde{X}$ su restricción a ∂M siempre apunta hacia adentro. $\square$

Teorema 1.7.9. ***(Teorema de la Vecindad Collar)***
Sea M una variedad con frontera tal que ∂M es compacta. Sea U una vecindad de ∂M. Entonces existe un encaje $\phi : \partial M \times [0, 1) \to M$ tal que $\phi(x, 0) = x$, para todo $x \in \partial M$.

Demostración. Sea X un campo vectorial en M el cual apunta hacia adentro en ∂M. Escoja un abierto V tal que $\partial M \subseteq V \subseteq \overline{V} \subseteq U$ y $\overline{V}$ es compacto. Entonces multiplicando por una función meseta podemos asumir que X se anula fuera de $\overline{V}$. buscamos una función $h : \partial M \times [0, \varepsilon) \to M$ para algún $\varepsilon > 0$ que satisfaga el problema de valor inicial

$$\frac{\partial h}{\partial t}|_{(x,t)} = X(h(x,t)), \qquad h(x,0) = x, \forall x \in \partial M$$

Por hipotesis aplicando el ***Teorema de Existencia y Unicidad de Soluciones de Ecuaciones Diferenciales*** tal $\varepsilon > 0$ existe. Esto implica que h es un difeomorfismo local en $(x, 0)$ para cada $x \in \partial M$, además $h|_{\partial M \times \{0\}}$ es inyectiva. Por el ***Teorema 1.6.12 (Estabilidad)*** se sigue que existe $\delta > 0$ tal que $h : \partial M \times [0, \delta] \to M$ es una inmersión inyectiva. Escogiendo δ mas pequeño de ser necesário podemos asumir que $h|_{\partial M \times [0,\delta]} \subseteq V$. Con esto se define $\phi : \partial M \times [0, 1) \to M$ como $\phi(x, t) = h(x, \delta t)$. $\square$

§1.8 Orientabilidad

Definición 1.8.1. Sean $B = \{x_1, ..., x_n\}$ y $B' = \{x'_1, ..., x'_n\}$ dos bases de un espacio vectorial real V. Entonces existe una única matriz $M \in GL(n, \mathbb{R})$ tal que $Mx_i = x'_i$, $\forall i$. Si $det(M) > 0$ se dice que las bases son ***igualmente orientadas,*** esta es una relacion de equivalencia y entonces una clase de equivalencia de bases de V se dice una ***orientación.***

Es claro que $\mathbb{R}^n$, $n \geq 1$ tiene precisamente dos orientaciones, llamadas ± 1, y se escoge la base $\{(1, 0, ..., 0), (0, 1, 0, ..., 0), ..., (0, ..., 0, 1)\}$ para representar $+1$. Por convención, un espacio vectorial de dimensión cero tiene las orientaciones ± 1.

Definición 1.8.2. Sea$M$ una m-variedad, una ***orientación para*** M**,** es la elección de una *orientación para T_pM para todo $p \in M$*. Si $m > 0$ se requiere además que dado un atlas $\mathcal{A}$, para toda carta (U, ϕ) en $\mathcal{A}$, el isomorfismo lineal $T_p\phi : T_pM \to \mathbb{R}^m$, envía la orientación de T_pM a la misma orientación de $\mathbb{R}^m$ para todo $p \in U$ (se dice que ***el atlas $\mathcal{A}$ esta orientado***). Una variedad se dice ***orientable*** si admite un atlas orientado. Una variedad orientable es una variedad junto con un atlas orientado.

Observación 1.8.3. Sea M una variedad

1. Si M es orientable, entonces $-M$ denota la misma variedad con la orientación opuesta.

2. No toda variedad es orientable, por ejemplo la *Banda de Möbius.*

3. Una variedad M^n es orientable si existe un atlas $\mathcal{A}$ en M $det\left(\left[\frac{\partial(\phi\circ\varphi^{-1})}{\partial x_j}(x_1, ..., x_n)\right]\right) > 0$ para todo (U, ϕ), $(V, \varphi) \in \mathcal{A}$ y $x \in \varphi(U \cap V)$.

Definición 1.8.4. Una orientación para M define una orientacion para la frontera ∂M como sigue: suponga que $dim(M) > 1$. Para $x \in \partial M$ se escoge una base $\{v_1, ..., v_m\}$ de T_xM que satisface ***(1)*** *es positivamente orientada, i.e. representa a la orientación de M dada,* ***(2)*** *los v_i, $i > 1$ son tangenciales a ∂M,* ***(3)*** *v_1 apunta hacia afuera de M*. Entonces la orientación de ∂M se define por $\{v_2, ..., v_m\}$.

Observación 1.8.5. Si $dim(M) = 1$, la orientación de ∂M en $x \in \partial M$ se define $+1$ o -1 si la orientación de M en x apunta hacia afuera o hacia adentro, respectivamente. Con esta definición con la orientación estándar en $[0,1]$ se tiene $\partial[0,1] = \{(0,-),\ (1,+)\}$.

Observación 1.8.6. Si M, N son variedades orientables, una orientación del producto $M \times N$ define canonicamente a partir del isomorfismo $T_{(x,y)}(M \times N) = T_xM \times T_yN$, esto es, si $\{e_1, ..., e_m\}$, $\{f_1, ..., f_n\}$ son bases positivamente orientadas de T_xM, T_yN respectivamente, entonces la base$\{(e_1, 0), ..., (e_m, 0), (0, f_1), ..., (0, f_n)\}$ de $T_xM \times T_yN$ esta positivamente orientada. En particular, sea M una variedad sin frontera, $I = [0,1]$. Entonces $\partial(M \times I) = ((-M) \times \{0\}) \cup (M \times \{1\})$.

Proposición 1.8.7. *Si $M \subseteq \mathbb{R}^n$ es una subvariedad C^∞ orientable y compacta de codimensión menor o igual 2 entonces tiene haz normal trivial.*

Demostración. Si M es una subvariedad de codimensión 1 entonces el haz normal es de rango 1 y como M es orientable existe un campo vectorial unitario $U : M \to NM$ (ver [16] ***def 4.14*** pag. 153), esta es una sección global de NM y por tanto NM es trivial (***observación 1.7.4 (2.)***). En el caso de que la subvariedad sea de codimensión 2 se puede ver la demostración en [18] pag. 960. □

§1.9 Teorema Transversal de Isotopía

Suponga que X, Y son variedades diferenciables compactas, Z^p una variedad diferenciable y

$$f_t : X \longrightarrow Z \quad ; \quad g_t : Y \longrightarrow Z, \quad t \in \mathbb{R} \textit{ isotopías}$$

con $f_t \pitchfork g_t$ para todo $t \in \mathbb{R}$.

Lema 1.9.1. *Existe un difeomorfismo $h_t : Z \longrightarrow Z$, $t \in \mathbb{R}$ con soporte compacto tal que $f_t(X) = h_t(f_0(X))$ y $g_t(Y) = h_t(g_0(Y))$ para todo $t \in \mathbb{R}$.*

Antes de probar este resultado veamos el siguiente preambulo:
Sean las proyecciones

$$\pi_1 : Z \times \mathbb{R} \longrightarrow Z\ ;\ \pi_2 : Z \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}\ ;\ \pi_3 : X \times \mathbb{R} \longrightarrow X\ ;\ \pi_4 : X \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$$

Se definen

$$F : X \times \mathbb{R} \longrightarrow Z \times \mathbb{R}\ :\ F(x,t) = (f_t(x), t) \qquad y \qquad G : Y \times \mathbb{R} \longrightarrow Z \times \mathbb{R}\ :\ G(y,t) = (g_t(y), t)$$

Note que tanto F como G son inmersiones y $F \pitchfork G$, por lo que $K = F^{-1}(Y'')$ (donde $Y'' = G(Y \times \mathbb{R})$) es una subvariedad de $X \times \mathbb{R}$. Dado $(x_0, t_0) \in K$ tal que $F(x_0, t_0) = G(y_0, t_0) = (z_0, t_0)$ (para algún $y_0 \in Y$) **veamos que existe un** $v \in T_{(x_0,t_0)}$ **en** K **tal que** $D\pi_4 v = 1$**,** en efecto, por transversalidad tenemos

$$T_{(x_0,t_0)}K = DF^{-1}_{(x_0,t_0)}(T_{(x_0,t_0)}Y'')$$

y como

$$Df_{t_0}(T_{x_0}X) \oplus Dg_{t_0}(T_{y_0}Y) = T_{z_0}Z$$

existen $v_1 \in T_{x_0}X$ y $v_2 \in T_{y_0}Y$ tales que

$$Df_{t_0}v_1 + Dg_{t_0}v_2 = \frac{df_t}{dt}(x_0,t_0) - \frac{dg_t}{dt}(y_0,t_0) \in T_{z_0}Z$$

de esta forma

$$DF_{(x_0,t_0)}(-v_1,1) = \left(\frac{df_t}{dt}(x_0,t_0) - Df_{t_0}v_1, 1\right) = \left(\frac{dg_t}{dt}(y_0,t_0) + Dg_{t_0}v_2, 1\right) = DG_{(y_0,t_0)}(v_2,1)$$

y podemos tomar $v = (-v_1, 1)$. Luego extendemos v a un campo vectorial local u' en un vecindad abierta de $(x_0,t_0) \in X \times \mathbb{R}$ tal que u' es tangente a K y $u'(x_0,t_0) = v$. Entonces sea $u = {}^{u'}/_{D\pi_4 u'}$ (definido en la misma vecindad abierta de (x_0,t_0)), y tenemos u campo vectorial local tangente a K con $D\pi_4 u = 1$. Como F es propia tenemos que $K \cap X \cap [-1,2]$ es compacto y podemos definir $u(x,t) = (0,1)$ para todo x fuera de una vecindad compacta de $\pi_3(K)$ o para todo $|t| > 3$ que asegurará que el flujo para u estará definido para todo tiempo.

Demostración. Construyamos un campo vectorial w en $Z \times \mathbb{R}$ que satisfaga: $D\pi_2(w) = 1$, w es tangente a $X'' = F(X \times \mathbb{R})$, w es tangente a $Y'' = G(Y \times \mathbb{R})$ y $w(z,t) = (0,1)$ para z fuera de un conjunto compacto, basta construir tal w localmente. Note que podemos empezar con $w' = DF(u)$ en X'' donde u es como en el preambulo anterior. Como $X'' \pitchfork Y''$ podemos extender este resultado a un campo vectorial w' en una vecindad abierta de cualquier punto de $X'' \cap Y''$ de forma que w' sigue siendo tangente tanto a X'' como a Y''. Haciendo $w = \frac{w'}{D\pi_2(w')}$ obtenemos el campo vectorial deseado. Ahora sea Φ el flujo de w y definamos $h_t(z) = \pi_1(\Phi_t(z,0))$, como w es tangente a X'' e Y'' tenemos que $\Phi((z,s),t) \in X'' \cap Y''$, si $(z,s) \in X'' \cap Y''$, luego de $D\pi_2(w) = 1$ tenemos que $\pi_2(\Phi((z,s),t)) = s + t$. Y también de $w(x,t) = (0,1)$ para (z,t) fuera de un conjunto compacto tenemos que $\Phi((z,s),t) = (z, s+t)$ para z fuera de un compacto, asi h_t es un difeomorfismo pues $h_t^{-1}(z) = \pi_1\Phi_{-t}(z,0))$ y tenemos el resultado. □

Lema 1.9.2. *Supongamos que Y es una variedad compacta, $g : Y \times [0,1] \longrightarrow Z$ una isotopía, $f : X \times [0,1] \longrightarrow Z$ una homotopía propia tal que $f_t \pitchfork g_t$, $\forall t \in [0,1]$. Entonces existe una difeotopía $h : X \times [0,1] \longrightarrow X$ tal que*

$$h_t\left(f_0^{-1}(g_0(Y))\right) = f_t^{-1}(g_t(Y)),\ \forall t \in [0,1]$$

Demostración. En el caso de que X no sea compacta procedemos como sigue: considerando el campo vectorial u construido en el preambulo de la demostración del ***Lema 1.9.1***. Sea Ψ el flujo para u, definiendo $h : X \times [0,1] \longrightarrow X$ como $h(x,t) = \pi_3(\Psi_t(x,0))$ obtenemos el difeomorfismo buscado.

