



---

---

Centro de Investigación en Matemáticas, A.C.

## Comportamiento Asintótico del Número de Saltos en los $\beta$ -Coalescentes

Tesis

Que para obtener el Grado de:

**Maestro en Ciencias con Orientación en Probabilidad y  
Estadística**

P R E S E N T A:

Germán González Millán

Director:

Dr. Arno Siri Jegousse

Co-Director:

Dr. Juan Carlos Pardo Millán

Guanajuato, Guanajuato, México

5 de febrero de 2014



*A mis padres,  
Eladio González Salaz  
y Socorro Millán Félix,  
y a mi novia,  
Martha Alicia Rosales Romero*



# Agradecimientos

En primer lugar, agradezco a Dios por haber obtenido este gran logro y a mi familia por haberme dado las bases educativas desde la niñez. En particular, agradezco a mis padres por este gran apoyo incondicional que me brindaron en todos estos años en lo que respecta a mi formación personal.

También doy gracias a todos los profesores que fueron pieza clave en mi formación académica, a mis amigos y compañeros por haberme ayudado y escuchado siempre. También a mi novia Martha Alicia Rosales Romero al formar parte importante de mi vida y haberme levantado cada vez que tropezaba, así como también de su cariño, comprensión y paciencia.

Agradezco también al Dr. Arnaud Charles Leo Jégousse por haber fungido como asesor en este trabajo de tesis, por estar al pendiente en todo el transcurso y haberme motivado a seguir con estos estudios en un futuro. En especial agradezco al Dr. Juan Carlos Pardo Millán por haber sido mi tutor en toda la maestría y haberme ayudado en los momentos difíciles tanto en el ámbito emocional como en el académico, además de haber fungido como un amigo y haberme tenido paciencia.

De igual modo, agradezco a los sinodales Dr. Víctor Rivero Mercado y Dr. José Luis Pérez Garmendia por la inversión de su valioso tiempo en la revisión y corrección de la tesis, así como también al Dr. Víctor Pérez-Abreu Carrión por haber fungido como lector especial de la misma.

Por último al Consejo Nacional de Ciencia y Tecnología (CONACYT) por la beca de maestría que me fue otorgada.



# Resumen

Se empezará dando una pequeña introducción a los subordinadores, ya que éstos son pieza clave en el estudio de los coalescentes. Los coalescentes son procesos de Markov a tiempo continuo con valores en el espacio de las particiones de los números naturales tal que su coalescente restringido es una cadena de Markov con valores en el espacio de las particiones de  $\{1, 2, \dots, n\}$  regida por sus tasas de transición. También se dará una ilustración gráfica del comportamiento de esta clase de procesos. Enseguida se explica la relación entre los subordinadores y los coalescentes mediante un resultado importante sobre los momentos de funcionales exponenciales para subordinadores.

El objetivo de este trabajo de tesis consiste en estudiar el comportamiento asintótico del número de generaciones que se debe de ir hacia atrás en el tiempo del coalescente restringido iniciando con una cantidad finita de individuos hasta que haya un solo individuo en la población. Esto se hará mediante el estudio de las caminatas aleatorias con una barrera analizando el número de saltos que ésta da por debajo de una barrera fija iniciando en cero. Después se dan unos resultados importantes acerca de resultados asintóticos sobre colecciones de variables aleatorias que cumplen cierta recursión en ley.

Como una aplicación a los beta-coalescentes, se hace énfasis en algunos resultados del párrafo anterior. Aquí se intruducen coalescentes cuyas tasas de transición están caracterizadas por la distribución beta de parámetros  $a$  y  $b$ , tomando como casos especiales  $0 < a < 1, b = 1, 1 < a < 2, b = 1$  y  $a = b = 1$ . De ahí que surjan, como consecuencia, el coalescente de Kingman y el coalescente de Bolthausen-Sznitman.

Por último se da un resumen de lo que se obtuvo en este trabajo de tesis mediante una tabla.





# Índice general

Agradecimientos	III
Resumen	v
Introducción	1
<b>1. Subordinadores</b>	<b>3</b>
1.1. Definiciones y Propiedades Básicas . . . . .	3
1.2. Medida Potencial . . . . .	11
1.3. Pasaje a través de un Nivel . . . . .	16
<b>2. Funcionales Exponenciales para Subordinadores</b>	<b>25</b>
2.1. Introducción . . . . .	25
2.2. Cálculo de los Momentos Enteros . . . . .	25
2.3. Algunos Ejemplos . . . . .	37
2.3.1. Proceso de Poisson Estándar . . . . .	37
2.3.2. Descomposición de la Variable Exponencial . . . . .	39
<b>3. Resultados Asintóticos para Caminatas Aleatorias con una Barrera</b>	<b>43</b>
3.1. Caminatas Aleatorias con una Barrera . . . . .	43
3.2. Resultados sobre $N_n$ y $S_{N_n-1}$ . . . . .	48
3.3. Demostración de los Resultados Principales sobre $M_n$ . . . . .	64
3.3.1. Demostración del Teorema 3.1.6 . . . . .	64
3.3.2. Demostración Alternativa del Teorema 3.1.6 . . . . .	72
3.3.3. Demostración del Teorema 3.1.7 . . . . .	73
3.3.4. Demostración del Teorema 3.1.8 . . . . .	76
3.3.5. Demostración del Teorema 3.1.9 . . . . .	79

<b>4. Aplicaciones a los Procesos de Coalescencia</b>	<b>81</b>
4.1. $\Lambda$ -Coalescentes . . . . .	81
4.2. Tasas de Transición de los $\beta$ -Coalescentes . . . . .	84
4.3. Comportamiento Asintótico del Número de Colisiones en los $\beta$ -Coalescentes	88
<b>A. Funciones de Variación Regular</b>	<b>95</b>
<b>Apéndice</b>	<b>95</b>
<b>Conclusiones</b>	<b>115</b>
<b>Bibliografía</b>	<b>117</b>

# Introducción

El presente trabajo concierne al área de genética poblacional. La teoría de coalescencia tuvo su origen en física y en genética. Se estudiaron modelos en física estadística donde los objetos de diferentes masas se movían en el espacio. Cuando se acercan dos objetos de masas  $x$  y  $y$ , digamos, pueden coalescer en un objeto de masa  $x + y$ . En estos modelos se supone un kernel  $K(x, y)$  que especifica la propensión con la que estos objetos se fusionan. Se estudian modelos con un número fijo de objetos  $n$  así como también una cantidad numerable de ellos. En 1998, Evans y Pitman introdujeron tal proceso de coalescencia markoviano en general, ver [22]. En 1998, Aldous y Pitman estudiaron el coalescente aditivo estándar (el proceso cuyo kernel está dado por  $K(x, y) = x + y$ ) y presentaron una construcción vía una descomposición de Poisson en árboles aleatorios continuos, ver [3]. Aldous, en 1997, estuvo interesado en los procesos de coalescencia multiplicativos (su kernel está dado por  $K(x, y) = xy$ ), véase [2].

En genética matemática de poblaciones, la teoría de coalescencia se remonta a Kingman en 1982, ver [32], [33] y [34]. El impacto genético se describe muy bien en los artículos [19], [28], [35], [36] y [39]. Un ejemplo especial de proceso de coalescencia con colisiones múltiples fue introducido por Bolthausen y Sznitman en 1998, ver [14]. Otras construcciones recientes de este proceso, basado en la genealogía de procesos de ramificación de estados continuos y sobre esquemas de subordinación, fueron presentados en [6] y [7].

La tesis está organizada de la siguiente manera. En el Capítulo 1 se introducen conceptos básicos a cerca de subordinadores, así como también de sus propiedades. Se introduce también elementos de teoría de potencial y varios aspectos sobre el pasaje a través de un nivel, en donde se emplea de manera crucial la fórmula de compensación, véase [4], [8], [18] y [42].

El Capítulo 2 es muy importante, ya que en él se dan varias propiedades deseables que tienen los subordinadores, necesarias para estudiar el Capítulo 3. Esta parte es concerniente a las funcionales exponenciales para subordinadores, ver [10], [8], [9], [11], [15] y [16]. Dichas funcionales nos servirán para caracterizar a ciertas variables

aleatorias especiales que se verán en el siguiente capítulo. Luego se ilustran algunos ejemplos en donde se aplican estos conceptos y propiedades, ver [8] y [10]; esto con el fin de comprender mejor los capítulos subsecuentes.

El Capítulo 3 es la parte central de este trabajo, ya que se analiza el comportamiento asintótico de dos variables aleatorias importantes; en esencia vamos a basarnos en [30] y [31]. Primero, se definen dos caminatas aleatorias no decrecientes con valores en los enteros positivos; una simple y la otra con una barrera  $n$ , las cuales denotaremos por  $S$  y  $R^{(n)}$ . Posteriormente, definimos dos variables aleatorias que denotaremos por  $N_n$  y  $M_n$ ; una cuenta el número de pasos necesarios para que la caminata aleatoria simple cruce el nivel  $n$  y la otra cuenta el número de saltos de la caminata aleatoria con barrera antes de sobrepasar ese nivel, ver [31]. Después definimos una cadena de Markov decreciente  $Z$  que inicia en  $n$  pero que es absorbida por el 1, también se define  $M_n$  (no es la  $M_n$  anterior) como la variable aleatoria que cuenta los pasos que se necesitan para que dicha cadena de Markov sea absorbida por el 1 condicionada a que empiece en tal nivel, véase [31]. El objetivo de este capítulo es determinar el comportamiento asintótico de cualquier colección de variables aleatorias  $(M_n, n \geq 1)$  que cumplen con cierta recursión en ley a través de  $N_n$ . Se enuncian y demuestran cuatro teoremas que determinarán el comportamiento asintótico de  $M_n$  bajo ciertas hipótesis usando varios resultados límites relacionados con  $N_n$  que serán probados mediante muchos resultados de [13].

Finalmente, en el Capítulo 4 se introducen los procesos de coalescencia y sus aplicaciones, así como también de algunos ejemplos de esta clase de procesos, como son el *coalescente de Kingman*, el *coalescente de Bolthausen-Sznitman* y los  $\beta$ -coalescentes. Todo esto se hace con el fin de aplicar los resultados principales mencionados en el Capítulo 3 acerca de  $X_n$ , la variable aleatoria que cuenta el número de saltos que da el coalescente restringido hasta que haya un sólo bloque. Para definiciones y propiedades de los coalescentes intercambiables, ver [5]. Los resultados de este capítulo se basan en [29], [30], [31], [17] and [45]; el primero muestra la aplicación para el coalescente de Bolthausen-Sznitman.

El objetivo de este trabajo de tesis, es determinar el comportamiento asintótico de  $X_n$  renormalizado adecuadamente.

# Capítulo 1

## Subordinadores

Los subordinadores forman una subclase de procesos de Lévy los cuales tienen trayectorias crecientes. Se especifican las distribuciones relacionadas a sus primeros tiempos de pasada por arriba de un nivel fijo. Estas proporcionan una familia importante de teoremas límite conocidos, como son la ley del arco seno, entre otros.

En este capítulo vamos a definir a los subordinadores y enunciar sus propiedades; se dará la construcción de un subordinador. Luego, proporcionaremos nociones de medida potencial así como también de sus propiedades para después analizar los overshoots y los undershoots de los subordinadores cuando estos cruzan cierto nivel.

### 1.1. Definiciones y Propiedades Básicas

**Definición 1.1.1** Un subordinador es un proceso de Lévy que toma valores en  $[0, \infty)$ , esto es, que sus trayectorias son no decrecientes.

A lo largo de este capítulo supondremos que  $X = (X_t, t \geq 0)$  es un subordinador. Como la ley de los subordinadores es infinitamente divisible y sus trayectorias son cadlag, entonces su transformada de Laplace se puede expresar como

$$\mathbb{E}[\exp\{-\lambda X_t\}] = \exp\{-t\Phi(\lambda)\}, \quad \lambda \geq 0, \quad (1.1.1)$$

donde  $\Phi : [0, \infty) \rightarrow [0, \infty)$  es el exponente de Laplace asociado a  $X$ . Lo dicho arriba se puede enunciar y demostrar como sigue.

**Lema 1.1.2** *Existe una función  $\Phi : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}_+$  tal que*

$$\mathbb{E}[e^{-\lambda X_t}] = e^{-t\Phi(\lambda)},$$

*para todo  $t, \lambda \geq 0$ .*

**Demostración.** Para  $t = n$ , observemos que

$$X_n = X_1 + (X_2 - X_1) + (X_3 - X_2) + \cdots + (X_n - X_{n-1}),$$

usando la propiedad de incrementos independientes y estacionarios, tenemos

$$\mathbb{E} [e^{-\lambda X_n}] = \mathbb{E} [e^{-\lambda X_1} e^{-\lambda(X_2 - X_1)} \cdots e^{-\lambda(X_n - X_{n-1})}] = \prod_{i=1}^n \mathbb{E} [e^{-\lambda(X_i - X_{i-1})}] = \mathbb{E} [e^{-\lambda X_1}]^n,$$

con  $X_0 = 0$  casi seguramente.

Ahora tomemos  $t = p/q$ , donde  $p, q \in \mathbb{Z}^+$  con  $q \neq 0$ , de igual manera que

$$\mathbb{E} [e^{-\lambda X_{p/q}}] = \mathbb{E} [e^{-\lambda X_{1/q}}]^p.$$

Por otro lado,

$$X_1 = X_{\frac{1}{q}} + \left( X_{\frac{2}{q}} - X_{\frac{1}{q}} \right) + \cdots + \left( X_1 - X_{\frac{q-1}{q}} \right),$$

así,

$$\mathbb{E} [e^{-\lambda X_{p/q}}] = \mathbb{E} [e^{-\lambda X_1}]^{p/q}.$$

Si  $t \geq 0$ , existe  $\{t_n, n \geq 1\} \subset \mathbb{Q}$  tal que  $t_n \downarrow t$ , por la continuidad por la derecha,  $X_t = \lim_{t_n \downarrow t} X_{t_n}$  c.s. y como  $e^{\lambda X_{t_n}} \rightarrow e^{\lambda X_t}$ , por teorema de convergencia dominada, tenemos

$$\begin{aligned} \mathbb{E} [e^{-\lambda X_t}] &= \mathbb{E} \left[ \lim_{n \rightarrow \infty} e^{-\lambda X_{t_n}} \right] \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{E} [e^{-\lambda X_1}]^{t_n} \\ &= \mathbb{E} [e^{-\lambda X_1}]^t. \end{aligned}$$

Esto es, para cualquier  $t \geq 0$  se satisface

$$\mathbb{E} [e^{-\lambda X_t}] = \mathbb{E} [e^{-\lambda X_1}]^t.$$

Ahora, si definimos  $\Phi : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}_+$  tal que  $\mathbb{E}(e^{-\lambda X_1}) = e^{-\Phi(\lambda)}$  para todo  $\lambda \geq 0$ , tenemos

$$\mathbb{E} [e^{-\lambda X_t}] = e^{-t\Phi(\lambda)}, \quad \text{para todo } \lambda, t \geq 0.$$

□

El siguiente teorema determina de manera explícita al exponente de Laplace de un subordinador.

**Teorema 1.1.3 (De Finetti, Lévy, Khintchine)** .

(i) Si  $\Phi$  es el exponente de Laplace de un subordinador  $X = (X_t, t \geq 0)$  entonces existe una única pareja  $(k, d)$  de reales no negativos y una única medida  $\Pi$  en  $(0, \infty)$  con  $\int (1 \wedge x)\Pi(dx) < \infty$  tal que para todo  $\lambda \geq 0$ ,

$$\Phi(\lambda) = k + d\lambda + \int_{(0, \infty)} (1 - e^{-\lambda x}) \Pi(dx). \quad (1.1.2)$$

(ii) Recíprocamente cualquier función  $\Phi$  que puede expresarse en la forma (1.1.2) es el exponente de Laplace de un subordinador.

**Demostración.** Tenemos que para todo  $t > 0$ ,  $\mathbb{E}[e^{-\lambda X_t}] = e^{-t\Phi(\lambda)}$ . Observemos que

$$\Phi(q) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1 - e^{-\Phi(q)/n}}{1/n} = \lim_{n \rightarrow \infty} n(1 - e^{-\Phi(q)/n}).$$

Por otro lado,

$$\mathbb{E}[1 - e^{-\lambda X_{1/n}}] = 1 - \mathbb{E}[e^{-\lambda X_{1/n}}] = 1 - e^{-\Phi(q)/n}.$$

Así,

$$\begin{aligned} \Phi(q) &= \lim_{n \rightarrow \infty} n\mathbb{E}[1 - e^{-\lambda X_{1/n}}] \\ &= q \lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{E}\left[\int_0^\infty e^{-qx} n \mathbf{1}_{\{x < X_{1/n}\}} dx\right] \\ &= q \lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^\infty e^{-qx} n \mathbb{P}(x < X_{1/n}) dx \\ &= q \lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^\infty e^{-qx} \bar{F}_n(x) dx, \end{aligned}$$

donde  $\bar{F}_n(x) = n\mathbb{P}(x < X_{1/n})$ . Por lo tanto,

$$\frac{\Phi(q)}{q} = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^\infty e^{-qx} \bar{F}_n(x) dx.$$

Por el teorema de continuidad extendida de transformadas de Laplace,  $(\bar{F}_n(x), n \geq 1)$  converge conforme  $n$  se va a infinito hacia una medida definida en  $[0, \infty]$ . Y como cada  $\bar{F}_n$  decrece, el límite es, necesariamente, de la forma

$$\bar{F}_n(x) dx \rightarrow d\delta_0(dx) + \bar{F}(x) dx, \quad n \rightarrow \infty,$$

con  $d \geq 0$  y  $\bar{F}$  una función no decreciente. Entonces,

$$\begin{aligned}
\frac{\Phi(q)}{q} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^\infty e^{-qx} \bar{F}_n(x) dx \\
&= \int_0^\infty e^{-qx} (d\delta_0(dx) + \bar{F}(x)dx) \\
&= d + \int_{(0,\infty)} e^{-qx} \bar{F}(x) dx \\
&= d + \int_{(0,\infty)} e^{-qx} \int_x^\infty d(-\bar{F}(u)) dx + \int_{(0,\infty)} e^{-qx} \bar{F}(\infty) dx \\
&= d + \int_{(0,\infty)} \int_0^u e^{-qx} dx d(-\bar{F}(u)) - \frac{e^{-qx}}{q} \bar{F}(\infty) \Big|_0^\infty \\
&= d + \frac{1}{q} \int_{(0,\infty)} (1 - e^{-qu}) d(-\bar{F}(u)) + \frac{\bar{F}(\infty)}{q}.
\end{aligned}$$

En consecuencia,

$$\begin{aligned}
\Phi(q) &= \bar{F}(\infty) + dq + \int_0^\infty (1 - e^{-qu}) d(-\bar{F}(u)) \\
&= k + dq + \int_0^\infty (1 - e^{-qu}) \Pi(dx),
\end{aligned}$$

con  $k = \bar{F}(\infty)$  y  $\Pi(dx) = d(-\bar{F}(x))$  en  $(0, \infty)$ .

Ahora, veamos que

$$\begin{aligned}
\int_{(0,\infty)} (1 \wedge x) \Pi(dx) &= \int_0^1 x \Pi(dx) + \Pi(1, \infty) \\
&= \int_0^1 \int_y^1 \Pi(dx) dy + \Pi(1, \infty) \\
&= \int_0^1 \Pi(y, 1) dy + \Pi(1, \infty) \\
&= \int_0^1 \Pi(y, \infty) dy \\
&= \int_0^1 \bar{F}(y) dy < \infty.
\end{aligned}$$



Esto concluye la prueba de la primera parte del teorema.

A continuación, probemos la segunda parte del teorema. Tenemos que

$$\Phi(\lambda) = k + d\lambda + \int_{(0,\infty)} (1 - e^{-\lambda x}) \Pi(dx).$$

Supongamos que  $d = 0$ . Tomemos  $\Pi$  tal que  $\int_{(0,\infty)} (1 \wedge x) \Pi(dx) < \infty$ . Definamos  $f : [0, \infty) \times [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}_+$ , como  $f(s, x) = x1_{\{s \in (0,t]\}}$ .

Para  $B \in \mathcal{B}([0, \infty)) \times \mathcal{B}([0, \infty])$ , consideremos

$$M(B) = \sum_{t \geq 0} 1_{\{(t, \Delta_t) \in B\}},$$

la medida aleatoria de Poisson con intensidad  $\lambda \otimes [\Pi + k\delta_\infty]$  sobre  $E = [0, \infty) \times [0, \infty]$ , donde  $\lambda$  es la medida de Lebesgue en  $[0, \infty)$ . Así  $(\Delta_t, t \geq 0)$  es un proceso puntual de Poisson con medida característica  $\Pi + k\delta_\infty$ . Ahora definamos

$$\zeta_\infty = \inf\{t : \Delta_t = \infty\}$$

y para todo  $t \leq \zeta_\infty$ ,

$$Y_t = \sum_{0 \leq s \leq t} \Delta_s.$$

Observemos que

$$\begin{aligned} \int_E f(s, x) M(ds \otimes dx) &= \int_E x1_{\{s \in (0,t]\}} M(ds \otimes dx) \\ &= \int_E x1_{\{s \in (0,t]\}} \sum_{t' > 0} \delta_{(t', \Delta_{t'})} (ds \otimes dx) \\ &= \sum_{t' \leq t} \int_E x \delta_{(t', \Delta_{t'})} (ds \otimes dx) \\ &= \sum_{t' \leq t} \Delta_{t'}, \end{aligned}$$

la última igualdad es por que  $\delta_{(t', \Delta_{t'})} (ds \otimes dx) = 1$  si y solo si  $s = t'$  y  $x = \Delta_{t'}$ .

Así,

$$Y_t = \int f(s, x) M(ds \otimes dx).$$

De la fórmula de Campbell, tenemos

$$\mathbb{E} [e^{-qY_t}] = \mathbb{E} [e^{-\langle M, qf \rangle}] = \exp \left\{ - \int (1 - e^{-qf(s,x)}) \lambda \otimes [\Pi + k\delta_\infty] (ds \otimes dx) \right\},$$

pero

$$\begin{aligned} & - \int_E (1 - e^{-qf(s,x)}) \lambda \otimes [\Pi + k\delta_\infty] (ds \otimes dx) \\ &= - \int_{(0,\infty)} \int_{(0,\infty]} (1 - e^{-qx \mathbf{1}_{\{s \in (0,t]\}}}) (ds \otimes [\Pi(dx) + k\delta_\infty(dx)]) \\ &= - \int_0^t \int_{(0,\infty]} (1 - e^{-qx}) (ds \otimes [\Pi(dx) + k\delta_\infty(dx)]) \\ &= -t \int_{(0,\infty)} (1 - e^{-qx}) \Pi(dx) - t \int_{(0,\infty]} (1 - e^{-qx}) k\delta_\infty(dx) \\ &= -t \int_{(0,\infty)} (1 - e^{-qx}) \Pi(dx) - tk, \end{aligned} \tag{1.1.3}$$

en consecuencia

$$\mathbb{E} [e^{-qY_t}] = e^{-tk - t \int_{(0,\infty)} (1 - e^{-qx}) \Pi(dx)},$$

para todo  $t, q \geq 0$ .

