CIMAT

CENTRO DE INVESTIGACIÓN EN
MATEMÁTICAS, A.C.

TIEMPO LOCAL, EXCURSIONES Y EXTENSIÓN BI-DIMENSIONAL DE LA IDENTIDAD DE BOUGEROL

T E S I S

QUE PARA OBTENER EL GRADO DE:
MAESTRO EN CIENCIAS
CON ESPECIALIDAD EN
PROBABILIDAD Y ESTADÍSTICA
P R E S E N T A:

RODRIGO GACHUZ ATITLÁN

DIRECTOR DE TESIS:
Dr. Juan Carlos Pardo Millán

2014

Hoja de Datos del Jurado

I. **Datos del alumno**
Gachuz
Atitlán
Rodrigo.
Centro de Investigación en Matemáticas, A.C.
Maestría en Ciencias con Especialidad en Probabilidad y Estadística.

II. **Datos del presidente**
Dr.
Víctor Manuel
Rivero
Mercado.
Centro de Investigación en Matemáticas, A.C.

III. **Datos del secretario**
Dr.
José Luis Ángel
Pérez
Garmendia
Instituto de Investigaciones en Matemáticas Aplicadas y en Sistemas, U.N.A.M.

IV. **Datos del Vocal (asesor)**
Dr.
Juan Carlos
Pardo
Millán
Centro de Investigación en Matemáticas, A.C.

V. **Datos del trabajo escrito**
Extensión Bi-dimensional de la identidad de Bougerol.
113 págs.
2014.

A Sandra.

Agradecimientos

A Sandra, por los momentos más bellos que he vivido, por el conocimiento más profundo compartido.

A Eugenia, Guillermo, Arturo y Guillermo, por el transitar infinito en familia.

A mi asesor, Dr. Juan Carlos Pardo Millán, quien desde que nos conocimos ha sido una guía incasable en lo académico y en la vida, no sería quien soy sin ti.

A mis sinodales, los Doctores Víctor Pérez-Abreu, José Luis Pérez y Víctor Rivero, gracias por su tiempo y consejos a lo largo del desarrollo del presente trabajo.

Al Consejo Nacional de Ciencia y Tecnología, por la beca que durante dos años me dio la posibilidad de llevar a cabo los estudios de maestría.

Índice general

Introducción

El objetivo principal del presente trabajo consiste en estudiar un ejemplo particular en donde se haga uso de las técnicas asociadas a la descomposición trayectorial de un movimiento browniano, dando como resultado una extensión de la identidad clásica de Bougerol [1]. La importancia del estudio de éste tipo de identidades se da tanto en el campo teórico como en el de las aplicaciones, por ejemplo, se caracteriza de manera explícita la distribución de algunas funcionales exponenciales del movimiento browniano, donde éstos juegan un papel importante en ciertos modelos financieros. Con este fin, hemos seleccionado el artículo [1] de Bertoin, Dufresne y Yor en donde se hace una extensión a la célebre identidad de Bougerol.
Recordemos dicha identidad: consideremos un movimiento browniano estándar, $(B_s, s \geq 0)$, entonces, la identidad de Bougerol nos dice que para $t > 0$ fijo se tiene que

$$\sinh(B_t) \overset{(ley)}{=} \int_0^t \exp(\beta_s)\, d\gamma_s \overset{(ley)}{=} \widetilde{\gamma}_{\int_0^t \exp(2\beta_s)\, ds}, \tag{1}$$

donde $(\beta_u, u \geq 0), (\gamma_u, u \geq 0)$ y $(\widetilde{\gamma}_u, u \geq 0)$ denotan movimientos brownianos independientes.

Debido a que trabajaremos con la identidad de Bougerol consideramos que es ilustrativo recordar la demostración de (1), en contraste, las técnicas que serán utilizadas en la prueba de la extensión serán muy distintas.
Por un lado, notemos que la ecuación diferencial estocástica (EDE),

$$X_t = x + \int_0^t \sqrt{1 + X_s^2}\, dB_s + \frac{1}{2} \int_0^t X_s\, ds, \tag{2}$$

admite una única solución fuerte para cada $x \in \mathbb{R}$, ésto se debe a que sus coeficientes satisfacen la condición de Lipschitz. Además, por un lado tenemos que el proceso $(\sinh(B_s), s \geq 0)$ satisface (2) ya que al aplicar la fórmula de Itō tenemos que

$$\sinh(B_t) = \int_0^t \cosh(B_s)\, dB_s + \frac{1}{2}\int_0^t \sinh(Bs)\, ds,$$

y $\cosh^2(x) = 1 + \sinh^2(x)$ para toda $x \in \mathbb{R}$, por lo que

$$\sinh(B_t) = \int_0^t \sqrt{1 + \sinh^2(B_s)}\, dB_s + \frac{1}{2}\int_0^t \sinh(Bs)\, ds.$$

Mientras que por otro lado, para $x \in \mathbb{R}$ fijo, el proceso

$$Y_t = \exp(\beta_t)\left(x + \int_0^t \exp(-\beta_s)\, d\gamma_s\right), \quad t \geq 0,$$

resuelve también (2) para cierto movimiento browniano, ya que al considerar a $Y_t = W_t \cdot Z_t$ con $W_t = \exp(\beta_t)$ y $Z_t = x + \int_0^t \exp(-\beta_s)\, d\gamma_s$ para $t \geq 0$ y aplicar la fórmula de Itō llegamos a que

$$\begin{aligned} Y_t &= x + \int_0^t Y_s\, d\beta_s + \frac{1}{2}\int_0^t Y_s\, ds + \gamma_t \\ &= x + \int_0^t \sqrt{1 + Y_s^2}\left(\frac{d\gamma_s + Y_s\, d\beta_s}{\sqrt{1 + Y_s^2}}\right) + \frac{1}{2}\int_0^t Y_s\, ds. \end{aligned}$$

Definiendo $C_t = \int_0^t \frac{d\gamma_s}{\sqrt{1 + Y_s^2}} + \int_0^t \frac{Y_s\, d\beta_s}{\sqrt{1 + Y_s^2}}$ para $t \geq 0$, obtenemos que $\langle C \rangle_t = t$. Debido al teorema de caracterización de Lévy concluimos que B es un movimiento browniano estándar y por lo tanto que Y satisface (2), entonces

$$(Y_t, t \geq 0) \overset{(ley)}{=} (\sinh(B_t), t \geq 0).$$

Ahora, tomando $x = 0$ y haciendo el cambio de variable $s = t - u$ podemos reescribir a Y de la siguiente manera

$$\begin{aligned} Y_t &= \int_0^t \exp(\beta_t - \beta_s)\, d\gamma_s \\ &= -\int_t^0 \exp(\beta_t - \beta_{t-s})\, d(\gamma_t - \gamma_{t-s}), \end{aligned} \tag{3}$$

donde al aplicar la propiedad de retorno de tiempo para el movimiento browniano se garantiza la igualdad en ley entre (3) y $\int_0^t \exp(\beta_s)\, d\gamma_s$.

Finalmente, notemos que $\int_0^t \exp(\beta_s)\, d\gamma_s$ es una martingala local que empieza en cero y cuya variación está dada por

$$\left\langle \int_0^{\cdot} \exp(\beta_s)\, d\gamma_s \right\rangle_t = \int_0^t \exp(2\beta_s)\, ds, \quad \text{para todo } t \geq 0,$$

así, debido al teorema de Dubins-Scharz existe un movimiento browniano $\widetilde{\gamma}$ tal que

$$\int_0^t \exp(\beta_s)\, d\gamma_s \overset{(ley)}{=} \widetilde{\gamma}_{\int_0^t \exp(2\beta)\, ds},$$

por lo que, para $t > 0$ fijo, hemos demostrado que

$$\sinh(B_t) \overset{(ley)}{=} \int_0^t \exp(\beta_s)\, d\gamma_s \overset{(ley)}{=} \widetilde{\gamma}_{\int_0^t \exp(2\beta_s)\, ds},$$

donde $\widetilde{\gamma}$ es independiente de β.

Debido a lo anterior, el objetivo principal se traduce en dar una prueba detallada del siguiente teorema:

Teorema. *Para t fijo, las siguiente variables aleatorias dos-dimensionales son idénticamente distribuidas:*

$$(\sinh(B_t), \sinh(L_t)) \overset{(ley)}{=} (\beta_{A_t}, \exp(-B_t)\lambda_{A_t}) \overset{(ley)}{=} (\exp(-B_t)\beta_{A_t}, \lambda_{A_t}),$$

donde $(L_u, u \geq 0)$ *es el tiempo local en cero de B,* $(\beta_u, u \geq 0)$ *es un movimiento browniano estándar, con tiempo local en* 0, $(\lambda_u, u \geq 0)$, *y* β *es independiente de B.*

Observamos que a diferencia de la identidad (1), su extensión agrega información sobre el tiempo local en cero de un movimiento browniano. De manera intuitiva, el tiempo local en cero del movimiento browniano, mide la cantidad de tiempo que éste permanece en el estado cero. Como veremos más adelante, la prueba de la extensión de Bougerol no sólo necesita del concepto de tiempo local sino también el de la descomposición trayectorial de un movimiento browniano en términos del inverso de dicho objeto, en otras palabras, en términos de las excursiones brownianas fuera del estado cero. Al estudiar las excursiones brownianas aparecen identidades en ley relacionadas con éstas y los procesos de Bessel. Estos últimos resultan fundamentales en la prueba de la extensión de (1).

El presente trabajo tiene como meta ser autocontenido, por esta razón, asumiendo que el lector cuenta con los conocimientos básicos de un primer curso de cálculo estocástico para procesos continuos, es necesario un estudio detallado del tiempo local para semimartingalas continuas, el cual se encuentra en el capítulo 1.

Una aplicación natural del concepto de tiempo local es la de extender las soluciones fuertes de una ecuación diferencial estocástica a funciones que no necesariamente sean Lipschitz. En particular esto permitirá definir al proceso de Bessel como solución fuerte de cierto tipo de ecuación diferencial estocástica, estos procesos están íntimamente relacionados con la extensión de (1). El capítulo 2 contiene la explicación detallada de estos resultados.

Fue necesario incluir un capítulo sobre la teoría de excursiones, detallada en el capítulo 3, ya que algunos de los argumentos más importantes en la prueba del teorema principal están dados en términos de excursiones.

Finalmente en el capítulo 4 se prueba una extensión bi-dimiensional de la identidad de Bougerol, así como algunas de sus consecuencias. Esperamos que al final del mismo, el lector tenga una visión del potencial de las técnicas descritas en los primeros capítulos al ver su uso de manera concreta en la prueba del teorema principal.

Capítulo 1

Tiempo Local para Semimartingalas.

Éste capítulo está divido en dos secciones, la primera se concentra en la definición y algunas propiedades de los tiempos locales para semimartingalas locales, mientras que la segunda se enfoca en propiedades específicas para el caso en el que se tiene un movimiento browniano estándar, se concluye con la aplicación de algunas propiedades de los tiempos locales para la obtención de la llamada *ley del arco seno de Lévy*.

1.1. Definición y primeras propiedades.

De un curso previo de cálculo estocástico se sabe la relación que existe entre las funciones de clase C^2 y las semimartingalas continuas la cual está dada mediante la fórmula de Itô, una pregunta natural que surge, es: ¿Puede existir una generalización para una clases de funciones más generales?. A continuación se responde la pregunta de manera *afirmativa* y se presentan resultados que muestran para qué familia de funciones se puede extender la idea de Itō y la identidad explícita que existe entre ésta y las semimartingalas continuas.

A partir de este momento y en lo sucesivo consideraremos que f es una función convexa, resultados auxiliares concernientes a funciones convexas están expuestos en el apéndice (B) . El siguiente resultado nos provee de una generalización de la fórmula de Itō.

Teorema 1.1. *Si X es una semimartingala continua, existe un proceso creciente continuo A^f tal que*

$$f(X_t) = f(X_0) + \int_0^t f'_-(X_s)\,dX_s + \frac{1}{2}A^f,$$

donde f'_- es la derivada por la izquierda de f.

Demostración. Si $f \in C^2$, entonces se reduce al caso de la fórmula de Itō y $A^f = \int_0^t f''(X_s)d\langle X_s, X_s\rangle_s$.
Sea $j \in C^\infty$ positiva con soporte compacto en $(-\infty, 0]$ tal que $\int_{-\infty}^0 j(y)\,dy = 1$ y sea $f_n(x) = n\int_{-\infty}^0 f(x+y)j(ny)\,dy$. Ya que f es convexa, se tiene que es localmente acotada, además, f_n está bien definida para todo n y, cuando n tiende a infinito, f_n converge puntualmente a f y f'_n converge crecientemente a f'_-, lo anterior es consecuencia de la compacidad del soporte de j, la convexidad de f y la aplicación del teorema de convergencia dominada. Para cada n, por la fórmula de Itō tenemos que

$$f_n(X_t) = f_n(X_0) + \int_0^t f'_n(X_s)\,dX_s + \frac{1}{2}A^{f_n},$$

y $f_n(X_t)$, $f_n(X_0)$ convergen, respectivamente, a $f(X_t)$ y $f(X_0)$. Además, podemos suponer que X está acotado, ya que de lo contrario usaríamos un argumento de localización y la prueba sería análoga, entonces, bajo este supuesto $f'_-(X_s)$ también está acotada. Por el teorema de convergencia dominada para integrales estocásticas $\int_0^t f'_n(X_s)\,dX_s$ converge uniformemente en probabilidad sobre todo intervalo acotado a $\int_0^t f'_-(X_s)\,dX_s$. De lo anterior llegamos a que A^{f_n} converge también al proceso A^f que, como resulta ser límite de procesos crecientes, resulta ser un proceso creciente y

$$f(X_t) = f(X_0) + \int_0^t f'_-(X_s)\,dX_s + \frac{1}{2}A^f.$$

El proceso A^f puede ser escogido de manera tal que casi seguramente sea continuo.

□

Una vez hecha la extensión de la fórmula de Itō para funciones convexas es posible calcular explícitamente A^f para algunos casos especiales, como por ejemplo $|x|$, $x^+ = x \vee 0$ y $x^- = -(x \wedge 0)$. Para este fin debemos de tomar en cuenta que si $f(x) = |x|$ se tiene que $f'_-(x) = \mathrm{sgn}(x)$, donde $\mathrm{sgn}(x) = 1$ si $x > 0$ y $\mathrm{sgn}(x) = -1$ si $x \leq 0$.

Teorema 1.2 (Fórmula de Tanaka). *Para todo $a \in \mathbb{R}$ existe un proceso creciente continuo, L^a, llamado* el tiempo local *de X en a tal que,*

$$
\begin{aligned}
|X_t - a| &= |X_0 - a| + \int_0^t \mathrm{sgn}(X_s - a)\, dX_s + L_t^a \\
(X_t - a)^+ &= (X_0 - a)^+ + \int_0^t \mathbb{1}_{\{X_s > a\}}\, dX_s + \frac{1}{2} L_t^a \\
(X_t - a)^- &= (X_0 - a)^- - \int_0^t \mathbb{1}_{\{X_s \leq a\}}\, dX_s + \frac{1}{2} L_t^a .
\end{aligned}
$$

En particular, $|X - a|$, $(X - a)^+$ y $(X - a)^-$ son semimartingalas.

Demostración. Para $f(x) = (x - a)^+$ es claro que la derivada por la izquierda está dada por $f'_-(x) = \mathbb{1}_{(a,\infty)}$, entonces debido al teorema (1.1) tenemos que

$$
(X_t - a)^+ = (X_0 - a)^+ + \int_0^t \mathbb{1}_{\{X_s > a\}}\, dX_s + \frac{1}{2} A_t^+ ,
$$

de la misma manera, para $f(x) = (x - a)^-$ la derivada por la izquierda es $f'_-(x) = -\mathbb{1}_{(-\infty,a)}$, por lo que

$$
(X_t - a)^- = (X_0 - a)^- - \int_0^t \mathbb{1}_{\{X_s \leq a\}}\, dX_s + \frac{1}{2} A_t^- .
$$

Así, restando la última igualdad de la primera obtenemos

$$
X_t = X_0 + \int_0^t dX_s + \frac{1}{2}(A_t^+ - A_t^-),
$$

por lo que de la fórmula de Itō llegamos a que $A_t^+ = A_t^-$ c.s. y definimos $L_t^a = A_t^+$. Finalmente, sumando las primera dos identidades de la prueba obtenemos la primera fórmula del teorema. □

Recordando que el proceso L_t^a es un proceso creciente podemos definir una medida aleatoria dL_t^a en $\mathbb{R}_+$, y el siguiente resultado nos dice que, hasta cierto punto, podemos interpretarla como *tiempo* que pasa la semimartingala X en a, lo anterior por la relación del conjunto $\{t : X_t = a\}$ con dL_t^a.

Proposición 1.1. *La medida dL_t^a tiene carga c.s. en la cerradura del conjunto $\{t : X_t = a\}$.*

Demostración. Aplicando la fórmula de Itō a la semimartingala $|X - a|$ obtenemos,

$$(X_t - a)^2 = (X_0 - a)^2 + 2\int_0^t |X_s - a|\, d(|X_s - a|) + \langle |X - a|, |X - a|\rangle_t$$

y usando la primera fórmula del teorema (1.2) llegamos a que la expresión anterior es igual a

$$(X_0 - a)^2 + \int_0^t |X_s - a| \operatorname{sgn}(X_s - a)\, dX_s + 2\int_0^t |X_s - a|\, dL_s^a + \langle X, X\rangle_t.$$

Si comparamos la igualdad anterior con la expresión, obtenida también al aplicar la fórmula de itō a la semimartingala $X - a$,

$$(X_0 - a)^2 + 2\int_0^t (X_s - a)\, dX_s + \langle X, X\rangle_t$$

notamos que $\int_0^t |X_s - a|\, dL_s^a = 0$ c.s. ya que para cada $\omega \in \Omega$, $L_t^a(\omega)$ tiene asociada una medida μ_ω tal que

$$\begin{aligned} 0 &= \int_0^t |X(\omega)_s - a|\, dL_s^a(\omega) \\ &= \int_0^t |X(\omega)_s - a| \mu_\omega(ds) \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \int_0^t |X(\omega)_s - a| \mathbb{1}_{\{1/n < |X_s - a| \leq 1/n-1\}} \mu_\omega(ds) \\ &\geq \frac{1}{n} \mu_\omega(\{s : \frac{1}{n} < |X_s - a| \leq \frac{1}{n-1}\}) \quad \text{para todo } n, \end{aligned}$$

es decir, para todo $\omega \in \Omega$ se tiene que $\mu_\omega(\{s : X_s \neq a\}) = 0$. □

Hasta cierto punto, los resultados anteriores nos han ayudado a caracterizar el tiempo local de una semimartingala continua, en ese sentido el siguiente teorema enuncia otra identidad que relaciona las funciones convexas aplicadas a una semimartingala continua con el tiempo local de la misma, así como a la medida de Radon asociada generada por las funciones convexas. Recordemos que si f es convexa su segunda derivada, f'', en el sentido de distribuciones es una medida positiva.

Teorema 1.3 (Fórmula de Itō-Tanaka). *Si f es la diferencia de dos funciones convexas y X es una semimartingala continua, entonces*

$$f(X_t) = f(X_0) + \int_0^t f'_-(X_s)\,dX_s + \frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}} L_t^a f''(da).$$

En particular, $f(X)$ es semimartingala.

Demostración. Es suficiente probar la afirmación para f convexa.
En cada subconjunto compacto de $\mathbb{R}$, f es igual a una función g tal que g'' tiene soporte compacto. De este modo deteniendo a X cuando sale por primera vez de un subconjunto compacto, es suficiente probar el resultado cuando f'' tiene soporte compacto, en cuyo caso existen constantes α, β tal que

$$f(x) = \alpha x + \beta + \frac{1}{2}\int |x-a| f''(da).$$

Debido a lo anterior y a la fórmula de Tanaka podemos escribir

$$\begin{aligned} f(X_t) &= \alpha X_t + \beta + \frac{1}{2}\int |X_t - a| f''(da) \\ &= \alpha(X_t - X_0) + f(X_0) + \int \frac{1}{2}\left(\int_0^t \operatorname{sgn}(X_s - a)\,dX_s + L_t^a\right) f''(da) \end{aligned}$$

donde, debido al teorema de Fubini y a (B.2) del apéndice se tiene que

$$\frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}}\int_0^t \operatorname{sgn}(X_s - a)\,dX_s f''(da) = \int_0^t f'_-(X_s)\,dX_s - \alpha(X_t - X_0),$$

por lo que finalmente

$$f(X_t) = f(X_0) + \int_0^t f'_-(X_s)\,dX_s + \frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}} L_t^a f''(da).$$

□

Corolario 1.1 (Fórmula de tiempo de ocupación). *Existe un conjunto nulo fuera del cual*

$$\int_0^t \Phi(X_s)\,d\langle X, X\rangle_s = \int_{-\infty}^{\infty} \Phi(a) L_t^a\,da$$

para todo t y y toda función positiva Φ medible.

Demostración. Si $\Phi = f''$ con $f \in C^2$, la formula se satisface para todo t, como resultado de comparar las fórmulas de Itō y Tanaka-Itō, fuera de un conjunto nulo Γ_Φ. Considerando un conjunto numerable $(\Phi_n)_{n\geq 1}$, de dichas funciones, denso en $C_0(\mathbb{R})$ con respecto a la norma del supremo se sigue que fuera del conjunto nulo $\Gamma = \bigcup_n \Gamma_{\Phi_n}$, la fórmula se satisface simultáneamente para todo t y toda Φ en $C_0(\mathbb{R})$. Finalmente, debido al teorema de clases monótonas, fuera de Γ podemos extender el resultado para todo t y toda función positiva Φ medible. □

Notemos en particular que para el movimiento browniano y la función $\Phi = \mathbb{1}_A$ el corolario anterior adquiere un significado más intuitivo y deja claro el por qué de su nombre, ya que $\int_0^t \mathbb{1}_A(B_s)\,ds$ es exactamente el tiempo total que el movimiento browniano pasa en el conjunto A.

Cuando se estudia el movimiento browniano, en algún momento se demuestra la existencia de una modificación con trayectorias continuas casi seguramente, esto se prueba haciendo uso del criterio de continuidad de Kolmogorov, así que ahora presentamos un resultado análogo para el tiempo local de una semimartingala continua.

Teorema 1.4. *Para toda semimartingala continua X, existe una modificación del proceso $\{L_t^a : a \in \mathbb{R}, t \in \mathbb{R}_+\}$ tal que el mapeo $(a, t) \to L_t^a$ es continuo en t y cadlag en a c.s. Además, si $X = M + V$, entonces*

$$L_t^a - L_t^{a^-} = 2\int_0^t \mathbb{1}_{\{X_s=a\}}\,dV_s = 2\int_0^t \mathbb{1}_{\{X_s=a\}}\,dX_s.$$

Así, en particular, si X es una martingala local, existe una modificación bicontinua de la familia L^a de tiempos locales.

Demostración. De la fórmula de Tanaka

$$L_t^a = 2\left[(X_t - a)^+ - (X_0 - a)^+ - \int_0^t \mathbb{1}_{\{X_s>a\}}\,dM_s - \int_0^t \mathbb{1}_{\{X_s>a\}}\,dV_s\right].$$

Usando el criterio de continuidad de Kolmogorov (A.1) con el espacio de Banach $C([0, t], \mathbb{R})$, probaremos primero que la integral estocástica

$$\hat{M}_t^a = \int_0^t \mathbb{1}_{\{X_s>a\}}\,dM_s$$

posee una modificación continua. Debido a las desigualdades de Burkholder-Davis-Gundy (A.2), la fórmula de ocupación y la desigualdad de Hölder tenemos para $k \geq 1$

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}\left(\sup_t |\hat{M}_t^a - \hat{M}_t^b|^{2k}\right) &\leq C_k \mathbb{E}\left(\left(\int_0^\infty \mathbb{1}_{\{a<X_s\leq b\}}\, d\langle M, M\rangle_s\right)^k\right) \\
&= C_k \mathbb{E}\left(\left(\int_a^b L_\infty^x\, dx\right)^k\right) \\
&= C_k (b-a)^k \mathbb{E}\left(\left(\frac{1}{b-a}\int_a^b L_\infty^x\, dx\right)^k\right) \\
&\leq C_k (b-a)^k \mathbb{E}\left(\frac{1}{b-a}\int_a^b (L_\infty^x)^k\, dx\right).
\end{aligned}$$

Debido al teorema de Fubini el último termino es menor o igual a

$$C_k (b-a)^k \sup_x \mathbb{E}\left((L_\infty^x)^k\right).$$

Ahora, $L_t^a = 2\left[(X_t - a)^+ - (X_0 - a)^+ - \int_0^t \mathbb{1}_{\{X_s>a\}}\, dX_s\right]$, y notemos que $|(X_t - x)^+ - (X_0 - x)^+| \leq |X_t - X_0|$, por lo que se siguen las siguientes desigualdades para todo t

$$\begin{aligned}
|L_t^x|^k &\leq 2^{2k}\left[|X_t - X_0|^k + \left|\int_0^t \mathbb{1}_{\{X_s>x\}}\, dX_s\right|^k\right] \\
&\leq 2^{3k}\left[|X_t - X_0|^k + \left|\int_0^t \mathbb{1}_{\{X_s>x\}}\, dM_s\right|^k + \left|\int_0^t \mathbb{1}_{\{X_s>x\}}\, dV_s\right|^k\right] \\
&\leq 2^{3k}\left[\sup_t |X_t - X_0|^k + \sup_t\left|\int_0^t \mathbb{1}_{\{X_s>x\}}\, dM_s\right|^k + \left(\int_0^\infty |dV_s|\right)^k\right],
\end{aligned}$$

llegando a que

$$|L_\infty^x|^k \leq 2^{3k}\left[\sup_t |X_t - X_0|^k + \sup_t\left|\int_0^t \mathbb{1}_{\{X_s>x\}}\, dM_s\right|^k + \left(\int_0^\infty |dV_s|\right)^k\right],$$

y de nuevo por las desigualdades de BDG llegamos a que existe una constante universal d_k tal que

$$\mathbb{E}\left(|L_t^x|^k\right) \leq d_k \mathbb{E}\left(\left[\sup_t |X_t - X_0|^k + \left(\int_0^\infty |dV_s|\right)^k + \langle M, M\rangle_\infty^{k/2}\right]\right).$$

En el lado derecho de la expresión anterior no hay dependencia de x, entonces, si el lado derecho fuera finito para alguna $k \geq 1$ habríamos terminado la prueba, en caso contrario, podemos parar a X en los tiempos

$$T_n = \operatorname{ínf}\left\{ t : \sup_t |X_t - X_0|^k + \left(\int_0^\infty |dV_s| \right)^k + \langle M, M \rangle_\infty^{k/2} \geq n \right\},$$

así, la martingala $(\hat{M}^a)^{T_n}$ tiene modificación bicontinua, y por un argumento de localización también la tiene $\hat{M}^a$.
Para finalizar la prueba, debemos probar que

$$\hat{V}_t^a = \int_0^t \mathbb{1}_{\{X_s > a\}} \, dV_s$$

es cadlag en a y continua en t conjuntamente. Pero, por el teorema de convergencia dominada tenemos que

$$\hat{V}_t^{a^-} = \lim_{b \uparrow a} \int_0^t \mathbb{1}_{\{X_s > b\}} \, dV_s = \int_0^t \mathbb{1}_{\{X_s \geq a\}} \, dV_s,$$

de donde se sigue que

$$L_t^a - L_t^{a^-} = 2\left(\hat{V}_t^{a^-} - \hat{V}_t^a \right) = 2 \int_0^t \mathbb{1}_{\{X_s = a\}} \, dV_s.$$

Analogamente

$$\hat{V}_t^{a^+} = \lim_{b \downarrow a} \int_0^t \mathbb{1}_{\{X_s > b\}} \, dV_s = \int_0^t \mathbb{1}_{\{X_s > a\}} \, dV_s,$$

por lo que $L_t^a = L_t^{a^+}$.
Finalmente, la fórmula del tiempo de ocupación implica que

$$\int_0^t \mathbb{1}_{\{X_s = a\}} \, d\langle M, M \rangle_s = \int_0^t \mathbb{1}_{\{X_s = a\}} \, d\langle X, X \rangle_s = 0$$

así que $\int_0^t \mathbb{1}_{\{X_s = a\}} \, dM_s = 0$, lo cual termina la prueba.

□

De ahora en adelante consideraremos la versión del tiempo local exhibida en el teorema anterior. Para esta versión tenemos el siguiente corolario el cual nos da otra razón para llamar al proceso L^a tiempo local.

Corolario 1.2. *Si X es una semimartingala continua, entonces, casi seguramente*

$$L_t^a(X) = \lim_{\varepsilon \downarrow 0} \frac{1}{\varepsilon} \int_0^t \mathbb{1}_{[a,a+\varepsilon)}(X_s)\, d\langle X, X\rangle_s$$

para todo a y t, y si M es una martingala local continua

$$L_t^a(M) = \lim_{\varepsilon \downarrow 0} \frac{1}{2\varepsilon} \int_0^t \mathbb{1}_{(a-\varepsilon,a+\varepsilon)}(M_s)\, d\langle M, M\rangle_s .$$

Demostración. Si X es una semimartingala continua, de la fórmula de ocupación se sigue

$$\begin{aligned} \frac{1}{\varepsilon} \int_0^t \mathbb{1}_{[a,a+\varepsilon)(X_s)}\, d\langle X, X\rangle_s &= \frac{1}{\varepsilon} \int_a^{a+\varepsilon} L_t^a\, da \\ &= \frac{1}{\varepsilon} \left(\int_{-\infty}^{a+\varepsilon} L_t^a\, da - \int_{-\infty}^{a} L_t^a\, da \right), \end{aligned}$$

por lo que si definimos $F(x) = \int_{-\infty}^x L_t^a\, da$, de la continuidad por la derecha de $L^a(X)$ y debido al teorema fundamental del cálculo se tiene que

$$\lim_{\varepsilon \downarrow 0} \frac{F(a+\varepsilon) - F(a)}{\varepsilon} = F'(a) = L_t^a(X).$$

Analogamente, si M es martingala local continua y F definida como arriba, por la bicontinuidad de $L^a(M)$ llegamos a

$$\lim_{\varepsilon \downarrow 0} \frac{1}{2} \frac{F(a+\varepsilon) - F(a) + (F(a) - F(a-\varepsilon))}{\varepsilon} = F'(a) = L_t^a(M).$$

□

Notemos que el resultado anterior nos permite observar que el tiempo local en cero, L^0, para el movimiento browniano es adaptado con respecto a la completación de $\sigma(|B_s|, s \leq t)$.

Para finalizar la sección y recordando el teorema de Dubins-Schwarz tenemos el siguiente resultado que lo relaciona con el tiempo local de una martingala local continua.

Proposición 1.2. *Sea M una martingala local continua tal que $M_0 = 0$ y $\lim_{t\to\infty} \langle M, M\rangle_t = \infty$ casi seguramente, entonces existe un movimiento browniano $\beta = (\beta_t, t \geq 0)$ tal que*

$$\int_0^t f(M_s)\, d\, \langle M, M\rangle_s = \int_{-\infty}^{\infty} f(a) L^a_{\langle M,M\rangle_t}(\beta)\, da,$$

donde f es una función medible positiva. Además, deducir que casi seguramente $L^a_t(M) = L^a_{\langle M,M\rangle_t}(\beta)$ para todo a y todo t.

Demostración. Ya que f es una función medible y positiva, podemos usar la fórmula de tiempos de ocupación. Entonces, por un lado tenemos que

$$\int_0^t f(M_s)\, d\, \langle M, M\rangle_s = \int_{-\infty}^{\infty} f(a) L^a_t\, da,$$

mientras que por otro lado notemos que M satisface las condiciones requeridas del teorema de Dubins-Schwarz, por lo existe un m.b. β tal que $M_t = \beta_{\langle M,M\rangle_t}$. Debido a lo anterior tenemos que

$$\begin{aligned}\int_0^t f(M_s)\, d\, \langle M, M\rangle_s &= \int_0^t f(\beta_{\langle M,M\rangle_s})\, d\, \left\langle \beta_{\langle M,M\rangle}, \beta_{\langle M,M\rangle}\right\rangle_s \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} f(a) L^a_{\langle M,M\rangle_t}(\beta)\, da.\end{aligned}$$

Finalmente, del corolario anterior se sigue que c.s.

$$L^a_t(M) = L^a_{\langle M,M\rangle_t}(\beta) \quad \text{para todo } a \text{ y todo } t.$$

□

1.2. El tiempo local del movimiento browniano.

Hemos estudiado la definición y algunas propiedades del tiempo local para semimartingalas en un contexto general, así, el objetivo de ésta sección es profundizar en propiedades particulares del tiempo local en cero del movimiento browniano estándar, por lo mismo, de aquí en adelante y para simplificar la notación consideraremos, $L_t^0(B) = L_t$. En éste sentido veamos las siguientes propiedades.

Proposición 1.3. *Sea B el movimiento browniano estándar. Casi seguramente, se tiene*

$$L_t^0(B^2) = 0 \qquad \textit{para todo } t \geq 0$$

Demostración. Debido a la fórmula de Itô se sabe que

$$|B_t^2| = B_t^2 = 2\int_0^t B_s \, dB_s + t,$$

por otro lado, de la fórmula de Tanaka se tiene que

$$|B_s^2| = 2\int_0^t \operatorname{sgn}(B_s^2) B_s \, dB_s + \int_0^t \operatorname{sgn}(B_s^2) \, ds + L_t(B^2),$$

por lo que al comparar las últimas dos expresiones y observar que para todo t

$$\int_0^t (1 - \operatorname{sgn}(B_s^2)) B_s \, dB_s = 0, \quad \text{c.s.}$$

se obtiene finalmente que c.s.

$$L_t^0(B^2) = 0 \qquad \text{para todo } t \geq 0.$$

□

Proposición 1.4. *Sea B el movimiento browniano estándar y $a \geq 0$. Entonces se tiene que casi seguramente*

$$L_t^a(|B|) = L_t^a(B) + L_t^{-a}(B) \qquad \textit{para todo } t \geq 0.$$

En particular $L^0(|B|) = 2L^0(B)$.

Demostración. Recordemos que debido a la fórmula de Tanaka tenemos que $|B|$ es una martingala local que se puede escribir como

$$|B_t| = \int_0^t \operatorname{sgn}(B_s)\, dB_s + L_t^0(B)$$

y cuya variación está dada por $\langle |B|, |B| \rangle_t = t$. Entonces, debido a la aproximación para el tiempo local descrita en el corolario (1.2) tenemos que

$$\begin{aligned} L_t^a(|B|) &= \lim_{\varepsilon \downarrow 0} \frac{1}{2\varepsilon} \int_0^t \mathbb{1}_{\{a-\varepsilon, a+\varepsilon\}}(|B_s|)\, ds \\ &= \lim_{\varepsilon \downarrow 0} \frac{1}{2\varepsilon} \left(\int_0^t \mathbb{1}_{\{a-\varepsilon, a+\varepsilon\}}(B_s)\, ds + \int_0^t \mathbb{1}_{\{a-\varepsilon, a+\varepsilon\}}(-B_s)\, ds \right) \\ &= L_t^a(B) + L_t^a(-B). \end{aligned}$$

Finalmente notemos que $L_t^a(-B) = L_t^{-a}(B)$ ya que $\mathbb{1}_{\{a-\varepsilon, a+\varepsilon\}}(-B_s) = \mathbb{1}_{\{-a-\varepsilon, -a+\varepsilon\}}(B_s)$, por lo tanto

$$L_t^a(|B|) = L_t^a(B) + L_t^{-a}(B) \qquad \text{para todo } t \geq 0,$$

y en particular $L^0(|B|) = 2L^0(B)$. □

Resulta natural pensar en la interpretación del resultado anterior, $|B|$ es un m.b. reflejado en cero y por lo mismo el tiempo local en cero resulta ser dos veces el tiempo local del m.b. estándar en cero, lo anterior debido a su simetría.