En el caso de que X sea una variedad compacta, consederemos las siguientes isotopías (donde

f_t y g_t son como en el preambulo del ***Lema 1.9.1***)

$F_t : X \longrightarrow Z{\times}X \ : \ F_t\,(x) = (f_t\,(x)\,, x) \qquad y \qquad G : Y{\times}X \longrightarrow Z{\times}X \ : \ G_t(y,x) = (g_t\,(y)\,, x)$

note que $F_t \pitchfork G_t$. Por el ***Lema 1.9.1*** hay una difeotopía

$$H_t : Z \times X \longrightarrow Z \times X, \ t \in [0,1]$$

con soporte compacto tal que

$$F_t\,(X) = H_t\,(F_0\,(X)) \ \ y \ G_t\,(Y \times X) = H_t\,(G_0\,(Y \times X)) \ \ \forall t \in [0,1]$$

Note que

$$F_t(X) \cap G_t(Y \times X) = F_t\left(f_t^{-1}\,(g_t\,(Y))\right)$$

Se define $h : X \times [0,1] \longrightarrow X$ como $h\,(x,t) = F_t^{-1}\,(H_t\,(F_0(x)))$ y tenemos

$$h_t\left(f_0^{-1}\,(g_0\,(Y))\right) = F_t^{-1}\left(H_t\left(F_0\left(f_0^{-1}\,(g_0\,((Y)))\right)\right)\right)$$

$$\begin{aligned} &= F_t^{-1}\,(H_t\,(F_0\,(X) \cap G_0\,(Y))) \\ &= F_t^{-1}\,(H_t\,(F_0\,(X)) \cap H_t\,(G_0\,(Y))) \\ &= F_t^{-1}\,(F_t\,(X) \cap G_t\,(Y)) \\ &= f_t^{-1}\,(g_t\,(Y)) \end{aligned}$$

y el resultado esta probado □

Teorema 1.9.3. ***(Teorema Transversal de Isotopía)***
Sean M, N variedades C^∞, con M compacta, posiblemente sin frontera. Sea $Z \subseteq N$ una subvariedad compacta C^∞. Sea $f \in C^\infty(M,N)$ tal que $f \pitchfork Z$ y $f^{-1}(Z) \cap \partial M = \emptyset$. Entonces existe una vecindad Ω de f en $C^\infty(M,N)$ tal que:

1. Para todo $g \in \Omega$, $g \pitchfork Z$.
2. $g^{-1}(Z) \subseteq M - \partial M$ es una subvariedad C^∞ difeótopa a $f^{-1}(Z)$.

Demostración. El resultado ***1.*** se sigue inmediatamente del ***Teorema 1.6.15*** y de la ***observación 1.6.2,*** y el resultado ***2.*** se sigue del ***lema 1.9.2*** y el ***Teorema 1.6.10.*** □

Capítulo 2
Geometría Semi-Algebráica

En este capítulo explicaremos la estructura de un conjunto algebraico con el fin de comprender la noción de *variedad algebraica.* Los resultados en este capitulo se enuncian sin demostración y las demostraciones se pueden encontrar en [4].

§2.1 Conjuntos algebraicos, semi-algebraicos y Funciones semi-algebraicas

Definición 2.1.1. Sea $B \subseteq \mathbb{R}[x_1, ..., x_n]$,

$$\mathcal{Z}(B) = \{x \in \mathbb{R}^n | \forall f \in B,\ f(x) = 0\}$$

los elementos de $\mathcal{Z}(B)$ son los ceros de B. Un ***Conjunto Algebraico*** de $\mathbb{R}^n$ es el conjunto de ceros de algún $B \subseteq \mathbb{R}[x_1, ..., x_n]$.
Dado $S \subseteq \mathbb{R}^n$ el conjunto,

$$\mathcal{I}(S) = \{f \in \mathbb{R}[x_1, ..., x_n] | \forall x \in S,\ f(x) = 0\}$$

Se llama el ***ideal de polinomios que se anulan en*** S***.***

Definición 2.1.2. Un ***conjunto semi-algebraico*** de $\mathbb{R}^n$ es un subconjutno de la forma

$$\bigcup_{i=1}^{m} \bigcap_{j=1}^{r_i} \{x \in \mathbb{R}^n | f_{i,j}(x) \star_{i,j} 0\}$$

donde $f_{i,j} \in \mathbb{R}[x_1, ..., x_n]$ y $\star_{i,j} \in \{<, >, \leq, \geq, =, \neq\}$, para $i = 1, ..., m$ y $j = 1, ..., r_i$.
Dados $f_1, f_2, ..., f_k \in \mathbb{R}^n[x_1, ..., x_n]$,
Un ***conjunto abierto semi-algebraico básico*** de $\mathbb{R}^n$ es un conjunto de la forma

$$\{x \in \mathbb{R}^n | f_1(x) > 0,\ f_2(x) > 0,\ ...,\ f_k(x) > 0\}$$

Un ***conjunto cerrado semi-algebraico básico*** de $\mathbb{R}^n$ es un conjunto de la forma

$$\{x \in \mathbb{R}^n | f_1(x) \geq 0,\ f_2(x) \geq 0,\ ...,\ f_k(x) \geq 0\}$$

Observación 2.1.3. Note que los conjuntos semi-algebraicos de $\mathbb{R}^n$ forman la familia mas pequeña de subconjuntos de $\mathbb{R}^n$ que contiene a todos los conjuntos de la forma

$$\{x \in \mathbb{R}^n | f(x) > 0\}$$

y que es *cerrada* bajo intersecciones finitas, uniones finitas y complementos. En particular los conjuntos algebraicos son conjuntos semi-algebraicos.

Observación 2.1.4. Los subconjuntos semi-algebraicos de $\mathbb{R}$ son exactamente las uniones finitas de puntos (*conjuntos algebraicos*) e intervalos (semi-)abiertos o (semi-)cerrados (acotados o no acotados).

Proposición 2.1.5. *Todo conjunto semi-algebraico de $\mathbb{R}^n$ puede ser escrito como una union finita de conjuntos semi-algebraicos de la forma*

$$\{x \in \mathbb{R}^n | f_1(x) = \cdots f_k(x) = 0,\ g_1(x) > 0,\ ..., g_m(x) > 0\}$$

donde $f_1, ..., f_k, g_1, ..., g_m \in \mathbb{R}^n$.

Observación 2.1.6. Consideraremos dos topologías en $\mathbb{R}^n$, la ***Topología de Zariski*** en la que los conjuntos abiertos son los complementos de lso conjuntos conjuntos algebraicos y la ***Topologia Usual (o Euclidiana)*** generada por la familia de las bolas abiertas centradas en todos los puntos de $\mathbb{R}^n$.

Teorema 2.1.7. ***(Teorema de finitud)***
Sea $A \subseteq \mathbb{R}^n$ un conjunto semi-algebraico abierto (cerrado), entonces A es la unión finita de conjuntos abiertos (cerrados) semi-algebraicos básicos.

Demostración. [4] pág. 47. □

Definición 2.1.8. Sean $A \subseteq \mathbb{R}^m$, $B \subseteq \mathbb{R}^n$ dos conjuntos semi-algebraicos. Una función $f : A \to B$ se dice ***semi-algebráica*** si su gráfica $\Gamma_f = \{(a, b) \in A \times B | b = f(a)\}$ es un conjutno semi-algebraico de $\mathbb{R}^{n+m}$.

Proposición 2.1.9. *Sea $f : A \to B$ una función semi-algebráica. Si $S \subseteq A$ es un conjunto semi-algebraico, entonces su imagen $f(S)$ es un conjunto semi-algebraico. Si $T \subseteq B$ es un conjunto semi-algebraico, entonces su imagen inversa $f^{-1}(T)$ es un conjunto semi-algebraico.*

Demostración. [4] pág. 29. □

2.1.1 Dimensión de Conjuntos semi-algebraicos

La demostración de los resultados de esta sección se encuentran en [4] sección 2.8 págs. 50-54. Sea $A \subseteq \mathbb{R}^n$ un conjunto semi-algebraico. Se define el ***anillo de coordenadas de*** A ***o anillo de funciones polinomiales en*** A***,*** como el conjunto cociente,

$$\mathcal{P}(A) = {}^{\mathbb{R}[x_1,\ldots,x_n]}/_{\mathcal{I}(A)}$$

Definición 2.1.10. La ***dimensión de*** A, denotada $dim(A)$, se define como la dimension del anillo $\mathcal{P}(A)$, es decir, la longitud de la cadena maxima de ideales primos de $\mathcal{P}(A)$.

Proposición 2.1.11. *Sea $A \subseteq \mathbb{R}^n$ un conjunto semi-algebraico. Entonces,*

$$dim(A) = dim(\overline{A}) = dim(C_{Zar}(A))$$

donde $C_{Zar}(A) = \mathcal{Z}(\mathcal{I}(A))$ es la ***clausura de Zariski*** *de A.*

Proposición 2.1.12. *Para conjuntos algebraicos se tienen las siguientes propiedades:*

1. *Un conjunto algebraico $V \subseteq \mathbb{R}^n$ se dice* ***irreducible****, si cuando $V = F_1 \cup F_2$, con F_i, $i = 1, 2$ conjuntos algebraicos, entonces $V = F_1$ ó $V = F_2$. Además, todo conjunto algebraico es la union* (***en una única manera***) *de un número finito de conjuntos algebraicos irreducibles $V_1, ..., V_p$, tales que $V_i \nsubseteq \bigcup\limits_{j \neq i} V_j$ para $i = 1, ..., p$. Los V_i son las componentes irreducibles de V y se tiene $dim(V) = max\{dim(V_1), ..., dim(V_p)\}$.*

2. *Un conjunto algebraico $V \subseteq \mathbb{R}^n$ se dice* ***irreducible*** *si y solo si $\mathcal{I}(V)$ es un ideal primo. Se denota por $\mathcal{K}(V)$ el* ***Campo de fracciones*** *de $\mathcal{P}(V)$. La dimensión de V es igual al* ***grado de trascendencia*** *de $\mathcal{K}(V)$ sobre $\mathbb{R}$.*

3. *Dados $V \subseteq \mathbb{R}^m$, $W \subseteq \mathbb{R}^n$ conjuntos algebraicos, entonces el producto $V \times W \subseteq \mathbb{R}^{n+m}$ es un conjunto algebraico y $\mathcal{P}(V \times W) = \mathcal{P}(V) \otimes_{\mathbb{R}} \mathcal{P}(W)$. Si V y W son irreducibles, entonces $V \times W$ es irreducible. Tenemos además $dim(V \times W) = dim(V) + dim(W)$.*

Proposición 2.1.13. *Sea U un subconjunto abierto semi-algebraico no vacío de $\mathbb{R}^n$, entonces $dim(U) = n$.*

Proposición 2.1.14. *Sean $A \subseteq \mathbb{R}^n$ un conjunto semi-algebraico, $x \in A$, entonces existe una vecindad semi-algebráica U de x en A tal que para toda vecindad semi-algebráica U' de x en A contenida en U se tiene que $dim(U) = dim(U')$.*

Definición 2.1.15. Sean $A \subseteq \mathbb{R}^n$ un conjunto semi-algebraico, $x \in A$. La ***dimensión local de*** A en x denotada por $dim_x(A)$, se define como $dim_x(A) = dim(U)$ donde U es la vecindad en la ***proposición 2.1.13.*** Además $dim(A) = \sup\limits_{x \in A}\{dim_x(A)\}$.

