CIMAT

**Centro de Investigación en Matemáticas, A.C.**

# Valuación de derivados financieros sobre bonos con incumplimiento

Para obtener el grado de:

*Maestría en Ciencias con Especialidad en Probabilidad y Estadística*

Presenta:

**Claudia Lara Silva**

Director de tesis: Dr. Daniel Hernández Hernández

**Resumen**

Este trabajo de tesis tiene como objetivo principal el estudio de diferentes metodologías de valuación de bonos y sus derivados. Específicamente para opciones europeas de compra y contratos swap. Para esto resulta necesario partir de la teoría desarrollada para bonos financieros y tasas de interés, los cuales están ampliamente relacionados. Se considerarán derivados sobre bonos, los cuales, pueden caer en incumplimiento como resulta en la práctica. La posibilidad de que un bono pueda no ser pagado influye en la determinación del precio de derivados sobre bonos y tasas de interés. En este trabajo se presentará de manera analítica cómo las características de estos bonos repercuten en el precio de sus derivados. Las posibilidades de incumplimiento se modelan para determinar el precio justo que le corresponde a cada derivado. El modelado de tasas de interés que se utilizará será la establecida por la metodología Heath-Jarrow-Morton, la cual es consistente con la metodología de valuación de bonos con incumplimiento que se presenta en este trabajo. Las diferentes metodologías utilizables basadas en cálculo estocástico y la teoría de ecuaciones diferenciales estocásticas se exponen junto con una explicación más detallada de la participación de estos derivados en el mercado y de la importancia de las tasas de interés en la valuación del bono, la cual repercute directamente en la valuación de los derivados sobre los mismos. Así mismo se analizará cómo la valuación de los bonos repercute directamente en los mercados financieros, en lo que recae la importancia de la valuación de derivados.

*"No puede haber lazo más fuerte que el que une a dos hermanos; no es lo mucho que se amen entre si, sino que ambos aman a los mismos padres"*

—Edgar Allan Poe

# Agradecimientos

En primer lugar agradezco a quienes más amo, admiro y respeto. A mis padres, José Luis Lara y Patricia Silva, por el gran apoyo que desde siempre han sido para mí. A mi hermana, Marina Lara, de quien he aprendido mucho desde que era niña; y a Esteban Barraza, quien es también parte de la familia. Gracias por enseñarme lo que significa fortaleza. Quisiera mencionar también a esa personita que físicamente ya no está y sin embargo nos cuida a todos.

Agradezco a la persona que me ha acompañado durante seis años, Ariel Camacho, de quien entre risas aprendo todos los días y a quien quiero demasiado.

Expreso también mi agradecimiento a cada uno de mis compañeros de generación, cuyos nombres no menciono por temor a olvidar alguno. Gracias por crear ese ambiente ameno y divertido; por ser buenas personas, compañeros y amigos.

A Leticia, Marysol, Nelly, Alicia y Dania. Por sus originales palabras de aliento y charlas a horas no adecuadas, gracias.

Reconozco el gran apoyo que obtuve de mi asesor, el Dr. Daniel Hernández, a quien agradezco su tiempo, paciencia y todos los conocimientos que me brindó a lo largo de estos dos años.

Agradezco a los profesores del área de Probabilidad y Estadística por todo lo que aprendí de ellos durante el camino, sobre todo esos consejos de vida que no se olvidan nunca.

A mis sinodales, el Dr. Leonel Pérez y el Dr. José Luis Pérez Garmendia, por el tiempo dedicado a la revisión de mi trabajo y sus consejos para mejorarlo.

Por último, al Centro de Investigacion en Matemáticas y al Consejo Nacional de Ciencia y Tecnología por el apoyo proporcionado para que me fuera posible llevar a cabo mis estudios de maestría y desarrollar este trabajo.

# Índice

# Introducción

La tesis tiene como objetivo principal el estudio de diferentes metodologías de valuación de bonos y sus derivados. Para ésto resulta necesario partir de la teoría desarrollada para bonos financieros y tasas de interés, debido a que ambos están ampliamente relacionados. La importancia de este estudio recae en la necesidad de determinar los valores justos que deben poseer diferentes contratos financieros tales como opciones, swaps, entre otros. Se considerarán solamente derivados sobre bonos, los cuales, pueden caer en incumplimiento como resulta en la práctica.

La posibilidad de que un bono pueda no ser pagado influye en la determinación del precio de derivados sobre bonos y tasas de interés. En este trabajo se presentará de manera analítica cómo las características de estos bonos repercuten en el precio de sus derivados. Para esto se está consciente de una posible baja o interrupción en los flujos de efectivo, así como el riesgo tanto de capital como de intereses perdidos. Además, las pérdidas pueden ser completas o sólo parciales, no tienen un comportamiento determinado y dependen de un sinfín de circunstancias ajenas. Las posibilidades de incumplimiento se modelan para determinar el precio justo que le corresponde a cada derivado. Estas son algunas de las consideraciones palpables en el uso de este tipo de bonos que, al comercializarlos por medio de otros instrumentos financieros, repercuten en la práctica del mercado a través de sus precios.

Para dejar claras las motivaciones y la importancia de los bonos y tasas de interés en el mercado, así como ayudar a la intuición, es necesario introducir conceptos básicos involucrados en la teoría de mercados financieros. Se introducirán a detalle a lo largo de los capítulos siguientes según sea necesario para hacer de éste un trabajo autocontenido. Las referencias principales para los primeros tres capítulos han sido Brigo & Mercurio (2006), Björk (2004), Klebaner (2005); mientras que para el capítulo 4 se ha hecho un estudio del contenido en Jarrow & Turnbull (1995), Musiela & Rutkowski (2006) y Bluhm, Overbeck & Wagner (2003)

Es importante mencionar que existen dos tipos de mercados: el mercado bursátil y el mercado extra-bursátil. El mercado bursátil también es conocido como Bolsa de Valores, un mercado donde los individuos negocian contratos que han sido estandarizados por la Bolsa. Su contraparte, el mercado extra-bursátil, se conoce como un mercado secundario donde se comercializan activos que no cotizan en la Bolsa. Este mercado es una alternativa importante, puesto que permite el intercambio de instrumentos financieros con mayor libertad de negociación. Actualmente el mercado extra-bursátil se ha vuelto mayor que la Bolsa de Valores, en el sentido de que la mayoría de las negociaciones se realizan de manera externa y no estandarizada y regulada por la Bolsa. Sin embargo, el principal inconveniente del mercado extra-bursátil es que usualmente se está expuesto a riesgo en crédito. Esto significa que existe una posibilidad de que el contrato no se lleve a cabo en las condiciones especificadas.

En cualquier mercado pueden negociarse derivados por medio de contratos, los cuales pueden presentar o no incumplimiento sin importar el mercado donde se contraten. En finanzas es importante entender el funcionamiento de los derivados como instrumentos financieros claves, así como su uso y su valuación. Un derivado puede definirse como un instrumento financiero cuyo valor depende del valor de otro. En otras palabras, un derivado es un instrumento cuyo valor depende de variables subyacentes. En este trabajo, los derivados serán contratados sobre bonos cupón cero los cuales, a su vez, son instrumentos financieros de deuda contratados en un tiempo $t$ y que finalizan en una fecha determinada $T$, fecha en la cual se promete al tenedor del bono recibir por parte del prestatario una unidad monetaria. Esta unidad la denotaremos por $\$1$, y hace referencia a una unidad de medida de las divisas, la cual puede representar un peso, un dólar, 100 pesos o cualquier otra cantidad fija. Cuando se recibe de manera íntegra el pago de $\$1$ en el tiempo $T$, diremos que el bono ha sido cumplido o que no presenta incumplimiento. Sin embargo, en la práctica es común que ésto no ocurra. Cuando el pago es menor a lo prometido, diremos que el bono presenta incumplimiento. La valuación de ambos tipos de bonos es similar, pero presentan diferencias importantes las cuales se analizaran en el último capítulo. En particular, se hablará de dos tipos de derivados sobre bonos: swaps y opciones europeas. Veremos lo referente a su valuación en dos casos, tanto cuando los bonos presentan incumplimiento y cuando no es así.

Uno de los conceptos vitales que se mencionan en el primer capítulo es el concepto de arbitraje. Dado que el objetivo de la tesis es estudiar la valuación de derivados, es fundamental suponer que no existen oportunidades de arbitraje en un mercado de bonos. Es decir, suponer que no es posible obtener ganancias positivas a partir de una inversión nula. Hablar de arbitraje también nos obliga a introducir herramientas que resultan de ayuda para la valuación de derivados. En el capítulo 1 se introducen una clase de medidas bajo las cuales es más apropiado trabajar de manera técnica e intuitiva. Dichas medidas son conocidas como medidas neutrales al riesgo. La literatura probabilista también se refiere a ellas como medidas martingalas equivalentes a una medida en particular que, en nuestro caso, resulta ser la medida objetiva o real del mercado. Esta medida objetiva es bajo la cual se rigen las evoluciones de las tasas de interés y bonos. Pero no siempre es conveniente trabajar bajo esta medida sino con una medida neutral.

En el segundo capítulo se introducirán las diferentes tasas de interés que existen. La importancia de tres de estas tasas en particular es mencionada en dicho capítulo. Una de ellas es la tasa instantánea, y su importancia es tal que estará presente en todas las secciones de este trabajo. Otra tasa importante que se menciona es la tasa forward, que es una de las más utilizadas en el mercado debido a la bondad que brinda de adquirir una deuda en el futuro y no en el presente. Además, esta tasa es crucial para la metodología de Heath-Jarrow-Morton, que se presentará a detalle en una de las secciones del capítulo 3. Por último, se hará notar la participación de la tasa LIBOR, una tasa de referencia internacional implementada desde la década de los ochenta y usada aún en la actualidad. Las tasas forward e instantánea, como podrá notarse una vez que se hayan presentado sus definiciones, están estrechamente relacionadas. Se hará especial hincapié en esta relación, así como su relación natural con el proceso de precios de bonos cupón cero.

Las herramientas de batalla durante todo este trabajo serán el cálculo estocástico y las ecuaciones diferenciales estocásticas, estas herramientas necesarias se presentarán a lo largo de los capítulos o serán referenciadas para su consulta externa. Estas herramientas son vitales para el planteamiento y desarrollo de modelos para nuestros principales objetos de interés. Se asociarán ecuaciones diferenciales estocásticas para la tasa instantánea, tasa forward y precios del bono. Además se presentará la demostración de un resultado que establece cómo es posible obtener alguna de esas dinámicas a partir de otra gracias a las relaciones de estos tres objetos financieros.

Mencionaremos los modelos para tasa instantánea más relevantes en la literatura. Se presentará un breve compilado de las principales características de los siguientes modelos: Vasicek, Dothan, CIR (Cox, Ingersoll, Ross) y Hull White, los cuales son, dentro del ámbito financiero, históricamente interesantes, importantes y trascendentes. Se resaltan los inconvenientes de estas metodologías para modelar la tasa instantánea, desde los inconvenientes distribucionales hasta lo referente a la existencia de una solución. Al final del tercer capítulo, se presentará con formalidad la metodología de Heath-Jarrow-Morton. Esta metodología parte de la modelación de tasas forward y no directamente de la modelación de la tasa instantánea, así como de otras peculiaridades que se ahondarán con detalle en el capítulo 3. Aunque esta metodología propone trabajar con tasas forward y no con tasas instantáneas, veremos que, debido a la relación entre ambas tasas, este enfoque de modelación es válido e incluso eficiente. Estudiar modelos de tasa instantánea es importante puesto que los precios de un bono dependerán de la evolución de la tasa de interés instantánea, esto será explicado en el capítulo 2 a mayor profundidad. No obstante, las metodologías de valuación para swaps y opciones europeas sobre bonos, dependerán de los supuestos de cumplimiento o incumplimiento de éstos. Las diferentes metodologías utilizables para estos dos derivados en particular, se mostrarán en el capítulo 4 junto con una explicación más detallada de la participación de estos derivados en el mercado y de la importancia de las tasas de interés en la valuación del bono, la cual repercute directamente en la valuación de los derivados sobre los mismos. Así mismo se analizará cómo la valuación de los bonos repercute directamente en los mercados financieros, en lo que recae la importancia de la valuación libre de arbitraje de cada derivado.

# 1. Arbitraje en los mercados financieros

La ausencia de arbitraje en los mercados es una suposición fundamental en finanzas. La presencia de arbitraje en un mercado es equivalente a creer que una inversión de cero pesos en el día de hoy nos hará recibir en un futuro, posiblemente, una cantidad no negativa. Una oportunidad de arbitraje nos lleva a una probabilidad positiva de obtener ganancias de una inversión nula. Si el precio de un producto financiero está representado por una cantidad errónea, surgirá una oportunidad de arbitraje asociada al producto cuyo precio es erróneo.
Una oportunidad de arbitraje será siempre libre de riesgo; sin embargo, si la inversión tiene riesgo no es arbitraje sino *especulación*. A diferencia del arbitraje, la especulación involucra la necesidad de inmovilizar el capital. La especulación puede interpretarse como la apuesta hecha por un inversionista, dado que la inversión depende de adivinar la actividad o variación de un proceso en el futuro. Habrá ganancias positivas si la expectativa del especulador se logra y habrá pérdidas si el especulador no acierta. Es sabido que la especulación aumenta la liquidez y permite redistribuir el riesgo. En la práctica el arbitraje contribuye a igualar los precios en todos los mercados, debido a que obliga a recurrir a una valuación correcta de todos los instrumentos financieros. Por su parte, la especulación permite, de manera más sencilla, un ajuste suave de los precios expuestos a circunstancias que pueden hacerlos variar.
El objetivo principal en esta sección es presentar los resultados fundamentales de la teoría financiera de arbitraje. Para ello se definirán cada uno de los componentes necesarios para entender dichos resultados. Las definiciones y resultados presentadas en este capítulo han sido extraídas en su mayor parte de Brigo & Mercurio (2006, p.293-296) y de Klebaner (2005, p.293-296). Para consultas más profundas sobre lo tratado en la sección 1.2 puede consultarse Björk (2004, p-32-37).

## 1.1. Portafolios de inversión

El primer paso es construir un modelo de mercado. Consideraremos un horizonte $T^* > 0$ y un espacio de probabilidad filtrado $(\Omega, \mathscr{F}, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ con filtración $\mathcal{F} = \{\mathscr{F}_t \subset \mathscr{F}; 0 \leq t \leq T^*\}$ continua por la derecha. En dicho espacio existe una economía con $K+1$ activos negociados continuamente desde el tiempo 0 hasta el tiempo $T^*$. De manera formal, consideremos un proceso $S$ que consiste de dos partes: un conjunto de $K$ activos cuyo precio en el tiempo $t$ del activo $i-$ésimo es $S^i(t)$, para cada $i = 1, 2, \ldots K$; y una inversión sin riesgo cuyo valor al tiempo $t$ es $B(t)$, la cual se interpreta como el efectivo guardado en una cuenta bancaria. El proceso $S = \{S(t); 0 \leq t \leq T^*\}$ es de dimensión $K+1$ y sus componentes son positivos.

El activo cero en el proceso $S$ en el tiempo $t$, es decir $S^0(t)$, es la inversión sin riesgo de valor $B(t)$. Su evolución en el tiempo se rige por la dinámica

$$dB(t) = r(t)B(t)dt, \tag{1.1}$$

con condición inicial $B(0) = 1$ y donde $r(t)$ denota a la tasa instantánea de interés en el tiempo $t$.

Tanto el concepto de cuenta bancaria como el de tasa instantánea son muy importantes en este trabajo. Por el momento, consideraremos a la tasa $r(t)$ como un proceso determinista que rige la evolución del precio del dinero en el tiempo. La manera en la que este proceso evoluciona y sus relaciones con otras tasas de interés serán tratadas en el siguiente capítulo. Mientras tanto, para esta sección es vital introducir los *portafolios de inversión*. Recordemos que se ha planteado una economía con $K$ activos, los cuales pueden ser cualquier producto negociable, y una cuenta en el banco. En general, un inversionista puede seleccionar de un conjunto de diversos activos disponibles en el mercado y formar con ellos una estrategia de inversión dependiendo de sus expectativas a largo plazo. Según los objetivos que desea alcanzar con su inversión, será la selección de los componentes de cada estrategia. A esta estrategia también de le conoce como portafolio de inversión. Para ser consistentes con la economía planteada con anterioridad, consideraremos portafolios con $K+1$ elementos, los cuales son definidos de manera matemática como sigue.

**Definición 1.1.** *Un* ***portafolio*** *o* ***estrategia****, es un proceso de dimensión* $K+1$

$$\phi = \{\phi(t); 0 \leq t \leq T*,\}$$

*con componentes acotados y predecibles que representa el número de unidades retenidas de cada activo del proceso $S$ en el tiempo $t$. El proceso valor en el tiempo $t$ del portafolio $\phi$ está dado por*

$$V_t(\phi) = \sum_{k=0}^{K} \phi^k(t) S^k(t),$$

*y el proceso de ganancias acumuladas por el inversionista se define en el tiempo t como*

$$G_t(\phi) = \sum_{k=0}^{K} \int_0^t \phi^k(u)\, dS^k(u),$$

*ambos definidos para* $0 \leq t \leq T^*$.

Notemos que según la definición anterior, el proceso $\phi$ es predecible, es decir, que su valor es conocido en un instante previo. Ésto induce a pensar que un portafolio está definido con base en la información conocida hasta el tiempo inmediatamente antes del instante $t$. Además, dado que la creación de un portafolio es hecha con fines de inversión, a cada portafolio le corresponde un valor dependiendo de sus componentes. Mientras tanto el inversionista tiene la oportunidad de generar ganancias de su portafolio, las cuales dependerán de los componentes del mismo y su comportamiento a través del tiempo.

**Definición 1.2.** *Un portafolio es* ***autofinanciable*** *si no hay préstamos ni retiros en ningún momento. Dicho de otra manera, un portafolio es autofinanciable si todos los cambios en el portafolio son debidos a las pérdidas o ganancias obtenidas por la inversión.*

De la definición anterior podemos deducir que el valor de un portafolio en cualquier tiempo $t$, debe depender únicamente de la inversión en el tiempo inicial y de las ganancias obtenidas hasta el tiempo $t$. Explícitamente, consideraremos portafolios cuyo valor es no negativo y satisfacen en cada tiempo $0 \leq t < T^*$ la relación:

$$V_t(\phi) = V_0(\phi) + G_t(\phi).$$

Para hablar sobre valuaciones de portafolios, introduciremos medidas en particular que permitirán la valuación de estrategias de negociación. Las definiciones principales para la implementación de éstas medidas en la valuación, se presentan en el siguiente apartado.

## 1.2. Medida neutral al riesgo

Con cada inversión va de por medio un riesgo asociado. Por ésto, el precio de un derivado o de cualquier instrumento financiero está ligado con el riesgo de dicho instrumento. En

cada estrategia el inversionista arriesga capital, pero la expectativa del inversionista siempre será evitar las pérdidas. Sin embargo, cuanto más grande es el riesgo en la inversión, mayores son las probabilidades de obtener ganancias mucho más significativas. Por su parte, los mercados para mantenerse equilibrados y sustentables, no aseguran las máximas ganancias deseadas por cada inversionista. Para la valuación de un derivado necesitamos de una medida que neutralice, en algún sentido, el riesgo de inversión en el mercado. Este concepto es importante en la teoría de arbitraje, debido a que en los mercados completos, en los cuales se ahondará más adelante, es sabido que la valuación está dada por una esperanza bajo una medida neutral al riesgo.
Para introducir el concepto de medida neutral, necesitamos hablar primero de un conjunto de medidas en particular: *las medidas equivalentes*. Para que dos medidas sean equivalentes, ambas deben estar definidas en el mismo espacio, en nuestro caso $(\Omega, \mathscr{F})$, y medir los mismos conjuntos. La noción intuitiva de medidas equivalentes se reduce a pensar que éstas deben coincidir en los conjuntos tanto de medida nula como en los conjuntos de medida unitaria. De manera formal, se presenta el concepto de medidas equivalentes de probabilidad en la siguiente definición.

**Definición 1.3.** *Diremos que una medida de probabilidad definida en $(\Omega, \mathscr{F})$, la cual denotaremos por $\mathbb{Q}$, es una **medida de probabilidad equivalente** a la medida objetiva de mercado, $\mathbb{P}$, si $\mathbb{Q}$ satisface*

$$\mathbb{P}(A) = 0 \Longleftrightarrow \mathbb{Q}(A) = 0, \tag{1.2}$$

*donde $A \in \mathscr{F}$ .*

De manera análoga, puede darse una definición diferente a la anterior, cambiando la ecuación (1.2) por

$$\mathbb{P}(A) = 1 \Longleftrightarrow \mathbb{Q}(A) = 1, \tag{1.3}$$

lo cual tiene sentido debido a que $(\Omega, \mathscr{F}, \mathbb{P})$ y $(\Omega, \mathscr{F}, \mathbb{Q})$ son espacios de probabilidad.