Ahora, veamos que  $Y_t < \infty$  c.s. para todo  $t < \zeta_\infty$ . Observemos que para  $y \geq 0$ ,  $0 \leq e^{-y} \leq 1$ , así,  $1 - e^{-y} \leq 1$ . Si  $y < 1$ ,

$$e^{-y} = 1 - y + \sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-y)^n}{n!},$$

con  $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-y)^n}{n!} \geq 0$ , lo cual implica que  $e^{-y} \geq 1 - y$ , es decir,  $y \geq 1 - e^{-y}$ , por lo tanto

$$1 - e^{-y} \leq 1 \wedge y, \text{ para toda } y > 0.$$

Usando lo anterior y que  $\int_{(0,\infty)} (1 \wedge x) \Pi(dx) < \infty$ , tenemos

$$\int_{(0,\infty)} (1 - e^{-x}) \Pi(dx) \leq \int_{(0,\infty)} (1 \wedge x) \Pi(dx) < \infty.$$

Así, usando el hecho de que existe una constante  $C_q$  tal que  $(1 - e^{-qx})(1 - e^{-x})^{-1} \leq C_q$

$$\begin{aligned} \int_{(0,\infty)} (1 - e^{-qx}) \Pi(dx) &= \int_{(0,\infty)} \frac{1 - e^{-qx}}{1 - e^{-x}} (1 - e^{-x}) \Pi(dx) \\ &\leq C_q \int_{(0,\infty)} (1 - e^{-x}) \Pi(dx) \\ &\leq C_q \int_{(0,\infty)} (1 \wedge x) \Pi(dx) < \infty. \end{aligned}$$

Concluimos que

$$\int_{(0,\infty)} (1 - e^{-qx}) \Pi(dx) < \infty.$$

Por teorema de convergencia dominada, notemos lo siguiente

$$\begin{aligned} \lim_{q \rightarrow 0} \mathbb{E} [e^{-qY_t}] &= \lim_{q \rightarrow 0} \mathbb{E} [e^{-qY_t} 1_{\{Y_t < \infty\}}] \\ &= \mathbb{P}(Y_t < \infty). \end{aligned}$$

Por otro lado, de (1.1.3)

$$\mathbb{E} [e^{-qY_t} 1_{\{Y_t < \infty\}}] = \exp \left\{ -t \int_{(0,\infty)} (1 - e^{-qx}) \Pi(dx) \right\}$$

y

$$\lim_{q \rightarrow 0} \int_{(0,\infty)} (1 - e^{-qx}) \Pi(dx) = \int_{(0,\infty)} \lim_{q \rightarrow 0} (1 - e^{-qx}) \Pi(dx) = 0,$$

en consecuencia

$$\mathbb{P}(Y_t < \infty) = 1.$$

Entonces, si  $d = 0$  en la ecuación (1.1.2)

$$\mathbb{E} [e^{-qY_t}] = e^{-t(k + \int_{(0,\infty)} (1 - e^{-qx}) \Pi(dx))} = e^{-t\Phi(q)}.$$

También, como  $Y_t = \int_E x 1_{\{s \in (0,t]\}} M(ds \times dx)$ ,  $Y_t$  es no decreciente. Además,

$$Y_{t+s} - Y_t = \int_E x 1_{\{u \in (t,t+s]\}} M(du \times dx),$$

es independiente de la medida aleatoria Poisson  $M$  restringida a  $(0, t] \times (0, \infty)$ , por lo que  $(Y_{t+s} - Y_t)$  es independiente de  $\{Y_u, u \leq t\}$ . Con lo que se concluye que  $Y$

tiene incrementos independientes.

Veamos que  $Y$  tiene incrementos estacionarios. Sean  $s, t \geq 0$ . Entonces

$$\begin{aligned} \mathbb{E} \left[ e^{-\lambda(Y_{t+s} - Y_t)} \right] &= \mathbb{E} \left[ e^{-\lambda \int_E x 1_{\{u \in (t, t+s]\}} M(du \times dx)} \right] \\ &= \mathbb{E} \left[ e^{-\lambda \langle M, f \rangle} \right] \\ &= e^{-sk - s \int (1 - e^{-\lambda x}) \Pi(dx)} \\ &= \mathbb{E} \left[ e^{-\lambda Y_s} \right]. \end{aligned}$$

Entonces,

$$Y_{t+s} - Y_t \stackrel{\mathcal{L}}{=} Y_s,$$

para todo  $t \geq 0$ . Ahora, tomemos  $d > 0$  y definamos

$$Y_t^{(d)} = dt + Y_t.$$

De esta manera

$$\mathbb{E} \left[ e^{-qY_t^{(d)}} \right] = \mathbb{E} \left[ e^{-qdt - qY_t} \right] = e^{-t\Phi(q)},$$

con

$$\Phi(q) = k + dq + \int_{(0, \infty)} (1 - e^{-qx}) \Pi(dx),$$

esto concluye la prueba.  $\square$

Existen dos familias importantes de subordinadores, la de los procesos de Poisson y la de los subordinadores estables. En seguida daremos la definición de subordinador estable.

**Definición 1.1.4** Se dice que un subordinador es estable de índice  $\alpha \in (0, 1)$  si su exponente de Laplace es tal que

$$\Phi(\lambda) = \lambda^\alpha = \frac{\alpha}{\Gamma(1 - \alpha)} \int_0^\infty (1 - e^{-\lambda x}) x^{-1-\alpha} dx.$$

Una tercera familia importante de subordinadores son los procesos *Gamma* con parámetros  $a, b > 0$ . Estos son aquellos procesos cuyo exponente de Laplace está dado por

$$\Phi^{(a,b)}(\lambda) = a \log(1 + \lambda/b) = \int_0^\infty (1 - e^{-\lambda x}) a x^{-1} e^{-bx} dx,$$

donde la segunda igualdad es conocida como la **integral de Frullani**. En este caso,  $\Pi^{(a,b)}(dx) = a x^{-1} e^{-bx} dx$  es la medida de Lévy y el coeficiente de drift es cero.

## 1.2. Medida Potencial

Un objeto importante en el estudio de los subordinadores, es sin duda, la medida potencial.

**Definición 1.2.1** Dado un subordinador  $X$  con exponente de Laplace  $\Phi$ , y  $B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^+)$ , la medida potencial de  $X$  se puede definir como

$$U(B) = \mathbb{E} \left[ \int_0^\infty 1_{\{X_t \in B\}} dt \right].$$

De manera alternativa, podemos definir la medida potencial (asociada a  $X$ ) mediante

$$U(dx) = \int_0^\infty \mathbb{P}(X_t \in dx) dt,$$

y su función de distribución, denotada por  $U(x)$ , es conocida como la **función de renovación** de  $X$ . Si  $T_x := T_{(x, \infty)}$  es el primer instante en el que  $X$  sobrepasa el nivel  $x$ , entonces podemos escribir  $U(x)$  como

$$U(x) = U([0, x]) = \mathbb{E}[T_x].$$

Notemos que la medida potencial  $U(dx)$  tiene como transformada de Laplace

$$\widehat{U}(\lambda) = \int_{[0, \infty)} e^{-\lambda x} U(dx) = \frac{1}{\Phi(\lambda)}, \quad \text{para todo } \lambda \geq 0. \quad (1.2.1)$$

En efecto, para  $\lambda \geq 0$ , tenemos que

$$\begin{aligned} \widehat{U}(\lambda) &= \int_0^\infty e^{-\lambda x} U(dx) = \int_0^\infty e^{-\lambda x} \left( \int_0^\infty \mathbb{P}(X_t \in dx) dt \right) \\ &= \int_0^\infty \left( \int_0^\infty e^{-\lambda x} \mathbb{P}(X_t \in dx) \right) dt = \int_0^\infty \mathbb{E}[e^{-\lambda X_t}] dt \\ &= \int_0^\infty e^{-t\Phi(\lambda)} dt = \frac{1}{\Phi(\lambda)} \int_0^\infty \Phi(\lambda) e^{-t\Phi(\lambda)} dt = \frac{1}{\Phi(\lambda)}. \end{aligned}$$

El siguiente lema justifica el nombre *función de renovación*.

**Lema 1.2.2** Sea  $Y = X_{\mathbf{e}}$ , donde  $\mathbf{e}$  es una variable aleatoria con ley exponencial estándar e independiente de  $X$  y  $Y_1, Y_2, \dots$  copias de  $Y$  independientes e idénticamente distribuidas. Pongamos a  $S_0 = 0$  y  $S_n = \sum_{j=1}^n Y_j$  para  $n \geq 1$ . Escribamos la función de renovación  $V$  mediante  $V(x) = \sum_{n=0}^\infty \mathbb{P}(S_n \leq x)$  para  $x \geq 0$ . Entonces

$$V(x) = 1 + U(x), \quad \text{para todo } x \geq 0.$$

**Demostración.** Como

$$\begin{aligned}\mathbb{E}[e^{-\lambda Y}] &= \int_0^\infty e^{-\lambda x} \mathbb{P}(Y \in dx) = \int_0^\infty \int_0^\infty e^{-\lambda x} e^{-t} \mathbb{P}(X_t \in dx) dt \\ &= \int_0^\infty e^{-t} \mathbb{E}[e^{-\lambda X_t}] dt = \int_0^\infty e^{-t} e^{-t\Phi(\lambda)} dt = \frac{1}{1 + \Phi(\lambda)},\end{aligned}$$

y

$$V(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \mathbb{P}(S_n \leq x) = \sum_{n=0}^{\infty} F^{*n}(x),$$

entonces  $V(dx) = \sum_{n=0}^{\infty} F^{*n}(dx)$ , donde  $F^{*n}$  es la  $n$ -ésima convolución de  $F(dx) = \mathbb{P}(Y \in dx)$ . Luego, la transformada de Laplace de  $V$  es

$$\begin{aligned}\widehat{V}(\lambda) &= \int_0^\infty e^{-\lambda x} V(dx) = \int_0^\infty e^{-\lambda x} \sum_{n=0}^{\infty} F^{*n}(dx) = \sum_{n=0}^{\infty} \int_0^\infty e^{-\lambda x} F^{*n}(dx) \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \mathbb{E}[e^{-\lambda S_n}] = \sum_{n=0}^{\infty} (\mathbb{E}[e^{-\lambda Y}])^n = \frac{1}{1 - \mathbb{E}[e^{-\lambda Y}]} \\ &= \frac{1}{1 - \frac{1}{1 + \Phi(\lambda)}} = \frac{1 + \Phi(\lambda)}{\Phi(\lambda)} = 1 + \frac{1}{\Phi(\lambda)}.\end{aligned}$$

Por otra parte, la transformada de Laplace de  $U$ , de acuerdo con (1.2.1), está dada por

$$\widehat{U}(\lambda) = \frac{1}{\Phi(\lambda)}.$$

De lo anterior, vemos que  $\widehat{V}(\lambda) = 1 + \widehat{U}(\lambda)$  para todo  $\lambda \geq 0$ , y como la transformada de Laplace caracteriza a las distribuciones, concluimos que  $V(x) = 1 + U(x)$  para todo  $x \geq 0$ .  $\square$

**Observación 1.2.3** *Este lema nos dice que los resultados asintóticos tales como el teorema de renovación tienen análogos para subordinadores.*

Nos interesa el comportamiento de  $U$  para  $x$  suficientemente grandes y pequeños. El siguiente lema nos será de utilidad para probar el corolario sobre el comportamiento de  $U$ .

**Lema 1.2.4** *Supongamos que para  $\lambda > 0$*

$$f(\lambda) = \lambda \int_0^\infty e^{-\lambda y} W(y) dy = \int_0^\infty e^{-y} W(y/\lambda) dy, \quad (1.2.2)$$

donde  $W$  es no negativa, no decreciente y tal que existe una constante  $c > 0$  con

$$W(2x) \leq cW(x) \quad \text{para todo } x > 0. \quad (1.2.3)$$

Entonces

$$W(x) \approx f(1/x), \quad (1.2.4)$$

donde  $\approx$  significa que la razón de los lados de la relación anterior está acotada por arriba y por abajo mediante constantes positivas para todo  $x > 0$ .

**Demostración.** De la segunda igualdad de (1.2.2) se sigue que

$$W(k/\lambda) = e^k W(k/\lambda) \int_k^\infty e^{-y} dy \leq e^k \int_0^\infty e^{-y} W(y/\lambda) dy \leq e^k f(\lambda), \quad (1.2.5)$$

y haciendo  $k = 1$  se obtiene una de las cotas que necesitamos. Ahora, usando la condición (1.2.3) junto con la segunda igualdad de (1.2.2) se obtiene

$$f(\lambda/2) = \int_0^\infty e^{-y} W(2y/\lambda) dy \leq c \int_0^\infty e^{-y} W(y/\lambda) dy = cf(\lambda).$$

Usando esto último y reescribiendo (1.2.5) como

$$W(y/\lambda) \leq e^{y/2} f(\lambda/2),$$

para todo  $x > 0$ , esto nos da

$$\begin{aligned} f(\lambda) &= \int_0^x e^{-y} W(y/\lambda) dy + \int_x^\infty W(y/\lambda) e^{-y} dy \\ &\leq W(x/\lambda) \int_0^x e^{-y} dy + f(\lambda/2) \int_x^\infty e^{y/2} e^{-y} dy \\ &= (1 - e^{-x}) W(x/\lambda) + 2e^{-x/2} f(\lambda/2) \\ &\leq (1 - e^{-x}) W(x/\lambda) + 2cf(\lambda) e^{-x/2}. \end{aligned}$$

Despejando  $f(\lambda)$  de la desigualdad anterior, se obtiene

$$f(\lambda) \leq \frac{(1 - e^{-x}) W(x/\lambda)}{(1 - 2ce^{-x/2})}. \quad (1.2.6)$$

Supongamos, sin pérdida de generalidad, que  $c > 1/4$ , y que podemos elegir  $x_0 = 2 \log 4c$  y un entero positivo  $n_0$  tal que  $2^{n_0} \geq x_0$ . Entonces, de esto último, (1.2.6) y usando la condición (1.2.3), podemos deducir que

$$\begin{aligned} f(\lambda) &\leq \frac{\left(1 - \frac{1}{16c^2}\right) W(x_0/\lambda)}{\frac{1}{2}} \leq 2x_0 \left(1 - \frac{1}{16c^2}\right) W(1/\lambda) \\ &\leq 2^{n_0+1} \left(1 - \frac{1}{16c^2}\right) W(1/\lambda), \end{aligned}$$

y de esta manera hemos encontrado la otra cota. Por lo tanto,  $W(x) \approx f(1/x)$  para todo  $x > 0$ .  $\square$

Por último, veamos el siguiente corolario, que es el objetivo principal de esta sección.

**Corolario 1.2.5** *Sean  $X$  un subordinador e  $I(x) = \int_0^x \bar{\Pi}(y) dy$ . Entonces*

$$U(x) \approx \frac{1}{\Phi(1/x)} \quad y \quad \frac{\Phi(x)}{x} \approx I(1/x) + d. \quad (1.2.7)$$

**Demostración.** Definamos la función  $f(x) = 1/\Phi(x)$  para todo  $x > 0$  y sea  $W(x) = U(x)$  en el Lema 1.2.4. Entonces

$$\begin{aligned} f(\lambda) &= \frac{1}{\Phi(\lambda)} = \int_0^\infty e^{-\lambda x} U(dx) = \int_0^\infty \left( \lambda \int_x^\infty e^{-\lambda y} dy \right) U(dx) \\ &= \int_0^\infty \lambda e^{-\lambda y} \int_0^y U(dx) dy = \lambda \int_0^\infty e^{-\lambda y} U(y) dy = \int_0^\infty e^{-y} U(y/\lambda) dy. \end{aligned}$$

De este modo, se cumple la condición para  $f$  en el Lema 1.2.4. Vemos que  $W$  es no negativa y no decreciente ya que  $U$  lo es, y además, como  $U$  es subaditiva,

$$W(2x) = U(2x) = U(x+x) \leq U(x) + U(x) = 2U(x) = 2W(x),$$

por tanto, se cumple la condición (1.2.3) tomando  $c = 2 > 0$ . Así,

$$U(x) \approx f(1/x) = \frac{1}{\Phi(1/x)} \quad \text{para todo } x > 0.$$



Vamos a demostrar que  $U$ , en efecto, es subaditiva. Vemos que para todo  $x, y \geq 0$ , se tiene la contención de eventos  $\{t > 0 : X_t > x + y\} \subset \{t > 0 : X_t > x\} \cup \{t > 0 : X_t > y\}$ , de aquí, se obtiene  $T_{x+y} \leq T_x + T_y$ , y por tanto,

$$U(x + y) = \mathbb{E}[T_{x+y}] \leq \mathbb{E}[T_x] + \mathbb{E}[T_y] = U(x) + U(y).$$

Luego,  $U$  es subaditiva.

Para la segunda parte, definamos ahora  $f(x) = \Phi(x)/x$  para todo  $x > 0$  y hagamos  $W(x) = d + I(x)$ , para  $x > 0$ . Entonces, para todo  $\lambda > 0$  se obtiene

$$\begin{aligned} f(\lambda) &= \frac{\Phi(\lambda)}{\lambda} = d + \frac{1}{\lambda} \int_0^\infty (1 - e^{-\lambda x}) \Pi(dx) \\ &= d + \frac{1}{\lambda} \int_0^\infty \left( \lambda \int_0^x e^{-\lambda y} dy \right) \Pi(dx) \\ &= d + \int_0^\infty e^{-\lambda y} \int_y^\infty \Pi(dx) dy = d + \int_0^\infty e^{-\lambda y} \bar{\Pi}(y) dy. \end{aligned}$$

Trabajemos con la última integral de la ecuación anterior. Hagamos

$$\int_0^\infty e^{-\lambda y} \bar{\Pi}(y) dy = \lim_{x \rightarrow \infty} \int_0^x e^{-\lambda y} \bar{\Pi}(y) dy$$

y realizando una integración por partes, tenemos

$$\int_0^\infty e^{-\lambda y} \bar{\Pi}(y) dy = e^{-\lambda y} I(y) \Big|_0^\infty + \int_0^\infty \lambda e^{-\lambda x} I(x) dx = \int_0^\infty \lambda e^{-\lambda x} I(x) dx,$$

en lo anterior,  $e^{-\lambda y} I(y) \rightarrow 0$  cuando  $y \rightarrow \infty$ , ya que  $e^{-\lambda y} \rightarrow 0$  cuando  $y \rightarrow \infty$  y  $I(\cdot)$  es una función decreciente (ya que  $\bar{\Pi}(\cdot)$  lo es). Luego,  $f(\lambda)$  nos queda

$$\begin{aligned} f(\lambda) &= d + \int_0^\infty \lambda e^{-\lambda x} I(x) dx = \int_0^\infty \lambda d e^{-\lambda x} dx + \int_0^\infty \lambda e^{-\lambda x} I(x) dx \\ &= \lambda \int_0^\infty e^{-\lambda x} (d + I(x)) dx = \int_0^\infty e^{-x} (d + I(x/\lambda)) dx, \end{aligned}$$

y con esto se cumple (1.2.2). Vemos que  $W$  es no negativa y no decreciente ya que  $I$  también lo es y  $d \geq 0$ , y además, para  $x > 0$

$$\begin{aligned} W(2x) &= d + I(2x) = d + \int_0^{2x} \bar{\Pi}(y) dy \leq d + 2 \int_0^x \bar{\Pi}(y) dy \\ &\leq 2d + 2 \int_0^x \bar{\Pi}(y) dy = 2(d + I(x)) = 2W(x), \end{aligned}$$

se cumple la condición (1.2.3) poniendo  $c = 2$ . De esta manera, concluimos que

$$\frac{\Phi(x)}{x} = f(x) \approx W(1/x) = d + I(1/x) \quad \text{para todo } x > 0.$$

□

### 1.3. Pasaje a través de un Nivel

Estamos interesados en los *undershoots* y *overshoots* de un subordinador cuando cruza un nivel  $x > 0$ , y en la posibilidad de que lo cruce de manera continua. Vamos a utilizar la fórmula de compensación para probar el teorema de los *undershoots* y *overshoots* de un subordinador, véase [42].

Consideremos un espacio medible  $(U, \mathcal{U})$  al que le añadimos un punto  $\zeta$ , y definamos  $U_\zeta := U \cup \{\zeta\}$  y  $\mathcal{U}_\zeta := \sigma(U, \{\zeta\})$ .

**Definición 1.3.1** Un proceso  $(e_t, t \geq 0)$  definido en un espacio de probabilidad  $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$  con valores en  $(U_\zeta, \mathcal{U}_\zeta)$  se dice que es un *proceso puntual* si

- (i) la función  $(t, \omega) \mapsto e_t(\omega)$  es  $\mathcal{B}(0, \infty) \otimes \mathcal{F}$ -medible,
- (ii) el conjunto  $D_\omega = \{t : e_t(\omega) \neq \zeta\}$  es contable c.s.

Dado un proceso puntual  $(e_t, t \geq 0)$ , para cada  $A \in \mathcal{U}_\zeta$ , podemos definir un nuevo proceso puntual  $e^A$  mediante  $e_t^A := e_t(\omega)$  si  $e_t(\omega) \in A$ , y  $e_t(\omega) = \zeta$  en otro caso. Llamamos al proceso  $e^A$  la traza de  $e$  en  $A$ . Para un subconjunto medible de  $A \in U \times (0, \infty)$ , definamos también

$$N^A(\omega) := \sum_{t>0} 1_A(t, e_t(\omega)).$$

En particular, si  $B = (0, t] \times A$ , escribimos  $N^B = N_t^A$ , asimismo, definimos

$$N_{(s,t]}^A(\omega) := \sum_{s < u \leq t} 1_A(e_u).$$

**Definición 1.3.2** Sea  $(\Omega, \mathcal{F}, \mathcal{F}_t, \mathbb{P})$  un espacio de probabilidad filtrado. Un  $(\mathcal{F}_t)$ -proceso de Poisson  $N$  es un proceso adaptado continuo por la derecha, tal que  $N_0 = 0$  c.s., y para cualquier  $s < t$  y  $k \in \mathbb{N}$ ,

$$\mathbb{P}(N_t - N_s | \mathcal{F}_s) = c^k \frac{(t-s)^k}{k!} e^{-c(t-s)},$$

para alguna constante  $c > 0$  que llamamos el parámetro de  $N$ . Hagamos  $\Delta N_t = N_t - N_{t-}$ .

**Observación 1.3.3** *El proceso de Poisson  $N$  es un  $(\mathcal{F}_t)$ -proceso de Poisson con la filtración natural  $\mathcal{F}_t = \sigma(N_s, s \leq t)$ .*

**Definición 1.3.4** La medida  $\sigma$ -finita  $\nu$  en  $\mathcal{U}$  definida por

$$\nu(A) = \frac{1}{t} \mathbb{E}[N_t^A], \quad t > 0,$$

es llamada la *medida característica* de  $e$ .