Proposición 2.1.16. *Para conjuntos semi-algebraicos se tienen las siguientes propiedades:*

1. *Sea* $A = \bigcup_{i=1}^{p} A_p$ *una unión finita de conjuntos semi-algebraicos, entonces:*

$$dim(A) = max\left\{dim(A_1), ..., dim(A_p)\right\}$$

2. *Sean* A *y* B *conjuntos semi-algebraicos, entonces:*

$$dim(A \times B) = dim(A) + dim(B)$$

Proposición 2.1.17. *Sea* $A \subseteq \mathbb{R}^n$ *un conjunto semi-algebraico y* $f : A \to \mathbb{R}^p$ *una función semi-algebráica cuya grafica es* $\Gamma_f \subseteq \mathbb{R}^{n+p}$*, entonces* $dim(A) = dim(\Gamma_f)$*.*

Teorema 2.1.18. *Sea* A *un conjunto semi-algebraico y* $f : A \to \mathbb{R}^p$ *una función semi-algebráica, entonces* $dim(A) \geq dim(f(A))$*. Si* f *es una biyección de* A *con su imagen* $f(A)$*, entonces* $dim(A) = dim(f(A))$*.*

§2.2 Funciones Polinomiales, Racionales y Enteras

Definición 2.2.1. Si $V \subseteq \mathbb{R}^n$, $W \subseteq \mathbb{R}^m$ son conjuntos algebraicos, una función $f : V \to W$ se dice ***función polinomial*** si existen polinomios $f_1, ..., f_m \in \mathbb{R}[x_1, ..., x_n]$ tales que para todo punto $p \in V$ se tiene que $f(p) = (f_1(p), ..., f_m(p))$, es decir, las coordenadas de f son polinomios. Se denota $\mathcal{P}(V, W)$ a el ***conjunto de funciones polinomiales de*** V ***a*** W***.***

La *composición de funciones polinomiales* se define de forma natural como sigue*:* si $V \subseteq \mathbb{R}^n$, $W \subseteq \mathbb{R}^m$, $U \subseteq \mathbb{R}^p$ son conjuntos algebraicos y $f : V \to W$ y $g : W \to U$ son funciones polinomiales, entonces la composición de las funciones

$$g \circ f : V \to U$$

es polinomial ya que si $f = (f_1, ..., f_m)$ con $f_i \in \mathbb{R}[x_1, ..., x_n]$ y $g = (g_1, ..., g_p)$ con $g_i \in \mathbb{R}[y_1, ..., y_m]$ entonces $g \circ f$ esta dada por los polinomios

$$g_1(f_1, ..., f_m), ..., g_p(f_1, ..., f_m) \in \mathbb{R}[x_1, ..., x_n]$$

claramente la identidad $Id_V : V \to V$ es una función polinomial. Así una función polinomial $f : V \to W$ es un ***isomorfismo*** si existe una función polinomial $g : W \to V$ que es la inversa de f.

Teorema 2.2.2. *Sean* $V \subseteq \mathbb{R}^n$*,* $W \subseteq \mathbb{R}^m$ *conjuntos algebraicos*

1. *Una funcion polinomial* $f : V \to W$ *induce un homomorfismo de* $\mathbb{R}$*-álgebras* $f^* : \mathcal{P}(W) \to \mathcal{P}(V)$*.*

2. Todo *homomorfismo de* $\mathbb{R}$*-álgebras* $\varphi : \mathcal{P}(W) \to \mathcal{P}(V)$ *es de la forma* $\varphi = f^*$ *para una única función polinomial* $f : V \to W$.

3. *Si* $f : V \to W$ *y* $g : W \to U$ *son funciones polinomiales, entonces* $(g \circ f)^* = f^* \circ g^*$. *En particular* $f : V \to W$ *es un isomorfismo si y solo si* $f^* : \mathcal{P}(W) \to \mathcal{P}(V)$ *es un isomorfismo de* $\mathbb{R}$*-álgebras.*

Demostración. [29] pág. 27. □

Sean $V \subseteq \mathbb{R}^n$ un conjunto algebraico y $p \in V$

Definición 2.2.3. Una ***función regular*** en p es un cociente $f = {}^g/_h \in \mathcal{K}(V)$ con $h(p) \neq 0$, f es una ***función regular*** en $U \subseteq V$ un abierto de Zariski (complemento de un subconjunto algebraico de V) si lo es en todos los puntos de U. En general el cociente ${}^g/_h$ no es una función en todo V porque h puede tener ceros en V, asi se define $dom(f) \subseteq V$ como $dom(f) = \{p \in V | f = {}^g/_h,\, h(p) \neq 0\}$

Proposición 2.2.4. *Sean* $V \subseteq \mathbb{R}^n$ *un conjunto algebraico, entonces* $dom(f) \subseteq V$ *es abierto y denso.*

Demostración. [29] pág. 30 □

Definición 2.2.5. El ***conjunto de funciones regulares en*** p, $\mathcal{R}_{V,p} = \{f \in \mathcal{K}(V) | f\, es\, regular\, p\}$ es un subanillo de $\mathcal{K}(V)$, en particular es un *anillo noetheriano local* con ideal maximal $\mathfrak{m}_p = \{\varphi \in \mathcal{R}(p) | \varphi(p) = 0\}$ ($\mathcal{R}_{V,p}$ es la localización $\mathcal{P}(V)_{\mathfrak{m}_p}$).

Definición 2.2.6. Sea $U \subseteq V$ un abierto de Zariski, se denota $\mathcal{R}(U)$ al ***conjunto de funciones regulares en*** U y se tiene $\mathcal{R}(U) = \bigcap_{p \in U} \mathcal{R}_{U,p}$ es un subanillo de $\mathcal{K}(V)$ que contiene a $\mathbb{R}$ (funciones constantes).

Definición 2.2.7. Una ***función racional*** $f : V \to \mathbb{R}^m$ es una función cuyas funciones coordenadas $f_1, ..., f_m$ son regulares,es decir para todo $p \in \bigcap_{i=1}^{m} dom(f_i)$, $f(p) = (f_1(p), ..., f_m(p))$. Ponemos entonces $dom(f) = \bigcap_{i=1}^{m} dom(f_i)$. Si $W \subseteq \mathbb{R}^n$ es un conjunto algebraico, el conjunto de ***funciones racionales*** de V a W es el conjunto de funciones racionales $f : V \to \mathbb{R}^n$ tal que $f(dom(f)) \subseteq W$ y se denota $\mathcal{R}(V, W)$.

Proposición 2.2.8. *Sean* $V \subseteq \mathbb{R}^n$ *un conjunto algebraico,* $\{U_i\}_{i=1}^{p}$ *una familia finita de abiertos de Zariski en* V, $U = \bigcup_{i=1}^{p} U_i$, $f : U \to \mathbb{R}$ *una función. Si para* $i = 1, ..., p$ *existen* $P_i, Q_i \in \mathcal{P}(V)$, *tales que* Q_i *no se anula en* U_i *y* $f|_{U_i} = {}^{P_i}/_{Q_i}$, *entonces existen* $P, Q \in \mathcal{P}(V)$, *tal que* Q *no se anula en* U *y* $f = {}^P/_Q$, *en otras palabras si para* $i = 1, .., p$, $f|_{U_i} \in \mathcal{R}(U_i)$, *entonces* $f \in \mathcal{R}(U)$.

Demostración. [4] pág. 62. □

Corolario 2.2.9. *Sea $V \subseteq \mathbb{R}^n$ un conjunto algebraico, entonces $\mathcal{R} : U \to \mathcal{R}(U)$ es una gavilla de anillos en V para la topología de Zariski.*

Una función $f : V \to W$ se dice ***dominante***, si $f(dom(f)) \subseteq W$ es denso, asi para cualquier funcion racional $g : W \to U$ se tiene que $f(dom(f)) \cap dom(g) \neq \emptyset$ así la composición $g \circ f$ esta definida y por tanto se tiene una función racional $g \circ f : V \to U$.
Una función racional dominante $f : V \to W$ es un ***isomorfismo birregular*** si existe una función racional dominante $g : W \to V$ que es inversa de f.

Teorema 2.2.10. *Sean $V \subseteq \mathbb{R}^n$, $W \subseteq \mathbb{R}^m$ conjuntos algebraicos*

1. *Una funcion racional dominante $f : V \to W$ induce un homomorfismo de campos $f^* : \mathcal{K}(W) \to \mathcal{K}(V)$.*

2. Todo *homomorfismo de campos $\varphi : \mathcal{K}(W) \to \mathcal{K}(V)$ es de la forma $\varphi = f^*$ para una única función racional dominante $f : V \to W$.*

3. *Si $f : V \to W$ y $g : W \to U$ son funciones racionales dominantes, entonces $(g \circ f)^* = f^* \circ g^*$. En particular $f : V \to W$ es un isomorfismo birregular si y solo si $f^* : \mathcal{K}(W) \to \mathcal{K}(V)$ es un isomorfismo de campos.*

Demostración. [29] pág. 33. □

Definición 2.2.11. Una ***variedad algebraica afín (sobre*** $\mathbb{R}$***)*** es un espacio topologico X junto con una gavilla $\mathcal{R}_X$ de funciones con valores en $\mathbb{R}$, que es isomorfo a un conjunto algebraico $V \subseteq \mathbb{R}^n$ con su topología de Zariski, junto con su gavilla de funciones regulares $\mathcal{R}_V$, la gavilla $\mathcal{R}_X$ se llama ***gavilla de funciones regulares en X.***

Proposición 2.2.12. *Sea V un conjunto algebraico, U un abierto de Zariski en V, entonces $(U, \mathcal{R}_{V|_U})$ es una variedad algebraica afín.*

Demostración. [4] pág. 63. □

Definición 2.2.13. Una ***variedad algebraica (sobre*** $\mathbb{R}$***)*** es un espacio topologico X junto con una gavilla $\mathcal{R}_X$ de funciones con valores en $\mathbb{R}$, tales que existe una cubierta finita $\{U_i\}_{i \in I}$ de X, con cada $(U_i, \mathcal{R}_{V|_{U_i}})$una variedad algebraica afín. La gavilla $\mathcal{R}_X$ se llama ***gavilla de funciones regulares en X.*** Si U es un abierto de Zariski de X, se denota por $\mathcal{R}_X(U)$ ***el anillo de secciones continuas de $\mathcal{R}_X$ en U.***

Si $(X, \mathcal{R}_X)$, $(Y, \mathcal{R}_Y)$ son dos variedades algebráicas, entonces una función regular de X a Y es una función continua $\varphi : X \to Y$, tal que, si $U \subseteq Y$ es abierto y $f \in \mathcal{R}_Y(U)$, entonces $f \circ \varphi|_{\varphi^{-1}(U)} \in \mathcal{R}_X(\varphi^{-1}(U))$.

Proposición 2.2.14. *Sea $(X, \mathcal{R}_X)$ una variedad algebraica, U un abierto de Zariski de X, entonces $(U, \mathcal{R}_{X|_U})$ es una variedad algebraica.*

Demostración. se sigue inmediatamente de la ***proposición 2.2.12.*** □

Proposición 2.2.15. *Sea* $X = \bigcup_{i \in I} X_i$ *donde* I *es un conjunto finito. Suponga que cada* X_i *tiene estructura de variedad algebraica y que las siguientes condiciones se satisfacen:*

1. $X_i \cap X_j$ *es abierto en* X_i*, para todo* $i, j \in I$*,*

2. *las estructuras inducidas por* X_i *y* X_j *en* $X_i \cap X_j$ *coinciden para todo* $i, j \in I$*,*

entonces existe una única estructura de variedad algebraica en X *para la cual los* X_i *son abiertos de Zariski e induce la estructura dada por* X_i*.*

§2.3 Puntos No-Singulares

Primero recordemos un resultado de teoria de anillos,

Proposición 2.3.1. *Sea* $I = \langle f_1, ..., f_k \rangle$ *un ideal primo de dimensión* d *en* $\mathbb{R}[x_1, ..., x_n]$*, entonces el rango de la imagen de la matriz* $\left[\frac{\partial f_i}{\partial x_j}\right]_{\substack{1 \leq i \leq k \\ 1 \leq j \leq n}}$ *en el campo de fracciones de* ${}^{\mathbb{R}[x_1,...,x_n]}/_{I}$ *es igual a* $n - d$*.*

Demostración. [13]capítulo 10. □

Observación 2.3.2. Si $x \in \mathcal{Z}(I)$, tenemos $ran\left(\left[\frac{\partial f_i}{\partial x_j}(x)\right]\right) \leq n - d$ y este rango no depende de la elección de los generadores de I.