En resumen, podemos partir de un espacio de probabilidad filtrado $(\Omega, \mathscr{F}, \digamma, \mathbb{P})$. En nuestro caso de interés, la medida $\mathbb{P}$ denota a la medida objetiva. A partir de ella, podemos introducir un nuevo espacio de probabilidad $(\Omega, \mathscr{F}, \digamma, \mathbb{Q})$, donde $\mathbb{Q} \sim \mathbb{P}$. Recordemos que el objetivo principal de esta tesis es mostrar metodologías para la valuación de derivados financieros sobre bonos emitidos en el mercado. Dichos derivados son elementos, en algún sentido, del espacio $(\Omega, \mathscr{F}, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ y deberían poder ser valuados utilizando la medida objetiva del mercado, sin embargo ésta no es la mejor alternativa debido a su complejidad. Por esta razón, es de gran utilidad la implementación de un nuevo espacio de probabilidad en el que los derivados que queremos valuar sigan teniendo sentido y además, la medida asociada a dicho espacio sea la conveniente para obtener los precios de los contratos para cada derivado. En busca de la medida equivalente a $\mathbb{P}$ que resulte conveniente para nuestro objetivo, se introducen los conceptos de *martingala* y de *medida martingala.*

**Definición 1.4.** *Un proceso* $\{X(t); 0 \leq t \leq T^*\}$ *en* $(\Omega, \mathscr{F}, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ *es una martingala adaptada a la filtración* $\mathcal{F}$ *si:*

1. $X(t)$ *es* $\mathscr{F}_t$ *medible para* $0 \leq t \leq T^*$.
2. $X(t)$ *es integrable. para* $0 \leq t \leq T^*$. *Es decir,* $\mathbb{E}^{\mathbb{P}}[|X(t)|] < \infty$, *para* $0 \leq t \leq T^*$.
3. $\mathbb{E}^{\mathbb{P}}[X(t) | \mathscr{F}_u] = X(u)$, *para* $0 \leq u \leq t$.

Intuitivamente y debido a que según la definición, $\mathbb{E}^{\mathbb{P}}[X(t)] = \mathbb{E}^{\mathbb{P}}[X(0)]$ para cualquier $t \leq T^*$, una martingala es un proceso cuya esperanza siempre permanece constante.

**Definición 1.5.** Diremos que una medida de probabilidad $\mathbb{Q}$ asociada a $(\Omega, \mathscr{F})$, es una ***medida martingala equivalente a*** $\mathbb{P}$, si satisface lo siguiente:

1. $\mathbb{Q} \sim \mathbb{P}$.
2. La derivada de Radom-Nikodym $\frac{d\mathbb{Q}}{d\mathbb{P}}$ es cuadrado integrable en $(\Omega, \mathscr{F}, \mathcal{F}, \mathbb{Q})$.
3. El proceso $Z = \left\{\frac{S(t)}{B(t)}; 0 \leq t \leq T^*\right\}$ es una martingala en $(\Omega, \mathscr{F}, \mathcal{F}, \mathbb{Q})$, es decir

$$\mathbb{E}^{\mathbb{Q}}\left[\frac{S^k(t)}{B(t)} | \mathscr{F}_u\right] = \frac{S^k(u)}{B(u)},$$

para todos $0 \leq u < t \leq T$ y $k = 0, 1, \ldots, K$.

A una medida martingala equivalente también se le conoce como medida neutral al riesgo. En la siguiente sección se presentan los resultados principales de la teoría de arbitraje en finanzas, los cuales relacionan de manera muy estrecha a las medidas neutrales al riesgo con las oportunidades de arbitraje, completez de espacios de probabilidad y valuación de derivados.

## 1.3. Teoremas fundamentales sobre arbitraje

Cuando hablamos del comportamiento de los flujos de dinero y precios en el mercado esperamos que éstos se presenten en las mismas condiciones para todos sus participantes. Por ejemplo, si dos activos tienen los mismo flujos de dinero entonces deberían tener el mismo valor. También esperaríamos que si tenemos dos activos, $X$ y $Y$, tales que las ganancias que puede generar $X$ son mayores a las ganancias que puede generar $Y$, entonces el precio de $X$ fuera mayor al precio de $Y$. Las dos expectativas anteriores son promesas en un mercado libre de arbitraje. Para exponer el concepto de arbitraje y sus resultados más importantes, comenzaremos por presentar las definiciones necesarias para ello.

**Definición 1.6.** Sea $0 < T \leq T^*$:

- $\rightarrow$ *A una variable aleatoria no negativa en el espacio* $(\Omega, \mathscr{F}_T)$, *la cual denotaremos por* $X$, *se conoce como* ***activo contingente***. *Este activo representa un contrato que paga una cantidad* $X$ *al tiempo* $T$.

- $\rightarrow$ *Una estrategia se dice* ***admisible*** *si es autofinanciable y su proceso de valores,* $V$, *es no negativo.*

- $\rightarrow$ *Un* ***activo contingente*** $X$ *se dice que es* ***replicable*** *por* un portafolio $\phi$ con valor $V_t(\phi) \geq 0$ *si*
$$V_T(\phi) = X.$$

- $\rightarrow$ *Un* ***activo contingente*** $X$ *se dice que es* ***alcanzable*** *si existe una estrategia admisible que replica a* $X$.

→ *Una* ***oportunidad de arbitraje*** *es una estrategia admisible para la cual* $V_0(\phi) = 0$, *pero*

$$\mathbb{P}(V_T(\phi) > 0) > 0.$$

→ *Un* ***modelo de mercado*** *es* ***completo*** *si cada activo definido en él es alcanzable.*

Definido lo anterior, se presentan sin demostración el *Primer teorema fundamental, el Principio de no arbitraje* y una equivalencia para el concepto de *completez* del mercado.

**Teorema 1.7.** ***Primer teorema fundamental:*** *Un modelo de mercado con medida objetiva* $\mathbb{P}$, *no tiene oportunidades de arbitraje sí y solo sí existe al menos una medida martingala equivalente a* $\mathbb{P}$, *la cual denotamos por* $\mathbb{Q}$, *tal que el proceso de valores descontados* $Z(t) = S(t)/B(t)$ *es una* $\mathbb{Q}-$*martingala.*

*Observación* 1.8. *Si existe una medida de probabilidad* $\mathbb{Q}$, *para la cual el proceso de activos descontados* $Z(t) = S(t)/B(t)$ *es una* $\mathbb{Q}-$*martingala, entonces para cualquier estrategia admisible el proceso de valor descontado* $V(t)/B(t)$ *es también una* $\mathbb{Q}-$*martingala.*

En lo presentado hasta el momento, no se ha hablado de la existencia de una única medida neutral. En el teorema anterior se asegura que de existir al menos una medida martingala equivalente, entonces las oportunidades de arbitraje en el modelo de mercado serán nulas. Definiendo $M^{\mathbb{Q}}$ como el conjunto de aquellas medidas que satisfacen la Definición 1.5, por el teorema anterior sabemos que si la cardinalidad de $M^{\mathbb{Q}}$ es 0, entonces el mercado admite arbitraje. Por otro lado, si la cardinalidad de $M^{\mathbb{Q}}$ es mayor a 1, tendremos un conjunto de al menos dos medidas con las propiedades deseadas para la valuación de derivados. Sin embargo, nuestro problema se modificaría a determinar cómo elegir de ese conjunto a la medida adecuada que asigne a cada derivado financiero el precio adecuado. Por tanto, estamos interesados en el caso donde la cardinalidad del conjunto de medidas, $M^{\mathbb{Q}}$, es unitaria.

**Teorema 1.9.** *Un mercado es completo sí y solo sí, la cardinalidad de* $M^{\mathbb{Q}}$ *es 1.*

Este resultado no sólo nos permite dar una definición distinta al concepto de completez, sino que nos deja la noción de que en mercados completos, como el mercado de bonos que se definirá más adelante, tenemos una única medida neutral al riesgo que asocia a cada derivado en dicho mercado completo un único valor libre de arbitraje. La valuación libre de arbitraje de un portafolio admisible se expone en el siguiente resultado.

**Teorema 1.10.** ***Principio de no arbitraje:*** *Supongamos que el modelo de mercado no permite arbitraje. Sea $X$ un activo contingente alcanzable de madurez $T \leq T^*$. Entonces el valor libre de arbitraje al tiempo $t \leq T$ de cualquier portafolio admisible, $\phi$, que replica a $X$, está dado por la esperanza condicional*

$$V_t(\phi) = \mathbb{E}^{\mathbb{Q}}\left[\frac{B(t)}{B(T)}X \mid \mathscr{F}_t\right].$$

Los resultados sobre arbitraje presentados en esta sección fueron aportaciones de Harrison y Pliska a principios de los años ochenta. Demostraron que la existencia de una medida martingala equivalente implica la ausencia de arbitraje, lo cual ha sido una de las grandes aportaciones a la teoría de finanzas en los últimos años.

Para concluir esta sección, diremos que aunque se puede hablar de la existencia y la unicidad de la medida $\mathbb{Q}$, lo más que conocemos de ésta medida es referente al cálculo de esperanzas, probabilidades de algunos eventos, relación con otras medidas y evoluciones de algunos procesos, más no conocemos a la medida $\mathbb{Q}$ como tal.

# 2. Tasas de interés

El principal objetivo de la teoría de tasas de interés es, a grandes rasgos, investigar la relación entre todos los bonos. Los bonos son títulos cuyo emisor puede ser una empresa, estados o individuos. Quien lo emite se compromete a devolver el capital al término del contrato y a hacer el pago de intereses en un periodo determinado. Dado un mercado adecuado para que esta práctica pueda llevarse a cabo, pueden definirse diferentes tasas de interés. Ésto es de suma importancia puesto que, en caso de trabajar con instrumentos de deuda, las tasas de interés sobresalen como el factor de riesgo de mayor importancia, además de que estos objetos son importantes factores de riesgo también en la valuación de otros instrumentos financieros. Como dato adicional, cuando se trata de financiamiento, la variabilidad más relevante es la variabilidad de las tasas de interés por sí mismas. Por tanto, muchos de los problemas financieros conllevan a modelar la evolución de una tasa de interés a través del tiempo.

Como punto de inicio, consideremos una cuenta en el mercado monetario, la cual denotaremos por $B(t)$ al igual que en el capítulo anterior. Las cuentas del mercado monetario son similares a las cuentas de ahorros, pero con diferencias conceptuales importantes. Mientras que las primeras tienen tasas variantes según el mercado, las segundas suelen tener tasas de interés fijas. En concreto, una cuenta en el mercado monetario representa inversiones localmente sin riesgo, donde se generan ganancias de manera continua y la tasa sin riesgo del mercado actúa en cada instante. En las secciones siguientes se presentará un listado de definiciones necesarias para entender la existencia de las diferentes tasas en el mercado, así como una breve descripción de las tasas que aparecen con más frecuencias en la práctica. Además, se mostrará como se lleva a cabo la modelación del proceso de precios de un bono cupón cero, tasa instantánea, tasa forward y la relación entre los modelos.

## 2.1. Cuentas bancarias, bonos cupón cero y tasas de interés.

Recordemos que el proceso $B(t)$ denota el ***valor de una cuenta en el mercado monetario*** en el tiempo $t \geq 0$. Se asume $B(0) = 1$ y que la evolución de la cuenta se rige por la ecuación diferencial $(1.1)$, donde $r(t)$ es una función positiva, conocida como **tasa *de interés instantánea***.

Como consecuencia de resolver la ecuación diferencial $(1.1)$, se satisface

$$B(t) = e^{\int_0^t r(s)ds}. \tag{2.1}$$

Con la intención de establecer un mercado en el cual se nos permita definir más adelante a nuestros objetos de estudio, se introduce el concepto *bono cupón cero.* Este bono es un activo contingente cuyo valor y existencia depende de la ocurrencia o no de un hecho.

**Definición 2.1.** *Un* ***bono cupón cero con madurez*** $T \leq T^*$*, también llamado* ***bono al descuento puro****, es un contrato que garantiza a su tenedor recibir el pago de un peso en la fecha* $T$ *y sin recibir pagos intermedios. El valor del contrato, o el precio al tiempo* $t < T$ *de un bono cupón cero con madurez* $T$*, es un objeto estocástico denotado por* $p(t,T)$.

Si el tiempo $t$ es el tiempo presente, un bono cupón cero de madurez $T$ es un contrato que establece el valor presente de una unidad de dinero a pagar al tiempo $T$. Es vital conocer en cada momento el valor presente de un pago futuro, para esto, la cantidad con la que tenemos que tratar es el precio de un bono cupón cero en el futuro. Dichos precios son las cantidades básicas a tratar en la teoría de tasas de interés, ya que todas las tasas pueden ser definidas en términos de bonos cupón cero.
Estamos interesados en plantear bases que nos permitan definir un espacio (en algún sentido) donde las distintas tasas de interés puedan ser definidas, para esto es necesario asumir lo siguiente:

→ *Existe un mercado (sin intermediarios) de bonos (cupón cero) para cada tiempo* $T > 0$ *y por tanto, contiene una infinidad de activos. Este mercado contiene todos los posibles bonos.*

→ *La relación* $p(t,t) = 1$ *es válida para cada tiempo* $t$*. Esta relación de conoce como condición de cumplimiento del bono.*

Recordemos que en el modelo de mercado, tanto los bonos como sus derivados se rigen según la medida objetiva. Una expresión bajo la medida objetiva $\mathbb{P}$ para los precios del bono es

$$p(t,T) = \exp\left\{-\int_t^T f(t,u)\,du\right\}. \tag{2.2}$$

Notemos que se involucra una función $f$, la cual se define en breve. Para ésto supongamos el siguiente escenario:

*Consideremos a $t$ como el tiempo actual y los tiempos $U$ y $T$ fijos, los cuales satisfacen la desigualdad $t < U < T \leq T^*$. En el tiempo $t$ adquirimos un contrato que nos permitirá hacer una inversión de una unidad en el tiempo $U$. Con esta inversión generaremos intereses en el intervalo $[U,T]$. Es decir, en el tiempo $t$ compramos un contrato que nos garantiza una tasa de interés sin riesgo en el intervalo de tiempo $[U,T]$.*

A esta tasa se le llama ***tasa de interés forward***, la cual denotaremos por $f$. En la literatura, las tasas forward son unas de las cantidades en las que recae mayor importancia. Esto es debido a la oportunidad que otorgan, en la práctica, de endeudarse en un futuro y no en el presente. En general, cuando se trata de inversiones, es permitido que el inversionista tenga una visión distinta del comportamiento futuro de estas tasas. Confiar en dicha visión es confiar en la especulación; no obstante, no hay razones para suponer que esto genere resultados positivos para los inversionistas. Como se mencionó en el capítulo 2, cualquier inversión involucra un riesgo para quien invierte.

Citaremos dos tipos distintos de tasas de interés forward: las *simples* y las *continuamente compuestas.*

**Definición 2.2.**

→ *La **tasa forward simple en** $[U,T]$ **contratada al tiempo** $t$, denotada por $L(t;U,T)$ y también llamada **tasa LIBOR**, se define como*

$$L(t;U,T) := \frac{p(t,T) - p(t,U)}{(T-U)\,p(t,T)}.$$

→ *La **tasa forward compuesta continuamente en** $[U,T]$ **contratada al tiempo** $t$, es denotada por $R(t;U,T)$ y se define como*

$$R(t;U,T) := -\frac{ln(p(t,T)) - ln(p(t,U))}{T-U}.$$

$\rightarrow$ *La* ***tasa forward instantánea con madurez*** $T$, ***contratada al tiempo*** $t$, *es la tasa forward de un contrato que vence en un periodo infinitesimal y se define como*

$$f(t,T) := -\frac{\partial ln\left(p\left(t,T\right)\right)}{\partial T}.$$

$\rightarrow$ *La* ***tasa spot simple en*** $[U,T]$, *también llamada* ***tasa spot LIBOR***, *es la tasa constante a la cual una inversión tiene que ser hecha para producir exactamente una unidad monetaria en el tiempo de madurez* $T$, *empezando con* $p(U,T)$ *unidades monetarias en el tiempo* $U$ *donde la producción de intereses ocurren de manera proporcional al tiempo de inversión. Se denota por* $L(U,T)$ *y cumple la relación*

$$L(U,T) := \frac{1-p(U,T)}{(T-U)p(U,T)}. \tag{2.3}$$

$\rightarrow$ *La* ***tasa spot compuesta continuamente en*** $[U,T]$, *es la tasa constante a la cual una inversión de* $p(U,T)$ *unidades monetarias debe realizarse para producir exactamente una unidad monetaria al tiempo* $T$. *Se denota por* $R\left(U;T\right)$ *y la ecuación que la define es*

$$R(U,T) := -\frac{ln\left(p\left(U,T\right)\right))}{T-U}.$$

$\rightarrow$ *La* ***tasa instantánea*** *se define en un tiempo* $t$ *como*

$$r(t) := f(t,t).$$

Según Duarte (2012), la tasa internacional de referencia *London Interbank Offered Rate* ***(LIBOR)*** es, tal vez, la más importante a nivel internacional. La British Bankers Association ***(BBA)*** es la institución con la responsabilidad de crear y regular esta tasa, la cual se introdujo con la intención de proveer una referencia para nuevos instrumentos financieros que surgieron a principios de la década de los ochenta. Apareció por primera vez en 1986 respondiendo a la pregunta:

***¿A qué tasa podría pedir prestados fondos, si lo pidiera y después aceptara ofertas inter-***

***bancarias en un mercado de tamaño razonable justo antes del mediodía?***

Inicialmente estaba denominada sólo en tres divisas, pero en la actualidad existen 150 tasas ***LIBOR*** especificadas para diez divisas distintas, cada una fijada para quince distintos periodos de maduración a corto a plazo. La importancia de esta tasa en los mercados monetarios es su papel como indicador, construido a base de reportes de los bancos influyentes en mercados financieros de todo el mundo, que permite que la operatividad de los mercados sea mas eficiente, reduciendo la incertidumbre.
En particular, la tasa ***spot LIBOR*** o tasa spot simple, es la que se aplica a compras inmediatas de divisas.

A partir de las definiciones anteriores se hace evidente que dichas tasas son definidas a partir de los precios de los bonos, y además esta dependencia permite ver la existencia de una relación latente de las mismas tasas entre sí. En las siguientes observaciones se hacen notar detalles importantes sobre las tasas de interés en el mundo real.

*Observación* 2.3.

1. *Los precios de los bonos cupón cero son cantidades auxiliares por medio de las cuales pueden ser recuperadas las tasas. Además, los precios de un bono cupón cero pueden definirse en términos de cualquier familia de tasas de interés dadas.*

2. *Las tasas de interés son observables en los mercados financieros, mientras que los bonos son instrumentos que, como tal, no pueden ser directamente observados en el mercado.*

3. *La tasa instantánea es el límite de la tasa forward compuesta continuamente cuando* $U \to T$*. Por tanto, la tasa instantánea puede interpretarse como una tasa libre de riesgo, contratada al tiempo* $t$*, para un intervalo infinitesimal* $[T, T + dT]$*.*

4. *Las tasas spot son en realidad tasas forward cuando el tiempo de contratación coincide con el tiempo inicial del intervalo sobre el cual se hace efectiva la tasa, es decir* $t = U$*.*

El estudio de las tasas forward recae en el hecho de que las demás tasas definidas son casos particulares de una tasa forward. Podemos hablar de la evolución en el tiempo de las tasas de interés y, por tanto, también de la evolución de los precios del bono. La relación entre la evolución de estos elementos financieros se estudia en la siguiente sección.

## 2.2. Dinámicas del proceso de precios del bono, tasa forward y tasa instantánea.

De manera natural podemos pensar que dadas las relaciones entre $p(t,T)$, $f(t,T)$ y $r(t)$, existe también una relación entre sus dinámicas. Las dinámicas $dp(t,T)$ y $df(t,T)$ serán ecuaciones diferenciales estocásticas (EDE) para cada $T$ fijo, puesto que tanto $p$ como $f$ son funciones de $t$ y $T$, mientras que la tasa $r(t)$ sólo se rige por la variable $t$. La siguiente proposición es de mucha utilidad. Expone cómo podemos recuperar una dinámica a partir de otra. Antes, enlistaremos las características de los coeficientes de las dinámicas de $p(t,T)$, $f(t,T)$ y $r(t)$. En todos los casos se supone que $T$ está fijo.

- $\rightarrow$ Los procesos $a(t)$ y $b(t)$ son escalares y adaptados.
- $\rightarrow$ Los procesos $m(t,T)$, $v(t,T)$, $\alpha(t,T)$ *y* $\sigma(t,T)$ son adaptados y parametrizados por el tiempo de madurez $T$.
- $\rightarrow$ Las volatilidades $v(t,T)$ y $\sigma(t,T)$ son vectores en el caso en el que el movimiento browniano $W$ sea multidimensional.
- $\rightarrow$ Para cada par $(\omega,t)$ fijo, los procesos $m(t,T)$, $v(t,T)$, $\alpha(t,T)$ y $\sigma(t,T)$, se suponen continuamente diferenciables en la variable $T$.
- $\rightarrow$ Todos los procesos se asumen lo suficientemente regulares para asegurar su diferenciabilidad bajo el signo integral y para intercambiar el orden de integración.