Así, si  $\nu(A) < \infty$ , entonces  $\nu(A)$  es el parámetro del proceso de Poisson  $N^A$ . Si  $B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^+) \otimes \mathcal{U}_\zeta$ , el teorema de clases monótonas implica que

$$\mathbb{E}[N^B] = \int_0^\infty dt \int 1_B(t, u) \nu(du).$$

**Observación 1.3.5** *Si  $\nu(A) < \infty$ , entonces  $N_t^A - t\nu(A)$  es una  $(\mathcal{F}_t)$ -martingala, y de manera más general, tenemos*

**Teorema 1.3.6 (La Fórmula de Compensación)** *Sea  $H$  un proceso positivo continuo por la izquierda predecible definido en  $(\mathbb{R}^+, \Omega, \mathcal{U}_\zeta)$  que es medible con respecto a  $\mathcal{F}_t \otimes \mathcal{U}_\zeta$  y además cumple  $H(t, \omega, \zeta) = 0$  para todo  $t \geq 0$  c.s. Entonces*

$$\mathbb{E} \left[ \sum_{s>0} H(s, \omega, e_s(\omega)) \right] = \mathbb{E} \left[ \int_0^\infty dt \int H(s, \omega, u) \nu(du) \right]. \quad (1.3.1)$$

**Demostración.** Vemos que el conjunto de procesos  $H$  que satisfacen (1.3.1) es cerrado bajo límites crecientes; luego, por el teorema de clases monótonas, es suficiente verificar que (1.3.1) se satisface para  $H(s, \omega, u) = K(s, \omega)1_A(u)$ , donde  $K$  es un proceso  $(\mathcal{F}_t)$ -predecible positivo acotado y  $A \in \mathcal{U}$  con  $\nu(A) < \infty$ . En este caso, como  $N_t^A - t\nu(A)$  es una martingala, el lado izquierdo es igual a

$$\mathbb{E} \left[ \sum_{s>0} K(s, \omega)1_A(e_s(\omega)) \right] = \mathbb{E} \left[ \int_0^\infty K(s, \omega) dN_s^A(\omega) \right] = \nu(A) \mathbb{E} \left[ \int_0^\infty K(s, \omega) ds \right].$$

Esto completa la demostración.  $\square$

**Teorema 1.3.7** *Si  $X$  es un subordinador, tenemos*

(i) *para  $0 \leq y \leq x$  y  $z > x$*

$$\mathbb{P}(X_{T_{x-}} \in dy, X_{T_x} \in dz) = U(dy)\Pi(dz - y)$$

(ii) *para cualquier  $x > 0$*

$$\mathbb{P}(X_{T_{x-}} < x = X_{T_x}) = 0.$$

**Demostración.** (i) Sean  $f, g \geq 0$  dos funciones medibles. Entonces, aplicando la fórmula de compensación al proceso de saltos de  $X$ , denotado por  $\Delta X = (\Delta X_t, t \geq 0)$ , donde  $\Delta X_t := X_t - X_{t-}$ , se tiene que

$$\begin{aligned} \mathbb{E}\left[f(X_{T_{x-}})g(X_{T_x})\right] &= \mathbb{E}\left[\sum_{t \geq 0} f(X_{t-})g(X_{t-} + \Delta X_t)1_{\{X_{t-} \leq x, \Delta X_t > x - X_{t-}\}}\right] \\ &= \int_0^\infty dt \mathbb{E}\left[f(X_{t-})1_{\{X_{t-} \leq x\}} \int_0^\infty \Pi(dz)g(X_{t-} + z)1_{\{z > x - X_{t-}\}}\right]. \end{aligned}$$

Por otra parte, de la definición de esperanza y lo probado arriba se obtiene

$$\begin{aligned} \mathbb{E}\left[f(X_{T_{x-}})g(X_{T_x})\right] &= \int_{0 \leq y \leq x < z} f(y)g(z)\mathbb{P}(X_{T_{x-}} \in dy, X_{T_x} \in dz) \\ &= \int_0^\infty dt \int_{0 \leq y \leq x, s > x - y} f(y)g(y + s)\mathbb{P}(X_{T_{x-}} \in dy)\Pi(ds) \\ &= \int_{0 \leq y \leq x < z} f(y)g(z)U(dy)\Pi(dz - y). \end{aligned}$$

La segunda igualdad se sigue ya que

$$\begin{aligned} &\mathbb{E}\left[f(X_{t-})1_{\{X_{t-} \leq x\}} \int_0^\infty \Pi(ds)g(X_{t-} + z)1_{\{z > x - X_{t-}\}}\right] \\ &= \int_{0 \leq y \leq x, s > x - y} f(y)g(y + s)\mathbb{P}(X_{T_{x-}} \in dy)\Pi(ds). \end{aligned}$$

Por lo tanto,

$$\mathbb{P}(X_{T_{x-}} \in dy, X_{T_x} \in dz) = U(dy)\Pi(dz - y).$$

(ii) Para el caso en el que  $X$  es un proceso de Poisson compuesto,  $\mathbb{P}(X_{T_x-} < x = X_{T_x}) = 0$  por la definición de  $T_x := \inf\{t \geq 0 : X_t > x\}$ . Si  $X$  no es un proceso de Poisson compuesto, entonces

$$\mathbb{P}(X_{T_x-} < x = X_{T_x}) = \int_{[0,x)} U(dy)\Pi(\{x-y\}) = 0,$$

ya que la medida  $U$  es difusa y  $\Pi$  tiene una cantidad numerable de átomos.  $\square$

**Observación 1.3.8** *Mediante argumentos similares se puede dar una extensión de (i) del teorema anterior, es decir,*

$$\mathbb{P}(X_{T_x-} \in dy, X_{T_x} \in dz, T_x \leq t) = \int_0^t \mathbb{P}(X_s \in dy) ds \Pi(dz - y).$$

De esta observación se puede deducir el siguiente corolario,

**Corolario 1.3.9** *Bajo las suposiciones del teorema anterior, se tiene que para  $0 \leq y \leq x$ ,  $z > x$  y  $t > 0$ ,*

$$\mathbb{P}(X_{T_x-} \in dy, X_{T_x} \in dz, T_x \in dt) = \mathbb{P}(X_t \in dy)\Pi(dz - y)dt.$$

La parte (ii) del teorema anterior dice que si un subordinador cruza un nivel mediante un salto, entonces casi seguramente da ese salto sobre el nivel.

La demostración del siguiente teorema es tomada del libro [18, pág. 14].

**Teorema 1.3.10** *Si  $X$  es un subordinador con drift  $d$ ,*

(i) *si  $d = 0$  entonces  $\mathbb{P}(X_{T_x} = x) = 0$  para todo  $x > 0$ ,*

(ii) *si  $d > 0$  entonces  $U$  tiene densidad continua y estrictamente positiva  $u$  en  $(0, \infty)$ ,*

$$\mathbb{P}(X_{T_x} = x) = du(x), \quad \text{para todo } x > 0, \quad (1.3.2)$$

y además

$$\lim_{x \downarrow 0} u(x) = \frac{1}{d}.$$

**Demostración.** (i) Mediante una aplicación de la propiedad de Markov fuerte al tiempo de paro  $T_x$  se tiene que la medida potencial es

$$U(dw) = \int_{[x,w]} U(dw - z) \mathbb{P}(X_{T_x} \in dz), \quad w \geq x,$$

En efecto, observemos que para  $w \geq x$ ,

$$\begin{aligned} U(dw) &= \int_0^\infty \mathbb{P}(X_t \in dw) dt = \mathbb{E} \left[ \int_0^\infty 1_{\{X_t \in dw\}} dt \right] \\ &= \mathbb{E} \left[ \int_0^{T_x} 1_{\{X_t \in dw\}} dt \right] + \mathbb{E} \left[ \int_{T_x}^\infty 1_{\{X_t \in dw\}} dt \right] \\ &= \mathbb{E} \left[ \int_0^\infty 1_{\{X_{T_x+s} - X_{T_x} + X_{T_x} \in dw\}} ds \right] \\ &= \mathbb{E} \left[ \mathbb{E} \left[ \int_0^\infty 1_{\{X_{T_x+s} - X_{T_x} + X_{T_x} \in dw\}} ds \middle| \mathcal{F}_{T_x} \right] \right] \\ &= \mathbb{E}[g(X_{T_x})], \quad \text{por propiedad de Markov fuerte al tiempo } T_x \end{aligned}$$

donde

$$g(y) = \mathbb{E} \left[ \int_0^\infty 1_{\{X_s + y \in dw\}} ds \right] = \int_0^\infty \mathbb{P}(X_s \in dw - y) ds = U(dw - y).$$

Por lo tanto,

$$U(dw) = \int_{[x,w]} U(dw - y) \mathbb{P}(X_{T_x} \in dy).$$

Luego, multiplicando por  $e^{-\lambda w}$  e integrando a ambos lados de la ecuación anterior de  $x$  hasta  $\infty$  se obtiene

$$\begin{aligned} \int_{[x,\infty)} e^{-\lambda w} U(dw) &= \int_{[x,\infty)} e^{-\lambda w} \int_{[x,w]} U(dw - z) \mathbb{P}(X_{T_x} \in dz) \\ &= \int_x^\infty \int_z^\infty e^{-\lambda w} U(dw - z) \mathbb{P}(X_{T_x} \in dz) \\ &= \int_0^\infty e^{-\lambda w'} U(dw') \int_x^\infty e^{\lambda z} \mathbb{P}(X_{T_x} \in dz) \\ &= \hat{U}(\lambda) e^{-\lambda x} \int_0^\infty e^{-\lambda z'} \mathbb{P}(X_{T_x} - x \in dz') \\ &= \frac{e^{-\lambda x}}{\Phi(\lambda)} \mathbb{E} \left[ e^{-\lambda(X_{T_x} - x)} \right]. \end{aligned}$$

Entonces de aquí se tiene que

$$\mathbb{E}[e^{-\lambda(X_{T_x}-x)}] = e^{\lambda x} \Phi(\lambda) \int_{[x, \infty)} e^{-\lambda w} U(dw).$$

De esto, podemos ver que

$$\begin{aligned} \int_0^\infty e^{-qx} \mathbb{E}[e^{-\lambda(X_{T_x}-x)}] dx &= \int_0^\infty e^{-qx} \left( e^{\lambda x} \Phi(\lambda) \int_{[x, \infty)} e^{-\lambda w} U(dw) \right) dx \\ &= \int_0^\infty e^{-\lambda w} U(dw) \Phi(\lambda) \int_0^w e^{(\lambda-q)x} dx \\ &= \int_0^\infty e^{-\lambda w} U(dw) \Phi(\lambda) \left( \frac{e^{(\lambda-q)x}}{\lambda-q} \Big|_0^w \right) \\ &= \int_0^\infty e^{-\lambda w} U(dw) \Phi(\lambda) \left( \frac{e^{(\lambda-q)w}}{\lambda-q} - \frac{1}{\lambda-q} \right) \\ &= \frac{\Phi(\lambda)}{\lambda-q} \int_0^\infty e^{-qw} U(dw) - \int_0^\infty e^{-\lambda w} U(dw) \\ &= \frac{\Phi(\lambda)}{\lambda-q} \left( \frac{1}{\Phi(q)} - \frac{1}{\Phi(\lambda)} \right) = \frac{\Phi(\lambda) - \Phi(q)}{(\lambda-q)\Phi(q)}. \end{aligned}$$

Ahora, por la Proposición 4 del Capítulo 1 de [18], vemos que  $\lambda^{-1}\Phi(\lambda) \rightarrow d$  cuando  $\lambda \rightarrow \infty$ , entonces de lo anterior y esto último, podemos inferir que

$$\int_0^\infty e^{-qx} \mathbb{P}(X_{T_x} = x) dx = \lim_{\lambda \rightarrow \infty} \frac{\Phi(\lambda) - \Phi(q)}{(\lambda-q)\Phi(q)} = \frac{d}{\Phi(q)} = d \int_0^\infty e^{-qx} U(dx).$$

Por lo tanto, si  $d = 0$  entonces de la ecuación anterior, esto implica que  $\mathbb{P}(X_{T_x} = x) = 0$  para casi todo  $x > 0$ .

(ii) Para la prueba de este inciso, vamos a necesitar la siguiente definición y los corolarios 18 y 20, y el Lema 3 Capítulo 2 del libro [4].

Definamos  $T' := T'_{\{0\}} = \inf\{t > 0 : X_t = 0\}$  como el primer instante en que  $X$  toca el 0.

**Definición 1.3.11** Decimos que  $\{0\}$  es *regular por sí mismo* si  $\mathbb{P}_0(T' = 0) > 0$ .

**Corolario 1.3.12** *Supongamos que el kernel resolvente es absolutamente continuo con una densidad acotada. Entonces*

$$\mathbb{E}_x[e^{-qT'}] = C^q u^q(-x), \quad \text{para todo } q > 0, x \in \mathbb{R}.$$

Más aún, en el caso transitorio,  $\mathbb{P}_x(T' < \infty) = C u(-x)$ .

**Corolario 1.3.13** *Sea  $\varphi$  el exponente de Laplace del subordinador  $X$  dado por*

$$\varphi(\lambda) = \lambda d + \int_0^\infty (1 - e^{-\lambda x}) \Pi(dx), \quad \lambda \geq 0.$$

*Entonces las siguientes afirmaciones se cumplen.*

(i) *Suponga que*

$$\int_{\mathbb{R}} \frac{1}{|1 + \varphi(\lambda)|} d\lambda < \infty,$$

*entonces  $C^q > 0$  y  $\{0\}$  es regular por sí mismo.*

(ii) *Suponga que  $X$  tiene variación acotada y coeficiente de drift  $d$ . Entonces  $C^q > 0$  si y sólo si  $d \neq 0$ , y en ese caso  $\{0\}$  es irregular por sí mismo.*

**Lema 1.3.14** *Supongamos que para algún  $x > 0$ ,  $\mathbb{P}(X_{T_x} = x) > 0$ . Entonces para todo  $\varepsilon > 0$ , existe  $y \in (0, \varepsilon)$  tal que  $\mathbb{P}(X_{T_y} = y) > 1 - \varepsilon$ .*

Regresando a la demostración del teorema y denotando  $T_A$  al primer instante en que  $X$  cae en  $A \subset \mathbb{R}$ , vemos que para todo  $x > 0$ , los eventos  $\{X_{T_x} = x\}$  y  $\{T_{\{x\}} < \infty\}$  coinciden, y por lo tanto, por los corolarios 1.3.12 y 1.3.13 se tiene que

$$\mathbb{P}(X_{T_x} = x) = C u(x), \tag{1.3.3}$$

donde  $C > 0$  denota la capacidad de los singuletes. Consideremos dos sucesiones  $(x_n, n \geq 1)$  y  $(y_n, n \geq 1)$  de números reales positivos decreciente y creciente a  $x > 0$ , respectivamente. Los tiempos de paro  $T_{x_n}$  y  $T_{y_n}$  decrecen y crecen, respectivamente, a  $T_x$  c.s. Por la continuidad por la derecha y la cuasi-continuidad por la izquierda de las trayectorias de  $X$  y el lema de Fatou se obtiene

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \mathbb{P}(X_{T_{x_n}} = x_n) \leq \mathbb{P}(X_{T_x} = x),$$

y

$$\mathbb{P}(X_{T_x} = x) \leq \liminf_{n \rightarrow \infty} \mathbb{P}(X_{T_{y_n}} = y_n).$$

Lo anterior es equivalente a la continuidad superior e inferior. Estas desigualdades implican que  $\limsup_{n \rightarrow \infty} u(x_n) \leq u(x)$  y  $u(x) \leq \liminf_{n \rightarrow \infty} u(y_n)$ .

Como  $u$  es semi-continua inferior y superior entonces  $u$  es continua en  $x$ . Recordando que  $\bar{\Pi}$  es la cola de la medida de Lévy y usando el Teorema 1.3.7 se tiene



que

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(X_{T_x} = x) &= 1 - \int_x^\infty u(y)\Pi(x-y)dy \\ &= 1 - \int_0^x u(y)\bar{\Pi}(x-y)dy.\end{aligned}\tag{1.3.4}$$

Luego, aplicando transformada de Laplace a ambos lados de la igualdad anterior y haciendo uso de (1.3.3) se llega a que

$$C \int_0^\infty e^{-\lambda x} u(x) dx = \int_0^\infty e^{-\lambda x} dx - \int_0^\infty \int_0^x e^{-\lambda x} u(y) \bar{\Pi}(x-y) dy dx,$$

esto implica que

$$\begin{aligned}\frac{C}{\Phi(\lambda)} &= \frac{1}{\lambda} - \int_0^\infty \int_0^x e^{-\lambda x} u(x-t) \bar{\Pi}(t) dt dx \\ &= \frac{1}{\lambda} - \int_0^\infty \int_x^\infty e^{-\lambda x} u(x-t) \bar{\Pi}(t) dx dt \\ &= \frac{1}{\lambda} - \int_0^\infty e^{-\lambda y} u(y) dy \int_0^\infty e^{-\lambda t} \bar{\Pi}(t) dt \\ &= \frac{1}{\lambda} - \frac{1}{\Phi(\lambda)} \int_0^\infty e^{-\lambda t} \bar{\Pi}(t) dt.\end{aligned}$$

Así, por la fórmula de Lévy-Khintchine se tiene que  $C = d$  y por tanto hemos probado (1.3.2).

Elijamos  $x > 0$  de tal forma que  $u(x) > 0$  y supongamos que  $y = \inf\{x' > x : u(x') = 0\} < \infty$ . Entonces  $y > x$ ,  $u(y) = 0$  y además  $u > 0$  en  $[x, y)$  ya que  $u$  es continua. Por el Lema 1.3.14, existe  $z \in (0, y - x)$  tal que  $u(z) > 0$ , y de la siguiente desigualdad

$$\mathbb{P}(X_{T_{a+b}} = a + b) \geq \mathbb{P}(X_{T_a} = a) \mathbb{P}(X_{T_b} = b), \quad a, b > 0,\tag{1.3.5}$$

con  $a = z$  y  $b = y - z$ , se sigue que

$$\begin{aligned}Cu(y) = \mathbb{P}(X_{T_y} = y) &\geq \mathbb{P}(X_{T_z} = z) \mathbb{P}(X_{T_{y-z}} = y - z) \\ &= C^2 u(z) u(y - z),\end{aligned}$$

y esta última cantidad es positiva ya que  $x \leq y - z < y$ . Pero esto contradice el hecho de que  $u(y) = 0$  en  $[x, \infty)$ . De acuerdo al Lema 1.3.14, podemos elegir  $x$

arbitrariamente pequeño; esto demuestra que  $u$  es positiva en  $(0, \infty)$ . Finalmente, para probar la última afirmación es suficiente demostrar que

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \mathbb{P}(X_{T_x} = x) = 1.$$

Pero esto se sigue de inmediato de (1.3.4) haciendo  $x \rightarrow 0^+$ , así

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \mathbb{P}(X_{T_x} = x) = 1 - \lim_{x \rightarrow 0^+} \int_0^x u(y) \bar{\Pi}(x - y) dy = 1. \quad (1.3.6)$$

Por lo tanto, despejando  $u(x)$  de (1.3.2) y haciendo  $x \rightarrow 0^+$  se llega a que

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} u(x) = \frac{1}{d},$$

y esto demuestra el teorema. □

# Capítulo 2

## Funcionales Exponenciales para Subordinadores

### 2.1. Introducción

En este capítulo se dará la definición de funcional exponencial para subordinadores, así como también resultados de gran importancia relacionados con estos objetos. Haremos énfasis en el cálculo de sus momentos (en este caso enteros positivos). También se darán varios ejemplos en donde se pueden aplicar estos resultados en caso de algunos subordinadores especiales.

**Definición 2.1.1** La funcional exponencial del subordinador  $X$  se define como

$$I_t = \int_0^t e^{-X_t} dt, \quad t \geq 0.$$

Su valor terminal está dado por

$$I = \int_0^\infty e^{-X_t} dt.$$

Las funcionales exponenciales aparecen en una gran variedad de entornos, por ejemplo, en matemáticas financieras, procesos estoásticos en ambientes aleatorios, procesos de Markov auto-similares, entre otros.

### 2.2. Cálculo de los Momentos Enteros

Supongamos que  $X = (X_t, t \geq 0)$  es un subordinador.

Recordemos que la transformada de Laplace de  $X$  se puede escribir como

$$\mathbb{E}[\exp\{-qX_t\}] = \exp\{-t\Phi(q)\}, \quad t, q \geq 0, \quad (2.2.1)$$

donde  $\Phi : [0, \infty) \rightarrow [0, \infty)$  es el exponente de Laplace de  $X$ , y por la fórmula de Lévy-Khintchine

$$\Phi(q) = dq + \int_{(0, \infty)} (1 - e^{-qx}) \Pi(dx), \quad q \geq 0.$$

A continuación se enuncia el Teorema 2.2.1, que no es mas que la caracterización de la ley de  $I$  a través de sus momentos enteros positivos. La primer parte la estableció Carmona, ver [15].

**Teorema 2.2.1** *Suponga que  $X$  es un subordinador con exponente de Laplace  $\Phi$ . Los momentos enteros positivos de la funcional exponencial están dados en términos de  $\Phi$  mediante*

$$\mathbb{E}[I^k] = \frac{k!}{\Phi(1) \cdots \Phi(k)}, \quad \text{para } k = 1, 2, \dots \quad (2.2.2)$$

Como consecuencia, tenemos que  $\mathbb{E}[\exp\{aI\}] < \infty$ , y la distribución de  $I$  está determinada por (2.2.2).

**Demostración.** De la fórmula de integración por partes

$$(I_t - I_u)^\lambda = I_t^\lambda - \lambda \int_0^u (I_t - I_v)^{\lambda-1} e^{-X_v} dv, \quad u \leq t,$$

para  $u = t$ , se sigue que

$$I_t^\lambda = \lambda \int_0^t (I_t - I_v)^{\lambda-1} e^{-X_v} dv. \quad (2.2.3)$$

Pero

$$I_t - I_v = \int_0^t e^{-X_s} ds - \int_0^v e^{-X_s} ds = \int_v^t e^{-X_s} ds = e^{-X_v} \int_0^{t-v} e^{-(X_{s+v} - X_v)} ds. \quad (2.2.4)$$

Notemos que el proceso  $(X_{s+v} - X_v, s \geq 0)$  es independiente de  $(X_s, s \leq v)$  y tiene la misma ley que  $(X_s, s \geq 0)$ . Luego, sustituyendo (2.2.4) en (2.2.3) y calculando esperanzas se obtiene

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[I_t^\lambda] &= \lambda \mathbb{E} \left[ \int_0^t I_{t-v}^{\lambda-1} e^{-\lambda X_v} dv \right] = \lambda \int_0^t \mathbb{E}[I_{t-v}^{\lambda-1}] \mathbb{E}[e^{-\lambda X_v}] dv \\ &= \lambda \int_0^t \mathbb{E}[I_{t-v}^{\lambda-1}] e^{-v\Phi(\lambda)} dv = \lambda \int_0^t \mathbb{E}[I_u^{\lambda-1}] e^{-(t-u)\Phi(\lambda)} du. \end{aligned}$$

Luego, observemos que para  $T \sim \exp(\theta)$ ,  $\theta > 0$ , y el teorema de Fubini, se tiene

$$\begin{aligned}
 \mathbb{E}[I_T^\lambda] &= \theta \int_0^\infty e^{-\theta t} \mathbb{E}[I_t^\lambda] dt \\
 &= \theta \int_0^\infty e^{-\theta t} \left( \lambda \int_0^t \mathbb{E}[I_u^{\lambda-1}] e^{-(t-u)\Phi(\lambda)} du \right) dt \\
 &= \theta \int_0^\infty \left( \lambda \int_u^\infty e^{-\theta t} \mathbb{E}[I_u^{\lambda-1}] e^{-(t-u)\Phi(\lambda)} dt \right) du \\
 &= \left( \lambda \int_0^\infty e^{-v(\theta+\Phi(\lambda))} dv \right) \left( \theta \int_0^\infty e^{-\theta u} \mathbb{E}[I_u^{\lambda-1}] du \right) \\
 &= \frac{\lambda}{\theta + \Phi(\lambda)} \mathbb{E}[I_T^{\lambda-1}].
 \end{aligned}$$

Entonces, de lo anterior, se tiene que

$$\mathbb{E}[I_T^\lambda] = \theta \int_0^\infty e^{-\theta t} \mathbb{E}[I_t^\lambda] dt = \int_0^\infty e^{-s} \mathbb{E}[I_{s/\theta}^\lambda] ds.$$

Así, haciendo  $\theta \downarrow 0$  se obtiene  $\mathbb{E}[I_T^\lambda] \uparrow \mathbb{E}[I^\lambda]$ . Por otro lado, de los cálculos de arriba, vemos que

$$\lim_{\theta \downarrow 0} \mathbb{E}[I_T^\lambda] = \lim_{\theta \downarrow 0} \frac{\lambda}{\theta + \Phi(\lambda)} \mathbb{E}[I_T^{\lambda-1}] = \frac{\lambda}{\Phi(\lambda)} \mathbb{E}[I^{\lambda-1}].$$

De esto se sigue que

$$\mathbb{E}[I^\lambda] = \frac{\lambda}{\Phi(\lambda)} \mathbb{E}[I^{\lambda-1}].$$

Por último, para  $\lambda = n \in \mathbb{N}$ , (2.2.2) se sigue por inducción sobre  $n$ .