Definición 2.3.3. Sean $V \subseteq \mathbb{R}^n$ un conjunto algebraico, $\mathcal{I}(V) = \langle f_1, ..., f_k \rangle$ y $z \in V$. El ***Espacio Tangente de Zariski de*** V ***en*** z***,*** denotado $T_z^{Zar}(V)$, es el subespacio lineal de $\mathbb{R}^n$ definido por

$$T_z^{Zar}(V) = \bigcap_{j=1}^{k} \left\{ x \in \mathbb{R}^n | \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f_i}{\partial x_j}(x) = 0 \right\}$$

Definición 2.3.4. Sea $V \subseteq \mathbb{R}^n$ un conjunto algebraico irreducible. Un punto $z \in V$ se dice ***no-singular o regular*** si $dim(T_z^{Zar}(V)) = dim(V)$. En otras palabras, si $\mathcal{I}(V) = \langle f_1, ..., f_k \rangle$ entonces z *es un punto no-singular si y solo si el rango de la matriz* $\left[\frac{\partial f_i}{\partial x_j}(x)\right]$ *es* $n - dim(V)$*.* Un punto $x \in V$ se dice ***singular*** si no es un punto *no-singular* de V.

Proposición 2.3.5. *Sean* $V \subseteq \mathbb{R}^n$ *un conjunto algebraico irreducible de dimensión* d *y* $z \in V$ *un punto no-singular de* V*, entonces existen* $n - d$ *polinomios* $f_1, ..., f_{n-d} \in \mathcal{I}(V)$ *y una vecindad abierta de Zariski* U *de* z *en* $\mathbb{R}^n$*, tales que:*

1. $\mathcal{Z}(f_1, ..., f_{n-d}) \cap U = V \cap U$*.*

2. $\forall x \in U$*,* $ran\left(\left[\frac{\partial f_i}{\partial x_j}(x)\right]\right) = n - d$*.*

Demostración. [4] □

Teorema 2.3.6. *Sean $V \subseteq \mathbb{R}^n$ un conjunto algebraico, no necesariamente irreducible, de dimensión d y $x \in V$. Las siguientes propiedades son equivalentes:*

1. *x es un punto no-singular.*

2. Existe una componente irreducible V' *de* V, $dim(V') = d$, *tal que* V' *es la única componente irreducible de* V *que contiene a* x *y* x *es un punto no-singular de* V'.

3. *Existen $n-d$ polinomios $f_1, ..., f_{n-d} \in \mathcal{I}(V)$ y una vecindad abierta U de z en V para la topologia euclidiana, tales que $\mathcal{Z}(f_1, ..., f_{n-d}) \cap U = V \cap U$ y el rango de la matriz jacobiana $\left[\frac{\partial f_i}{\partial x_j}(x)\right]$ es $n-d$.*

Demostración. [4] pág. 68. □

Definición 2.3.7. Sea $V \subseteq \mathbb{R}^n$ un conjunto algebraico de dimensión d. Se denota $Reg(V)$ *el conjunto de puntos regulares de* V, *y se denota* $Sing(V) = V - Reg(V)$ *el conjunto de puntos singulares de* V.

Proposición 2.3.8. *Sea $V \subseteq \mathbb{R}^n$ un conjunto algebraico, entonces $Sing(V)$ es un subconjunto algebraico de V de dimensión menor que la dimensión de V. En consecuencia $Reg(V)$ es un abierto de Zariski no-vacío de V de la misma dimensión que V.*

Demostración. [4] pág. 69. □

Proposición 2.3.9. *Sean $V, W \subseteq \mathbb{R}^n$ variedades algebraicas afines, tales que $W \subsetneq V$ y $dim(W) = dim(V)$, entonces $V - W$ es un conjunto algebraico.*

Demostración. [4] pág. 70 □

§2.4 Aproximación

Teorema 2.4.1. *Se tiene*

(i) Para todo entero positivo n y $k = 1,\ 2,\ 4$, el conjunto $\mathcal{R}(S^n, S^k)$ es denso en $C^\infty(S^n, S^k)$.

(ii) Sea X una variedad algebraica afín (no-singular) homeomorfa a S^n, entonces $\mathcal{R}(X, S^k)$ es denso en $C^0(X, S^k)$ $(C^\infty(X, S^k))$ en los siguientes casos:

$$k = 1;\ k = 2\, y\, n \neq 2;\ k = 4\, y\, n \equiv 1, 2, 3\, ó\, 7\, (mod\, 8)$$

Demostración. [4] pág. 356. □

Lema 2.4.2. *Sea X una variedad algebraica real afín compacta, $Y \subseteq X$ un subconjunto algebraico. Toda función C^∞ $g : X \to \mathbb{R}$ que se anula en Y puede ser aproximada en la topologia fuerte por una función regular $h : X \to \mathbb{R}$ que se anula en Y.*

Demostración. [4] pág. 321. □

§2.5 Espacios Proyectivos, Grassmannianos y Haces Vectoriales algebraicos

Definición 2.5.1. En $\mathbb{R}^{n+1} - \{0\}$ se considera la relación de equivalencia $p \sim q \Leftrightarrow \exists\, \lambda \in \mathbb{R}^*$, $p = \lambda q$ y se define el ***Espacio Proyectivo Real de dimensión*** n como:

$$\mathbb{P}^n(\mathbb{R}) = (\mathbb{R}^{n+1} - \{0\})/\sim$$

Así, los puntos de $\mathbb{P}^n(\mathbb{R})$ son clases de equivalencia de puntos $(x_0, x_1, ..., x_n) \in \mathbb{R}^{n+1}$ con alguna $x_i \neq 0$, a estas clases de equivalencia se les denota por $p = [x_0, ..., x_n]$ y los x_i se llaman las ***coordenadas homogeneas del punto*** p. Un ***conjunto algebraico proyectivo*** es un conjunto de la forma

$$\mathcal{Z}_{\mathbb{P}}(E) = \{[x_0, .., x_n] \in \mathbb{P}^n(\mathbb{R}) | p([x_0, .., x_n]) = 0,\, \forall p \in E\}$$

donde $E \subseteq \mathbb{R}[x_0, ..., x_n]$ es un conjunto de polinomios homogéneos. De la misma forma que en la ***observación 2.1.6*** se considera la topología de Zariski en $\mathbb{P}^n(\mathbb{R})$.

Observación 2.5.2. Sean $U_i = \{[x_0, .., x_n] \in \mathbb{P}^n(\mathbb{R}) | x_i \neq 0\}$ para $i = 0, ..., n$, estos son abiertos de Zariski de $\mathbb{P}^n(\mathbb{R})$, y hay una biyección (homeomorfismo en la topologia de Zariski)

$$\varphi_i : U_i \to \mathbb{R}^n \;:\; [x_0, ..., x_n] \mapsto (x_0/x_i, ..., x_{i-1}/x_i, x_{i+1}/x_i, ..., x_n/x_i)$$

además, las funciones

$$\varphi_j \circ \varphi_i^{-1} : \varphi_i(U_i \cap U_j) \to \varphi_j(U_i \cap U_j)$$

son isomorfismos biregulares.

La estructura de variedad algebraica en $\mathbb{P}^n(\mathbb{R})$ se obtiene pegando las variedades algebráicas afines U_i como en la ***proposición 2.2.15.*** Si $W \subseteq \mathbb{P}^n(\mathbb{R})$ es un abierto de Zariski entonces una función regular en W es una función $f : W \to \mathbb{R}$, tal que para $i = 0, ..., n$, $f \circ \varphi_i^{-1}|_{\varphi_i(U_i \cap W)}$ es regular en $\varphi_i(U_i \cap W)$.

Definición 2.5.3. Se define el ***Grassmanniano*** $\mathbb{G}_{n,k}(\mathbb{R})$ como el conjunto de los subespacios vectoriales de $\mathbb{R}^n$ de dimensión k

$$\mathbb{G}_{n,k} = \{V \leq \mathbb{R}^n | dim(V) = k\}$$

En particular $\mathbb{G}_{n+1,1}(\mathbb{R}) = \mathbb{P}^n(\mathbb{R})$.

Observación 2.5.4. Sea $\{e_1, ..., e_n\}$ la base canónica de $\mathbb{R}^n$, consideremos $\sigma \subset \{1, ..., n\}$ subconjunto de k elementos, $V_\sigma = \langle\{e_i | i \in \sigma\}\rangle$ y $W_\sigma = \langle\{e_i | i \notin \sigma\}\rangle$. Se define $U_\sigma = \{V \in \mathbb{G}_{n,k}(\mathbb{R}) | V \cap W_\sigma = \{0\}\}$, si $V \in U_\sigma$, entonces $V = \{x + \rho_V(x) | x \in V_\sigma\}$ para una única transformación lineal $\rho_V : V_\sigma \to W_\sigma$, se tiene una biyección $\varphi_\sigma : U_\sigma \to \mathbb{M}_{(n-k)\times k}(\mathbb{R})$. Definimos $\varphi_\sigma(V) = [a_{ij}]_{i \notin \sigma; j \in \sigma}$ la matriz de ρ_V en la bases de V_σ y W_σ, si hacemos $a_{ij} = \delta_{ij}$ *(delta de* *kronecker)*, para $i, j \in \sigma$ entonces $A' = [a_{ij}]_{1\leq i\leq n; j\in\sigma}$ es la matriz de la transformación lineal $Id_{V_\sigma} + \rho_V : V_\sigma \to \mathbb{R}^n$, cuya imagen es V. Ahora sea $\eta \neq \sigma$ otro subconjunto de $\{1, ..., n\}$ con k elementos. Se tiene $V \in U_\sigma$ si y solo si la matriz $[a_{kj}]_{k\in\eta; j\in\sigma}$ extraída de A' es invertible, en tal caso, sea B su inversa y $C = A'B$. Una transformación lineal $V_\eta \to \mathbb{R}^n$ cuya matriz es $[c_{ik}]_{1\leq i\leq n; k\in\eta}$ tiene a V, como su imagen, y puede ser escrita como $Id_{V_\eta} + \mu_V$, con $\mu_V : V_\eta \to W_\eta$ lineal, se sigue que $\varphi_\eta(V)$ es la matriz $[c_{ik}]_{i\notin\eta; k\in\eta}$ extraida de C.

Como $\mathbb{M}_{(n-k)\times k}(\mathbb{R}) \cong \mathbb{R}^{(n-k)k}$ entonces $\mathbb{M}_{(n-k)\times k}(\mathbb{R})$ está canónicamente equipado con una estructura de variedad algebraica real afín, usando la biyección φ_σ se tiene que U_σ hereda esta estructura y la ***Observación 2.5.3*** muestra que $\varphi_\sigma(U_\sigma \cap U_\eta)$ es un abierto de Zariski de $\mathbb{M}_{(n-k)\times k}(\mathbb{R})$ y se tienen isomorfismos biregulares

$$\varphi_\eta \circ \varphi_\sigma^{-1} : \varphi_\sigma(U_\sigma \cap U_\eta) \to \varphi_\eta(U_\sigma \cap U_\eta)$$

La estructura de variedad algebraica en $\mathbb{G}_{n.,k}(\mathbb{R})$ se obtiene pegando las variedades algebráicas afines U_σ como en la ***proposición 2.2.15.*** De las ***observaciones 2.5.2 y 2.5.4*** se tiene que $\mathbb{P}^n(\mathbb{R})$ y $\mathbb{G}_{n,k}(\mathbb{R})$ están cubiertos por abiertos biregularemente isomorfos a $\mathbb{R}^n$ y $\mathbb{R}^{(n-k)k}$ respectivamente y se tiene

Proposición 2.5.5. $\mathbb{P}^n(\mathbb{R})$ *y* $\mathbb{G}_{n,k}(\mathbb{R})$ *son variedades algebráicas no-singulares.*

Considerando el hecho de que $\mathbb{M}_{n\times n}(\mathbb{R}) \cong \mathbb{R}^{n^2}$, el conjunto algebraico $\mathcal{H}_{n,k} = \{A \in \mathbb{M}_{n\times n}(\mathbb{R}) | A^t = A,\ A^2 = A,\ tr(A) = k\}$ y la biyección $\Theta : \mathbb{G}_{n,k}(\mathbb{R}) \to \mathcal{H}_{n,k}$ definida como: $V \in \mathbb{G}_{n,k}(\mathbb{R})$ se envia a la matriz de la proyección ortogonal sobre V, se tiene.