Se ha demostrado que $L_t^a(M)$ es un proceso bi-continuo cuando M es una martingala local continua, en particular $L_t^a(B)$ lo es, también hemos visto cómo calcular el tiempo local mediante una aproximación, por lo que ahora nos gustaría poder caracterizar de alguna forma su distribución. Para ello haremos uso del lema de Skorokhod y la fórmula de Tanaka como se muestra a continuación:

Lema 1.1 (Skorokhod)**.** *Sea y una función continua definida en $[0, \infty)$ tal que $y(0) \geq 0$. Entonces existe una única pareja (z, a) de funciones definidas en $[0, \infty)$ tal que*

i) $z = y + a$,

ii) *z es positiva,*

iii) *a es creciente, continua, $a_0 = 0$, y la correspondiente medida da_s satisface*

$$\int_{\mathbb{R}_+} \mathbb{1}_{\{z(s)>0\}}\, da_s = 0.$$

Además la función a está dada por

$$a(t) = \sup_{0\leq s\leq t} (-y(s) \vee 0).$$

Demostración. Primero observamos que el par (z, a) definido por

$$a(t) = \sup_{0\leq s\leq t} (-y(s) \vee 0), \qquad z = y + a$$

satisface las tres propiedades del enunciado.
Para probar la unicidad de la pareja (a, z) vemos que si $(\tilde{a}, \tilde{z})$ es otra pareja que satisface (i)-(iii), entonces $z - \tilde{z} = a - \tilde{a}$ es un proceso de variación acotada y podemos integrar por partes para obtener

$$0 \leq (z - \tilde{z})^2(t) = 2\int_0^t (z - \tilde{z})\, d(a_s - \tilde{a}_s),$$

donde de la propiedad (iii), la última igualdad resulta igual a

$$-2\int_0^t \tilde{z}(s)\, da_s - 2\int_0^t z(s)\, da_s$$

y finalmente por las propiedades (ii) y (iii) se tiene que la expresión anterior es menor que cero, llegando a una contradicción y por ende la unicidad buscada. □

Ahora estamos en posición de encontrar la ley de L,

Corolario 1.3. *El proceso $\beta_t = \int_0^t \mathrm{sgn}(B_s)\, dB_s$ es un m.b. estándar y $\mathscr{F}_t^{\beta} = \mathscr{F}_t^{|B|}$. Además, $L_t = sup_{s\leq t}(-\beta_s)$.*

Demostración. Por como está definido β es claro que es una martingala local que inicia en cero y su variación está dada por

$$\langle \beta, \beta \rangle_t = \int_0^t (\mathrm{sgn}(B_s)^2)\, ds = t,$$

así, debido al teorema de caracterización de Lévy concluimos que β es un m.b. estándar.
Para la segunda afirmación, de la fórmula de Tanaka

$$|B_t| = \beta_t + L_t$$

y del lema (1.1) llegamos a que $L_t = \sup_{s\leq t}(-\beta_s)$, de donde es claro que L_t y β_t son $\mathscr{F}_t^{\beta}$-medibles y así obtenemos que $\mathscr{F}_t^{|B|} \subset \mathscr{F}_t^{\beta}$. Por otro lado, del corolario (1.2) sabemos que

$$L_t = \lim_{\varepsilon\downarrow 0} \frac{1}{2\epsilon}\int_0^t \mathbb{1}_{(-\varepsilon,\varepsilon)}(B_s)\, ds = \lim_{\varepsilon\downarrow 0} \frac{1}{2\epsilon}\int_0^t \mathbb{1}_{\{|B_s|<\varepsilon\}}\, ds,$$

de donde se sigue la contención $\mathscr{F}_t^{L} \subset \mathscr{F}_t^{|B|}$, y nuevamente por la fórmula de Tanaka vemos que $\beta_t = |B_t| - L_t$. Por lo tanto $\mathscr{F}_t^{\beta} \subset \mathscr{F}_t^{|B|}$ y queda concluida la prueba. □

Utilizando los dos resultados anteriores obtenemos el siguiente teorema, el cual nos provee de un identidad en ley en donde intervienen el m.b. estándar, su tiempo local en cero, y el proceso de máximos.

Teorema 1.5 (Identidad de Lévy). *Los proceso bi-dimensionales* $(S_t - B_t, S_t)$ *y* $(|B_t|, L_t)$ *tienen la misma ley, donde* $S_t = \sup_{s\leq t} B_s$.

Demostración. Por un lado tenemos que debido a la fórmula de Tanaka $|B_t| = \beta_t + L_t$ mientras que por otro lado reescribiendo, $S_t - B_t = -B_t + S_t$, se tiene por el lema (1.1) que la pareja asociada a $-B$ es $(S - B, S)$ y análogamente, $(|B|, L_t)$ es la pareja asociada a β.
Finalmente, de manera determinista debido al lema de Skorokhod se tiene que $L_t = \sup_{s\leq t}(-\beta)$ y ya que $-B = \beta$ en ley, entonces

$$L_t \overset{\mathcal{L}}{=} \sup_{s\leq t} B_s = S_t \qquad \text{y}$$

$$S_t - B_t \overset{\mathcal{L}}{=} \beta + L_t = |B_t|,$$

es decir,

$$(S_t - B_t, S_t) \overset{\mathcal{L}}{=} (|B_t|, L_t).$$

□

Hasta el momento hemos analizado algunas identidades relacionadas con el tiempo local en cero del movimiento browniano, así como la ley del mismo, recordemos también que en la sección anterior estudiamos una forma de aproximar el tiempo local de una martingala local continua, de esa forma podemos aproximar el tiempo local en cero del m.b. estándar. El siguiente resultado muestra otra forma de aproximar al tiempo local, sólo que ésta tiene relación con el número de veces que el m.b. cruza por debajo de cierto nivel fijo a, para éste fin definimos los siguientes tiempos de paro y enunciamos el teorema que los relaciona con la aproximación mencionada.
Para $\varepsilon > 0$ definamos

$$\sigma_0^\varepsilon = 0, \qquad \tau_0^\varepsilon = \text{ínf}\{t > 0 : B_t = a + \varepsilon\},$$

$$\sigma_n^\varepsilon = \text{ínf}\{t > \tau_{n-1}^\varepsilon : B_t = a\}, \qquad \tau_n^\varepsilon\{t > \sigma_n^\varepsilon : B_t = a + \varepsilon\}.$$

Sea

$$d_\varepsilon(t) = \text{máx}\{n : \sigma_n^\varepsilon \leq t\}$$

el número de veces que el movimiento browniano cruza del nivel $a + \varepsilon$ al nivel a antes del tiempo t.

Teorema 1.6. *Para todo $t > 0$ y todo $a \in \mathbb{R}$,*

$$\lim_{\varepsilon \to 0} 2\varepsilon d_\varepsilon(t) = L_t^a \quad c.s.$$

Demostración. Sin perdida de generalidad, consideremos $a = 0$, y por simplicidad escribiremos τ_n y σ_n en lugar de τ_n^ε y σ_n^ε respectivamente. Usando la fórmula de Tanaka tenemos que

$$B_{t\wedge\tau_n}^+ - B_{t\wedge\sigma_n}^+ = \int_{t\wedge\sigma_n}^{t\wedge\tau_n} \mathbb{1}_{\{B_s>0\}}\, dB_s + \frac{1}{2}(L_{t\wedge\tau_n} - L_{t\wedge\sigma_n}).$$

Veamos que se satisface la identidad, $L_{t\wedge\tau_n} - L_{t\wedge\sigma_n} = L_{t\wedge\sigma_{n+1}} - L_{t\wedge\sigma_n}$. De la definición de τ_n y σ_n se sigue que B no se anula en el intervalo $[\tau_n, \sigma_{n+1})$, además $B_{\sigma_n} = 0$, entonces debido a la fórmula de Tanaka se tiene la identidad propuesta ya que

$$\begin{aligned}
|B_{\sigma_{n+1}}| &= \int_0^{\sigma_{n+1}} \text{sgn}(B_s)\, dB_s + L_{\sigma_{n+1}} \\
&= \int_0^{\tau_n} \text{sgn}(B_s)\, dB_s + B_{\sigma_{n+1}} - B_{\tau_n} + L_{\sigma_{n+1}} \\
&= -L_{\tau_n} + L_{\sigma_{n+1}}.
\end{aligned}$$

Si ahora definimos $X_s(\varepsilon) = \sum_{n\geq 1} \mathbb{1}_{[\sigma_n,\tau_n)}(s)\mathbb{1}_{(0,\varepsilon]}(B_s)$, debido a la última identidad llegamos a

$$\sum_{n=1}^{\infty}(B^+_{t\wedge\tau_n} - B^+_{t\wedge\sigma_n}) = \int_0^t X_s(\varepsilon)\, dB_s + \frac{1}{2}L_t.$$

Notemos que en el conjunto $\{\tau_n \leq t\}$, $B^+_{t\wedge\tau_n} - B^+_{t\wedge\sigma_n} = \varepsilon$, además, si consideramos a $n(t) = \text{ínf}\{n : \tau_n > t\}$ el lado izquierdo de la última expresión es igual a $\varepsilon d_\varepsilon(t) + u(\varepsilon)$ donde $0 \leq u(\varepsilon) = B^+_t - B_{\sigma_{n(t)}\wedge t} \leq \varepsilon$, por lo que

$$\varepsilon d_\varepsilon(t) \leq \sum_{n=1}^{\infty}(B^+_{t\wedge\tau_n} - B^+_{t\wedge\sigma_n}) \leq \varepsilon(d_\varepsilon(t) + 1),$$

es decir,

$$\varepsilon d_\varepsilon(t) \leq \int_0^t X_s(\varepsilon)\, dB_s + \frac{1}{2}L_t \leq \varepsilon(d_\varepsilon(t) + 1).$$

De la expresión de arriba se deduce que

$$\left|\varepsilon d_\varepsilon(t) - \frac{1}{2}L_t\right| \leq \left|\int_0^t X_s(\varepsilon)\, dB_s\right| + \varepsilon.$$

Sea $p \geq 1$, de las desigualdades de BDG (A.2) obtenemos

$$\mathbb{E}\left(\sup_t \left|\int_0^t X_s(\varepsilon)\, dB_s\right|^p\right) \leq C_p \mathbb{E}\left(\left(\int_0^\infty X_s^2(\varepsilon)\, ds\right)^{p/2}\right), \tag{1.1}$$

entonces

$$\mathbb{E}\left(\sup_t \left|\varepsilon d_\varepsilon(t) - \frac{1}{2}L_t\right|^p\right) \leq C_p \mathbb{E}\left(\left(\int_0^\infty X_s^2(\varepsilon)\, ds\right)^{p/2}\right) + \varepsilon,$$

y ya que $X(\varepsilon)$ converge de manera acotada al cero, aplicando el teorema de convergencia dominada llegamos a

$$\lim_{\varepsilon\to 0} \mathbb{E}\left(\sup_t \left|\varepsilon d_\varepsilon(t) - \frac{1}{2}L_t\right|^p\right) = 0.$$

Ahora, para ver que la convergencia se satisface c.s. consideremos $p = 2$ en (1.1) y notemos que $X_s^2(\varepsilon) = X_s(\varepsilon) \leq \mathbb{1}_{(0,\varepsilon]}(B_s)$, lo cual implica

$$\mathbb{E}\left(X_s^2(\varepsilon)\right) \leq \mathbb{P}\left(0 < B_s \leq \varepsilon\right) \leq \frac{\varepsilon}{\sqrt{2\pi s}}.$$

Por lo tanto

$$\mathbb{E}\left(\left(\int_0^t X_s(\varepsilon)\,dB_s\right)^2\right) \leq C_2 \int_0^t \frac{\varepsilon}{\sqrt{2\pi s}}\,ds = \frac{\sqrt{2}C_2\sqrt{t}\varepsilon}{\sqrt{\pi}}$$

y por ende

$$\mathbb{E}\left((2\varepsilon d_\varepsilon(t) - L_t)^2\right) \leq K\varepsilon,$$

donde K es una constante positiva.
Sea $\varepsilon = \varepsilon_n = n^{-4}$, de la desigualdad de Markov se tiene

$$\mathbb{P}\left(|2\varepsilon_n d_{\varepsilon_n}(t) - L_t| \geq n^{-1}\right) \leq \frac{K}{n^2}.$$

Debido a lema de Borel-Cantelli, vemos que $|2\varepsilon_n d_{\varepsilon_n}(t) - L_t| < n^{-1}$ casi seguramente para todo n suficientemente grande.
Sea $\varepsilon \in [\varepsilon_{n+1}, \varepsilon_n]$. Como $\varepsilon \mapsto d_\varepsilon(t)$ es decreciente, tenemos que

$$2\varepsilon d_\varepsilon(t) \geq 2\varepsilon_{n+1} d_{\varepsilon_n}(t) \geq \frac{\varepsilon_{n+1}}{\varepsilon_n}(L_t - n^{-1}),$$

y

$$2\varepsilon d_\varepsilon(t) \leq 2\varepsilon_n d_{\varepsilon_{n+1}}(t) \leq \frac{\varepsilon_n}{\varepsilon_{n+1}}(L_t - (n+1)^{-1}).$$

Lo cual nos permite concluir que $\lim_{\varepsilon\to 0} 2\varepsilon d_\varepsilon(t) = L_t$ casi seguramente.

$\square$

Con el objetivo final, de ésta sección, de probar la ley del arco seno para el m.b. primero debemos estudiar algunas identidades de conjuntos en relación con el soporte de le medida dL_t, denotado por Σ. Llamamos (τ_t) al *cambio de tiempo* asociado con L_s, es decir

$$\tau_t = \inf\{s > 0 : L_s > t\},$$

notemos que $\tau_t < \infty$ c.s. ya que $\limsup_t B_t = \infty$ c.s. por lo que

$$\mathbb{P}(S_\infty = \infty) = 1$$

y del teorema (1.5) se sigue que $\mathbb{P}(L_\infty = \infty) = 1$.

Definamos también el tiempo del primer cero después de $t \geq 0$ como

$$d_t = \inf\{s > t : B_s = 0\},$$

y sea

$$\mathscr{O}(\omega) = \bigcup_{s\geq 0} (\tau_{s^-}(\omega), \tau_s(\omega)).$$

Los conjuntos $(\tau_{s^-}(\omega), \tau_s(\omega))$ son vacíos a menos que el tiempo local L tenga un tramo constante en el nivel s y este tramo resultaría precisamente $[\tau_{s^-}(\omega), \tau_s(\omega)]$. Entonces los conjuntos $(\tau_{s^-}(\omega), \tau_s(\omega))$ son ajenos dos a dos y $\mathscr{O}(\omega)$ es una unión numerable ya que (τ_t) es un proceso creciente y por ende tiene a lo más una cantidad numerable de discontinuidades, lo anterior debido a que cada discontinuidad genera intervalos abiertos ajenos y por una inyección con los racionales se sigue la afirmación.

Teorema 1.7. *Los siguientes tres conjuntos*

i) $Z(\omega) := \{t \geq 0 : B_t(\omega) = 0\}$,

ii) $\mathscr{O}(\omega)^c$,

iii) el soporte $\Sigma(\omega)$ *de la medida* $dL_t(\omega)$

son iguales para casi toda ω.

Demostración. Sea $A = \bigcup_{i\in J} A_i$ un abierto de $\mathbb{R}_+$. Debido a lo discutido anteriormente, tenemos que un conjunto abierto tiene medida, dL_t, igual a cero si y sólo si L es constante en cada uno de sus componentes (A_i). Así, el conjunto $\mathscr{O}(\omega)$ resulta ser el abierto más grande de medida cero, es decir, $\mathscr{O}(\omega)^c = \Sigma(\omega)$.
De la proposición (1.1) sabemos que $\Sigma(\omega) \subset Z(\omega)$ c.s. Para probar la otra contención, observemos primero que $L_t > 0$ c.s. para todo $t > 0$ ya que L tiene la misma ley que S y sabemos que c.s. el m.b. es positivo instantáneamente saliendo del cero, además, de la última afirmación y la fórmula de Tanaka deducimos que $\tau_0 = 0$ c.s. Ahora, ya que d_t es un tiempo de paro y $B_{d_t} = 0$ la fórmula de Tanaka implica que

$$\begin{aligned}
|B_{d_t+u}| &= \int_0^{d_t+u} \operatorname{sgn}(B_s)\, dB_s + L_{d_t+u} \\
&= \int_0^{d_t} \operatorname{sgn}(B_s)\, dB_s + \int_{d_t}^{d_t+u} \operatorname{sgn}(B_s)\, dB_s + L_{d_t+u} \\
&= \int_{d_t}^{d_t+u} \operatorname{sgn}(B_s)\, dB_s + L_{d_t+u} - L_{d_t},
\end{aligned}$$

y al aplicar un cambio de variable, la última expresión nos dice que $L_{d_t+s} - L_{d_t}, s \geq 0$, es el tiempo local en cero del m.b. $B_{d_t+s}, s \geq 0$, y por lo tanto $L_{d_t+s} - L_{d_t} > 0$ c.s. para todo $s > 0$. Así llegamos a que para todo t fijo, el punto $d_t(\omega)$ esta en $\Sigma(\omega)$ para casi todo ω y, en consecuencia, para casi todo ω el punto $d_r(\omega)$ está en $\Sigma(\omega)$ para todo $r \in \mathbb{Q}_+$.
Sea $s \in Z(\omega)$ e I un intervalo abierto tal que $s \in I$. Sabemos que $Z(\omega)$ es cerrado con interior vacío, entonces, ya que $Z(\omega)$ tiene interior vacío, existe $x < s$ en I tal que x no está en $Z(\omega)$, ahora, como $Z(\omega)^c$ es abierto existe una bola centrada, V, en x con radio r tal que $V_r(x) \subset Z(\omega)^c$, por lo que existe $q \in \mathbb{Q}_+ \cap I \cap V_r(x)$ y por lo tanto $q \notin Z(\omega)$. Así $d_q \leq s$ y como el razonamiento anterior es válido para todo intervalo abierto I, existe una sucesión $(q_n)_{n\geq 1} \subseteq \mathbb{Q}_+$ tal que $d_{q_n} \leq s$ y $d_{q_n} \to s$, $n \to \infty$, recordando que por definición $\Sigma(\omega)$ es cerrado, concluimos que $s \in \Sigma(\omega)$ y queda finalizada la demostración. □

Derivado del teorema anterior tenemos el siguiente corolario.

Corolario 1.4. *Casi seguramente, para todo $t \in Z$ tenemos que $t = \tau_s$ ó $t = \tau_{s^-}$.*

Demostración. Sea $t \in Z(\omega) \setminus \{0\}$. Sólo existen dos posibilidades; si $L_{t+\varepsilon} - L_t > 0$ para todo ε, entonces t sería un punto de crecimiento, es decir, $t = \text{ínf}\{u : L_u > L_t\}$ y por lo tanto $t = \tau_s$ donde $s := L_t$. La segunda posibilidad es el caso en el cual L es constante en algún intervalo $[t, t+\varepsilon]$, por lo que $L_t > L_{t-\gamma}$ para todo $\gamma > 0$, lo que implica que $t = \text{ínf}\{u : L_u \geq L_t\}$, es decir, $t = \tau_{s^-}$ donde $s = L_t$. □

Definamos ahora los siguientes elementos para un m.b. estándar,

$$A_t^+ = \int_0^t \mathbb{1}_{\{B_s>0\}} ds, \quad A_t^- = \int_0^t \mathbb{1}_{\{B_s<0\}} ds$$

y a sus respectivos cambios de tiempo,

$$\alpha_t^+ = \text{ínf}\{s \geq 0 : A_s^+ > t\}, \quad \alpha_t^- = \text{ínf}\{s \geq 0 : A_s^- > t\}.$$

Proposición 1.5. *Sea B un m.b. estándar, A^+, A^-, α^+ y α^- definidos como arriba. Entonces existen dos m.b. independientes β^+ y β^- tales que $\frac{1}{2}L_{\alpha_t^+} = \sup_{s\leq t}(-\beta_s^+)$ y $\frac{1}{2}L_{\alpha_t^-} = \sup_{s\leq t}(\beta_s^-)$.*
Además, $(B^+_{\alpha_t^+}, t \geq 0)$ y $(B^-_{\alpha_t^-}, t \geq 0)$ son dos m.b. reflejados independientes.

Demostración. Notemos que A^+ y A^- son respectivamente la variación de las martingalas locales

$$M_t^+ = \int_0^t \mathbb{1}_{\{B_s>0\}}\, dB_s, \quad M_t^- = M_t^+ = \int_0^t \mathbb{1}_{\{B_s>0\}}\, dB_s,$$

de donde se sigue que $\langle M^+, M^- \rangle = 0$, además, tanto M^+ como M^- inician en cero c.s. y $M_\infty^{+,-} = \infty$, por lo que debido al teorema de Knight existen dos m.b. independientes β^+, β^- tales que $\beta_t^+ = M_{\alpha_t^+}^+$ y $\beta_t^- = M_{\alpha_t^-}^+$ y así, por la definición del tiempo local L de B tenemos que

$$B_{\alpha_t^+}^+ = \beta_t^+ + \frac{1}{2} L_{\alpha_t^+}, \quad B_{\alpha_t^-}^- = -\beta_t^- + \frac{1}{2} L_{\alpha_t^-},$$

es decir, $(B_{\alpha_t^+}^+, t \geq 0)$ y $(B_{\alpha_t^-}^-, t \geq 0)$ son dos m.b. reflejados independientes ya que, respectivamente, son función de β^+ y β^-.

Finalmente del lema (1.1), de manera determinista llegamos a que

$$\frac{1}{2} L_{\alpha_t^+} = \sup_{s \leq t} (-\beta_s^+),$$

reescribiendo y por la simetría de β tenemos que

$$\begin{aligned} B_{\alpha_t^+}^+ = \beta_t^+ + \frac{1}{2} L_{\alpha_t^+} &= -(-\beta_t^+) + \sup_{s \leq t} (-\beta_s^+) \\ &\stackrel{\mathcal{L}}{=} -B_t + S_t. \end{aligned}$$

Por lo tanto debido al teorema (1.5) concluimos que $(B_{\alpha^+}^+, \frac{1}{2} L_{\alpha^+})$ tiene la misma ley que $(|B|, L)$. Análogamente tenemos que

$$\frac{1}{2} L_{\alpha_t^-} = \sup_{s \leq t} (\beta_s^-)$$

y que $(B_{\alpha^-}^-, \frac{1}{2} L_{\alpha^-})$ tiene la misma ley que $(|B|, L)$.

□

Recordemos que una variable aleatoria X tiene la ley del arco seno si su densidad tiene la forma

$$\mathbb{P}\,(X \in dx) = \frac{1}{\pi\sqrt{x(1-x)}} \mathbb{1}_{(0,1)}(x),$$

más aún, la v.a. X es equivalente en ley a las siguientes transformaciones de variables aleatorias normales así como de una uniforme

$$X \overset{\mathcal{L}}{=} \frac{N^2}{N^2 + \widetilde{N}^2} \overset{\mathcal{L}}{=} \frac{\frac{1}{N^2}}{\frac{1}{N^2} + \frac{1}{\widetilde{N}^2}} \overset{\mathcal{L}}{=} \cos^2(\theta),$$

con $N, \widetilde{N}$ variables con distribución normal estándar y θ variable uniforme en el intervalo $[0, 2\pi]$.

Antes de enunciar el resultado concerniente a la ley del arco seno asociada al m.b. revisemos un resultado relacionado con las leyes del primer instante en el que el m.b. toca el nivel uno así como la del tiempo del último cero del m.b. antes de que ocurra una unidad de tiempo.

Proposición 1.6. *Sea $T_1 = \text{ínf}\{s > 0 : B_s = 1\}$, entonces T_1 es igual en ley a $1/N^2$, con N una v.a. normal estándar. Además, $g_1 = \sup\{t < 1 : B_t = 0\}$ tiene la ley del arco seno.*

Demostración. Por la propiedad de scaling del m.b. se sigue que $S_t \overset{\mathcal{L}}{=} \sqrt{t} S_1$, recordando la igualdad de conjuntos $\{T_a > t\} = \{S_t < a\}$, $a \geq 0$ y el principio de reflexión vemos que

$$\mathbb{P}(T_1 > t) = \mathbb{P}\left(S_1 < t^{-1/2}\right) = \mathbb{P}\left(|B_1| < t^{t^{-1/2}}\right)$$

de donde se sigue el resultado.
Recordemos que $d_t = \text{ínf}\{s > t : B_s = 0\}$, es decir, d_t es tiempo aleatorio del primer cero del m.b. después del tiempo t y notemos que $\{g_1 < s\} = \{d_s > 1\}$. También consideremos al m.b. estándar definido por $\widehat{B}_t = B_{t+s} - B_s$, $t \geq 0$ y $s < 0$ fijo y observemos que mediante un cambio de variable llegamos a

$$d_s \overset{\mathcal{L}}{=} s + \text{ínf}\{r > 0 : \widehat{B}_r = -B_s\} = s + \widehat{T}_{-B_s}.$$

Nuevamente por la propiedad de scaling, ahora aplicada a $\widehat{T}$, vemos que $\widehat{T}_{-B_s} \overset{\mathcal{L}}{=} B_s^2 \widehat{T}_1$, ésto junto con los hechos $T_1 \overset{\mathcal{L}}{=} \widehat{T}_1$ y la independencia entre $\widehat{B}_t$ con B_r para todo $r \leq s$ y $t \geq 0$ nos lleva a la siguiente cadena de igualdades

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(g_1 < s) &= \mathbb{P}(d_s > 1)\\ &= \mathbb{P}\left(s + B_s^2 \widehat{T}_1 > 1\right)\\ &= \mathbb{P}\left(\frac{1-s}{B_s^2} < \widehat{T}_1\right)\\ &= \mathbb{P}\left(\frac{1-s}{sN^2} < \frac{1}{\widehat{N}^2}\right),\end{aligned}$$

de donde se sigue que

$$\mathbb{P}(g_1 < s) = \mathbb{P}\left(\frac{\frac{1}{N^2}}{\frac{1}{N^2} + \frac{1}{\widehat{N}^2}} < s\right),$$

con $N, \widehat{N}$ v.a. independiente normales estándar, es decir g_1 tiene la ley del arco seno. □

Teorema 1.8. *La ley de A_1^+ es la ley arco seno en $[0,1]$, donde*

$$A_t^+ = \int_0^t \mathbb{1}_{\{B_s > 0\}} ds, \quad t \geq 0.$$

Demostración. Para $t > 0$ fijo, veamos que $A^-_{\alpha_t^+} = A^-_{\tau_{L_{\alpha_t^+}}}$. Notemos que $\tau_{L_s} \geq s$ ya que L es un proceso creciente, es decir, para todo $r \leq s$ $L_r \leq L_s$, así, para r tal que $L_r > L_s$ te tiene que $r > s$ y por definición de ínfimo se tiene que $\tau_{L_s} \geq s$. Ahora, si $\tau_{L_s} = s$ resulta que s es un punto de crecimiento ya que para todo $r > s$, $L_r > L_s$, además, claramente la igualdad es válida para $s = \alpha_t^+$. Si $\tau_{L_s} > s$ entonces $L_{s+\varepsilon} = L_s$ para $\varepsilon = \tau_{L_s} - s > 0$. En este caso el m.b. no se anula en (s, τ_{L_s}), ésto debido a que para todo $r \in (s, \tau_{L_s})$, L_r es constante , es decir $(s, \tau_{L_s}) \nsubseteq \Sigma = Z$.

Veamos el caso $s = \alpha_t^+$, si $\tau_{L_{\alpha_t^+}} > \alpha_t^+$ entonces B no se anula en $(\alpha_t^+, \tau_{L_{\alpha_t^+}})$. Supongamos que $B_r < 0$ para todo $r \in (\alpha_t^+, \tau_{L_{\alpha_t^+}})$, entonces A_r^+ es constante, digamos c, para todo $r \in [\alpha_t^+, \tau_{L_{\alpha_t^+}})$ y existe una sucesión $(r_n)_{n\geq 1} \subseteq (\alpha_t^+, \tau_{L_{\alpha_t^+}})$ tal que $r_n \to \alpha_t^+$, y $A^+_{r_n} = c$ para todo $n \geq 1$, por la continuidad de A^+ y la definición de α^+ tenemos que $c = A^+_{\alpha_t^+} > t$, finalmente, de nuevo por la continuidad de A^+ sabemos que existe una vecindad alrededor de α_t^+ para la cual $A_r^+ > t$ para todo r en la vecindad lo cual, por la definición de α^+ nos llevaría a que $\alpha_t^+ \leq \alpha_t^+ - \varepsilon$, por lo tanto $B \geq 0$ en $[\alpha_t^+, \tau_{L_{\alpha_t^+}})$ y A^- se mantiene constante en dicho intervalo, es decir $A^-_{\alpha_t^+} = A^-_{\tau_{L_{\alpha_t^+}}}$.

Recordemos que de la proposición (1.5) existen dos m.b. independientes β^+ y β^- tales que

$$L_{\alpha_t^+} = 2\sup_{s\leq t}(-\beta_s^+), \qquad L_{\alpha_t^-} = 2\sup_{s\leq t}\beta_s^-,$$

y ya que A^- es el inverso generalizo de α^- se sigue, haciendo uso de la igualdad de conjuntos $\{\tau_s < a\} = \{L_a > s\}$, que

$$\begin{aligned} A^-_{\tau_s} = \text{ínf}\{u : \alpha_u^- > \tau_s\} &= \text{ínf}\{u : L_{\alpha_u^-} > s\} \\ &= \text{ínf}\{u : 2\sup_{v\leq u}\beta_v^- > s\}. \end{aligned}$$

Esto implica que

$$A^-_{\alpha_t^+} = A^-_{\tau_{L_{\alpha_t^+}}} = \text{ínf}\{u : \sup_{v\leq u}\beta_v^- > \sup_{s\leq t}(-\beta_s^+)\}.$$

Recordemos también que de la simetría de β^+, la ley del $\sup_{s\leq t}(-\beta_s^+)$ es idéntica a la de $\sqrt{t}|N|$ con N una v.a. normal estándar y que de la proposición (1.6) para cada $a > 0$,

$$\text{ínf}\left\{u : \sup_{v\leq u}\beta_v^- > a\right\} \overset{\mathcal{L}}{=} \frac{a^2}{N^2}.$$

La última observación da como resultado que

$$A^-_{\alpha_t^+} \overset{\mathcal{L}}{=} t\frac{\widehat{N}^2}{N^2},$$

donde $\widehat{N}$ es una copia independiente de N.

Ahora, como $\int_0^\infty \mathbb{1}_{\{B_s=0\}}ds = 0$ tenemos que $u = A_u^+ + A_u^-$, por lo que

$\alpha_t^+ = t + A^-_{\alpha_t^+}$. Así, finalmente obtenemos

$$\begin{aligned}\mathbb{P}\left(A_1^+ > t\right) &= \mathbb{P}\left(\alpha_t^+ < 1\right) \\ &= \mathbb{P}\left(t + A^-_{\alpha_t^+} < 1\right) \\ &= \mathbb{P}\left(t + t\frac{\widehat{N}^2}{N^2} < 1\right) \\ &= \mathbb{P}\left(\frac{N^2}{N^2 + \widehat{N}^2} > t\right),\end{aligned}$$

es decir, A_1^+ tiene la ley arco seno en $[0, 1]$. □

De manera intuitiva podemos interpretar el resultado anterior en el sentido de que a pesar que el m.b. es recurrente y regresa al cero una infinidad numerable de veces, lo mas probable es que en un momento dado, habrá pasado mucho más tiempo de un lado del cero que del otro.

Para finalizar ésta sección enunciaremos algunos resultados sobre absoluta continuidad con el fin de hacer uso de ellos en la prueba de la segunda ley del arco seno, otro elemento importante para la demostración es el uso de la técnica del cambio de tiempo aleatorio del m.b.