Luego, existe  $l \in \mathbb{N}$  tal que  $\Phi(l) > a$ . Luego, para  $k \geq l$  se obtiene

$$\mathbb{E}[I^k] = \frac{k!}{\prod_{i=1}^k \Phi(i)} \leq \frac{k!}{\prod_{i=1}^l \Phi(i) \Phi(l)^{k-l}}.$$

La desigualdad de arriba se sigue ya que  $\Phi$  es una función creciente en  $\mathbb{R}^+$ . Por lo tanto, concluimos

$$\mathbb{E}[e^{aI}] = \mathbb{E} \left[ \sum_{k=0}^{\infty} \frac{a^k I^k}{k!} \right] = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{a^k}{k!} \mathbb{E}[I^k] < \infty,$$

ya que todos los momentos de la variable aleatoria  $I$  existen, entonces  $I$  queda determinada por sus momentos gracias a que la función generadora de momentos de  $I$  es finita y además caracteriza su distribución.  $\square$

El siguiente teorema es una extensión de [9].

**Teorema 2.2.2** *Bajo las hipótesis del Teorema 2.2.1, existe una única medida de probabilidad  $\rho$  en  $[0, \infty)$  que está determinada por sus momentos enteros positivos*

$$\int_{[0, \infty)} x^k \rho(dx) = \Phi(1) \cdots \Phi(k), \quad \text{para } k = 1, 2, \dots$$

En particular, si  $R$  es una variable aleatoria con ley  $\rho$  que es independiente de  $I$ , entonces tenemos la igualdad en distribución

$$IR \stackrel{\mathcal{L}}{=} \mathbf{e}, \tag{2.2.5}$$

donde  $\mathbf{e}$  es una variable aleatoria exponencial estándar.

Para la demostración de este teorema, vamos a necesitar la definición de un proceso de Markov auto-similar y un lema.

**Definición 2.2.3** Un proceso de Markov  $Y = (Y_t, t \geq 0)$  es **auto-similar** si para algún  $\alpha \in \mathbb{R}$ , la ley del proceso  $(kY_{k^{-\alpha}t}, t \geq 0)$  bajo  $\mathbb{P}_x$  coincide con  $\mathbb{P}_{kx}$  para todo  $k > 0$  y  $x > 0$ .

A continuación vamos a definir la transformada de Lamperti de un proceso de Markov auto-similar, ver [8].

Definamos un cambio de tiempo  $\tau = (\tau(t), t \geq 0)$  asociado al subordinador  $(X_t, t \geq 0)$  como aquel que satisface

$$t = \int_0^{\tau(t)} e^{X_s} ds,$$

esto es,  $\tau(t)$  está dado por

$$\tau(t) = \inf \left\{ u \geq 0 : \int_0^u e^{X_s} ds \geq t \right\}.$$

**Definición 2.2.4** La transformada de Lamperti asociada al subordinador  $(X_t, t \geq 0)$  está dada por

$$Y_t = e^{X_{\tau(t)}}, \quad t \geq 0.$$

**Observación 2.2.5** *Notemos que  $Y$  así definido es un proceso de Markov auto-similar con  $\alpha = 1$ , esto es, para todo  $x > 0$ , la ley del proceso  $(xY_{t/x}, t \geq 0)$  bajo  $\mathbb{P}_x$  coincide con la ley de  $Y$  iniciando en  $x$ .*

**Lema 2.2.6** *Para todo  $t \geq 0$  y  $p > 0$ , la variable*

$$Y_t^p \int_t^\infty \frac{ds}{Y_s^{p+1}}$$

*es independiente de  $\mathcal{F}_t = \sigma(Y_s, 0 \leq s \leq t)$  y tiene la misma ley que*

$$\int_0^\infty e^{-pX_s} ds.$$

*Como consecuencia, tenemos que*

$$\mathbb{E} \left[ \int_t^\infty \frac{ds}{Y_s^{p+1}} \right] = \frac{\mathbb{E}[Y_t^{-p}]}{\Phi(p)}.$$

**Demostración.** Recordar que para todo  $x > 0$ ,  $\mathbb{P}_x$  denota la distribución del proceso de Markov auto-similar  $Y$  que empieza en  $x$  (por simplicidad denotemos  $\mathbb{P}_1 = \mathbb{P}$ ). De la propiedad de Markov aplicada al tiempo  $t$ , sólo necesitamos demostrar que bajo  $\mathbb{P}_x$ , la variable aleatoria

$$x \int_0^\infty \frac{ds}{Y_s^{p+1}}$$

tiene la misma ley que  $\int_0^\infty e^{-pX_s} ds$ , y por auto-similitud, podemos enfocarnos en el caso  $x = 1$ . Luego, haciendo los cambios de variables

$$t = \tau(s), \quad s = \int_0^t e^{X_u} du,$$

resulta

$$\int_0^\infty Y_s^{-(p+1)} ds = \int_0^\infty e^{-(p+1)X_{\tau(s)}} ds = \int_0^\infty e^{-(p+1)X_t} e^{X_t} dt = \int_0^\infty e^{-pX_t} dt.$$

La primer igualdad se sigue de la definición de la transformada de Lamperti, en la segunda igualdad se usó el cambio de variable  $t = \tau(s)$  y  $ds = e^{X_t} dt$ . Por lo que tenemos arriba, llegamos a que

$$Y_t^p \int_t^\infty \frac{ds}{Y_s^{p+1}} \stackrel{\mathcal{L}}{=} \int_0^\infty e^{-pX_s} ds,$$

lo que implica que

$$\int_t^\infty \frac{ds}{Y_s^{p+1}} \stackrel{\mathcal{L}}{=} Y_t^{-p} \int_0^\infty e^{-pX_s} ds, \quad (2.2.6)$$

y por la propiedad de Markov al tiempo  $t$  se tiene que es independiente de  $\sigma(Y_s, 0 \leq s \leq t)$ . Por último, aplicando esperanzas a ambos lados de (2.2.6) obtenemos

$$\begin{aligned} \mathbb{E} \left[ \int_t^\infty \frac{ds}{Y_s^{p+1}} \right] &= \mathbb{E}[Y_t^{-p}] \mathbb{E} \left[ \int_0^\infty e^{-pX_s} ds \right] \\ &= \mathbb{E}[Y_t^{-p}] \int_0^\infty \mathbb{E}[e^{-pX_s}] ds \\ &= \mathbb{E}[Y_t^{-p}] \int_0^\infty e^{-s\Phi(p)} ds = \frac{\mathbb{E}[Y_t^{-p}]}{\Phi(p)}. \end{aligned}$$

Así, la demostración está completa.  $\square$

Antes de proceder a demostrar el Teorema 2.2.2, vamos a enunciar el Teorema de Bernstein que se usará en la prueba de este teorema, véase [44].

**Teorema 2.2.7** *Las siguientes afirmaciones son equivalentes.*

(i)  $f$  es completamente monótona, esto es,

$$(-1)^n \frac{d}{dt} f(t) \geq 0, \quad \forall n \geq 0, \quad \forall t > 0.$$

(ii)  $f$  es la transformada de Laplace de alguna medida de Borel finita  $\mu$  en  $\mathbb{R}^+$ , es decir

$$f(x) = \int_0^\infty e^{-xt} \mu(dt), \quad \forall x \geq 0.$$

En seguida, se demuestra el Teorema 2.2.2.

**Demostración de Teorema 2.2.2.** Del Lema 2.2.6 se tiene que

$$\frac{\partial \mathbb{E}[Y_t^{-p}]}{\partial t} = -\Phi(p) \mathbb{E}[Y_t^{-(p+1)}].$$

Mediante iteración, se tiene que la función  $t \mapsto \mathbb{E}[Y_t^{-p}]$  es completamente monótona y toma el valor 1 en  $t = 0$ . Por el Teorema 2.2.7, coincide con la transformada de Laplace de alguna medida finita en  $[0, \infty)$  que vamos a denotar por  $\rho_p$ , esto es,

$$\mathbb{E}[Y_t^{-p}] = \int_{[0, \infty)} e^{-tx} \rho_p(dx), \quad t \geq 0.$$



Resulta que  $\rho_p$  siempre se puede ver como una medida de probabilidad. Los momentos enteros de  $\rho$  están dados por las derivadas iteradas de su transformada de Laplace en  $t = 0$ , y con esto obtenemos

$$\int_{[0,\infty)} x^k \rho_p(dx) = \Phi(p) \cdots \Phi(p + (k - 1)), \quad \text{para } k = 1, 2, \dots$$

Así, la primera afirmación queda demostrada para  $p = 1$  (en este caso, denotamos  $\rho_1 = \rho$  por simplicidad) debido al Teorema 2.2.1. La igualdad en ley (2.2.5) se sigue de la ecuación (2.2.2) y de lo que se acaba de probar. En efecto, calculando los  $k$ -ésimos momentos de las variables aleatorias  $IR$  y  $\mathbf{e}$  vemos que

$$\mathbb{E}[(IR)^k] = \mathbb{E}[I^k] \mathbb{E}[R^k] = \frac{k!}{\Phi(1) \cdots \Phi(k)} \cdot \Phi(1) \cdots \Phi(k) = k! = \mathbb{E}[\mathbf{e}^k].$$

Por lo tanto,  $IR \stackrel{\mathcal{L}}{=} \mathbf{e}$ . Queda demostrado el teorema.  $\square$

En lo que sigue, vamos a considerar un subordinador sin drift ( $Z_t$ ,  $t \geq 0$ ) que no necesariamente posee la medida de Lévy (3.1.7). Sea  $T$  una variable aleatoria exponencial estándar independiente de ( $Z_t$ ,  $t \geq 0$ ). Definamos las siguientes cantidades,

$$A_t := \int_0^t e^{-Z_t} dt, \quad Q = A_T, \quad M = e^{-Z_T}$$

De aquí, se obtiene

$$A_\infty \stackrel{\mathcal{L}}{=} MA'_\infty + Q, \tag{2.2.7}$$

donde  $A'_\infty$  es una copia de  $A_\infty$  independiente de  $(M, Q)$ .

En efecto, se tiene que

$$\begin{aligned} A_\infty &= \int_0^\infty e^{-Z_t} dt = \int_T^\infty e^{-Z_t} dt + \int_0^T e^{-Z_t} dt \\ &= e^{-Z_T} \int_0^\infty e^{-(Z_{T+t} - Z_T)} dt + \int_0^T e^{-Z_t} dt \\ &\stackrel{\mathcal{L}}{=} MA'_\infty + Q, \end{aligned}$$

esta última igualdad en ley se debe a que  $(Z_{t+s} - Z_t, s \geq 0)$  es un subordinador independiente de  $(Z_v, v \leq t)$  y tiene la misma ley que  $(Z_s, s \geq 0)$ . Lo anterior sigue siendo cierto para  $t$  reemplazado por  $T$ .

Vamos a introducir las siguientes definiciones. Sea  $E$  un espacio topológico localmente compacto con base numerable, es decir,  $E$  separa puntos y todo punto  $x \in E$

tiene una vecindad compacta. Sea  $\mathcal{E} = \mathcal{B}(E)$ . Para  $x \in E$  y  $A \in \mathcal{E}$  definamos la **delta de Dirac** como

$$\delta_x(A) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \in A \\ 0 & \text{si } x \notin A \end{cases}$$

**Definición 2.2.8** Una medida  $\mu$  en un espacio medible  $(E, \mathcal{E})$  es una **medida puntual** si existe una sucesión  $(x_n)_{n \geq 1}$  de puntos en  $E$  tal que

$$\mu = \sum_{n=1}^{\infty} \delta_{x_n}.$$

Decimos que  $\mu$  es **medida de Radon** si  $\mu(K) < \infty$  para todo conjunto compacto  $K$  en  $E$ .

Definamos los siguientes conjuntos,

$$\begin{aligned} \mathcal{M}^+(\mathbb{R}^n) &:= \{\text{medidas de Radon positivas en } \mathbb{R}^n\} \\ \mathcal{M}^*(\mathbb{R}^n) &:= \left\{ \mu \in \mathcal{M}^+(\mathbb{R}^n) : \int_{\mathbb{R}^n} \|x\|^{2m} \mu(dx) < \infty \quad \forall m \in \mathbb{N}_0 \right\}. \end{aligned}$$

Sea  $\mathcal{C}(\mathbb{R}^n)$  el espacio vectorial de las funciones continuas a valores reales definidas en  $\mathbb{R}^n$  y  $\mathcal{C}_c(\mathbb{R}^n)$  el subespacio vectorial de  $\mathcal{C}(\mathbb{R}^n)$  que consta de las funciones continuas con soporte compacto. Sea  $\mathcal{P}_n \subset \mathcal{C}(\mathbb{R}^n)$  el espacio vectorial de los polinomios en las variables  $x_1, \dots, x_n$ .

Vamos a definir una relación de equivalencia en  $\mathcal{M}^*(\mathbb{R}^n)$ , que denotaremos por  $\sim_n$ , de la siguiente manera. Para cualesquiera medidas  $\mu, \nu \in \mathcal{M}^*(\mathbb{R}^n)$ ,

$$\mu \sim_n \nu \iff \int_{\mathbb{R}^n} x^\alpha d\mu(x) = \int_{\mathbb{R}^n} x^\alpha d\nu(x), \quad \text{para todo } \alpha \in \mathbb{Z}^{+n},$$

y denotemos por  $[\mu]_n$  a la clase de equivalencia que contiene a  $\mu$ .

**Definición 2.2.9** Se dice que  $\mu \in \mathcal{M}^*(\mathbb{R}^n)$  está determinada si  $[\mu]_n = \{\mu\}$ .

Para probar la siguiente proposición, es necesario usar el siguiente teorema, ver [40].

**Teorema 2.2.10** Una medida  $\mu \in \mathcal{M}^*(\mathbb{R}^n)$  está determinada si las proyecciones  $\varphi_i(\mu)$  están determinadas para  $i = 1, \dots, n$ , donde  $\varphi_i : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  están definidas por  $\varphi_i(x_1, \dots, x_n) = x_i$ , para  $i = 1, \dots, n$ .

**Demostración.** Sea  $\sigma \in [\mu]_n$ . Para  $i = 1, \dots, n$  y  $m \in \mathbb{Z}^+$  tenemos que

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}} t^m d\varphi_i(\sigma)(t) &= \int_{\mathbb{R}^n} x_i^m d\sigma(x_1, \dots, x_n) = \int_{\mathbb{R}^n} x_i^m d\mu(x_1, \dots, x_n) \\ &= \int_{\mathbb{R}} t^m d\varphi_i(\mu)(t), \end{aligned}$$

luego, por hipótesis se tiene  $\varphi_i(\sigma) = \varphi_i(\mu)$ . Para  $f_1, \dots, f_n \in \mathcal{C}(\mathbb{R})$ , sea  $f = f_1 \otimes \dots \otimes f_n$  la función

$$f(x_1, \dots, x_n) = f_1(x_1) \cdots f_n(x_n),$$

donde  $(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ . Para  $f_1, \dots, f_n \in \mathcal{C}_c(\mathbb{R})$  y  $p_1, \dots, p_n \in \mathcal{P}_1$  tenemos ahora que

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^n} |f_1 \otimes \dots \otimes f_n - p_1 \otimes \dots \otimes p_n| d\sigma &= \int_{\mathbb{R}^n} |(f_1 - p_1) \otimes f_2 \otimes \dots \otimes f_n \\ &+ f_1 \otimes (f_2 - p_2) \otimes f_3 \otimes \dots \otimes f_n + \dots + p_1 \otimes p_2 \otimes \dots \otimes p_{n-1} \otimes (f_n - p_n)| d\sigma \\ &\leq \int_{\mathbb{R}^n} |(f_1 - p_1) \otimes f_2 \otimes \dots \otimes f_n| d\sigma + \dots + \int_{\mathbb{R}^n} |p_1 \otimes p_2 \otimes \dots \otimes p_{n-1} \otimes (f_n - p_n)| d\sigma \\ &\leq \|f_1 \circ \varphi_1 - p_1 \circ \varphi_1\|_2 \|1 \otimes f_2 \otimes \dots \otimes f_n\|_2 + \dots \\ &\quad \dots + \|p_1 \otimes \dots \otimes p_{n-1} \otimes 1\|_2 \|f_n \circ \varphi_n - p_n \circ \varphi_n\|_2, \end{aligned}$$

donde  $\|\cdot\|_2$  es la 2-norma con respecto a  $\sigma$ . Para  $i = 1, \dots, n$  tenemos que

$$\begin{aligned} \|f_i \circ \varphi_i - p_i \circ \varphi_i\|_2^2 &= \int_{\mathbb{R}^n} |f_i \circ \varphi_i(x) - p_i \circ \varphi_i(x)|^2 d\sigma(x) = \int_{\mathbb{R}} |f_i(t) - p_i(t)|^2 d\varphi_i(\sigma)(t) \\ &= \int_{\mathbb{R}} |f_i(t) - p_i(t)|^2 d\varphi_i(\mu)(t). \end{aligned}$$

Como cada  $\varphi_i(\mu)$  está determinada, entonces  $\mathcal{P}_1$  es denso en  $\mathcal{L}_1(\mathbb{R}, \varphi_i(\mu))$  gracias al Teorema de Riesz, ver [43] o [1]. Dado cualquier  $\varepsilon > 0$ , podemos encontrar  $p_1 \in \mathcal{P}_1$  tal que

$$|f_1 \circ \varphi_1 - p_1 \circ \varphi_1| \leq \frac{\varepsilon}{n \|1 \otimes f_2 \otimes \dots \otimes f_n\|_2}.$$

De la misma manera, podemos encontrar  $p_2 \in \mathcal{P}_2$  tal que

$$|f_2 \circ \varphi_2 - p_2 \circ \varphi_2| \leq \frac{\varepsilon}{n \|p_1 \otimes 1 \otimes f_3 \otimes \dots \otimes f_n\|_2}.$$

Continuando de esta forma, podemos encontrar polinomios  $p_1, \dots, p_n \in \mathcal{P}_1$  tal que

$$\int_{\mathbb{R}^n} |f_1 \otimes \dots \otimes f_n - p_1 \otimes \dots \otimes p_n| d\sigma < \varepsilon. \quad (2.2.8)$$

El conjunto  $\{f_1 \otimes \cdots \otimes f_n : f_1, \dots, f_n \in \mathcal{C}_c(\mathbb{R})\}$  es denso en  $\mathcal{L}_1(\sigma)$ , y como  $f_1 \otimes \cdots \otimes f_n \in \mathcal{P}_n$ , vemos de (2.2.8) que  $\mathcal{P}_n$  es denso en  $\mathcal{L}_1(\sigma)$ , por lo tanto  $\sigma$  es un punto extremo de  $[\mu]_n$ . Como esto es cierto para todo  $\sigma \in [\mu]_n$ , entonces  $[\mu]_n = \{\mu\}$ , es decir,  $\mu$  queda determinada.  $\square$

A continuación enunciaremos un resultado que caracteriza a los vectores  $(M, Q)$  y  $(A, Q)$  a través de sus momentos.

**Proposición 2.2.11** *Para  $\lambda > 0$  y  $\mu \geq 0$ , se tiene*

$$\mathbb{E}[Q^\lambda M^\mu] = \frac{\lambda}{1 + \varphi(\lambda + \mu)} \mathbb{E}[Q^{\lambda-1} M^\mu],$$

donde  $\varphi(s) = -\log \mathbb{E}[e^{-sZ_1}]$ ,  $s \geq 0$ . En particular,

$$a_{n,m} := \mathbb{E}[Q^n M^m] = \frac{n!}{\prod_{k=0}^n (1 + \varphi(m+k))}, \quad m, n \geq 0 \quad (2.2.9)$$

$$b_{n,m} := \mathbb{E}[Q^n A^m] = \frac{n!m!}{\prod_{k=0}^n (1 + \varphi(m+k))\varphi(1) \cdots \varphi(m)}, \quad m, n \geq 0.$$

Las sucesiones de momentos  $(a_{n,m}, n, m \geq 0)$  y  $(b_{n,m}, n, m \geq 0)$  determinan de manera única las leyes de los vectores  $(M, Q)$  y  $(A, Q)$ , respectivamente.