Teorema 2.5.6. *la variedades algebráicas* $\mathbb{P}^n(\mathbb{R})$ *y* $\mathbb{G}_{n,k}(\mathbb{R})$ *son afines.*

Observación 2.5.7. Un encaje explicito de $\mathbb{P}^n(\mathbb{R})$ en $\mathbb{M}_{n+1\times n+1}(\mathbb{R}) \cong \mathbb{R}^{(n+1)^2}$ está dado por

$$[x_0, ..., x_n] \mapsto \left(\frac{x_i x_j}{\sum_{i=0}^n x_i^2}\right)_{1\leq i,j\leq n+1}$$

Proposición 2.5.8. *Las variedades algebráicas* $\mathbb{G}_{n,k}(\mathbb{R})$ *y* $\mathbb{G}_{n,n-k}(\mathbb{R})$ *son birregularmente isomorfas.*

Demostración. la función $\mathcal{H}_{n,k} \to \mathcal{H}_{n,n-k}$ que envía a A en $Id_{\mathbb{R}^n} - A$ es un isomorfismo birregular y corresponde con la función $\mathbb{G}_{n,k}(\mathbb{R}) \to \mathbb{G}_{n,n-k}(\mathbb{R})$ que envia a V a su complemento ortogonal $V^\perp$ en $\mathbb{R}^n$. □

Proposición 2.5.9. *Sea* X *una variedad algebraica y* $\varphi_i : X \to \mathbb{R}^n$, $i = 1, ..., k$, $k < n$ *funciones regulares, tales que, para cada* $x \in X$, *los vectores* $\varphi_1(x), ..., \varphi_k(x)$ *generan un espacio vectorial* $\Phi(x)$ *de dimensión* k *de* $\mathbb{R}^n$. *Entonces la función* $\Phi : X \to \mathbb{G}_{n,k}(\mathbb{R})$ *es regular.*

Demostración. [4] pág. 73 □

Corolario 2.5.10. *Sea $V \subseteq \mathbb{R}^n$ un conjunto algebraico de codimensión k y X un abierto de Zariski de $Reg(V)$. Entonces las funciones de Gauss:*

$$\tau_X : X \to \mathbb{G}_{n,n-k}(\mathbb{R}) \qquad : \qquad \tau_X(x) = T_xV$$

$$\nu_X : X \to \mathbb{G}_{n,k}(\mathbb{R}) \qquad : \qquad \nu_X(x) = N_xV$$

son regulares.

Demostración. [4] pág. 74. □

Definición 2.5.11. Sea X una variedad algebraica afín. Un ***haz vectorial algebraico de rango*** k ***sobre*** X es un trio $\xi = (E, p, X)$ donde:

1. E es una variedad algebraica (no necesariamente afín) y $p : E \to X$ una función regular.
2. Para cada $p \in X$, el conjunto $E_p = \pi^{-1}(p) \subseteq E$ (llamado ***la fibra de*** E ***sobre*** p) está dotado de la estructura de un espacio vectorial k-dimensional.
3. Existe una cubierta finita de abiertos de Zariski $\{U_i\}_{i \in I}$ de X, y para cada $i \in I$ un isomorfismo birregular $\varphi_i : U_i \times \mathbb{R}^k \to p^{-1}(U_i)$, tal que el siguiente diagrama conmuta (donde π_1 es la proyección en el primer factor) y además para cada $q \in U_i$, la restricción de φ_i a E_q es un isomorfismo lineal de E_q a $\{q\} \times \mathbb{R}^k \cong \mathbb{R}^k$.

$$\begin{tikzcd} p^{-1}(U_i) \arrow[r, "\varphi_i"] \arrow[dr, "p"'] & U_i \times \mathbb{R}^k \arrow[d, "\pi_1"] \\ & U_i \end{tikzcd}$$

E se llama ***espacio total*** del haz, X se llama ***espacio base*** y p se llama ***proyección.*** Si $U \subseteq X$ es un abierto de Zariski, entonces por definición el subconjunto $E_U = p^{-1}(U)$ es un haz vectorial con la restricción de p como su proyección llamado ***restricción de*** E ***a*** U***.***

Definición 2.5.12. Una ***sección algebraica*** ξ es una función regular $s : X \to E$ tal que $p \circ s = Id_X$, i.e, $s(x) \in E_x$ para todo $x \in X$.

Definición 2.5.13. Se denota ξ^n el haz vectorial $(X \times \mathbb{R}^n, \pi_1, X)$ y se dice ***haz trivial algebraico de rango*** n, donde π_1 la proyeccion en la primera coordenada.

Recordando el ***Teorema 2.5.6***, podemos escribir

$$\mathbb{G}_{n.k}(\mathbb{R}) = \{A \in \mathbb{M}_{n \times n}(\mathbb{R}) | A^t = A,\ A^2 = A,\ tr(A) = k\}$$

y tenemos

Proposición 2.5.14. *Sean*

$$E_{n,k} = \{(A, v) \in \mathbb{G}_{n.k}(\mathbb{R}) \times \mathbb{R}^n | Av = v\}$$

$$E_{n,k}^{\perp} = \{(A, v) \in \mathbb{G}_{n.k}(\mathbb{R}) \times \mathbb{R}^n | Av = 0\}$$

$p_{n,k}$ *(resp.* $p_{n,k}^{\perp}$*) la proyección canónica de* $E_{n,k}$ *(resp.* $E_{n,k}^{\perp}$*) sobre* $\mathbb{G}_{n,k}(\mathbb{R})$*. Entonces* $\gamma_{n,k} = \{E_{n,k}, p_{n,k}, \mathbb{G}_{n,k}\}$ *y* $\gamma_{n,k}^{\perp} = \left\{E_{n,k}^{\perp}, p_{n,k}^{\perp}, \mathbb{G}_{n,k}\right\}$ *son haces vectoriales algebraicos sobre* $\mathbb{G}_{n,k}$ *de rangos* k *y* $n-k$ *respectivamente. A* $\gamma_{n,k}$ *se le llama* ***haz vectorial universal sobre*** $\mathbb{G}_{n,k}$**.**

Demostración. [4] pág. 301. □

Capítulo 3
Modelos Algebraicos De Variedades Diferencables

En este capítulo explicaremos que tipo de variedades diferenciables tienen modelos algebraicos a partir de los *teoremas de Seifert, Nash y Tognoli.*

§3.1 Resultados

Empecemos con un lema técnico

Lema 3.1.1. *Sean $W \subseteq \mathbb{R}^m$, $Z \subseteq \mathbb{R}^n$ conjuntos algebraicos no-singulares con $dim(W) = r$ y $dim(Z) = s$, $f : W \to \mathbb{R}^n$ una función regular tal que $f \pitchfork Z$. Entonces $f^{-1}(Z)$ es un conjunto algebraico no-singular con $dim(f^{-1}(Z)) = r + s - n$.*

Demostración. Dado $x \in f^{-1}(Z)$, como Z es no-singular por ***Teorema 2.3.6 (3)*** existen $g_1, ..., g_{n-s} \in \mathcal{I}(Z)$ tales que el rango de la matriz jacobiana

$$\left[\frac{\partial g_i}{\partial y_j}(f(x))\right] \qquad (i = 1, ..., n - s; j = 1, ..., n)$$

es $n - s$ y $\mathcal{R}_{Z,f(x)} = {}^{\mathcal{R}_{\mathbb{R}^n,f(x)}}\big/_{\langle g_1,...,g_{n-s}\rangle}$. Sea $g = (g_1, ..., g_{n-s})$, el hecho de que $f \pitchfork_x Z$ significa que

$$Im(D_x f) \oplus T_{f(x)}Z = \mathbb{R}^n$$

y por tanto el rango de la derivada $D_x(g \circ f) : T_x W \to \mathbb{R}^{n-s}$ es $n - s$, pues por la regla de la cadena $D_x(g \circ f) = D_{f(x)}g \circ D_x f$ y por lo anterior $D_{f(x)}g$ tiene rango $n - s$. En consecuencia

$$\mathcal{R}_{f^{-1}(Z),x} = {}^{\mathcal{R}_{W,x}}\big/_{\langle g_1 \circ f,...,g_{n-s} \circ f\rangle}$$

es por tanto un anillo regular local de dimensión $r - (n - s)$, como x era arbitrario se tiene que $f^{-1}(Z)$ es un conjunto algebraico no-singular de dimensión $r + s - n$. $\square$

A continuacion se demuestra el que parece ser uno de los primeros resultados acerca de la existencia de modelos algebraicos de variedades diferenciables.

Teorema 3.1.2. ***(Seifert 1936)***
Sea $V \subseteq \mathbb{R}^n$ un conjunto algebraico no-singular, $M \subseteq V$ una subvariedad compacta C^∞ cuyo haz normal en V es trivial, entonces M es difeótopa a la union de componentes conexas no-singulares de un subconjunto algebraico de V.

Demostración. Escojemos una vecindad tubular compacta T de M en V, la cual es una variedad C^∞ con frontera. Por ***proposición 1.7.5*** existe una sumersión C^∞ $\Phi : T \to \mathbb{R}^{v-m}$ tal que $M = \Phi^{-1}(0)$ (donde $v = dim(V)$ y $m = dim(M)$). Por el ***Teorema 1.9.3*** (con $Z = \{0\}$) existe una vecindad Ω de Φ en $C^\infty(T, \mathbb{R}^{v-m})$ tal que para toda $h \in \Omega$, $h \pitchfork Z$ y $\Phi^{-1}(0)$ es difeotopa a $h^{-1}(0)$ por una difeotopía arbitrariamente cercana a la identidad. Por el ***lema 2.4.2*** existe una función polinomial $g : V \to \mathbb{R}^{v-m}$ tal que $g|_T \in \Omega$. En consecuencia $g^{-1}(0) \cap T$ es difeótopa a $\Phi^{-1}(0) = M$ y claramente $g^{-1}(0) \cap T$ es una unión de componentes conexas del subconjunto algebraico $g^{-1}(0) \subseteq V$. $\square$

En general el conjunto algebraico $g^{-1}(0)$ de la demostración del ***teorema 3.1.2*** tiene otras componentes conexas fuera de T, sin embargo, en el siguiente caso se pueden remover las componentes conexas restantes de tal forma que la variedad sea difeótopa a un conjunto algebraico.

Teorema 3.1.3. *Sea $M \subseteq \mathbb{R}^n$ una subvariedad C^∞ orientable y compacta de codimension menor o igual a 2, entonces M es difeótopa a un conjunto algebraico no-singular de $\mathbb{R}^n$.*

Demostración. Por hipótesis y ***Proposición 1.8.7*** se tiene que el haz normal de M en $\mathbb{R}^n$ es trivial, consideramos M encajada en S^n, y por la ***Proposición 1.7.5*** existe una sumersión C^∞ $\varphi : S^n \to S^k$ (donde $k = codim_{\mathbb{R}^n}(M)$) tal que $M = \varphi^{-1}(a)$. Por ***Teorema 2.4.1 (i)*** existe una función regular $\psi : S^n \to S^k$ arbitrariamente cercana a φ. Por ***Teorema 1.9.3,*** existe una vecindad Ω de φ en $C^\infty(S^n, S^k)$ y $\psi \in \Omega$ por tanto M es difeótopa a $\psi^{-1}(a)$, y se tiene el resultado. $\square$

Antes de demostrar el *teorema de Nash* necesitaremos otro resultado técnico.