Sea $(A_t, t \geq 0)$ un proceso creciente tal que la pareja $((B_t, A_t), t \geq 0)$ satisface la siguiente propiedad de *scaling*: Existe $r \in \mathbb{R}$ tal que para cada $c > 0$

$$((B_{ct}, A_{ct}), \geq t) \overset{\mathcal{L}}{=} ((\sqrt{c}B_t, c^{r+1}A_t), t \geq 0).$$

Sea $\alpha_t = \inf\{s : A_s > t\}$ y consideremos la medida $\mu^{A,F}$ sobre $\mathbb{R}_+$ definida como

$$I_\varphi := \int_0^\infty \varphi(t)\mu^{A,F}(dt) = \mathbb{E}\left(\int_0^\infty F(t^{-1/2}B_{ut}; 0 \leq u \leq 1)\varphi(t)\,dA_t\right),$$

donde F es una funcional definida en $C([0, 1], \mathbb{R})$ y $\varphi : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ una función medible.
De forma equivalente

$$\mu^{A,F}(dt) = \mathbb{E}\left(F(t^{-1/2}B_{ut}; 0 \leq u \leq 1)\mathrm{d}A_t\right).$$

Teorema 1.9. *La medida $\mu^{A,F}$ satisface*

$$\mu^{A,F}(dt) = C_{A,F}t^r dt,$$

donde

$$C_{A,F} = \mathbb{E}\left(\frac{r+1}{\alpha_1^{r+1}}F(\alpha_1^{-1/2}B_{u\alpha_1}; 0 \leq u \leq 1)\right).$$

Demostración. Consideremos el cambio de variable $t = \alpha_s$ entonces se tiene que $dA_t = dA_{\alpha_s} = ds$, además, de la propiedad de *scaling* vemos que $A_u = u^{r+1}A_1$ y aplicando el cambio de variable $t = (1/u)^{1/(r+1)s}$ a α_u llegamos a

$$\begin{aligned}
\alpha_u = \inf\{s > 0 : A_s > u\} &\overset{\mathcal{L}}{=} \inf\{s > 0 : \frac{1}{u}A_s > 1\} \\
&= \inf\{s > 0 : A_{(1/u)^{1/(1+r)}s} > 1\} \\
&= u^{1/(1+r)}\alpha_1.
\end{aligned}$$

Así, de las observaciones anteriores llegamos a

$$I_\varphi = \mathbb{E}\left(\int_0^\infty F(s^{-\frac{1}{(r+1)2}}\alpha_1^{-1/2}B_{us^{1/(1+r)}\alpha_1}; 0 \leq u \leq 1)\varphi(s^{1/(r+1)}\alpha_1)\, ds\right),$$

y nuevamente por la propiedad de *scaling* y aplicando el cambio de variable $t = s^{1/(r+1)}\alpha_1$ la última expresión es igual a

$$\begin{aligned}
&\mathbb{E}\left(\int_0^\infty (r+1)t^r \frac{\varphi(t)}{\alpha_1^{r+1}}F(\alpha_1^{-1/2}B_{u\alpha_1}; 0 \leq u \leq 1)\, dt\right) = \\
&\qquad = \int_0^\infty t^r\varphi(t)\mathbb{E}\left(\frac{r+1}{\alpha_1^{r+1}}F(\alpha_1^{-1/2}B_{u\alpha_1}; 0 \leq u \leq 1)\right) dt.
\end{aligned}$$

por lo tanto

$$\mu^{A,F}(dt) = t^r\mathbb{E}\left(\frac{r+1}{\alpha_1^{r+1}}F(\alpha_1^{-1/2}B_{u\alpha_1}; 0 \leq u \leq 1)\right)dt.$$

□

Corolario 1.5. *Sean $r \in \mathbb{R}$, $c > 0$ y $A_t = \int_0^t \theta_s\, ds$, donde el proceso $\theta = (\theta_t, t \geq 0)$ satisface*

$$((B_{ct}, \theta_{ct}), t \geq 0) \overset{\mathcal{L}}{=} ((\sqrt{c}B_t, c^r\theta_t), t \geq 0),$$

entonces

$$\mathbb{E}\left(\theta_1 F(B_v; 0 \leq v \leq 1)\right) = \mathbb{E}\left(\frac{r+1}{\alpha_1^{r+1}}F(\alpha^{-1/2}B_{u\alpha_1}; 0 \leq u \leq 1)\right).$$

Demostración. De la definición de A_t tenemos que $dA_t = \theta_t dt$, así, de la definición de $\mu^{A,F}$ y la propiedad de *scaling* llegamos por un lado a

$$\mu^{A,F}(dt) = t^r \mathbb{E}\left(\theta_1 F(B_v; 0 \leq v \leq 1)\right),$$

mientras que por el teorema anterior obtenemos

$$\mu^{A,F}(dt) = t^r \mathbb{E}\left(\frac{r+1}{\alpha_1^{r+1}} F(\alpha_1^{-1/2} B_{u\alpha_1}; 0 \leq u \leq 1)\right) dt,$$

de donde se sigue el resultado. □

Si aplicamos éste corolario a la funcional A^+ obtenemos

$$\mathbb{E}\left(\mathbb{1}_{\{B_1>0\}} F(B_v; 0 \leq v \leq 1)\right) = \mathbb{E}\left(\frac{1}{\alpha_1^+} F\left((\alpha_1^+)^{-1/2} B_{u\alpha_1^+}; 0 \leq u \leq 1\right)\right). \quad (1.2)$$

Corolario 1.6. *Si consideramos $A_t = L_t$, entonces*

$$\mu^{A,F}(dt) = \mathbb{E}\left(F(B_u; u \leq 1) \middle| B_1 = 0\right) \frac{dt}{\sqrt{2\pi t}}.$$

Demostración. Tenemos que, por un lado

$$\begin{aligned}
\mu^{A,F}(dt) &= \mathbb{E}\left(dL_t\, F\left(\frac{1}{\sqrt{t}} B_{ut}; u \leq 1\right)\right) \\
&= \mathbb{E}\left(dL_t\, \mathbb{E}\left(F\left(\frac{1}{\sqrt{t}} B_{ut}; u \leq 1\right) \mid B_t = 0\right)\right) \\
&= \mathbb{E}\left(F(B_u; u \leq 1) \middle| B_1 = 0\right) \mathbb{E}\left(dL_t\right).
\end{aligned}$$

Mientras que por otro

$$\mathbb{E}\left(dL_t\right) = d_t \mathbb{E}\left(L_t\right) = d_t \mathbb{E}\left(|B_t|\right) = d_{\sqrt{t}} \mathbb{E}\left(|B_1|\right) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{dt}{2\sqrt{t}},$$

de donde se concluye la demostración.

□

Teorema 1.10. *Sea T un tiempo aleatorio y*

$$Z_T = \frac{1}{T}(A_T^+, A_T^-, (L_T)^2).$$

La tripleta Z_T tiene la misma ley en los siguientes tres casos:

$$i)\quad T = t, \qquad ii)\quad T = \alpha_s^+, \qquad iii)\quad T = \tau_u.$$

En particular,

$$\frac{A_T^+}{T} \overset{\mathcal{L}}{=} \frac{A_{\tau_u}^+}{\tau_u} \overset{\mathcal{L}}{=} \frac{A_{\tau_u}^+}{A_{\tau_u}^+ + A_{\tau_u}^-},$$

y la ley común de estás tres v.a. es la ley del arco seno en $[0,1]$.

Demostración. Iniciamos con la demostración de que (i) y (ii) tiene la misma ley, así, del teorema (1.8) recordamos que

$$A_{\alpha_t^+}^- = A_{\tau_{L_{\alpha_t^+}}}^- = \inf\{u : \sup_{v\le u} \beta_v^- > \sup_{s\le t}(-\beta_s^+)\},$$

donde β^+ y β^- son dos movimiento brownianos independientes.
Poniendo $\gamma = \sup_{s\le t}(-\beta_s^+)$, para simplificar la notación, tenemos que de la independencia entre β^+ y β^-, la propiedad de *scaling* y de nuevo teorema (1.8)

$$\begin{aligned}
A_{\tau_{L_{\alpha_t^+}}}^- &\overset{\mathcal{L}}{=} \inf\left\{u : \frac{2\sup_{v\le u}\beta_v^-}{2\gamma} > 1\right\}\\
&= \inf\left\{u : 2\sup_{v\le u}\beta_{\frac{v}{4\gamma^2}}^- > 1\right\}\\
&= 4\gamma^2 \inf\{w : 2\sup_{r\le w}\beta_r^- > 1\},
\end{aligned}$$

es decir,

$$A_{\tau_{L_{\alpha_t^+}}}^- \overset{\mathcal{L}}{=} (2\sup_{s\le t}(-\beta_s^+))^2 \inf\left\{w : 2\sup_{r\le w}\beta_r^- > 1\right\} = (L_{\alpha_t^+})^2 A_{\tau_1}^-.$$

Por otro lado, recordemos que $\alpha_1^+ = A_{\alpha_1^+}^+ + A_{\alpha_1^+}^- = 1 + A_{\alpha_1^+}^-$ y por un cambio de tiempo aleatorio

$$\left((L_{\alpha_u^+})^2 < t\right) = (\alpha_u^+ < \tau_{\sqrt{t}}) = (A_{\tau_{\sqrt{t}}}^+ > u).$$

Esto nos permite obtener la siguiente identidades en ley,

$$\left(A_{\alpha_1^+}^-, (L_{\alpha_1^+})^2, \alpha_1^+\right) \overset{\mathcal{L}}{=} \left((L_{\alpha_1^+})^2 A_{\tau_1}^-, (L_{\alpha_1^+})^2, 1 + (L_{\alpha_1^+})^2 A_{\tau_1}^-\right) \tag{1.3}$$

y observemos que debido a la propiedad de *scaling* de L y del m.b. B se tiene lo siguiente

$$\tau_{\sqrt{t}} \stackrel{\mathcal{L}}{=} t\tau_1 \quad \text{y} \quad A^+_{t\tau_1} \stackrel{\mathcal{L}}{=} tA^+_{\tau_1},$$

de donde deducimos que $\left(A^+_{\tau_{\sqrt{t}}} > u\right) = \left(u/A^+_{\tau_1} < t\right)$, es decir, $\left((L_{\alpha^+_u})^2 < t\right) = (u/A^+_{\tau_1} < t)$ y por lo tanto (1.3) tiene la misma ley que

$$\left(\frac{A^-_{\tau_1}}{A^+_{\tau_1}}, \frac{1}{A^+_{\tau_1}}, 1 + \frac{A^-_{\tau_1}}{A^+_{\tau_1}}\right) = \left(\frac{A^-_{\tau_1}}{A^+_{\tau_1}}, \frac{1}{A^+_{\tau_1}}, \frac{\tau_1}{A^+_{\tau_1}}\right), \quad \text{es decir,}$$

$$\left(A^-_{\alpha^+_1}, (L_{\alpha^+_1})^2, \alpha^+_1\right) \stackrel{\mathcal{L}}{=} \left(\frac{A^-_{\tau_1}}{A^+_{\tau_1}}, \frac{1}{A^+_{\tau_1}}, \frac{\tau_1}{A^+_{\tau_1}}\right)$$

y concluimos que

$$\frac{1}{\alpha^+_1}\left(A^-_{\alpha^+_1}, (L_{\alpha^+_1})^2\right) \stackrel{\mathcal{L}}{=} \frac{1}{\tau_1}\left(A^-_{\tau_1}, (L_{\tau_1})^2\right).$$

El resultado se sigue para α^+_s y τ_u ya que se puede aplicar la propiedad de *scaling* de forma independiente a A^+, A^-, α^+_1 y τ_1.

Para probar que (i) y (iii) tienen la misma ley, vamos a utilizar el resultado de absoluta continuidad (1.2),

$$\begin{aligned}\mathbb{E}\left(\mathbb{1}_{\{B_1>0\}} f\left(A^+_1, A^-_1, (L_1)^2\right)\right) &= \mathbb{E}\left(\frac{1}{\alpha^+_1} f\left(\frac{A^+_{\alpha^+_1}}{\alpha^+_1}, \frac{A^-_{\alpha^+_1}}{\alpha^+_1}, \frac{(L_{\alpha^+_1})^2}{\alpha^+_1}\right)\right)\\ &= \mathbb{E}\left(\frac{A^+_{\tau_1}}{\tau_1} f\left(\frac{A^+_{\tau_1}}{\tau_1}, \frac{A^-_{\tau_1}}{\tau_1}, \frac{(L_{\tau_1})^2}{\tau_1}\right)\right).\end{aligned}$$

Debido a la simetría vemos que

$$\mathbb{E}\left(\mathbb{1}_{\{B_1<0\}} f\left(A^+_1, A^-_1, (L_1)^2\right)\right) = \mathbb{E}\left(\frac{A^-_{\tau_1}}{\tau_1} f\left(\frac{A^+_{\tau_1}}{\tau_1}, \frac{A^-_{\tau_1}}{\tau_1}, \frac{(L_{\tau_1})^2}{\tau_1}\right)\right).$$

Por lo que sumando las dos expresiones anteriores, llegamos a

$$\mathbb{E}\left(f\left(A^+_1, A^-_1, (L_1)^2\right)\right) = \mathbb{E}\left(f\left(\frac{A^+_{\tau_1}}{\tau_1}, \frac{A^-_{\tau_1}}{\tau_1}, \frac{(L_{\tau_1})^2}{\tau_1}\right)\right),$$

y nuevamente por la propiedad de *scaling* se sigue el resultado.

□

Capítulo 2

Procesos de Bessel

2.1. Ecuaciones diferenciales estocásticas

Antes de iniciar con el estudio de los procesos de Bessel se llevará a cabo un breve análisis de algunas características de las ecuaciones diferenciales estocásticas (EDE) relacionadas con el proceso de tiempo local. De manera general se tiene la siguiente definición

Definición 2.1. *Dadas dos funciones predecibles σ y b con valores en el espacio de la matrices de $d \times r$ y de los vectores d-dimensionales, una solución de la ecuación diferencial estocástica $e(\sigma, b)$ es el par (X, B) de procesos adaptados definidos en un espacio de probabilidad $(\Omega, \mathscr{F}_t, \mathbb{P})$ y tal que*

i) *B es un $(\mathscr{F}_t)$-movimiento browniano en $\mathbb{R}^r$;*

ii) *para $i = 1, 2, \ldots, d$,*

$$X_t^i = X_0^i + \sum_j \int_0^t \sigma_{ij}(s, X_s)\, dB_s^j + \int_0^t b_i(s, X_s)\, ds.$$

Además, se usara la notación $e_x(\sigma, b)$ si se impone la condición $X_0 = x$ c.s. sobre la solución.

Ahora enunciaremos algunas definiciones de unicidad para las soluciones de una EDE así como tres resultados para los que se omitirá su demostración (véase [8]).

Definición 2.2. *1º) Existe unicidad trayectorial para $e(\sigma, b)$ si siempre que (X, B) y (X', B') sean dos soluciones definidas en el mismo espacio de probabilidad filtrado con $B = B'$ y $X_0 = X'_0$ c.s., implica que X y X' sean indistinguibles.*
2º) Existe unicidad en ley para $e(\sigma, b)$ si siempre que (X, B) y (X', B') sean dos soluciones con la posibilidad de que B y B' sean m.b. distintos y $X_0 \overset{(\mathscr{L})}{=} X'_0$, implica que las leyes de X y X' son iguales. En otras palabra, X y X' son dos versiones del mismo proceso.

Proposición 2.1. *Existe unicidad en ley si, para todo $x \in \mathbb{R}^d$, siempre que (X, B) y (X', B') sean dos soluciones tales que $X_0 = x$ y $X'_0 = x$ c.s., implica que las leyes de X y X' son iguales.*

Definición 2.3. *Una solución de $e(\sigma, b)$ en $(\Omega, \mathscr{F}, \mathscr{F}_t, \mathbb{P})$ se dice que es una solución fuerte si X es adaptado a la filtración $(\mathscr{F}_t^B)$, es decir, la filtración de B completada con respecto a $\mathbb{P}$. En este sentido, una solución que no es fuerte se dirá que es una solución débil.*

El siguiente teorema se debe a Yamada y Watanabe

Teorema 2.1. *Si la unicidad trayectorial se satisface para $e(\sigma, b)$, entonces*

i) la unicidad en ley se satisface para $e(\sigma, b)$;

ii) toda solución a $e_x(\sigma, b)$ es fuerte.

Proposición 2.2. *Si σ es una función real tal que $|\sigma| \geq \varepsilon > 0$ y b es una función acotada en $\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}$, se tiene existencia y unicidad en ley para la EDE $e(\sigma, b)$.*

En lo que resta de la sección se presentarán resultados que hasta cierto punto permitirán obtener el recíproco del teorema (2.1), es decir, cuándo la unicidad en ley y qué condiciones adicionales permiten obtener la unicidad trayectorial de las soluciones. Ya que se trabajará con el proceso del tiempo local , nos mantendremos en dimensión 1.

A partir de este momento se estudiará la ecuación $e(\sigma, b)$ donde σ es una función localmente acotada en $\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}$ y se consideran pares de soluciones a esta ecuación definidas en el mismo espacio y con respecto al mismo m.b. Recordemos que toda solución X es una semimartingala continua y que denotamos por $L(X)$ a la versión continua por la derecha del tiempo local en cero de X.

El objetivo es finalizar esta sección enunciando un teorema que nos diga bajo qué condiciones es posible comparar la posibles soluciones de $e(\sigma, b)$, para ello haremos uso de los siguiente resultados:

Proposición 2.3. *Si X^1 y X^2 son dos soluciones de $e(\sigma, b)$ tales que $X_0^1 = X_0^2$ c.s., entonces $X^1 \vee X^2$ es una solución si y sólo si $L(X^1 - X^2) = 0$.*

Demostración. De la fórmula de Tanaka se tiene,

$$\begin{aligned} X_t^1 \vee X_t^2 &= X_t^1 + (X_t^2 - X_t^1)^+ \\ &= X_t^1 + \int_0^t \mathbb{1}_{\{X_s^2 > X_s^1\}} d(X^2 - X^1)_s + \frac{1}{2} L_t(X^2 - X^1), \end{aligned}$$

Reemplazando X^i, $i = 1, 2$ por $X_0^i + \int_0^{\cdot} \sigma(s, X_s)\, dB_s + \int_0^{\cdot} b(s, X_s)\, ds$, añadiendo los siguientes ceros

$$\int_0^t \mathbb{1}_{\{X_s^2 \leq X_s^1\}} \sigma(s, X_s^2 \vee X_s^1)\, dB_s - \int_0^t \mathbb{1}_{\{X_s^2 \leq X_s^1\}} \sigma(s, X_s^1)\, dB_s,$$

$$\int_0^t \mathbb{1}_{\{X_s^2 \leq X_s^1\}} b(s, X_s^2 \vee X_s^1)\, ds - \int_0^t \mathbb{1}_{\{X_s^2 \leq X_s^1\}} b(s, X_s^1)\, ds,$$

y recordando que $X_0^1 = X_0^2$ c.s., obtenemos

$$\begin{aligned} X_t^1 \vee X_t^2 = (X_0^1 \vee X_0^2) &+ \int_0^t \sigma(s, X_s^2 \vee X_s^1)\, dB_s + \int_0^t b(s, X_s^2 \vee X_s^1)\, ds \\ &+ \frac{1}{2} L_t(X^2 - X^1), \end{aligned}$$

de donde se sigue el resultado. □

La siguiente proposición es clave para el desarrollo de la sección:

Proposición 2.4. *Si la unicidad en ley se satisface para $e(\sigma, b)$ y si $L(X^1 - X^2) = 0$ para todo par de soluciones, (X^1, X^2), tal que $X_0^1 = X_0^2$ c.s., entonces la unicidad trayectorial se satisface para $e(\sigma, b)$.*

Demostración. Consideremos a (X^1, X^2) soluciones de $e(\sigma, b)$ tales que $L(X^1 - X^2) = 0$ y $X_0^1 = X_0^2$ c.s., entonces, de la proposición anterior sabemos que $X^1 \vee X^2$ es solución, así, X^1 y $X^1 \vee X^2$ son soluciones tales que $X_0^1 \overset{(\mathcal{L})}{=} X_0^1 \vee X_0^2$. De la última afirmación y dado que se tiene unicidad en ley se sigue que X_1 tiene la misma ley que $X^1 \vee X^2$, lo cual ocurre si y sólo si $X^1 = X^1 \vee X^2$ c.s. $\square$

Los criterios anteriores involucran la condición de que el tiempo local en cero de la diferencia de dos soluciones sea idénticamente cero, por lo que de manera natural surge la necesidad de tener condiciones que nos digan cuándo esto ocurre. En lo sucesivo, ρ será una función boreliana de $(0, \infty)$ en si mismo, no decreciente, y tal que $\int_{0^+} da/\rho(a) = +\infty$.

Lema 2.1. *Si X es una semimartingala continua tal que, para algún $\varepsilon > 0$ y todo t*

$$A_t = \int_0^t \mathbb{1}_{\{0<X_s\leq\varepsilon\}}\rho(X_s)^{-1}\, d\left\langle X, X\right\rangle_s < \infty \quad \text{c.s.},$$

entonces $L(X) = 0$.

Demostración. Consideremos $t > 0$ fijo; por la fórmula de ocupación se tiene que

$$A_t = \int_0^\varepsilon \rho(a)^{-1} L_t^a(X)\, da.$$

Si $L^0(X)$ no fuera idénticamente cero c.s. se tendría que

$$L_t^a(X) \underset{a\downarrow 0}{\longrightarrow} L_t^0(X) = K,$$

con K una v.a. positiva, por lo que existiría un conjunto $C \in \mathscr{F}$ tal que $\mathbb{P}(C) > 0$ y tal que para todo $\omega \in C$, $L^0(X)(\omega) \underset{a\downarrow 0}{\longrightarrow} K_\omega$.

Así, dado $\omega \in C$, $\varepsilon > 0$ del enunciado y $\eta = K_\omega/2 > 0$, para $0 < a < \delta < \varepsilon$ se tiene que $K_\omega - \eta < L_t^a(X)(\omega) < K_\omega + \eta$, por lo que

$$\begin{aligned}
A_t(\omega) &= \int_{0^+}^\delta \frac{L_t^a(X)(\omega)}{\rho(a)}\, da + \int_\delta^\varepsilon \frac{L_t^a(X)(\omega)}{\rho(a)}\, da \\
&\geq (K_\omega - \eta)\int_{0^+}^\delta \frac{da}{\rho(a)}\, da + \int_\delta^\varepsilon \frac{L_t^a(X)(\omega)}{\rho(a)}\, da = \infty,
\end{aligned}$$

es decir, $A_t = \infty$ con probabilidad positiva, lo que es una contradicción. $\square$

Corolario 2.1. *Sea b_i, $i = 1, 2$ dos funciones borelianas; si*

$$|\sigma(s,x) - \sigma(s,y)|^2 \leq \rho(|x-y|)$$

para todo s, x, y y si X^i, $i = 1, 2$, son soluciones a $e(\sigma, b_i)$ con respecto al mismo m.b., entonces $L(X^1 - X^2) = 0$.

Demostración. Como X^1 y X^2 son soluciones de $e(\sigma, b)$ con respecto al mismo m.b. se tiene que

$$\begin{aligned} X_t^1 - X_t^2 = X_0^1 - X_0^2 &+ \int_0^t (\sigma(s, X_s^1) - \sigma(s, X_s^2))\, dB_s \\ &+ \int_0^t (b(s, X_s^1) - b(s, X_s^2))\, ds, \end{aligned}$$

lo cual implica que

$$\left\langle X^1 - X^2, X^1 - X^2 \right\rangle_t = \int_0^t (\sigma(s, X_s^1) - \sigma(s, X_s^2))^2\, ds.$$

Entonces,

$$\begin{aligned} &\int_0^t \rho(X_s^1 - X_s^2)^{-1} \mathbb{1}_{\{X_s^1 > X_s^2\}}\, d\left\langle X^1 - X^2, X^1 - X^2 \right\rangle_s \\ &\qquad = \int_0^t \rho(X_s^1 - X_s^2)^{-1} (\sigma(s, X_s^1) - \sigma(s, X_s^2))^2 \mathbb{1}_{\{X_s^1 > X_s^2\}} ds \leq t. \end{aligned}$$

□

Debido a los criterios anteriores para determinar si el tiempo local en cero de la diferencia de dos soluciones es 0, y a la proposición 2.4, nos encontramos con la posibilidad de enunciar un resultado recíproco parcial al teorema (2.1).

Teorema 2.2. *La unicidad trayectorial se satisface para $e(\sigma, b)$ en cada uno de los siguientes casos:*

i) $|\sigma(x) - \sigma(y)|^2 \leq \rho(|x-y|)$, $|\sigma| \geq \varepsilon > 0$ *y b y σ son acotadas.*

ii) $|\sigma(x,s) - \sigma(y,s)|^2 \leq \rho(|x-y|)$ *y b es Lipschitz continua, es decir, para todo compacto H y cada t existe una constante K_t, tal que para todo x, y en H y $s \leq t$*

$$|b(s,x) - b(s,y)| \leq K_t |x-y|;$$

iii) $|\sigma(x) - \sigma(y)|^2 \leq |f(x) - f(y)|$ *donde* f *es creciente y acotada,* $\sigma \geq \varepsilon > 0$ *y* b *es acotada.*

Demostración. i) Por la proposición 2.2, ya que $|\sigma| \geq \varepsilon > 0$ y que b es acotada, la unicidad en ley se satisface para $e(\sigma, b)$, así, el resultado se sigue de la proposición 2.4 a través del corolario 2.1.

ii) Sean X^1 y X^2 dos soluciones con respecto al mismo m.b. y tales que $X_0^1 = X_0^2$ c.s. Debido al último corolario y a la fórmula de Tanaka se tiene que $L(X^1 - X^2) = 0$, por lo que

$$|X_t^1 - X_t^2| = \int_0^t \operatorname{sgn}\left(X_s^1 - X_s^2\right) d(X_s^1 - X_s^2)$$

Ahora, para $n \in \mathbb{N}$, $i = 1, 2$, consideremos los siguientes tiempos de paro

$$T_n^i = \inf\{t > 0 : X_t^i \geq n\} \qquad \text{y} \qquad T_n = \min\{T_n^1, T_n^2\},$$

es claro que T_n converge a ∞ y si definimos $Y^i = (X^i)^{T_n}$, para n fijo se tiene que

$$\sigma(0, X_0) - \rho(n + |X_0|)^{1/2} \leq \sigma(s, Y_s) \leq \sigma(0, X_0) + \rho(n + |X_0|)^{1/2},$$

es decir, $\sigma(s, Y_s^i)$ es acotada. También, de la Lipschitz continuidad sabemos

$$|b(s, Y_s^1) - b(s, Y_s^2)| \leq C_t |Y_s^1 - Y_s^2|$$

para $s \leq t$ y alguna constante C_t. De las últimas dos observaciones llegamos a que

$$|Y_t^1 - Y_t^2| - \int_0^t \operatorname{sgn}\left(Y_s^1 - Y_s^2\right)\left(b(s, Y_s^1) - b(s, Y_s^2)\right) ds$$

es una martingala local acotada que se desvanece en 0 y por ende una martingala, así de la última expresión y de la Lipschitz continuidad de b se sigue que

$$\mathbb{E}\left(|Y_t^1 - Y_t^2|\right) \leq C_t \int_0^t \mathbb{E}\left(|Y_s^1 - Y_s^2|\right) ds.$$

Utilizando el lema de Gronwall concluimos que $Y_t^1 = Y_t^2$ c.s. para todo t, por lo que la prueba de (ii) se concluye utilizando un argumento de continuidad y de localización.

iii) Debido a la condición $|\sigma| \geq \varepsilon > 0$ y a que b es acotada, la proposición 2.2 nuevamente implica la unicidad en ley para $e(\sigma, b)$. Se probará el enunciado al aplicar el corolario 2.1 con $\rho(x) = x$, y la proposición 2.4. Con este objetivo tomemos $\delta > 0$ y nuevamente consideremos, X^1 y X^2, dos soluciones de $e(\sigma, b)$ con respecto al mismo m.b. y tales que $X_0^1 = X_0^2$ c.s. Entonces,

$$\left\langle X^1 - X^2, X^1 - X^2 \right\rangle_t = \int_0^t (\sigma(s, X^1) - \sigma(s, X^2))^2 \, ds,$$

por lo que

$$\begin{aligned} &\mathbb{E}\left(\int_0^t (X_s^1 - X_s^2)^{-1} \mathbb{1}_{\{X_s^1 - X_s^2 > \delta\}} \, d\left\langle X^1 - X^2, X^1 - X^2 \right\rangle_s\right) \\ &\qquad \leq \mathbb{E}\left(\int_0^t \left(f(X_s^1) - f(X_s^2)\right)(X_s^1 - X_s^2)^{-1} \mathbb{1}_{\{X_s^1 - X_s^2 > \delta\}} \, ds\right) \overset{def}{=} K(f)_t. \end{aligned}$$

Ahora escojamos una sucesión, $\{f_n\}$, de funciones uniformemente acotadas, crecientes y en C^1 tal que $\lim_n f_n(x) = f(x)$ para todo x que no sea punto de discontinuidad para f. El conjunto D de puntos de discontinuidad para f es numerable; por la fórmula de tiempos de ocupación, el conjunto de tiempos s tales que X_s^1 o X_s^2 pertenecen a D tiene c.s. medida de Lebesgue cero, y por ende

$$\lim_n \left(f_n(X_s^1) - f_n(X_s^2)\right) = f(X_s^1) - f(X_s^2)$$

para casi todo $s \leq t$. Se sigue que $K(f)_t = \lim_n K(f_n)_t$.
Para $u \in [0,1]$, definimos $Z^u = X^2 + u(X^1 - X^2)$, entonces

$$\langle Z^u, Z^u \rangle_t = \int_0^t \left(\sigma(s, X_s^2) + u\left(\sigma(X_s^1) - \sigma(X_s^2)\right)\right)^2 ds$$

y por lo tanto

$$\begin{aligned} K(f_n)_t &= \mathbb{E}\left(\int_0^t \left(\int_0^1 f_n'(Z_s^u)\, du\right) \mathbb{1}_{\{X_s^1 - X_s^2 > \delta\}} \, ds\right) \\ &\leq \int_0^1 \mathbb{E}\left(\int_0^t f_n'(Z_s^u)\, ds\right) du \qquad (2.1) \\ &\leq \frac{1}{\varepsilon^2} \int_0^1 \mathbb{E}\left(\int_{\mathbb{R}} f_n'(a) L_t^a(Z^u)\, da\right) du, \end{aligned}$$

donde la última desigualdad se debe al uso de la fórmula de tiempos de ocupación en Z^u y a que $\sigma^u = \sigma(X_s^2) + u(\sigma(X_s^1) - \sigma(X_s^2)) \geq \varepsilon$. Además, para alguna constante M, $|\sigma^u| + |b^u| \leq M$, así, debido a la fórmula de Tanaka

$$L_t^a(Z^u) = |Z_t^u - a| - |Z_0^u - a| - \int_0^t \operatorname{sgn}(Z_s^u - a)\, dZ_s^u,$$

entonces, ya que $\int_0^t \operatorname{sgn}(Z_s^u - a)\, \sigma^u(Z_s^u)\, dB_s$ es martingala y por la desigualdad de **BDG** tenemos

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}\left(L_t^a(Z^u)\right) &= \mathbb{E}\left(|Z_t^u - a| - |Z_0^u - a|\right) - \int_0^t \mathbb{E}\left(\operatorname{sgn}(Z_s^u - a)\, b^u(Z_s^u)\right) ds \\
&\leq \mathbb{E}\left(|Z_t^u - Z_0^u|\right) + Mt \\
&\leq \mathbb{E}\left(\left|\int_0^t \sigma^u(Z_s^u)\, dB_s\right|\right) + 2Mt \\
&\leq c\mathbb{E}\left(\left(\int_0^t \left(\sigma^u(Z_s^u)\right)^2 ds\right)^{1/2}\right) + 2Mt \qquad (\mathbf{BDG}) \\
&\leq cM\sqrt{t} + 2Mt,
\end{aligned}$$

lo cual implica que

$$C_t = \sup_{a,u} \mathbb{E}\left(L_t^a(Z^u)\right) < \infty.$$

Esta última implicación junto con la ecuación (2.1) nos permite concluir que

$$K(f_n)_t \leq \varepsilon^{-2} C \sup_n \|f_n\|,$$

es decir, $K(f)_t$ está acotada por una constante independiente de δ, entonces, haciendo δ tender a cero vemos que se satisfacen las hipótesis del lema 2.1 para $\rho(x) = x$, lo cual completa la demostración. □

Finalizaremos la sección con un teorema de comparación para soluciones de **EDE**. Asumiremos que $(\sigma(s,x) - \sigma(s,y))^2 \leq \rho(|x-y|)$ o que σ satisface las hipótesis del inciso (iii) del teorema (2.2).

Teorema 2.3 (Teorema de Comparación). *Sean b_i, $i = 1, 2$, dos funciones borelianas acotadas tales que $b^1(x) \geq b^2(x)$ para todo x y tales que al menos una de ellas satisfaga la condición de Lipschitz. Si*

$X^i, i = 1, 2$ son soluciones a $e(\sigma, b^i)$ definidas en el mismo espacio con respecto al mismo movimiento browniano y si $X_0^1 \geq X_0^2$ c.s. entonces

$$\mathbb{P}\left(X_t^1 \geq X_t^2 \text{ para todo } t \geq 0\right) = 1.$$

Demostración. Se mostró en el corolario 2.1 y en la prueba del teorema 2.2 que, en cada caso, $L(X^1 - X^2) = 0$, entonces, por un lado tenemos

$$(X_t^2 - X_t^1)^+ = \int_0^t \mathbb{1}_{\{X_s^2 > X_s^1\}} d(X_s^2 - X_s^1)$$

mientras que por otro lado,

$$\begin{aligned} X_t^2 - X_t^1 = X_0^2 - X_0^1 &+ \int_0^t \left(\sigma(s, X_s^2) - \sigma(s, X_s^1)\right) dB_s \\ &+ \int_0^t \left(b^2(X_s^2) - b^1(X_s^1)\right) ds, \end{aligned}$$

de donde se observa que $\int_0^t \mathbb{1}_{\{X_s^2 > X_s^1\}} \left(\sigma(s, X_s^2) - \sigma(s, X_s^1)\right) dB_s$ es martingala. Entonces

$$\begin{aligned} \phi(t) = \mathbb{E}\left((X_t^2 - X_t^1)^+\right) &= \mathbb{E}\left(\int_0^t \mathbb{1}_{\{X_s^2 > X_s^1\}} \left(b^2(s, X_s^2) - b^1(s, X_s^1)\right) ds\right) \\ &\leq \mathbb{E}\left(\int_0^t \mathbb{1}_{\{X_s^2 > X_s^1\}} \left(b^1(s, X_s^2) - b^1(s, X_s^1)\right) ds\right). \end{aligned}$$

Así, cuando b^1 es Lipschitz con constantes K_t,

$$\phi(t) \leq K_t \mathbb{E}\left(\mathbb{1}_{\{X_s^2 > X_s^1\}} |X_s^2 - X_s^1| \, ds\right) = K_t \int_0^t \phi(s) \, ds,$$

usando el lema de Gronwall se llega a

$$\mathbb{E}\left((X_t^2 - X_t^1)^+\right) = 0,$$

es decir, $X_t^1 \geq X_t^2$ c.s. para todo t, por lo que debido a los argumentos de continuidad usuales se llega al resultado deseado.
Si ahora b^2 es Lipschitz y utilizando nuevamente la misma identidad se tiene que

$$\begin{aligned} \phi(t) &= \mathbb{E}\left(\int_0^t \mathbb{1}_{\{X_s^2 > X_s^1\}} \left(b^2(s, X_s^2) - b^2(s, X_s^1)\right) ds\right) \\ &+ \mathbb{E}\left(\int_0^t \mathbb{1}_{\{X_s^2 > X_s^1\}} \left(b^2(s, X_s^1) - b^1(s, X_s^1)\right) ds\right) \\ &\leq \mathbb{E}\left(\int_0^t \mathbb{1}_{\{X_s^2 > X_s^1\}} \left|b^2(s, X_s^2) - b^2(s, X_s^1)\right| ds\right), \end{aligned}$$

ya que $b^2 \leq b^1$, y siguiendo los mismos pasos de la prueba, cuando b^1 es Lipschitz, se concluye la demostración. □

2.2. Procesos de Bessel

Sea B un movimiento browniano δ-dimensional ($\delta \in \mathbb{Z}_+$) y consideremos su norma $\rho = \|B\|$. Debido a la fórmula de Itô sabemos que

$$\rho_t^2 = \rho_0^2 + 2\sum_{i=1}^{\delta} \int_0^t B_s^i \, dB_s^i + \delta t,$$

donde es importante notar que para $\delta > 1$, $\rho_t > 0$ c.s. para cada t y para $\delta = 1$ el conjunto $\{s : \rho_s = 0\}$ tiene medida de Lebesgue 0 c.s. Entonces, debido a las observaciones anteriores, tiene sentido considerar al proceso

$$\beta_t = \sum_{i=1}^{\delta} \int_0^t \frac{B_s^i}{\rho_s} \, dB_s^i,$$

el cual, debido al teorema de caracterización de Lévy, es un movimiento browniano ya que $\langle \beta, \beta \rangle_t = t$. Por lo tanto ρ_t^2 satisface la *EDE*

$$\rho_t^2 = \rho_0^2 + \int_0^t \rho_s \, d\beta_s + \delta t.$$

Consideremos ahora, para $\delta \in \mathbb{R}_+$ y $x \geq 0$, la *EDE*

$$Z_t = x + 2\int_0^t \sqrt{|Z_s|} \, d\beta_s + \delta t.$$

Ya que $|\sqrt{u} - \sqrt{v}| \leq \sqrt{|u - v|}$ para $u, v \geq 0$, el teorema 2.2 (ii) garantiza la unicidad trayectorial y por lo tanto el teorema 2.1 finalmente resulta en que para cada δ y x la ecuación tiene una única solución fuerte. Además, para $\delta = x = 0$, esta solución es $Z_t = 0$, entonces, el teorema de comparación (teorema 2.3) da como resultado, para $\delta \in \mathbb{R}_+$ y $x \geq 0$, que $Z_t \geq 0$ c.s., esto implica que podemos eliminar el valor absoluto de *EDE* de arriba.