Denotaremos por $m_T(t,T)$, $v_T(t,T)$, $\alpha_T(t,T)$ y $\sigma_T(t,T)$ a las derivadas parciales con respecto a la segunda variable de $m(t,T)$, $v(t,T)$, $\alpha(t,T)$ y $\sigma(t,T)$ respectivamente. Con lo mencionado antes, presentamos la relación entre las dinámicas de $p(t,T)$, $f(t,T)$ y $r(t)$ en la proposición siguiente. Antes enunciaremos un resultado que será de utilidad.

**Teorema 2.4.** ***Fórmula de Ito:*** *Sea $\{X(t);t\geq 0\}$ un proceso que evoluciona según la ecuación diferencial estocástica*

$$dX(t)=b(t,X(t))\,dt+\sigma(t,X(t))\,dW(t), \tag{2.4}$$

*donde $b(t,x)$ y $\sigma(t,x)$ son funciones de $[0,T]\times\mathbb{R}$ en $\mathbb{R}$ y $X(0)$ es $\mathscr{F}_0$ medible e independiente de $W$. Si $f(t,x)$ es una función clase $C^1$ en $t$ y de clase $C^2$ en $x$, entonces el proceso $\{Y(t)=f(t,X(t));t\geq 0\}$ satisface la ecuación (2.4) y la ecuación diferencial estocástica*

$$dY(t)=f_t(t,X(t))\,dt+f_x(t,X(t))\,dX(t)+\frac{1}{2}f_{xx}(t,X(t))\,(dX(t))^2. \tag{2.5}$$

**Proposición 2.5.**

1. *Supongamos que $p(t,T)$ satisface la EDE*

$$dp(t,T)=p(t,T)\,m(t,T)\,dt+p(t,T)\,v(t,T)\,dW(t), \tag{2.6}$$

*entonces $f(t,T)$ satisface la EDE*

$$df(t,T)=\alpha(t,T)\,dt+\sigma(t,T)\,dW(t), \tag{2.7}$$

*donde*

$$\begin{aligned}\alpha(t,T) &= v_T(t,T)\,v(t,T)-m(t,T),\\ \sigma(t,T) &= -v_T(t,T).\end{aligned}$$

2. *Si $f(t,T)$ satisface la EDE*

$$df(t,T)=\alpha(t,T)\,dt+\sigma(t,T)\,dW(t), \tag{2.8}$$

*entonces* $r(t)$ *satisface la EDE*

$$dr(t) = a(t)\,dt + b(t)\,dW(t),$$

*donde*

$$\begin{aligned} a(t) &= f_T(t,t) + \alpha(t,t), \\ b(t) &= \sigma(t,t). \end{aligned}$$

3. *Si* $f(t,T)$ *satisface* (2.8), *entonces* $p(t,T)$ *satisface la EDE*

$$dp(t,T) = p(t,T)\left\{ r(t) + A(t,T) + \frac{1}{2} \parallel S(t,T) \parallel^2 \right\} dt + p(t,T)\,S(t,T)\,dW(t),$$

*donde*

$$A(t,T) = -\int_t^T \alpha(t,s)\,ds, \tag{2.9}$$

$$S(t,T) = -\int_t^T \sigma(t,s)\,ds, \tag{2.10}$$

$y \parallel \cdot \parallel$ *denota a la norma euclidiana.*

*Demostración.* La estructura de las tres pruebas son similares. Usando fórmula de Ito se obtienen ecuaciones diferenciales pertinentes. Luego, para obtener los coeficientes planteados en el teorema para cada caso, se reescribe lo obtenido de manera integral. Haremos uso de teoremas básicos de cálculo para integrales y derivadas. Se implementarán las suposiciones de diferenciabilidad y de integrabilidad de los coeficientes.

1. Recordemos que por definición $p(t,T) = e^{-\int_t^T f(t,u)du}$. A partir de $p(t,T)$ definiremos un nuevo proceso $Y$, al cual aplicaremos fórmula de Ito. Sea

$$Y(t,T) = -\int_t^T f(t,u)\,du. \tag{2.11}$$

y observemos que $dY(t,T) = d\ln[p(t,T)]$. Aplicando fórmula de Ito a $\ln[p(t,T)]$, se tiene que

$$\begin{aligned} dY(Y,t) &= d\ln[p(t,T)] \\ &= \frac{dp(t,T)}{p(t,T)} - \frac{1}{2}\left(\frac{dp(t,T)}{p(t,T)}\right)^2 \\ &= m(t,T)\,dt + v(t,T)\,dW(t) - \frac{1}{2}\|v(t,T)\|^2\,dt, \end{aligned} \tag{2.12}$$

y reescribiendo obtenemos que

$$d\left(\int_t^T f(t,u)\,du\right) = \left(\frac{1}{2}\|v(t,T)\|^2 - m(t,T)\right)dt - v(t,T)\,dW(t). \tag{2.13}$$

Usando las siguientes expresiones

$$\begin{aligned} m(t,T) &= \int_t^T m_T(t,u)\,du \\ v(t,T) &= \int_t^T v_T(t,u)\,du \\ \|v(t,T)\|^2 &= 2v(t,T)\int_t^T v_T(t,u)\,du, \end{aligned}$$

y sustituyéndolas en (2.13) se sigue

$$\begin{aligned} d\left(\int_t^T f(t,u)\,du\right) &= \left(v(t,T)\int_t^T v_T(t,u)\,du - \int_t^T m_T(t,u)\,du\right)dt \\ &\quad - \left(\int_t^T v_T(t,u)\,du\right)dW(t). \end{aligned}$$

Por último, integrando y luego tomando la parcial con respecto a $T$ se obtiene el resultado, esto es

$$df(t,T) = (v_T(t,T)\,v(t,T) - m(t,T))\,dt - v_T(t,T)\,dW(t).$$

2. Partiremos de la dinámica que conocemos para la tasa forward y la integraremos en el

intervalo $(0,t)$. Así

$$\begin{aligned}
r(t) &= f(t,t) \\
&= f(0,t) + \int_0^t \alpha(s,t)\, ds + \int_0^t \sigma(s,t)\, dW(s). \qquad (2.14)
\end{aligned}$$

Análogo a la demostración en la parte 1, daremos a $\alpha(s,t)$ y $\sigma(s,t)$ expresiones en forma integral que resulten convenientes. Los procesos $\alpha(s,t)$ y a $\sigma(s,t)$ satisfacen

$$\begin{aligned}
\alpha(s,t) &= \alpha(s,s) + \int_s^t \alpha_T(s,u)\, du \\
\sigma(s,t) &= \sigma(s,s) + \int_s^t \sigma_T(s,u)\, du.
\end{aligned}$$

Sustituyendo en (2.14), se obtiene

$$\begin{aligned}
r(t) &= f(0,t) + \int_0^t \alpha(s,s)\, ds + \int_0^t \left( \int_s^t \alpha_T(s,u)\, du \right) ds + \int_0^t \sigma(s,s)\, dW(s) \\
&\quad + \int_0^t \left( \int_s^t \sigma_T(s,u)\, du \right) dW(s),
\end{aligned}$$

y cambiando el orden de integración

$$\begin{aligned}
r(t) &= f(0,t) + \int_0^t \alpha(s,s)\, ds + \int_0^t \left( \int_0^u \alpha_T(s,u)\, ds \right) du + \int_0^t \sigma(s,s)\, dW(s) \\
&\quad + \int_0^t \left( \int_0^u \sigma_T(s,u)\, dW(s) \right) du,
\end{aligned}$$

entonces

$$dr(t) = \alpha(t,t)\, dt + \left( \int_0^t \alpha_T(s,t)\, ds \right) dt + \sigma(t,t)\, dW(t) + \left( \int_0^t \sigma_T(s,t)\, dW(s) \right) dt.$$

Para terminar, observemos que

$$f_T(t,t) = \int_0^t \alpha_T(s,t)\, ds + \int_0^t \sigma_T(s,t)\, dW(s), \qquad (2.15)$$

y entonces

$$dr(t) = (\alpha(t,t) + f_T(t,t))\,dt + \sigma(t,t)\,dW(t). \tag{2.16}$$

3. El proceso $p(t,T)$ puede verse como $p(t,T) = e^{Y(t,T)}$, donde el proceso $Y(t,T)$ es el definido en $(2.11)$. Aplicando fórmula de Ito,

$$dp(t,T) = p(t,T)\,dY(t,T) + \frac{1}{2}p(t,T)\,(dY((t,T)))^2. \tag{2.17}$$

Calculamos

$$\begin{aligned}
dY(t,T) &= -d\left(\int_0^T f(t,s)\,ds\right)\\
&= -\frac{\partial}{\partial t}\left(\int_t^T f(t,s)\,ds\right)dt - \int_t^T df(t,s)\,ds\\
&= f(t,t)\,dt - \int_t^T df(t,s)\,ds \qquad (2.18)\\
&= f(t,t)\,dt - \left(\int_t^T \alpha(t,s)\,dt\right)ds - \left(\int_t^T \sigma(t,s)\,dW(t)\right)ds, \qquad (2.19)
\end{aligned}$$

donde la línea (2.18) se obtiene de utilizar del Teorema Fundamental del Cálculo y la línea (2.19) proviene de sustituir la expresión de $df(t,s)$ dada por (2.8). Cambiando el orden de integración en (2.19) e identificando a $A(t,T)$ y $S(t,T)$ dados por las ecuaciones (2.9) y (2.10) respectivamente, la línea (2.19) se convierte en

$$dY(t,T) = r(t)\,dt + A(t,T)\,dt + S(t,T)\,dW(t)$$

Para finalizar notemos que $(dY(t,T))^2 = \|S(t,T)\|^2\,dt$ y sustituyamos en la ecuación (2.17)para obtener

$$dp(t,T) = p(t,T)\left\{r(t) + A(t,T) + \frac{1}{2}\parallel S(t,T)\parallel^2\right\}dt + p(t,T)\,S(t,T)\,dW(t),$$

con lo que queda finalizada la demostración de la proposición.

$\square$

Hemos visto que si conocemos las dinámicas de $p(t,T)$ o $f(t,T)$, podemos determinar las dinámicas ya sea de $f(t,T)$, $p(t,T)$ o $r(t)$. Gracias a la relación $(2.2)$, podemos recuperar la dinámica de $f(t,T)$ a partir de la de $p(t,T)$ y viceversa. Además, dado que $f(t,t) = r(t)$, podemos determinar la dinámica de $r(t)$ a partir de la dinámica de la tasa forward.
Es natural plantearnos la siguiente pregunta: *¿Cómo recuperamos $p(t,T)$ a partir de la dinámica de $r(t)$?*
Es posible plantear diferentes modelos para la tasa instantánea $r(t)$ y, bajo ciertas condiciones, determinar a partir de ellos la dinámica que debe seguir el proceso de precios del bono, $p(t,T)$. En el siguiente capítulo se presentan los modelos más relevantes para $r(t)$ encontrados en la literatura.

# 3. Modelos para tasas de interés

La modelación de las tasas de interés se basa principalmente en plantear dinámicas específicas para el proceso de la tasa instantánea. En dicha teoría las cantidades fundamentales, como tasas y bonos, están definidas bajo argumentos que no tratan sobre la existencia o no existencia de arbitraje en el mercado, y donde estos objetos no necesariamente son la esperanza de un funcional del proceso $r$. No obstante, los modelos serán presentados asumiendo que el mercado es libre de arbitraje. En general, cualquier modelo puede plantearse bajo la medida objetiva del mercado. Sin embargo, esto no se requiere si los modelos son planteados para la valuación de derivados de bonos sobre tasas de interés. Dado que el objetivo principal de este trabajo es la valuación de dichos derivados, los modelos en la *sección 3.2* serán presentados bajo una medida martingala equivalente $\mathbb{Q}$ como las definidas en el capítulo 1. Las principales referencias bibliográficas para lo referente a los modelos de tasa instantánea son Brigo & Mercurio (2006, p.51-74) y Klebaner (2005, p.293-296), mientras que la referencia principal para la metodología de Heath-Jarrow-Morton presentada en la sección 3.3 es Brigo & Mercurio (2006, p.183-186)

La curva de rendimiento y la estructura terminal son de utilidad para analizar el comportamiento de las tasas y bonos a través del tiempo, según el tiempo de madurez del bono. Otorgan información del mercado que puede resultar relevante para decidir hacer una inversión o no. A continuación se presentan las características de ambas curvas. Para el contenido de la sección 3.1 en particular, puede consultarse Björk (2004, p.364-372) para más detalles. Hablar del rendimiento de un bono es importante, puesto que queremos modelar tasas de interés y los bonos son derivados sobre éstas.

## 3.1. Curva de rendimiento y estructura terminal

La curva de rendimiento relaciona la tasa de interés y el tiempo de madurez de un instrumento de deuda. Puede obtenerse de los datos en el mercado sobre las tasas de interés y es actualizada diariamente. Esta curva mide las variaciones de las tasas a partir del tiempo de madurez de instrumentos de deuda; en nuestro caso los instrumentos de deuda son bonos cupón cero. La curva de rendimiento, también conocida como estructura terminal de tasas de interés, es una función de $T$ para cada valor $t$ fijo. Se define como

$$R(t,T) = -\frac{\ln[p(t,T)]}{T-t}.$$

El comportamiento usual en una curva de rendimiento muestra una pendiente positiva y refleja mayores rendimientos a vencimientos más largos. Esto tiene sentido debido a los riesgos asociados conforme el tiempo transcurre.

La estructura terminal es la familia de procesos de precios del bono $\{p(t,T) : T > t\}$ definidos a partir de un $t$ fijo. Suele ser más informativa que la curva de rendimiento. El enfoque clásico de la teoría de tasas de interés es, de manera intuitiva, hacer hincapié en que cada precio $p(t,T)$ dependerá de la evolución de $r(t)$ en un intervalo $[t,T]$ y especificar un modelo para $r(t)$ a partir del cual se determinen los precios del bono para cada tiempo de maduración $T$. La estructura terminal puede entenderse como una sábana en $\mathbb{R}^3$, definida como una función de variable $T > t$ e imagen $p(t,T)$, para cada tiempo $t$. Esta función es creciente en $T$ debido a que las tasas de interés son consideradas funciones positivas. Aunque en la actualidad se han registrado en el mercado tasas negativas para algunos países europeos. La teoría de tasas de interés sigue respaldándose en el supuesto de tasas de interés no negativas, puesto que los casos que lo contradicen son atípicos, aunque hay ejemplos recientes en Alemania y Suiza.

Antes de continuar, notemos que un bono es el derivado de tasas de interés por excelencia. La evolución en el tiempo de los precios de un bono, se asocia de manera natural con la evolución de la tasa instantánea más que con la evolución de la tasa forward. Trabajar con una expresión para $p(t,T)$ dependiendo de $r(t)$ toma sentido si pensamos que lo que queremos modelar es específicamente a la tasa $r(t)$, como es nuestro caso, y queremos tratar al proceso $p(t,T)$ como un objeto que se puede determinar a partir de esta tasa. Además, debido a que las tasas no son tratadas directamente sino a través de los bonos, surge la necesidad de construir modelos para todos estos bonos. En dicho modelo deberán valuarse, sin arbitraje, cada uno de esos bonos. Así como también debe ser posible la valuación de sus derivados. En busca de la relación entre $p(t,T)$ y $r(t)$, platearemos lo siguiente.

Especificaremos una dinámica para la tasa instantánea bajo la medida objetiva $\mathbb{P}$, donde $r(t)$

se modela como solución de la ecuación diferencial estocástica

$$dr(t) = \mu(t, r(t))\,dt + \sigma(t, r(t))\,dW(t), \tag{3.1}$$

donde $W(t)$ es un movimiento browniano bajo $\mathbb{P}$. Asumiremos la existencia de una cuenta bancaria $B(t)$, dada por la ecuación $(2.1)$ en la sección 2.1.

**Suposición 3.1.** *Existe un mercado sin oportunidades de arbitraje para los bonos de todas las maduraciones posibles. Para cada $T$ se satisface la igualdad*

$$p(t,T) = F(t, r(t); T), \tag{3.2}$$

donde $F$ es una función suave de variables reales. Por simplicidad denotaremos $F(t, r(t); T)$ como $F^T$.

Para cada $t$ fijo, se supone una estructura terminal cuya gráfica es muy suave, es decir, el precio $p(t,T)$ es diferenciable con respecto al tiempo de maduración $T$. Esta suposición es importante en el desarrollo de cálculos.

A partir de la suposición anterior y de manera natural, surge la incógnita sobre la forma de la función $F$ en un mercado libre de arbitraje. Para estudiar ésto, aplicaremos fórmula de Ito a la ecuación $(3.2)$, obteniendo

$$dF^T = F^T \alpha_T dt + F^T \sigma_T dW, \tag{3.3}$$

donde

$$\begin{aligned} \alpha_T &= \frac{F_t^T + \mu F_r^T + \frac{1}{2}\sigma^2 F_{rr}^T}{F^T}, \\ \sigma_T &= \frac{\sigma F_r^T}{F^T}. \end{aligned}$$

Para otro tiempo de maduración, digamos $S$, existe una expresión análoga a $(3.3)$. Consideremos el portafolio $(u_S, u_T)$, la dinámica de su proceso valor está dado por

$$dV = V\left(u_T\frac{dF^T}{F^T} + u_S\frac{dF^S}{F^S}\right). \tag{3.4}$$

Sustituyendo $(3.3)$ y su análoga para el tiempo $S$ en la ecuación $(3.4)$ se sigue que

$$dV = V\left(u_T\alpha_T + u_S\alpha_S\right)dt + V\left(u_T\sigma_T + u_S\sigma_S\right)dW.$$

Sabemos que el portafolio debe satisfacer el sistema de ecuaciones

$$\begin{aligned} u_T + u_S &= 1, \\ u_T\sigma_T + u_S\sigma_S &= 0, \end{aligned}$$

cuya solución es

$$\begin{aligned} u_T &= \frac{-\sigma_S}{\sigma_T - \sigma_S}, \\ u_S &= \frac{\sigma_T}{\sigma_T - \sigma_S}. \end{aligned}$$

Sustituyendo la solución en $dV$, reescribimos

$$\begin{aligned} dV &= V\left(u_T\sigma_T + u_S\alpha_S\right)dt, \\ &= V\left(-\frac{\alpha_T\sigma_S}{\sigma_T - \sigma_S} + \frac{\alpha_S\sigma_T}{\sigma_T - \sigma_S}\right)dt, \\ &= V\left(\frac{\alpha_S\sigma_T - \alpha_T\sigma_S}{\sigma_T - \sigma_S}\right)dt. \end{aligned}$$

Si suponemos que no existen oportunidades de arbitraje, la tasa de retorno del portafolio debe ser igual a la tasa de interés $r(t)$, es decir

$$\begin{aligned} &\tfrac{\alpha_S\sigma_T - \alpha_T\sigma_S}{\sigma_T - \sigma_S} &&= r(t), \\ \Leftrightarrow \quad &\alpha_S\sigma_T - \alpha_T\sigma_S &&= r(t)\left(\sigma_T - \sigma_S\right), \\ \Leftrightarrow \quad &\alpha_S\sigma_T - r(t)\sigma_T &&= \alpha_T\sigma_S - r(t)\sigma_S, \end{aligned}$$

equivalente a

$$\frac{\alpha_S - r(t)}{\sigma_S} = \frac{\alpha_T - r(t)}{\sigma_T}, \tag{3.5}$$

donde el lado izquierdo en (3.5) no depende de $T$ y el lado izquierda no tiene dependencia en $S$. Esto implica que el cociente común para los bonos no depende de $T$, ni de $S$, ni de ningún otro tiempo de maduración.

**Proposición 3.2.** *Supongamos que el mercado de bonos es libre de arbitraje. Entonces existe un proceso universal, $\lambda$, que satisface*

$$\lambda(t) = \frac{\alpha_T - r(t)}{\sigma_T},$$

*para cada valor de $t$ y cada elección de $T$.*

Al proceso $\lambda$ se le conoce como precio con riesgo del mercado, y es el rendimiento superior al de la tasa libre de riesgo que el mercado quiere como compensación por la asunción de riesgos. La proposición anterior establece que en un mercado libre de arbitraje, todos los bonos sin importar su tiempo de maduración, tienen el mismo precio con riesgo del mercado. Por otra parte, debido a la condición de cumplimiento de los bonos, debe satisfacerse la relación

$$F(T, r(T), T) = 1. \tag{3.6}$$

La estructura terminal, así como otros derivados de tasas de interés, están completamente determinados por la ecuación de estructura terminal general

$$F_t + \{\alpha - \lambda\sigma\} F_r + \frac{1}{2}\sigma^2 F_{rr} - rF = 0, \tag{3.7}$$

con condición inicial (3.6). Para resolver la ecuación diferencial anterior, necesitamos especificar al proceso $\lambda$ de la misma manera que se hace para $\mu$ y $\sigma$.