Proposición 3.1.4. *Sean $A \subseteq K \subseteq \mathbb{R}^m$, $W \subseteq \mathbb{R}^n$, donde A, W son conjuntos algebraicos no-singulares y K es una subvariedad C^∞ compacta, posiblemente con frontera. Sea $f : K \to W$ una función C^∞ tal que $f|_A$ es regular. Entonces para toda vecindad Ω de f en $C^\infty(K, W)$, existen un conjunto algebraico $Z \subseteq \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n$ de dimensión m, una función regular $h : Z \to W$ y $\varphi : K \to \mathbb{R}^n$ de clase C^∞ tal que:*

1. *La imagen de la función $\sigma : K \to \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n$, definida por $\sigma(x) = (x, \varphi(x))$ está contenida en $Reg(Z)$.*
2. La función $h \circ \sigma : K \to W$ *pertenece a Ω.*
3. *Para todo $x \in A$, $\varphi(x) = 0$ y $(h \circ \sigma)(x) = f(x)$.*
4. *Existe $\varepsilon > 0$ tal que $\sigma(K) = Z \cap (K \times \{y \in \mathbb{R}^n | \, \|y\| < \varepsilon\})$.*

Demostración. Sea W' la intersección de W con una bola abierta B que contiene a $f(K)$ de tal forma que $f(K) \subseteq W'$. Por la ***Definición 1.5.4*** sea T una vecindad tubular de W' en $\mathbb{R}^n$ de tal forma que se tiene la retracción $\pi : T \to W'$. Se considera la vecindad tubular de radio $\varepsilon/2$ de W', $T_{\varepsilon/2} = \{z \in T|\, \|z - \pi(z)\| < \varepsilon/2\} \subseteq T$. Por el ***Lema 2.4.2*** podemos escoger una función polinomial $g : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ tal que $g|_K$ está arbitrariamente cercano, en $C^\infty(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^n)$ a f (viendola como una función con valores en $\mathbb{R}^n$) y $g|_A = f|_A$. En particular podemos suponer que $g(K) \subseteq T_{\varepsilon/2}$. Entonces $U = g^{-1}(T_{\varepsilon/2})$ es una vecindad abierta semi-algebraica de K de $\mathbb{R}^m$ (pues por la ***Proposición 2.1.9*** y el hecho de que g es una función semi-algebraica). Se definen

$$\overline{\varphi} : U \to \mathbb{R}^n \qquad\qquad \overline{\sigma} : U \to \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n$$

dada por $\overline{\varphi}(x) = \pi(g(x)) - g(x)$ y $\overline{\sigma}(x) = (x, \overline{\varphi}(x))$, por último se definen

$$\varphi : K \to \mathbb{R}^n \qquad\qquad \sigma : K \to \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n$$

como $\varphi = \overline{\varphi}|_K$ y $\sigma = \overline{\sigma}|_K$.
Ahora sea $Z = \mathcal{Z}(\mathcal{I}(\overline{\sigma}(U))) \subseteq \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n$ la cerradura de Zariski de $\overline{\sigma}(U)$. Como $\overline{\sigma} : U \to \overline{\sigma}(U)$ una biyección semi-algebraica, tenemos $dim(\overline{\sigma}(U)) = dim(U) = m$ de esta forma por la ***Proposición 2.1.11*** se tiene que $dim(Z) = m$. Se define $h : Z \to \mathbb{R}^n$ como $h(x, y) = g(x) + y$, claramente h es una función regular.
Sea $x \in A$, entonces $x \in K$ y por tanto $g(x) = f(x) \in f(K) \subseteq W'$, así

$$\varphi(x) = \overline{\varphi}(x) = \pi(g(x)) - g(x) = \pi(f(x)) - f(x) = f(x) - f(x) = 0$$

y

$$\begin{aligned}(h \circ \sigma)(x) &= h(\sigma(x)) = h(\overline{\sigma}(x)) = h(x, \overline{\varphi}(x)) \\ &= g(x) + \overline{\varphi}(x) = f(x) - \pi(f(x)) - f(x) = \pi(f(x)) = f(x)\end{aligned}$$

y se tiene ***(3)***.
Sean el haz normal de W

$$NW = \{(w, y) \in W \times \mathbb{R}^n | y \perp T_w W\}$$

y la función

$$\gamma : \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$$

definida como $\gamma(x, y) = (h(x, y), y)$. Claramente γ es regular y NW es un conjunto algebraico. Entonces si $(x, y) \in \overline{\sigma}(U)$, se tiene que $h(x, y) = g(x) + y = \pi(g(x)) \in W'$ y por tanto $y = \pi(g(x)) - g(x) \perp T_{\pi(g(x))} W$, de esta forma $\gamma(\overline{\sigma}(U)) \subseteq NW$, así $\gamma^{-1}(NW)$ es un cerrado de Zariski y $\overline{\sigma}(U) \subseteq \gamma^{-1}(NW)$ en consecuencia $Z \subseteq \gamma^{-1}(NW)$ y de aquí que $h(Z) \subseteq W$.

$$(h \circ \sigma)(x) = h(\sigma(x)) = h(x, \varphi(x)) = g(x) + \varphi(x) = g(x) - \pi(g(x)) - g(x) = \pi(g(x))$$

esto es $h \circ \sigma = \pi \circ g$. Como $T_{\varepsilon/2} = \{z \in T | \, \|z - \pi(z)\| < \varepsilon/2\}$ si $\|f - g\| < \varepsilon/2$ entonces

$$\|f - \pi \circ g\| \leq \|f - g\| + \|g - \pi \circ g\| < \varepsilon/2 + \varepsilon/2 = \varepsilon$$

por tanto si $\pi \circ g \in \Omega$ entonces $h \circ \sigma \in \Omega$ y se tiene ***(2).***
Como NW es no-singular con $dim(NW) = n$ y γ es transversal a NW en todo punto de $\overline{\sigma}(U)$ pues $T_{(x,y)}W = T_xW \times N_xW \cong \{0\} \times \mathbb{R}^n$ y la imagen de $D_{(x,y)}\gamma$ contiene a la diagonal de $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$, esto porque

$$(D_{(x,y)}\gamma)(0, v) = \begin{pmatrix} D_xg & Id_{\mathbb{R}^n} \\ 0 & Id_{\mathbb{R}^n} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ v \end{pmatrix} = (Id_{\mathbb{R}^n}v, Id_{\mathbb{R}^n}v) = (v, v), \, \forall v \in \mathbb{R}^n$$

y de esta forma

$$Im(D_{(x,y)}\gamma) \oplus T_{(x,y)}NW = \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$$

Por el ***Lema 3.1.1*** $\gamma^{-1}(NW)$ es no-singular y $dim(\gamma^{-1}(NW)) = (m + n) + n - 2n = m$. De aquí que $\overline{\sigma}(U)$ es abierto en $\gamma^{-1}(NW)$ y también $\overline{\sigma}(U) \subseteq Reg(\gamma^{-1}(NW))$ y por tanto

$$T^{Zar}_{(x,y)}(\gamma^{-1}(NW)) = T^{Zar}_{(x,y)}(\overline{\sigma}(U)) = T^{Zar}_{(x,y)}(Z)$$

en consecuencia

$$dim(T^{Zar}_{(x,y)}(\overline{\sigma}(U))) = dim(T^{Zar}_{(x,y)}(Z))) = dim(Z) = dim(\overline{\sigma}(U))$$

así $\overline{\sigma}(U) \subseteq Reg(Z)$ y se tiene ***(1).***
Como $\overline{\sigma}(U) \subseteq Reg(Z)$ por el ***Teorema de la Función Implicita*** existe una función ψ tal que si ε suficientemente pequeño si $(x, y) \in Z \cap (U \times \{y \in \mathbb{R}^n | \, \|y\| < \varepsilon\})$, se tiene que $y = \psi(x)$. Pero para todo $(x, y) \in \overline{\sigma}(U) \subseteq (U \times \{y \in \mathbb{R}^n | \, \|y\| < \varepsilon\})$ y como $\overline{\sigma}(U)$ es abierto se tiene que $\psi = \overline{\varphi}$ en U, como $Z - \overline{\sigma}(U)$ es cerrado

$$(Z \cap (U \times \{y \in \mathbb{R}^n | \, \|y\| < \varepsilon\})) \cap (Z - \overline{\sigma}(U)) = \emptyset$$

por tanto $Z \cap (U \times \{y \in \mathbb{R}^n | \, \|y\| < \varepsilon\}) = \overline{\sigma}(U)$ y se tiene ***(4)***. □

Ahora sí estamos listos para demostrar *el teorema de Nash generalizado.*

Teorema 3.1.5. ***(Teorema generalizado de Nash)***
Sean $M \subseteq \mathbb{R}^m$ una subvariedad C^∞ conexa y compacta, $A \subseteq M$ un subconjunto algebraico no-singular, y suponga que una vecindad abierta U de A en M es un subconjunto abierto de algún conjunto algebraico no-singular de $\mathbb{R}^m$. Entonces existe una componente conexa no-singular X de un subconjunto algebraico de $\mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n$ (para algún n) y un difeomorfismo de clase C^∞ $\Psi : M \to X$, tal que $\Psi(a) = (a, 0)$ para todo $a \in A$.

Demostración. Sea k la codimensión de M en $\mathbb{R}^m$ ($k = m - dim(M)$). Consideramos el haz vectorial universal de rango k sobre el grassmanniano $\mathbb{G}_{m,k}$

$$\gamma_{m,k} = \{E_{m,k}, p_{m,k}, \mathbb{G}_{m,k}\}$$

donde $E_{m,k} = \{(G, v) \in \mathbb{G}_{m,k} \times \mathbb{R}^m | v \in G\}$ es el haz vectorial de rango m de $\mathbb{G}_{m,k}$, además podemos considerar a $E_{m,k}$ como un subconjunto algebraico de algún $\mathbb{R}^n$ ***(proposición 2.5.14)***. Ahora sea K una vecindad tubular compacta de M en $\mathbb{R}^m$, con la retracción $\rho : K \to M$. Sea

$$\Phi : M \to \mathbb{G}_{m,k} \, : \, x \mapsto \Phi(x) = N_x M$$

la función de Gauss. Tenemos que $\rho(y) - y \in \Phi(\rho(y)) = N_{\rho(y)}M$ para todo $y \in K$, por tanto se define la funcion de clase C^∞

$$f : K \to \mathbb{G}_{m,k} \, : \, y \mapsto (\Phi(\rho(y)), \rho(y) - y)$$

llamamos $C = \mathbb{G}_{m,k} \times \{0\}$ a la sección cero del haz vectorial $E_{m,k}$, se tiene que $f^{-1}(C) = M$ y además como

$$T_{(G,v)}\left(E_{m,k}\right) = T_G\left(\mathbb{G}_{m,k}\right) \oplus G, \ \forall (G, v) \in E_{m,k}$$

se tiene que $T_{f(y)}\left(E_{m,k}\right) = T_{N_{\rho(y)}M}\left(\mathbb{G}_{m,k}\right) \oplus N_{\rho(y)}M$ y de $T_{f(y)}(E_{m,k}) \cong T_{N_{\rho(y)}M}(\mathbb{G}_{m,k})$ e $N_{\rho(y)}M \subseteq Im(D_y f)$ se sigue que f es transversal a C. Ademas usando la hipótesis de la vecindad U de A y por el ***corolario 2.5.10*** se tiene que $f|_A$ es regular.
Usando el ***Teorema 1.9.3*** obtenemos una vecindad Ω de f en $C^\infty(K, E_{m,k})$ y por ***proposición 3.1.4*** existen un conjunto algebraico $Z \subseteq \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n$, una función regular $h : Z \to E_{m,k}$ y una función de clase C^∞ $\varphi : K \to \mathbb{R}^n$ que satisfacen las propiedades ***(i) a (iv).*** En particular $h \circ \sigma : K \to E_{m,k}$ pertenece a Ω y por tanto $(h \circ \sigma)^{-1}(C)$ es una subvariedad C^∞ de $K - \partial K$ que es difeótopa a $f^{-1}(C) = M$, la difeotopía deja fijo a A pues $h \circ \sigma|_A = f|_A$. Se denota $X = \sigma((h \circ \sigma)^{-1}(C))$, y sea $\Psi : M \to X$ definida como la composición

$$M \longrightarrow (h \circ \sigma)^{-1}(C) \longrightarrow X$$

Ψ es un difeomorfismo y $\Psi(a) = \sigma(\theta(a)) = \sigma(\theta(a), \varphi(\theta(a))) = \sigma(a, \varphi(a)) = (a, 0)$ para todo $a \in A$. El conjunto X está contenido en un conjunto algebraico $X' \subseteq h^{-1}(C) \subseteq Z$, por la propiedad ***(iv),*** tenemos, para algún $\varepsilon > 0$

$$X = X' \cap ((K - \partial K) \times \{y \in \mathbb{R}^n | \, \|y\| < \varepsilon\}$$

lo que muestra que X es abierto en X'. Por otro lado, X es compacto y en consecuencia es una componente conexa de X'. Como $h \circ \sigma$ es transversal a C, por el ***Lema 3.1.1*** se tiene que $X \subseteq Reg(X')$. El conjunto X es por tanto una componente conexa no-singular de la clausura de Zariski de X' (que es un conjunto algebraico). $\square$

Cuando $A = \emptyset$ se tiene el ***Teorema de Nash.***

Teorema 3.1.6. ***(Nash 1952)***

Sea $M \subseteq \mathbb{R}^m$ una subvariedad C^∞ compacta y conexa. Entonces M es difeomorfa a una componente conexa no-singular de un subconjunto algebraico de $\mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n$ (para algún n).