Definición 2.4. *Para todo $\delta \geq 0$ y $x \geq 0$, la única solución fuerte de la ecuación*

$$Z_t = x + 2\int_0^t \sqrt{Z_s} \, d\beta_s + \delta t,$$

es llamada proceso cuadrado de Bessel de dimensión δ que empieza en x y lo vamos a denotar por $BESQ^{\delta}(x)$.

Teorema 2.4. *Sean*

$$Z_t = x + 2\int_0^t \sqrt{Z_s}\, d\beta_s + \delta t,$$

$$Z'_t = x' + 2\int_0^t \sqrt{Z'_s}\, d\beta_s + \delta' t,$$

donde $x \geq x'$ y $\delta \geq \delta'$, entonces c.s.

$$Z_t \geq Z'_t \qquad \text{para todo } t \geq 0.$$

Demostración. Se sigue fácilmente debido al teorema 2.3 (teorema de comparación). □

Vamos a denotar por Q_x^{δ} a la ley de $BESQ^{\delta}(x)$ en $C(\mathbb{R}_+, \mathbb{R})$. El siguiente teorema enuncia una de las propiedades más importantes de los procesos de Bessel, conocida como la propiedad de aditividad, la cual nos dice que tiene la propiedad de ser infinitamente divisible.

Teorema 2.5. *Pata todos $\delta, \delta' \geq 0$ y $x, x' \geq 0$,*

$$Q_x^{\delta} * Q_{x'}^{\delta'} = Q_{x+x'}^{\delta+\delta'},$$

donde $Q_x^{\delta} * Q_{x'}^{\delta'}$ es la convolución de Q_x^{δ} y $Q_{x'}^{\delta'}$.

Demostración. Sean Z y Z' dos procesos de Bessel independientes

$$Z_t = x + 2\int_0^t \sqrt{Z_s}\, d\beta_s + \delta t,$$

$$Z'_t = x' + 2\int_0^t \sqrt{Z'_s}\, d\beta'_s + \delta' t,$$

donde β y β' son dos movimiento brownianos independientes. Sea $Y := Z + Z'$, entonces se puede escribir a Y de la siguiente forma

$$Y_t = (x + x') + \int_0^t \sqrt{Y_t}\, d\gamma_s + (\delta + \delta')t,$$

con γ definido como

$$\gamma_t := \int_0^t \mathbb{1}_{\{Z_s+Z'_s>0\}} \left(\frac{\sqrt{Z_s}\, d\beta_s + \sqrt{Z'_s}\, d\beta'_s}{\sqrt{Z_s + Z'_s}} \right) + \int_0^t \mathbb{1}_{\{Z_s+Z'_s=0\}}\, d\beta''_s,$$

donde β'' es un movimiento browniano independiente de β y β'. Entonces, debido a que $\langle \gamma, \gamma \rangle_t = t$ y por el teorema de caracterización de Lévy, el proceso γ es un movimiento browniano estándar y por lo tanto, Y es un proceso de Bessel cuadrado de dimensión $(\delta + \delta')$ que empieza en $(x + x')$. □

La propiedad de aditividad proporciona suficiente información sobre el semigrupo de *BESQ*, el siguiente resultado es muestra de ello. Además, si Z es un *BESQ* de dimensión δ, vamos a definir $\nu := (\delta/2) - 1$ y lo llamaremos el índice de Z.

Teorema 2.6. *Sea $\delta > 0$. El semigrupo de BESQ de dimensión δ tiene densidad, con respecto a la medida de Lebesgue,*

$$q_t^\delta(x, y) = \frac{1}{2t} \left(\frac{y}{x} \right)^{\nu/2} \exp\left\{ -\frac{x+y}{2t} \right\} I_\nu \left(\frac{\sqrt{xy}}{t} \right), \qquad t > 0,$$

para $x > 0$, donde

$$I_\nu(x) := \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(x/2)^{2k+\nu}}{k!\,\Gamma(\nu + k + 1)},$$

es la función modificada de Bessel de índice ν.
El semigrupo cuadrado de Bessel de dimensión $\delta = 0$, es para $x > 0$

$$Q_t^0(x, \cdot) = \exp\left\{ -\frac{x}{2t} \right\} \varepsilon_0 + \Xi_t^0(x, \cdot),$$

donde ε_0 es la medida de Dirac en 0 y $\Xi_t^0(x, \cdot)$ tiene densidad (con respecto a la medida de Lebesgue)

$$q_t^0(x, y) = \frac{1}{2t} \left(\frac{x}{y} \right)^{1/2} \exp\left\{ -\frac{x+y}{2t} \right\} I_1 \left(\frac{\sqrt{xy}}{t} \right), \qquad t > 0.$$

Demostración. Sea μ una medida en $\mathbb{R}_+$ tal que

$$\int_0^\infty (1+t)\,d\mu(t) < \infty.$$

Consideremos

$$\phi(x,\delta) := Q_x^\delta \left[\exp\left\{-\int_0^\infty (x+\delta t)\,d\mu(t)\right\}\right],$$

donde X es el proceso canónico. De la desigualdad de Jensen obtenemos

$$\phi(x,t) \geq \exp\left\{-Q_x^\delta\left[\int_0^\infty X_t\,d\mu(t)\right]\right\} = \exp\left\{-\int_0^\infty Q_x^\delta[X_t]\,d\mu(t)\right\}$$

denotemos por $V_x = \{\overline{x} \in \mathbb{R}^n : \|\overline{x}\|^2 = x\}$, entonces

$$\begin{aligned}
&\exp\left\{-\int_0^\infty Q_x^\delta[X_t]\,d\mu(t)\right\} \\
&= \exp\left\{-\int_0^\infty \frac{1}{\mathrm{Area}(V_x)}\int_{V_x} \mathbb{E}\left((B_t^1+x_1)^2+\cdots+(B_t^\delta+x_\delta)^2\right)\,dx_1\cdots dx_\delta\,d\mu(t)\right\},
\end{aligned}$$

donde $(B^1,\ldots,B^\delta)$ es un δ-movimiento browniano que empieza en 0. De donde se sigue

$$\phi(x,t) \geq \exp\left\{-\int_0^\infty (x+\delta t)\,d\mu(t)\right\} > 0.$$

Por otro lado, por la propiedad de aditividad, vemos

$$\phi(x+x',\delta+\delta') = \phi(x,\delta)\phi(x',\delta').$$

Entonces

$$\phi(x,\delta) = \phi(x,0)\phi(0,\delta) = (\phi(1,0))^x\,(\phi(0,\delta))^\delta. \tag{2.2}$$

No debemos preocuparnos por la medibilidad de las funciones

$$x \mapsto \phi(x,0) \qquad \text{y} \qquad \delta \mapsto \phi(0,\delta),$$

ya que ambas son monótonas por el teorema de comparación.
Ahora vamos a considerar $\mu := \theta\varepsilon_t$, donde $\theta \geq 0$ es una constante y ε_t es la medida de Dirac en t. Por lo tanto

$$Q_x^1[\exp\{-\theta X_t\}] = Q_x^1\left[\exp\left\{-\theta\int_0^\infty X_s\varepsilon_t\,d\mu(s)\right\}\right] = \mathbb{E}_{\sqrt{x}}\left(\exp\{-\theta B_t^2\}\right),$$

donde B es un movimiento browniano estándar que empieza en $\sqrt{x}$, bajo $\mathbb{P}_{\sqrt{x}}$. Esto implica que

$$Q_x^1\left[\exp\{-\theta X_t\}\right] = (1+2\theta t)^{-1/2}\exp\left\{-\frac{\theta x}{1+2\theta t}\right\}.$$

Comparando término a término esta última igualdad con (2.2), deducimos que

$$\phi(1,0) = \exp\left\{-\frac{\theta}{1+2\theta t}\right\} \qquad \text{y} \qquad \phi(0,1) = (1+2\theta t)^{-1/2}.$$

Entonces

$$Q_x^\delta\left[\exp\{-\theta X_t\}\right] = (1+2\theta t)^{-\delta/2}\exp\left\{-\frac{\theta x}{1+2\theta t}\right\}.$$

Invirtiendo la transformada de Laplace se obtiene el semigrupo de *BESQ*. □

El siguiente teorema nos permite calcular de manera explícita las leyes de algunas funcionales del movimiento browniano.

Teorema 2.7. *Sea $f : [0,a] \to \mathbb{R}_+$ una función continua. Supongamos que existe una función $h : [0,a] \to (0,1]$, no-creciente, en C^2 y tal que*

$$\begin{cases} h'' = hf, \\ h(0) = 1, \\ h'(a) = 0. \end{cases}$$

Entonces

$$Q_x^\delta\left[\exp\left\{-\frac{1}{2}\int_0^a X_t f(t)\,dt\right\}\right] = (h(a))^{\delta/2}\exp\left\{\frac{x}{2}h'(0)\right\}.$$

Demostración. Sea $g(t) := h'(t)/h(t)$. Como $g' = f - g^2$, la función g es continua y de variación finita. Integrando por partes se tiene

$$g(t)X_t = g(0)x + \int_0^t g(s)\,dX_s + \int_0^t X_s\,dg(s),$$

y ya que $g'(t) = f(t) - g^2(t)$

$$\int_0^t X_s\,dg(s) = \int_0^t X_s f(s)\,ds - \int_0^t X_s g^2(s)\,ds,$$

de donde se llega a

$$\int_0^t g(s)\,dX_s - \int_0^t g^2(s)X_s\,ds = g(t)X_t - g(0)x - \int_0^t X_s f(s)\,ds.$$

Ahora consideremos $M_t := X_t - \delta t$, que por definición es una Q_x^δ-martingala local continua. La martingala (local) exponencial asociada a

$$\frac{1}{2}\int_0^t g(s)\,dM_s,$$

está dada por

$$\begin{aligned} Z_t &:= \exp\left\{\frac{1}{2}\int_0^t g(s)\,dM_s - \frac{1}{2}\int_0^t g^2(s)X_s\,ds\right\} \\ &= \exp\left\{\frac{g(t)X_t - g(0)x}{2} - \frac{\delta}{2}\int_0^t g(s)ds - \frac{1}{2}\int_0^t X_s f(s)\,ds\right\} \\ &= \exp\left\{\frac{1}{2}(g(t)X_t - g(0)x - \delta\ln h(t)) - \frac{1}{2}\int_0^t X_s f(s)\,ds\right\}. \end{aligned}$$

Ya que por definición $g \le 0$ y $X \ge 0$, Z está acotado en $[0, a]$ y por lo tanto es una martingala. En particular, $Q_x^\delta(Z_a) = 1$, por lo que se sigue

$$Q_x^\delta\left[\exp\left\{-\frac{h'(0)x}{2} - \frac{\delta}{2}\ln h(a) - \frac{1}{2}\int_0^a f(s)X_s\,ds\right\}\right] = 1,$$

dando por concluida la demostración. □

En el mismo contexto, el de estudiar propiedades del proceso cuadrado de Bessel cuadrado, encontramos que un *BESQ* tiene la propiedad de auto-similitud, para su prueba recordemos que si B es un movimiento browniano estándar de dimensión δ y $B_t^x = x + B_t$, entonces para todo $c > 0$ los procesos $(B_{c^2 t}^x, t \ge 0)$ y $(cB_t^{x/c}, t \ge 0)$ tienen la misma ley.

Proposición 2.5. *Si Z es un BESQ de dimensión δ, que empieza en x, entonces para todo $c > 0$, $(c^{-1}Z_{ct}, t \ge 0)$ es un BESQ de dimensión δ, que parte de x/c.*

Demostración. Ya que para todo $t \ge 0$, Z satisface la *EDE*

$$Z_t = x + 2\int_0^t \sqrt{Z_t}\,d\beta_s + \delta t,$$

con β un movimiento browniano, mediante un cambio de variable se obtiene

$$c^{-1}Z_{tc} = c^{-1}x + 2\int_0^t \sqrt{c^{-1}Z_{uc}}c^{-1/2}\,d\beta_{uc} + \delta t,$$

y debido al último recordatorio se sigue el resultado ya que la solución de la EDE es única. □

Las siguientes propiedades sobre los ceros de un proceso cuadrado de Bessel las vamos a admitir, para mayores detalles se puede consultar [8].

Teorema 2.8. *Sea Z un BESQ de dimensión δ*

i) Se $\delta > 2$, el proceso Z es transitorio, es decir, $\lim_{t\to\infty} Z_t = \infty$ c.s. Además, $\{0\}$ es polar, es decir, $\mathbb{P}_x\left(T_{\{0\}} < \infty\right) = 0$ para todo $x \in \mathbb{R}_+$.

ii) Si $\delta = 2$, $\{0\}$ es polar.

iii) Si $0 < \delta < 2$, el proceso Z es recurrente. Hay reflexión instantánea en 0.

iv) Si $\delta = 0$, 0 es absorbente.

Recordemos que si X es un proceso de Markov con valores en $\mathbb{R}_+$ y $\varphi : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ una función biyectiva y boreliana, entonces $Y := \varphi(X)$ también es un proceso de Markov. Es fácil de ver ya que para toda $f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ función boreliana se tiene

$$\mathbb{E}_x\left(f(Y_t)|\,\mathscr{F}_s\right) = \mathbb{E}_x\left(f(\varphi(X_t))|\,\mathscr{F}_s\right) = \mathbb{E}_x\left(g(X_t)|\,\mathscr{F}_s\right) = P_{t-s}g(X_s) = \widetilde{P}_{t-s}f(Y_s),$$

donde $g(x) = f(\varphi(x))$, P es el semigrupo asociado a X y

$$\widetilde{P}_{t-s}f(y) = P_{t-s}(f\circ\varphi)(\varphi^{-1}(y)).$$

Definición 2.5. *Sea Z un proceso cuadrado de Bessel de dimensión δ, que empieza en a^2. Decimos que $\sqrt{Z}$ es el proceso de Bessel (BES) de dimensión δ, que empieza en $a \geq 0$.*

Vemos que si δ es un entero estrictamente positivo, Z no es más que la norma de un movimiento browniano. En general para $\delta \geq 2$, recordando que 0 es polar, entonces de la fórmula de Itô

$$\begin{aligned}\sqrt{Z_t} &= a + \frac{1}{2}\int_0^t \frac{1}{\sqrt{Z_s}}\, dZ_s - \frac{1}{8}\int_0^t \frac{1}{(Z_s)^{3/2}}\, d\langle Z, Z\rangle s \\ &= a + \beta_t + \frac{\delta - 1}{2}\int_0^t \frac{1}{X_s}\, ds,\end{aligned}$$

donde β es una movimiento browniano estándar. En otras palabras, un BES de dimensión $\delta \geq 2$ que empieza en $a \geq 0$ es solución de

$$X_t = a + \beta_t + \frac{\delta - 1}{2}\int_0^t \frac{1}{X_s}\, ds. \tag{2.3}$$

La teoría de ecuaciones diferenciales estocástica nos permite demostrar que esta EDE tiene una única solución fuerte. En el caso $\delta < 2$ la situación es diferente. Por ejemplo si $\delta = 1$, la fórmula de Tanaka nos dice que un proceso de Bessel de dimensión 1 no es solución de una ecuación del tipo (2.3) debido a la aparición del tiempo local.

La densidad del semigrupo se obtiene a partir de la densidad de un $BESQ^{\delta}$ mediante un cambio de variable, y es igual, para $\delta > 0$ a

$$p_t^{\delta}(x, y) = t^{-1}(y/x)^{\nu} y \exp\left(-(x^2 + y^2)/2t\right) I_{\nu}(xy/t) \quad \text{para } x > 0, t > 0$$

y

$$p_t^{\delta}(0, y) = 2^{-\nu} t^{-(\nu+1)} \Gamma(\nu + 1)^{-1} y^{2\nu+1} \exp(-y^2/2t).$$

Un proceso de Bessel, al igual que un proceso de Bessel cuadrado, satisface la propiedad de auto-similitud, es decir, si X es un proceso de Bessel de dimensión δ, para todo $c > 0$, $(c^{-1/2}X_{ct}, t \geq 0)$ también es un proceso de Bessel de dimensión δ que empieza en $c^{-1/2}a$. Para demostrar esta afirmación se sigue la idea análoga a la prueba de la proposición 2.5.

2.2.1. El proceso de Bessel de dimensión 3 y el Teorema de Pitman

En esta sección estaremos interesados en el proceso de Bessel de dimensión 3, al cual denotaremos por X. Recordemos que el proceso X

nunca toca el cero después del tiempo inicial (teo 2.8) y que

$$\lim_{t\to\infty} X_t = +\infty, \qquad \text{casi seguramente.}$$

En este caso, la densidad del semigrupo se puede escribir de una manera más simple, esto debido a la identidad

$$I_{1/2} = \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \sinh(x).$$

Además, otra manera de obtener a P_t^3 es la siguiente. Sea Q_t el semigrupo del movimiento browniano matado al instante en que toca 0. Este semigrupo tiene densidad con respecto a la medida de Lebesgue, la cual satisface

$$q_t(x,y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi t}} \left[\exp\left\{ -\frac{(y-x)^2}{2t} \right\} - \exp\left\{ -\frac{(y+x)^2}{2t} \right\} \right], \qquad x, y > 0,$$

entonces, si tomamos $h(x) = x$ en $(0,\infty)$, se puede verificar que $Q_t h = h$. Esto nos permite ver al semigrupo de P_t^3 como una h-transformada de Q, es decir,

$$P_t^3 f(x) = \frac{1}{h(x)} Q_t(fh)(x), \qquad x > 0,$$

en otras palabras P_t^3 está dado por la densidad $x^{-1} q_t(x,y) y$. Para $x = 0$, se tiene

$$P_t^3 f(0) = \int_0^\infty \left(\frac{2}{\pi t^3} \right)^{1/2} \exp\left\{ -\frac{y^2}{2t} \right\} y^2 f(y)\, dy.$$

Proposición 2.6. *Sean $\mathbb{P}_x^3$ la medida de probabilidad asociada al proceso $BES^3(x)$ con $x > 0$ y*

$$T_a = \inf\{t > 0 : X_t = a\}, \qquad a > 0.$$

Sean $0 < a < x < b$, entonces

$$\mathbb{P}_x^3(T_a < T_b) = \frac{b^{-1} - x^{-1}}{b^{-1} - a^{-1}} \qquad y \qquad \mathbb{P}_x^3(T_a < \infty) = a/x.$$

Además, $J_0 = \inf_{s\geq 0} X_s$ se distribuye uniformemente en $[0,x]$.

Demostración. Primero veamos que X_t^{-1} es una martingala local. De la fórmula de Itô vemos que

$$\begin{aligned}\frac{1}{X_t} &= \frac{1}{x} - \int_0^t \frac{1}{X_s^2}\, dX_s + \int_0^t \frac{1}{X_s^3}\, d\langle X, X\rangle_s \\ &= \frac{1}{x} - \int_0^t \frac{1}{X_s^2}\, d\beta_s,\end{aligned}$$

donde β es un movimiento browniano estándar y ya que $\langle X, X\rangle_t = t$. La martingala local $X_{t\wedge T_a\wedge T_b}^{-1}$ está acotada y por ende es una martingala, entonces, del teorema de paro de Doob se llega a

$$\frac{1}{a}\mathbb{P}_x^3(T_a < T_b) + \frac{1}{b}\mathbb{P}_x^3(T_b < T_a) = \frac{1}{x}.$$

Por otro lado,

$$\mathbb{P}_x^3(T_a < T_b) + \mathbb{P}_x^3(T_b < T_a) = 1,$$

entonces resolviendo el sistema de ecuaciones se obtiene

$$\mathbb{P}_x^3(T_a < T_b) = \frac{b^{-1} - x^{-1}}{b^{-1} - a^{-1}}.$$

Para obtener la segunda afirmación basta hacer a b tender a infinito en la última igualdad. Para finalizar notemos que

$$\mathbb{P}_x^3(J_0 \leq a) = \mathbb{P}_x^3(T_a < \infty) = \frac{a}{x},$$

con lo cual se concluye la demostración. □

Sea B un movimiento browniano estándar y $S_t = \sup_{0\leq s\leq t} B_s$.

Teorema 2.9 (Pitman). *Sea X un $BES^3(0)$ y $J_t = \inf_{s\geq t} X_s$, su ínfimo futuro. Entonces los procesos $((2S_t - B_t, S_t), t \geq 0)$ y $((X_t, J_t), t \geq 0)$ tienen la misma ley.*

Demostración. Sea X un $BES^3(0)$. Consideremos al proceso $Y_t := 2J_t - X_t$ y veamos que para cada t, $J_t = \sup_{s\leq t} Y_s$. En efecto, si $J_t = X_t$ entonces $Y_t = J_t$ y para cada $s \leq t$, dado que $J_s \leq X_s$, tenemos

$$Y_s = 2J_s - X_s \leq J_s \leq J_t = Y_t.$$

Esto implica nuestra afirmación en este caso. Si $X_t \neq J_t$, entonces $X_t > J_t$ y $Y_t < J_t = J_{g_t}$, donde

$$g_t = \sup\{s < t : J_s = X_s\}.$$

El primer caso nos confirma que $J_{g_t} = \sup_{s \leq g_t} Y_s$ y por lo tanto $J_t = \sup_{s \leq t} Y_s$.
Acabamos de mostrar que $(X_t, J_t) = (2J_t - Y_t, J_t)$, donde $J_t = \sup_{s\leq t} Y_s$. El resultado se obtiene facilmente si verificamos que Y es un movimiento browniano estándar. Para ello, debido al teorema de caracterización de Lévy y el hecho de que $\langle Y, Y\rangle_t = \langle X, X\rangle_t = t$, ya que J es una función de variación acotada, basta probar que Y es una martingala.

Primero veamos que para $s < t$, $J_s = J_t \wedge \text{ínf}_{s\leq u\leq t} X_u$. Por lo tanto el conocimiento de J_t y de X_s, $s \leq t$, implica el conocimiento de J_s, $s \leq t$. Entonces $\mathscr{F}_t^Y \subset \mathscr{F}^X \vee \sigma(J_t)$. Por otro lado, $\sigma(J_t) \subset \mathscr{F}_t^Y$ y $\mathscr{F}_t^X \subset \mathscr{F}_t^Y$, ya que $J_t = \sup_{s\leq t} Y_s$ y $X_t = 2J_t - Y_t$ respectivamente. Esto implica que $\mathscr{F}_t^Y = \mathscr{F}_t^X \vee \sigma(J_t)$. Como $Y_t \leq X_t$ y $-Y_t \leq X_t$, cada variable aleatoria es integrable. Para probar que Y es martingala, basta ver que para cada $a \geq 0$ y $s \leq t$,

$$\mathbb{E}_0^3\left[Y_t \mathbb{1}_{\{J_s > a\}} \middle| \mathscr{F}_s^X \right] = \mathbb{E}_0^3\left[Y_s \mathbb{1}_{\{J_s > a\}} \middle| \mathscr{F}_s^X \right],$$

ya que en ese caso para $A = B \cap \{J_s > a\} \in \mathscr{F}_s^Y$ tendríamos que

$$\begin{aligned}
\int Y_t \mathbb{1}_{\{J_s>a\}} \mathbb{1}_B \, d\mathbb{P}_0^3 &= \int \mathbb{E}_0^3\left[Y_t \mathbb{1}_{\{J_s>a\}} \middle| \mathscr{F}_s^X \right] \mathbb{1}_B \, d\mathbb{P}_0^3 \\
&= \int \mathbb{E}_0^3\left[Y_s \mathbb{1}_{\{J_s>a\}} \middle| \mathscr{F}_s^X \right] \mathbb{1}_B \, d\mathbb{P}_0^3 \\
&= \int Y_s \mathbb{1}_{\{J_s>a\}} \mathbb{1}_B \, d\mathbb{P}_0^3
\end{aligned}$$

y como los conjuntos de la forma $B \cap \{J_s > a\}$, $B \in \mathscr{F}_s^X$, $\{J_s > a\} \in \sigma(J_s)$ son generadores de $\mathscr{F}_s^Y$ tendríamos que Y es una $\{\mathscr{F}_t^Y\}$-martingala. Entonces, la proposición (2.1) implica que

$$\mathbb{P}_x^3(J_0 > a) = \mathbb{P}_x^3(T_a = \infty) = \begin{cases} 1 - ax^{-1} & \text{si } a < x \\ 0 & \text{si } a \geq x, \end{cases}$$

así, por la definición de Y y la propiedad de Markov del proceso X se tiene

$$\begin{aligned}\mathbb{E}_0^3\left[Y_s \mathbb{1}_{\{J_s>a\}}\middle|\mathscr{F}_s^X\right] &= \mathbb{E}_0^3\left[(2J_s - X_s)\mathbb{1}_{\{J_s>a\}}\middle|\mathscr{F}_s^X\right]\\ &= \mathbb{E}_{X_s}^3\left[(2J_0 - X_0)\mathbb{1}_{\{J_0>a\}}\right]\\ &= (a - a^2X_s^{-1})\mathbb{1}_{\{X>a\}}.\end{aligned}$$

Para finalizar, nuevamente por la propiedad de Markov

$$\begin{aligned}\mathbb{E}_0^3\left[Y_t \mathbb{1}_{\{J_s>a\}}\middle|\mathscr{F}_s^X\right] &= \mathbb{E}_0^3\left[\mathbb{E}_0^3\left[Y_t\mathbb{1}_{\{J_t>a\}}\mathbb{1}_{\{\inf_{s\le u\le t} X_u>a\}}\middle|\mathscr{F}_t^X\right]\middle|\mathscr{F}_s^X\right]\\ &= \mathbb{E}_0^3\left[\mathbb{E}_0^3\left[Y_t\mathbb{1}_{\{J_t>a\}}\middle|\mathscr{F}_t^X\right]\mathbb{1}_{\{\inf_{s\le u\le t} X_u>a\}}\middle|\mathscr{F}_s^X\right]\\ &= \mathbb{E}_0^3\left[\mathbb{E}_{X_t}^3\left[(2J_0 - X_0)\mathbb{1}_{\{J_0>a\}}\right]\mathbb{1}_{\{\inf_{s\le u\le t} X_u>a\}}\middle|\mathscr{F}_s^X\right]\\ &= \mathbb{E}_0^3\left[(a - a^2X_t^{-1})\mathbb{1}_{\{X_t>a\}}\mathbb{1}_{\{\inf_{s\le u\le t} X_u>a\}}\middle|\mathscr{F}_s^X\right]\\ &= \mathbb{E}_0^3\left[(a - a^2(X_{t-s}\circ\theta_s)^{-1})\mathbb{1}_{\{X_t>a\}}\mathbb{1}_{\{T_a\theta_s>t-s\}}\middle|\mathscr{F}_s^X\right]\\ &= \mathbb{E}_{X_s}^3\left[(a - a^2(X_{t-s})^{-1})\mathbb{1}_{\{T_a>t-s\}}\right]\mathbb{1}_{\{X_s>a\}}\\ &= \mathbb{E}_{X_s}^3\left[(a - a^2(X_{(t-s)}\wedge T_a)^{-1})\right]\mathbb{1}_{\{X_s>a\}}\\ &= (a - a^2X_s^{-1})\mathbb{1}_{\{X_s>a\}},\end{aligned}$$

ya que $(X_{s\wedge T_a}^{-1})$ es una martingala acotada. Por lo tanto Y es una martingala y eso concluye la demostración. □

Capítulo 3

Excursiones

Hasta el momento se han estudiado propiedades del movimiento browniano mediante el desarrollo de la teoría de tiempos locales, en éste capítulo el enfoque de su estudio se realizará bajo un punto de vista diferente, mediante el estudio de sus excursiones.

A lo largo del capítulo definiremos formalmente las "excursiones" del movimiento browniano, así como el proceso de excursiones y propiedades del mismo, con el fin de poder representar de dos maneras distintas al proceso de excursiones y cuyas representaciones estarán ligadas a los procesos de Markov y de Bessel.

Para el desarrollo de los objetivos generales mencionados arriba es necesario estar familiarizado con los procesos puntuales de Poisson (PPP), por ésta razón se desarrolla una descripción general de los mismos y se presentan resultados claves que serán de gran utilidad para el posterior estudio de la teoría de excursiones.

3.1. Procesos Puntuales y Procesos Puntuales de Poisson.

En lo sucesivo consideraremos un espacio medible $(U, \mathscr{U})$ al cual le añadiremos un punto δ y fijamos $U_\delta = U \cup \{\delta\}$, $\mathscr{U}_\delta = \sigma(\mathscr{U}, \{\delta\})$

Definición 3.1. *Un proceso $e = (e_t, t > 0)$ definido en un espacio de probabilidad $(\Omega, \mathscr{F}, \mathbb{P})$ con valores en $(U_\delta, \mathscr{U}_\delta)$ se dice que es un proceso puntual si*

i) *el mapeo $(t, \omega) \to e_t(\omega)$ es $\mathscr{B}((0,\infty)) \otimes \mathscr{F}$-medible;*

ii) *el conjunto $D_\omega = \{t : e_t(\omega) \neq \delta\}$ es c.s. numerable.*

Notemos que la segunda condición nos dice que c.s. podemos enumerar los instantes en los cuales e es distinto de δ, o de manera equivalente podemos decir que el conjunto $\{\omega \in \Omega : D_\omega$ es no numerable$\}$ está contenido en un conjunto de medida cero $\mathscr{F}$-medible.

Además, dado un proceso puntual e y $\Gamma \in \mathscr{U}_\delta$ podemos redefinir un nuevo proceso puntual e^Γ tal que $e_t^\Gamma(\omega) = e_t(\omega)$ si $e_t(\omega) \in \Gamma$, y $e_t^\Gamma(\omega) = \delta$ en otro caso. Ahora, para un subconjunto medible Λ de $(0,\infty) \times U$, definimos

$$N^\Lambda(\omega) = \sum_{t>0} \mathbb{1}_\Lambda(t, e_t(\omega)).$$

Si en particular Λ es de la forma $(0,t] \times \Gamma$, escribiremos N_t^Γ en lugar de N^Λ; de la misma manera $N_{(s,t]}^\Gamma = \sum_{s<u\leq t} \mathbb{1}_\Gamma(e_u)$. $N^{(\cdot)}$ es una medida aleatoria discreta con soporte c.s. numerable debido a la propiedad **(ii)**, para un estudio más detallado sobre los procesos puntuales puede verse [7].

Definición 3.2. *Un proceso puntual diremos que es discreto si $N^U < \infty$ c.s. para todo t. El proceso e es σ-discreto si existe una sucesión (U_n) de conjuntos tal que la unión es igual a U y tal que e^{U_n} es discreto.*

Se ha definido el concepto de proceso puntual en general, por lo que ahora enunciaremos algunas definiciones y resultados que darán pie a definir un proceso puntual de Poisson.

Definición 3.3. *Sea $(\Omega, \mathscr{F}, \mathscr{F}_t, \mathbb{P})$ un espacio de probabilidad filtrado. Un $(\mathscr{F}_t)$-proceso de Poisson N es un proceso adaptado, continuo por la derecha, tal que $N_0 = 0$, y para todo $s < t$, y $k \in \mathbb{N}$*

$$\mathbb{P}\left(N_t - N_s = k \middle| \mathscr{F}_s\right) = c^k \frac{(t-s)^k}{k!} \exp\left(-c(t-s)\right)$$

para alguna constante $c > 0$ llamado el parámetro de N. Definimos $\Delta N_t = N_t - N_{t^-}$.

La definición anterior de $(\mathscr{F}_t)$-proceso de Poisson es equivalente, desde el punto de vista de los procesos de Lévy, a pedir que sea un proceso de Lévy que únicamente crece mediante saltos de magnitud igual a 1 c.s. y ésta equivalencias está dada por la siguiente propocisión.

Proposición 3.1. *Un proceso adaptado, continuo por la derecha es un $(\mathscr{F}_t)$-proceso de Poisson si y sólo si es un proceso de Lévy que crece únicamente mediante saltos de magnitud c.s. igual a 1.*

Demostración. Sea N un $(\mathscr{F}_t)$-proceso de Poisson. De la definición se sigue que sus trayectorias son no-decrecientes c.s. ya que $N_t - N_s$ toma valores enteros no negativos para todo $s < t$, tiene trayectorias continuas por la derecha, por lo que sólo falta probar que la magnitud de sus saltos son c.s. iguales a 1.

Notemos que para cualquier T fijo, el conjunto de saltos es finito c.s., ésto debido a que la probabilidad del evento $\{N_T = \infty\}$ es igual a $1 - \sum_{k\geq 0} \mathbb{P}(N_T = k)$, la cual es idénticamente cero, en consecuencia,

$$\sup_{0\leq t\leq T}(N_t - N_{t^-}) = \lim_n \max_{1\leq k\leq n}(N_{kT/n} - N_{(k-1)T/n}) \qquad \text{c.s.;}$$

pero

$$\mathbb{P}\left(\max_{1\leq k\leq n}(N_{kT/n} - N_{(k-1)T/n}) \leq 1\right)$$
$$= \mathbb{P}\left(N_{T/n} \leq 1\right)^n = \left(e^{-cT/n}(1 + cT/n)\right)^n$$

la cual tiende a 1 cuando n tiende a infinito. Por ende los saltos de N son c.s. de magnitud igual a 1.
El recíproco se sigue falcilmente.

□

La siguiente proposición será de utilidad cuando se de una caracterización de un proceso de Poisson d-dimensional.

Proposición 3.2. *Si N^1 y N^2 son dos proceso de Poisson independientes, entonces*

$$\sum_{s>0}(\Delta N_s^1)(\Delta N_s^2) = 0 \qquad \textit{c.s.;}$$

es decir, los dos procesos c.s. no saltan simultáneamente.

Demostración. Sean τ_n, $n \geq 1$ los tiempos de salto sucesivos de N^1, entonces

$$\sum_{s>0}(\Delta N_s^1)(\Delta N_s^2) = \sum_{n\geq 1}(\Delta N_{\tau_n}^2) \qquad \text{c.s.}$$

Por otro lado, para cada t fijo tenemos que

$$\mathbb{E}\left(\Delta N_t^2\right) = \lim_{s\uparrow t}\mathbb{E}\left(N_t^2 - N_s^2\right) = 0,$$

por lo tanto $\Delta N_t^2 = 0$ c.s. para todo t.
Finalmente, por la independencia entre N^2 y N^1 tenemos que

$$\mathbb{E}\left(\sum_{n\geq 1}\Delta N_{\tau_n}^2\right) = \mathbb{E}\left(\sum_{s>0}(\Delta N_s^1)(\Delta N_s^2)\right) = \sum_{s>0}\mathbb{E}\left(\Delta N_s^1\right)\mathbb{E}\left(\Delta N_s^2\right) = 0,$$

por lo que $\Delta N_{\tau_n}^2 = 0$ c.s. para todo $n \in \mathbb{N}$, es decir, cada vez que salta N^1, no lo hace N^2. □

Ahora generalizamos la noción de proceso de Poisson a mayores dimensiones.