La forma de $F^T$ en un mercado libre de oportunidades de arbitraje queda establecida en el resultado siguiente. La prueba utiliza la ecuación (3.7) y la representación de Feynman Kac de $F^T$, véase Klebaner( 2005, p.155). Para más detalles puede consultarse Björk (2004, p.270).

**Teorema 3.3.** *Los precios $p(t,T)$ libres de arbitraje están dados por la fórmula $p(t,T) = F(t,r(t);T)$, donde*

$$F(t,r(t);T) = \mathbb{E}^{\mathbb{Q}}\left[e^{-\int_t^T r(s)ds}|\mathscr{F}_t\right], \tag{3.8}$$

*la medida $\mathbb{Q}$ es la medida neutral al riesgo y $r(s)$ evoluciona según la dinámica*

$$dr(s) = \{\mu - \lambda\sigma\}ds + \sigma d\tilde{W}(s),$$

donde $\tilde{W}$ es un $\mathbb{Q}-$movimiento browniano.

Recapitulando, nos interesa modelar las tasas instantáneas para determinar a partir de ellas expresiones para los precios del bono. Las suposiciones hechas hasta el momento se mantienen para el siguiente listado de modelos clásicos para tasa instantánea que se presentan en el siguiente apartado.

## 3.2. Modelos para tasa instantánea

Dentro de la modelación de tasas de interés, resulta conveniente plantear directamente un proceso de evolución para la tasa instantánea. Por argumentos de no arbitraje, las demás tasas y los bonos están definidas como la esperanza de un funcional del proceso $r(t)$. El primer acercamiento a este tipo de modelación fue hecho en 1977 por Vasicek, quien definió una dinámica bajo la medida objetiva del mercado. Sin embargo, este desarrollo fue extendido a un modelo bajo $\mathbb{Q}$, donde no es necesario especificar factores de mercado que sí aparecen de manera explícita en los modelos planteados bajo la medida del mercado.
A continuación serán presentados los modelos bajo la medida neutral al riesgo $\mathbb{Q}$, suyas propiedades se presentaron en el capítulo 2. No es necesario especificar modelos bajo $\mathbb{P}$ cuando nos concierne solo la valuación de derivados de tasas de interés y bonos. Recordemos que en la sección anterior quedó establecido que bajo la medida $\mathbb{Q}$, se satisface

$$p(t,T) = \mathbb{E}^{\mathbb{Q}}\left[\frac{B(t)}{B(T)}|\mathscr{F}_t\right]. \tag{3.9}$$

En algunos casos es posible pasar de manera analítica de un modelo a otro bajo un cambio de medida, pero esos cálculos no serán desarrollados en este trabajo. Los modelos siguientes son los más importantes no sólo por cuestiones históricas, ya que fueron los primero introducidos en la literatura financiera, sino también por su tratabilidad analítica, lo cual se agradece en la búsqueda de expresiones explícitas para los precios del bono. En la Tabla I se presenta una lista de algunos de los modelos conocidos para $r(t)$, sin embargo sólo hablaremos con más detalle de los modelos de *Vasicek, Dothan, Cox-Ingersol-Ross y Hull-White*.

| Modelo | Dinámica |
|---|---|
| Vasicek | $dr(t) = k(\theta - r(t))\,dt + \sigma dW(t)$ |
| Dothan | $dr(t) = kr(t)\,dt + \sigma r(t)\,dW(t)$ |
| Cox-Ingersol-Ross | $dr(t) = k(\theta - r(t))\,dt + \sigma\sqrt{r(t)}dW(t)$ |
| Merton | $dr(t) = kdt + \sigma dW(t)$ |
| Hull-White | $dr(t) = (\theta(t) - k(t)\,r(t))\,dt + \sigma(t)\,dW(t)$ |
| Black-Derman-Toy | $dr(t) = \theta(t)\,r(t)\,dt + \sigma(t)\,dW(t)$ |
| Ho-Lee | $dr(t) = \theta(t)\,dt + \sigma dW(t)$ |
| Black-Karasinki | $dr(t) = r(t)\,(\theta(t) - k(t))\ln[r(t)]\,dt + \sigma(t)\,r(t)\,dW(t)$ |

Tabla I: Modelos para tasa instantánea.

Antes de hablar de modelos específicos para $r(t)$, identificaremos a los modelos dependiendo de su ajuste a la información observable en el mercado. Es sabido que existen modelos para tasa instantánea que no consideran un ajuste a la información observada en el mundo real. A estos modelos, donde la estructura terminal inicial no necesariamente se ajusta a lo observado en el mercado, se les conoce como ***modelos endógenos***. En la siguiente sección se presentará información más detallada sobre los modelos conocidos y estudiados del proceso $r(t)$ y el ajuste de su estructura terminal, así como una variante en donde se vuelve pertinente el modelado de $f(t,T)$ como vía más eficiente para obtener $r(t)$ a la par que se considera la información observable en el mercado en el tiempo inicial.

### 3.2.1. Modelo Vasicek

Vasicek asume que la tasa instantánea, bajo la medida neutral al riesgo, evoluciona según la dinámica

$$dr(t) = k(\theta - r(t))\,dt + \sigma dW(t), \tag{3.10}$$

con condición inicial $r(0) = r_0$, y $k$, $\theta$, $\sigma$ y $r_0$ constantes positivas. Integrando (3.10) se obtiene una solución explicita, dada por

$$r(t) = r(s) e^{-k(t-s)} + \theta \left(1 - e^{-k(t-s)}\right) + \sigma \int_s^t e^{-k(t-u)} dW(u), \tag{3.11}$$

para cada $s \leq t$. Observemos que el término estocástico en (3.11), $\sigma \int_s^t e^{-k(t-s)} dW(u)$, es una integral estocástica de una función determinista. Por tanto, $r(t)$ seguirá una distribución normal si suponemos conocida toda la información hasta el tiempo $s$. Debido a que $\mathscr{F}_s$ es la información conocida en el mercado hasta el tiempo $s$, entonces $r(t)$ condicionada a $\mathscr{F}_s$ es normalmente distribuida con media y varianza

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}(r(t) | \mathscr{F}_s) &= r(s) e^{-k(t-s)} + \theta \left(1 - e^{-k(t-s)}\right) \\
\mathbb{V}(r(s) | \mathscr{F}_s) &= \frac{\sigma}{2k} \left(1 - e^{-2k(t-s)}\right).
\end{aligned}$$

Calculando explícitamente la esperanza en $(3.9)$, se obtiene

$$p(t,T) = A(t,T) \exp\{-B(t,T) r(t)\},$$

donde

$$\begin{aligned}
A(t,T) &= \exp\left\{ \left(\theta - \frac{\sigma}{2k^2}\right) (B(t,T) - T + t) - \frac{\sigma^2}{4k} B^2(t,T) \right\} \\
B(t,T) &= \frac{1}{k} \left(1 - e^{-k(T-t)}\right).
\end{aligned}$$

Debido a que $r(t)$ sigue una distribución normal, se permite que $r(t)$ tome valores negativos. Sin embargo, la tratabilidad analítica obtenida de la distribución normal se sobrepone al hecho de que $r(t)$ pueda tomar valores no positivos bajo este modelo. Son muchas las cualidades que hacen atractivo lo propuesto por Vasicek; por ejemplo, la dinámica es una ecuación diferencial estocástica lineal de coeficientes constantes que puede resolverse explícitamente, aunado a que la distribución no sólo del proceso $r$ sino de cantidades relacionadas es fácil de determinar.

### 3.2.2. Modelo de Dothan

Dothan introdujo un precio de mercado constante, lo cual es equivalente a asumir que la dinámica es

$$dr(t) = kr(t)\,dt + \sigma r(t)\,dW(t), \tag{3.12}$$

con $k$ una constante real y condición inicial $r(0) = r_0$ constante positiva. La dinámica (3.12) se resuelve por integración para obtener

$$r(t) = r(s)\,e^{\left\{(t-s)\left(k-\frac{1}{2}\sigma^2\right)+\sigma(W(t)-W(s))\right\}}, \tag{3.13}$$

para $s \leq t$. Debido a la normalidad del movimiento browniano, el exponente $(t-s)\left(k - \frac{1}{2}\sigma^2\right) + \sigma(W(t) - W(s))$ también se distribuye normalmente. Debido a esto, condicionando a $\mathscr{F}_s$, $r(t)$ se distribuye como una variable lognormal con media y varianza

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}(r(t)\,|\,\mathscr{F}_s) &= r(s)\,e^{k(t-s)} \\
\mathbb{V}(r(s)\,|\,\mathscr{F}_s) &= r^2(s)\,e^{2k(t-s)}\left(e^{\sigma^2(t-s)} - 1\right).
\end{aligned}$$

De lo anterior se deduce que $r(t)$ es siempre positiva para toda $t$. Este hecho cubre el inconveniente del modelo de Vasicek al permitir valores negativos para $r(t)$, sin embargo el proceso $p(t,T)$ depende de funciones de Bessel modificadas de segunda clase, lo que le resta tratabilidad analítica. El proceso de precios del bono bajo el modelo de Dothan está dado por

$$p(t.T) = \frac{\bar{r}^p}{\pi^2}\int_0^\infty \left(sen\left(2\sqrt{\bar{r}}senh(y)\right)\int_0^\infty f(z)\,sen(yz)\,dz\right)dy + \frac{2}{\Gamma(2p)}\bar{r}^p K_{2p}\left(2\sqrt{\bar{r}}\right),$$

donde

$$\begin{aligned}
f(z) &= z\left|\Gamma\left(-p+i\frac{z}{2}\right)\right|^2 cosh\left(\frac{\pi z}{2}\right)e^{\left\{\frac{-\sigma^2(T-t)\left(4p^2+z^2\right)}{8}\right\}}, \\
\bar{r} &= \frac{2r(t)}{\sigma^2}, \\
p &= \frac{1}{2} - k,
\end{aligned}$$

y $K_q$ es la función de Bessel modificada de segunda clase de orden dada por

$$K_q(x) = \begin{cases} \frac{\pi}{2}\frac{I_{-q}(x)-I_q(x)}{sen(q\pi)} & q \notin \mathbb{Z} \\ \lim\limits_{y\to q}\frac{\pi}{2}\frac{I_{-y}(x)-I_y(x)}{sen(y\pi)} & q \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

donde $I_q$ es la función de Bessel de primera clase:

$$I_q(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!\Gamma(k+q+1)}\left(\frac{x}{2}\right)^{2k+q},$$

y $\Gamma$ denota a la función gamma.

En la literatura clásica sobre modelos de tasas instantánea no es común encontrar expresiones para $p(t,T)$ en el caso lognormal. De hecho, el modelo de Dothan es el único modelo lognormal para el cual se han desarrollado expresiones analíticas. Lo cual es suficiente razón para considerar este modelo en la práctica, sin embargo presenta dificultades como todos los modelos lognormales para $r(t)$. El principal inconveniente se muestra a continuación.

### 3.2.3. Inconvenientes de los modelos lognormales

Para ejemplificar el principal problema que envuelve a los modelos que suponen una distribución lognormal para $r(t)$, consideremos el siguiente escenario:
Supongamos que el tiempo inicial es $t = 0$ y depositamos \$1 una cuenta bancaria, pero lo hacemos sólo por un periodo pequeño de tiempo al cual llamaremos $\triangle t$. El valor esperado de nuestro capital en la cuenta bancaria justo después de $\triangle t$ es

$$\mathbb{E}_0[B(\triangle t)] = \mathbb{E}_0\left[e^{\int_0^{\triangle t} r(s)ds}\right].$$

Cuando $\triangle t$ es muy pequeño podemos aproximar la expresión anterior mediante suma de rectángulos, obteniendo que

$$\mathbb{E}_0[B(\triangle t)] \approx \mathbb{E}_0\left[e^{\triangle t \frac{(r(0)+r(\triangle t))}{2}}\right].$$

Bajo un modelo lognormal, como el de Dothan, $r(\triangle t)$ sigue una distribución lognormal, por lo que el valor esperado anterior es algo del tipo

$$E_0 [\exp\{\exp(Y)\}],$$

con $Y$ una variable normal. Esto conduce a concluir que

$$\mathbb{E}_0 [B(\triangle t)] = \mathbb{E}_0 \left[e^{\int_0^{\triangle t} r(s)ds}\right] = \infty.$$

Lo anterior puede interpretarse como la posibilidad positiva de generar una infinidad de dinero a partir de una inversión de \$1, y todo ésto en un periodo de tiempo muy pequeño. Lo que es algo que debiera ser imposible en un mercado bien estructurado y libre arbitraje. Sin embargo, se ha reportado que computacionalmente este inconveniente no es tan grave. En particular, el modelo de Dothan sigue siendo muy usado en la práctica, teniendo como ventaja sobre el resto de modelos lognormales, como Vasicek exponencial o Black-Karasinki, la tratabilidad de las expresiones obtenidas en dicho modelo.

### 3.2.4. Modelo de Cox, Ingersoll y Ross (CIR)

El modelo propuesto por Cox, Ingersoll y Ross fue el punto de referencia por muchos años, debido a su tratabilidad analítica y el hecho de que la tasa de interés instantánea es siempre positiva. El modelo formulado bajo la medida libre de riesgo se rige según la dinámica

$$dr(t) = k(\theta - r(t))\,dt + \sigma\sqrt{r(t)}dW(t), \tag{3.14}$$

donde $r(0) = r_0$ es positivo al igual que las constantes $k$, $\sigma$, y $\alpha$. Para evitar problemas en el origen y asegurar que la tasa sea siempre positiva, se impone la condición $2k\theta > \sigma^2$. La diferencia con el modelo de Vasicek presentado anteriormente, es el coeficiente de difusión $\sigma\sqrt{r(t)}$. Una diferencia a notar entre la dinámica del modelo CIR y los anteriores, es que el coeficiente $\sigma\sqrt{r(t)}$ no es Lipschitz y no es posible hacer uso del teorema de existencia y unicidad estándar para ecuaciones diferenciales estocásticas y asegurar que existe una solución fuerte. Sin embargo, por el teorema de Yamada-Watanabe se puede asegurar la existencia de una solución fuerte para la ecuación (3.14).

**Teorema 3.4.** ***Condición de Yamada-Watanabe****: Sea $dX(t) = b(X)\,dt + \sigma(X)\,dW(t)$, Si para $\varepsilon > 0$ dado, se satisface la desigualdad*

$$|\sigma(x) - \sigma(y)| \leq \rho(|x-y|),$$

*donde $\rho$ es una función creciente y positiva en $(0,\infty)$ tal que*

$$\int_0^{\varepsilon} \rho^{-2}(u)\,du = \infty.$$

*entonces $dX(t)$ tiene una solución fuerte.*

Denotemos

$$\sigma(t) = \sigma\sqrt{r(t)},$$

Según Yamada-Watanabe, sólo se necesita verificar que para $\varepsilon > 0$ dado, se satisface la desigualdad

$$|\sigma(x) - \sigma(y)| \leq \rho(|x-y|),$$

para $\rho$ función creciente y positiva en $(0,\infty)$ que satisface la integral

$$\int_0^{\varepsilon} \rho^{-2}(u)\,du = \infty. \tag{3.15}$$

Entonces, estamos en busca de una función $\rho$ como en $(3.15)$ que satisfaga

$$\left|\sigma\left(\sqrt{x} - \sqrt{y}\right)\right| \leq \rho(|x-y|).$$

Dado que $\sqrt{x} < 1 + x$ para $x \in (0,\infty)$, se tiene $\sigma\left|\sqrt{x} - \sqrt{y}\right| < \sigma|x-y|$. Proponemos a la función $\rho(u) = \rho u$ definida en $(0,\infty)$. Notemos que la función $\rho$ definida de tal manera es creciente y positiva. Además,

$$\rho^{-2}(u) = \frac{1}{\sigma^2 u^2},$$

la cual es una función no integrable.

Por lo anterior, se puede asegurar la existencia de una única solución fuerte y positiva en el modelo CIR. Dicho esto, tiene sentido hablar de la solución y de sus propiedades distribucionales, a pesar de no contar con una expresión explícita de la solución.

Bajo la medida libre de riesgo y condicionado a $\mathscr{F}_s$, el proceso de la tasa instantánea sigue una distribución $\mathscr{X}^2$ no centrada con media y varianza

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}\left(r\left(t\right)|\mathscr{F}_s\right) &= r\left(s\right)e^{-k(t-s)}+\theta\left(1-e^{-k(t-s)}\right),\\
\mathbb{V}\left(r\left(s\right)|\mathscr{F}_s\right) &= r\left(s\right)\frac{\sigma^2}{k}\left(e^{-k(t-s)}-e^{-2k(t-s)}\right)+\frac{\sigma\theta}{2k}\left(1-e^{-k(t-s)}\right)^2.
\end{aligned}$$

Por otra parte, $p\left(t,T\right)$ es de la forma $p\left(t,T\right)=A\left(t,T\right)e^{B(t,T)r(t)}$, donde

$$\begin{aligned}
A\left(t,T\right) &= \left(\frac{2h\exp\left\{\frac{(T-t)(k+h)}{2}\right\}}{2h+\left(k+h\right)\left(\exp\left\{\left(T-t\right)h\right\}-1\right)}\right)^{\frac{2k\theta}{\sigma^2}},\\
B\left(t,T\right) &= \frac{2\left(\exp\left\{\left(T-th\right)\right\}-1\right)}{2h+\left(k+h\right)\left(\exp\left\{\left(T-t\right)h\right\}-1\right)},\\
h &= \sqrt{k^2+2\sigma^2}.
\end{aligned}$$

El principal problema de los modelos anteriores es su naturaleza endógena, es decir, en ninguno de los modelos se intenta ajustar al modelo la información conocida en el mercado. Si suponemos observable y suficientemente suave a la estructura inicial de mercado, denotada por $p^M\left(0,t\right)$, la cual es una función parametrizada en el tiempo, es natural buscar establecer un modelo que involucre a esta curva. Para esto necesitamos forzar los parámetros del modelo para producir una curva lo más cercana posible a la estructura del mercado.

Los modelos que ajustan la información del mercado se conocen como modelos con estructura terminal exógena. Éstos mejoran esta situación planteada y son los que se usan usualmente. Estos modelos resultan ser modificaciones amables de los modelos endógenos. Esto es debido a que un modelo endógeno se convierte en un modelo exógeno al introducir parámetros con dependencia en el tiempo.

El modelo exógeno más utilizado en la práctica es el modelo de Hull y White, que es una extensión del modelo de Vasicek y se presenta a continuación.

### 3.2.5. Modelo Hull-White (Vasicek extendido)

Con el fin de ajustarse a la estructura terminal observada en el mercado, Hull y White introdujeron parámetros dependientes del tiempo, en lugar de coeficientes constantes, en el modelo de Vasicek. En general, el modelo Hull-White es el presentado en la Tabla I, pero por cuestiones se simplicidad, sólo presentaremos el siguiente caso particular.

En 1994, Hull y White asumieron el siguiente modelo de tasa instantánea bajo la medida $\mathbb{Q}$,

$$dr(t) \quad = \quad (\theta(t) - kr(t))\,dt + \sigma dW(t), \tag{3.16}$$

donde $k$ y $\sigma$ son constantes positivas y $\theta$ es tal que se ajusta exactamente a la estructura terminal de las tasas que es actualmente observada en el mercado.