Con el fin de demostrar que en efecto la variedad M es difeomorfa a un conjunto agebraico no-singular se usa el concepto de ***cobordismo***. La idea de utilizar cobordismo para investigar la existencia de modelos algebraicos apareció por primera vez en un artículo que Andrew Wallace publicó en 1957 [28]. Si M y N son dos n-variedades compactas, entonces se les llama ***cobordantes*** si su union disyunta es la frontera de una $(n+1)$-variedad compacta. Se sabe que([19], [7]) ***toda variedad compacta*** C^∞ ***es cobordante a una unión disyunta de variedades de la forma***

$$\mathbb{P}^{k_1}(\mathbb{R}) \times \cdots \times \mathbb{P}^{k_n}(\mathbb{R}) \times H_{s_1q_1} \times \cdots \times H_{s_rq_r}$$

donde para $s \leq q$

$$H_{sq} = \left\{((x_0, ..., x_s), (y_0, ..., y_q)) \in \mathbb{P}^s(\mathbb{R}) \times \mathbb{P}^q(\mathbb{R}) | \sum_{i=0}^{s} x_i y_i = 0\right\}$$

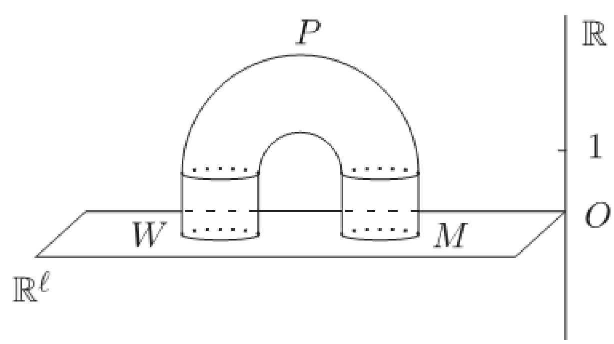
y como $\mathbb{P}^k(\mathbb{R})$ y H_{sq} son ***biregularmente isomorfos*** a conjuntos algebraicos reales no-singulares, se obtiene el siguiente *Teorema.*

Teorema 3.1.7. *Toda variedad compacta C^∞ es cobordante a un conjunto algebraico real compacto no-singular.*

Ahora se probara el resultado principal de esta sección. En lo que sigue, se identifica $\mathbb{R}^k$ con el subespacio $\mathbb{R}^k \times \{0\}$ de $\mathbb{R}^n$ cuando $n > k$.

Teorema 3.1.8. ***(Tognoli 1973)***
Sea $M \subseteq \mathbb{R}^l$ una subvariedad C^∞ compacta y conexa. Entonces M es difeomorfa a un subconjunto algebraico no-singular de $\mathbb{R}^p$ para algún $p \geq l$.

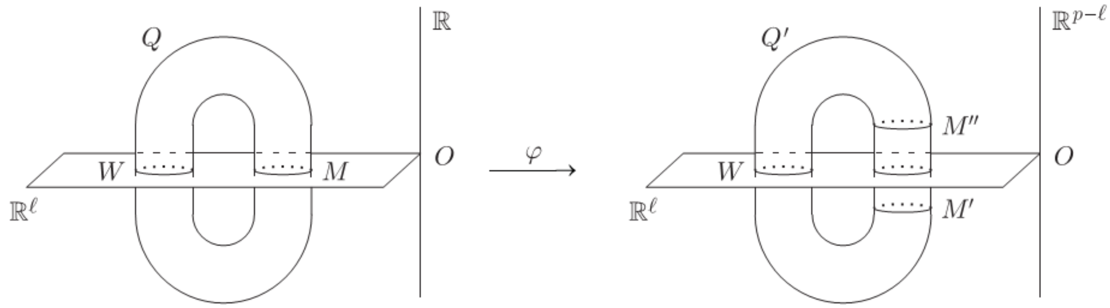
Demostración. Primero por el ***Teorema 3.1.7*** existe W un conjunto algebraico compacto no-singular que es cobordante a M, y por el ***Teorema 1.7.9*** podemos asumir que el cobordismo P está contenido en $\mathbb{R}^l \times [0, \infty[$, de tal manera que $\partial P = M \sqcup W = P \cap (\mathbb{R}^l \times \{0\})$ y $P \cap (\mathbb{R}^l \times [0, 1[) = (M \sqcup W) \times [0, 1[$ como lo muestra la figura.



Sea entonces Q el *"doble" de X*, esto es, *la variedad C^∞ sin frontera definida como*

$$Q = \Big\{(v, r) \in \mathbb{R}^l \times \mathbb{R} | (v, r) \in P\, ó\, (v, -r) \in P\Big\}$$

la vecindad $W \times]-1, 1[$ de W en Q es un subconjunto abierto del conjunto algebraico no-singular $W \times \mathbb{R}$. Por el ***Teorema 3.1.5*** obtenemos una componente conexa no-singular Q′ de algún conjunto algebraico $Z \subseteq \mathbb{R}^l$, con $p \geq l + 1$, y un difeomorfismo $\varphi : Q \to Q'$, tal que $\varphi(W) = W$. Se denota $M' = \varphi(M)$.



Sea $g : Q' \to \mathbb{R}$ la función C^∞ definida como la composición de $\varphi^{-1} : Q' \to Q$ con la proyección $\pi_{l+1} : Q \to \mathbb{R}$. g satisface $g^{-1}(0) = M' \sqcup W$ y 0 es valor regular de g (en particular g es una sumersión). Se afirma que existe una función regular $h : Z \to \mathbb{R}$ tal que $h|_{Q'}$ aproxima a g en $C^\infty(Q', \mathbb{R})$, $h|_W = 0$ y $h^{-1}(0) \subseteq Q'$. En efecto, si $\overline{Z}$ es la clausura de Zariski de Z en $\mathbb{P}^p(\mathbb{R})$, por el ***Lema 2.4.2,*** considerando la función $f : \overline{Z} \to \mathbb{R}$ que coincide con g en Q' y es igual a 1 en $\overline{Z} - Q'$, existe una función (de clase C^∞) regular $\overline{h} : \overline{Z} \to \mathbb{R}$ arbitrariamente cercana a f tal que $\overline{h}|_W = 0$ y se toma $h = \overline{h}|_Z$.
Así el conjunto algebraico $h^{-1}(0)$ está contenido en Q'. Por el ***Teorema 1.9.3*** existe una vecindad Ω de g en $C^\infty(Q', \mathbb{R})$ tal que la función $h|_{Q'} \in \Omega$, esto significa que $h^{-1}(0)$ es un conjunto algebraico no-singular difeótopo a $g^{-1}(0) = M' \sqcup W$ por una difeotopía de Q' que deja a W fijo. Se tiene que $h^{-1}(0) = M'' \sqcup W$, con M'' difeótopo a M'. Como W y $M'' \sqcup W$ son conjuntos algebraicos no-singulares de la misma dimensión, y por la ***proposición 2.3.9*** se tiene que M'' es un conjunto algebraico. Esto completa la prueba. □

Apéndice A
Resultados Básicos Usados

En este apéndice se enuncian los conceptos básicos y resultados usados en este trabajo.

§1.1 Algebra Lineal

Definición A.1.1. Sea $T : E \to F$ una transformación lineal entre dos espacios vectoriales de dimensión finita n y m respectivamente. Se llama ***rango de*** T***,*** denotado $ran(T)$, a la dimensión de la imagen de T, es decir, $ran(T) = dim(Im(T))$, se llama ***nulidad de*** T***,*** denotada $nul(T)$, a la dimensión del kernel de T, es decir, $nul(T) = dim(Ker(T))$.

Teorema A.1.2. ***(Rango-Nulidad)***
Sea $T : E \to F$ *una transformación lineal, entonces* $dim(E) = ran(T) + nul(T)$.

Proposición A.1.3. *Sea* $T : E \to \mathbb{R}$ *una transformación lineal donde* E *es un espacio vectorial real, entonces* T *es nula o es sobreyectiva.*

Demostración. [23] pág. 145. □

§1.2 Topología

Sea E un espacio topológico

Definición A.2.1. Un subconjunto $D \subseteq E$ se dice ***nunca denso,*** si su *clausura no tiene puntos interiores,* es decir, $int\left(\overline{D}\right) = \emptyset$.

Definición A.2.2. Un subconjunto $D \subseteq E$ se dice que es de ***primera categoría*** si se puede expresar como la unión contable de conjuntos *nunca densos.* Se dice que D es de ***segunda categoría*** si no es de *primera categoría.*

Definición A.2.3. Un subconjunto $D \subseteq E$ se dice ***residual*** si D^c es de *primera categoría.*

Definición A.2.4. E se dice ***espacio de Baire*** si satisface cualquiera de la siguientes condiciones equivalentes:

1. Toda intersección numerable de abiertos densos en E es denso en E.

2. Toda unión numerable de conjuntos cerrados nunca densos no tiene puntos interiores.

3. Todo conjunto de primera categoría en E tiene interior vacío.

4. Todo abierto no vacío de E es de segunda categoría.

5. Todo conjunto residual en E es denso en E.

§1.3 Analisis

Definición A.3.1. Sea $r \in \mathbb{N}_0$. Dado un abierto $U \subseteq \mathbb{R}^m$, una función $f = (f_1, ..., f_n) : U \to \mathbb{R}^n$ es de ***clase*** C^r (simplemente f es C^r) si cada función

$$\frac{\partial^k f_i}{\partial x_{j_1} \cdots \partial x_{j_k}} : U \to \mathbb{R},\ 1 \leq k \leq r$$

esta bien definida y es continua; si esto ocurre para todo $r \in \mathbb{N}_0$ entonces se dice que f es de ***clase*** C^∞, decir que f es de ***clase*** C^0 significa simplemente que es continua. Se f es una función C^r con $r \geq 1$ su ***derivada en un punto*** $x \in U$ es la transformacion lineal

$$D_x f : \left(\frac{\partial f_i}{\partial x_j}\right)_{\substack{1\leq i\leq n\\ 1\leq j\leq m}} : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$$

Se verifica además que

$$D_x f(u) = \lim_{t\to 0} \frac{f(x+tu) - f(x)}{t}$$

(que se llama ***derivada direccional***) para cada $u \in \mathbb{R}^m$.

Definición A.3.2. Sea $X \subseteq \mathbb{R}^m$ un conjunto arbitrario. Se dice que una función $f : X \to \mathbb{R}^n$ es C^r si para cada $x \in X$ existe una función C^r $\overline{f} : U \to \mathbb{R}^n$ definida en una vecindad abierta U de x en $\mathbb{R}^m$ de manera que $\overline{f}|_{X\cap U} = f|_{X\cap U}$, Se dice que $\overline{f}$ es una ***extensión local de*** f.