**Demostración.** Para  $t > 0$ , definamos

$$A_t = \int_0^t e^{-Z_v} dv.$$

La fórmula de integración por partes

$$(A_t - A_u)^\lambda = A_t^\lambda - \lambda \int_0^u (A_t - A_v)^{\lambda-1} e^{-Z_v} dv, \quad u \leq t, \quad (2.2.10)$$

nos da, para  $u = t$ ,

$$A_t^\lambda = \lambda \int_0^t (A_t - A_v)^{\lambda-1} e^{-Z_v} dv.$$

Entonces

$$A_t^\lambda e^{-\mu Z_t} = \lambda \int_0^u (A_t - A_v)^{\lambda-1} e^{-\mu(Z_t - Z_v)} e^{-(\mu+1)Z_v} dv. \quad (2.2.11)$$

Pero

$$\begin{aligned} A_t - A_v &= \int_0^t e^{-Z_s} ds - \int_0^v e^{-Z_s} ds = \int_v^t e^{-Z_s} ds = \int_0^{t-v} e^{-Z_{r+v}} dr \\ &= e^{-Z_v} \int_0^{t-v} e^{-(Z_{r+v}-Z_v)} dr, \end{aligned}$$

entonces

$$(A_t - A_v)^{\lambda-1} e^{-\mu(Z_t-Z_v)} = e^{-(\lambda-1)Z_v} \left( \int_0^{t-v} e^{-(Z_{v+s}-Z_v)} ds \right)^{\lambda-1} e^{-\mu(Z_t-Z_v)},$$

y como  $(Z_{v+t} - Z_v, t \geq 0)$  es un subordinator independiente de  $(Z_v, v \leq t)$  y con la misma ley que  $(Z_t, t \geq 0)$ , se tiene que

$$\left( \int_0^{t-v} e^{-(Z_{v+s}-Z_v)} ds \right)^{\lambda-1} e^{-\mu(Z_t-Z_v)} \stackrel{\mathcal{L}}{=} A_{t-v}^{\lambda-1} e^{-\mu Z_{t-v}},$$

y es independiente de  $e^{-(\lambda-1)Z_v}$ . Por lo tanto

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[A_T^\lambda e^{-\mu Z_T}] &= \int_0^\infty e^{-t} \mathbb{E}[A_t^\lambda e^{-\mu Z_t}] dt \\ &= \lambda \int_0^\infty e^{-t} \left( \int_0^t \mathbb{E}[e^{-(\lambda+\mu)Z_v}] \mathbb{E}[A_{t-v}^{\lambda-1} e^{-\mu Z_{t-v}}] dv \right) dt \\ &= \lambda \int_0^\infty e^{-v\varphi(\lambda+\mu)} \left( \int_v^\infty e^{-t} \mathbb{E}[A_{t-v}^{\lambda-1} e^{-\mu Z_{t-v}}] dt \right) dv \\ &= \left( \lambda \int_0^\infty e^{-v(\varphi(\lambda+\mu)+1)} dv \right) \left( \int_0^\infty e^{-u} \mathbb{E}[A_u^{\lambda-1} e^{-\mu Z_u}] du \right) \\ &= \frac{\lambda}{\varphi(\lambda+\mu)+1} \mathbb{E}[A_T^{\lambda-1} e^{-\mu Z_T}]. \end{aligned}$$

Por lo tanto,

$$\mathbb{E}[Q^\lambda M^\mu] = \frac{\lambda}{\varphi(\lambda+\mu)+1} \mathbb{E}[Q^{\lambda-1} M^\mu].$$

Para probar las fórmulas de los momentos, usaremos inducción sobre  $\lambda = n \in \mathbb{Z}^+$ . Luego, para  $\lambda = 0$  y  $\mu \geq 0$ , se tiene

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[M^\mu] &= \mathbb{E}[e^{-\mu Z_T}] = \int_0^\infty e^{-t} \mathbb{E}[e^{-\mu Z_t}] dt \\ &= \int_0^\infty e^{-t} e^{-t\varphi(\mu)} dt = \int_0^\infty e^{-t(1+\varphi(\mu))} dt = \frac{1}{1+\varphi(\mu)}. \end{aligned} \tag{2.2.12}$$

esto significa que lo anterior vale para  $\lambda = 0$  y  $\mu = m \in \mathbb{Z}^+$ . Supongamos que vale para  $\lambda = n$  (y  $\mu = m \in \mathbb{Z}^+$ ). Entonces, para  $\lambda = n + 1$  tenemos

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[Q^{n+1}M^m] &= \frac{n+1}{1+\varphi(n+1+m)}\mathbb{E}[Q^nM^m] \\ &= \frac{n+1}{1+\varphi(n+1+m)} \cdot \frac{n!}{\prod_{k=0}^n(1+\varphi(k+m))} \\ &= \frac{(n+1)!}{\prod_{k=0}^{n+1}(1+\varphi(k+m))}. \end{aligned}$$

Por lo tanto, (2.2.9) se cumple para todo  $n, m \geq 0$ . Luego, como las leyes unidimensionales de  $Q$  y  $M$  están caracterizadas por sus momentos, podemos usar el Teorema 2.2.10 para implicar que la sucesión de momentos  $\{a_{m,n}, m, n \geq 0\}$  determinan la ley del vector  $(M, Q)$ .

Usando (2.2.7) y la independendencia entre  $A_\infty$  y el vector  $(Q, M)$ , se tiene que

$$\mathbb{E}[Q^nM^m]\mathbb{E}[A_\infty^m] = \mathbb{E}[Q^n(MA_\infty)^m] = \mathbb{E}[Q^nA^m]. \quad (2.2.13)$$

En efecto, la segunda igualdad de (2.2.13) se sigue de que,

$$\begin{aligned} MA_\infty &= e^{-Z_T} \int_0^\infty e^{-Z_t} dt \stackrel{\mathcal{L}}{=} e^{-Z_T} \int_0^\infty e^{-(Z_{T+t}-Z_T)} dt \\ &= \int_0^\infty e^{-Z_{T+t}} dt = \int_T^\infty e^{-Z_t} dt = A. \end{aligned}$$

Por lo tanto, debido al Teorema 2.2.1, la primera parte de la Proposición 2.2.11 y (2.2.13), tenemos que

$$\mathbb{E}[Q^nA^m] = \frac{n!m!}{\prod_{k=0}^n(1+\varphi(m+k))\varphi(1)\cdots\varphi(m)}, \quad m, n \geq 0.$$

De manera análoga como se hizo con el vector aleatorio  $(M, Q)$ , podemos usar el Teorema 2.2.10, para concluir que la sucesión de momentos  $\{b_{m,n}, m, n \geq 0\}$  determinan la ley del vector  $(A, Q)$ . Con esto, queda demostrado el teorema.  $\square$

## 2.3. Algunos Ejemplos

En las siguientes secciones presentaremos algunos ejemplos en donde se aplica de forma directa el Teorema 2.2.1 y la descomposición de la variable aleatoria exponencial estándar  $\mathbf{e}$  que se dió en el Teorema 2.2.2 usando la funcionales exponenciales para subordinadores.

### 2.3.1. Proceso de Poisson Estándar

Consideremos un proceso de Poisson estándar  $N = (N_t, t \geq 0)$  y definamos, para  $q \in (0, 1)$  su funcional exponencial

$$I^{(q)} = \int_0^\infty q^{N_t} dt.$$

En otras palabras,  $I^{(q)} = I_\infty$  para  $X = -(\log q)N$ . Notemos también, que podemos expresar a  $I^{(q)}$  en la forma

$$I^{(q)} = \sum_{n=0}^{\infty} q^n \varepsilon_n, \tag{2.3.1}$$

donde  $\varepsilon_n = T_{n+1} - T_n$ ,  $n = 0, 1, \dots$  son los tiempos de espera entre tiempos de salto sucesivos  $T_n = \inf\{t : N_t = n\}$  de  $N$  que a su vez forman una sucesión  $(\varepsilon_n, n \geq 1)$  de v.a.i.i.d. con distribución exponencial de parámetro 1.

En efecto, como  $\{N_t = n\} = \{T_n \leq t < T_{n+1}\}$ , tenemos que

$$\begin{aligned} I^{(q)} &= \int_0^\infty q^{N_t} dt = \sum_{n=0}^{\infty} \int_{T_n}^{T_{n+1}} q^n dt \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} q^n (T_{n+1} - T_n) = \sum_{n=0}^{\infty} q^n \varepsilon_n. \end{aligned}$$

De esta manera, queda probado (2.3.1).

Para poder especificar la ley de la funcional exponencial, es conveniente usar la siguiente notación.

$$(a; q)_n = \prod_{j=0}^{n-1} (1 - aq^j), \quad (a; q)_\infty = \prod_{j=0}^{\infty} (1 - aq^j)$$

y

$$\Gamma_q(x) = \frac{(q; q)_\infty}{(q^x; q)_\infty} (1 - q)^{1-x}.$$

Ahora podemos usar las fórmulas principales para la funcional exponencial del proceso de Poisson. La transformada de Laplace de  $I^{(q)}$  es

$$\mathbb{E}[\exp\{\lambda I^{(q)}\}] = \frac{1}{(\lambda; q)_\infty}, \quad \lambda < 1. \quad (2.3.2)$$

En efecto, usando la notación de arriba y (2.3.1) tenemos que

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[\exp\{\lambda I^{(q)}\}] &= \mathbb{E}\left[\exp\left\{\lambda \sum_{n=0}^{\infty} q^n \varepsilon_n\right\}\right] \\ &= \prod_{n=0}^{\infty} \mathbb{E}[e^{\lambda q^n \varepsilon_n}], \quad \text{ya que } (\varepsilon_n)_{n \geq 0} \text{ son v.a.i.i.d.} \\ &= \prod_{n=0}^{\infty} \frac{1}{1 - \lambda q^n} = \frac{1}{(\lambda; q)_\infty}. \end{aligned}$$

Ahora vamos a calcular los momentos enteros de  $I^{(q)}$  usando el Teorema 2.2.1, para ello, debemos de calcular  $\Phi$  para el caso en que  $X_t = (-\log q)N_t$ , donde  $t \geq 0$  y  $0 < q < 1$ . Así, se tiene que la transformada de Laplace de  $X_1$  es

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[e^{-\lambda X_1}] &= \mathbb{E}[e^{-\lambda(-\log q)N_1}] = \mathbb{E}[q^{\lambda N_1}] \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} q^{\lambda n} \frac{e^{-1}}{n!} = e^{-1} e^{q^\lambda} = e^{-(1-q^\lambda)}, \end{aligned}$$

luego, el exponente de Laplace de  $X_1$  es

$$\Phi(\lambda) = -\log \mathbb{E}[e^{-\lambda X_1}] = 1 - q^\lambda.$$



De acuerdo al Teorema 2.2.1, los momentos de  $I^{(q)}$  están dados por

$$\begin{aligned}
 \mathbb{E}[(I^{(q)})^k] &= \frac{k!}{\Phi(1) \cdots \Phi(k)} = \frac{k!}{(1-q) \cdots (1-q^k)} \\
 &= \frac{k!}{\prod_{j=0}^{k-1} (1-q^{j+1})} = \frac{k!}{\prod_{j=0}^{k-1} (1-qq^j)} \\
 &= \Gamma(1+k) \frac{\prod_{j=0}^{\infty} (1-q^{1+k}q^j)}{\prod_{j=0}^{\infty} (1-qq^j)} = \Gamma(1+k) \frac{(q^{1+k}; q)_{\infty}}{(q; q)_{\infty}} \\
 &= \frac{\Gamma(1+k)(1-q)^{-k}}{(1-q)^{-k} \frac{(q; q)_{\infty}}{(q^{1+k}; q)_{\infty}}} = \frac{\Gamma(1+k)}{\Gamma_q(1+k)(1-q)^k}.
 \end{aligned}$$

### 2.3.2. Descomposición de la Variable Exponencial

En primer lugar, para cualquier  $a > 0$  fijo, si denotamos  $\beta_{1,a}$  a una variable aleatoria beta con parámetros 1 y  $a$ , y  $\gamma_p$  una variable  $\gamma$  independiente de  $\beta_{1,a}$  de parámetro  $p$ , esto es,

$$\begin{aligned}
 \mathbb{P}(\beta_{1,a} \in du) &= u(1-u)^{a-1} du, \quad 0 < u < 1, \\
 \mathbb{P}(\gamma_p \in dt) &= \frac{t^{p-1} e^{-t}}{\Gamma(p)} dt, \quad t \geq 0,
 \end{aligned} \tag{2.3.3}$$

entonces

$$\mathbf{e} \stackrel{\mathcal{L}}{=} \beta_{1,a} \gamma_{a+1}. \tag{2.3.4}$$

En segundo lugar, para cualquier  $\alpha \in (0, 1)$ , si  $\tau_{\alpha}$  denota una variable aleatoria  $\alpha$ -estable, es decir,

$$\mathbb{E}[e^{-\lambda \tau_{\alpha}}] = e^{-\lambda^{\alpha}}, \quad \lambda \geq 0, \tag{2.3.5}$$

entonces tenemos que la variable  $\mathbf{e}$  se descompone en

$$\mathbf{e} \stackrel{\mathcal{L}}{=} e^{\alpha} \tau_{\alpha}^{-\alpha}. \tag{2.3.6}$$

Primero, vamos a considerar (2.3.6) usando el hecho de que los momentos enteros de  $\mathbf{e}^{\alpha}$  están dados por

$$\mathbb{E}[\mathbf{e}^{\alpha k}] = \Gamma(\alpha k + 1), \quad k \in \mathbb{N}.$$

Luego, si tomamos

$$\Phi(k) = \frac{\Gamma(\alpha k + 1)}{\Gamma(\alpha(k-1) + 1)},$$

entonces  $\mathbb{E}[e^{\alpha k}] = \Phi(1) \cdots \Phi(k)$ . Se puede verificar que, en efecto,  $\Phi$  es el exponente de Laplace de algún subordinador. En efecto, haciendo algunos cálculos, vemos

$$\begin{aligned} \Phi(k) &= \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \alpha k \beta(\alpha k, 1-\alpha) = \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \left[ \alpha k \int_0^1 x^{\alpha k-1} (1-x)^{-\alpha} dx - 1 + 1 \right] \\ &= \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \left[ k \int_0^\infty e^{-ky} (1 - e^{-y/\alpha})^{-\alpha} dy - \int_0^\infty k e^{-ky} dy + 1 \right] \\ &= \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \left\{ \int_0^\infty [(1 - e^{-y/\alpha})^{-\alpha} - 1] k e^{-ky} dy + 1 \right\} \\ &= \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \left[ \int_0^\infty \left( \int_y^\infty \frac{e^{-u/\alpha}}{(1 - e^{-u/\alpha})^{\alpha+1}} du \right) k e^{-ky} dy + 1 \right] \\ &= \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \left[ \int_0^\infty \left( \int_0^u k e^{-ky} dy \right) \frac{e^{-u/\alpha}}{(1 - e^{-u/\alpha})^{\alpha+1}} du + 1 \right] \\ &= \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} + \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \int_0^\infty (1 - e^{-ku}) \frac{e^{-u/\alpha}}{(1 - e^{-u/\alpha})^{\alpha+1}} du. \end{aligned}$$

En pocas palabras,  $\Phi$  es el exponente de Laplace del subordinador  $X$  sin drift con tasa de muerte  $1/\Gamma(1-\alpha)$  y medida de Lévy

$$\Pi(du) = \frac{e^{-u/\alpha}}{\Gamma(1-\alpha)(1 - e^{-u/\alpha})^{\alpha+1}} du, \quad u > 0,$$

y la funcional exponencial correspondiente a este subordinador tiene la misma distribución que  $\tau_\alpha^{-\alpha}$ .

De manera alternativa, también tenemos que

$$\mathbb{E}[e^{\alpha k}] = \Gamma(\alpha k + 1) = \frac{k!}{\Phi(1) \cdots \Phi(k)},$$

donde ahora

$$\Phi(k) = k \frac{\Gamma(\alpha(k-1) + 1)}{\Gamma(\alpha k + 1)}.$$

De nueva cuenta, se puede verificar que  $\Phi$  está dado, por la fórmula de Lévy-Khintchine; más precisamente, mediante

$$\Phi(k) = \frac{(1-\alpha)}{\alpha \Gamma(\alpha+1)} \int_0^\infty (1 - e^{-uk}) \frac{e^{u/\alpha}}{(e^{u/\alpha} - 1)^{2-\alpha}} du.$$

Este exponente de Laplace corresponde al de un subordinador sin drift que tiene medida de Lévy

$$\Pi(du) = \frac{(1 - \alpha)e^{u/\alpha}}{\alpha\Gamma(\alpha + 1)(e^{u/\alpha} - 1)^{2-\alpha}} du, \quad u > 0.$$

En efecto, se tiene que

$$\begin{aligned} \Phi(k) &= k \frac{\Gamma(\alpha(k-1) + 1)\Gamma(\alpha)}{\Gamma(\alpha k + 1)} = \frac{k}{\Gamma(\alpha)} \beta(\alpha(k-1) + 1, \alpha) \\ &= \frac{\alpha k}{\Gamma(\alpha + 1)} \int_0^1 x^{\alpha(k-1)+1} (1-x)^{\alpha-1} dx \\ &= \frac{(1-\alpha)}{\alpha\Gamma(\alpha+1)} \int_0^\infty \frac{\alpha}{\alpha-1} (e^{u/\alpha} - 1)^{\alpha-1} k e^{-ky} dy \\ &= \frac{(1-\alpha)}{\alpha\Gamma(\alpha+1)} \int_0^\infty \left( \int_y^\infty \frac{e^{u/\alpha}}{(e^{u/\alpha} - 1)^{2-\alpha}} du \right) k e^{-ky} dy \\ &= \frac{(1-\alpha)}{\alpha\Gamma(\alpha+1)} \int_0^\infty \left( \int_0^u k e^{-ky} dy \right) \frac{e^{u/\alpha}}{(e^{u/\alpha} - 1)^{2-\alpha}} du \\ &= \frac{(1-\alpha)}{\alpha\Gamma(\alpha+1)} \int_0^\infty (1 - e^{-ku}) \frac{e^{u/\alpha}}{(e^{u/\alpha} - 1)^{2-\alpha}} du. \end{aligned}$$



# Capítulo 3

## Resultados Asintóticos para Caminatas Aleatorias con una Barrera

En este capítulo se darán las demostraciones de varios resultados importantes para el desarrollo de esta tesis. Esto tiene por objetivo establecer los teoremas más importantes que nos servirán para la aplicación de los procesos  $\beta$ -coalescentes en relación a su convergencia. Estos resultados se aplican a toda colección de variables aleatorias que cumplen cierta recursión en ley.

Para poder realizar un estudio acerca de los procesos  $\beta$ -coalescentes y adentrarnos a esta teoría probabilista, debemos utilizar varios resultados importantes que involucran funciones de variación regular, en particular, sobre funciones de variación lenta. Dichas funciones nos sirven para estudiar el comportamiento asintótico de las caminatas aleatorias observando el número de saltos que dan considerando una barrera. Para ello, nos basaremos en [31].

Será de vital importancia el uso sutil de las funcionales exponenciales de subordinadores sin drift con cierta medida de Lévy particular, ya que estas serán el límite débil del proceso del número de colisiones de los  $\beta$ -coalescentes renormalizados adecuadamente.

### 3.1. Caminatas Aleatorias con una Barrera

A continuación vamos a introducir unas caminatas aleatorias con el objetivo de estudiar el comportamiento asintótico del número de saltos renormalizado por medio de las funciones de variación lenta en infinito. Enseguida, citamos un par de ejemplos

que nos servirán para ilustrar el comportamiento límite de las variables aleatorias que se estudiarán en el Capítulo 4.

**Ejemplo 3.1.1** Sean  $(\xi_k, k \in \mathbb{N})$  copias independientes de una variable aleatoria  $\xi$  con alguna distribución de probabilidad propia y no degenerada

$$p_k = \mathbb{P}(\xi = k), \quad k \in \mathbb{N}, \quad p_1 > 0.$$

Definamos a la caminata aleatoria simple mediante  $S_0 = 0$  y  $S_k = \xi_1 + \cdots + \xi_k$ , para  $k \geq 1$ . Vamos a introducir la variable aleatoria  $N_n := \inf\{k \geq 1 : S_k \geq n\}$  para  $n \geq 1$ . Vemos que  $N_n$  cumple con la igualdad en ley

$$N_n \stackrel{\mathcal{L}}{=} 1 + N_{n-\xi} 1_{\{\xi < n\}}, \quad (3.1.1)$$

donde  $\xi$  es independiente de  $N_2, \dots, N_{n-1}$ .

**Definición 3.1.2** Sea  $n \in \mathbb{N}$ . Una caminata aleatoria con barrera  $n$  que denotaremos por  $(R_k^{(n)}, k \in \mathbb{Z}^+)$ , se define recursivamente como  $R_0^{(n)} = 0$  y

$$R_k^{(n)} = R_{k-1}^{(n)} + \xi_k 1_{\{R_{k-1}^{(n)} + \xi_k < n\}}, \quad k \in \mathbb{N}.$$

Notemos que la sucesión  $(R_k^{(n)}, k \in \mathbb{N}_0)$  es no decreciente y que además  $R_k^{(n)} < n$  para todo  $k \in \mathbb{N}_0$ . Sea

$$M_n = \#\{k \in \mathbb{N} : R_{k-1}^{(n)} \neq R_k^{(n)}\} = \sum_{l=0}^{\infty} 1_{\{R_l^{(n)} + \xi_{l+1} < n\}}$$

el número de saltos que hay en el proceso  $(R_k^{(n)}, k \in \mathbb{N}_0)$ . Notemos que  $M_1 = 0$  y  $1 \leq M_n \leq n - 1$  para todo  $n \geq 2$ . Vemos que el siguiente lema (que se encuentra en [29]) implica que  $(M_n, n \geq 1)$  satisface la igualdad en ley

$$M_n \stackrel{\mathcal{L}}{=} M_{n-I_n} + 1, \quad n \geq 2, \quad (3.1.2)$$

donde  $I_n$ <sup>1</sup> es una variable aleatoria independiente de  $M_2, \dots, M_{n-1}$  que tiene la misma ley que  $R_1^{(n)}$  dado  $R_1^{(n)} > 0$ . Para  $1 \leq k \leq n - 1$ , se tiene que

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(I_n = k) &= \mathbb{P}(R_1^{(n)} = k | R_1^{(n)} > 0) = \frac{\mathbb{P}(R_1^{(n)} = k, R_1^{(n)} > 0)}{\mathbb{P}(R_1^{(n)} > 0)} \\ &= \frac{\mathbb{P}(\xi_1 = k)}{\mathbb{P}(\xi_1 < n)} = \frac{p_k}{p_1 + \cdots + p_{n-1}}. \end{aligned} \quad (3.1.3)$$

<sup>1</sup> $I_n$  es el tamaño del primer salto del proceso  $R^{(n)}$

A continuación, vamos a definir  $T_1 = \inf\{k \in \mathbb{N} : R_k^{(n)} > 0\}$  como el tiempo en el que la caminata aleatoria  $R^{(n)}$  salta por primera vez.

**Observación 3.1.3** (i) Por la propiedad de Markov fuerte aplicada al tiempo  $T_1$ ,  $M_n$  satisface la ecuación (3.1.2).

(ii) Por la propiedad de Markov simple aplicada al tiempo 1, vemos que  $N_n$  satisface la ecuación (3.1.1).

Para lo sigue, vamos a definir  $q_k = \mathbb{P}(\xi \geq k)$ ,  $k \in \mathbb{N}$  y  $n_0 = \sup\{k \in \mathbb{N} : q_k = 1\} \in \mathbb{N}$ .