Definición 3.4. *Un proceso $(N^1, \ldots, N^d)$ es un $(\mathscr{F}_t)$-proceso de Poisson d-dimensional si cada N^i es un proceso adaptado, continuo por la derecha tal que $N_0^i = 0$ y si existen constantes c_i tales que para todo $t \geq s \geq 0$,*

$$\mathbb{P}\left(\bigcap_{i=1}^{d}\{N_t^i - N_s^i = k_i\}\,\middle|\,\mathscr{F}_s\right) = \prod_{i=1}^{d}\exp(-c_i(t-s))\frac{(c_i(t-s))^{k_i}}{k_i!}.$$

Enunciamos ahora una caracterización.

Proposición 3.3. *Un proceso adaptado $N = (N^1, \ldots, N^d)$ es un $(\mathscr{F}_t)$-proceso de Poisson d-dimensional si y sólo si*

i) cada N^i es un $(\mathscr{F}_t)$-proceso de Poisson,

ii) ningún par de N^i's salta simultaneamente.

Demostración. Si suponemos que N es un $(\mathscr{F}_t)$-proceso de Poisson d-dimensional, entonces, por definición y debido a la proposición (3.2) es claro que se satisfacen (i) y (ii).

Reciprocamente, basta probar que las variables aleatorias $N_t^i - N_s^i, i = 1, \ldots, d$, son independientes. Por simplicidad y mayor claridad supondremos que $d = 2$. Sean (f_1, f_2) un par de funciones simples en $\mathbb{R}_+$ y consideremos al proceso

$$X_t = \exp\left\{ i\left(\int_0^t f_1(s)\, dN_s^1 + \int_0^t f_2(s)\, dN_s^2 \right) \right\}.$$

Notemos que X es de variación acotada, por lo que se puede escribir a X como función de sus incrementos, es decir

$$\begin{aligned} X_t &= 1 + \sum_{0<s\leq t} (X_s - X_{s^-}) \\ &= 1 + \sum_{0<s\leq t} X_{s^-} \{\exp(i(f_1(s)\Delta N_s^1 + f_2(s)\Delta N_s^2)) - 1\}. \end{aligned}$$

La condición (ii) implica que, si $\Delta N_s^1 = 1$ entonces $\Delta N_s^2 = 0$ y viceversa; por lo que podemos reescribir la ultima igualdad, quedando como

$$X_t = 1 + \sum_{0<s\leq t} X_{s^-} \{(e^{if_1(s)} - 1)\Delta N_s^1 + (e^{if_2(s)} - 1)\Delta N_s^2\}.$$

El proceso X_{s^-} es predecible, así, usando integración con respecto a las martingalas $M_t^i = N_t^i - c_i t$, obtenemos

$$\mathbb{E}(X_t) = 1 + \mathbb{E}\left(\int_0^t X_{s^-} \{(e^{if_1(s)} - 1)c_1 + (e^{if_2(s)} - 1)c_2\}\, ds \right),$$

pero, como $\{s : X_s \neq X_{s^-}\}$ es c.s. numerable y por ende Lebesgue nulo, se tiene que

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(X_t) &= 1 + \mathbb{E}\left(\int_0^t X_s \{(e^{if_1(s)} - 1)c_1 + (e^{if_2(s)} - 1)c_2\}\, ds \right) \\ &= 1 + \int_0^t \mathbb{E}(X_s) \{(e^{if_1(s)} - 1)c_1 + (e^{if_2(s)} - 1)c_2\}\, ds. \end{aligned}$$

Por lo que resolviendo la ecuación integral para, $\phi(t) = \mathbb{E}(X_t)$, finalmente obtenemos

$$\mathbb{E}(X_t) = \exp\left(\int_0^t c_1(e^{if_1(s)} - 1)\, ds \right) \exp\left(\int_0^t c_2(\exp^{if_2(s)} - 1)\, ds \right),$$

así, debido a la fórmula de Campbell, queda completa la demostración.

□

Con los elementos mencionados anteriormente, finalmente se está en posición para dar la definición por la cual lleva el nombre ésta sección.

Definición 3.5. *Un $(\mathscr{F}_t)$-proceso puntual de Poisson (de forma abreviada: $(\mathscr{F}_t)$-PPP) es un proceso puntual σ-discreto (e_t), tal que*

i) el proceso e es $(\mathscr{F}_t)$-adaptado, es decir, para todo $\Gamma \in \mathscr{U}$, el proceso N_t^Γ es $(\mathscr{F}_t)$-adaptado;

ii) para todo s y $t > 0$ y cualquier $\Gamma \in \mathscr{U}$, la ley de $N_{(s,s+t]}^\Gamma$ condicionada en $\mathscr{F}_s$ es la misma que la ley de N_t^Γ.

La propiedad (ii) se puede traducir como que el proceso es homogéneo en el tiempo y que sus incrementos son independientes del pasado, además, cada proceso N^Γ que satisfaga $N_t^\Gamma < \infty$ c.s. para todo t, es un proceso de Poisson ya que

$$N_t^\Gamma = \sum_{0<s\leq t} \mathbb{1}_\Gamma(\mathrm{e}_s),$$

de donde es claro que es un proceso continuo por la derecha, creciente, cuyos incrementos son de magnitud idénticamente 1, lo anterior junto con la propiedad (ii) nos dice que es un proceso de Lévy con incrementos únicamente dados por saltos de magnitud igual a 1, por lo que debido a la proposición (3.1) se cumple la afirmación. Además, si los conjuntos Γ_i son disjuntos dos a dos y tales que $N_t^{\Gamma_i} < \infty$ c.s. para todo t, se tiene, debido a la proposición (3.2), que el proceso $\left(N_t^{\Gamma_i}, i = 1, 2, \ldots, d\right)$ es un proceso de Poisson d-dimensional, ya que al ser los conjuntos disjuntos no pueden saltar al mismo tiempo.

Más aún, cuando $N_t^\Gamma < \infty$ c.s., entonces $\mathbb{E}\left(N_t^\Gamma\right) < \infty$ y el mapeo $t \mapsto \mathbb{E}\left(N_t^\Gamma\right)$ es aditivo, por ende $\frac{1}{t}\mathbb{E}\left(N_t^\Gamma\right)$no depende de $t > 0$, así podemos definir una media en $\mathscr{U}$.

Definición 3.6. *La medida σ-finita definida en $\mathscr{U}$ por*

$$n(\Gamma) = \frac{1}{t}\mathbb{E}\left(N_t^\Gamma\right), \quad t > 0,$$

es llamada medida característica de e. La media n se extiende a U_δ al definir $n(\{\delta\}) = 0$.

Así, si $n(\Gamma) < \infty$, $n(\Gamma)$ es el parámetro del proceso de Poisson N^Γ, también, si ahora consideramos un conjunto arbitrario $\Lambda \in \mathscr{B}(\mathbb{R}_+) \otimes \mathscr{U}_\delta$, el teorema de clases monótonas implica que

$$\mathbb{E}\left(N^\Lambda\right) = \int_0^\infty dt \int \mathbb{1}_\Lambda(t,u)\, n(du).$$

En lo que resta de la sección estudiaremos algunas identidades de los valores esperados de funciones de procesos puntuales, como la célebre fórmula de compensación y la fórmula exponencial.

Proposición 3.4 (Fórmula de compensación). *Sea H un proceso positivo definido en $(\mathbb{R}_+ \times \Omega \times U_\delta)$, medible con respecto a $\mathscr{P}(\mathscr{F}_t) \otimes \mathscr{U}_\delta$ y tal que $H(\cdot,\cdot,\delta) = 0$, entonces*

$$\mathbb{E}\left(\sum_{s>0} H(s,\omega,e_s(\omega))\right) = \mathbb{E}\left(\int_0^\infty ds \int H(s,\omega,u)\, n(du)\right),$$

donde $\mathscr{P}(\mathscr{F}_t)$ es la σ-algebra predecible.

Demostración. Gracias al teorema de clases monótonas, es suficiente probar que la igualdad se satisface para procesos del tipo $H(s,\omega,u) = K(s,\omega)\mathbb{1}_\Gamma(u)$ donde K es un proceso $(\mathscr{F}_t)$-predecible, acotado positivo y $\Gamma \in \mathscr{U}$ tal que $n(\Gamma) < \infty$. En ese caso, recordando que $N_t^\Gamma - tn(\Gamma)$ es martingala ya que N^Γ es un proceso de Poisson, el lado izquierdo es igual a

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}\left(\sum_{s>0} K(s,\omega)\mathbb{1}_\Gamma(e_s(\omega))\right) &= \mathbb{E}\left(\int_0^\infty K(s,\omega)\, dN_s^\Gamma(\omega)\right) \\
&= \mathbb{E}\left(\int_0^\infty K(s,\omega) n(\Gamma)\, ds\right) \\
&= \mathbb{E}\left(\int_0^\infty K(s,\omega) \int \mathbb{1}_\Gamma(u)\, n(du) ds\right) \\
&= \mathbb{E}\left(\int_0^\infty ds \int H(s,\omega,u)\, n(du)\right).
\end{aligned}$$

□

Proposición 3.5 (Fórmula exponencial). *Si f es una función $\mathscr{B}(\mathbb{R}_+) \otimes \mathscr{U}$-medible tal que $\int_0^\infty ds \int |f(s,u)|\, n(du) < \infty$ entonces, para todo $t \leq \infty$,*

$$\mathbb{E}\left(\exp\left\{i \sum_{0<s\leq t} f(s,e_s)\right\}\right) = \exp\left\{\int_0^t ds \int (e^{if(s,u)} - 1)\, n(du)\right\}.$$

Para $f \geq 0$ la siguiente igualdad también se satisface

$$\mathbb{E}\left(\exp\left\{-\sum_{0<s\leq t} f(s,e_s)\right\}\right) = \exp\left\{-\int_0^t ds \int (1 - e^{-f(s,u)})\, n(du)\right\}$$

Demostración. Análogamente a la proposición (3.3), nos fijamos en el hecho de que el proceso $X_t = \sum_{0<s\leq t} f(s,e_s)$ es de variación acotada y que es puramente discontinuo, así, para $g\mathscr{B}(\mathbb{R}_+)$,

$$g(X_t) - g(x_0) = \sum_{s\leq t}(g(X_s) - g(X_{s^-})),$$

en particular, para $g(y) = e^{iy}$ se tiene

$$\begin{aligned} e^{iX_t} - 1 &= \sum_{s\leq t}\left(\exp\left\{i\sum_{u\leq s} f(u,e_u)\right\} - \exp\left\{i\sum_{u<s} f(u,e_u)\right\}\right) \\ &= \sum_{s\leq t}\exp\left\{i\sum_{u<s} f(u,e_u)\right\}(\exp\{if(s,e_s)\} - 1)\,, \end{aligned}$$

por lo que si definimos $\phi(t) = \mathbb{E}\left(\exp\{iX_t\}\right)$, llegamos a

$$\phi(t) = 1 + \mathbb{E}\left(\sum_{s\leq t}\exp\left\{i\sum_{u<s} f(u,e_u)\right\}(\exp\{if(s,e_s)\} - 1)\right),$$

y usando la fórmula de compensación, la expresión anterior es igual a

$$1 + \mathbb{E}\left(\int_0^t ds \exp\left\{i\sum_{0<u<s} f(u,e_u)\right\}\int (e^{if(s,u)} - 1)\, n(du)\right).$$

Finalmente notemos que, debido a la hipótesis hecha sobre f, tenemos que la función $\psi(\cdot) = \int (e^{if(\cdot,u)} - 1)\, n(du)$ pertenece a $L^1(\mathbb{R}_+)$, por lo que ϕ puede ser escrita como

$$\phi(t) = 1 + \int_0^t \psi(s)\phi(s^-)\, ds,$$

y ya que el conjunto tiempos donde $X_s \neq X_{s^-}$ es nulo con respecto a la medida de Lebesgue llegamos a la ecuación integral

$$\phi(t) = 1 + \int_0^t \psi(s)\phi(s)\, ds,$$

de donde es claro que ϕ es continua, por lo que resolviendo llegamos a

$$\phi(t) = \exp\left\{\int_0^t \psi(s)\,ds\right\}$$

que corresponde a la fórmula de la proposición. La segunda fórmula se prueba de manera análoga. □

El resultado nos muestra que si dos *PPP* tienen la misma medida característica entonces tienen la misma ley, es decir, n caracteriza a e.

Para concluir la sección consideremos lo siguiente, sea $S = \inf\{t : N_t^U > 0\}$, el tiempo del primer salto del proceso de Poisson N^U, y veamos de que manera están relacionados S y e_S.

Lema 3.1. *Si $n(U) < \infty$, entonces S y e_S son independientes y para todo $\Gamma \in \mathscr{U}$*

$$\mathbb{P}\left(e_S \in \Gamma\right) = \frac{n(\Gamma)}{n(U)}.$$

Demostración. Ya que $\Gamma \cap \Gamma^c = \emptyset$, los procesos de Poisson N^Γ y N^{Γ^c} no saltan al mismo tiempo y por ende son independientes. Sean T y T^c sus respectivos tiempos del primer salto. Notemos que para todo t,

$$\{S > t; e_S \in \Gamma\} = \{t < T \wedge T^c, T < T^c\} = \{t < T < T^c\}$$

y en consecuencia, ya que T y T^c son variables aleatorias independientes con distribución exponencial de parámetros $n(\Gamma)$ y $n(\Gamma^c)$ respectivamente, obtenemos

$$\begin{aligned}\mathbb{P}\left(S > t; e_S \in \Gamma\right) &= \int_t^\infty n(\Gamma)e^{-n(\Gamma)s}\,ds \int_s^\infty n(\Gamma^c)e^{-n(\Gamma^c)u}\,du \\ &= (n(\Gamma)/n(U))e^{-n(U)t},\end{aligned}$$

con lo cual se terminaría la prueba al marginalizar, ya que si $\Gamma = U$ obtendríamos que S tiene una distribución exponencial de parámetro $n(U)$, y al hacer $t \to 0$ obtendríamos la fórmula del enunciado. □

3.2. Excursiones brownianas.

A partir de éste punto consideramos la versión canónica del movimiento browniano, es decir, consideramos a $\mathbf{W} = C(\mathbb{R}_+, \mathbb{R})$ el espacio de Wiener, $\mathbb{P}$ la medida de Wiener y a $\mathscr{F}$ la σ-álgebra de Borel de $\mathbf{W}$ completada con respecto a $\mathbb{P}$.

Para poder utilizar las herramientas desarrolladas en la sección anterior es necesario tener el mismo contexto en lo que respecta a los espacios donde definiremos los objetos llamados excursiones, por lo que definimos para toda $w \in \mathbf{W}$,

$$V(w) = \inf\{t > 0 : w(t) = 0\},$$

así, definimos al espacio U como el espacio de funciones w tales que $0 < V(w) < \infty$ y $w(t) = 0$ para todo $t \geq V(w)$. De la definición anterior resulta claro que las gráficas de la funciones w quedan totalmente por arriba del eje t o totalmente por debajo de él, por lo que podemos pensar que U puede descomponerse en subconjuntos U_+ y U_- que representen respectivamente a tales subconjuntos. El punto δ relacionado con la sección anterior los definimos como la función que es idénticamente cero. Finalmente, la σ-álgebra $\mathscr{U}$ es la generada por el proceso de coordenadas. Cabe resaltar que U_δ es un subconjunto de $\mathbf{W}$, además, U_δ es nulo para $\mathbb{P}$ ya que el conjunto de ceros del movimiento browniano tiene medida de Lebesgue, denotada por λ, igual a cero c.s, por lo que

$$\mathbb{P}\left(\{w \in \mathbf{W} : \lambda\{t : w(t) = 0\} = 0\}\right) = 1$$

o equivalentemente

$$\mathbb{P}\left(\{w \in \mathbf{W} : \lambda\{t : w(t) = 0\} > 0\}\right) = 0,$$

entonces, si $w \in U$ sabemos que existe un t_0 tal que $w(t) = 0$ para todo $t \geq t_0$, es decir

$$\lambda\{t : w(t) = 0\} = \infty \quad \text{para todo } w \in U,$$

por lo tanto $U \subset \{w \in \mathbf{W} : \lambda\{t : w(t)\} > 0\}$, de donde es claro que $\mathbb{P}(U) = 0$. Ésta última observación es importante ya que definiremos y estudiaremos algunas propiedades de una medida n definida sobre U_δ, por lo que será singular con respecto a $\mathbb{P}$.

Definición 3.7. *El proceso de excursiones es el proceso* $e = (e_s, s > 0)$, *definido en* $(\mathbf{W}, \mathscr{F}, \mathbb{P})$ *con valores en* $(U_\delta, \mathscr{U}_\delta)$ *dado por*

i) si $\tau_s(w) - \tau_{s^-}(w) > 0$, *entonces* $e_s(w)$ *es el mapeo*

$$r \mapsto \mathbb{1}_{[r \leq \tau_s(w) - \tau_{s^-}(w)]} B_{\tau_{s^-}(w)+r}(w);$$

ii) si $\tau_s(w) - \tau_{s^-}(w) = 0$, *entonces* $e_s(w) = \delta$.

Algunas veces se escribirá $e_s(r, w)$ *ó* $e_s(r)$ *para la función* $e_s(w)$ *tomada al tiempo* r.

Para ver que satisface las condiciones de un proceso puntual consideremos al mapeo $(t, w) \mapsto X_r(e_t(w))$, donde X_r es un mapeo fijo de coordenadas sobre U, así es claro que éste mapeo es medible y por ende satisface (i) de la definición (3.1). Además, e_s no es igual a δ si, y sólo si, el tiempo local L tiene un intervalo constante en el nivel s y e_s es entonces esa parte de la trayectoria browniana que está entre los tiempos τ_{s^-} y τ_s en los cuales B es cero. En la sección 2 del capítulo I demostramos que existen c.s. solamente una cantidad numerable de tiempos s tales que L tiene intervalos constantes en (τ_{s^-}, τ_s), lo cual satisface la condición (ii) de la definición (3.1).
No sólo resulta que el proceso de excursiones es un proceso puntual, sino que además es un proceso puntual de Poisson, para la prueba de dicha afirmación necesitamos los siguientes resultados auxiliares.

Proposición 3.6. *El proceso e es* σ*-discreto.*

Demostración. Consideremos los conjuntos

$$U_n = \{u \in U : V(u) \geq 1/n\},$$

ya que cada U_n está en función de V es claro que $U_n \in \mathscr{U}$ para todo $n \in \mathbb{N}$ y la unión es igual a U. Las funciones

$$N_t^{U_n}(w) = \sum_{s \leq t} \mathbb{1}_{(e_s(w) \in U_n)},$$

son medibles. De hecho, el proceso $t \mapsto \tau_t$ es creciente y continuo por la derecha, por lo que si para cada $n \in \mathbb{N}$ definimos $T_1 = \inf\{t > 0 : \tau_t - \tau_{t^-} > 1/n\}$, obtenemos que $\mathbb{P}(T_1 > 0) = 1$, ya que en el escenario

extremo de no existir una excursión con longitud mayor que $1/n$ tendríamos que $T_1 = +\infty$.
Ahora, si definimos de manera inductiva

$$T_k = \text{ínf}\{t > T_{k-1} : \tau_t - \tau_{t^-} > 1/n\}$$

entonces, las T_k's son variables aleatorias y

$$N_t^{U_n} = \sum_k \mathbb{1}_{(T_k \leq t)}$$

es una variable aleatoria, la equivalencia anterior se da porque es lo mismo contar el número de excursiones cuya longitud es mayor a $1/n$ hasta el tiempo t, que contar en número de renovaciones (aparece una excursión de longitud mayor que $1/n$) hasta el tiempo t.
Finalmente notemos que

$$\begin{aligned}
\tau_t &\geq \sum_{s \leq t} (\tau_s - \tau_{s^-}) \\
&\geq \sum_{s \leq t : (\tau_s - \tau_{s^-}) \geq 1/n} 1/n = 1/n \sum_{k \in \mathbb{N}} \mathbb{1}_{(T_k \leq t)} \\
&= (1/n) N_t^{U_n},
\end{aligned}$$

por lo que

$$N_t^{U_n} \leq n\tau_t < \infty \qquad \text{c.s.},$$

y así concluimos la demostración. □

Las siguientes tres proposiciones son de mayor importancia, ya que implícitamente caracterizan la propiedad de Markov para el proceso de excursiones, la cual es indispensable para mostrar que en realidad es un PPP, dicha propiedad se verá de manera explícita en la prueba de tal afirmación.

Recordando que podemos aproximar el tiempo local mediante el límite de una integral veamos la siguiente proposición.

Proposición 3.7 (Aditividad fuerte). *Si T es un tiempo de paro, entonces, para todo a*

$$L_{T+S}^a = L_T^a + L_S^a(\theta_T) \qquad \mathbb{P}_b\text{-c.s.}$$

para todo b y toda variable aleatoria positiva S.

Demostración. Sea $I(\varepsilon) = (a-\varepsilon, a+\varepsilon)$, entonces

$$\begin{aligned}
L^a_{T+S} &= \lim_{\varepsilon\downarrow 0} \frac{1}{2\varepsilon}\int_0^{T+S} \mathbb{1}_{I(\varepsilon)}(B_s)\,ds \\
&= \lim_{\varepsilon\downarrow 0} \frac{1}{2\varepsilon}\left(\int_0^{T} \mathbb{1}_{I(\varepsilon)}(B_s)\,ds + \int_T^{T+S} \mathbb{1}_{I(\varepsilon)}(B_s)\,ds\right) \\
&= L^a_T + \lim_{\varepsilon\downarrow 0} \frac{1}{2\varepsilon}\int_0^{S} \mathbb{1}_{I(\varepsilon)}(B_{T+r})\,dr \\
&= L^a_T + \lim_{\varepsilon\downarrow 0} \frac{1}{2\varepsilon}\int_0^{S} \mathbb{1}_{I(\varepsilon)}(B_r(\theta_T))\,dr \qquad \mathbb{P}_b\text{-c.s.}
\end{aligned}$$

para todo b. Ahora consideremos las siguientes observaciones, L^a_S es una funcional de $\{B_t\}_{t\geq 0}$, ésto debido a la fórmula de Tanaka, además,

$$\lim_{\varepsilon\downarrow 0} \frac{1}{2\varepsilon}\int_0^{S} \mathbb{1}_{I(\varepsilon)}(B_r)\,dr$$

es también una funcional de $\{B_t\}_{t\geq 0}$, por lo que si consideramos la funcional

$$f(\{B_t\}_{t\geq 0}) = \mathbb{1}_{\{L^a_S(B)=\lim_{\varepsilon\downarrow 0}\frac{1}{2\varepsilon}\int_0^S \mathbb{1}_{I(\varepsilon)}(B_r)\,dr\}}$$

obtenemos, debido a la propiedad de Markov fuerte, que

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}_b\left(L^a_S(\theta_T) = \lim_{\varepsilon\downarrow 0} \frac{1}{2\varepsilon}\int_0^{S} \mathbb{1}_{I(\varepsilon)}(B_r(\theta_T))\,dr\right)& \\
&= \mathbb{E}_b\left(\mathbb{E}\left(f(\{B_t\}_{t\geq 0}\circ\theta_T)\middle|\mathscr{F}_T\right)\right) \\
&= \mathbb{E}_b\left(\mathbb{E}_{B_T}\left(f(\{B_t\}_{t\geq 0})\right)\right) \\
&= \mathbb{E}_b\left(\mathbb{E}_{B_T}\left(\mathbb{1}_{\{L^a_S(B)=\lim_{\varepsilon\downarrow 0}\frac{1}{2\varepsilon}\int_0^S \mathbb{1}_{I(\varepsilon)}(B_r)\,dr\}}\right)\right) = 1,
\end{aligned}$$

donde la última línea es por la definición de tiempo local.
Por lo tanto,

$$L^a_{T+S} = L^a_T + L^a_S(\theta_T) \qquad \mathbb{P}_b\text{-c.s.}$$

□

Ahora, como una aplicación de la proposición anterior se tiene.

Proposición 3.8. *Para todo t, existe un conjunto nulo Θ_t tal que para todo $\omega \notin \Theta_t$ y para todo $s > 0$,*

$$\tau_{t+s}(\omega) = \tau_t(\omega) + \tau_s(\theta_{\tau_t}(\omega)) \qquad \tau_{(t+s)^-}(\omega) = \tau_t(\omega) + \tau_{s^-}(\theta_{\tau_t}(\omega))$$

Demostración. Sabemos que $\tau_t < \infty$ c.s. y que $\tau_{t+s} > \tau_t$. Entonces

$$\begin{aligned} \tau_{t+s} &= \text{ínf}\{u > 0 : L_u > t + s\} \\ &= \tau_t + \text{ínf}\{u > 0 : L_{\tau_t+u} > t + s\}. \end{aligned}$$

Así, usando la propiedad de aditividad fuerte (3.7) de L y el hecho de que $L_{\tau_t} = t$ tenemos que, c.s., para todo s,

$$\begin{aligned} \tau_{t+s} &= \tau_t + \text{ínf}\{u > 0 : L_{\tau_t} + L_u(\theta_{\tau_t}) > t + s\} \\ &= \tau_t + \text{ínf}\{u > 0 : L_u(\theta_{\tau_t}) > s\} = \tau_t + \tau_s \circ \theta_{\tau_t}. \end{aligned}$$

La segunda igualdad de sigue de la primera. □

Lema 3.2. *Para todo $r > 0$, casi-seguramente, la igualdad*

$$e_{s+r}(w) = e_s(\theta_{\tau_r}(w))$$

se satisface para todo s.

Demostración. Basta con notar que $\tau_{s+r} - \tau_{(s+r)^-} > 0$ si y sólo si, $\tau_r(\theta_{\tau_t}) - \tau_{r^-}(\theta_{\tau_t}) > 0$, ésto debido a la propocisión anterior, por lo que la afirmación se sigue directamente. □

Finalmente se tienen las condiciones necesarias para probar que el proceso (e_t) es un PPP.

Teorema 3.1 (Itô). *El proceso de excursiones (e_t) es un $(\mathscr{F}_{\tau_t})$-proceso puntual de Poisson.*

Demostración. Ya que (e_t) esta definido en función de (τ_s) es claro que las variables N_t^Γ son $\mathscr{F}_{\tau_t}$-medibles. Además, por el lema anterior y la propiedad fuerte de Markov tenemos que

$$\begin{aligned} \mathbb{P}\left(N^\Gamma_{(r,r+t]} \in A \middle| \mathscr{F}_{\tau_r}\right) &= \mathbb{P}\left(N_t^\Gamma \circ \theta_{\tau_r} \in A \middle| \mathscr{F}_{\tau_r}\right) \\ &= \mathbb{P}_{B_{\tau_r}}\left(N_t^\Gamma \in A\right), \end{aligned}$$

donde, $B_{\tau_r} = B_{\tau_{r^-}} = 0$ c.s. ya que los intervalos (τ_{s^-}, τ_s) son vacíos a menos que L sea constante en el nivel s y cuya longitud del segmento constante es precisamente la longitud de $[\tau_{s^-}, \tau_s]$, como L es constante c.s. debido a que $B_t \neq 0$ c.s. para todo t se satisface la afirmación, por lo tanto

$$\mathbb{P}\left(N^\Gamma_{(r,r+t]} \in A \middle| \mathscr{F}_{\tau_r}\right) = \mathbb{P}\left(N_t^\Gamma \in A\right) \qquad \text{c.s.,}$$

obteniendo finalmente que (e_t) es un $(\mathscr{F}_{\tau_t})$-PPP.

□

Recordando que habíamos definido la medida característica, n, de un proceso puntual general, en el caso del proceso de excursiones se hará alusión a ella como la ***medida de Itô***, se seguirá denotando por, n y a sus restricciones en U_+, U_- (los espacios de trayectorias positivas y negativas respectivamente) las denotaremos por n_+ y n_-. Debido a que las trayectorias brownianas en $C(\mathbb{R}_+, \mathbb{R})$ tiene medida 1 con respecto a la medida de Wiener, se sigue que los conjuntos de trayectorias u's para los cuales carga la medida, n, son aquellos cuyos elementos satisfacen $u(0) = 0$.

Para dar una mejor descripción de los elementos de U vamos a considerar las siguiente observaciones. Para $w \in \mathbf{W}$, denotamos por $i_0(w)$ al elemento u de U tal que

$$u(t) = w(t) \quad \text{si } t < V(w), \qquad u(t) = 0 \quad \text{si } t \geq V(w),$$

donde $V(w) = \text{ínf}\{t > 0 : w(t) = 0\}$.
Ahora, si $s > 0$, podemos aplicar la misma definición a la trayectoria trasladad, es decir, a $\theta_s(w) \in \mathbf{W}$, así, $i_s(w) = i_0(\theta_s(w))$. Observemos que $V(\theta_s(w)) = V(i_s(w))$.

Consideremos ahora al conjunto Θ_ω cuyos elementos son los extremos izquierdos estrictamente positivos de los intervalos contiguos al conjunto $Z(\omega)$ de ceros de B, es decir, el conjunto de los tiempos de inicio de las excursiones, o de manera más clara

$$\{\tau_{s^-} : \tau_{s^-} \neq \tau_s\} = \{\tau_{s^-} : V(\theta_{\tau_{s^-}}(w)) > 0\}.$$

Sea H un proceso positivo $\mathscr{P}(\mathscr{F}_t) \otimes \mathscr{U}_\delta$-medible que se desvanece en δ, entonces satisface las condiciones necesarias para poder aplicar la fórmula de compensación

$$\mathbb{E}\left(\sum_s H(\tau_{s^-}(w), w; e_s(w))\right) = \mathbb{E}\left(\int_0^\infty ds \int H(\tau_{s^-}(w), w; u)\, n(du)\right).$$

Así como se observó en la sección anterior, debido a que el conjunto $\{s : \tau_{s^-} \neq \tau_s\}$ es numerable y que se integra con respecto a la medida de Lebesgue se puede remplazar τ_{s^-} por τ_s, notemos también que debido a las observaciones hechas sobre los elementos de U, el lado izquierdo de la última expresión puede ser escrito como $\mathbb{E}\left(\sum_{\gamma \in \Theta_\omega} H(\gamma, w, i_\gamma(w))\right)$, por lo que tenemos la siguiente proposición

Proposición 3.9. *Si H es como arriba,*

$$\mathbb{E}\left(\sum_{\gamma\in G_w} H(\gamma, w, i_\gamma(w))\right) = \mathbb{E}\left(\int_0^\infty ds \int H(\tau_s(w), w; u)\, n(du)\right) = \mathbb{E}\left(\int_0^\infty dL_t(w) \int H(t, w; u)\, n(du)\right).$$

Demostración. Por las observaciones hechas en el párrafo anterior basta probar la segunda igualdad, la cual se satisface ya que para toda función positiva de Borel definida en $[0,\infty)$, toda función A_t creciente, continua por la derecha, y su inverso (continuo por la derecha) C_t, se tiene que

$$\int_{[0,\infty)} f(u)\, dA_u = \int_0^\infty f(C_s)\mathbb{1}_{(C_s<\infty)}\, ds.$$

Como el tiempo local, L, satisface dichas condiciones finalmente concluimos que

$$\mathbb{E}\left(\int_0^\infty ds \int H(\tau_s(w), w; u)\, n(du)\right) = \mathbb{E}\left(\int_0^\infty dL_t(w) \int H(t, w; u)\, n(du)\right).$$

□

Bajo la medida n se puede caracterizar la ley de V, además, si definimos $h : U \to \mathbb{R}$ como $h(u) = \sup\{u(t), t \geq 0\}$, es decir, la altura máxima de la excursión, se puede también encontrar de manera explícita su ley, por lo que se obtiene la siguiente proposición:

Proposición 3.10. *Sea $V(u) = \inf\{t > 0 : u(t) = 0\}$ y h definida como en el párrafo anterior, entonces, para $x > 0$*

$$(i)\; n(V \in dx) = \frac{dx}{\sqrt{2\pi x^3}}, \qquad (ii)\; n(h > x) = \frac{1}{2x}.$$

Demostración. Sea $f \geq 0$ medible y $\lambda > 0$ una constante positiva. De la fórmula exponencial obtenemos

$$\begin{aligned}\mathbb{E}\left(\exp\left\{-\lambda\int_0^{\tau_t} ds\, f(B_s)\right\}\right) &= \mathbb{E}\left(\exp\left\{-\lambda\sum_{s\leq t}\int_{\tau_{s^-}}^{\tau_s} du\, f(B_u)\right\}\right)\\ &= \mathbb{E}\left(\exp\left\{-\lambda\sum_{s\leq t}\int_0^{V(e_s)} dr\, f(e_s(r))\right\}\right)\\ &= \exp\left\{-\int_0^t ds\int (1 - e^{-\lambda\int_0^{V(u)} dr\, f(u(r))}) n(du)\right\}.\end{aligned}$$

Por lo que para $f \equiv 1$ se tiene que

$$\mathbb{E}\left(\exp\{-\lambda\tau_t\}\right) = \exp\left\{-t\int(1-e^{-\lambda V(u)})n(du)\right\}.$$

Por otro lado sabemos que

$$\mathbb{E}\left(\exp\{-\lambda\tau_t\}\right) = \exp\{-t\sqrt{2\lambda}\},$$

ya que $\tau_1 \stackrel{\mathcal{L}}{=} \text{ínf}\{s : B_s = 1\}$. Entonces de las últimas dos expresiones, utilizando los teoremas de cambio de variable y Fubini, concluimos que

$$\begin{aligned}\sqrt{2\lambda} &= \int\left(1-e^{-\lambda V(u)}\right)n(du)\\ &= \int(1-e^{-\lambda t})n(V\in dt)\\ &= \int\int_0^t \lambda e^{-\lambda x}\,dx\,n(V\in dt)\\ &= \lambda\int dx e^{-\lambda x} n(V>x),\end{aligned}$$

es decir,

$$\sqrt{\frac{2}{\lambda}} = \int dx e^{-\lambda x} n(V>x).$$

Recordando el hecho que para $\alpha > 0$ tenemos

$$\frac{1}{\lambda^\alpha} = \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^\infty dx e^{-\lambda x}x^{\alpha-1},$$

obtenemos para $\alpha = 1/2$ lo siguiente

$$\sqrt{\frac{2}{\lambda}} = \int dx e^{-\lambda x}\sqrt{2/\pi x},$$

por lo tanto $n(V > x) = \sqrt{2/\pi x}$ para $x > 0$, de donde se sigue la primera afirmación.
Para la segunda afirmación consideremos el conjunto $\Gamma_x = \{u \in U : h(u) \geq x\}$ y recordemos que $T_x = \text{ínf}\{s : B_s = x\}$, $g_T = \sup\{s \leq T : B_s\}$ y $d_T = \text{ínf}\{s > T : B_s = 0\}$, junto con el hecho de que e_t es un $\mathscr{F}_{\tau_t}$-PPP. Entonces, g_{T_x} es el instante del último cero de B antes de cruzar el nivel x y d_{T_x} es el instante del primer cero de B después de haber

cruzado el nivel x, así, la excursión individual definida en $[g_{T_x}, d_{T_x}]$ es la primera excursión que tiene una altura mayor a x, además $g_{T_x} \in Z$ y por definición es el extremo izquierdo de la excursión, por ende, debido al corolario (1.4) $g_{T_x} = \tau_{L_{T_x^-}}$, es decir, L_{T_x} es el tiempo del primer salto del proceso de Poisson N^{Γ_x}, por lo tanto, L_{T_x} tiene una distribución exponencial de parámetro $n(\Gamma_x)$, es decir

$$\mathbb{E}\left(L_{T_x}\right) = \frac{1}{n(h > x)}. \tag{3.1}$$

Por otro lado, debido a la fórmula de Tanaka, se tiene

$$B_t^+ = \int_0^t \mathbb{1}_{\{B_s > 0\}} dB_s + \frac{1}{2}L_t,$$

por lo que $M_t = B_t^+ - L_t/2$ es una martingala local, más aún, es una martingala uniformemente integrable en $[0, T_x]$ ya que

$$\sup_{0 \leq t \leq T_x} M_t \leq x \quad \text{y} \quad -\inf_{0 \leq t \leq T_x} M_t \leq \frac{1}{2}L_{T_x} \in L^1(\mathbb{P}),$$

la última expresión se debe a que $B_t^+ - L_t/2 \geq -L_t/2$ para todo $t \geq 0$ y como $-L_t/2$ es un proceso decreciente se llega a

$$B_t^+ - \frac{1}{2}L_t \geq -\frac{1}{2}L_{T_x} \qquad \text{para todo } t \leq T_x,$$

Así, del teorema de paro de Doob vemos que

$$\frac{1}{2}\mathbb{E}\left(L_{T_x}\right) = x. \tag{3.2}$$

Finalmente, comparando (3.1) y la última expresión deducimos

$$n(h > x) = \frac{1}{2x},$$

lo que prueba la segunda parte de la proposición. □

Para $\varepsilon > 0$ recordemos las siguientes definiciones,

$$\sigma_0^\varepsilon = 0, \qquad \tau_0^\varepsilon = \inf\{t > 0 : B_t = \varepsilon\},$$

$$\sigma_n^\varepsilon = \text{ínf}\{t > \tau_{n-1}^\varepsilon : B_t = 0\}, \qquad \tau_n^\varepsilon\{t > \sigma_n^\varepsilon : B_t = \varepsilon\}.$$

Sea nuevaente

$$d_\varepsilon(t) = \text{máx}\{n : \sigma_n^\varepsilon \leq t\}$$

el número de veces que el movimiento browniano cruza del nivel ε al nivel 0 antes del tiempo t. Entonces, recordando que el teorema (1.6) establece como calcular el tiempo local mediante un límite, se demostrara de nuevo pero ahora mediante argumentos basados en la naturaleza de las excursiones. Sin pérdida de generalidad consideremos $a = 0$.