Definición A.3.3. Sean $X \subseteq \mathbb{R}^m$, $Y \subseteq \mathbb{R}^n$

1. Se dice que un *homeomorfismo* $f : X \to Y$ es un *difeomorfismo de clase* r si tanto $f : X \to \mathbb{R}^n$ como $f^{-1} : Y \to \mathbb{R}^m$ son funciones de clase r.

2. Se dice que una función $f : X \to Y$ es un *difeomorfismo local de clase* r *en* $x \in X$ si existen vecindades abiertas U de x en X y V de $f(x)$ en Y de manera que la restriccion de f a $U f|_U : U \to V$ es un difeomorfismo de clase r.

Teorema A.3.4. ***(Teorema de la Función Inversa)***
Sean $X \subseteq \mathbb{R}^n$ un conjunto abierto, $f : X \to \mathbb{R}^n$ una función C^r $(r \geq 1)$. Entonces f es un difeomorfismo local de clase r si y solo si la derivada $D_x f$ es un isomorfismo lineal.

Teorema A.3.5. ***(Teorema de la Función Implícita)***
Sean $A \subseteq \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m$ un conjunto abierto, $F : A \to \mathbb{R}^m$ una función C^r $(r \geq 1)$, $(a, b) \in A$ denotamos $D = D_{(a,b)}F$. Suponga que $F(a, b) = 0$ y $D_2 = D|_{\{0\}\times\mathbb{R}^m}$ $(D_1 = D|_{\mathbb{R}^n\times\{0\}})$ es un isomorfismo lineal. Entonces existen una vecindad U de a en $\mathbb{R}^n$, una vecindad V de b en $\mathbb{R}^m$ y una única función C^r $f : U \to V$ tales que:

$$F(x, f(x)) = 0$$

para todo $x \in U$. También se tiene:

$$D_b f = -D_2^{-1} D_1$$

Teorema A.3.6. ***(Forma Local de las Sumersiones)***
Sean $U \subseteq \mathbb{R}^n$ abierto, $f : U \to \mathbb{R}^m$ una sumersión C^r $(r \geq 1)$, $x_0 \in U$. Entonces para cualquier descomposición en suma directa $\mathbb{R}^n = E \oplus F$, con $x_0 = (v_0, w_0)$ tal que $D_2 = D_{x_0}f|_F : F \to \mathbb{R}^m$ es un isomorfismo lineal, existe un difeomorfismo C^k , $h : V \times W \to Z$, tal que para cada $(v, w) \in V \times W$, $(f \circ h)(v, w) = w$, donde $V \subseteq E \equiv \mathbb{R}^{n-m}$, $W \subseteq \mathbb{R}^m$, y $Z \subseteq U$ son abiertos, con $v_0 \in V$, $f(x_0) \in W$, y $x_0 \in Z$.

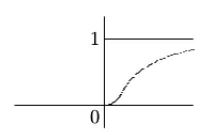
Demostración. [21] pág. 157. □

Teorema A.3.7. ***(Invarianza de Dominio)***
Sean $U \subseteq \mathbb{R}^m$, $V \subseteq \mathbb{R}^n$ subconjuntos no vacíos que son difeomorfos, entonces:

1. *Si U, V son abiertos entonces $n = m$.*

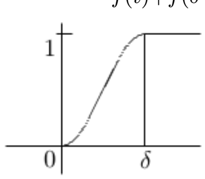
2. *Si $n = m$ y U es abierto, entonces V es abierto.*

Utilizaremos las siguientes funciones de clase C^∞, $\mathbb{R} \longrightarrow [0, 1]$ que nos ayudaran a extender homotopías y cuyas gráficas representamos junto a su definición:

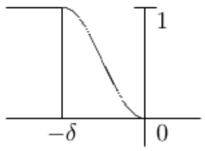


1. $f(t) = \begin{cases} 0 & , \ t \leq 0 \\ e^{-1/t} & , \ t > 0 \end{cases}$; observe que $f'(t) > 0$ para $t > 0$ y f es creciente.

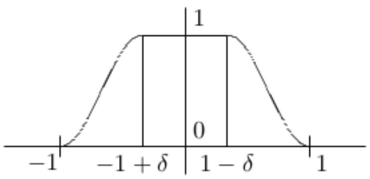
2. $g_\delta(t) = \frac{f(t)}{f(t)+f(\delta-t)}$, para $\delta > 0$; observe que $f'(t) > 0$ para $0 < t < \delta$, y f es creciente.



3. $h_\delta(t) = g_\delta(-t)$, para $\delta > 0$: observe que $f'(t) < 0$ para $-\delta < t < 0$, f es decreciente.



4. La ***función meseta de la recta real*** es: $\mu = g_\delta(1+t) \cdot g_\delta(1-t)$ para $0 < \delta < 1$.



Teorema A.3.8. ***(Partición de la Unidad)***
Sea $X \subseteq \mathbb{R}^m$ y sea $\{U_i\}_{i\in I}$ un recubrimiento abierto de X. Entonces existe una partición de la unidad $\{\theta_i\}_{i\in I}$ de clase r subordinada a $\{U_i\}_{i\in I}$, es decir:

1. *Cada $\theta_i : X \to [0,1]$ es una función de clase r.*
2. *Los soportes abiertos $\{\theta_i \neq 0\} \subseteq X$ (y por tanto sus clausuras) son una familia localmente finita en X, la suma $\sum_{i\in I} \theta_i$ está bien definida y se tiene $\sum_{i\in I} \theta_i \equiv 1$.*
3. *$\overline{\{\theta_i \neq 0\}} \subseteq U_i$ para cada i.*

Demostración. [9] pág. 12 □

Proposición A.3.9. ***(Lema de Urysohn diferenciable)***
*Para cualesquiera subconjuntos cerrados disjuntos no vacíos C, $D \subseteq \mathbb{R}^n$ existe una función C^r $\gamma : \mathbb{R}^n \to [0,1]$ tal que $\gamma|_C \equiv 0$, $\gamma|_D \equiv 1$. Una función así denomina **función separante**.*

Demostración. [9] pág. 11. □

Teorema A.3.10. ***(Teorema de Extensión De Tietze)***
Sean $X \subseteq \mathbb{R}^m$ un conjunto arbitrario y una función C^r $f : X \to \mathbb{R}^n$, entonces existe una función C^r $\overline{f} : U \to \mathbb{R}^n$ definida en un abierto U de $\mathbb{R}^m$ que contiene a X y que extiende a f , esto es, tal que $\overline{f}|_X = f$.

Demostración. [9] pág. 13. □

§1.4 Topología en espacios de funciones

Definición A.4.1. (ver [9] págs. 76-78) Sean $X \subseteq \mathbb{R}^n$ un conjunto cualquiera y $\mathscr{C}^\infty(X, \mathbb{R}^n)$ el espacio de las funciones $f : X \to \mathbb{R}^n$ de clase C^∞ dotado con la norma

$$\|f\|_\infty := \sup_{x\in X} \|f(x)\|_{\mathbb{R}^n},$$

donde $\|\cdot\|_{\mathbb{R}^n}$ es la norma euclidiana en $\mathbb{R}^n$. Para cada función estrictamente positiva $\epsilon : X \to \mathbb{R}$ Se define una "bola" $B_\epsilon(f)$, $f \in \mathscr{C}^\infty(X, \mathbb{R}^n)$ y en $\mathscr{C}^\infty(X, \mathbb{R}^n)$ como

$$B_\epsilon(f) := \{g \in \mathscr{C}^\infty(X, \mathbb{R}^n) : \|g - f\|_\infty \leq \epsilon\}$$

donde la expresión $\|g - f\|_\infty \leq \epsilon$ significa que $\sup_{x \in X} \|g(x) - f(x)\|_{\mathbb{R}^n} \leq \epsilon(x)$, $\forall x \in X$ y se tiene que el conjunto de todas las bolas $B_\epsilon(f)$ forman una base para una topología en $\mathscr{C}^\infty(X, \mathbb{R}^n)$. Esta topología se denomina la ***Topologia Fuerte.***

Observación A.4.2. Si X es compacto entonces la función ϵ tiene un mínimo ϵ_0, y tenemos $B_{\epsilon_0}(f) \subseteq B_\epsilon(f)$. Por tanto *las bolas abiertas definidas por funciones constantes forman una base de la topología fuerte.*

Bibliografía

[1] S. Akbulut and H. King, *A relative nash theorem*, Trans. Amer. Math. Soc. **267** (1981), 465–481.

[2] ———, *The topology of real algebraic sets with isolated singularities*, Ann. of Math. **113** (1981), no. 2, 425–446.

[3] ———, *On approximating submanifolds by algebraic sets and a solution to the nash conjecture*, Invent. Math. **107** (1992), no. 100, 87–98.

[4] J. Bochnak, M. Coste, and M. Roy, *Real algebraic geometry*, A Series of Modern Surveys in Mathematics, Springer, 1998.

[5] J. Bochnak and W. Kucharz, *Nonisomorphic algebraic models of a smooth manifold*, Math. Ann **290** (1991), 1–2.

[6] T. Brocker and K. Janich, *Introduction to differential topology*, Cambridge Univ. Press, 1982.

[7] E. E. Conner, P. E. Floyd, *Differentiable periodic maps*, Springer-Verlag, 1964.

[8] Tammo T. Dieck, *Differential manifolds*, vol. 101, 2009.

[9] Enrique Outerelo Dominguez and Jesus Ruiz, *Topología diferencial*, Addison-Wesley Iberoamericana, 1998.

[10] V. Guillemin and A. Pollack, *Differential topology*, American Mathematical Soc., 2010.

[11] R. Hartshorne, *Algebraic geometry*, Graduate Texts in Mathematics, Springer, 1977.

[12] Morris W. Hirsch, *Differential topology*, Springer-Verlag, 1976.

[13] W.V.D. Hodge and D. Pedoe, *Methods of algebraic geometry*, Cambridge Mathematical Library, no. v. 1, bks. 1-2, Cambridge University Press, 1994.

[14] H. King, *Approximating submanifolds of real projective space by varieties*, Topology **15** (1976), no. 449, 81–85.

[15] Serge Lang, *Introduction to differentiable manifolds*, Springer, 2002.

[16] Jeffrey M. Lee, *Manifolds and differential geometry*, American Mathematical Society, 2009.

[17] John M. Lee, *Introduction to smooth manifolds*, 2 ed., Applied Mathematical Sciences, no. 68, Springer, 2002.

[18] W. Massey, *On the normal bundle of a sphere embedded in eucliedan space*, Proc. Amer. Math. Soc. **10** (1959), 959–964.

[19] J. Milnor, *On the stiefel-whitney numbers of complex manifolds and of spin manifolds*, Topology **3** (1965), 223–230.

[20] John Nash, *Real algebraic manifolds*, Ann. Math. **56** (1952), 405–421.

[21] Sergio Plaza, *Análisis en varias variables.*

[22] ______, *Topología diferencial*, 2008.

[23] Oscar Santamaria Santisteban, *Variedades diferenciables una introducción*, 2010.

[24] H. Seifert, *Algebraische approximation von mannigfaltigkaiten*, Mat. Z. **41** (1936), 1–17.

[25] Anant R. Shastri, *Elements of differential topology*, 3 ed., Text in Applied Mathematics, no. 7, CRC Press, 2011.

[26] Alberto Tognoli, *Su una congettura di nash*, Annali della Scuola Normale Superiore di Pisa **27** (1973), no. 1, 167–185.

[27] ______, *Approximation theorems and nash conjecture*, Memoires de la S. M. F. **38** (1974), 53–68.

[28] Andrew H. Wallace, *Algebraic approximation of manifolds*, Proceedings London Mathematical Society **s3-7** (1957), no. 1, 196–210.

[29] Felipe Zaldivar, *Notas de geometría algebraica.*

[30] Aleksey Zinger, *Notes on smooth manifolds and vector bundles*, 2011.