**Lema 3.1.4** La distribución de  $M_n$  satisface la recursión  $\mathbb{P}(M_1 = \dots = M_{n_0} = 0) = 1$  y para todo  $n > n_0$ ,

$$\mathbb{P}(M_n = j) = \frac{1}{1 - q_n} \sum_{k=1}^{n-1} p_k \mathbb{P}(M_{n-k} = j - 1), \quad j \in \{1, \dots, n - 1\},$$

**Demostración.** Por definición de  $n_0$  se tiene que  $\mathbb{P}(\xi \geq n_0) = 1$ . Entonces para  $n \leq n_0$  el proceso  $(R_k^{(n)}, k \geq 1)$  es casi seguramente constante e igual a 0, y por lo tanto se sigue que  $M_1 = \dots = M_{n_0} = 0$  c.s. debido a que  $R^{(n)}$  nunca salta. Esto es,  $\xi \geq n_0 \geq n$  c.s. Ahora fijemos  $n \in \mathbb{N}$  con  $n > n_0$  y por la definición de  $T_1$ , esto implica que  $R_{I_n}^{(n)} \in \{1, \dots, n - 1\}$ . Luego, para  $j \in \{1, \dots, n - 1\}$ ,

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(M_n = j) &= \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{n-1} \mathbb{P}(I_n = i, R_{I_n} = k, M_n = j) \\ &= \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{n-1} \mathbb{P}(\xi_1 \geq n, \dots, \xi_{i-1} \geq n, \xi_i = k, M_n = j). \end{aligned}$$

Para  $i, m \in \mathbb{N}$ , definamos  $\hat{R}_0^{(i,m)} = 0$  y

$$\hat{R}_{k+1}^{(i,m)} = \hat{R}_k^{(i,m)} + \xi_{i+k+1} 1_{\{\hat{R}_k^{(i,m)} + \xi_{i+k+1} < m\}}, \quad k \geq 0.$$

Entonces  $\hat{M}_{i,m} = \sum_{l=0}^{\infty} 1_{\{\hat{R}_l^{(i,m)} + \xi_{i+l+1} < m\}}$ , es una copia independiente de  $M_m = \sum_{l=0}^{\infty} 1_{\{R_l^{(m)} + \xi_{l+1} < m\}}$  e independiente de  $\xi_1, \dots, \xi_i$ . Usando esto en la igualdad an-

terior, vemos que

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(M_n = j) &= \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{n-1} \mathbb{P} \left( \xi_1 \geq n, \dots, \xi_{i-1} \geq n, \xi_i = k, \sum_{l=0}^{\infty} 1_{\{\hat{R}_l^{(0,n)} + \xi_{l+1} < n\}} = j \right) \\
&= \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{n-1} \mathbb{P} \left( \xi_1 \geq n, \dots, \xi_{i-1} \geq n, \xi_i = k, \sum_{l=i}^{\infty} 1_{\{\hat{R}_l^{(0,n)} + \xi_{l+1} < n\}} = j - 1 \right) \\
&= \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{n-1} \mathbb{P}(\xi_1 \geq n, \dots, \xi_{i-1} \geq n, \xi_i = k, \hat{M}_{i,n-k} = j - 1) \\
&= \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{n-1} \mathbb{P}(\xi_1 \geq n) \cdots \mathbb{P}(\xi_{i-1} \geq n) \mathbb{P}(\xi_i = k) \mathbb{P}(M_{n-k} = j - 1) \\
&= \sum_{i=1}^{\infty} q_n^{i-1} \sum_{k=1}^{n-1} p_k \mathbb{P}(M_{n-k} = j - 1) = \frac{1}{1 - q_n} \sum_{k=1}^{n-1} p_k \mathbb{P}(M_{n-k} = j - 1).
\end{aligned}$$

□

**Ejemplo 3.1.5** Consideremos una cadena de Markov decreciente  $(Z_n, n \geq 0)$  con espacio de estados  $\mathbb{N}$  y probabilidades de transición  $\pi_{ij} > 0$  para  $i, j \in \mathbb{N}$  con  $j < i$  y  $\pi_{ij} = 0$  en otro caso. Luego, dado  $n \in \mathbb{N}$ , definamos

$$H_n := \inf\{k \geq 1 : Z_k = 1 \text{ dado } Z_0 = n\}$$

el tiempo de absorción de  $Z$  condicionada a que  $Z_0 = n$ . Entonces  $(H_n, n \geq 1)$  satisface la recursión en ley (3.1.2) en donde  $I_n$  satisface

$$\mathbb{P}(I_n = k) = \pi_{n,n-k}, \quad k, n \in \mathbb{N}, \quad k < n, \quad (3.1.4)$$

donde las  $\pi_{ij}$  son algunas constantes no negativas dadas que satisfacen

$$\sum_{j=1}^{i-1} \pi_{ij} = 1.$$

En efecto, condicionando sobre el tamaño del primer salto  $I_n$  de  $Z$ , se tiene que

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(H_n = j) &= \sum_{i=1}^{n-1} \mathbb{P}(H_n = j, I_n = i) = \sum_{i=1}^{n-1} \mathbb{P}(H_n = j | I_n = i) \mathbb{P}(I_n = i) \\
&= \sum_{i=1}^{n-1} \mathbb{P}(H_n = j | Z_1 = n - i) \mathbb{P}(I_n = i) = \sum_{i=1}^{n-1} \mathbb{P}(H_{n-i} = j - 1) \mathbb{P}(I_n = i) \\
&= \mathbb{P}(1 + H_{n-I_n} = j).
\end{aligned}$$



en donde en la cuarta igualdad se usó la propiedad de Markov al tiempo 1.

En seguida, damos a conocer los resultados principales de este trabajo de tesis en secciones posteriores. Estos sirven para determinar el comportamiento asintótico de cualquier sucesión de variables aleatorias  $(M_n, n \geq 1)$  que satisfacen (3.1.2) y cuya distribución de  $I_n$  esté dada por (3.1.3) cuando esta sucesión se renormaliza de manera adecuada.

**Teorema 3.1.6** *Supongamos que, para algún  $\alpha \in (0, 1)$  y alguna función  $L$  de variación lenta en  $\infty$ ,*

$$q_n \sim \frac{L(n)}{n^\alpha}, \quad \text{cuando } n \rightarrow \infty. \quad (3.1.5)$$

*Entonces, cuando  $n \rightarrow \infty$ ,*

$$\frac{L(n)}{n^\alpha} M_n \xrightarrow{\mathcal{L}} \int_0^\infty e^{-U_t} dt, \quad (3.1.6)$$

donde  $(U_t, t \geq 0)$  es un subordinador de drift libre con medida de Lévy

$$\nu(dt) = \frac{e^{-t/\alpha}}{(1 - e^{-t/\alpha})^{\alpha+1}} dt, \quad t > 0. \quad (3.1.7)$$

**Teorema 3.1.7** *Si  $m = \mathbb{E}[\xi] < \infty$  entonces las siguientes afirmaciones son equivalentes.*

- (i) *Existen sucesiones  $(a_n, n \in \mathbb{N})$  y  $(b_n, n \in \mathbb{N})$  con  $a_n > 0$  y  $b_n \in \mathbb{R}$  tal que, cuando  $n \rightarrow \infty$ ,  $(M_n - b_n)/a_n$  converge débilmente a una ley de probabilidad no degenerada.*
- (ii)  *$\sigma^2 = \text{Var}[\xi] < \infty$  o  $\sigma^2 = \infty$  y, para algún  $\alpha \in [1, 2]$  y alguna función  $L$  de variación lenta en  $\infty$ ,*

$$\sum_{k=1}^{n-1} k^2 p_k \sim n^{2-\alpha} L(n), \quad \text{cuando } n \rightarrow \infty. \quad (3.1.8)$$

*Si  $\sigma^2 < \infty$ , entonces, con  $b_n = n/m$  y  $a_n = (m^{-3}C^{-1}\sigma^2n)^{1/2}$ , el límite débil es  $\mu_2$  (normal con media 0 y varianza  $C$ ). Si  $\sigma^2 = \infty$  y (3.1.8) se cumple con  $\alpha = 2$ , entonces, con  $b_n = n/m$  y  $a_n = m^{-3/2}c_n$ , donde  $c_n$  es cualquier sucesión que satisface  $\lim_{n \rightarrow \infty} nL(c_n)/c_n^2 = C$ , el límite débil es  $\mu_2$ . Si  $\sigma^2 = \infty$  y (3.1.8) se cumple con*

$\alpha \in [1, 2)$  entonces, con  $b_n = n/m$  y  $a_n = m^{-(\alpha+1)/\alpha} c_n$ , donde  $c_n$  es cualquier sucesión que satisfice

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{nL(c_n)}{c_n^\alpha} = \frac{\alpha}{2-\alpha} C,$$

el límite débil es  $\mu_\alpha$ .

**Teorema 3.1.8** Si  $\sum_{j=1}^n q_j \sim L(n)$  para alguna función  $L$  de variación lenta en  $\infty$ , entonces cuando  $n \rightarrow \infty$ ,

$$\frac{M_n}{\mathbb{E}[M_n]} \xrightarrow{P} 1 \quad (3.1.9)$$

y  $\mathbb{E}[M_n] \sim n/L(n)$ . En particular, si

$$m := \mathbb{E}[\xi] < \infty \quad (3.1.10)$$

entonces  $\mathbb{E}[M_n] \sim n/m$ . Si (3.1.10) se cumple, y si existe una sucesión de números positivos  $(a_n)_{n \geq 1}$  tal que  $M_n/a_n \xrightarrow{P} 1$  cuando  $n \rightarrow \infty$ , entonces  $a_n \sim n/m$ .

**Teorema 3.1.9** Supongamos que  $\mathbb{E}[\xi] = \infty$  y que, para alguna función  $L$  de variación lenta en  $\infty$ ,

$$\mathbb{P}(\xi \geq n) = q_n \sim \frac{L(n)}{n}. \quad (3.1.11)$$

Sea  $c$  cualquier función positiva que satisfice  $\lim_{x \rightarrow \infty} x\mathbb{P}(\xi \geq c(x)) = 1$ , y sea  $\psi(x) = x \int_0^{c(x)} \mathbb{P}(\xi > y) dy$ . Sea  $b$  cualquier función positiva que satisfice  $b(\psi(x)) \sim \psi(b(x)) \sim x$ . Y sea  $a(x) = x^{-1}b(x)c(b(x))$ . Entonces

$$\frac{M_n - b(n)}{a(n)} \xrightarrow{\mathcal{L}} \mu_1,$$

donde  $\mu_1$  es una ley 1-estable con  $C = 1$ .

## 3.2. Resultados sobre $N_n$ y $S_{N_n-1}$

Vamos a dar condiciones necesarias y suficientes para que  $N_n$  apropiadamente normalizado converja débilmente a una ley no degenerada o degenerada.

**Definición 3.2.1** Se dice que una variable aleatoria  $\theta_\alpha$  tiene distribución de Mittag-Leffler de parámetro  $\alpha \in [0, 1)$ , si sus momentos están dados por

$$\mathbb{E}[\theta_\alpha^n] = \frac{n!}{\Gamma^n(1-\alpha)\Gamma(1+n\alpha)}, \quad n \in \mathbb{N},$$

y su transformada de Laplace se puede escribir como

$$\mathbb{E}[e^{-\lambda\theta_\alpha}] = \frac{1}{1+\lambda^\alpha}, \quad |\lambda^\alpha| < 1.$$

**Proposición 3.2.2** Si (3.1.5) se cumple para algún  $\alpha \in [0, 1)$ , entonces

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{L^k(n)}{n^{\alpha k}} \mathbb{E}[N_n^k] = \frac{k!}{\Gamma^k(1-\alpha)\Gamma(1+k\alpha)}, \quad k \in \mathbb{N},$$

y por lo tanto,

$$\frac{L(n)}{n^\alpha} N_n \xrightarrow{\mathcal{L}} \theta_\alpha, \quad \text{cuando } n \rightarrow \infty. \quad (3.2.1)$$

Recíprocamente, si existe una sucesión  $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  de números reales positivos tal que  $N_n/a_n$  converja a una ley propia y no degenerada  $\theta$ , entonces

$$a_n \sim Dq_n^{-1} \sim \frac{Dn^\alpha}{L(n)},$$

para algunas constantes  $D > 0$ ,  $\alpha \in [0, 1)$ , y alguna función  $L$  de variación lenta en  $\infty$ , y (3.2.1) se cumple.

**Proposición 3.2.3** Las siguientes condiciones son equivalentes.

- (i)  $\sum_{j=1}^n q_j \sim L(n)$  para alguna función  $L$  de variación lenta en  $\infty$ .
- (ii)  $1 - \sum_{n=1}^{\infty} e^{-sn} p_n \sim sL(1/s)$  cuando  $s \downarrow 0$  para alguna función  $L$  de variación lenta en  $\infty$ .
- (iii) La sucesión  $(N_n)_{n \geq 1}$  es relativamente estable, es decir, existe una sucesión  $(a_n)_{n \geq 1}$  de números reales positivos tal que  $N_n/a_n \xrightarrow{P} 1$ .

Más aún, si (i) se cumple, entonces

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{L(n)^k}{n^k} \mathbb{E}[N_n^k] = 1, \quad k \in \mathbb{N} \quad (3.2.2)$$

y  $a_n \sim \mathbb{E}[N_n]$ .

Para poder demostrar estas proposiciones, nos apoyaremos en las siguientes notaciones y definiciones, así como también enunciar y probar un lema. Denotemos por

$$P(s) := \sum_{n=1}^{\infty} e^{-sn} p_n, \quad s \geq 0 \quad \text{y} \quad h(s) := \frac{1}{1 - P(s)}, \quad s > 0.$$

Para  $t \geq 0$ , definamos  $N_t := N_n$ , para  $t \in (n-1, n]$ ,  $n \in \mathbb{N}$ .

**Lema 3.2.4** Fijemos  $k \in \mathbb{N}$ . Entonces cuando  $s \downarrow 0$ ,

$$s \int_0^{\infty} e^{-st} \mathbb{E}[N_t^k] dt \sim k! h^k(s). \quad (3.2.3)$$

**Demostración.** Para  $k \in \{2, 3, \dots\}$ , denotemos por  $D_k$  la función afín de  $k-2$  variables positivas de la forma

$$D_k(x_1, \dots, x_{k-2}) = \gamma_{0,k} + \sum_{i=1}^{k-2} \gamma_{i,k} x_i,$$

donde los coeficientes  $\gamma_{i,k} \in \mathbb{R}$  para  $i \in \{0, 1, \dots, k-2\}$ . Por conveniencia, vamos a denotar  $b_k(n) = \mathbb{E}[N_n^k]$  para  $k \in \mathbb{N}$ . Probaremos por inducción sobre  $k$  que

$$b_k(n) = c_k(n) + \sum_{i=1}^{n-1} b_k(n-i) p_i, \quad k \in \mathbb{N}, \quad (3.2.4)$$

con  $c_1(n) = 1$  y

$$c_k(n) := D_k(b_1(n), \dots, b_{k-2}(n)) + k b_{k-1}(n), \quad k \geq 2.$$

En (3.2.4), tenemos que

$$\mathbb{E}[(N_{n-\xi} 1_{\{\xi < n\}})^k] = \sum_{i=1}^{n-1} \mathbb{E}[N_{n-i}^k 1_{\{i < n\}}] p_i = \sum_{i=1}^{n-1} b_k(n-i) p_i. \quad (3.2.5)$$

Para  $k = 1$ , vemos que (3.2.4) se cumple usando (3.1.1). Supongamos que (3.2.4) se cumple para  $k \in \{1, 2, \dots, m-1\}$ . Entonces, usando (3.1.1), se tiene que

$$\begin{aligned}
 b_m(n) &= \mathbb{E}[N_n^m] = \mathbb{E}[(1 + N_{n-\xi}1_{\{\xi < n\}})^m] = \mathbb{E}\left[\sum_{i=0}^m \binom{m}{i} (N_{n-\xi}1_{\{\xi < n\}})^i\right] \\
 &= \sum_{i=0}^{m-2} \binom{m}{i} \mathbb{E}[(N_{n-\xi}1_{\{\xi < n\}})^i] + m\mathbb{E}[(N_{n-\xi}1_{\{\xi < n\}})^{m-1}] + \mathbb{E}[(N_{n-\xi}1_{\{\xi < n\}})^m] \\
 &= 1 + m(b_1(n) - 1) + \sum_{i=2}^{m-2} \binom{m}{i} (b_i(n) - D_i(b_1(n), \dots, b_{i-2}(n)) - (i-1)b_{i-2}(n)) \\
 &\quad + m(b_{m-1}(n) - D_{m-1}(b_1(n), \dots, b_{m-3}(n)) - (m-1)b_{m-2}(n)) + \sum_{i=2}^{m-2} b_m(n-i)p_i
 \end{aligned}$$

Esta última igualdad se sigue reacomodando los términos formando una función afín de  $b_1(n), \dots, b_{m-2}(n)$ , lo cual implica que (3.2.4) se cumple para  $k = m$ . De este modo, (3.2.4) queda demostrado. Ahora, para  $k \in \mathbb{N}$  y  $s > 0$ , definamos

$$B_k(s) = \sum_{n=1}^{\infty} e^{-sn} b_k(n) \quad \text{y} \quad C_k(s) = \sum_{n=2}^{\infty} e^{-sn} c_k(n).$$

Entonces, (3.2.4) es equivalente a

$$B_k(s) = \frac{e^{-s} + C_k(s)}{1 - P(s)} = h(s)(e^{-s} + C_k(s)), \quad k \in \mathbb{N}, \quad s > 0. \quad (3.2.6)$$

En efecto, para  $k \in \mathbb{N}$  y  $s > 0$ , se tiene que

$$\begin{aligned}
 B_k(s) &:= \sum_{n=1}^{\infty} e^{-sn} b_k(n) = e^{-s} + \sum_{n=2}^{\infty} e^{-sn} \left( c_k(n) + \sum_{i=1}^{n-1} b_k(n-i)p_i \right) \\
 &= e^{-s} + \sum_{n=2}^{\infty} e^{-sn} c_k(n) + \sum_{n=2}^{\infty} e^{-sn} \sum_{i=1}^{n-1} b_k(n-i)p_i \\
 &= e^{-s} + \sum_{n=2}^{\infty} e^{-sn} c_k(n) + \sum_{i=1}^{\infty} e^{-sn} \sum_{n=i+1}^{\infty} b_k(n-i)p_i
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= e^{-s} + \sum_{n=2}^{\infty} e^{-sn} c_k(n) + \sum_{i=1}^{\infty} p_i e^{-si} \sum_{n=i+1}^{\infty} e^{-s(n-i)} b_k(n-i) \\
&= e^{-s} + \sum_{n=2}^{\infty} e^{-sn} c_k(n) + \left( \sum_{i=1}^{\infty} p_i e^{-si} \right) \left( \sum_{n=1}^{\infty} e^{-sn} b_k(n) \right) \\
&= e^{-s} + C_k(s) + B_k(s)P(s),
\end{aligned}$$

así, despejando  $B_k(s)$  se obtiene (3.2.6).

Ahora, vamos a probar por inducción sobre  $k$  que

$$sB_k(s) \sim k!h^k(s), \quad s \downarrow 0, \quad k \in \mathbb{N}. \quad (3.2.7)$$

Para  $k = 1$ , vemos que

$$C_1(s) = \sum_{n=2}^{\infty} e^{-sn} c_1(n) = e^{-2s} \cdot \frac{1}{1 - e^{-s}}.$$

Luego, por (3.2.6) tenemos

$$\begin{aligned}
sB_1(s) &= sh(s)(e^{-s} + C_1(s)) = sh(s) \left( e^{-s} + \frac{e^{-2s}}{1 - e^{-s}} \right) \\
&= sh(s)e^{-s} \left( 1 + \frac{e^{-s}}{1 - e^{-s}} \right) = \frac{sh(s)e^{-s}}{1 - e^{-s}} \sim h(s) \quad s \downarrow 0.
\end{aligned}$$

Esto último se debe que  $1 - e^{-s} \sim s$  cuando  $s \downarrow 0$ . Luego, (3.2.7) se cumple para  $k = 1$ . Supongamos ahora que (3.2.7) se cumple para  $k \in \{1, \dots, m\}$ , debemos verificar que

$$sB_{m+1}(s) \sim (m+1)!h^{m+1}(s), \quad s \downarrow 0, \quad m \in \mathbb{N}.$$

Luego, nos damos cuenta que

$$s \sum_{i=2}^{\infty} e^{-si} D_{m+1}(b_1(i), \dots, b_{m-1}(i)) = o(h^m(s)), \quad s \downarrow 0. \quad (3.2.8)$$

En efecto, (3.2.8) se sigue, ya que

$$\begin{aligned}
\frac{s}{h^m(s)} \sum_{i=2}^{\infty} e^{-si} D_{m+1}(b_1(i), \dots, b_{m-1}(i)) &= [1 - P(s)]^m s \sum_{i=2}^{\infty} e^{-si} D_{m+1}(b_1(i), \dots, b_{m-1}(i)) \\
&\rightarrow 0, \quad \text{cuando } s \downarrow 0,
\end{aligned}$$

ya que  $[1 - P(s)]^m s \rightarrow 0$  cuando  $s \downarrow 0$ .  
Por lo tanto, por (3.2.6), se tiene que

$$\begin{aligned}
 sB_{m+1}(s) &= sh(s)(e^{-s} + C_{m+1}(s)) = sh(s) \left( e^{-s} + \sum_{i=2}^{\infty} e^{-si} c_{m+1}(i) \right) \\
 &= sh(s) \left( e^{-s} + \sum_{i=2}^{\infty} e^{-si} ((m+1)b_m(i) + D_{m+1}(b_1(i), \dots, b_{m-1}(i))) \right) \\
 &= sh(s) \left( e^{-s} + (m+1)(B_m(s) - e^{-s}) + \sum_{i=2}^{\infty} e^{-si} D_{m+1}(b_1(i), \dots, b_{m-1}(i)) \right) \\
 &= h(s) ((m+1)sB_m(s) - mse^{-s} + o(h^m(s))) \\
 &\sim (m+1)!h^{m+1}(s), \quad s \downarrow 0,
 \end{aligned}$$

en el primer término se aplicó la hipótesis de inducción, y los otros términos son despreciables cuando  $s \downarrow 0$ . Por lo tanto, (3.2.7) queda demostrado.

Por último,

$$\begin{aligned}
 s \int_0^{\infty} e^{-st} \mathbb{E}[N_t^k] dt &= s \sum_{j=1}^{\infty} \int_{j-1}^j e^{-st} \mathbb{E}[N_j^k] dt = \sum_{j=1}^{\infty} \mathbb{E}[N_j^k] s \left( -\frac{1}{s} e^{-st} \right) \Big|_{j-1}^j \\
 &= \sum_{j=1}^{\infty} \mathbb{E}[N_j^k] (e^{-s(j-1)} - e^{-sj}) = (e^s - 1) \sum_{j=1}^{\infty} e^{-sj} \mathbb{E}[N_j^k] \\
 &\sim sB_k(s) \sim k!h^k(s), \quad s \downarrow 0,
 \end{aligned}$$

donde, en la última línea se usó el hecho de que  $e^s - 1 \sim s$  cuando  $s \downarrow 0$  y la definición de  $B_k(\cdot)$ .  $\square$

A continuación, damos la demostración de la Proposición 3.2.2 y la Proposición 3.2.3 simultáneamente.

**Demostración.** Para  $N$  suficientemente grande, definamos  $L(t) = L(n)$  para  $t \in (n-1, n]$ ,  $n \in \{N, N+1, \dots\}$ . Del Teorema A.0.4 se sigue que (3.1.5) es equivalente a tener  $\mathbb{P}(\xi > x) \sim x^{-\alpha}L(x)$ , y la condición (i) de la Proposición 3.2.3 es equivalente a  $\int_0^x \mathbb{P}(\xi > y) dy \sim L(x)$ . Ahora, aplicando el Teorema A.0.19 para  $\beta = 1$  y  $n = 0$ , nos da que

$$1 - P(s) \sim sL(1/s), \quad s \downarrow 0 \iff \int_{[0,x]} t dF(t) \sim L(x), \quad x \rightarrow \infty.$$

Y por el Corolario A.0.20, tenemos que

$$\int_{[0,x]} t dF(t) \sim L(x), \quad x \rightarrow \infty \iff \int_{[0,x]} [1 - F(t)] dt \sim L(x), \quad x \rightarrow \infty,$$

lo cual significa que

$$\int_{[0,x]} [1 - F(t)] dt \sim L(x), \quad x \rightarrow \infty \iff 1 - P(s) \sim sL(1/s), \quad s \downarrow 0.$$

Por lo tanto, (i) y (ii) de la Proposición 3.2.3 son equivalentes.