Denotamos por

$$f^M(0,T) = -\frac{\partial \ln\left[p^M(0,T)\right]}{\partial T}, \tag{3.17}$$

a la tasa forward instantánea del mercado en el tiempo 0 y con madurez $T$. Asumiendo esto se obtiene que la expresión explícita que debe tener $\theta(t)$ es

$$\theta(t) = \frac{\partial f^M(0,t)}{\partial T} + kf^M(0,t) + \frac{\sigma^2}{2k}\left(1 - \exp\{-2kt\}\right),$$

donde $\frac{\partial f^M}{\partial T}$ representa la parcial con respecto al segundo argumento de $f^M$. La expresión $(3.16)$ se integra y da como resultado

$$r(t) = r(s)e^{-k(t-s)} + \int_s^t e^{-k(t-s)}\theta(u)\,du + \sigma\int_s^t e^{-k(t-s)}dW(u),$$

definiendo

$$\alpha(t) = f^M(0,t) + \frac{\sigma^2}{2k^2}\left(1 - e^{-kt}\right)^2,$$

$r(t)$ se convierte en

$$r(t) = r(s)e^{-k(t-s)} + \alpha(t) - \alpha(s)e^{-k(t-s)} + \sigma\int_s^t e^{-k(t-s)}dW(u).$$

Condicionando $r(t)$ a $\mathscr{F}_s$, al igual que en modelo de Vasicek, es normalmente distribuida. La media y varianza son

$$
\begin{aligned}
E\left[r(t) \mid \mathscr{F}_s\right] &= r(s)\, e^{-k(t-s)} + \alpha(t) - \alpha(s)\, e^{-k(t-s)}, \\
V\left[r(t) \mid \mathscr{F}_s\right] &= \frac{\sigma^2}{2k^2}\left(1 - e^{-2k(t-s)}\right).
\end{aligned}
$$

### 3.2.6. Ventajas y desventajas de la modelación de tasas instantáneas

En general, las fórmulas explícitas para los precios del bono pueden obtenerse mediante la solución de ecuaciones diferenciales estocásticas que el proceso $p(t,T)$ debe satisfacer en cada modelo. En el caso particular de una distribución normal, los bonos pueden valuarse directamente calculando una esperanza condicional bajo la medida neutral al riesgo .
En general, independientemente de la distribución de $r(t)$ que ofrece cada modelo, pueden englobarse las principales ventajas y desventajas que poseen los modelos para la tasa instantánea como sigue:

## Principales ventajas de los modelos de tasa instantánea:

1. *Libertad de escoger la dinámica relacionada al modelo.*
2. *Especificar a $r$ como la solución de una ecuación diferencial estocástica nos permite hacer uso de la teoría de procesos de Markov.*
3. *Con frecuencia es posible obtener fórmulas analíticas para los precios del bono y derivados.*

## Principales desventajas de los modelos de tasa instantánea:

1. *Desde el punto de vista económico, no es razonable suponer que el mercado monetario puede ser explicado en su totalidad por una sola variable explicativa, $r$.*
2. *Es complicado obtener una estructura realista para la volatilidad de las tasas forward sin introducir un modelo de tasa instantánea muy complicado.*
3. *Conforme los modelos de tasa instantánea se asemejan a lo observado en la realidad, el tratar la curva de rendimiento se vuelve tedioso y complicado.*

En el siguiente apartado se muestra una metodología distinta para el modelado de tasas, donde el interés principal es modelar las tasas forward y no la tasa instantánea.

## 3.3. Metodología Heath-Jarrow-Morton

En 1986, Ho y Lee modelaron la evolución total de una curva de rendimiento por medio de un árbol trinomial. Posteriormente, la idea fue generalizada y llevada al tiempo continuo por Heath, Jarrow y Morton. Desarrollaron una metodología general para modelar las dinámicas de las tasas de interés instantáneas mediante la modelación de tasas forward instantáneas.
Esta metodología asume que para una $T$ fija y bajo una medida dada, $f(t,T)$ evoluciona de acuerdo al proceso

$$df(t,T) = \alpha(t,T)\,dt + \sigma(t,T)\,dW(t),$$

con condición inicial $f^M(0,T)$ definida en $(3.17)$. El proceso $W$ es un movimiento browniano (tal vez multidimensional) y $\alpha(t,T)$ y $\sigma(t,T)$ procesos continuos y adaptados.
La condición inicial $f^M(0,T)$ es en realidad una curva, lo cual tiene sentido puesto que la solución de la EDE anterior es un proceso estocástico.
La metodología de Heath-Jarrow-Morton **(HJM)** se caracteriza por hacer uso de argumentos de arbitraje para modelar la evolución estocástica de la curva de rendimiento, donde las dinámicas de las tasas forward están completamente especificadas a través de las estructuras de sus volatilidades. Esta es la mayor diferencia con los modelos anteriores para la tasa instantánea, ya que en dichos modelos la estructura de la volatilidad para la tasa instantánea no es suficiente para caracterizar el modelo de tasa de interés instantánea.
Heath, Jarrow y Morton probaron que para que una medida martingala equivalente exista, el proceso $\alpha(t,T)$ no puede ser escogido al azar sino que debe ser dependiente del proceso $\sigma(t,T)$.

**Suposición 3.5.** *Existe una medida martingala $\mathbb{Q}$ equivalente a la medida objetiva $\mathbb{P}$.*

Según lo visto en el capítulo 1, la existencia de una medida martingala equivalente nos concede de manera automática precios libres de arbitraje. De las ecuaciones $(2.2)$ y $(3.9)$ tenemos dos expresiones para $p(0,T)$. Estas son

$$
\begin{aligned}
p(0,T) &= \exp\left\{-\int_0^T f(0,s)\,ds\right\},\\
p(0,T) &= \mathbb{E}^{\mathbb{Q}}\left[\exp\left\{-\int_0^T r(s)\,ds\right\}\right],
\end{aligned}
$$

recordando que la tasa instantánea, $r$, y la tasas forward están relacionadas por $r(t) = f(t,t)$.

Al contar con dos fórmulas viables para $p(0,t)$, es necesario que ambas sean consistentes en el sentido de que no son contradictorias entre sí y que ambas son igualmente válidas en el marco teórico desarrollado para el mercado de bonos. Para que ésto suceda, es indispensable imponer condiciones sobre la dinámica de la tasa forward, más precisamente, se necesita que los procesos $\alpha$ y $\sigma$ cumplan una relación en particular. Dicha relación se conoce como ***condición de deriva*** y se establece en el siguiente teorema:

**Teorema 3.6.** *Supongamos que* $\frac{p(t,T)}{B(t)}$ *es una* $\mathbb{Q}-$*martingala y que las tasas forward satisfacen la ecuación*

$$
df(t,T) = \alpha(t,T)\,dt + \sigma(t,T)\,dW(t),
$$

*con condición inicial* $f^M(0,T)$.
*Sea*

$$
\tau(t,T) = \int_t^T \sigma(t,u)\,du.
$$

*Entonces se debe satisfacer que* $\alpha(t,T) = \sigma(t,T)\,\tau(t,T)$, *y además*

$$
df(t,T) = \sigma(t,T)\,\tau(t,T)\,dt + \sigma(t,T)\,d\tilde{W}(t), \tag{3.18}
$$

*donde* $\tilde{W}$ *es un* $\mathbb{Q}-$*movimiento browniano.*

*Demostración.* Definamos un proceso $\{X(t);t\geq 0\}$ de la siguiente manera:

$$
\begin{aligned}
X(t) &= ln[p(t,T)],\ \forall t\geq 0\\
&= -\int_t^T f(t,u)\,du,\ \forall t\geq 0
\end{aligned} \tag{3.19}
$$

De las ecuaciones $(2.1)$ y $(2.2)$, y por definición de $X(t)$, tenemos

$$\frac{p(t,T)}{B(t)} = \exp\left\{X(t) - \int_o^t f(u,u)\,du\right\},$$

y aplicando fórmula de Ito a esta expresión, obtenemos

$$d\left(\frac{p(t,T)}{B(t)}\right) = \frac{p(t,T)}{B(t)}\left(dX(t) + \frac{1}{2}d[X,X]_t - r(t)\,dt\right). \tag{3.20}$$

Usando que $d[X,X]_t = \tau^2(t,T)\,dt$ y que

$$dX(t) = -r(t)\,dt - \left(\int_t^T \alpha(t,u)\,du\right)dt - \tau(t,u)\,dW(t), \tag{3.21}$$

la ecuación (3.20) se puede reescribir como

$$d\left(\frac{p(t,T)}{B(t)}\right) = \frac{p(t,T)}{B(t)}\left(-\left(\int_t^T \alpha(t,u)\,du\right)dt + \frac{1}{2}\tau^2(t,T)\,dt - \tau(t,u)\,dW(t)\right). \tag{3.22}$$

Dado que $\frac{p(t,T)}{B(t)}$ es una $\mathbb{Q}$-martingala, por el teorema de Girsanov

$$d\tilde{W}(t) = dW(t) + \left(\frac{\int_t^T \alpha(t,u)\,du}{\tau(t,T)} - \frac{1}{2}\tau(t,T)\right)dt,$$

donde $\tilde{W}(t)$ es un $\mathbb{Q}-$movimiento browniano. La ecuación diferencial estocástica asociada al precio descontado del bono bajo $\mathbb{Q}$ es

$$d\left(\frac{p(t,T)}{B(t)}\right) = -\left(\frac{p(t,T)}{B(t)}\right)\tau(t,T)\,d\tilde{W}(t). \tag{3.23}$$

Por último, especificando el modelo bajo la medida $\mathbb{Q}$ se satisface, $\int_t^T \alpha(t,u)\,du - \frac{1}{2}\tau^2(t,T) = 0$ , por tanto

$$\int_t^T \alpha(t,u)\,du = \frac{1}{2}\tau^2(t,T).$$

Por diferenciación y definición de $\tau(t,u)$ se concluye

$$\alpha(t,T) = \sigma(t,T)\,\tau(t,T)\,.$$

$\square$

**Corolario 3.7.** *Los bonos satisfacen*

$$\begin{aligned} p(t,T) &= p(0,T)\exp\left\{-\int_0^t \tau(s,T)\,d\tilde{W}(s) - \frac{1}{2}\int_0^t \tau^2(s,T)\,ds + \int_0^t r(s)\,ds\right\} \quad (3.24)\\ dp(t,T) &= p(t,T)\big(r(t)\,dt - \tau(t,T)\,d\tilde{W}(t)\big), \quad (3.25)\end{aligned}$$

*bajo la medida* $\mathbb{Q}$ *para* $t \leq T$.

*Demostración.* Notemos que de la ecuación (3.23), podemos deducir que $\frac{p(t,T)}{B(t)}$ es la exponencial estocástica de $\int_0^t \tau(s,T)\,d\tilde{W}(s)$ bajo $\mathbb{Q}$ y por tanto, conocemos la solución a la ecuación diferencial estocástica (3.23). Por ende

$$\begin{aligned} \frac{p(t,T)}{B(t)} &= \frac{p(0,T)}{B(0)}\varepsilon\left(-\int_0^t \tau(s,T)\,d\tilde{W}(s)\right)\\ &= p(0T)\exp\left\{-\int_0^t \tau(s,T)\,d\tilde{W}(s) - \tfrac{1}{2}\int_0^t \tau^2(s,T)\,ds\right\},\end{aligned}$$

concluyendo

$$\frac{p(t,T)}{B(t)} = p(0,T)\exp\left\{-\int_0^t \tau(s,T)\,d\tilde{W}(s) - \frac{1}{2}\int_0^t \tau^2(s,T)\,ds + \int_0^t r(s)\,ds\right\}.$$

Para la segunda igualdad, desarrollaremos el término $dp(t,T)$ como sigue

$$\begin{aligned} d\left(\frac{p(t,T)}{B(t)}\right) &= \frac{dp(t,T)}{B(t)} - \frac{p(t,T)}{B(t)}\frac{dB(t)}{B(t)}\\ &= \frac{dp(t,T)}{B(t)} - r(t)\frac{p(t,T)}{B(t)},\end{aligned}$$

y comparando con (3.23) se obtiene el resultado. $\square$

La implementación de la metodología **HJM** puede resumirse en una serie de pasos los cuales muestran de manera más clara cómo funciona esta metodología para el cómputo de precios de derivados:

1. *Especificar, a criterio propio, la volatilidad* $\sigma(t,T)$.
2. *Establecer la relación*
$$\alpha(t,T) = \sigma(t,T)\int_t^T \sigma(t,s)\,ds.$$
3. *Observar la estructura actual de las tasas forward en el mercado, es decir, determinar según datos observables*
$$\{f(0,T);T \geq 0\}.$$
4. *Integrar y obtener las tasas forward*
$$f(t,T) = f(0,T) + \int_0^t \alpha(s,T)\,ds + \int_0^t \sigma(s,T)\,d\tilde{W}(s).$$
5. *Calcular los precios de los bonos a partir de la fórmula*
$$p(t,T) = exp\left\{-\int_t^T f(t,s)\,ds\right\}.$$
6. *Calcular los precios de derivados a partir de lo anterior.*

# 4. Derivados sobre bonos y tasas de interés

El concepto de derivado es uno de los más importantes en finanzas ya que por medio de ellos se llevan a cabo transacciones e inversiones en los distintos mercados existentes. Un derivado es un instrumento financiero cuyo valor depende de otro, que comúnmente se conoce como variable subyacente. Los productos derivados pueden clasificarse como:

→ Instrumentos que se cotizan en mercados organizados.

→ Instrumentos que se cotizan en los mercados extra-bursátiles.

Se entiende por cotizar a la acción mediante la cual un producto financiero adquiere un valor para su negociación en un mercado. Los derivados pueden depender prácticamente de cualquier variable, siempre y cuando ésta pueda comercializarce. En los mercados no son sólo las acciones, bonos, monedas extranjeras, e índices las que pueden venderse o comprarse. Formalmente, un derivado es un contrato en el cual queda plasmado el acuerdo entre dos partes y que se mantiene por un tiempo específico.

Los principales derivados negociados en los mercados extra-bursátiles son los productos forward, opciones de divisas, opciones de tasas de interés, swaps de divisas y swaps de tasas de interés. Este tipo de mercado ha crecido en los últimos años debido a que el contrato se ajusta a las necesidades de ambos participantes. Ninguna de las partes tiene que apegarse a las características de los contratos estándar como en los mercados bursátiles. La principal desventaja de un mercado no regulado es la probabilidad de incumplimiento por la contraparte, ya que en un mercado extra-bursátil no hay una institución encargada que asuma el riesgo y el pago de compensaciones.

Cada derivado tiene sus propias características, las cuales dependen de las condiciones del contrato y del activo subyacente. Sin embargo, cualquier instrumente derivado cumple con las siguientes características generales:

→ Su valor varía según la variación del activo subyacente.

→ No requieren una inversión inicial, y de ser necesaria ésta sería muy pequeña comparada con lo requerido por otros productos financieros que se comportan de manera similar frente a los cambios en el mercado del activo subyacente.

$\rightarrow$ La liquidación del contrato se realiza, siempre, en una fecha futura.

$\rightarrow$ Pueden ser objeto de comercialización en los mercados financieros.

Según las características del contrato, también pueden clasificarse como permutas financieras, futuros, opciones o contratos por diferencia. Cuando un derivado está hecho sobre un producto financiero, se conoce como *instrumento derivado financiero*. Mientras que, si el derivado es sobre bienes, materias primas o cualquier otro producto no financiero, entonces se dice que el *derivado es no financiero*.

Comenzaremos por presentar las opciones y las permutas financieras (swaps), que se estudiarán a detalle en las secciones posteriores. Para mayores referencias sobre derivados y mercados financieros puede consultarse Zhu, Wu & Chern (2004, p.8-14) y Kariya & Liu (2003, p.1-12).

***Opciones:*** Las opciones pueden ser negociadas en ambos mercados. Hay dos tipos de opciones; las de compra y las de venta. En una opción de compra, se adquiere el derecho de comprar un activo en una fecha fija y a un precio fijo especificados previamente en el contrato. Análogamente, en una opción de venta se adquiere el derecho de vender. En un contrato de este tipo, se adquiere un derecho más no una obligación, lo que da la libertad al tenedor de negarse a ejercer la opción si no le resulta conveniente.

En particular, en las secciones siguientes de este capítulo estudiaremos las opciones europeas. En éstas, la opción se ejerce sólo al término de contrato y no en ningún momento previo. No obstante, la mayoría de las opciones en el marcado bursátil son americanas, éstas pueden ejercerse en cualquier tiempo previo a la fecha de expiración del contrato.

***Swaps:*** Es un contrato entre dos partes donde se acuerda el intercambio de pagos basados en un monto principal definido, comúnmente denotado por $N$, durante un periodo fijo de tiempo. Un swap hace referencia a intercambios futuros, ya sea referenciados a tasas de interés o divisas.

De manera genérica, se puede considerar un swap a cualquier intercambio futuro de bienes o servicios referenciado a cualquier variable observable, cuyo principal objetivo es satisfacer las necesidades específicas de quienes firman el contrato. En un contrato swap se especifican la moneda en la cual se hará el intercambio de flujos, las tasas de interés que aplican, las fechas en las que se harán los intercambios y la formula con la que se calculan los flujos.

Estos contratos fueron introducidos en 1981 y hoy en día son parte de los contratos más negociados en el mundo. El swap más común es el de tasas de interés, donde el monto principal no es intercambiado, sino los intereses generados por éste. Los swaps de tasas de interés no generan fondos por si mismos, sino que convierten una base de tasas de interés en otra base, ya sea de una tasa flotante a una fija o viceversa. Son utilizados con frecuencia como instrumentos de cobertura ante variaciones desfavorables de tasas fluctuantes. Por ejemplo, consideremos a una empresa con una deuda de \$500 millones a 5 años con pagos anuales de intereses según la tasa LIBOR más el 1% de margen. La empresa corre el riesgo de pagar una cantidad mayor debido a los intereses, es decir, si la tasa LIBOR aumenta entonces los intereses pagados por esta entidad serán mayores. Para evitar este riesgo, la empresa acude a un banco para contratar un swap. Las especificaciones de este contrato son tales que la empresa queda obligada a pagar intereses del 6% anual, por los \$500 millones a un plazo de 5 años, así mismo, el banco tiene la obligación de pagarle a la empresa el monto de intereses que corresponda a la tasa LIBOR de forma anual. De esta manera la empresa pagaría intereses de tasa fija al banco y el margen del 1% a su acreedor. Dicho de otra manera, la empresa pagará el 6% anual sobre los \$500 millones durante 5 años al banco, y recibirá de éste los intereses sobre el mismo monto de acuerdo a la tasa LIBOR. Por tanto, la empresa sólo deberá preocuparse por el pago de un 7% sobre el monto de su deuda, eliminando el riesgo sobre el aumento de la tasa LIBOR.

En la sección 4.1 ahondaremos en la valuación de opciones y swaps sobre bonos como los que hemos definido desde el capítulo 1 y se introducirá el caso en el que los bonos están sujetos a riesgo de crédito. Cabe resaltar que los bonos financieros son instrumentos base en los mercados financieros cuya valuación libre de arbitraje es conocida. Veremos más adelante, cuando las fórmulas de valuación para swaps y opciones sobre bonos sean desarrolladas, que la valuación de éstos derivados tienen una fuerte y explícita dependencia con los precios del bono.

## 4.1. Riesgo de crédito

Se conoce como riesgo de crédito a la posibilidad de pérdida derivada del incumplimiento de las obligaciones establecidas por las contrapartes de un contrato. Éste concepto es aplicado en gobiernos, instituciones financieras, empresas, bancos, entre otros. Debido a que los gobiernos pueden recuperarse mucho más rápido que las empresas y demás instituciones, los bonos gubernamentales están sujetos a un riesgo, en general, mucho menor .
En las secciones anteriores, cuando hemos hablado de precios de bonos hemos asumido que ninguno de ellos presenta incumplimiento. Es decir, que al término del contrato por cada peso prometido se recibe uno de manera íntegra.
Diremos que un bono caerá en incumplimiento cuando hay posibilidad de que el emisor del bono no pueda pagar el capital y los intereses en el tiempo establecido, incumpliendo con el contrato y generando una pérdida para el inversor del bono.

### 4.1.1. Bonos con incumplimiento y su valuación

La metodología de valuación de bonos con incumplimiento que se presentará a continuación fue desarrollada en 1995 y expuesta por primera vez en Jarrow & Turnbull (1995). Esta metodología se basa en la construcción de una estructura terminal estocástica para los bonos con incumplimiento y parte de una estructura dada de las tasas de interés instantáneas asociadas a un bono sin incumplimiento. Se presentarán las condiciones suficientes y necesarias para la existencia y unicidad de una medida martingala equivalente a la medida objetiva de mercado. A esta medida, al igual que en capítulos anteriores, la denotaremos por $\mathbb{Q}$. Imponiendo restricciones a las diferentes estructuras terminales que se construirán a continuación, obtendremos resultados cerrados para la valuación de bonos con incumplimiento y algunos de sus derivados.

Consideremos dos clases de bonos:

$\rightarrow$ *Bonos cupón cero de todas las maduraciones posibles. Estos bonos NO tienen posibilidad de incumplimiento.*

- Tomemos un bono cupón cero de esta clase, el cual es emitido en el tiempo $t$ y tiene madurez $T \geq t$. Denotemos por $p_0(t,T)$ a su proceso de precios asociado, sujeto a la condición $p_0(T,T) = 1$.

→ *Bonos cupón cero de todas las maduraciones posibles. Estos bonos están sujetos a riesgo de incumplimiento.*

- Tomemos un bonos cupón cero perteneciente a esta clase, denotaremos por $\tilde{Z}$ a este bono que es emitido en el tiempo $t$ y tiene madurez $T \geq t$ y que además *promete* el pago de \$1 en la fecha $T$. Sea $\tilde{p}(t,T)$ su proceso de precios asociado.
- Al igual que en el caso sin incumplimiento que hemos trabajado en secciones anteriores, asumiremos $\tilde{p}(t,T) > 0$.