Teorema 3.2. *Para todo $t > 0$,*

$$\lim_{\varepsilon \to 0} 2\varepsilon d_\varepsilon(t) = L_t \quad c.s.$$

Demostración. Observemos que por definición $d_\varepsilon(\tau_r)$ es el número de veces que el m.b. baja del nivel ε al nivel 0 hasta el tiempo τ_r.
Ya que τ es una transformación de la escala de tiempo que nos dice los instantes de inicio de una excursión ($\tau_r - \tau_{r^-} > 0$), se sigue del hecho de que estos instantes son numerables que, contar el número de veces que el proceso cruza del nivel ε al nivel 0 en $[0, r]$ equivale a contar las excursiones individuales cuyo máximo cruza el nivel ε en $[0, \tau_r]$, por ende

$$d_\varepsilon(\tau_r) = \text{card}\,\{s \leq r : h_(e_s) > \varepsilon\} = N_r^{\{h>\varepsilon\}}.$$

Sea $\varepsilon_n = 1/2n$ y $r > 0$ fijo, observemos que $\{h > \varepsilon_{n-1}\} \subseteq \{h > \varepsilon_n\}$, y consideremos las variables aleatorias

$$\left(N_r^{\{h>\varepsilon_n\}} - N_r^{\{h>\varepsilon_{n-1}\}}, n \geq 1\right), \tag{3.3}$$

las cuales representan el número de excursiones cuyo máximo se encuentra en el intervalo $(\varepsilon_n, \varepsilon_{n-1})$, de esta manera su distribución corresponde a una Poisson de parámetro $rn(\varepsilon_n < h < \varepsilon_{n-1})$ y debido a la proposición (3.10)

$$rn(\varepsilon_n < h < \varepsilon_{n-1}) = r.$$

Observemos que

$$N_r^{\{h>\varepsilon_1\}} - N_r^{\{h>\varepsilon_0\}} = \text{card}\{s \leq r : 1/2 < h(e_s) < \infty\},$$

donde $n(1/2 < h < \infty) = 1$. Además, ya que B oscila infinitamente alrededor de cualquier punto, en particular del cero, se sigue que $N^{\{h>\varepsilon_0\}} = 0$

c.s. Entonces, de las observaciones anteriores y del hecho que la sucesión en (3.3) es independiente e idénticamente distribuida, la ley fuerte de los grandes números nos asegura

$$\frac{N_r^{\{h>\varepsilon_n\}}}{n} = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}(N_r^{\{h>\varepsilon_k\}} - N_r^{\{h>\varepsilon_{k-1}\}}) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} r \quad \text{c.s.}$$

Para $\varepsilon \in (\varepsilon_n, \varepsilon_{n-1})$ vemos que

$$N_r^{\{h>\varepsilon_n\}} \geq N_r^{\{h>\varepsilon\}} \geq N_r^{\{h>\varepsilon_{n-1}\}},$$

lo cual implica que para $r > 0$ fijo

$$\lim_{\varepsilon\to 0} \varepsilon N_r^{\{h>\varepsilon\}} = \frac{r}{2} \qquad \text{c.s.},$$

es decir, para cada r fijo existe un $\mathbf{W}_r$ tal que $\mathbb{P}(\mathbf{W}_r) = 1$ y la convergencia se da para casi todo $w \in \mathbf{W}_r$. Ahora veamos que la convergencia es uniforme en r. Sea

$$\widetilde{\mathbf{W}} = \bigcap_{r\in\mathbb{Q}_+} \mathbf{W}_r,$$

entonces, $\mathbb{P}\left(\widetilde{\mathbf{W}}^c\right) = 0$, además, dado $w \in \widetilde{\mathbf{W}}$ se tiene que $w \in \mathbf{W}_r$ para todo $r \in \mathbb{Q}_+$, es decir,

$$\lim_{\varepsilon\to 0} \varepsilon N_r^{\{h>\varepsilon\}} = \frac{r}{2} \quad \text{para todo } r \in \mathbb{Q}_+ \text{ c.s.}$$

Ahora, sea $w \in \widetilde{\mathbf{W}}$ y $r \in \mathbb{R}_+$, entonces existe una sucesión $(r_n)_{n\geq 1} \subset \mathbb{Q}_+$ tal que $r_n \downarrow r$, por lo que para todo $\varepsilon > 0$, debido a la continuidad por la derecha del proceso $N^{\{h>\varepsilon\}}$, se tiene que

$$N_{r_n}^{\{h>\varepsilon\}} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} N_r^{\{h>\varepsilon\}} \qquad \text{c.s.}$$

Finalmente, por la monotonía de $N^{\{h>\varepsilon\}}$ como función de ε llegamos

$$\begin{aligned} \lim_{\varepsilon\to 0} \varepsilon N_r^{\{h>\varepsilon\}} &= \lim_{\varepsilon\to 0}\lim_{n\to\infty} \varepsilon N_{r_n}^{\{h>\varepsilon\}} \\ &= \lim_{n\to\infty}\lim_{\varepsilon\to 0} \varepsilon N_{r_n}^{\{h>\varepsilon\}} = \frac{r}{2} \qquad \text{c.s.}, \end{aligned}$$

es decir, la convergencia es uniforme en r, o de manera equivalente

$$\mathbb{P}\left(\lim_{\varepsilon\to 0} \varepsilon N_r^{\{h>\varepsilon\}} = \frac{r}{2}, \quad \text{para todo } r > 0\right) = 1. \tag{3.4}$$

Para finalizar notemos que

$$\varepsilon d_{\varepsilon}(t) = \varepsilon(\tau_{L_t}) = \varepsilon N_{L_t}^{\{h>\varepsilon\}}.$$

El resultado se sigue al sustituir la última identidad en (3.4) y hacer ε tender a 0. $\square$

Siguiendo la idea análoga de ver al tiempo local como límite de un proceso de conteo, ahora vamos a considerar al proceso, η, que cuenta las excursiones de longitud mayor que $\varepsilon > 0$. De manera formal, dado $\varepsilon > 0$ denotamos por $\eta_t(\varepsilon)$ al número de excursiones con longitud mayor que ε que terminan en un tiempo $s \leq t$, y enunciamos la siguiente proposición

Proposición 3.11. *Para $\varepsilon > 0$,*

$$\mathbb{P}\left(\lim_{\varepsilon\downarrow 0}\sqrt{\frac{\pi\varepsilon}{2}}\eta_t(\varepsilon) = L_t \textit{ para todo } t\right) = 1.$$

Demostración. Notemos que de la proposición (3.10) se obtuvo

$$\mathbb{E}\left(\exp\left\{-\lambda\sum_{s\leq t}V(e_s)\right\}\right) = \exp\left\{-t\int(1-e^{-\lambda V(u)})\,\tilde{n}(du)\right\},$$

es decir, $V(e_s(w))$ es un *PPP* en $\mathbb{R}_+$ con medida característica $\tilde{n}$ dada por $\tilde{n}((x,\infty)) = (2/\pi x)^{1/2}$.

Al definir $\eta_t(\varepsilon)$ consideramos contar a las excursiones que terminan en un tiempo $s \leq t$ lo cual bajo la escala del inverso del tiempo local, τ, es equivalente a la cardinalidad del conjunto $\{s \leq t : \tau_s - \tau_{s^-} > 0\}$, por lo que si N es la medida de conteo asociada al *PPP* $R(e_s)$ se sigue de la observación anterior que $\eta_t(\varepsilon) = N_{L_t}^{[\varepsilon,\infty)}$.
Así, siguiendo un razonamiento análogo al teorema anterior consideremos $\varepsilon_n = 2/\pi n^2$, entonces $\tilde{n}([\varepsilon_n,\infty)) = n$, y la sucesión $(N_t^{[\varepsilon_n,\infty)} - N_t^{[\varepsilon_{n-1},\infty)}, n \geq 1)$ es una sucesión de variables aleatorias independiente con distribución Poisson de parámetro t. Entonces, para t fija, debido a la Ley fuerte de Grandes Números se cumple que

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}N_t^{[\varepsilon_n,\infty)} = \lim_{n\to\infty}\sqrt{\frac{\pi\varepsilon_n}{2}}N_t^{[\varepsilon_n,\infty)} = t \qquad \text{c.s.}$$

Como $N_t^{[\varepsilon,\infty)}$ crece cuando ε decrece, para $\varepsilon \in (\varepsilon_n, \varepsilon_{n-1})$,

$$\sqrt{\frac{\pi\varepsilon_n}{2}} N_t^{[\varepsilon_{n-1},\infty)} \leq \sqrt{\frac{\pi\varepsilon}{2}} N_t^{[\varepsilon,\infty)} \leq \sqrt{\frac{\pi\varepsilon_{n-1}}{2}} N_t^{[\varepsilon_n,\infty)},$$

entonces

$$\mathbb{P}\left(\lim_{\varepsilon\downarrow 0} \sqrt{\frac{\pi\varepsilon}{2}} N_t^{[\varepsilon,\infty)} = t\right) = 1.$$

La convergencia c.s. uniforme en t se sigue de manera idéntica que en el teorema anterior. $\square$

3.2.1. Descripción de Itô.

Consideremos al proceso canónico en U dado por $(u(t), t \geq 0)$, y denotemos por n_+ y n_- a las restricciones de n en el espacio de las trayectorias positivas y negativas respectivamente.

Proposición 3.12. *i) $n = n_+ + n_-$; y n_- es la imagen de n_+ bajo la aplicación $u \mapsto -u$.*

ii) Sea $\lambda > 0$, la imagen de n bajo la aplicación $u \mapsto \varphi_\lambda(u) = \lambda u(t/\lambda^2)$, es λn.

Demostración. i) La primera afirmación se sigue al notar que los conjuntos U_+ y U_- son ajenos, donde U_+ es el conjunto de las trayectorias positivas y U_- es de las trayectorias negativas. La segunda afirmación se sigue de la propiedad de simetría del movimiento browniano.

ii) Sea $\widetilde{B}_t = \lambda B_{t/\lambda^2}$, entonces, el proceso de tiempo local en 0 y el inverso de éste, asociados a $\widetilde{B}$ están dados por

$$\widetilde{L}_t = \lambda L_{t/\lambda^2} \quad \text{y} \quad \widetilde{\tau}_r = \lambda^2 \tau_{r/\lambda}.$$

Las excursiones del proceso, $\widetilde{B}$, las vamos a denotar por $\widetilde{e_s}$ y satisfacen

$$\widetilde{e_s}(r) = \widetilde{B}_{\widetilde{\tau}_{s^-}+r} = \lambda B_{\tau_{s/\lambda^-}+\frac{r}{\lambda^2}} = \varphi_\lambda(e_{s/\lambda}(r)).$$

Por lo tanto el proceso de excursiones de $\widetilde{B}$ no es más que $(\varphi_\lambda(e_{t/\lambda}), t \geq 0)$. Por lo que para todo $A \in \mathscr{U}$,

$$n(A) = \mathbb{E}\left(\sum_{s\leq 1} \mathbb{1}_{\{\varphi_\lambda(e_{s/\lambda})\in A\}}\right) = \mathbb{E}\left(\sum_{s\leq 1} \mathbb{1}_{\{e_{s/\lambda}\in\varphi_\lambda^{-1}(A)\}}\right)$$
$$= \mathbb{E}\left(\sum_{t\leq 1/\lambda} \mathbb{1}_{\{e_t\in\varphi_\lambda^{-1}(A)\}}\right) = \frac{1}{\lambda} n\left(\varphi_\lambda^{-1}(A)\right),$$

es decir, $n \circ \varphi_\lambda^{-1} = \lambda n$, lo que concluye la demostración.

□

Teorema 3.3. *Sea $\mathbb{P}_x^\dagger$ la ley del movimiento browniano que empieza en $x > 0$ y matado en el primer instante en que toca 0. Además, sean $H_x = \text{ínf}\{t > 0 : u(t) \geq x\}$ y θ_{H_x} el operador traslación. Consideremos al proceso*

$$u \circ \theta_{H_x}(t) = \begin{cases} u(H_x + t), & \textit{si } t < (V(u) - H_x)^+, \\ 0, & \textit{si } t \geq (V(u) - H_x)^+. \end{cases}$$

Entonces

i) bajo la medida $n_+(\cdot|\, h > x)$, el proceso $u \circ \theta_{H_x}$ tiene por ley $\mathbb{P}_x^\dagger$,

ii)
$$\lim_{x\to 0^+} \frac{1}{2x}\mathbb{P}_x^\dagger(\Phi) = n_+(\Phi),$$
donde Φ es una funcional continua, acotada y tal que se anula en el conjunto $\{u : h(u) < y_0\}$ para algún y_0 fijo.

Demostración. i) Sea $T_x = \text{ínf}\{t > 0 : B_t = x\}$, $T_x > 0$ c.s. ya que $x > 0$, así la excursión definida en $[g_{T_x}, d_{T_x}]$ es la primera cuyo supremo es mayor que x, además, $g_{T_x} \in Z$ es el extremo izquierdo de la excursión en cuestión, por lo que existe un s tal que $g_{T_x} = \tau_{s^-}$, $d_{T_x} = \tau_s$, y $g_{T_x} < T_x < d_{T_x}$, es decir, para todo $r < s$ tal que $\tau_{r^-} < \tau_r$ se tiene que $\tau_r \leq \tau_{s^-}$, entonces,

$$g_{\tau_r} < d_{\tau_r} \leq \tau_{s^-} = g_{T_x} < T_x, \qquad (B_{g_{T_x}} = 0).$$

Del párrafo anterior obtenemos que, si $r < s$, entonces, $h(e_r) < x$ ya que $T_x \notin [g_{\tau_r}, d_{\tau_r}]$, y $h(e_s) \geq x$. Entonces, como $h(e_s) \geq x$, $s \in \{t : h(e_t) \geq x\}$, y por definición de ínfimo, $\inf\{t : h(e_t) \geq x\} \leq s$, por otro lado, para todo $r < s$, $h(e_r) < x$, es decir, $r \notin \{t : h(e_t) \geq x\}$, lo cual equivale a afirmar que s es una cota superior para $\{t : h(e_t) \geq x\}$, y nuevamente por definición, $s \leq \{t : h(e_t) \geq x\}$, por lo que $s = \{t : h(e_t) \geq x\}$. Recordando que $d_{T_x} = \tau_s$ se llega a que $L_{d_{T_x}} = L_{\tau_s} = s$ y como T_x está en un intervalo de constancia de L se tiene que

$$L_{T_x} = L_{d_{T_x}} = s = \inf\{t : h(e_t) \geq x\}.$$

Definiendo $S := L_{T_x}$, del lema (3.1) tenemos que la ley de e_S es

$$n_+(\cdot|h > x) = 2xn_+(\cdot, h > x).$$

Por otro lado, $e_S = (B_{g_{T_x}+t}, 0 \leq t \leq d_{T_x} - g_{T_x})$, y $T_x - g_{T_x}$ es el primer instante en que e_S toca x. Por lo tanto $e_S \circ \theta_{H_x}$ no es más que $B \circ \theta_{T_x}$ matado en 0. Por la propiedad de Markov fuerte en T_x, $B \circ \theta_{T_x}$ tiene por ley $\mathbb{P}_x^\dagger$, es decir, $e_S \circ \theta_{H_x}$ tiene por ley $\mathbb{P}_x^\dagger$. Esto implica que bajo $n_+(\cdot| > x)$, el proceso $u \circ \theta_{H_x}$ tiene por ley $\mathbb{P}_x^\dagger$.

ii) Sea Φ como en el enunciado. De (i) vemos

$$\frac{1}{2x}\mathbb{P}_x^\dagger = n_+(\Phi(u \circ \theta_{H_x}); h > x).$$

Ya que Φ es continua, $\Phi(u \circ \theta_{H_x}) \to \Phi(u)$ cuando x tiende a 0. Además, como Φ se anula en el conjunto $\{u : h(u) < y_0\}$ para algún $y_0 > 0$ fijo

$$n_+\left(\Phi(u \circ \theta_{H_x}); h > x\right) = n_+\left(\Phi(u \circ \theta_{H_x}), h > y_0\right),$$

para $x > y_0$. Finalmente, usando el hecho de que Φ es acotada, que la medida $n_+(\cdot, h > y_0)$ es finita y el teorema de convergencia dominada $(x \to 0)$ se obtiene el resultado. □

El siguiente teorema nos da una descripción explícita de la medida de Itô. Ésta descripción determina la *ley de entrada* del proceso canónico u. Intuitivamente, la ley de entrada caracteriza la ley de la excursión en algún instante antes de anularse.

Teorema 3.4. *Sea $t_0 > 0$ fijo, el proceso $u \circ \theta_{t_0} = (u(s + t_0), 0 \leq s < (V(u) - t_0)^+)$, tiene las siguiente propiedades* *i) bajo la medida $n_+(\cdot|V > t_0)$, el proceso $u \circ \theta_{t_0}$ es un movimiento browniano matado en cero que empieza en $u(t_0)$,*

ii) La "ley de entrada"está dada por

$$n(u(t_0) \in dx, t_0 < V(u)) = \frac{|x|e^{-x^2/2t_0}}{\sqrt{2\pi t_0^3}}dx.$$

Demostración. i) Sea $T = \text{ínf}\{t > 0 : t - g_t > t_0\}$, entonces g_T es el extremo izquierdo de la primera excursión cuya longitud es mayor a t_0, y, $g_T < T < d_T$, por lo que siguiendo el mismo razonamiento de la parte (i) del teorema anterior se llega a que $L_T = \text{ínf}(u > 0 : V(e_u) > t_0)$. Así, si nuevamente definimos $S := L_T$, del lema (3.1) se puede afirmar que la ley de e_S es $n(\cdot|V > t_0)$.
Por otro lado, $e_S = (B_{g_T+t}, 0 \leq t \leq d_T - g_T)$, y $T - g_T$ es el primer instante en el cual la longitud de e_S es mayor que t_0, por lo tanto $e_S \circ \theta_{t_0}$ no es más que $B \circ \theta_T$ matado en 0. Entonces, por la propiedad de Markov fuerte en T, $B \circ \theta_T$ matado en 0 tiene la misma ley que un movimiento browniano matado en 0 que empieza en B_T, es decir, $e_S \circ \theta_{t_0}$ tiene la misma ley que un movimiento browniano matado en 0 que empieza en B_T. Debido a lo anterior, se concluye que bajo $n(\cdot|V > t_0)$, el proceso $u \circ \theta_{t_0}$ tiene la misma ley que un movimiento browniano matado en 0 que empieza en $u(t_0)$.

ii) Sean $\mathbf{e}_p$ una variable exponencial de parámetro $p > 0$ independiente de $(B_t, t \geq 0)$, y f una función positiva y medible, entonces,

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}\left(f(B_{\mathbf{e}_p})\right) &= p\int_0^\infty dt\, e^{-pt}\mathbb{E}\left(f(B_t)\right) \\
&= \int_{\mathbb{R}} dx\, f(x) p \int_0^\infty dt\, e^{-pt}\frac{e^{-x^2/2t}}{\sqrt{2\pi t}} \\
&= \int_{\mathbb{R}} dx\, f(x) p \frac{e^{-\sqrt{2p}|x|}}{\sqrt{2p}}.
\end{aligned}$$

Por otro lado,

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}\left(f(B_{\mathbf{e}_p})\right) &= p\mathbb{E}\left(\sum_{s>0}\int_{\tau_{s-}}^{\tau_s} dt\, e^{-pt} f(B_t)\right) \\
&= p\mathbb{E}\left(\sum_{s>0}\int_0^{V(e_s)} dr\, e^{-p\tau_{s-}} e^{-pr} f(e_s(r))\right).
\end{aligned}$$

Debido a la fórmula de compensación obtenemos

$$\begin{aligned}\mathbb{E}\left(f(B_{\mathbf{e}_p})\right) &= p\mathbb{E}\left(\int_0^\infty ds\, e^{-p\tau_{s-}}\right)\int n(du)\int_0^{V(u)} dr\, e^{-pr} f(u(r))\\ &= p\int_0^\infty ds\, e^{-s\sqrt{2p}}\int_0^\infty dr\, e^{-pr}\int_{\{V(u)>r\}} n(du)\, f(u(r)).\end{aligned}$$

Por lo tanto

$$\begin{aligned}\int_0^\infty dr\, e^{-pr} n\left(f(u(r)), V(u)>r\right) &= \int_{\mathbb{R}} dx\, f(x) e^{-\sqrt{2p}|x|}\\ &= \int_{\mathbb{R}} dx\, f(x)\int_0^\infty dr\, e^{-pr}\frac{|x|e^{-x^2/2r}}{\sqrt{2\pi r^3}}\\ &= \int_0^\infty dr\, e^{-pr}\int_{\mathbb{R}} dx\, f(x)\frac{|x|e^{-x^2/2r}}{\sqrt{2\pi r^3}},\end{aligned}$$

lo cual prueba la afirmación. □

Recordemos que se está trabajando con una medida σ-finita en el espacio de funciones, y de los resultados anteriores se puede notar que una propiedad de la medida es una propiedad de la ley del proceso canónico bajo dicha medida. Además, la medida es la única extensión de su restricción al álgebra de rectángulos medibles, es decir, la medida está determinada si conocemos las distribuciones finito dimensionales del proceso canónico.

Lo que se afirma en el siguiente teorema es que el proceso canónico $(u(t), t \geq 0)$ es un proceso de Markov, sólo que en este caso no se puede hablar de una medida inicial, así, si dado el semigrupo P_t deseamos escribir las distribuciones finito dimensionales

$$\mathbb{P}\left(X_{t_1} \in A_1, \ldots, X_{t_k} \in A_k\right)$$

para $0 < t_1, \cdots < t_k$, es necesario conocer a las medidas $\lambda_t(dx) = \mathbb{P}\left(X_t \in dx\right)$, entonces la distribución finito dimensional de arriba quedaría escrita como

$$\int_{A_1}\lambda_{t_1}(dx_1)\int_{A_2} p_{t_2-t_1}(x_1, dx_2)\cdots\int_{A_k} p_{t_k-t_{k-1}}(x_{k-1}, dx_k),$$

donde $(p_t(x, dy))$ son las probabilidades de transición asociadas a P_t.

La medida λ_t es conocida como la *ley de entrada*. Para que λ_t sea una ley de entrada, esta debe satisfacer la igualdad $\lambda_t P_s = \lambda_{t+s}$ para todo $s, t > 0$. Si se conocen (λ_t) y (P_t) funciones de transición, que satisfacen la igualdad anterior, se pueden construir medidas en el espacio canónico tal que el proceso canónico tenga las marginales mencionadas arriba, y por lo tanto sea un proceso de Markov. En este sentido enunciamos formalmente la descripción de Itô, con la cual se concluye la sección. En el siguiente capítulo se probará una descripción distinta del proceso canónico, u, en términos de un puente de Bessel.

Teorema 3.5 (Descripción de Itô). *Bajo n_+ el proceso canónico $(u(t), t \geq 0)$ es un proceso de Markov fuerte con probabilidades de transición $(q_t(x,y)dy)$ y con ley de entrada $(\lambda_t(x)dx)$, donde*

$$q_t(x,y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi t}} \left(\exp\left\{ -\frac{(x-y)^2}{2t} \right\} - \exp\left\{ -\frac{(x+y)^2}{2t} \right\} \right)$$

$$y \qquad \lambda_t(x) = \frac{|x| e^{-x^2/2t}}{\sqrt{2\Pi t^3}}.$$

En otras palabras, para $k \geq 1$, $A_1, \ldots, A_k \in \mathscr{B}((0,\infty))$, y, $0 < t_1 < \cdots < t_k$,

$$\begin{aligned} & n_+(u(t_1) \in A_1, \ldots, u(t_k) \in A_k) \\ & \quad = \int_{A_1} dx_1 \lambda_{t_1}(x_1) \int_{A_2} dx_2 q_{t_2 - t_1}(x_1, x_2) \cdots \int_{A_k} dx_k q_{t_k - t_{k-1}}(x_{k-1}, x_k). \end{aligned}$$

Notemos que $q_t(x,y)$ es la densidad de las probabilidades de transición del movimiento browniano matado en 0.

Demostración. Sean $k \geq 1$, $A_1, \ldots, A_k \in \mathscr{B}((0,\infty))$, y $0 < t_1, \ldots < t_k$. Primero, observemos que

$$\begin{aligned} & n_+ \left(u(t_1) \in A_1, \ldots, u(t_k) \in A_k \right) \\ & \qquad = n_+ \left(u(t_1) \in A_1, \ldots, u(t_k) \in A_k, V > t_1 \right). \end{aligned} \tag{3.5}$$

Debido al teorema (3.4) se sabe que bajo $n_+(\cdot | V > t_1)$, el proceso $u \circ \theta_{t_1}$ tiene por ley $\mathbb{P}^{\dagger}_{u(t_1)}$. Entonces

$$n_+ \left(\Phi \circ \theta_{t_1}, u(t_1) \in \Gamma \,|\, V > t_1 \right) = \mathbb{E} \left(\Phi(\widetilde{B}) \circ \theta_T, \widetilde{B}_T \in \Gamma \right),$$

donde $T = \inf\{t > 0 : t - g_t > t_1\}$, $\Gamma \in \mathscr{B}((0,\infty))$, Φ es una funcional continua y acotada, y $\widetilde{B}$ es el movimiento browniano matado en 0. Debido a la propiedad fuerte de Markov vemos

$$n_+\left(\Phi \circ \theta_{t_1}, u(t_1) \in \Gamma \,|\, V > t_1\right) = \mathbb{E}\left(\mathbb{1}_{\{\widetilde{B}_T \in \Gamma\}} \mathbb{E}^{\dagger}_{B_T}(\Phi)\right).$$

En particular para $\Phi = 1$. por la igualdad de arriba tenemos

$$n_+(u(t_1) \in \Gamma | V > t_1) = \mathbb{P}\left(\widetilde{B}_T \in \Gamma\right).$$

Por lo tanto

$$\begin{aligned} n_+\left(\Phi \circ \theta_{t_1} \in \Gamma, V > t_1\right) &= n_+(V > t_1)\mathbb{E}\left(\mathbb{1}_{\{\widetilde{B}_T \in \Gamma\}} \mathbb{E}^{\dagger}_{B_T}(\Phi)\right) \\ &= n_+(V > t_1) \int_\Gamma \mathbb{P}\left(\widetilde{B}_T \in dx\right) \mathbb{E}^{\dagger}_x(\Phi) \\ &= \int_\Gamma n_+\left(u(t_1) \in dx, V > t_1\right) \mathbb{E}^{\dagger}_x(\Phi) \\ &= \int_\Gamma dx\, \lambda_t(x) \mathbb{E}^{\dagger}_x(\Phi). \end{aligned}$$

Lo cual implica que el lado derecho de (3.5) es igual a

$$\int_{A_1} dx_1\, \lambda_{t_1}(x_1) \mathbb{P}^{\dagger}_{x_1}\left(X_{t_2 - t_1} \in A_2, \ldots, X_{t_k - t_{k-1}}\right),$$

donde, bajo $\mathbb{P}^{\dagger}_x$, el proceso $X = (X_t, t \geq 0)$ es un movimiento browniano matado en 0 que empieza en $x > 0$.

Lo anterior prueba el hecho de que bajo n_+, el proceso canónico, $u = (u(t), t \geq 0)$, es un proceso de Markov con probabilidades de transición $(q_t(x, y)dy)$. Finalmente, debido a que el movimiento browniano matado en 0 es un proceso de Markov fuerte, el proceso canónico hereda tal propiedad bajo la medida n_+. $\square$

3.2.2. Descripción de Williams.

En la sección anterior se probó que bajo la medida de excursión, n, el proceso canónico, $(u(t), t \geq 0)$, es un proceso de Markov, en este sentido, la presente sección está enfocada en probar un resultado similar, sólo que en esta ocasión con particular atención en la ley del proceso canónico, $(u(t), t \geq 0)$, la cual estará expresada en términos de la de un puente de Bessel. Con este motivo, primero se harán algunas observaciones técnicas, con el propósito de finalizar la sección enunciando está nueva descripción del proceso canónico.

Denotaremos por BES^3 al proceso de Bessel de dimensión 3. Un puente de BES^3, por el momento, lo definiremos como un proceso con tiempo de vida finita y determinista, $a > 0$, cuya ley es la del proceso BES^3 que inicia en un cierto estado $x \geq 0$ condicionado a que al tiempo a tome el valor y.

Sea P_x^3 la medida de probabilidad asociada al proceso BES_x^3 y $(p_t^3(x,y)dy, t \geq 0)$ sus probabilidades de transición. Del capítulo anterior sabemos

$$p_t^3(x,y) = \frac{y}{x} q_t(x,y), \qquad x,y > 0,$$

donde $(q_t(x,y), t \geq 0)$ es la familia de densidades del semigrupo de transición de un movimiento browniano matado en 0, es decir,

$$q_t(x,y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi t}} \left[\exp\left\{ -\frac{(y-x)^2}{2t} \right\} - \exp\left\{ -\frac{(y+x)^2}{2t} \right\} \right], \quad x,y > 0.$$

Para $x = 0$, tenemos

$$p_t^3(0,y) = \left(\frac{2}{\pi t^3} \right)^{1/2} \exp\left\{ -\frac{y^2}{2t} \right\} y^2, \quad t > 0.$$

Para todo $a > 0$, el espacio $C([0,a],\mathbb{R})$, dotado de la topología de la convergencia uniforme, es un espacio topológico separable metrizable completo y la σ-álgebra generada por el proceso canónico es la σ-álgebra de Borel. Esto implica la existencia de una *distribución condicional regular* para $P_x^3(\cdot|X_a)$, es decir, una familia $P_{x,y}^{(3,a)}$ de medidas de probabilidad en $C([0,a],\mathbb{R})$ tal que para todo conjunto boreliano Γ

$$P_x^3(\Gamma) = \int P_{x,y}^{(3,a)}(\Gamma)\, \mu_a(dy),$$

donde μ_a es la ley de X_a bajo P_x^3. En otras palabras

$$P_{x,y}^{(3,a)}(\Gamma) = P_x^3(\Gamma | X_a = y).$$

Para x y a fijos, estas probabilidades de transición están determinadas salvo por conjuntos de medida 0 en y, mas no para una y específica. Para formalizar el concepto de puente de BES^3, consideremos lo siguiente

Proposición 3.13. *Para todo $x, y \in \mathbb{R}$ y $a > 0$, existe una única medida de probabilidad $P^{(3,a)}_{x,y}$ en $(C([0,a],\mathbb{R}), \mathscr{F}_a)$ tal que*

$$P^{(3,a)}_{x,y}(F)p^3_a(x,y) = P^3_x\left(Fp^3_{a-t}(X_t,y)\right) \tag{3.6}$$

para todo $t \in [0,a)$ y toda funcional F, $\mathscr{F}_t$-medible y acotada.
Bajo $P^{(3,a)}_{x,y}$, el proceso canónico, $(X_t, 0 \leq t \leq a)$, es un proceso de Markov fuerte no-homogéneo cuyas probabilidades de transición admiten las densidades:

$$p^{(3,y,a)}(z,s;z',t) = \frac{p^3_{t-s}(z,z')p^3_{a-t}(z',y)}{p^3_{a-s}(z,y)}, \qquad 0 < s < t < a. \tag{3.7}$$

Además, $P^{(3,a)}_{x,y}(X_0 = x, X_a = y) = 1$, y si F es una funcional $\mathscr{F}_t$-medible y acotada, y $g : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ boreliana, entonces

$$P^3_x(Fg(X_a)) = \int_{\mathbb{R}_+} P^{(3,a)}_{x,y}(F)g(y)p^3_a(x,y)\,dy. \tag{3.8}$$

Finalmente, $(P^{(3,a)}_{x,y}, y \geq 0)$ es una versión regular de la familia de probabilidades condicionales $P^3_x(\cdot|X_a = y)$, $y \in \mathbb{R}_+$.