De acuerdo a lo que se acaba de probar arriba y considerando a  $\Gamma(0)$  como 1, podemos suponer que  $1 - P(s) \sim \Gamma(1 - \alpha)s^\alpha L(1/s)$ ,  $s \downarrow 0$  para algún  $\alpha \in [0, 1]$ , o de forma equivalente

$$h(s) \sim \frac{1}{\Gamma(1 - \alpha)s^\alpha L(1/s)}, \quad s \downarrow 0. \quad (3.2.9)$$

Ahora procedemos como en la demostración del Teorema A.0.24. En el Lema 3.2.4 se demostró que  $s \int_0^\infty e^{-st} \mathbb{E}[N_t^k] dt \sim h^k(s)k!$  cuando  $s \downarrow 0$ . Luego, si hacemos  $U(t) = \mathbb{E}[N_t^k]$ , vemos que  $U$  es una función localmente integrable, se tiene que la transformada de Lebesgue-Stieltjes de  $U$  se puede escribir como

$$\hat{U}(s) = s \int_0^\infty e^{-st} U(t) dt \sim h^k(s)k!, \quad s \downarrow 0.$$

Aplicando el Teorema A.0.16 con  $c = k!/\Gamma^k(1 - \alpha)$  y  $\rho = \alpha k$ , tenemos que

$$\mathbb{E}[N_t^k] = U(t) \sim \frac{ct^\rho}{\Gamma(\rho + 1)L^k(t)} = \frac{k!}{\Gamma(1 - \alpha)^k \Gamma(1 + \alpha k)} \cdot \frac{t^{\alpha k}}{L(t)^k} \quad t \rightarrow \infty,$$

es decir,

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \mathbb{E} \left[ \left( \frac{L(t)N_t}{t^\alpha} \right)^k \right] = \frac{k!}{\Gamma(1 - \alpha)^k \Gamma(1 + \alpha k)}, \quad k \in \mathbb{N}, \quad (3.2.10)$$

así, por el método de momentos, cuando  $t \rightarrow \infty$ ,  $L(t)N_t/t^\alpha \xrightarrow{\mathcal{L}} \theta_\alpha$ , y por Teorema de Convergencia Uniforme, esto implica que  $L(n)N_n/n^\alpha \xrightarrow{\mathcal{L}} \theta_\alpha$ , cuando  $n \rightarrow \infty$ .

Supongamos ahora que existe una sucesión  $\{a(n)\}_{n \in \mathbb{N}}$  de números positivos tal que  $N_n/a(n) \xrightarrow{\mathcal{L}} \theta$ , y que  $\theta = \delta_1$  ó  $\theta$  es no degenerada.



Para  $t > 0$ , definamos  $a(t) = a(n)$  para  $t \in (n - 1, n]$ . Entonces, gracias a las definiciones de  $N_t$  y  $a(t)$ , se tiene que  $N_t/a(t) \xrightarrow{\mathcal{L}} \theta$  cuando  $t \rightarrow \infty$ . Si  $\theta$  es no degenerada, entonces de la demostración del Teorema A.0.25, se sigue que  $a(t) \sim Dh(1/t)$  para algún  $D > 0$  y que la función  $a(\cdot)$  varía regularmente en  $\infty$  con índice  $\alpha \in [0, 1)$ . Por el Corolario A.0.20,

$$a(n) \sim D \frac{n^\alpha}{\Gamma(1 - \alpha)L(n)} \sim \frac{D}{\Gamma(1 - \alpha)q_n}.$$

Por lo tanto, para algún  $\alpha \in [0, 1)$ , (3.1.5) se cumple. Por la parte directa de la proposición, se tiene que (3.2.1) se cumple también.

Sea  $T$  una variable aleatoria con distribución exponencial de parámetro 1 independiente de  $(N_t, t \geq 0)$ . Como en la demostración del Teorema A.0.25, cada sucesión  $r_n$  que tiende a 0 contiene una subsucesión  $\{s_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  tal que  $s_n \rightarrow 0$  cuando  $n \rightarrow \infty$  tal que  $\lim_{n \rightarrow \infty} a(t/s_n)/h(s_n) = f(t)$  en los puntos de continuidad de una función positiva no decreciente  $f$ . Por lo tanto,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a(T/s_n)}{h(s_n)} = f(T) \quad \text{c.s.}$$

De (3.2.3), se sigue que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{E} \left[ \left( \frac{N_{T/s_n}}{h(s_n)} \right)^k \right] = k!, \quad k \in \mathbb{N}. \quad (3.2.11)$$

Como  $N_{T/s_n}/a(T/s_n) \xrightarrow{P} 1$ , se obtiene

$$\frac{N_{T/s_n}}{h(s_n)} = \frac{N_{T/s_n}}{a(T/s_n)} \frac{a(T/s_n)}{h(s_n)} \xrightarrow{P} f(T) \quad \text{cuando } n \rightarrow \infty. \quad (3.2.12)$$

Aplicando el Lema de Fatou a (3.2.11) con  $k = 1$  y usando (3.2.12), se obtiene  $\mathbb{E}[f(T)] < \infty$ . Luego, esto implica que  $f(T) < \infty$  casi seguramente. También, (3.2.11) implica que, para cada  $k \in \mathbb{N}$ , la sucesión  $\{(N_{T/s_n}/h(s_n))^k, n \in \mathbb{N}\}$  es uniformemente integrable, lo cual, junto con (3.2.12) nos lleva a que  $\mathbb{E}[f(T)^k] = k!$  para  $k \in \mathbb{N}$ . Como  $\mathbb{E}[T^k] = k!$  para  $k \in \mathbb{N}$ , y la sucesión  $\{k!\}_{k \in \mathbb{N}}$  determina de manera única a la distribución exponencial, entonces  $f(T) \stackrel{\mathcal{L}}{=} T$ , así, esto implica que  $f(t) = t$  para  $t > 0$ . Se puede repetir el mismo argumento que se dio arriba para cualquier sucesión  $\{r_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  que cumpla las condiciones de la sucesión anterior, lo cual da  $a(t/s)/h(s) \rightarrow t$  cuando  $s \downarrow 0$  para cada  $t > 0$ . Por lo tanto  $a(t/s)/a(1/s) \rightarrow t$

cuando  $s \downarrow 0$ , lo cual significa que  $a(t) \sim h(1/t) \sim t/L(t)$  cuando  $t \rightarrow \infty$  para alguna función  $L$  de variación lenta en  $\infty$ .

Así,

$$1 - P(t) \sim tL(1/t) \quad \text{cuando } t \downarrow 0.$$

Si se cumple (3.2.14) para  $\alpha \in [0, 1)$ , entonces

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{L^k(n)}{n^{\alpha k}} \mathbb{E}[N_n^k] = \frac{k!}{\Gamma^k(1 - \alpha)\Gamma(1 + \alpha k)}, \quad k \in \mathbb{N}.$$

Finalmente, si (i) de la Proposición 3.2.3 se cumple, entonces de (3.2.10) se sigue que, para  $\alpha = 1$  (tomando  $\Gamma(0) = 1$  por convención)

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{L^k(n)}{n^{\alpha k}} \mathbb{E}[N_n^k] = \frac{k!}{\Gamma(k + 1)} = 1, \quad k \in \mathbb{N}. \quad (3.2.13)$$

Por lo tanto, de (3.2.13) se concluye,

$$\mathbb{E}[N_n] \sim \frac{n}{L(n)} \sim a(n), \quad n \rightarrow \infty,$$

y con esto quedan demostradas las proposiciones 3.2.2 y 3.2.3.  $\square$

**Corolario 3.2.5** *Supongamos que se cumple*

$$q_n \sim \frac{L(n)}{n}, \quad n \rightarrow \infty. \quad (3.2.14)$$

Entonces  $\mathbb{E}[N_n] \sim \mathbb{E}[M_n] \sim n/m(n)$ , donde  $m(x) = \int_0^x \mathbb{P}(\xi > y) dy$  para  $x > 0$ .

Más aún,

$$\frac{m(n)N_n}{n} \xrightarrow{P} 1 \quad \text{y} \quad \frac{m(n)M_n}{n} \xrightarrow{P} 1.$$

En particular,  $M_n/N_n \xrightarrow{P} 1$ .

**Demostración.** Vemos que (3.2.14) implica que

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{m(\lambda x) - m(x)}{L(x)} = \log \lambda, \quad \lambda > 0.$$

En efecto, si definimos  $v(x) := \mathbb{P}(\xi > x)$  para  $x > 0$  y observando que  $v(x) \sim x^{-1}L(x)$  cuando  $x \rightarrow \infty$ , tenemos que

$$\begin{aligned} \frac{m(\lambda x) - m(x)}{L(x)} &= \frac{\int_0^{\lambda x} v(y)dy - \int_0^x v(y)dy}{L(x)} = \frac{\int_x^{\lambda x} v(y)dy}{L(x)} \\ &= \int_1^\lambda \frac{xzv(xz)}{L(xz)} \cdot \frac{L(xz)}{L(x)} \cdot \frac{dz}{z} \rightarrow \int_1^\lambda \frac{dz}{z} = \log \lambda, \quad x \rightarrow \infty. \end{aligned}$$

Luego, de acuerdo a la definición A.0.21,  $m$  pertenece a la clase II de Haan. En particular,  $m$  es una función de variación lenta en  $\infty$ . Luego, también se sigue que

$$\sum_{j=1}^n q_j \sim m(n), \quad n \rightarrow \infty. \quad (3.2.15)$$

En efecto, como  $m(\cdot)$  es una función de variación lenta en  $\infty$ , entonces

$$\sum_{j=1}^n q_j = \int_0^n \mathbb{P}(\xi > \lfloor y \rfloor) dy \sim m(n), \quad n \rightarrow \infty,$$

donde  $\lfloor x \rfloor$  denota al entero más grande menor o igual que  $x \in \mathbb{R}^+$ . Entonces, por el Teorema 3.1.8  $\mathbb{E}[M_n] \sim n/m(n)$  y  $m(n)M_n/n \xrightarrow{P} 1$ , y por la Proposición 3.2.3 se tiene que  $\mathbb{E}[N_n] \sim n/m(n)$  y  $m(n)N_n/n \xrightarrow{P} 1$ .  $\square$

**Proposición 3.2.6** *Definamos  $Y_n = n - S_{N_n-1}$  para  $n \in \mathbb{N}$  y supongamos que se cumple (3.2.14). Entonces, para  $\delta > 0$  fijo,*

$$\mathbb{E}[Y_n^\delta] = O\left(\frac{n^\delta L(n)}{m(n)}\right). \quad (3.2.16)$$

Además, para funciones  $a$  y  $b$  como las usadas en el Teorema 3.1.9, se tiene

$$\frac{b(n)Y_n}{na(n)} \xrightarrow{P} 0. \quad (3.2.17)$$

**Demostración.** Vemos que

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}[Y_n^\delta] &= \mathbb{E}[(n - S_{N_n-1})^\delta] = \sum_{k=1}^n \sum_{j=0}^{n-1} (n-j)^\delta \mathbb{P}(N_n = k, S_{k-1} = j) \\
&= \sum_{k=1}^n \sum_{j=0}^{n-1} (n-j)^\delta \mathbb{P}(\xi \geq n-j, S_{k-1} = j) \\
&= \sum_{j=0}^{n-1} \sum_{k=1}^{j+1} (n-j)^\delta \mathbb{P}(\xi \geq n-j) \mathbb{P}(S_{k-1} = j) \\
&= \left( \sum_{j=0}^{n-1} (n-j)^\delta \mathbb{P}(\xi \geq n-j) \right) \left( \sum_{i=0}^j \mathbb{P}(S_i = j) \right) \\
&= \sum_{j=0}^{n-1} (n-j)^\delta \mathbb{P}(\xi \geq n-j) u_j,
\end{aligned}$$

donde  $u_j = \sum_{i=0}^j \mathbb{P}(S_i = j)$  para  $j \in \mathbb{Z}^+$ . Por el Corolario 3.2.5, tenemos que  $\mathbb{E}[N_n] \sim n/m(n)$ . Por otra parte,  $\mathbb{E}[N_n] \sim \sum_{k=0}^n u_k$  para  $n \in \mathbb{N}$ . Así,  $\sum_{k=0}^n u_k \sim n/m(n)$  y por Teorema A.0.13 se obtiene,

$$U(s) := \sum_{n=0}^{\infty} s^n u_n \sim \frac{1}{m((1-s)^{-1})(1-s)}, \quad s \uparrow 1.$$

Por el mismo teorema

$$V(s) := \sum_{n=1}^{\infty} s^n n^\delta \mathbb{P}(\xi \geq n) \sim \frac{\Gamma(\delta)L((1-s)^{-1})}{(1-s)^\delta}, \quad s \uparrow 1.$$

Por lo tanto,

$$\sum_{n=1}^{\infty} s^n \mathbb{E}[Y_n^\delta] = U(s)V(s) \sim \frac{\Gamma(\delta)}{(1-s)^{\delta+1}} \cdot \frac{L((1-s)^{-1})}{m((1-s)^{-1})}, \quad s \uparrow 1.$$

Como la sucesión  $(Y_n, n \in \mathbb{N})$  es no decreciente, entonces  $(\mathbb{E}[Y_n^\delta], n \in \mathbb{N})$  también lo es; en particular, esta sucesión es últimamente monótona no decreciente. De esta manera, podemos aplicar el Teorema A.0.13 con  $c = \Gamma(\delta)$  y  $\rho = \delta + 1$  para obtener

$$\mathbb{E}[Y_n^\delta] \sim \frac{\Gamma(\delta)n^\delta}{\Gamma(\delta+1)} \cdot \frac{L(n)}{m(n)} = \frac{n^\delta L(n)}{\delta m(n)},$$

y así queda probado (3.2.16). Recordemos que  $\psi(x) = xm(c(x))$  y que  $c(x) \sim xL(c(x))$ . Como  $m(x)/L(x) \rightarrow \infty$ ,  $c(x) \rightarrow \infty$ , y además

$$\frac{\psi(x)}{c(x)} = \frac{xm(c(x))}{c(x)} \sim \frac{xm(c(x))}{xL(c(x))} = \frac{m(c(x))}{L(c(x))}, \quad x \rightarrow \infty,$$

de aquí se sigue que  $\psi(x)/c(x) \rightarrow \infty$  cuando  $x \rightarrow \infty$ . Por lo tanto,

$$\frac{b(x)}{a(x)} = \frac{b(x)}{x^{-1}b(x)c(b(x))} = \frac{x}{c(b(x))} \rightarrow \infty, \quad x \rightarrow \infty.$$

Esta última relación junto con  $m(x)/L(x) \rightarrow \infty$ , implican que

$$\begin{aligned} \frac{L(x)}{m(x)} \cdot \frac{b(x)}{a(x)} &= \frac{L(x)}{m(x)} \cdot \frac{x}{c(b(x))} \sim \frac{L(x)}{m(x)} \cdot \frac{x}{b(x)L(c(b(x)))} \\ &= \frac{L(x)}{m(x)} \cdot \frac{\psi(b(x))}{b(x)L(c(b(x)))} = \frac{L(x)}{m(x)} \cdot \frac{b(x)m(c(b(x)))}{b(x)L(c(b(x)))} \\ &\sim \frac{L(x)}{m(x)} \cdot \frac{m(c(b(x)))}{L(c(b(x)))}. \end{aligned}$$

Definamos  $v(x) = xa(x)/b(x)$ , entonces  $v(x) = x \cdot x^{-1}b(x)c(b(x))/b(x) = c(b(x))$ . Definamos también

$$J_1(n) := \frac{b(n)}{a(n)} \quad \text{y} \quad J_2(n) := \frac{L(n)}{m(n)} \cdot \frac{b(n)}{a(n)}, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Luego, para  $\delta \in (0, 1)$  fijo y para todo  $\varepsilon > 0$ , podemos usar la desigualdad de Markov y (3.2.16) para obtener,

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(Y_n > v(n)\varepsilon) &\leq \frac{\mathbb{E}[Y_n^\delta]}{v^\delta(n)\varepsilon^\delta} = \frac{O\left(\frac{n^\delta L(n)}{m(n)}\right)}{v^\delta(n)\varepsilon^\delta} \\ &= O\left(\frac{n^\delta \frac{L(n)}{m(n)}}{\varepsilon^\delta n^\delta \left(\frac{a(n)}{b(n)}\right)^{\delta-1} \cdot \frac{a(n)}{b(n)}}\right) = O\left(\frac{J_2(n)J_1(n)^{\delta-1}}{\varepsilon^\delta}\right) \rightarrow 0. \end{aligned}$$

Esto prueba (3.2.17) y la proposición. □

Vamos a suponer ahora que (3.1.5) se cumple, o de forma equivalente,

$$w(n) := \frac{1}{\mathbb{P}(\xi \geq n)} = q_n^{-1} \sim \frac{n^\alpha}{L(n)},$$

para algún  $\alpha \in (0, 1)$ . Sea  $T$  una variable aleatoria con distribución exponencial de parámetro 1 que es independiente de un subordinador  $(U_t, t \geq 0)$  de drift 0 con medida de Lévy dada por (3.1.7). De la Proposición 3.2.2 tenemos que  $N_n/w(n)$  converge en ley a una variable aleatoria  $\zeta_\alpha$  con distribución de Mittag-Leffler de parámetro  $\alpha$ . De la fórmula de los momentos del Teorema 2.2.11, se tiene que

$$\mathbb{E} \left[ \left( \int_0^T e^{-U_t} dt \right)^n \right] = \frac{n!}{\Gamma^n(1-\alpha)\Gamma(1+n\alpha)}, \quad n \in \mathbb{Z}^+,$$

lo que significa que

$$\int_0^T e^{-U_t} dt \stackrel{\mathcal{L}}{=} \zeta_\alpha.$$

Así,

$$\frac{N_n}{w(n)} \stackrel{\mathcal{L}}{\rightarrow} \int_0^T e^{-U_t} dt. \quad (3.2.18)$$

Sea  $\eta_\alpha$  una variable aleatoria con distribución beta de parámetros  $1-\alpha$  y  $\alpha$ . Luego, por el Teorema A.0.22, se sigue que  $(1 - S_{N_n-1}/n)^\alpha \stackrel{\mathcal{L}}{\rightarrow} \eta_\alpha^\alpha$ . Se puede verificar que

$$\mathbb{E}[\eta_\alpha^{n\alpha}] = \frac{\Gamma(\alpha(n-1)+1)}{\Gamma(1-\alpha)\Gamma(\alpha n+1)}, \quad n \in \mathbb{Z}^+.$$

De (2.2.12), se sigue que  $e^{-U_T}$  tiene la misma sucesión de momentos. Por lo tanto, como la distribución de  $e^{-U_T}$  está concentrada en  $[0, 1]$ , ésta coincide con la distribución de  $\eta_\alpha^\alpha$ . Así,

$$\left( 1 - \frac{S_{N_n-1}}{n} \right)^\alpha \stackrel{\mathcal{L}}{\rightarrow} e^{-U_T}. \quad (3.2.19)$$

**Proposición 3.2.7** *Supongamos que (3.1.5) se cumple. Entonces*

$$\left( \frac{w(n - S_{N_n-1})}{w(n)}, \frac{N_n}{w(n)} \right) \stackrel{\mathcal{L}}{\rightarrow} \left( e^{-U_T}, \int_0^T e^{-U_t} dt \right),$$

donde  $(U_t, t \geq 0)$  es un subordinador sin drift con medida de Lévy (3.1.7).

**Demostración.** De acuerdo a la Proposición 2.2.11 es suficiente verificar que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\mathbb{E}[w^i(n - S_{N_{n-1}})N_n^j]}{w^{i+j}(n)} = \frac{j!\Gamma(\alpha(i-1)+1)}{\Gamma^{j+1}(1-\alpha)\Gamma(\alpha(i+j)+1)}, \quad i, j \in \mathbb{Z}^+. \quad (3.2.20)$$

Por la Proposición 3.2.2, tenemos que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{L^k(n)}{n^{\alpha k}} \mathbb{E}[N_n^k] = \frac{k!}{\Gamma^k(1-\alpha)\Gamma(1+\alpha k)}, \quad k \in \mathbb{N}. \quad (3.2.21)$$

Para  $i = 0$ , (3.2.20) se sigue de (3.2.21). Para  $i \in \mathbb{N}$ , (3.2.20) se puede verificar como sigue,

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[w^i(n - S_{N_{n-1}})N_n^j] &= \sum_{k=1}^n \sum_{l=0}^{n-1} w^i(n-l)k^j \mathbb{P}(N_n = k, S_{k-1} = l) \\ &= \sum_{k=1}^n \left( w^i(n) \mathbb{P}(N_n = k, S_{k-1} = 0) + \sum_{l=1}^{n-1} w^i(n-l)k^j \mathbb{P}(N_n = k, S_{k-1} = l) \right) \\ &= w^i(n) \mathbb{P}(\xi \geq n) + \sum_{k=1}^n \sum_{l=1}^{n-1} w^i(n-l)k^j \mathbb{P}(N_n = k, S_{k-1} = l) \\ &= w^i(n) \mathbb{P}(\xi \geq n) + \sum_{l=1}^{n-1} w^i(n-l) \mathbb{P}(\xi \geq n-l) \sum_{k=2}^{l+1} k^j \mathbb{P}(S_{k-1} = l) \\ &= w^i(n) \mathbb{P}(\xi \geq n) + \sum_{l=1}^{n-1} w^{i-1}(n-l) \sum_{k=2}^{l+1} k^j \mathbb{P}(S_{k-1} = l). \end{aligned} \quad (3.2.22)$$

Vamos a definir ahora  $f(x) := 0$  en  $[0, 1)$  y  $f(x) = (k+1)^j$  para  $x \in [k, k+1)$  para  $k \in \mathbb{N}$ , y sea  $F(t) = \int_0^t f(x)dx$ . Entonces,

$$\sum_{l=1}^{n-1} \sum_{k=2}^{l+1} k^j \mathbb{P}(S_{k-1} = l) = \sum_{k=1}^{n-1} (k+1)^j \mathbb{P}(N_n > k) = \mathbb{E}[F(N_n)]. \quad (3.2.23)$$

En efecto, tenemos que

$$\begin{aligned} \sum_{l=1}^{n-1} \sum_{k=2}^{l+1} k^j \mathbb{P}(S_{k-1} = l) &= \sum_{l=1}^{n-1} \sum_{k=1}^l (k+1)^j \mathbb{P}(S_k = l) = \sum_{k=1}^{n-1} (k+1)^j \sum_{l=1}^{n-1} \mathbb{P}(S_k = l) \\ &= \sum_{k=1}^{n-1} (k+1)^j \mathbb{P}(S_k < n) = \sum_{k=1}^{n-1} (k+1)^j \mathbb{P}(N_n > k), \end{aligned}$$

y de esta manera, se obtiene la primera igualdad. Para la segunda igualdad, vemos que

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}[F(N_n)] &= \sum_{k=1}^{n-1} F(k) \mathbb{P}(N_n = k) = \sum_{k=1}^{n-1} \int_0^k f(x) dx \mathbb{P}(N_n = k) \\
&= \sum_{k=1}^{n-1} \sum_{i=1}^{k-1} \int_i^{i+1} (i+1)^j dx \mathbb{P}(N_n = k) \\
&= \sum_{i=1}^{n-1} (i+1)^j \sum_{k=i+1}^{n-1} \mathbb{P}(N_n = k) = \sum_{k=1}^{n-1} (k+1)^j \mathbb{P}(N_n > k),
\end{aligned}$$

así, se obtiene la segunda igualdad y por lo tanto se sigue (3.2.23).