Definamos

$$e(t) \equiv \tilde{p}(t,t),$$

el valor en el tiempo $t$ de un bono $\tilde{Z}$ que es emitido y entregado de inmediato en el tiempo $t$. Esta cantidad es análoga al tipo de cambio spot, es decir, el precio que es acordado para las compras o ventas inmediatas. Si el bono $\tilde{Z}$ no presenta incumplimiento, entonces cada peso prometido es pagado. Si $\tilde{Z}$ presenta incumplimiento, se obtendrá una cantidad menor a uno por cada peso prometido. Entenderemos a $e(t)$ como la razón de pago en incumplimiento, posteriormente se abordarán más detalles al respecto sobre este proceso. A partir de esta cantidad construiremos un pago hipotético, siguiendo la metodología de Jarrow & Turnbull (1995), definimos

$$p_1(t,T) \equiv \frac{\tilde{p}(t,T)}{e(t)}, \tag{4.1}$$

que representa el valor en unidades de $\tilde{Z}$ que son entregadas en el tiempo $T$. Observemos que

$$p_1(T,T) \quad = \quad \frac{\tilde{p}(T,T)}{e(T)} = 1,$$

es decir, el proceso auxiliar de precios, $p_1(t,T)$, representa el valor de un bono cupón cero que no presenta incumplimiento. Despejando $\tilde{p}$ en $(4.1)$ se sigue que

$$\tilde{p}(t,T) = p_1(t,T)\,e(t), \tag{4.2}$$

la cual es una expresión mucho más útil para fines de modelación cuando se desea caracterizar a los procesos $p_1(t,T)$ y $e(t)$.

Recordemos que el objetivo de este apartado es obtener una fórmula para la valuación de los bonos con posibilidad de incumplimiento. Para ésto se usará la metodología HJM, es decir, se especificarán las dinámicas para tasa forward y precios de bonos cupón cero según lo establecido en la tercera sección del capítulo 3.

Sea $\tau_1$ el tiempo de bancarrota del bono $\tilde{Z}$ , donde la bancarrota se refiere al momento en el que el emisor deja de tener capital suficiente para asumir el pago de la deuda y los intereses generados. Asumimos que el tiempo de bancarrota es único para todos los bonos de esta clase, y que la probabilidad de bancarrota es la misma para todos los bonos. Además, el pago al tenedor del bono en el evento de incumplimiento está dada por la misma constante exógena para todos los bonos, ésta constante se denotará por $\delta$. Las condiciones de no arbitraje y completez se obtendrán estudiando por separado los mercados de bonos para cada clase. El resto de esta sección se basa en la presentación de una serie de suposiciones necesarias no sólo para la existencia de un mercado completo y libre de arbitraje para los bonos $\tilde{Z}$, sino también para el desarrollo de la metodología de valuación de estos bonos.

Asumiremos que $\tau_1$ sigue una distribución exponencial de parámetro $\lambda_1$[1] bajo la medida de probabilidad $\mathbb{P}$. Recordemos que la tasa forward asociada a un bono sin incumplimiento con proceso de precios $p_0(t,T)$ está definida por

$$f_0(t,T) = -\frac{\partial \ln[p_0(t,T)]}{\partial T}.$$

Definimos la *tasa instantánea sin incumplimiento* como $r_0(t) = f_0(t,t)$ y le asociaremos la cuenta

$$B_0(t) = \exp\left\{\int_0^t r_0(s)\,ds\right\},$$

Análogamente, a partir del proceso $p_1(t,T)$ definimos

$$\begin{aligned} f_1(t,T) &= -\frac{\partial \ln[p_1(t,T)]}{\partial T}, \\ r_1(t) &= f_1(t,t), \\ B_1(t) &= \exp\left\{\int_0^t r_1(s)\,ds\right\}. \end{aligned}$$

[1]La distribución exponencial de $\tau_1$ se supone por simplicidad de los cálculos, $\tau_1$ puede seguir otras distribuciones.

Mientras que (3.18) es la dinámica de la tasa forward para un bono sin incumplimiento, la evolución de $f_1$ depende de $\tau_1$. Por lo desarrollado en la metodología HJM en el capítulo 3, podemos suponer la siguientes estructuras para las tasa $f_0(t,T)$ y $f_1(t,T)$.

**Suposición 4.1.** *: La tasa forward asociada al proceso $p_0(t,T)$ satisface*

$$df_0(t,T) = \alpha_0(t,T)\,dt + \sigma(t,T)\,dW_1(t), \tag{4.3}$$

*donde $W_1(t)$ es un movimiento browniano y tanto $\alpha_0(t,T)$ como $\sigma(t,T)$ son acotadas y lo suficientemente suaves. En particular, asumiremos $\sigma(t,T)$ como una función determinista para facilitar la obtención de soluciones cerradas.*

**Suposición 4.2.** *La tasa forward $f_1(t,T)$ evoluciona según la dinámica*

$$df_1(t,T) = \begin{cases} \{\alpha_1(t,T) - \theta_1(t,T)\lambda_1\}\,dt + \sigma(t,T)\,dW_1(t) & t < \tau_1 \\ \{\alpha_1(t,T) - \theta_1(t,T)\lambda_1\}\,dt + \sigma(t,T)\,dW_1(t) + \theta_1(t,T) & t = \tau_1 \\ \alpha_1(t,T)\,dt + \sigma(t,T)\,dW(t) & t > \tau_1, \end{cases}$$

*donde $\theta_1(t,T) > 0$ y $\alpha_1(t,T)$, $\theta_1(t,T)$ son acotadas y suaves.*

Diremos que una función es *suave* si es de clase $C^2$. Observemos que la tasa forward $f_1(t,T)$ cambia en un periodo pequeño de tiempo según una deriva y un impacto estocástico. Antes de la bancarrota, la deriva se ajusta por debajo para reflejar el cambio esperado $\theta_1(\tau_1,T)\lambda_1$ que ocurre exactamente en el instante $\tau_1$. Después del salto en el momento de bancarrota, el comportamiento de la tasa forward $f_1(t,T)$ es idéntico al de la expresión (4.3) exceptuando los índices de los coeficientes.

**Suposición 4.3.** *La razón de pago de la clase de bonos con incumplimiento está dada por*

$$e(t) = \begin{cases} 1 & t < \tau_1 \\ \delta & t \geq \tau_1 \end{cases} \tag{4.4}$$

*donde $\delta$ se asume como una constante positiva estrictamente menor a 1.*

Conociendo la dinámica $df_0(t,T)$, por la Proposición 2.5.3 tenemos que

$$dp_0(t,T) = p_0(t,T)\left\{\left\{r_0(t) + \beta_0(t,T)\right\}dt + \alpha(t,T)\,dW_1(t)\right\},$$

con

$$\beta_0(t,T) = -\int_t^T \alpha_0(t,u)\,du + \frac{1}{2}\left\|\alpha(t,T)\right\|^2 \tag{4.5}$$

y

$$\alpha(t,T) = -\int_t^T \sigma(t,u)\,du.$$

Definiendo $g(t^-) \equiv \lim_{\varepsilon\to 0} g(t-\varepsilon)$ para una función $g$ y $\varepsilon > 0$, se obtiene de manera análoga para $\tilde{p}(t,T)$

$$\frac{d\tilde{p}(t,T)}{\tilde{p}(t^-,T)} = \begin{cases} \left\{r_1(t) + \beta_1(t,T) - \Theta_1(t,T)\lambda_1\right\}dt + \alpha(t,T)\,dW_1(t) & t < \tau_1 \\ \left\{r_1(t) + \beta_1(t,T) - \Theta_1(t,T)\lambda_1\right\}dt + \alpha(t,T)\,dW_1(t) + \left(\delta e^{\Theta_1(t,T)} - 1\right) & t = \tau_1 \\ \left\{r_1(t) + \beta_1(t,T)\right\}dt + \alpha(t,T)\,dW_1(t) & t > \tau_1, \end{cases}$$

donde

$$\beta_1(t,T) = -\int_t^T \alpha_1(t,u)\,du + \frac{1}{2}\left\|\alpha(t,T)\right\|^2 \tag{4.6}$$

y

$$\Theta(t,T) = -\int_t^T \theta_1(t,u)\,du,$$

Al igual que en el caso sin incumplimiento, las expresiones para $\beta_1(t,T)$ y $\Theta(t,T)$ se siguen del resultado establecido en la Proposición 2.5.3.

Observemos que el impacto adicional en el tiempo de bancarrota es $\left(\delta e^{\Theta_1(t,T)} - 1\right)$. La cuenta bancaria $B_1(t)$ evoluciona según la tasa $r_1(t)$, la dinámica de $B_1(t)\,e(t)$ está dada por

$$\frac{d\left(B_1(t)\,e(t)\right)}{B_1(t^-)\,e(t^-)} = \begin{cases} r_1(t)\,dt & t < \tau_1 \\ r_1(t)\,dt + (\delta - 1) & t = \tau_1 \\ r_1(t)\,dt & t > \tau_1, \end{cases}$$

que presenta un salto en $\tau_1$ debido al pago inferior a \$1 del bono asociado.

Para la valuación sin oportunidades de arbitraje, se necesita la existencia de una medida martingala equivalente, $\mathbb{Q}$, bajo la cual los procesos $\frac{\tilde{p}(t,T)}{B(t)}$, $\frac{B_1(t)e(t)}{B(t)}$ y $\frac{p_0(t,T)}{B(t)}$
sean martingalas. Esto ocurre si el proceso de bancarrota es no nulo.

**Suposición 4.4.**

*a) El proceso de bancarrota es diferente de cero, es decir,*

$$\delta e^{\Theta_1(t,T)} - 1 \neq 0, \tag{4.7}$$

*para todo $t \leq \tau_1$ y cualquier valor de $T$.*
*b) El proceso de bancarrota y proceso $r_0(t)$ son independientes.*

Ahora consideremos el siguiente conjunto de ecuaciones

$$\beta_0(t,T) + \gamma_1(t)\,\alpha(t,T) = 0, \tag{4.8}$$

$$\begin{aligned} r_1(t) - r_0(t) + \beta_1(t,T) + \gamma_1(t)\,\alpha(t,T) - \Theta_1(t,T)\,\lambda_1 + \left(\delta e^{\Theta_1(t,T)} - 1\right)\lambda_1\mu_1(t) = &\quad 0 \quad t < \tau_1, \\ r_1(t) - r_0(t) + \beta_1(t,T) + \gamma_1(t)\,\alpha(t,T) = &\quad 0 \quad t \geq \tau_1, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} r_0(t) + (1-\delta)\,\lambda_1\mu_1(t) = &\quad r_1(t) \quad t < \tau_1, \\ r_0(t) = &\quad r_1(t) \quad t \geq \tau_1, \end{aligned} \tag{4.9}$$

el cual tiene como única solución al par de precios de riesgo del mercado $(\gamma_1(t), \mu_1(t))$, bajo la suposición $(4.7)$. Estos procesos tienen en mismo sentido que el mencionado en la Proposición 3.2.
Combinando las ecuaciones anteriores reescribimos

$$\beta_1(t,T) - \Theta_1(t,T)\,\lambda_1 = \beta_0(t,T) - \delta\left(e^{\Theta_1(t,T)} - 1\right)\lambda_1\mu_1(t)$$

para $t < \tau_1$ y

$$\beta_1(t,T) = \beta_0(t,T)$$

en caso contrario.

Dado que después de la bancarrota los procesos $\beta_0$ y $\beta_1$ son iguales y la ecuación (4.9), se sigue que

$$\tilde{p}(t,T) = \delta p_0(t,T) = e(t)\, p_0(t,T),$$

equivalente a

$$\frac{\tilde{p}(t,T)}{e(t)} = p_0(t,T),$$

y por definición de $\tilde{p}(t,T)$, se concluye que después del tiempo de bancarrota los procesos de precios de los bonos también coinciden, es decir, $p_1(t,T) = p_0(t,T)$.

Haciendo uso de la suposición (4.7), la valuación de un activo contingente $X$ está dada por $\mathbb{E}^{\mathbb{Q}}\left[X\frac{B(t)}{B(T)}|\mathscr{F}_t\right]$, donde $\mathbb{Q}$ es la medida neutral al riesgo y su existencia se asegura suponiendo válida la ecuación $(4.7)$. Por simplicidad en los cálculos, asumiremos lo siguiente.

**Suposición 4.5.** *Bajo la medida $\mathbb{Q}$, $\mu_1(t)$ es una constante positiva,*

$$\mu_1(t) = \mu_1.$$

La suposición anterior implica la independencia estadística del proceso de bancarrota y las tasas de los bonos bajo la medida $\mathbb{Q}$. Bajo la medida neutral al riesgo el tiempo $\tau_1$ sigue una distribución exponencial de parámetro $\lambda_1\mu_1$ y este tiempo es independiente de las tasas instantáneas.

Para los precios $\tilde{p}(t,T)$ se tiene la siguiente fórmula de valuación libre de arbitraje

$$
\begin{aligned}
\tilde{p}(t,T) &= \mathbb{E}^{\mathbb{Q}}\left[e(T)\frac{B(t)}{B(T)}|\mathscr{F}_t\right],\\
&= \mathbb{E}^{\mathbb{Q}}\left[e(T)|\mathscr{F}_t\right]\mathbb{E}^{\mathbb{Q}}\left[\frac{B(t)}{B(T)}|\mathscr{F}_t\right],\\
&= p_0(t,T)\,\mathbb{E}^{\mathbb{Q}}\left[e(T)|\mathscr{F}_t\right],\\
&= \begin{cases} \left(e^{-(T-t)\lambda_1\mu_1}+\delta\left(1-e^{-(T-t)\lambda_1\mu_1}\right)\right)p_0(t,T) & t<\tau_1\\ \delta p_0(t,T) & t\geq\tau_1, \end{cases}
\end{aligned}
$$

por tanto, la valuación de un bono sujeto a incumplimiento está dada por

$$
\tilde{p}(t,T) = \begin{cases} \left(e^{-(T-t)\lambda_1\mu_1}+\delta\left(1-e^{-(T-t)\lambda_1\mu_1}\right)\right)p_0(t,T) & t<\tau\\ \delta p_0(t,T) & t\geq\tau. \end{cases} \tag{4.10}
$$

Notemos que en la expresión anterior $\Theta_1(t,T)$ no aparece. Esto indica que esta cantidad, la cual se liga a la posibilidad de incumplimiento en el bono, queda totalmente especificada bajo la medida $\mathbb{Q}$ en términos del proceso de bancarrota bajo esta misma medida. Para finalizar, recordemos que los bonos utilizados para construir la estructura terminal tienen la misma probabilidad de incumplimiento sin importar su tiempo de madurez, y en el tiempo de bancarrota tienen la misma regla de pago, la cual se asume como una constante conocida.

## 4.2. Opciones sobre bonos cupón cero

Una opción sobre bonos es el caso particular de una opción donde el activo subyacente es un bono, en nuestro caso seguiremos considerando sólo bonos sin cupones. Por simplicidad, nos enfocaremos en las opciones europeas mencionadas al inicio del capítulo 4. Para ejemplificar la metodología de valuación de un bono cupón cero sin incumplimiento, nos restringiremos al caso de opciones de compra y obviaremos los detalles de las opciones de venta. En la sección 4.2.1 se introducen las herramientas necesarias que resultan de utilidad para la valuación de opciones sobre bonos sin incumplimiento. En el apartado 4.2.3 presentaremos la valuación de opciones sobre bonos sujetos a riesgo de crédito, que se basa en lo establecido por la ecuación $(4.10)$ y lo desarrollado en la sección 4.2.2 para bonos sin incumplimiento.

### 4.2.1. Medidas martingalas forward

En este tipo de medidas se usa como numerario a un bono y no a la cuenta bancaria. Esta técnica provee formas cerradas para varios contratos del tipo europeo, y es muy útil en la valuación de derivados sujetos a una tasa estocástica, como es nuestro caso. Las medidas forward cobran importancia debido a que el precio forward de cualquier activo financiero es una martingala, algunas veces local, bajo la medida forward correspondiente.

En el capítulo anterior usamos la notación $p_0$ para referirnos al proceso de precios de un bono sin incumplimiento, esta notación fue utilizada para distinguir del proceso $p_1$ durante el desarrollo de la metodología de Jarrow & Turnbull (1995). Sin embargo, de la ecuación $(4.10)$ podemos notar que es suficiente trabajar sólo con un proceso de precios para bonos cupón cero. Dado ésto, regresaremos a nuestra notación inicial y denotaremos por $p(t,T)$ al proceso de precios de un bono cupón cero emitido en el tiempo $t$ de madurez $T$, que será nuestro objeto de trabajo en el resto de este capítulo.

Asumiremos que el proceso de precios de un bono cupón cero satisface

$$p(0,T) = \mathbb{E}^{\mathbb{Q}}\left[\frac{1}{B(T)}\right] < \infty,$$

y recordemos la condición inicial $B(0) = 1$. Seguiremos el modelo HJM para establecer las dinámicas de los procesos de precios y tasas forward. Por simplicidad, reescribiremos la dinámica de $p(t,T)$ como

$$dp(t,T) = p(t,T)\left(r(t)\,dt + \beta(t,T)\,d\tilde{W}(t)\right), \tag{4.11}$$

donde $\beta(t.T) = -\tau(t,T)$, el proceso $\tau$ es el definido por la condición de deriva en la Proposición 3.6 y $\tilde{W}$ es un movimiento browniano respecto a la medida $\mathbb{Q}$.

Denotamos por $\pi_t(X)$ al precio libre de arbitraje al tiempo $t$ de un activo contingente alcanzable $X$ con tiempo de madurez $T$, donde

$$\pi_t(X) = B(t)\mathbb{E}^{\mathbb{Q}}\left[XB^{-1}(T)\,|\mathscr{F}_t\right],$$

para todo $t$ en $[0,T]$.

A modo de ejemplo, recordemos que para un bono cupón cero que madura en la fecha $T$, se admite la siguiente representación:

$$p(t,T) = B(t)\mathbb{E}^{\mathbb{Q}}\left[\frac{1}{B(T)}\,|\mathscr{F}_t\right],$$

para todo $t$ en $[0,T]$.

Nuestro objetivo en esta sección es la valuación de una opción europea de compra, con fecha de ejercicio $T$ y precio de ejercicio $K$, escrita sobre un bono cupón cero con madurez $U \geq T$. El pago de esta opción en el tiempo de ejercicio es

$$C_T = (p(T,U) - K)^+,$$

y por tanto, el precio de la opción en cualquier tiempo $t \leq T$ es

$$C_t = B(t)\mathbb{E}^{\mathbb{Q}}\left[B^{-1}(T)(p(T,U) - K)^+\,|\mathscr{F}_t\right].$$

Para calcular este precio, es decir, realizar el cálculo de la esperanza, necesitamos conocer la distribución condicional de las variables $B(T)$ y $p(t,T)$, las cuales son $\mathscr{F}_T$ medibles. La técnica que utilizaremos para calcular $C_t$ está basada en un cambio de medida. A continuación definiremos a las medidas forward, base de esta metodología.

**Definición 4.6.** *Definimos como medida martingala forward (medida forward) al tiempo T, denotada por $\mathbb{P}_T$, a la medida de probabilidad equivalente en $(\Omega, \mathscr{F}_T)$ a la medida de riesgo neutral $\mathbb{Q}$, cuya derivada de Radon-Nikodym está dada por*

$$\frac{d\mathbb{P}_T}{d\mathbb{Q}} = \frac{B^{-1}(T)}{\mathbb{E}^{\mathbb{Q}}[B^{-1}(T)]} = \frac{1}{B(T)\,p(0,T)}.$$

La derivada $\frac{d\mathbb{P}_T}{d\mathbb{Q}}$ es el objeto esencial de esta metodología. Con ella se hace un cambio de medida que, debido a su definición en términos de $B(T)$ y $p(0,T)$, conllevan a una expresión sin descuento para los precios forward de activos que se establecerán en la fecha $T$, es decir, que se emitirán en la fecha futura $T$.

**Definición 4.7.** *El precio forward, denotado por $F_X(t,T)$, al tiempo $t \leq T$ para la fecha T, de un activo contingente alcanzable $X$ que se establece en el tiempo $T$ está dado por*

$$F_X(t,T) = \frac{\pi_t(X)}{p(t,T)}. \tag{4.12}$$

De nuevo, si el activo subyacente a entregarse en el tiempo $T$ es un bono cupón cero con madurez $U \geq T$, la ecuación anterior se convierte en

$$F_{p(T,U)}(t,T) = \frac{p(t,U)}{p(t,T)},$$

para $t \in [0,T]$. Para simplificar notación, denotaremos $F_{p(T,U)}(t,T)$ por $F_p(t,U,T)$. El proceso $F_X$ se conoce como proceso de precios forward. Además, de (4.12),

$$\{F_X(t,T); t \in [0,T]\}$$

es una martingala bajo la medida $\mathbb{P}_T$.

La derivada $\frac{d\mathbb{P}_T}{d\mathbb{Q}}$ restringida a la $\sigma$-álgebra $\mathscr{F}_t$, la denotaremos por $\eta_t$ y se define para $t \in [0,T]$ como:

$$\eta_t = E^Q\left[\frac{1}{B(T)\,p(0,T)}\,|\mathscr{F}_t\right] = \frac{p(t.T)}{B(t)\,p(0,T)}. \tag{4.13}$$

Sustituyendo (4.11) en (4.13) obtenemos que

$$\eta_t = \exp\left\{\int_0^t \beta(t,T)\,d\tilde{W}(u) - \frac{1}{2}\int_0^t |\beta(t.T)|^2\,du\right\},$$

es decir, $\eta_t$ es la exponencial estocástica de $\int_0^t \beta(u,T)\,d\tilde{W}(u)$ y en vista de las hipótesis de suavidad e integrabilidad sobre $\beta$, es una martingala. Definimos

$$W^T(t) = \tilde{W}(t) - \int_0^t \beta(t,T)\,du,$$

para $t \in [0,T]$. Notemos que por el teorema de Girsanov, $W^T$ es un movimiento browniano bajo la medida $\mathbb{P}_T$, usualmente llamado movimiento browniano forward.