Demostración. Notemos primero que

$$\lim_{\delta\to 0}\frac{1}{\delta}P^3_x\left(X_a \in (y, y+\delta)\right) = \lim_{\delta\to 0}\frac{1}{\delta}\int_{(y,y+\delta)} p_a(x,z)\,dz = p^3_a(x,y).$$

Para probar (3.6) utilizaremos un argumento de clases monótonas, sean $A_1, \ldots, A_n$ y $0 < t_1, \cdots < t_n < a$, donde $t_n = t$, entonces

$$\begin{aligned}&P^3_x(X_{t_1} \in A_1, \ldots, X_{t_n} \in A_n |\, X_a \in (y, y+\delta))\\ &= \frac{\int_{A_1} dx_1 p^3_{t_1}(x,x_1)\cdots\int_{A_n} dx_n p^3_{t_n-t_{n-1}}(x_{n-1},x_n)\int_{(y,y+\delta)} p^3_{a-t_n}(x_n,z)dz}{\int_{(y,y+\delta)} p^3_a(x,z)\,dz},\end{aligned}$$

y esta última expresión converge a

$$\frac{1}{p^3_a(x,y)}\int_{A_1} dx_1 p^3_{t_1}(x,x_1)\cdots\int_{A_n} dx_n p^3_{t_n-t_{n-1}}(x_{n-1},x_n)p^3_{a-t_n}(x_n,y), \tag{3.9}$$

la cual es una medida de probabilidad. Del teorema de clases monótonas se sigue que esta medida de probabilidad satisface

$$P_{x,y}^{(3,a)}(F) = \lim_{\delta\to 0} P_x^3\left(F \mid X_t \in (y, y+\delta)\right) = \frac{1}{p_a^3(x,y)} P_x^3\left(F p_{a-t}^3(X_t, y)\right),$$

para toda F funcional acotada y $\mathscr{F}_t$-medible, o de manera equivalente

$$dP_{x,y}^{(3,a)}\Big|_{\mathscr{F}_t} = \frac{p_{a-t}^3(X_t, y)}{p_a^3(x,y)}\, dP_x^3\Big|_{\mathscr{F}_t}.$$

La propiedad fuerte de Markov se sigue de (3.6) y de aplicar el teorema de paro de Doob a la martingala positiva, bajo P_x^3,

$$M_t = p_{a-t}^3(X_t, y), \qquad 0 \le t < a.$$

De (3.9) deducimos la expresión (3.7) de las probabilidades de transición.

Para finalizar la prueba probemos la expresión (3.8), sea F una funcional acotada $\mathscr{F}_t$-medible y $g : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ una función boreliana. De la propiedad de Markov al tiempo t, tenemos

$$\begin{aligned} P_x^3\left(F g(X_a)\right) &= P_x^3\left(F P_{X_t}^3\left(g(X_{a-t})\right)\right) \\ &= P_x^3\left(F \int g(y) p_{a-t}^3(X_t, y)\, dy\right) \\ &= \int P_x^3\left(F p_{a-t}^3(X_t, y)\right) g(y)\, dy \\ &= \int P_{x,y}^{(3,a)}(F) p_a^3(x,y) g(y)\, dy, \end{aligned}$$

lo cual prueba el resultado. □

De manera formal, tenemos lo siguiente

Definición 3.8. *El puente de Bessel de dimensión 3 de longitud $a > 0$ que empieza en x y termina en y, es un proceso continuo cuya ley está dada por $P_{x,y}^{(3,a)}$.*

Corolario 3.1. *Sea $a > 0$. Para $t < a$ se tiene*

$$dP_{0,0}^{(3,a)}\Big|_{\mathscr{F}_t} = \left(\frac{a}{a-t}\right)^{3/2} e^{-X_t/2(a-t)}\, dP_0^3\Big|_{\mathscr{F}_t}.$$

Demostración. De la proposición anterior, recordemos que

$$\left.\frac{dP^{(3,a)}_{x,y}}{dP^3_x}\right|_{\mathscr{F}_t} = \frac{p^3_{a-t}(X_t, y)}{p^3_a(x, y)} = \frac{x}{X_t}\frac{q_{a-t}(X_t, y)}{q_a(x, y)}.$$

El resultado se sigue haciendo tender, primero a x, y luego a y a cero. □

Teorema 3.6 (Descripción de Williams). *Recordemos que*

$$n_+(V \in dr) = \frac{1}{2}\frac{dr}{\sqrt{2\pi r^3}}.$$

Bajo n_+ y dado que $\{V = r\}$, el proceso canónico $(u(t), 0 \leq t \leq r)$ tiene la misma ley que un puente de BES^3 que va de 0 a 0 y de longitud r. En otras palabras, para toda funcional Φ acotada

$$n_+ \left(\Phi(u(s), s \geq 0)\right) = \frac{1}{2}\int_0^\infty \frac{dr}{\sqrt{2\pi r^3}} P^{(3,r)}_{0,0} \left(\Phi(X_s, 0 \leq s \leq r)\right).$$

Demostración. Nuevamente, por un argumento de clases monótonas basta demostrar que para $0 < t_1 < \cdots < t_n$,

$$\begin{aligned} &n_+(u(t_1) \in dx_1, \ldots, u(t_n) \in dx_n) \\ &\qquad = \frac{1}{2}\int_{t_n}^\infty \frac{dr}{\sqrt{2\pi r^3}} P^{3,r}_{0,0}\left(X_{t_1} \in dx_1, \ldots, X_{t_n} \in dx_n\right). \end{aligned} \tag{3.10}$$

De la descripción de Itô, notamos que el lado izquierdo de la ultima igualdad es igual a

$$\lambda_{t_1}(x_1) dx_1 \mathbb{P}^\dagger_{x_1}\left(X_{t_2 - t_1} \in dx_2, \ldots, X_{t_n - t_{n-1}} \in dx_n\right),$$

donde

$$\lambda_{t_1}(x_1) = \frac{x_1}{\sqrt{2\pi t_1^3}} e^{-x_1^2/2t_1}$$

es la densidad de la ley de entrada. Por otro lado, del corolario (3.1) vemos que la parte derecha de (3.10) es igual a

$$\begin{aligned} &\frac{1}{2}\int_{t_n}^\infty \frac{dr}{\sqrt{2\pi r^3}} \left(\frac{r}{r - t_n}\right)^{3/2} e^{-x_n^2/2(r - t_n)} P^3_0(X_{t_1} \in dx_1, \ldots, X_{t_n} \in dx_n) \\ &\quad = \frac{1}{2}\int_{t_n}^\infty \frac{dr}{\sqrt{2\pi r^3}} \left(\frac{r}{r - t_n}\right)^{3/2} e^{-x_n^2/2(r - t_n)} \\ &\qquad\qquad \times p^3_{t_1}(0, x_1) dx_1 P^3_{x_1}(X_{t_2 - t_1} \in dx_2, \ldots, X_{t_n - t_{n-1}} \in dx_n), \end{aligned}$$

donde la segunda igualdad se sigue de la propiedad de Markov al tiempo t_1. Ahora, de la absoluta continuidad entre P_x^3 y $\mathbb{P}_x^\dagger$ y de la identidad $p_{t_1}^3(0,x) = 2x\lambda_{t_1}(x)$, la última igualdad se reduce a

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{2}\int_{t_n}^{\infty} \frac{dr}{\sqrt{2\pi r^3}} \left(\frac{r}{r-t_n}\right)^{3/2} e^{-x_n^2/2(r-t_n)} \\
&\qquad \times p_{t_1}^3(0,x_1)dx_1 \left(\frac{x_n}{x_1}\right) \mathbb{P}_{x_1}^\dagger(X_{t_2-t_1} \in dx_2, \ldots, X_{t_n-t_{n-1}} \in dx_n) \\
&= \frac{1}{2}\int_{t_n}^{\infty} \frac{dr}{\sqrt{2\pi r^3}} \left(\frac{r}{r-t_n}\right)^{3/2} e^{-x_n^2/2(r-t_n)} \\
&\qquad \times 2x_1\lambda_{t_1}(x_1)dx_1 \left(\frac{x_n}{x_1}\right) \mathbb{P}_{x_1}^\dagger(X_{t_2-t_1} \in dx_2, \ldots, X_{t_n-t_{n-1}} \in dx_n),
\end{aligned}$$

de donde se sigue el resultado. □

Capítulo 4

Extensión de la Identidad de Bougerol

4.1. Identidad de Bougerol Extendida

Recordemos que la funcional exponencial de un movimiento browniano estándar, $(B_t, t \geq 0)$, se define como

$$A_t = \int_0^t ds \, \exp(2B_s), \qquad t \geq 0.$$

Además, podemos extraer información sobre la distribución de A_t mediante la identidad de Bougerol:

$$\text{para un } t \text{ fijo} \qquad \sinh(B_t) \stackrel{\mathcal{L}}{=} \beta_{A_t}, \tag{4.1}$$

donde $(\beta_u, u \geq 0)$ denota un movimiento browniano independiente de $(B_t, t \geq 0)$ y por ende independiente de A_t. De lo anterior, por (4.1) observamos que

$$\mathbb{P}\left(\beta_{A_t} \leq x\right) = \mathbb{P}\left(B_t \leq a(x)\right) \qquad \text{con } a(x) = \arg\sinh(x)$$

es decir,

$$\mathbb{E}\left(\frac{1}{\sqrt{A_t}} \exp\left(\frac{-x}{2A_t}\right)\right) = \frac{a'(x)}{\sqrt{t}} \exp\left(\frac{-a^2(x)}{2t}\right), \qquad x \in \mathbb{R}, \tag{4.2}$$

donde

$$a(x) = \arg\sinh(x) = \log(x + \sqrt{1+x^2}) \quad \text{y} \quad a'(x) = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}.$$

Como consecuencia de (4.2) tenemos lo siguiente:
Para $x = 0$ se tiene

$$\mathbb{E}\left(\frac{1}{\sqrt{A_t}}\right) = \frac{1}{\sqrt{t}}, \tag{4.3}$$

y derivando con respecto a t en ambos lados se sigue que

$$\mathbb{E}\left(\frac{\exp(B_t)}{A_t^{3/2}}\right) \overset{(*)}{=} \mathbb{E}\left(\frac{\exp(2B_t)}{A_t^{3/2}}\right) = \frac{1}{t^{3/2}}, \tag{4.4}$$

donde $(*)$ se obtiene por la propiedad de retorno de tiempo de $(B_s, s \leq t)$ del tiempo t.
Como resultado principal presentamos el teorema que extiende la identidad en (4.1).

Teorema 4.1. *Para t fija, las siguientes variables aleatorias bi-dimensionales son idénticamente distribuidas:*

$$(\sinh(B_t), \sinh(L_t)) \overset{\mathcal{L}}{=} (\beta_{A_t}, \exp(-B_t)\lambda_{A_t}) \overset{\mathcal{L}}{=} (\exp(-B_t)\beta_{A_t}, \lambda_{A_t}), \tag{4.5}$$

donde $(\beta_u, u \geq 0)$ es un movimiento browniano estándar, con tiempo local en 0, $(\lambda_u, u \geq 0)$, y β es independiente de B.

La demostración consiste en probar la identidad propuesta en pasos, es decir, primero se probará la igualdad en ley entre los vectores extremo derecho y extremo izquierdo, para después concluir con la equivalencia en ley entre el vector extremo derecho y el vector restante.

Para la primera equivalencia se probará la identidad evaluada en tiempos exponenciales independientes de los demás procesos involucrados. Con este fin y recordando que la ley conjunta de vectores aleatorios esta unívocamente determinada por la transformada de Mellin, se procederá a calcular la transformada conjunta de Mellin de los vectores en cuestión para ser comparados en ley.

Para demostrar la primera equivalencia en ley observamos, para simplificar los cálculos, que podemos reescribir la identidad en ley (4.5) en lo que pareciera un versión ligeramente más débil

$$(\sinh(|B_t|), \sinh(L_t)) \overset{\mathcal{L}}{=} (|\beta_{A_t}|, \exp(-B_t)\lambda_{A_t}) \overset{\mathcal{L}}{=} (\exp(-B_t)|\beta_{A_t}|, \lambda_{A_t}), \quad (4.6)$$

esto sin pérdida de generalidad, ya que el término izquierdo de cada vector (sin los valores absolutos) de las expresiones en (4.5) sólo difieren de los que tienen valor absoluto en la última expresión por la multiplicación de una variable aleatoria Bernoulli simétrica, independiente de las demás variables, es decir, si en particular consideramos la variable aleatoria $\sinh(B_t)$, con $t > 0$ fijo, podemos pensar en una copia independiente de B, digamos $\widetilde{B}$, y así definir a la variable aleatoria Bernoulli, Z, como

$$Z = \begin{cases} 1 & \text{si } \sinh(\widetilde{B}_t) \geq 0 \\ -1 & \text{si } \sinh(\widetilde{B}_t) < 0, \end{cases}$$

entonces

$$|\sinh(B_t)| \overset{\mathcal{L}}{=} |\sinh(\widetilde{B}_t)| = Z \sinh(\widetilde{B}_t) \overset{\mathcal{L}}{=} Z \sinh(B_t),$$

con Z independiente de $\sinh(B_t)$. Análogamente para los demás términos de interés.

Una vez finalizada la prueba de

$$(\sinh(B_t), \sinh(L_t)) \overset{\mathcal{L}}{=} (\exp(-B_t)\beta_{A_t}, \lambda_{A_t}),$$

la demostración de

$$(\beta_{A_t}, \exp(-B_t)\lambda_{A_t}) \overset{\mathcal{L}}{=} (\exp(-B_t)\beta_{A_t}, \lambda_{A_t})$$

estará basada en un argumento de igualdad en distribución bajo composición de funciones Borel-medibles.
Habiendo hecho la observaciones anteriores la demostración formal del teorema 4.1 es la siguiente:

Demostración. (Teorema 4.1) Consideremos un tiempo exponencial, $\mathbf{e}_p$, de parámetro $p > 0$ independiente de B. Para $t \geq 0$ denotemos al instante del último cero de B antes de t por $g_t = \sup\{u < t : B_u = 0\}$. Los procesos $(B_u, u \leq g_{\mathbf{e}_p})$ y $(B_{g_{\mathbf{e}_p}+u}, u \leq \mathbf{e}_p - g_{\mathbf{e}_p})$ son independientes, ésto debido a la fórmula de compensación, y por ende las variables $L_{\mathbf{e}_p}(\equiv L_{g_{\mathbf{e}_p}})$ y $B_{\mathbf{e}_p}$ también son independientes. Además, ya que L_t y $|B_t|$ tienen la misma ley (Teo 1.5), entonces también $L_{\mathbf{e}_p}$ y $|B_{\mathbf{e}_p}|$, donde la distribución de manera explícita es

$$\mathbb{P}\left(L_{\mathbf{e}_p} \geq \ell\right) = \mathbb{P}\left(\mathbf{e}_p \geq \tau_\ell\right) = \exp(-\ell\sqrt{2p}),$$

es decir, su densidad común es

$$\sqrt{2p}\exp(-\sqrt{2p}u), \qquad u \geq 0.$$

De manera equivalente, por la propiedad de autosimilitud y la identidad de Lévy $|\beta| \stackrel{\mathcal{L}}{=} \lambda$, la caracterización de la ley de $\lambda_{\mathbf{e}_p}$ y $|\beta_{\mathbf{e}_p}|$ se puede expresar como

$$\sqrt{2\mathbf{e}}(|\beta_1|, \lambda_1) \stackrel{\mathcal{L}}{=} (\mathbf{e}, \mathbf{e}'), \tag{4.7}$$

donde del lado izquierdo $\mathbf{e} = \mathbf{e}_1$ es independiente de β, y del lado izquierdo las dos variables aleatorias, $\mathbf{e}, \mathbf{e}'$ son copias independientes de $\mathbf{e}_1$.

De la observación hecha en (4.6), probar

$$(\sinh(B_t), \sinh(L_t)) \stackrel{\mathcal{L}}{=} (\beta_{A_t}, \exp(-B_t)\lambda_{A_t}) \stackrel{\mathcal{L}}{=} (\exp(-B_t)\beta_{A_t}, \lambda_{A_t})$$

es equivalente a probar

$$(\sinh(|B_t|), \sinh(L_t)) \stackrel{\mathcal{L}}{=} (|\beta_{A_t}|, \exp(-B_t)\lambda_{A_t}) \stackrel{\mathcal{L}}{=} (\exp(-B_t)|\beta_{A_t}|, \lambda_{A_t}).$$

Entonces, primero mostraremos que

$$(\sinh(|B_t|), \sinh(L_t)) \stackrel{\mathcal{L}}{=} (\exp(-B_t)|\beta_{A_t}|, \lambda_{A_t}),$$

y por la propiedad de autosimilitud probar la última igualdad resulta equivalente a probar que

$$(\sinh(|B_t|), \sinh(L_t)) \stackrel{\mathcal{L}}{=} (\exp(-B_t)\sqrt{A_t}|\beta_1|, \sqrt{A_t}\lambda_1). \tag{4.8}$$

Esto se llevará a cabo remplazando t con un tiempo exponencial $\mathbf{e}_p$ y multiplicando ambos lados por $\sqrt{2\mathbf{e}}$ ($\mathbf{e} = \mathbf{e}_1$), asumiendo implícitamente que $\mathbf{e}_p$, $\mathbf{e}$, B y β son independientes, para finalmente calcular la transformada conjunta de Mellin en ambos lados y ver que efectivamente se satisface la igualdad en ley. Lo que demostraremos es:

$$\sqrt{2\mathbf{e}}(\sinh(|B_{\mathbf{e}_p}|), \sinh(L_{\mathbf{e}_p})) \overset{\mathcal{L}}{=} \sqrt{2\mathbf{e}}(\exp(-B_{\mathbf{e}_p})\sqrt{A_{\mathbf{e}_p}}|\beta_1|, \sqrt{A_{\mathbf{e}_p}}\lambda_1). \tag{4.9}$$

Para lado izquierdo de (4.9), debido a que $\sinh(|x|) = |\sinh(x)|$ y a la identidad de Bougerol (4.1), se tienen lo siguiente

$$\begin{aligned} \sqrt{2\mathbf{e}}(\sinh(|B_{\mathbf{e}_p}|), \sinh(L_{\mathbf{e}_p})) &\overset{\mathcal{L}}{=} \sqrt{2\mathbf{e}}(\sinh(|B_{\mathbf{e}_p}|), \sinh(|B'_{\mathbf{e}'_p}|)) \\ &\overset{\mathcal{L}}{=} \sqrt{2\mathbf{e}}(|\beta_{A_{\mathbf{e}_p}}|, |\beta'_{A'_{\mathbf{e}'_p}}|) \\ &\overset{\mathcal{L}}{=} \sqrt{2\mathbf{e}}(\sqrt{A_{\mathbf{e}_p}}|N|, \sqrt{A'_{\mathbf{e}'_p}}|N'|), \end{aligned} \tag{4.10}$$

donde N, N' son variables aleatorias normales estándar independientes entre si y de las demás variables y A' es una copia independiente de A, la cual también es independiente de las demás variables.
Mientras que en el lado derecho de (4.9), debido a la identidad en ley en (4.7), se tiene

$$\begin{aligned} \sqrt{2\mathbf{e}}(\exp(-B_{\mathbf{e}_p})\sqrt{A_{\mathbf{e}_p}}|\beta_1|, \sqrt{A_{\mathbf{e}_p}}\lambda_1) &\overset{\mathcal{L}}{=} (\exp(-B_t)\sqrt{A_{\mathbf{e}_p}}\mathbf{e}, \sqrt{A_{\mathbf{e}_p}}\mathbf{e}') \\ &\overset{\mathcal{L}}{=} (\exp(-B_t)\sqrt{A_{\mathbf{e}_p}}|N|\sqrt{2\mathbf{e}}, \sqrt{A_{\mathbf{e}_p}}|N'|\sqrt{2\mathbf{e}'}), \end{aligned} \tag{4.11}$$

donde la última igualdad se da debido a

$$|N|\sqrt{2\mathbf{e}} \overset{\mathcal{L}}{=} |B_{2\mathbf{e}}| \overset{\mathcal{L}}{=} |B_{\mathbf{e}_{1/2}}| \overset{\mathcal{L}}{=} \mathbf{e}(= \mathbf{e}_1).$$

Así, elevando al cuadrado (4.10) y (4.11), resta calcular la transformada conjunta de Mellin de

$$\mathbf{e}(A_{\mathbf{e}_p}, A'_{\mathbf{e}'_p}), \quad \text{y} \quad (\exp(-2B_t)A_{\mathbf{e}_p}\mathbf{e}, A_{\mathbf{e}_p}\mathbf{e}'), \tag{4.12}$$

y verificar que son iguales, esto debido a la independencia de $|N|$ y $|N'|$ entre si y entre las demás variables, por lo que pueden cancelarse en ambos lados de (4.10) y (4.11).

Un elemento clave para poder calcular esta transformada se encuentra en la caracterización de la ley de la funcional exponencial (véase [9], artículo #6, p. 94),

$$A_t^{(\nu)} = \int_0^t \exp\left(2(B_s + \nu s)\right) ds, \qquad t \geq 0,$$

donde B es un movimiento browniano estándar, la cual está dada por

$$A_{\mathbf{e}_p}^{(\nu)} \stackrel{\mathcal{L}}{=} \frac{B^{(1,a)}}{2\gamma_b},$$

con $B^{(u,v)}$ una variable aleatoria beta con parámetros (u, v), γ_b una variable aleatoria gama con parámetro b y

$$a = a(\nu, p) = \frac{1}{2}(\nu + \sqrt{2p + \nu^2}), \qquad b = b(\nu, p) = \frac{1}{2}(-\nu + \sqrt{2p + \nu^2}).$$

Entonces, la transformada de Mellin de $A_{\mathbf{e}_p}^{(\nu)}$ es

$$\begin{aligned}\mathbb{E}\left((A_{\mathbf{e}_p}^{(\nu)})^r\right) &= 2^{-r}\mathbb{E}\left((\beta_{1,a})^r\right)\mathbb{E}\left((1/\gamma_b)^r\right) \\ &= 2^{-r}\frac{\Gamma(1+a)\Gamma(1+r)\Gamma(b-r)}{\Gamma(1+a+r)\Gamma(b)}.\end{aligned}$$

véase [5].
Ahora, ya que $a(0, p) = b(0, p) = \sqrt{\frac{p}{2}}$ por un lado tenemos, debido a la independencia entre las variables, que

$$\begin{aligned}&\mathbb{E}\left((\mathbf{e}A_{\mathbf{e}_p})^c(\mathbf{e}A'_{\mathbf{e}'_p})^d\right) = \mathbb{E}\left(\mathbf{e}^{c+d}\right)\mathbb{E}\left((A_{\mathbf{e}_p})^c\right)\mathbb{E}\left((A'_{\mathbf{e}'_p})^d\right) \\ &\quad = 2^{-c-d}\frac{\Gamma(c+d+1)\Gamma(1+a)\Gamma(1+c)\Gamma(b-c)\Gamma(1+a)\Gamma(1+d)\Gamma(b-d)}{\Gamma(1+a+c)\Gamma(1+a+d)\Gamma(b)^2} \\ &\quad = 2^{-c-d}\frac{p}{2}\frac{\Gamma(1+c+d)\Gamma(1+c)\Gamma(\sqrt{\frac{p}{2}}-c)\Gamma(1+d)\Gamma(\frac{p}{2}-d)}{\Gamma(1+c+\frac{p}{2})\Gamma(1+d+\frac{p}{2})},\end{aligned} \tag{4.13}$$

donde la última igualdad es consecuencia de

$$\Gamma(1+t) = t\Gamma(t), \qquad t \geq 0. \tag{4.14}$$

Por otro lado, si consideramos a la martingala $M_t = -2cB_t$, sabemos que $\langle M, M\rangle_t = 4c^2 t$ y que se puede definir a la martingala exponencial asociada

$$\mathscr{E}(M)_t = \exp(-2cB_t - 2c^2 t),$$

entonces, $\langle M, B\rangle_t = -2ct$ y por el teorema de Girsanov se tiene lo siguiente

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}&\left(\exp(-2cB_t)\left(\int_0^t \exp(2B_s)\,ds\right)^{c+d}\right)\\
&= \mathbb{E}\left(\exp(2c^2 t)\mathscr{E}(M)_t\left(\int_0^t \exp(2B_s)\right)^{c+d}\right)\\
&= \mathbb{Q}\left[\exp(2c^2 t)\left(\int_0^t \exp(2(\widetilde{B}_s - 2cs))\right)^{c+d}\right]\\
&= \mathbb{E}\left(\exp(2c^2 t)\left(\int_0^t \exp(2(B_s - 2cs))\right)^{c+d}\right),
\end{aligned}$$

donde $\mathbb{Q} = \mathscr{E}(M)\cdot\mathbb{P}$ y $\widetilde{B}_t = B_t + 2ct$ es un $\mathbb{Q}$-movimiento browniano. Así obtenemos que

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}&\left((\exp(-2B_{\mathbf{e}_p})A_{\mathbf{e}_p}\mathbf{e})^c (A_{\mathbf{e}_p}\mathbf{e}')^d\right)\\
&= \Gamma(1+c)\Gamma(1+d)\mathbb{E}\left(\exp(-2cB_{\mathbf{e}_p})(A_{\mathbf{e}_p})^{c+d}\right)\\
&= \Gamma(1+c)\Gamma(1+d)\mathbb{E}\left(\exp(2c^2\mathbf{e}_p)(A^{(-2c)}_{\mathbf{e}_p})^{c+d}\right),
\end{aligned}$$

además, observando

$$\mathbb{E}\left(\exp(\eta\mathbf{e}_p)\mathbb{1}_{\{\mathbf{e}_p\in dt\}}\right) = \frac{p}{p-\eta}\mathbb{P}\left(\mathbf{e}_{p-\eta}\in dt\right), \qquad \eta < p,$$

llegamos, fijando $q = p - 2c$, a

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}&\left((\exp(-2B_{\mathbf{e}_p})A_{\mathbf{e}_p}\mathbf{e})^c (A_{\mathbf{e}_p}\mathbf{e}')^d\right)\\
&= \frac{p}{q}\Gamma(1+c)\Gamma(1+d)\mathbb{E}\left((A^{(-2c)}_{\mathbf{e}_p})^{c+d}\right)\\
&= 2^{-c-d}\frac{p}{q}\Gamma(1+c)\Gamma(1+d)\\
&\quad\times\frac{\Gamma(1+a(-2c,q))\Gamma(1+c+d)\Gamma(b(-2c,q)-c-d)}{\Gamma(1+a(-2c,q)+c+d)\Gamma(b(-2c,q))}.
\end{aligned} \tag{4.15}$$

Ahora, $a(-2c,q) = -c+\sqrt{\frac{p}{2}}$ y $b(-2c,q) = c+\sqrt{\frac{p}{2}}$, por lo que cancelando los términos comunes de (4.13), (4.15) y desarrollando los restantes de (4.15) obtenemos

$$
\begin{aligned}
&\frac{p}{q}\frac{\Gamma(1+a(-2c,q))\Gamma(b(-2c,q)-c-d)}{\Gamma(1+a(-2c,q)+c+d)\Gamma(b(-2c,q))}\\
&\qquad = \frac{p}{p-2c^2}\frac{\Gamma(1-c+\sqrt{\frac{p}{2}})\Gamma(-d+\sqrt{\frac{p}{2}})}{\Gamma(1+d+\sqrt{\frac{p}{2}})\Gamma(c+\sqrt{\frac{p}{2}})}\\
&\qquad = \frac{p}{p-2c^2}\left(\sqrt{\frac{p}{2}}-c\right)\left(\sqrt{\frac{p}{2}}+c\right)\frac{\Gamma(\sqrt{\frac{p}{2}}-c)\Gamma(\sqrt{\frac{p}{2}}-d)}{\Gamma(1+c+\sqrt{\frac{p}{2}})\Gamma(1+d+\sqrt{\frac{p}{2}})}\\
&\qquad = \frac{p}{2}\frac{\Gamma(\sqrt{\frac{p}{2}}-c)\Gamma(\sqrt{\frac{p}{2}}-d)}{\Gamma(1+c+\sqrt{\frac{p}{2}})\Gamma(1+d+\sqrt{\frac{p}{2}})},
\end{aligned}
$$

nuevamente basados en la propiedad (4.14).
Notemos que en el camino, implicitamente se asumió que $q = p-2c^2 > 0$, por lo que c tuvo que ser suficientemente pequeño, de la misma manera para, $c, d < \sqrt{\frac{p}{2}}$. Pero, aún con esas restricciones, podemos concluir la demostración de la identidad en ley de los dos vectores en (4.12) y por ende la prueba de (4.8).

Para finalizar la prueba nos falta verificar la identidad restante,

$$(\beta_{A_t}, \exp(-B_t)\lambda_{A_t}) \stackrel{\mathcal{L}}{=} (\exp(-B_t)\beta_{A_t}, \lambda_{A_t}),$$

entonces, de la propiedad de autosimilitud se sigue que

$$(\beta_{A_t}, \exp(-B_t)\lambda_{A_t}) \stackrel{\mathcal{L}}{=} (\sqrt{A_t}\beta_1, \exp(-B_t)\sqrt{A_t}\lambda_1),$$

por lo que si consideramos $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ Borel-medible definida como

$$f(x,y) = (\sqrt{x}\beta_1, \sqrt{y}\lambda_1)$$

y la igualdad en ley obtenida mediante la propiedad de retorno de tiempo

$$A_t \stackrel{\mathcal{L}}{=} \exp(-2B_t)A_t \qquad t \geq 0$$

finalmente llegamos a

$$\begin{aligned}(\sqrt{A_t}\beta_1, \exp(-B_t)\sqrt{A_t}\lambda_1) &= f(A_t, \exp(-2B_t)A_t) \\ &\overset{\mathcal{L}}{=} f(\exp(-2B_t)A_t, A_t) \\ &= (\exp(-B_t)\sqrt{A_t}\beta_1, \sqrt{A_t}\lambda_1),\end{aligned}$$

y por lo tanto queda concluida la demostración del Teorema 1. □

4.2. Consecuencias de la Extensión de Bougerol

Para poder analizar las consecuencias del Teorema 4.1, sin que la continuidad de las ideas se vea afectada, es importante recordar algunas propiedades relacionadas con los procesos involucrados en él. El siguiente lema muestra de qué manera se puede representar a un movimiento browniano geométrico con deriva.

Lema 4.1. *Para $\nu \geq 0$, tenemos lo siguiente*

$$e^{B_t+\nu t} = R^{(\nu)}_{A^{(\nu)}_t}, \qquad \textit{para todo } t > 0,$$

donde $A^{(\nu)}_t = \int_0^t ds \, \exp\{2(B_s + \nu s)\}$ y $(R^{(\nu)}_t, t \geq 0)$ es un proceso de Bessel de índice ν.

Demostración. Consideremos al proceso $Y_t = \exp(B_t + \nu t)$ y a $Z_t = Y_t^2$. Entonces, usando la fórmula de Itô tenemos que

$$Z_t = 1 + 2\int_0^t Z_s \, dB_s + 2(\nu + 1)\int_0^t Z_s \, ds, \tag{4.16}$$

por lo que definiendo a $H_t = \text{ínf}\{u : \int_0^u Z_s \, ds \geq t\}$ llegamos a

$$Z_{H_t} = 1 + 2\int_0^{H_t} Z_s \, dB_s + 2(\nu + 1)t. \tag{4.17}$$

Ahora centremos nuestra atención en el término integral de la última expresión, mediante un cambio de variable obtenemos

$$\int_0^{H_t} Z_s \, dB_s = \int_0^t Z_{H_u} \, dB_{H_u},$$

entonces, si consideramos al proceso

$$W_t = \int_0^{H_t} \sqrt{Z_s}\, dB_s,$$

vemos que W es un movimiento browniano, ya que

$$\langle W, W \rangle_t = \int_0^{H_t} Z_s\, ds = t$$

y entonces (4.17) se puede escribir como

$$Z_{H_t} = 1 + \int_0^t \sqrt{Z_{H_s}}\, dW_s + 2(\nu + 1)t,$$

por lo tanto Z_{H_t} es solución de la EDE que caracteriza un proceso cuadrado de Bessel de índice ν. Así, de la unicidad de la solución, el proceso Z cambiando de tiempo es un proceso cuadrado de Bessel de índice ν,

$$X_t^{(\nu)} := Z_{H_t}.$$

Finalmente, por construcción vemos que $H_t^{-1} = A_t^{(\nu)}$, entonces

$$X^{(\nu)}_{A_t^{(\nu)}} = Z_t = \exp(2(B_t + \nu t)). \tag{4.18}$$

Para establecer la identidad del lema basta tomar la raíz de ambos lados.

□

Como consecuencia podemos dar la forma explícita de la inversa del proceso A_t.

Corolario 4.1. *El proceso* $(H_t, t \geq 0)$ *es de la forma*

$$H_t = \int_0^t \frac{du}{X_u^{(\nu)}} \qquad t \geq 0,$$

donde $X^{(\nu)}$ *es un proceso cuadrado de Bessel de índice* ν.

Demostración. Por un lado tenemos, para $t \geq 0$, que

$$A_{H_t}^{(\nu)} = t,$$

y del cálculo diferencial usual

$$A_{H_t}^{'(\nu)} H_t' = 1, \tag{4.19}$$

donde $A_{t_0}^{'(\nu)}$ y H_{t_0}' denotan las derivadas con respecto al tiempo evaluadas en t_0.
Por otro lado, con Z definido igual que en el lema 4.1, observamos que debido a (4.18)

$$A_{H_t}^{'(\nu)} = Z_{H_t} = X_t^{(\nu)},$$

por lo que de (4.19) llegamos a

$$H_t' = \frac{1}{X_t^{(\nu)}},$$

y por lo tanto, finalmente obtenemos la identidad deseada

$$H_t = \int_0^t \frac{du}{X_u^{(\nu)}}.$$

□

Como consecuencias directas del Teorema 4.1 se tiene lo siguiente:
Consideremos un proceso de Bessel de dimensión 2 que empieza en 1, $(R_h, h \geq u)$, y sea

$$H_u = \int_0^u \frac{dh}{R_h^2}, \qquad u \geq 0,$$

el reloj asociado a R. Del corolario 4.1 sabemos que H es la inversa del funcional exponencial A, entonces

Corolario 4.2. *Sea* $(\sigma_t, t \geq 0)$ *un subordinador estable* (1/2)*, de manera más precisa,*

$$\sigma_t := \text{ínf}\{u : \lambda_u \geq t\}, \qquad t \geq 0,$$

independiente de $(R_h, h \geq 0)$*. Entonces, para s fijo, se tiene*

$$H_{\sigma_s} \stackrel{\mathcal{L}}{=} \sigma_{a(s)} \tag{4.20}$$

donde $a(s) \equiv \arg\sinh(s)$.

Demostración. Sea s fijo. De (4.5) observamos que, en particular,

$$\sinh(L_s) \overset{\mathcal{L}}{=} \lambda_{A_s},$$

entonces

$$\begin{aligned}
\sigma_{a(s)} &= \text{ínf}\{u : \lambda_u \geq \arg\sinh(s)\} \\
&\overset{\mathcal{L}}{=} \text{ínf}\{u : \sinh(L_u) \geq s\} \\
&\overset{\mathcal{L}}{=} \text{ínf}\{u : \lambda_{A_u} \geq s\} \\
&= \text{ínf}\{u : A_u \geq \sigma_s\} \\
&= H_{\sigma_s}.
\end{aligned}$$

Por lo tanto

$$\sigma_{a(s)} \overset{\mathcal{L}}{=} H_{\sigma_s}.$$

□

Otro resultado similar se obtiene al encontrar identidades en ley para los tiempos locales de los procesos involucrados en (4.5), con este fin recordemos algunas consecuencias de la fórmula de Tanaka.

i) Si f es una función estrictamente creciente, que además es la diferencia de dos funciones convexas, y X es una semimartingala continua, entonces

$$L_t^{f(a)}(f(X)) = f'_+(a) L_t^a(X)$$

se satisface c.s. para todo a.

ii) Si X y Y son dos semimartingalas continuas entonces

$$L^0(XY) = X^+ \cdot L^0(Y) + Y^+ L^0(X) + X^- L^{0^-}(Y) + Y^- L^{0^-}(X).$$

Corolario 4.3. *Existe la identidad en ley entre procesos*

$$(\sigma_t)_{t\geq 0} \overset{\mathcal{L}}{=} \left(H_{\sigma_{\eta(t)}}\right)_{t\geq 0},$$

donde σ es como en el corolario 4.2 y $\eta : [0,\infty) \to [0,\infty)$ es la inversa de la biyección del proceso continuo estrictamente creciente

$$s \mapsto \int_0^s \frac{du}{R_{\sigma_u}}.$$

Demostración. Observemos que de (**i**) el tiempo local en 0 al tiempo t del proceso $(\sinh(B_s), s \geq 0)$ es L_t, intuitivamente no es tan sorprendente ya que $\sinh(x) = 0$ si y sólo si $x = 0$, además, de (**ii**) se sigue que el tiempo local en 0 al tiempo t del proceso $(\exp(-B_s)\beta_{A_s}, s \geq 0)$ puede expresarse como $\int_0^t \exp(-B_s)\, d\lambda_{A_s}$ ya que fijando $X_s = \exp(-B_s)$ y $Y_s = \beta_{A_s}$ es claro que, al ser X estrictamente positivo, $L^0(X) = 0$ y $X^- = 0$. Entonces, de (4.5) sabemos que para $t \geq 0$

$$\sinh(B_t) \stackrel{\mathcal{L}}{=} \exp(-B_t)\beta_{A_t},$$

por lo que de las observaciones hechas arriba y del corolario 1.2 se sigue, para $t \geq 0$, que

$$L_t \stackrel{\mathcal{L}}{=} \int_0^t \exp(-B_s)\, d\lambda_{A_s}.$$

Por lo que usando el lema de Skorokhod (lema 1.1) y la idea análoga en la prueba del Teorema 1.5 obtenemos una identidad en ley entre los procesos de dos dimensiones

$$(\sinh(B_t), L_t)_{t\geq 0} \stackrel{\mathcal{L}}{=} \left(\exp(-B_t)\beta_{A_t}, \int_0^t \exp(-B_s)\, \lambda_{A_s}\right)_{t\geq 0}.$$

Así, de la última expresión obtenemos

$$\begin{aligned} L_t &\stackrel{\mathcal{L}}{=} \int_0^t \frac{d\lambda_{A_s}}{\exp(B_s)} \\ &\stackrel{\mathcal{L}}{=} \int_0^t \frac{d\lambda_{A_s}}{R_{A_s}} \\ &= \int_0^{A_t} \frac{d\lambda_u}{R_u}, \end{aligned}$$

con R un proceso de Bessel de dimensión 2, entonces

$$(L_t)_{t\geq 0} \stackrel{\mathcal{L}}{=} \left(\int_0^{A_t} \frac{\lambda_u}{R_u}\right)_{t\geq 0}. \tag{4.21}$$

Ahora veamos que $(\sigma_{\eta(t)}, t \geq 0)$ es el inverso-derecho del proceso continuo y creciente $s \mapsto \int_0^s \frac{d\lambda_u}{R_u}$,

$$\begin{aligned}\sigma_{\eta(t)} &= \text{ínf}\{u : \lambda_u \geq \eta(t)\}\\ &= \text{ínf}\{u : \int_0^{\lambda_u} \frac{ds}{R_{\sigma_s}} \geq t\}\\ &= \text{ínf}\{u : \int_0^{u} \frac{d\lambda_s}{R_s} \geq t\},\end{aligned}$$

entonces,

$$\begin{aligned}H_{\sigma_{\eta(t)}} &= \text{ínf}\{u : A_u \geq \sigma_{\eta(t)}\}\\ &= \text{ínf}\{u : \int_0^{A_u} \frac{d\lambda_s}{R_s} \geq t\}\\ &\stackrel{\mathcal{L}}{=} \text{ínf}\{u : \lambda_u \geq t\},\end{aligned}$$

donde la última igualdad se debe a (4.21), por lo tanto

$$(\sigma_t)_{t\geq 0} \stackrel{\mathcal{L}}{=} \left(H_{\sigma_{\eta(t)}}\right)_{t\geq 0}.$$

□

Se sabe que la identidad en (4.20) no se satisface al nivel de procesos, por lo que es natural preguntarse para cuáles funcionales $\Phi : \mathcal{C}^{\uparrow} \to \mathbb{R}$ pudiera satisfacerse la siguiente identidad

$$\mathbb{E}\left(\Phi(H_{\sigma_\cdot})\right) = \mathbb{E}\left(\Phi(\sigma_{a(\cdot)})\right),$$

donde $\mathcal{C}^{\uparrow}$ es el espacio de las trayectorias càdlàg crecientes $\omega : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$. El siguiente teorema responde a tal cuestión.

Teorema 4.2. *Consideremos una función medible* $\Gamma : \mathbb{R}_+^3 \to \mathbb{R}_+$ *con* $\Gamma(\cdot, 0, \cdot) = 0$*, y definamos*

$$\Phi(\omega) = \sum_{s\geq 0} \Gamma(\omega_{s^-}, \Delta\omega_s, s), \qquad \omega \in \mathcal{C}^{\uparrow},$$

donde $\Delta\omega_s = \omega_s - \omega_{s^-}$*. Entonces*

$$\mathbb{E}\left(\Phi(H_{\sigma_\cdot})\right) = \mathbb{E}\left(\Phi(\sigma_{a(\cdot)})\right).$$

De manera más precisa, si $\Gamma(x, y, s) = f(x, s)g(y)$ *para algún par de funciones medibles no-negativas* f *y* g *con* $g(0) = 0$*, entonces*

$$\mathbb{E}\left(\Phi(H_{\sigma.})\right) = \mathbb{E}\left(\Phi(\sigma_{a(\cdot)})\right) = C(f)D(g),$$

con

$$C(f) = \int_0^\infty \frac{d\lambda}{\sqrt{1+\lambda^2}}\mathbb{E}\left(f(H_{\sigma_\lambda}, \lambda)\right) = \int_0^\infty \frac{d\lambda}{\sqrt{1+\lambda^2}}\mathbb{E}\left(f(\sigma_{a(\lambda)}, \lambda)\right)$$

y

$$D(g) = \int_0^\infty \frac{dt}{\sqrt{2\pi t^3}} g(t)$$

Antes de presentar la demostración del teorema, enunciaremos el siguiente lema que será clave para su desarrollo, el cual nos da una identidad que relaciona los valores esperados de funciones evaluadas en el reloj subordinado H y en el subordinador σ.

Lema 4.2. *Para toda función medible* $f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$*, y todo* $s \geq 0$*, tenemos:*

$$\mathbb{E}\left(\frac{1}{R_{\sigma_s}} f(H_{\sigma_s})\right) = \frac{1}{\sqrt{1+s^2}}\mathbb{E}\left(f(\sigma_{a(s)})\right).$$

Demostración. De la identidad en (4.20) se tiene para todo $q, t, \varepsilon > 0$, que

$$\mathbb{E}\left(\exp(-q\sigma_{a(t)}) - \exp(-q\sigma_{a(t+\varepsilon)})\right) = \mathbb{E}\left(\exp(-qH_{\sigma_t}) - \exp(-qH_{\sigma_{t+\varepsilon}})\right).$$

El lado izquierdo de la última igualdad se puede calcular explícitamente y así obtener

$$\exp(-a(t)\sqrt{2q}) - \exp(-a(t+\varepsilon)\sqrt{2q}),$$

donde para ε suficientemente pequeña la última expresión es equivalente a

$$\frac{\varepsilon}{\sqrt{1+t^2}}\sqrt{2q}\exp(-a(t)\sqrt{2q}).$$

Ahora nos fijamos en el lado derecho y aplicamos la propiedad de Markov; para este fin es conveniente introducir un proceso de Bessel de dimensión 2, R', independiente de R, escribiendo a H' como el reloj del mismo. De igual forma consideramos a σ' un subordinador independiente con la misma distribución de σ. También, para todo $r > 0$, el símbolo $\mathbb{P}'_r$ hace referencia a la ley bajo la cual $R'_0 = r$ y $\mathbb{E}'_r$ a la esperanza bajo $\mathbb{P}'_r$. Entonces, recordando la propiedad de autosimilitud para los procesos de Bessel, y en particular para σ', se tiene lo siguiente

$$H'_{\sigma'_\varepsilon} = \int_0^{\sigma'_\varepsilon} \frac{du}{R'^2_u} = \int_0^{r^{-2}\sigma'_\varepsilon} \frac{ds}{r^{-2}R'^2_{r^2 s}},$$

donde $(r^{-2}(R'^2_{r^2 s}), s \geq 0)$ es un proceso de Bessel cuadrado que inicia en 1, entonces

$$\begin{aligned} \mathbb{E}'_r\left[1 - \exp(-qH'_{\sigma'_\varepsilon})\right] &= \mathbb{E}'_1\left[1 - \exp(-qH'_{r^{-2}\sigma'_\varepsilon})\right] \\ &= \mathbb{E}'_1\left[1 - \exp(-qH'_{\sigma'_{\varepsilon/r}})\right]. \end{aligned} \tag{4.22}$$

Observemos también que de los incrementos independientes de los subordinadores σ y σ' podemos escribir $\sigma_{t+\varepsilon} \stackrel{\mathcal{L}}{=} \sigma_t + \sigma'_\varepsilon$ y así

$$H_{\sigma_t + \sigma'_\varepsilon} = \int_0^{\sigma_t} \frac{du}{R^2_u} + \int_0^{\sigma'_\varepsilon} \frac{du}{R^2_{\sigma_t + u}},$$

por lo que usando las últimas dos expresiones, la propiedad de Markov y (4.20) llegamos a

$$\begin{aligned} &\mathbb{E}\left(\exp(-qH_{\sigma_t}) - \exp(-qH_{\sigma_{t+\varepsilon}})\right) \\ &\qquad = \mathbb{E}\left(\exp(-qH_{\sigma_t})\mathbb{E}'_{R_{\sigma_t}}\left[1 - \exp(-qH'_{\sigma'_\varepsilon})\right]\right) \\ &\qquad = \mathbb{E}\left(\exp(-qH_{\sigma_t})\mathbb{E}'_1\left[1 - \exp(-qH'_{\sigma'_{\varepsilon/R_t}})\right]\right) \\ &\qquad = \mathbb{E}\left(\exp(-qH_{\sigma_t})(1 - \exp\left\{-a(\varepsilon/R_{\sigma_t})\sqrt{2q}\right\})\right). \end{aligned}$$

Nuevamente observamos que para ε suficientemente pequeña, la última expresión es equivalente a

$$\varepsilon\sqrt{2q}\,\mathbb{E}\left(\exp(-qH_{\sigma_t})\frac{1}{R_{\sigma_t}}\right).$$

Juntando las expresiones de nuestro interés llegamos finalmente a

$$\mathbb{E}\left(\exp(-qH_{\sigma_t})\frac{1}{R_{\sigma_t}}\right) = \frac{1}{\sqrt{1+t^2}}\exp(-a(t)\sqrt{2q}) = \frac{1}{\sqrt{1+t^2}}\mathbb{E}\left(\exp(-q\sigma_{a(t)})\right)$$

para todo $t, q > 0$, con cual finaliza la demostración. □

Continuando con la prueba del Teorema 4.2.

Demostración. (Teorema 4.2) Consideremos la siguiente notación para denotar a las medidas de intensidad de los saltos

$$\begin{aligned}\mathcal{H}(\Gamma)(s) &= \mathbb{E}\left(\sum_{\lambda\leq s}\Gamma(H_{\sigma_{\lambda-}}, H_{\sigma_\lambda} - H_{\sigma_{\lambda-}})\right),\\ \mathcal{K}(\Gamma)(s) &= \mathbb{E}\left(\sum_{\alpha\leq a(s)}\Gamma(\sigma_{\alpha^-}, \sigma_\alpha - \sigma_{\alpha^-})\right)\end{aligned} \tag{4.23}$$

para una s dada, y $\Gamma : \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$, Borel-medible, tal que $\Gamma(x, 0) = 0$. Entonces, para concluir con la demostración será suficiente que consideremos $\Gamma = f \otimes g = f(x, s)g(y)$ y mostrar lo siguiente:

$$\begin{aligned}\mathcal{H}(f\otimes g)(s) &= h(f)(s)\int_0^\infty \frac{dt}{\sqrt{2\pi t^3}}g(t)\\ \mathcal{K}(f\otimes g)(s) &= k(f)(s)\int_0^\infty \frac{dt}{\sqrt{2\pi t^3}}g(t)\end{aligned}$$

con $h(f)(s)$ y $k(f)(s)$ idénticos e iguales a

$$\begin{aligned}h(f)(s) &= \int_0^s d\lambda\,\mathbb{E}\left(\frac{1}{R_{\sigma_\lambda}}f(H_{\sigma_\lambda})\right) = \int_0^s \frac{d\lambda}{\sqrt{1+\lambda^2}}\mathbb{E}\left(f(H_{\sigma_\lambda})\right)\\ &\parallel\\ k(f)(s) &= \int_0^{a(s)} d\alpha\,\mathbb{E}\left(f(\sigma_\alpha)\right) = \int_0^s \frac{d\lambda}{\sqrt{1+\lambda^2}}\mathbb{E}\left(f(\sigma_{a(\lambda)})\right),\end{aligned}$$

la suficiencia se debe al teorema de clases monótonas funcional.

Fijémonos primero en $\mathcal{K}(\Gamma)(s)$. Ya que la medida de Lévy del subordinador $(\sigma_\alpha, \alpha \geq 0)$ es $\frac{dt}{\sqrt{2\pi t^3}}$ se tiene, como consecuencia de analizar los primeros tiempos de pasada y overshoots de σ, que al aplicar la fórmula de compesación

$$\begin{aligned}\mathcal{K}(\Gamma)(s) &= \mathbb{E}\left(\sum_{\alpha\leq a(s)} f(\sigma_{\alpha^-}, s)g(\sigma_\alpha - \sigma_{\alpha^-})\right)\\ &= \mathbb{E}\left(\int_0^{a(s)} d\alpha \int_0^\infty \frac{dt}{\sqrt{2\pi t^3}}f(\sigma_{\alpha^-})g(t)\right)\\ &= \mathbb{E}\left(\int_0^{a(s)} d\alpha\, f(\sigma_\alpha)\right)\int_0^\infty \frac{dt}{\sqrt{2\pi t^3}}g(t),\end{aligned}$$

ya que el conjunto de puntos de discontinuidad de σ tiene medida de Lebesgue cero, ahora, haciendo una cambio de variable e intercambiando el orden de integración se tiene que

$$\mathbb{E}\left(\int_0^{a(s)} d\alpha\, f(\sigma_\alpha)\right) = \int_0^s \frac{du}{\sqrt{1+u^2}} \mathbb{E}\left(f(\sigma_{a(s)})\right),$$

por lo que

$$\mathcal{K}(\Gamma)(s) = \int_0^s \frac{du}{\sqrt{1+u^2}} \mathbb{E}\left(f(\sigma_{a(s)})\right) \int_0^\infty \frac{dt}{\sqrt{2\pi t^3}} g(t).$$

Para $\mathcal{H}(\Gamma)(s)$, el mismo argumento de la medida de Lévy de σ se usa, así como las ideas desarrolladas en la demostración del lema 4.2 (propiedad de Markov), entonces

$$\begin{aligned}\mathcal{H}(\Gamma)(s) &= \mathbb{E}\left(\int_0^s d\lambda \int_0^\infty \frac{dt}{\sqrt{2\pi t^3}} f(H_{\sigma_\lambda}) g(H_{\sigma_\lambda + t} - H_{\sigma_\lambda})\right) \\ &= \mathbb{E}\left(\int_0^s d\lambda \int_0^\infty \frac{dt}{\sqrt{2\pi t^3}} f(H_{\sigma_\lambda}) \mathbb{E}'_{R_{\sigma_\lambda}}(g(H'_t))\right).\end{aligned} \tag{4.24}$$

Por la propiedad de autosimilitud mostrada en (4.22) sabemos

$$\mathbb{E}'_\rho\left[g(H'_t)\right] = \mathbb{E}\left(g(H_{t/\rho^2})\right),$$

entonces,

$$\begin{aligned}\int_0^\infty \frac{dt}{\sqrt{2\pi t^3}} \mathbb{E}'_\rho\left[g(H'_t)\right] &= \int_0^\infty \frac{dt}{\sqrt{2\pi t^3}} \mathbb{E}\left(h(H_{t/\rho^2})\right) \\ &= \frac{1}{\rho} \int_0^\infty \frac{du}{\sqrt{2\pi u^3}} \mathbb{E}\left(g(H_u)\right).\end{aligned}$$

Del corolario 4.1 sabemos que la función inversa de $\{u \mapsto H_u\}$ es:

$$t \mapsto A_t = \int_0^t d\nu\, e^{2B_\nu},$$

así, haciendo un cambio de variable y usando (4.4) llegamos a

$$\int_0^\infty \frac{du}{\sqrt{2\pi u^3}} \mathbb{E}\left(g(H_u)\right) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \mathbb{E}\left(\int_0^\infty dt\, g(t) \frac{e^{2B_t}}{\sqrt{A_t^3}}\right) = \int_0^\infty dt\, g(t) \frac{1}{\sqrt{2\pi t^3}}.$$

De las identidades anteriores, sustituyendo en (4.24) obtenemos

$$\begin{aligned}\mathcal{H}(\Gamma)(s) &= \mathbb{E}\left(\int_0^s d\lambda\, f(H_{\sigma_\lambda})\frac{1}{R_{\sigma_\lambda}}\int_0^\infty \frac{du}{\sqrt{2\pi u^3}}\mathbb{E}\left(g(H_u)\right)\right)\\ &= \mathbb{E}\left(\int_0^s d\lambda\, f(H_{\sigma_\lambda})\frac{1}{R_{\sigma_\lambda}}\right)\int_0^\infty \frac{dt}{\sqrt{2\pi t^3}}g(t).\end{aligned} \tag{4.25}$$

Para finalmente obtener la igualdad entre $\mathcal{H}(\Gamma)(s)$ y $\mathcal{K}(\Gamma)(s)$ bastará mostrar que

$$h(f)(s) = k(f)(s), \quad \text{para todo } f \geq 0, \text{ Borel-medible.}$$

Para este fin, será suficiente probar la afirmación para $f_\lambda(a) = e^{-\lambda a}$, para todo $\lambda \geq 0$, esto por el teorema de Stone-Weierstrass. Entonces, ya que σ es un subordinador de saltos puros, se tiene lo siguiente

$$\begin{aligned}\mathbb{E}\left(\exp(-\nu H_{\sigma_s})\right) &= 1 + \mathbb{E}\left(\sum_{\lambda\leq s}(e^{-\nu H_{\sigma_\lambda}} - e^{-\nu H_{\sigma_{\lambda-}}})\right)\\ &= 1 + \mathbb{E}\left(\sum_{\lambda\leq s} e^{-\nu H_{\sigma_{\lambda-}}}\left(e^{-\nu(H_{\sigma_\lambda}-H_{\sigma_{\lambda-}})}-1\right)\right),\end{aligned}$$

donde al considerar

$$f_\nu(a) = \exp(-\nu a) \qquad \text{y} \qquad g_\nu(b) = e^{-\nu b} - 1,$$

la última expresión es igual a

$$1 + \mathcal{H}(f_\nu \otimes f_\nu)(s) = 1 + h(f_\nu)(s)\left(\int_0^\infty \frac{dt}{\sqrt{2\pi t^3}}g_\nu(t)\right).$$

Por otro lado, de manera análoga llegamos a

$$\begin{aligned}\mathbb{E}\left(\exp(-\nu\sigma_{a(s)})\right) &= 1 + \mathbb{E}\left(\sum_{\alpha\leq a(s)} e^{-\nu\sigma_{\alpha-}}\left(e^{-\nu(\sigma_\alpha-\sigma_{\alpha-})}-1\right)\right)\\ &= 1 + k(f_\nu)(s)\left(\int_0^\infty \frac{dt}{\sqrt{2\pi t^3}}g_\nu(t)\right).\end{aligned}$$

Así, explícitamente, tenemos

$$\mathbb{E}\left(\exp(-\nu H_{\sigma_s})\right) = 1 + h(f_\nu)(s)\sqrt{2\nu}$$

y

$$\mathbb{E}\left(\exp(-\nu\sigma_{a(s)})\right) = 1 + k(f_\nu)(s)\sqrt{2\nu}.$$

Entonces, de la igualdad en distribución descrita en el corolario 4.2 sabemos que el lado izquierdo de las últimas dos expresiones es igual y por ende el lado derecho también, por lo que

$$\text{para toda } f \geq 0, \text{ Borel-medible,} \quad h(f)(s) = k(f)(s).$$

Por lo tanto, por un argumento de clases monótonas versión funcional finalmente obtenemos

$$\mathcal{H}(\Gamma)(s) = \mathcal{K}(\Gamma)(s),$$

y queda concluida la demostración.

$\square$

Finalmente, enunciamos una variante del teorema anterior.

Teorema 4.3. *Sean* $a, b \geq 0$ *y* $\Gamma : \mathbb{R}_+^2 \to \mathbb{R}_+$ *una función medible con* $\Gamma(\cdot, 0) = 0$*. Definamos*

$$\mathcal{H}^{a,b}(\Gamma)(\ell) = \mathbb{E}\left(\sum_{\lambda \leq \ell} (R_{\sigma_{\lambda-}})^a \frac{\Gamma(H_{\sigma_{\lambda-}}, H_{\sigma_\lambda} - H_{\sigma_{\lambda-}})}{R^b_{\sigma_\lambda}}\right).$$

La siguiente fórmula se satisface para $\Gamma = f \otimes g = f(x)g(y)$*:*

$$\mathcal{H}^{a,b}(f \otimes g)(\ell) = h^-_{a-b}(f, \ell) h^+_b(g),$$

donde:

$$h^-_c(f, \ell) = \int_0^\infty dt\, f(t) \mathbb{E}\left(\frac{e^{(c+1)B_t}}{\sqrt{2\pi A_t}}(1 - \exp^{-\ell^2/2A_t})\right)$$
$$h^+_b(g) = \int_0^\infty \frac{dt\, g(t)}{\sqrt{2\pi}} \mathbb{E}\left(\frac{e^{(2-b)B_t}}{A_t^{3/2}}\right).$$

Demostración. Primero transformemos $\mathcal{H}^{a,b}$ mediante el uso de la fórmula de compesación (ya que conocemos la medida de Lévy de σ) y la propiedad de Markov, los cálculo son análogos a los del teorema anterior

$$
\begin{aligned}
\mathcal{H}^{a,b}(\Gamma)(\ell) &= \mathbb{E}\left(\sum_{\lambda\leq\ell}(R_{\sigma_{\lambda^-}})^a f(H_{\sigma_{\lambda^-}})\frac{g(H_{\sigma_\lambda}-H_{\sigma_{\lambda^-}})\mathbb{1}_{\{\sigma_\lambda>\sigma_{\lambda^-}\}}}{(R_{\sigma_\lambda})^b}\right)\\
&= \mathbb{E}\left(\int_0^\ell d\lambda\,(R_{\sigma_\lambda})^a f(H_{\sigma_\lambda})\int_0^\infty\frac{dt}{\sqrt{2\pi t^3}}\frac{g(H_{\sigma_\lambda+t}-H_{\sigma_\lambda})}{(R_{\sigma_\lambda+t})^b}\right)\\
&= \mathbb{E}\left(\int_0^\ell d\lambda\,(R_{\sigma_\lambda})^a f(H_{\sigma_\lambda})\mathbb{E}_{R_{\sigma_\lambda}}\left[\int_0^\infty\frac{dt}{\sqrt{2\pi t^3}}\frac{g(H_t)}{(R_t)^b}\right]\right).
\end{aligned}
$$

Ahora analizaremos distintos elementos que conformaran la igualdad deseada, entonces, para este primer objeto la identidad resultante se debe a la propiedad de autosimilitud que se ha estudiado en los resultados anteriores y a un cambio de variable

$$
\begin{aligned}
h^+(r,g) := \mathbb{E}_r\left(\int_0^\infty\frac{dt}{\sqrt{2\pi t^3}}\frac{g(H_t)}{(R_t)^b}\right)
&= \mathbb{E}\left(\int_0^\infty\frac{dt}{\sqrt{2\pi t^3}}\frac{g(H_{t/r^2})}{(rR_{t/r^2})^b}\right)\\
&= \frac{1}{r^b}\mathbb{E}\left(\int_0^\infty\frac{dt}{\sqrt{2\pi t^3}}\frac{g(H_{t/r^2})}{(R_{t/r^2})^b}\right)\\
&= \frac{1}{r^b}\left(\frac{1}{r}\right)\mathbb{E}\left(\int_0^\infty\frac{du}{\sqrt{2\pi u^3}}\frac{g(H_u)}{(R_u)^b}\right),
\end{aligned}
$$

recordando nuevamente que por el corolario 4.1, la función inversa de $\{u\mapsto H_u\}$ es:

$$
t\mapsto A_t=\int_0^t d\nu\, e^{2B_\nu},
$$

llegamos que

$$
\begin{aligned}
\mathbb{E}\left(\int_0^\infty\frac{du}{\sqrt{2\pi u^3}}\frac{g(H_u)}{(R_u)^b}\right) &= \mathbb{E}\left(\int_0^\infty\frac{dt\,e^{2B_t}}{\sqrt{2\pi A_t^3}}\frac{g(t)}{(R_{A_t})^b}\right)\\
&= \mathbb{E}\left(\int_0^\infty\frac{dt\,e^{2B_t}}{\sqrt{2\pi A_t^3}}\frac{g(t)}{\exp(bB_t)}\right),
\end{aligned}
$$

es decir,

$$
h^+(r,g)=\frac{1}{r^{b+1}}h_b^+(g).
$$

Entonces, regresando a $\mathcal{H}^{a,b}(\Gamma)(\ell)$, de las identidades anteriores llegamos a

$$\mathcal{H}^{a,b}(\Gamma)(\ell) = \mathbb{E}\left(\int_0^\ell d\lambda\,(R_{\sigma_\lambda})^{a-b-1} f(H_{\sigma_\lambda})\right) h_b^+(g),$$

por lo que para finalizar la prueba bastará mostrar que

$$\mathbb{E}\left(\int_0^\ell d\lambda\,(R_{\sigma_\lambda})^{a-b-1} f(H_{\sigma_\lambda})\right) = h_{a-b}^-(f,\ell).$$

Con este fin mostramos las siguientes identidades, donde del corolario 1.6, la propiedad de autosimilitud de L y el cambio de variable correspondiente a la inversa de H, es decir, la funcional exponencial de un movimiento browniano A, se sigue el resultado deseado

$$\begin{aligned}
h_c^-(f,\ell) &:= \mathbb{E}\left(\int_0^\ell d\lambda\,(R_{\sigma_\lambda})^{c-1} f(H_{\sigma_\lambda})\right)\\
&= \mathbb{E}\left(\int_0^\infty dL_u\,(R_u)^{c-1} f(H_u)\mathbb{1}_{\{L_u<\ell\}}\right)\\
&= \int_0^\infty \frac{du}{\sqrt{2\pi u}}\mathbb{P}(L_u < \ell |\, B_u = 0)\mathbb{E}\left((R_u)^{c-1} f(H_u)\right)\\
&= \int_0^\infty \frac{du}{\sqrt{2\pi u}}\mathbb{P}(\sqrt{u}\sqrt{2\mathbf{e}} < \ell)\mathbb{E}\left((R_u)^{c-1} f(H_u)\right)\\
&= \int_0^\infty \frac{du}{\sqrt{2\pi u}}(1-\exp(-\ell^2/2u))\mathbb{E}\left((R_u)^{c-1} f(H_u)\right)\\
&= \mathbb{E}\left(\int_0^\infty \frac{dA_t}{\sqrt{2\pi A_t}}(1-\exp(-\ell^2/2A_t))(R_{A_t})^{c-1} f(t)\right)\\
&= \mathbb{E}\left(\int_0^\infty \frac{dA_t}{\sqrt{2\pi A_t}}(1-\exp(-\ell^2/2A_t))\exp((c-1)B_t) f(t)\right)\\
&= \mathbb{E}\left(\int_0^\infty \frac{dt\, e^{(c+1)B_t}}{\sqrt{2\pi A_t}}(1-\exp(-\ell^2/2A_t)) f(t)\right)\\
&= \int_0^\infty dt\, f(t)\mathbb{E}\left(\frac{e^{(c+1)B_t}}{\sqrt{2\pi A_t}}(1-\exp(-\ell^2/2A_t))\right).
\end{aligned}$$

Por por lo tanto

$$\mathcal{H}^{a,b}(\Gamma)(\ell) = h_{a-b}^-(f,\ell)h_b^+(g), \qquad \text{para} \qquad \Gamma = f\otimes g.$$

□

Conclusiones

Como objetivo principal se mencionó el llevar a cabo un estudio detallado del artículo [1] de Bertoin, Dufresne y Yor, en donde se extiende la célebre identidad de Bougerol, en ese sentido se concluyó de manera satisfactoria, además de analizar algunas de sus consecuencias.

También se logró un estudio detallado y la compresión de varios aspectos relacionados con los tiempos locales, la teoría de excursiones y los procesos de Bessel. En el transcurso del desarrollo de este trabajo se ampliaron los conocimientos no sólo en cantidad de resultados sino en el entendimiento profundo de los detalles y técnicas usadas para las pruebas de los mismos.

Cabe mencionar que en paralelo con las habilidades técnicas adquiridas, se ejercitaron y desarrollaron cualidades concernientes a la investigación, así como la capacidad de interrelacionar distintas áreas de los procesos estocásticos.

Apéndice A

Procesos y Cálculo estocástico

Recordemos algunos resultados importantes de procesos y cálculo estocástico, los cuales son utilizados durante el desarrollo de algunos capítulos.

Teorema A.1 (Criterio de continuidad de Kolmogorov). *Un proceso estocástico real, X, para el cual existen constantes $,\alpha, \beta, C > 0$ tal que*

$$\mathbb{E}\left(|X_{t+h} - X_t|^{\alpha}\right) \leq Ch^{1+\beta}$$

para todo t y h, tiene una modificación continua casi seguramente.

Teorema A.2 (Desigualdades de Burkholder-Davis-Gundy.). *Para todo $p \in (0, \infty)$, existen dos constantes c_p y C_p tales que, para toda martingala local continua con $M_0 = 0$,*

$$c_p \mathbb{E}\left(\langle M, M\rangle_{\infty}^{p/2}\right) \leq \mathbb{E}\left((M_{\infty}^*)^p\right) \leq C_p \mathbb{E}\left(\langle M, M\rangle_{\infty}^{p/2}\right),$$

donde $M_t^* = \sup_{s \leq t} |M_s|$

Corolario A.1. *Para todo tiempo de paro T*

$$c_p \mathbb{E}\left(\langle M, M\rangle_{T}^{p/2}\right) \leq \mathbb{E}\left((M_{T}^*)^p\right) \leq C_p \mathbb{E}\left(\langle M, M\rangle_{T}^{p/2}\right).$$

De manera más general, para todo proceso predecible y acotado H

$$\begin{aligned} c_p \mathbb{E}\left(\left(\int_0^T H_s^2 \, d\langle M, M\rangle_s\right)^{p/2}\right) &\leq \mathbb{E}\left(\sup_{t \leq T} \left|\int_0^T H_s \, dM_s\right|^p\right) \\ &\leq C_p \mathbb{E}\left(\left(\int_0^T H_s^2 \, d\langle M, M\rangle_s\right)^{p/2}\right) \end{aligned}$$

Apéndice B

Funciones Convexas

Recordemos que una función real definida en un intervalo abierto $I \subset \mathbb{R}$ es convexa si

$$f(tx + (1-t)y) \leq tf(x) + (1-t)f(y),$$

para todo $t \in [0,1]$, $x, y \in I$. Se sigue de ésta definición que para x fija, el cociente $(f(y) - f(x))/(y - x)$ es creciente en y. Lo anterior implica que para cada punto x, la función f tiene derivadas por la izquierda y por la derecha ($f'_{-}(x), f'_{+}(x)$ respectivamente) y para $y > x$

$$f'_{+}(x) \leq \frac{f(y) - f(x)}{y - x} \leq f'_{-}(x).$$

Además,tenemos también los siguientes resultados

Proposición B.1. *Las funciones f'_{-} y f'_{+} son crecientes, continuas por la izquierda y por la derecha respectivamente, y el conjunto $\{x : f'_{-}(x \neq f'_{+}(x))\}$ es a lo más numerable.*

Proposición B.2. *La segunda derivada f'' de f en el sentido de distribuciones es una medida positiva de Radon; reciprocamente, para toda medida de Radon μ sobre $\mathbb{R}$, existe una función convexa f tal que $f'' = \mu$ y para todo intervalo I y $x \in \mathring{I}$,*

$$f(x) = \frac{1}{2}\int_I |x - a|\,\mu(da) + \alpha_I x + \beta_I$$

$$f'_{-}(x) = \frac{1}{2}\int_I \operatorname{sgn}(x - a)\,\mu(da) + \alpha_I,$$

donde α_I y β_I son constantes y $\operatorname{sgn}(x) = 1$ *si* $x > 0$ *y* -1 *si* $x \leq 0$.

Bibliografía

[1] J. Bertoin, D. Dufresne,M. Yor. *Some two-dimensional extensions of Bougerol's identity in law for the exponential functional of linear Brownian motion.* Rev. Mat. Iberoam. 29 (2013), no. 4, 1307–1324.

[2] L. Alili, D. Dufresne, M. Yor. *Exponential functionals and principal values related to Brownian motion. A collection of research papers,* Biblioteca de la Revista Matemática Iberoamericana, Madrid, 1997.

[3] L. Chaumont, M. Yor. *Exercises in Probability. A guided tour from Measure Theory to Random Process, via Conditioning.* Cambridge University Press, 2003.

[4] D. Dufresne, M. Yor. *A two dimensional extension of Bougerol's identity in law for the exponential Brownian motion.* Centre for Actuarial Studies, University of Melbourne, 2011.

[5] Epstein, B. *Some Applications of the Mellin Transform in Statistics.* The Annals of Mathematical Statistics 19 (1948), no. 3, 370–379.

[6] I. Karatzas, S. E. Shreve. *Brownian Motion and Stochastic Calculus,* 2da Ed., Springer-Verlag, New York, 1991.

[7] S.I. Resnick. *Extreme Values, Regular Variation, and Point Processes,* Springer-Verlag, 1987.

[8] D. Revuz, M. Yor. *Continuous Martingales and Brownian Motion,* 3rd. Ed., Springer-Verlag, Berlin, 1999.

[9] M. Yor. *Exponential Functionals of Brownian Motion and Related Processes.* Springer Finance, 2001.