**Lema 4.8.** *Sea $X$ un activo contingente alcanzable establecido en la fecha $T \geq t$, el cual es $\mathscr{F}_T$ medible y $\mathbb{P}_T$ integrable. El precio libre de arbitraje al tiempo $t$ de $X$ está dado por la fórmula*

$$\pi_t(X) = p(t,T)\,\mathbb{E}^{\mathbb{P}_T}[X\,|\mathscr{F}_t], \tag{4.14}$$

*para $t \in [0,T]$.*

Para la demostración del lema anterior haremos uso de la regla de Bayes, recordemos que esta establece que *si $\mathbb{P}$ y $\mathbb{Q}$ son medidas de probabilidad equivalentes en $(\Omega, \mathscr{F}_T)$, entonces para toda $X$ variable aleatoria $\mathscr{F}_T$ medible se sigue*

$$\mathbb{E}^{\mathbb{Q}}[X\,|\mathscr{F}_t] = \frac{\mathbb{E}^{\mathbb{P}}[\eta_T X\,|\mathscr{F}_t]}{\eta_t}.$$

*Demostración.* Sabemos que el precio libre de arbitraje de $X$ está dado por
Por la ecuación (4.13) podemos reescribir

$$\begin{aligned}
\pi_t(X) &= B(t)\,p(0,T)\,\mathbb{E}^{\mathbb{Q}}[\eta_T X\,|\mathscr{F}_t],\\
&= B(t)\,p(0,T)\,\eta_t \mathbb{E}^{\mathbb{P}_T}[X\,|\mathscr{F}_t],\\
&= B(t)\,p(0,T)\left(\frac{p(t.T)}{B(t)\,p(0,T)}\right)\mathbb{E}^{\mathbb{P}_T}[X\,|\mathscr{F}_t],\\
&= p(t,T)\,\mathbb{E}^{\mathbb{P}_T}[X\,|\mathscr{F}_t],
\end{aligned}$$

donde la segunda igualdad se obtiene usando la regla de Bayes. □

### 4.2.2. Valuación de opciones sobre bonos cupón cero

Del Lema 4.8 conocemos una fórmula para la valuación de opciones europeas sobre bonos. Para determinar el precio de una opción de compra europea con fecha y precio de ejercicio

$T$ y $K$, sobre un bono cupón cero de madurez $U \geq T$, se necesita la dinámica de $F_p(t,U,T)$ bajo la medida $\mathbb{P}_T$.

**Lema 4.9.** *Sea $T > 0$ fijo. El proceso $F_p(t,U,T)$ satisface la ecuación diferencial estocástica*

$$dF_p(t,U,T) = F_p(t,U,T)(\beta(t,U) - \beta(t,T))\, dW_t^T, \tag{4.15}$$

*para $t \in [0,T]$ con condición*

$$F_p(T,U,T) = p(T,U), \tag{4.16}$$

*y donde el proceso $W^T$ es un movimiento browniano de dimensión $d$ bajo la medida $\mathbb{P}_T$ dado por*

$$W^T = \tilde{W}_t - \int_0^t \beta(u,T)\, du.$$

*Demostración.* Para esta prueba recordaremos la dinámica del proceso de precios del bono presentada en la ecuación $(4.11)$. Usando el teorema de Girsanov, reescribimos

$$dp(t,T) = p(t,T)(\beta(t,U) - \beta(t,T))\, dW_t^T. \tag{4.17}$$

Haciendo uso de la definición de $F_p(t,U,T)$, es suficiente demostrar que

$$d\left(\frac{p(t,U)}{p(t,T)}\right) = \frac{p(t,U)}{p(t,T)}(\beta(t,U) - \beta(t,T))\, dW_t^T.$$

Usando la fórmula de Ito y la ecuación (4.17) se obtiene

$$\begin{aligned} d\left(\frac{p(t,U)}{p(t,T)}\right) &= \frac{dp(t,T)}{p(t,T)} - \frac{p(t,U)}{p^2(t,T)}dp(t,T), \\ &= \frac{dp(t,T)}{p(t,T)} - \frac{p(t,U)}{p(t,T)}\frac{dp(t,T)}{p(t,T)}, \\ &= \frac{p(t,U)}{p(t,T)}\beta(t,U)\,dW_t^T - \frac{p(t,U)}{p(t,T)}\left(\frac{p(t,T)\,\beta(t,T)\,dW_t^T}{p(t,T)}\right), \\ &= \frac{p(t,U)}{p(t,T)}\left(\beta(t,U) - \beta(t,T)\right)dW_t^T, \end{aligned}$$

con lo que queda demostrado el resultado. $\square$

En el tiempo $T$, el pago de una opción de compra europea sobre un bono cupón cero con madurez $U \geq T$ y precio de ejercicio $K$ es $C_T = (p(T,U) - K)^+$, usando la condición (4.16) reescribimos $C_T$ como

$$C_T = (F_p(T,U,T) - K)^+.$$

Para facilitar los cálculos definiremos al conjunto de ejercicio, denotado por $D$, como sigue

$$D = \{p(T,U) > K\} = \left\{F_p(T,U,T) > K\right\}.$$

Notemos entonces que $C_T$ satisface

$$C_T = F_p(T,U,T)\,I_D - KI_D.$$

Al depender del proceso $p(t,T)$, la dinámica de $F(T,U,T)$ tiene una expresión similar. Resolviendo (4.15) como exponencial estocástica, se observa que $F_p(t,U,T)$ satisface lo siguiente

$$F_p(t,U,T) = F(0,U,T)\exp\left\{\int_0^t \left(\beta(u,U) - \beta(tu,T)\right)dW^T(u)\right\},$$

y en particular para $t = T$ obtenemos

$$
\begin{aligned}
F_p(T,U,T) &= F_p(0,U,T)\,\varepsilon\left(\int_0^T (\beta(u,U)-\beta(u,T))\,dW^T(u)\right), \\
&= F_p(0,U,T)\,\varepsilon\left(\int_o^t (\beta(u,U)-\beta(u,T))\,dW^T(u)\right. \\
&\qquad \left. + \int_t^T (\beta(u,U)-\beta(u,T))\,dW^T(u)\right), \\
&= F_p(0,U,T)\,\varepsilon\left(\int_o^t (\beta(t,U)-\beta(t,T))\,dW^T(u)\right)\times \\
&\qquad \times\varepsilon\left(\int_t^T (\beta(t,U)-\beta(t,T))\,dW^T(u)\right), \\
&= F_p(t,U,T)\,\varepsilon\left(\int_t^T (\beta(t,U)-\beta(t,T))\,dW^T(u)\right),
\end{aligned}
$$

por tanto

$$
\begin{aligned}
F_p(T,U,T) &= F_p(t,U,T)\exp\left\{\int_t^T (\beta(t,U)-\beta(t,T))\,dW^T(u)\right. \\
&\qquad \left. -\frac{1}{2}\int_t^T \|\beta(t,U)-\beta(t,T)\|^2\,du\right\}.
\end{aligned}
\tag{4.18}
$$

El siguiente teorema es el resultado principal de esta sección. En él se presenta, para volatilidades acotadas, el valor de una opción europea de compra sobre un bono cupón cero usando la metodología de medidas martingalas forward.

**Teorema 4.10.** *Supongamos que los procesos $\beta(\cdot,T)$ y $\beta(\cdot,U)$ en (4.15) son funciones deterministas acotadas. El precio libre de arbitraje en el tiempo $t\in[0,T]$ de una opción europea de compra con fecha y precio de ejercicio $T$ y $K$, respectivamente, establecida sobre un bono cupón cero con madures $U\geq T$, es*

$$
C_t(K) = p(t,U)\,\Phi(h_1(p(t,U),t,T)) - Kp(t,T)\,\Phi(h_2(p(t,U),t,T)), \tag{4.19}
$$

*donde*

$$
h_{1,2}(p,t,T) = \frac{\ln\left[\frac{p}{K}\right]-\ln[p(t,T)]\pm\frac{1}{2}\upsilon_U^2(t,T)}{\upsilon_U(t,T)}, \tag{4.20}
$$

*para* $(p,t) \in \mathbb{R}_+ \times [0,T]$ ,

$$\upsilon_U^2(t,T) = \int_t^T \|\beta(u,U) - \beta(u,T)\|^2 \, du$$

*está definida para* $t \in [0,T]$ *y* $\Phi$ *es la función de distribución de una variable normal estándar.*

*Demostración.* La fórmula de valuación (4.14) nos dice que

$$C_t(K) = p(t,T)\,\mathbb{E}^{\mathbb{P}_T}\left[F_p(T,U,T)\,I_D \,|\mathscr{F}_t\right] - Kp(t,T)\,\mathbb{E}^{\mathbb{P}_T}\left[I_D\,|\mathscr{F}_t\right].$$

Definimos a $\upsilon_U^2(t,T)$ y a $\zeta(t,T)$ como

$$\upsilon_U^2(t,T) = \int_t^T \|\gamma(u,T)\|^2 \, du$$

y

$$\zeta(t,T) = \int_t^T \gamma(u,T)\, dW^T,$$

donde $\gamma(u,U,T) = \beta(t,U) - \beta(t,T)$. Con ésto podemos reescribir (4.18) en términos de $\upsilon_U^2(t,T)$ y $\zeta(t,T)$ como

$$F_p(T,U,T) = F_p(t,U,T)\exp\left\{\zeta(t,T) - \frac{1}{2}\upsilon_U^2(t,T)\right\}.$$

Observemos que $\gamma(u,U,T)$ es una función determinista, esto implica que $\zeta(t,T)$ se distribuye, bajo la medida forward $\mathbb{P}_T$, como una variable aleatoria gaussiana de media cero y varianza $\upsilon_U^2(t,T)$ independiente de $\mathscr{F}_t$. Notemos también que $F_p(t,U,T)$ es, por definición, medible con respecto a $\mathscr{F}_t$.

Dividiremos el estudio de $C_t$ en dos partes, analizaremos por separado las integrales

$$J_1 = \mathbb{E}^{\mathbb{P}_T}\left[F_p(T,U,T)\,I_D\,|\mathscr{F}_t\right]$$

y

$$J_2 = \mathbb{E}^{\mathbb{P}_T}\left[I_D\,|\mathscr{F}_t\right].$$

Resolviendo $J_2$:

$$
\begin{aligned}
J_2 &= \mathbb{E}^{\mathbb{P}_T}\left[I_D \,|\mathscr{F}_t\right], \\
&= \mathbb{P}_T\left(D\,\mathscr{F}_t\right), \\
&= \mathbb{P}_T\left(\left\{F_p\left(T,U,T\right) > K\right\}\,\mathscr{F}_t\right), \\
&= \mathbb{P}_T\left(\left\{F_p\left(T,U,T\right) > K\right\}\right), \\
&= \mathbb{P}_T\left(\left\{\ln\left[F_p\left(T,U,T\right)\right] > \ln\left[K\right]\right\}\right), \\
&= \mathbb{P}_T\left(\left\{-\zeta\left(t,T\right) < \ln\left[F_p\left(t,U,T\right)\right] - \ln\left[K\right] - \frac{1}{2}\upsilon_U^2\left(t,T\right)\right\}\right), \\
&= \mathbb{P}_T\left(\left\{Y\left(t,T\right) < \ln\left[F_p\left(t,U,T\right)\right] - \ln\left[K\right] - \frac{1}{2}\upsilon_U^2\left(t,T\right)\right\}\right),
\end{aligned}
$$

donde $Y\left(t,T\right) = -\zeta\left(t,T\right)$ se distribuye como una normal de parámetros cero y $\upsilon_U^2\left(t,T\right)$.

Entonces,

$$
J_2 = \Phi\left(\frac{\ln\left[\frac{F_p\left(t,U,T\right)}{K}\right] - \frac{1}{2}\upsilon_U^2\left(t,T\right)}{\upsilon_U\left(t,T\right)}\right).
$$

Para el cálculo de $J_1$ se necesita definir una medida auxiliar, $\tilde{\mathbb{P}}_T$, en $\left(\Omega, \mathscr{F}_t\right)$. Asumiremos que esta medida es equivalente a $\mathbb{P}_T$ y a partir de ambas definiremos

$$
\tilde{\eta}_T = \frac{d\tilde{\mathbb{P}}_T}{d\mathbb{P}_T} = \exp\left\{\int_0^T \gamma(u,T)\,dW^T\left(u\right) - \frac{1}{2}\int_0^T \left\|\gamma(u,T)\right\|^2 du\right\},
$$

por el teorema de Girsanov podemos definir un movimiento browniano respecto a la medida $\tilde{\mathbb{P}}_T$ como $\tilde{W}^T\left(t\right) = W^T\left(t\right) - \int_0^t \gamma(u,T)\,du$, $t \in \left[0,T\right]$. Y entonces los diferenciales cumplen

$$
dW^T\left(t\right) = d\tilde{W}^T\left(t\right) - \gamma(t,U,T)\,dt.
$$

Notemos que

$$
\begin{aligned}
J &= \int_t^T \gamma(u,T)\, dW^T(u) - \frac{1}{2}\int_t^T \|\gamma(u,T)\|^2 du \\
&= \int_0^T \gamma(u,T)\, dW^T(u) - \int_0^t \gamma(u,T)\, dW^T(u) - \frac{1}{2}\int_t^T \|\gamma(u,T)\|^2 du, \\
&= \int_0^T \gamma(u,T)\, d\tilde{W}^T(u) + \int_0^T \|\gamma(u,T)\|^2 du \\
&\quad - \int_0^t \gamma(u,T)\, d\tilde{W}^T(u) - \int_0^t \|\gamma(u,T)\|^2 du - \frac{1}{2}\int_t^T \|\gamma(u,T)\|^2 du, \\
&= \int_t^T \gamma(u,T)\, d\tilde{W}^T(u) + \int_0^T \|\gamma(u,T)\|^2 du - \frac{1}{2}\int_t^T \|\gamma(u,T)\|^2 du, \\
&= \int_t^T \gamma(u,T)\, d\tilde{W}^T(u) + \frac{1}{2}\int_t^T \|\gamma(u,T)\|^2 du.
\end{aligned}
$$

Entonces podemos reescribir la dinámica de $F_t(T,U,T)$ en términos de $\tilde{W}^T$ como

$$
F_p(T,U,T) = F_p(t,U,T)\exp\left\{\int_t^T \gamma(u,T)\, d\tilde{W}^T(u) + \frac{1}{2}\int_t^T \|\gamma(u,T)\|^2 du\right\},
$$

donde el término $\tilde{\zeta}(t,T) = \int_t^T \gamma(u,T)\, d\tilde{W}^T(u)$, es una normal independiente de $\mathscr{F}_t$ de parámetros cero y $\upsilon_U^2(t,T)$ bajo la medida $\tilde{\mathbb{P}}_T$.

Resolvemos $J_1$ como

$$
\begin{aligned}
J_1 &= \mathbb{E}^{\mathbb{P}_T}\left[F_p(T,U,T)\, I_D \,|\mathscr{F}_t\right]. \\
&= \mathbb{E}^{\mathbb{P}_T}\left[F_p(t,U,T)\, I_D \exp\left\{\tilde{\zeta}(t,T) + \frac{1}{2}\upsilon_U^2(t,T)\right\} |\mathscr{F}_t\right], \\
&= \mathbb{E}^{\mathbb{P}_T}\left[\frac{p(t,U)}{p(t,T)} I_D \exp\left\{\tilde{\zeta}(t,T) + \frac{1}{2}\upsilon_U^2(t,T)\right\} |\mathscr{F}_t\right], \\
&= \frac{p(t,U)}{p(t,T)}\mathbb{E}^{\mathbb{P}_T}\left[I_D \exp\left\{\tilde{\zeta}(t,T) + \frac{1}{2}\upsilon_U^2(t,T)\right\} |\mathscr{F}_t\right], \\
&= \frac{p(t,U)}{p(t,T)}\mathbb{E}^{\mathbb{P}_T}\left[I_D \tilde{\eta}_T \tilde{\eta}_t^{-1} |\mathscr{F}_t\right],
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&= \frac{p(t,U)}{p(t,T)} \frac{\mathbb{E}^{\mathbb{P}_T}\left[I_D \tilde{\eta}_T \,|\mathscr{F}_t\right]}{\tilde{\eta}_t}, \\
&= \frac{p(t,U)}{p(t,T)} \mathbb{E}^{\tilde{\mathbb{P}}_T}\left[I_D \,|\mathscr{F}_t\right], \\
&= \frac{p(t,U)}{p(t,T)} \tilde{\mathbb{P}}_T\left(D|\mathscr{F}_t\right).
\end{aligned}
$$

De manera análoga a lo desarrollado para el cálculo de $\mathbb{P}_T\left(D|\mathscr{F}_t\right)$, se obtiene que

$$
\tilde{\mathbb{P}}_T\left(D|\mathscr{F}_t\right) = \tilde{\mathbb{P}}_T\left(\left\{\tilde{Y}(t,T) < \ln\left[F_p(t,U,T)\right] - \ln\left[K\right] + \frac{1}{2}\upsilon_U^2(t,T)\right\}\right),
$$

donde $\tilde{Y}(t,T) = -\tilde{\zeta}(t,T)$ es una variable normal de media cero y varianza $\upsilon_U^2(t,T)$. Se tiene entonces que

$$
J_1 = \frac{p(t,U)}{p(t,T)} \Phi\left(\frac{\ln\left[\frac{F_p(t,U,T)}{K}\right] + \frac{1}{2}\upsilon_U^2(t,T)}{\upsilon_U(t,T)}\right).
$$

Sustituyendo los valores obtenidos para $J_1$ y $J_2$ en $C_t(K)$ :

$$
\begin{aligned}
C_t(K) &= p(t,T)\,\mathbb{E}^{\mathbb{P}_T}\left[F_p(T,U,T) I_D |\mathscr{F}_t\right] - K p(t,T)\,\mathbb{E}^{\mathbb{P}_T}\left[I_D |\mathscr{F}_t\right], \\
&= p(t,T)\left(\frac{p(t,U)}{p(t,T)}\right)\Phi\left(\frac{\ln\left[\frac{F_p(t,U,T)}{K}\right] + \frac{1}{2}\upsilon_U^2(t,T)}{\upsilon_U(t,T)}\right) \\
&\quad - K p(t,T)\,\Phi\left(\frac{\ln\left[\frac{F_p(t,U,T)}{K}\right] - \frac{1}{2}\upsilon_U^2(t,T)}{\upsilon_U(t,T)}\right), \\
&= p(t,U)\,\Phi\left(\frac{\ln\left[\frac{F_p(t,U,T)}{K}\right] + \frac{1}{2}\upsilon_U^2(t,T)}{\upsilon_U(t,T)}\right) \\
&\quad - K p(t,T)\,\Phi\left(\frac{\ln\left[\frac{F_p(t,U,T)}{K}\right] - \frac{1}{2}\upsilon_U^2(t,T)}{\upsilon_U(t,T)}\right),
\end{aligned}
\tag{4.21}
$$

donde $\Phi$ es la función de distribución de una variable gaussiana estándar.

Nos interesa una expresión para $C_t(K)$ que dependa explícitamente del proceso de precios del bono; por definición de $F_p(t,U,T)$ :

$$\ln\left[\frac{F_p(t,U,T)}{K}\right] = \ln\left[\frac{p(t,U)}{K}\right] - \ln[p(t,T)],$$

sustituyendo en $(4.21)$ y recordando la definición de $h_1$ y $h_2$ en $(4.20)$ se obtiene el resultado.

□

El resultado anterior es la base para la valuación de bonos con incumplimiento, puesto que la metodología de valuación presentada al inicio del capítulo 4 muestra que la valuación de un bono sujeto a riesgo depende de la valuación de bonos sin incumplimiento, afectada por algunos factores multiplicativos que conciernen al riesgo involucrado.

### 4.2.3. Valuación de opciones sobre bonos cupón cero sujetos a riesgo de crédito

Así como para el caso sin incumplimiento, también existe una fórmula cerrada para la valuación de una opción europea de compra sobre bonos cupón cero sujetos a riesgo de crédito. Sea $K$ el precio de ejercicio de la opción de compra europea y $T$ el tiempo de maduración de la opción. Sea $\tilde{Z}$ un bono cupón cero sujeto a incumplimiento y con tiempo de maduración $U \geq T$. Denotaremos por $\tilde{C}_t(K)$ al valor de la opción en el tiempo $t$, con precio de ejercicio $K$. Sabemos que la valuación libre de arbitraje está dada por

$$\tilde{C}_t(K) = \mathbb{E}^{\mathbb{Q}}\left[(\tilde{p}(T,U)-K)^+ \frac{B(t)}{B(T)} |\mathscr{F}_t\right],$$

por lo que de la ecuación $(4.10)$ podemos reescribir

$$\begin{aligned}
\tilde{C}_t(K) \quad = \quad & \left(1-e^{-(T-t)\lambda_1\mu_1}\right)\mathbb{E}^{\mathbb{Q}}\left[(\delta p_0(T,U)-K)^+ \frac{B(t)}{B(T)} |\mathscr{F}_t\right] \\
& + e^{-(T-t)\lambda_1\mu_1}\mathbb{E}^{\mathbb{Q}}\left[\left(\left(e^{-(T-t)\lambda_1\mu_1} + \delta\left(1-e^{-(T-t)\lambda_1\mu_1}\right)\right)p_0(T,U)-K\right)^+ \frac{B(t)}{B(T)} |\mathscr{F}_t\right]
\end{aligned}$$

donde

$$\mathbb{Q}(\{T > \tau\}) = \left(1-e^{-(T-t)\lambda_1\mu_1}\right). \tag{4.22}$$

Notemos que

$$
\begin{aligned}
\tilde{C}_t(K) &= \delta\left(1-e^{-(T-t)\lambda_1\mu_1}\right)\mathbb{E}^{\mathbb{Q}}\left[\left(p_0(T,U)-\frac{K}{\delta}\right)^+\frac{B(t)}{B(T)}|\mathscr{F}_t\right] \\
&\quad +e^{-(T-t)\lambda_1\mu_1}\left(e^{-(U-T)\lambda_1\mu_1}+\delta\left(1-e^{-(U-T)\lambda_1\mu_1}\right)\right)\times \\
&\quad \times\mathbb{E}^{\mathbb{Q}}\left[\left(p_0(T,U)-\frac{K}{\left(e^{-(U-T)\lambda_1\mu_1}+\delta\left(1-e^{-(U-T)\lambda_1\mu_1}\right)\right)}\right)^+\frac{B(t)}{B(T)}|\mathscr{F}_t\right], \\
&= \delta\left(1-e^{-(T-t)\lambda_1\mu_1}\right)C_t\left(K'\right)+e^{-(T-t)\lambda_1\mu_1}\left(e^{-(U-T)\lambda_1\mu_1}+\delta\left(1-e^{-(U-T)\lambda_1\mu_1}\right)\right)C_t\left(K''\right),
\end{aligned}
$$

donde $K'=K/\delta$,

$$
K''=K/e^{-(T-t)\lambda_1\mu_1}\left(e^{-(U-T)\lambda_1\mu_1}+\delta\left(1-e^{-(U-T)\lambda_1\mu_1}\right)\right),
$$

y $C_t$ es la función definida en (4.19).

## 4.3. Swaps de tasas de interés

A continuación definiremos los componentes de un swap de tasas de interés que serán utilizados en los apartados posteriores.

Consideremos un conjunto finito de fechas $\left\{T_j; j=0,1,2,\ldots,n\right\}$. Por simplicidad, estableceremos que las fechas son equiespaciadas, es decir, $\xi=T_j-T_{j-1}$, para $j=1,2,\ldots,n$. La tasa flotante considerada será la tasa LIBOR spot sobre el intervalo $\left[T_j,T_{j+1}\right]$, denotada por $L\left(T_j\right)$ y definida como

$$
L\left(T_j\right)=\frac{1-p\left(T_j,T_{j+1}\right)}{\xi p\left(T_j,T_{j+1}\right)}.
$$

De la ecuación anterior se deduce que $L\left(T_j\right)$ satisface

$$
\xi L\left(T_j\right)=\frac{1}{p\left(T_j,T_{j+1}\right)}-1. \tag{4.23}
$$

En cada fecha de liquidación $T_j$, $j=1,2,\ldots,n$, el flujo de dinero, desde el punto de vista de quien paga la tasa fija, es $L\left(T_{j-1}\right)\xi N$ y $-\kappa\xi N$, donde $\kappa$ es la tasa fija de interés. Las fechas

$T_j$, $j = 0, 2, \ldots, n-1$, son los tiempos en los cuales se determina la tasa $L\left(T_j\right)$.

### 4.3.1. Valuación de swaps de tasas de interés

De las secciones anteriores, sabemos que el valor en el tiempo $t$ de un derivado se expresa como una esperanza condicional respecto a la medida neutral al riesgo. El valor de un swap forward, denotado por $FS_t(\kappa)$, es igual a

$$FS_t(\kappa) = N\mathbb{E}^{\mathbb{Q}}\left[\sum_{j=1}^{n} \frac{B(t)}{B\left(T_j\right)} \left(L\left(T_{j-1}\right) - \kappa\right) \xi \,|\mathscr{F}_t\right],$$

donde $N$ es el monto principal. La expresión anterior puede resolverse de manera sencilla teniendo en cuenta la expresión para $p(t,T)$ establecida en la ecuación $(3.8)$ y la relación $(4.23)$.

Definiendo $\tilde{\xi} = 1 + \kappa\xi$, reescribimos

$$\begin{aligned}
N^{-1}FS_t(\kappa) &= \sum_{j=1}^{n} \mathbb{E}^{\mathbb{Q}}\left[\frac{B(t)}{B\left(T_j\right)} \left(L\left(T_{j-1}\right) - \kappa\right) \xi \,|\mathscr{F}_t\right], \\
&= \sum_{j=1}^{n} \mathbb{E}^{\mathbb{Q}}\left[\frac{B(t)}{B\left(T_j\right)} \left(p\left(T_{j-1}, T_j\right)^{-1} - \tilde{\xi}\right) |\mathscr{F}_t\right], \\
&= \sum_{j=1}^{n} \mathbb{E}^{\mathbb{Q}}\left[\frac{B(t)}{B\left(T_j\right)} \left(\frac{B\left(T_{j-1}\right)}{B\left(T_{j-1}\right)} p\left(T_{j-1}, T_j\right)^{-1} - \tilde{\xi}\right) |\mathscr{F}_t\right], \\
&= \sum_{j=1}^{n} \left\{\mathbb{E}^{\mathbb{Q}}\left[\frac{B(t)}{B\left(T_{j-1}\right)} \frac{B\left(T_{j-1}\right)}{B\left(T_j\right)} p\left(T_{j-1}, T_j\right)^{-1} |\mathscr{F}_t\right] - \tilde{\xi}\mathbb{E}^{\mathbb{Q}}\left[\frac{B(t)}{B\left(T_j\right)} |\mathscr{F}_t\right]\right\}, \\
&= \sum_{j=1}^{n} \left\{\mathbb{E}^{\mathbb{Q}}\left[\frac{B(t)}{B\left(T_{j-1}\right)} p\left(T_{j-1}, T_j\right)^{-1} \mathbb{E}^{\mathbb{Q}}\left[\frac{B\left(T_{j-1}\right)}{B\left(T_j\right)} |\mathscr{F}_{T_{j-1}}\right] |\mathscr{F}_t\right] - \tilde{\xi} p\left(t, T_j\right)\right\}, \\
&= \sum_{j=1}^{n} \left\{\mathbb{E}^{\mathbb{Q}}\left[\frac{B(t)}{B\left(T_{j-1}\right)} p\left(T_{j-1}, T_j\right)^{-1} p\left(T_{j-1}, T_j\right) |\mathscr{F}_t\right] - \tilde{\xi} p\left(t, T_j\right)\right\}, \\
&= \sum_{j=1}^{n} \left\{\mathbb{E}^{\mathbb{Q}}\left[\frac{B(t)}{B\left(T_{j-1}\right)} |\mathscr{F}_t\right] - \tilde{\xi} p\left(t, T_j\right)\right\},
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \sum_{j=1}^{n} \left\{ p\left(t, T_{j-1}\right) - (1+\kappa\xi)\, p\left(t, T_j\right) \right\}, \\
&= \sum_{j=1}^{n} \left\{ p\left(t, T_{j-1}\right) - p\left(t, T_j\right) - \kappa\xi\, p\left(t, T_j\right) \right\}, \\
&= \sum_{j=1}^{n} \left\{ p\left(t, T_{j-1}\right) - p\left(t, T_j\right) \right\} - \sum_{j=1}^{n} \kappa\xi\, p\left(t, T_j\right), \\
&= p\left(t, T_0\right) - p\left(t, T_n\right) - \sum_{j=1}^{n} \kappa\xi\, p\left(t, T_j\right), \\
&= p\left(t, T_0\right) - \sum_{j=1}^{n} c_j p\left(t, T_j\right),
\end{aligned}
$$

para cada $t \in [0, T_0]$, donde $c_j = \kappa\xi$, $j = 1, 2, \ldots, n-1$ y $c_n = \tilde{\xi}$.
Por tanto,

$$
FS_t\left(\kappa\right) = N \left\{ p\left(t, T_0\right) - \sum_{j=1}^{n} c_j p\left(t, T_j\right) \right\}.
$$

La expresión anterior muestra de manera clara que un swap forward con pagos intermedios es esencialmente un contrato donde se paga un bono con cupones y se recibe en el mismo tiempo un bono cupón cero. Un swap es el caso particular donde $t = T_0$, en este caso, el valor libre de arbitraje de un swap de tasas de interés es

$$
FS_{T_0}\left(\kappa\right) = N \left\{ 1 - \sum_{j=1}^{n} c_j p\left(T_0, T_j\right) \right\}, \tag{4.24}
$$

cuya dependencia sobre el proceso de precios del bono es evidente. El valor de $\kappa$ es aquel que hace el valor del swap cero, es decir $FS_{T_0}\left(\kappa\right) = 0$. Igualando a cero la ecuación (4.24) se obtiene que

$$
\kappa(T_0, n) = \left(1 - p\left(T_0, T_n\right)\right) \left( \xi \sum_{j=1}^{n} p\left(T_0, T_j\right) \right)^{-1}.
$$

En términos simples, un swap de bonos es un contrato donde el inversor escoge vender un bono y en seguida decide comprar otro bono con el producto de la venta con el fin de provechar el actual entorno del mercado. Una de las principales ventajas de la inversión en permutas de bonos es, como se mencionó anteriormente, la anticipación a los cambios de éstos a través de sus tasas en interés asociadas.

### 4.3.2. Valuación de swaps de crédito

La diferencia de los swaps con incumplimiento recae en la especificación del pago sujeto a riesgo. Consideraremos un swap de crédito estándar y estudiaremos su valuación. Un swap de crédito estándar es un acuerdo entre dos partes, **A** y **B**, con las especificaciones siguientes:

→ **B** acuerda hacer un pago a **A** si el incumplimiento ha ocurrido. Si no hay incumplimiento hasta la fecha de madurez en el activo de referencia del swap, un bono en nuestro caso, la contraparte **B** no paga nada.

→ **A** paga una cuota para la protección dado el incumplimiento, denotaremos por $s$ a este pago. Estos pagos se hacen de manera regular, por intervalos hasta el incumplimiento o hasta la fecha de madurez.

El valor del swap es la diferencia entre el pago de **A** y el pago de **B**, los cuales están dados por

$$A(t) = s\mathbb{E}^{\mathbb{Q}}\left[e^{-\int_t^T r(u)du} I_{\{\tau_1 > T\}} \,|\mathscr{F}_t\right]$$

y

$$B(t) = \mathbb{E}^{\mathbb{Q}}\left[e^{-\int_t^{\tau_1} r(u)du} (1-\delta) I_{\{\tau_1 \leq T\}} \,|\mathscr{F}_t\right].$$

Definimos el valor del swap de crédito estándar como $\tilde{F}S_T = B(t) - A(t)$,
Recordemos que en los tiempos $T_1, T_2, \ldots, T_n$ el comprador paga $s\xi$ por cada intervalo $\left[T_{j-1}, T_j\right]$ suponiendo que no hay incumplimiento antes del tiempo $T_j$. Podemos reescribir a $A(t)$ y $B(t)$ como

$$A(t) = s\xi \sum_{j=1}^{n} p\left(T_0, T_j\right)\left(1 - F\left(T_j\right)\right)$$

y

$$B(t) = (1-\delta)\int_{T_0}^{T_n} p(T_0, u) F(du)$$

donde $F(x) = \mathbb{Q}(\tau_1 \leq x) = \left(1 - e^{-(x-t)\lambda_1\mu_1}\right)$. Sustituyendo el valor de $F$ y su densidad exponencial concluimos:

$$\tilde{F}S_T = \lambda_1\mu_1(1-\delta)\int_{T_0}^{T_n} p(T_0,u)\, e^{-(u-t)\lambda_1\mu_1}du - s\xi\sum_{j=1}^{n} p\left(T_0,T_j\right) e^{-\left(T_j-t\right)\lambda_1\mu_1}.$$

La valuación de los swaps de crédito estándar es sencilla, en el sentido de que la fórmula de valuación es fácil de deducir y queda expresada en términos conocidos. En textos generales no se especifica la distribución de los tiempos de bancarrota de los bonos, por lo que en este caso han sido de gran ayuda suponer una distribución exponencial para $\tau_1$ y asumir las mismas probabilidades de incumplimiento para la clase de bonos sujetos a incumplimiento.

Pueden definirse otros contratos swaps sujetos a riesgo, por ejemplo, cuando el riesgo proviene de la contraparte. En particular, la valuación es mucho más compleja cuando estudiamos swaps de tasas de interés con riesgo crediticio de la contraparte, es decir, cuando existe la posibilidad de que una de las partes de un contrato financiero sea incapaz de cumplir con las obligaciones financieras contraídas. Para este tipo de casos se requiere de más herramientas matemáticas, no siempre se asegura la obtención de formas cerradas y la relación con los precios de los bonos no es tan directa.

# 5. Conclusiones

El presente trabajo tuvo como objetivo principal presentar metodologías, analíticamente tratables, para la valuación de opciones europeas sobre bonos cupón cero con posibilidad de incumplimiento, swaps de tasas de interés y swaps de crédito. Las diferentes metodologías existentes para la valuación de derivados brindan una amplia rama de caminos para cada derivado financiero. Sin embargo, no cualquier metodología conlleva a fórmulas de valuación cerradas para derivados sobre bonos cupón cero en particular.

Para valuar derivados sobre bonos con incumplimiento fue necesario recurrir a una metodología de valuación para éstos bonos. La metodología, propuesta por Jarrow & Turnbull(1995), se basa en la construcción de una estructura terminal estocástica para los bonos con incumplimiento, partiendo de una estructura dada de las tasas de interés instantáneas asociadas a un bono sin incumplimiento. Sin embargo, esta metodología requiere de un estudio previo sobre un mercado financiero en el cual los bonos cupón cero sin incumplimientos y los instrumentos financieros relacionados a éste, estén bien definidos y en condiciones pertinentes para la existencia de una única medida martingala equivalente. Para este estudio, se definieron los objetos $p(t,T)$, $B(t)$, $f(t,T)$ y $r(t)$, que fueron objetos clave para el desarrollo de las metodologías utilizadas. Vimos como distintas evoluciones para la tasa de interés instantánea introducen modelos distintos que inducen expresiones distintas para el proceso $p(t,T)$. No obstante, dadas las desventajas que este tipo de modelos pueden involucrar, el modelo utilizado fue el de HJM presentado en el capítulo 3. Este modelo es la base para la construcción de la estructura de los bonos cupón cero sujetos a incumplimiento, pues las dinámicas de $p(t,T)$ y $f(t,T)$ en las cuales se basa esta construcción son las planteadas en HJM. Este modelo es importante, y su utilización en este trabajo se justifica con el hecho de su naturaleza exógena y tratabilidad analítica.

Para la valuación de los bonos con incumplimientos, se definió la razón de pago en incumplimiento $e(t)$ y un pago hipotético representando el precio de un bono cupón cero sin incumplimiento. Con esto, se estudió por separado a ambos mercados, el de los bonos sin incumplimiento y el de los bonos con incumplimiento. Para este último se impusieron condiciones para existencia de una única medida martingala equivalente a la medida objetiva de mercado. Debido a la propiedad de incumplimiento de los bonos, se introdujo el concepto de tiempo de bancarrota. Para este tiempo, en donde el inversor deja de contar con el capital necesario, se supuso por simplicidad una distribución exponencial. Asumir esta distribución es importante, dado que el objetivo se planteó como la obtención de fórmulas cerradas, y la distribución exponencial resulta ser muy gentil cuando se trata de cálculos de esperanzas condicionales. Los bonos con incumplimiento involucrados en esta construcción, se consideraron con la misma probabilidad de incumplimiento sin importar su tiempo de madurez; y el tiempo de bancarrota se asume con la misma regla de pago asumida como una constante exógena.

Para la valuación de opciones sobre bonos con incumplimiento se desarrolló primero la valuación para el caso sin incumplimiento. La metodología usada fue la de medidas forward, que utiliza como numerario a un bono cupón cero y no a la cuenta bancaria, permitiendo que el precio forward de un activo financiero sea una martingala bajo la medida forward correspondiente. Se utiliza el precio forward de un bono cupón cero como proceso auxiliar, cuya dinámica es la clave para el cálculo de las esperanzas bajo la medida forward. Con ésto, la valuación de opciones de compra europea sobre bonos con incumplimiento se volvió sencilla, al mezclar lo obtenido por la metodología de medidas forward con la fórmula de valuación para un bono sujeto a incumplimiento.

En el apartado de contratos swaps no fue necesaria la implementación de metodologías externas. Fue suficiente hacer uso de la definición de la tasa LIBOR spot, que tiene una dependencia directa con el proceso de precios de un bono sin incumplimiento, lo cual permite que la esperanza bajo la medida neutral al riesgo sea fácil de resolver con herramientas básicas de cálculo estocástico y medibilidad. Lo obtenido en este caso fue interesante, ya que a pesar de resolver el proceso valor de un swap de tasas de interés, la expresión final de valuación puede asociarse a un contrato en el cual se paga un bono con cupones y se recibe un bono cupón cero. Por otro lado, para un swap de crédito estándar sobre un bono cupón cero con incumplimiento escrito por un tercero, se recurrió a las propiedades distribucionales del tiempo de bancarrota para obtener una fórmula más concisa de valuación.

En general se hicieron suposiciones necesarias para que fuera posible obtener expresiones cerradas, tales como la distribución del tiempo de bancarrota y todas las suposiciones hechas a las dinámicas relacionadas a un bono con incumplimiento. Asimismo, se habló desde el capítulo 2 de la existencia de una medida martingala equivalente a la medida objetiva, la cual es primordial al hablar de valuación de derivados. Sin embargo no conocemos directamente esta medida, pero tampoco es un problema, porque conocemos de ella lo suficiente para hacer los desarrollos necesarios y su existencia se sustenta dentro la construcción de los mercados para ambos tipos de bonos.

# Referencias


[1] Ammann, M. (2013). Credit risk valuation: methods, models, and applications. Springer Science & Business Media.

[2] Beyna, I. (2013). Interest Rate Derivatives: Valuation, Calibration and Sensitivity Analysis (Vol. 666). Springer Science & Business Media.

[3] Björk, T. (2004). Arbitrage theory in continuous time. Oxford university press.

[4] Bluhm, C., Overbeck, L., & Wagner, C. (2003). An introduction to credit risk modeling. CRC Press.

[5] Brigo, D., & Mercurio, F. (2006). Interest rate models-theory and practice. Springer Science & Business Media.

[6] Delbaen, F., & Schachermayer, W. (2006). The mathematics of arbitrage. Springer Science & Business Media.

[7] Duarte, C. Tasa Libor y autorregulación bancaria. Ola Financiera, 5(13).

[8] Duffie, D., & Singleton, K. J. (2012). Credit Risk: Pricing, Measurement, and Management: Pricing, Measurement, and Management. Princeton University Press.

[9] Jarrow, R. A., & Turnbull, S. M. (1995). Pricing derivatives on financial securities subject to credit risk. The journal of finance, 50(1), 53-85.

[10] Karatzas, I. (1991). Brownian motion and stochastic calculus (Vol. 113). Springer Science & Business Media.

[11] Kariya, T., & Liu, R. Y. (2003). Options, Futures and Other Derivatives. In Asset Pricing (pp. 9-26). Springer US.

[12] Klebaner, F. C. (2005). Introduction to stochastic calculus with applications (Vol. 57). London: Imperial College Press.

[13] Lovelock, D., Mendel, M., & Wright, A. L. (2007). An introduction to the mathematics of money: saving and investing. Springer Science & Business Media.

[14] Musiela, M., & Rutkowski, M. (2006). Martingale methods in financial modelling (Vol. 36). Springer Science & Business Media.

[15] Pelsser, A. (2000). Efficient methods for valuing interest rate derivatives. Springer Science & Business Media.

[16] Rogers, L. C. G. (1995). Which model for term-structure of interest rates should one use?. IMA Volumes in Mathematics and Its Applications, 65, 93-93.

[17] Schönbucher, P. (2000). A Libor market model with default risk. Available at SSRN 261051.

[18] Zhu, Y., Wu, X., Chern, I. L., & Sun, Z. Z. (2004). Derivative securities and difference methods. Berlin: Springer.