Luego, por el Teorema de Karamata,  $F(t) \sim (j+1)^{-1} t^{j+1}$ . Como  $N_n \rightarrow \infty$  c.s. cuando  $n \rightarrow \infty$  y  $(N_n/w(n))^{j+1} \xrightarrow{\mathcal{L}} \zeta_\alpha^{j+1}$ , tenemos

$$\frac{F(N_n)}{w^{j+1}(n)} \sim \frac{1}{j+1} \cdot \left( \frac{N_n}{w(n)} \right)^{j+1} \xrightarrow{\mathcal{L}} \frac{\zeta_\alpha^{j+1}}{j+1}. \quad (3.2.24)$$

Entonces, por (3.2.21) se obtiene

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{E} \left[ \left( \frac{N_n}{w(n)} \right)^{j+2} \right] = \mathbb{E}[\zeta_\alpha^{j+2}] < \infty.$$

Por lo tanto, la sucesión  $(F(N_n)/w^{j+1}(n), n \in \mathbb{N})$  es uniformemente integrable. Luego, aplicando esperanzas a ambos lados de (3.2.24) se tiene

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}[F(N_n)] &\sim \frac{1}{j+1} \cdot \mathbb{E}[\zeta_\alpha^{j+1}] w^{j+1}(n) \\
&\sim \frac{(j+1)!}{(j+1)\Gamma^{j+1}(1-\alpha)\Gamma(1+(j+1)\alpha)} \cdot \frac{n^{\alpha(j+1)}}{L^{j+1}(n)} \\
&= \frac{j!}{\Gamma^{j+1}(1-\alpha)\Gamma(1+(j+1)\alpha)} \cdot \frac{n^{\alpha(j+1)}}{L^{j+1}(n)}. \quad (3.2.25)
\end{aligned}$$

Si  $i = 1$  en (3.2.22), entonces

$$\mathbb{E}[w(n - S_{N_n-1})N_n^j] \sim \frac{j!}{\Gamma^{j+1}(1-\alpha)\Gamma(1+(j+1)\alpha)} \cdot \frac{n^{\alpha(j+1)}}{L^{j+1}(n)}.$$



Por lo tanto, se sigue (3.2.20) debido a que

$$\frac{1}{w^{j+1}(n)} \sim \frac{L^{j+1}(n)}{n^{\alpha(j+1)}}, \quad n \rightarrow \infty.$$

Supongamos ahora que  $i \geq 2$ . Como

$$w^{i-1}(n) \sim \frac{n^{\alpha(i-1)}}{L^{i-1}(n)} = n^{\alpha(i-1)+1-1} L^{-i+1}(n),$$

luego, haciendo  $\rho = 1 + \alpha(j+1)$ ,  $c = \Gamma(\rho)$ , y aprovechando que  $L^{1-i}$  es una función de variación lenta en  $\infty$ , y como  $c\rho > 0$  y  $w^{i-1}$  es últimamente monótona, podemos usar el Teorema A.0.13 para obtener

$$W(s) := \sum_{n=1}^{\infty} s^n w^{i-1}(n) \sim \frac{\Gamma(1 + \alpha(i-1))}{(1-s)^{1+\alpha(i-1)} L^{i-1}((1-s)^{-1})}, \quad s \uparrow 1.$$

Ahora, haciendo  $\rho = 1 + \alpha(j+1)$ ,  $c = \Gamma(\rho)$  y

$$l(n) = \frac{j!}{\Gamma^{j+1}(1-\alpha)\Gamma(1+(j+1)\alpha)} \cdot \frac{1}{L^{j+1}(n)},$$

usamos el mismo teorema para implicar que

$$\begin{aligned} R(s) &:= \sum_{n=1}^{\infty} \left( \sum_{k=2}^{n+1} k^j \mathbb{P}(S_{k-1} = l) \right) \\ &\sim \frac{j!}{\Gamma^{j+1}(1-\alpha)} \cdot \frac{1}{(1-s)^{\alpha(j+1)} L^{j+1}((1-s)^{-1})}, \quad s \uparrow 1. \end{aligned}$$

Por lo tanto,

$$W(s)R(s) \sim \frac{\Gamma(1 + \alpha(i-1))}{\Gamma^{j+1}(1-\alpha)} \cdot \frac{j!}{(1-s)^{1+\alpha(i+j)} L^{i+j}((1-s)^{-1})}, \quad s \uparrow 1.$$

Como la sucesión  $\{w^{i-1}(n)\}_{n \in \mathbb{N}}$  es no decreciente, entonces

$$\left\{ \sum_{l=1}^{n-1} w^{i-1}(n-l) \sum_{k=2}^{l+1} k^j \mathbb{P}(S_{k-1} = l), \quad n \geq 2 \right\}$$

es no decreciente también. Luego, tomando  $\rho = 1 + \alpha(i+j)$ ,  $c = \Gamma(1 + \alpha(i-1))/\Gamma^{j+1}(1-\alpha)$  y

$$l(n) = \frac{j!}{\Gamma^{j+1}(1-\alpha)} \cdot \frac{1}{L^{i+j}(n)},$$

podemos usar el Teorema A.0.13 y se obtiene

$$\sum_{l=1}^{n-1} w^{i-1}(n-l) \sum_{k=2}^{l+1} k^j \mathbb{P}(S_{k-1} = l) \sim \frac{\Gamma(1 + \alpha(i-1))j!}{\Gamma^{j+1}(1-\alpha)\Gamma(1 + \alpha(i+j))} \cdot \frac{n^{\alpha(i+j)}}{L^{i+j}(n)}.$$

Por lo tanto,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\mathbb{E}[w^i(n - S_{N_{n-1}})N_n^j]}{w^{i+j}(n)} = \frac{j!\Gamma(\alpha(i-1) + 1)}{\Gamma^{j+1}(1-\alpha)\Gamma(\alpha(i+j) + 1)}, \quad i, j \in \mathbb{Z}^+,$$

y así, queda demostrado el teorema. □

### 3.3. Demostración de los Resultados Principales sobre $M_n$

#### 3.3.1. Demostración del Teorema 3.1.6

Para  $k \in \mathbb{N}$ , sea  $a_k(n) = \mathbb{E}[M_n^k]$  y  $b_k(n) = \mathbb{E}[N_n^k]$ . Para  $x \geq 0$ , definamos la función

$$\Phi(x) = \frac{\Gamma(1-\alpha)\Gamma(\alpha x + 1)}{\Gamma(\alpha(x-1) + 1)} - 1 = \alpha x B(\alpha x, 1-\alpha) - 1,$$

donde  $B(\cdot, \cdot)$  es la función beta. Mediante el cambio de variable  $y = e^{-u/\alpha}$ , podemos notar que

$$B(\alpha x, 1-\alpha) = \int_0^1 y^{\alpha x - 1} (1-y)^{-\alpha} dy = \alpha^{-1} \int_0^\infty e^{-xu} (1 - e^{-u/\alpha})^{-\alpha} du,$$

luego, usando integración por partes, vemos que

$$\int_0^\infty (1 - e^{-xu}) \frac{e^{-u/\alpha}}{(1 - e^{-u/\alpha})^{\alpha+1}} du = -(1 - e^{-xy})(1 - e^{-y/\alpha})^{-\alpha} \Big|_0^\infty \quad (3.3.1)$$

$$\begin{aligned} &+ \int_0^\infty x e^{-xu} (1 - e^{-u/\alpha})^{-\alpha} du \\ &= \int_0^\infty x e^{-xu} (1 - e^{-u/\alpha})^{-\alpha} du - 1 = \Phi(x). \end{aligned} \quad (3.3.2)$$

Observe que la primera integral de (3.3.1) es el exponente de Laplace de un subordinador sin drift con medida de Lévy (3.1.7). Si se cumple (3.1.5), entonces debemos probar que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{L^k(n)}{n^{\alpha k}} a_k(n) = \frac{k!}{\Phi(1) \cdots \Phi(k)} = a_k, \quad k \in \mathbb{N}. \quad (3.3.3)$$

De esta manera, esto implicará que

- (i)  $a_k = \mathbb{E}[\eta^k]$ ,  $k \in \mathbb{N}$ , donde  $\eta$  es una variable aleatoria con distribución correspondiente a la de la funcional exponencial de un subordinador sin drift con medida de Lévy  $\nu$ , y
- (ii) los momentos  $(a_n, n \in \mathbb{N})$  determinan de manera única la ley de  $\eta$ .

La parte (i) fue establecida y demostrada en el Capítulo 2. Así, de (i) y (ii) se seguirá (3.1.6). Del Lema 3.1.4 se sigue que

$$a_1(n) = 1 + r_n \sum_{i=1}^{n-1} a_1(n-i)p_i, \quad (3.3.4)$$

y para  $k \geq 2$ , se tiene

$$\begin{aligned} a_k(n) &= D_k(a_1(n), \dots, a_{k-2}(n)) + ka_{k-1}(n) + r_n \sum_{i=1}^{n-1} a_k(n-i)p_i \\ &= d_k(n) + r_n \sum_{i=1}^{n-1} a_k(n-i)p_i, \end{aligned} \quad (3.3.5)$$

donde  $d_k(n) := D_k(a_k(n), \dots, a_{k-2}(n)) + ka_{k-1}(n)$ ,  $D_k(\cdot)$  denota la función afín de  $k-2$  variables positivas de la forma

$$D_k(x_1, \dots, x_{k-2}) = \gamma_{0,k} + \sum_{i=1}^{k-2} \gamma_{i,k} x_i$$

con coeficientes  $\gamma_{i,k} \in \mathbb{R}$ ,  $i \in \{0, 1, \dots, k-2\}$  y  $r_n = 1/(p_1 + \cdots + p_{n-1})$ . En primer lugar, vemos que

$$M_n^j \stackrel{\mathcal{L}}{=} (M_{n-I_n} + 1)^j = \sum_{l=0}^j \binom{j}{l} M_{n-I_n}^l, \text{ para } j \in \mathbb{N}, \quad j \in \mathbb{N}. \quad (3.3.6)$$

En segundo lugar, se tiene que para  $j \in \mathbb{N}$ ,

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[M_{n-I_n}^j] &= \sum_{i=1}^{n-1} \mathbb{E}[M_{n-i}^j] \mathbb{P}(I_n = i) = \sum_{i=1}^{n-1} \mathbb{E}[M_{n-i}^j] \frac{p_i}{p_1 + \cdots + p_{n-1}} \\ &= r_n \sum_{i=1}^{n-1} \mathbb{E}[M_{n-i}^j] p_i. \end{aligned} \quad (3.3.7)$$

De manera similar a lo que se hizo en la demostración del Lema 3.2.4 para el cálculo de  $b_k(n)$ , vamos a usar inducción sobre  $k$  para probar (3.3.5). Supongamos que (3.3.5) se cumple para  $k \in \{1, \dots, j-1\}$ . Luego, si  $k = j$ , y usando las ecuaciones (3.3.6) y (3.3.7), tenemos que

$$\begin{aligned} a_j(n) &= \mathbb{E}[M_n^j] = \sum_{l=0}^j \binom{j}{l} \mathbb{E}[M_{n-I_n}^j] = \sum_{l=0}^{j-2} \binom{j}{l} \mathbb{E}[M_{n-I_n}^l] + j \mathbb{E}[M_{n-I_n}^{j-1}] + \mathbb{E}[M_{n-I_n}^j] \\ &= 1 + j(a_1(n) - 1) + r_n \sum_{l=2}^{j-2} \binom{j}{l} (a_l(n) - D_l(a_1(n), \dots, a_{l-2}(n)) - la_{l-1}(n)) \\ &\quad + j(a_{j-1}(n) - D_{j-1}(a_1(n), \dots, a_{j-3}(n)) - (j-1)a_{j-2}(n)) + r_n \sum_{i=1}^{n-1} \mathbb{E}[M_{n-i}^j] p_i \\ &= 1 + j(a_1(n) - 1) + r_n \sum_{l=2}^{j-2} \binom{j}{l} (a_l(n) - D_l(a_1(n), \dots, a_{l-2}(n)) - la_{l-1}(n)) \\ &\quad - j(D_{j-1}(a_1(n), \dots, a_{j-3}(n)) + (j-1)a_{j-2}(n)) + ja_{j-1}(n) + r_n \sum_{i=1}^{n-1} a_k(n-i)p_i \\ &= D_j(a_1(n), \dots, a_{j-2}(n)) + ja_{j-1}(n) + r_n \sum_{i=1}^{n-1} a_k(n-i)p_i. \end{aligned}$$

Por lo tanto, (3.3.5) queda demostrado. En la prueba del Lema 3.2.4 ya se obtuvo  $b_j(n)$ , la cual está dada por (3.2.4). Para demostrar (3.3.3) vamos a usar inducción sobre  $k$ . Supongamos que (3.3.3) se cumple para  $k \in \{1, 2, \dots, j-1\}$ . Definamos

$$\beta_1 = \frac{1}{1 - b_1} \quad \text{y} \quad \beta_l = \frac{1}{b_{l-1} - l^{-1}b_l} \prod_{i=1}^{l-1} \frac{b_{i-1}}{b_{i-1} - i^{-1}b_i}, \quad l \in \{2, 3, \dots\},$$

donde  $b_l = l! / (\Gamma(1 - \alpha)^l \Gamma(1 + \alpha l))$ ,  $l \in \mathbb{N}$ , y notemos que

$$a_{l-1} - \beta_l (b_{l-1} - l^{-1}b_l) = 0, \quad l \in \mathbb{N}. \quad (3.3.8)$$

En efecto, se tiene que

$$\begin{aligned}
 \beta_l(b_{l-1} - l^{-1}b_l) &= \left( \frac{1}{b_{l-1} - l^{-1}b_l} \prod_{i=1}^{l-1} \frac{b_{i-1}}{b_{i-1} - i^{-1}b_i} \right) (b_{l-1} - l^{-1}b_l) \\
 &= \frac{1}{1 - b_1} \cdot \frac{b_1}{b_1 - \frac{b_2}{2}} \cdot \frac{b_2}{b_2 - \frac{b_3}{3}} \cdots \frac{b_{l-1}}{b_{l-2} - \frac{b_{l-1}}{l-1}} \\
 &= \frac{1}{\frac{1}{b_1}(1 - b_1)} \cdot \frac{1}{\frac{1}{b_2} \left( b_1 - \frac{b_2}{2} \right)} \cdots \frac{1}{\frac{1}{b_{l-1}} \left( b_{l-2} - \frac{b_{l-1}}{l-1} \right)} \\
 &= \frac{1}{\Gamma(1 - \alpha)\Gamma(1 + \alpha) - 1} \cdots \frac{1}{\frac{\Gamma(1 - \alpha)\Gamma(1 + (l-1)\alpha)}{\Gamma(1 + l\alpha)} - 1} \\
 &= \frac{(l-1)!}{\Phi(1) \cdots \Phi(l-1)} := a_{l-1}.
 \end{aligned}$$

Supongamos que existe  $\varepsilon > 0$  tal que  $a_j(n) > (\beta_j + \varepsilon)b_j(n)$  para infinitos  $n$ . Eligiendo  $\varepsilon$  pequeño podemos tener  $a_j(n) > (\beta_j + \varepsilon)b_j(n) + c$  para infinitos  $n \in \mathbb{N}$  para cualquier número  $c > 0$  fijo. Así, podemos definir  $n_c = \inf\{n \geq 1 : a_j(n) > (\beta_j + \varepsilon)b_j(n) + c\}$ . Entonces, por definición de  $n_c$ ,

$$a_j(n) \leq (\beta_j + \varepsilon)b_j(n) + c, \quad \text{para todo } n \in \{1, 2, \dots, n_c - 1\}. \quad (3.3.9)$$

Luego, tenemos que

$$\begin{aligned}
 (\beta_j + \varepsilon)b_j(n_c) + c &< a_j(n_c) = d_j(n_c) + r_{n_c} \sum_{i=1}^{n_c-1} a_j(n_c - i)p_i, \\
 &\leq d_j(n_c) + c + (\beta_j + \varepsilon)r_{n_c} \sum_{i=1}^{n_c-1} b_j(n_c - i)p_i \\
 &= D_j(a) + ja_{j-1}(n_c) + c + (\beta_j + \varepsilon)r_{n_c} (b_j(n_c) - D_j(b) - jb_{j-1}(n_c)) \\
 &\quad - (\beta_j + \varepsilon)(b_j(n_c) - D_j(b) - jb_{j-1}(n_c)) \\
 &\quad + (\beta_j + \varepsilon)(b_j(n_c) - D_j(b) - jb_{j-1}(n_c)) \\
 &= D_j(a) + ja_{j-1}(n_c) + c \\
 &\quad + (\beta_j + \varepsilon)(r_{n_c} - 1)(b_j(n_c) - D_j(b) - jb_{j-1}(n_c)) \\
 &\quad + (\beta_j + \varepsilon)b_j(n_c) - (\beta_j + \varepsilon)(D_j(b) + jb_{j-1}(n_c)),
 \end{aligned}$$

la primera desigualdad es por definición de  $n_c$ , la primera igualdad es por (3.3.5) y la segunda desigualdad se sigue de (3.3.9). Después de hacer algunos pasos algebraicos y reagrupando términos, se obtiene

$$0 < D_j(a) + ja_{j-1}(n_c) + (\beta_j + \varepsilon)(r_{n_c} - 1)(b_j(n_c) - D_j(b) - jb_{j-1}(n_c)) - (\beta_j + \varepsilon)(D_j(b) + jb_{j-1}(n_c)). \quad (3.3.10)$$

Aquí, hemos usado las abreviaciones

$$D_j(a) = D_j(a_1(n_c), \dots, a_{j-2}(n_c)) \quad \text{y} \quad D_j(b) = D_j(b_1(n_c), \dots, b_{j-2}(n_c))$$

por conveniencia.

De (3.1.5), cuando  $n \rightarrow \infty$ , se sigue que

$$r_n - 1 = \frac{1}{p_1 + \dots + p_{n-1}} - 1 = \frac{\sum_{k=n}^{\infty} p_k}{\sum_{k=1}^{n-1} p_k} \sim n^{-\alpha} L(n),$$

esto se sigue por hipótesis y también del hecho de que  $\sum_{k=1}^{n-1} p_k \sim 1$  cuando  $n \rightarrow \infty$ . Aprovechando esto y dividiendo por  $z(c) = n_c^{(j-1)\alpha} / L^{j-1}(n_c)$  la última desigualdad y haciendo  $c \rightarrow \infty$  (esto implica que  $n_c \rightarrow \infty$ ) y además usando que <sup>2</sup>

$$\lim_{c \rightarrow \infty} \frac{D_j(a_1(n_c), \dots, a_{j-2}(n_c))}{z(c)} = 0 \quad \text{y} \quad \lim_{c \rightarrow \infty} \frac{a_{j-1}(n_c)}{z(c)} = a_{j-1},$$

se llega a que

$$0 \leq ja_{j-1} + (\beta_j + \varepsilon)b_j - (\beta_j + \varepsilon)jb_{j-1}. \quad (3.3.11)$$

En efecto, trabajando con el tercer término de (3.3.10), vemos que

$$\frac{r_{n_c} - 1}{z(c)} = \frac{\frac{L(n_c)}{n_c^\alpha}}{\frac{n_c^{(j-1)\alpha}}{L^{j-1}(n_c)}} = \frac{L^j(n_c)}{n_c^{j\alpha}}.$$

Luego, se tiene que

$$\begin{aligned} (r_{n_c} - 1)b_j(n_c) &\sim \frac{L^j(n_c)}{n_c^{j\alpha}}b_j(n_c) \rightarrow b_j, \quad c \rightarrow \infty, \\ \frac{L^j(n_c)}{n_c^{j\alpha}}D_j(b) &\rightarrow 0, \quad c \rightarrow \infty, \\ j \frac{L^j(n_c)}{n_c^{j\alpha}}b_{j-1}(n_c) &= j \frac{L(n_c)}{n_c^\alpha} \frac{L^{(j-1)}(n_c)}{n_c^{(j-1)\alpha}}b_{j-1}(n_c) \rightarrow 0, \quad c \rightarrow \infty, \end{aligned}$$

<sup>2</sup>Esto último también se cumple para las  $D_j(b_1(n_c), \dots, b_{j-2}(n_c))$ 's y  $b_j(n_c)$ 's.

esto último es gracias a que  $L(n_c)/n_c^\alpha \rightarrow 0$  cuando  $c \rightarrow \infty$ . Por tanto, se sigue (3.3.11). Como la función  $\Phi$  es positiva para todo  $x > 0$ , entonces

$$0 < \frac{\Phi(j)jb_{j-1}}{b_j} - 1 = \frac{jb_{j-1} - b_j}{b_j},$$

esto implica que  $jb_{j-1} - b_j > 0$ . Por lo tanto, usando (3.3.11), llegamos a la desigualdad

$$\varepsilon(jb_{j-1} - b_j) \leq j(a_{j-1} - \beta_j(b_{j-1} - j^{-1}b_j)) = 0,$$

esta última cantidad es 0 debido a (3.3.8), pero esto es una contradicción. Así, hemos verificado que

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{a_j(n)}{b_j(n)} \leq \beta_j.$$

Análogamente, se puede obtener

$$\beta_j \leq \liminf_{n \rightarrow \infty} \frac{a_j(n)}{b_j(n)}.$$

En efecto, supongamos que existe  $\varepsilon' > 0$  tal que  $\beta_j - \varepsilon' > 0$  y  $a_j(n) < (\beta_j - \varepsilon')b_j(n)$  para infinitos  $n \in \mathbb{N}$ . Como en el caso anterior, podemos elegir  $\varepsilon' > 0$  pequeño de tal manera que  $a_j(n) < (\beta_j - \varepsilon')b_j(n) - c$  para infinitos  $n \in \mathbb{N}$  para cualquier  $c > 0$  fijo. Así, podemos definir  $m_c := \inf\{n \geq 1 : a_j(n) < (\beta_j - \varepsilon')b_j(n) - c\}$ . Entonces, por definición de  $m_c$ ,

$$a_j(n) \geq (\beta_j - \varepsilon')b_j(n) - c \quad \text{para todo } n \in \{1, 2, \dots, m_c - 1\}. \quad (3.3.12)$$

Luego, tenemos que

$$\begin{aligned} (\beta_j - \varepsilon')b_j(m_c) - c &> a_j(m_c) = d_j(m_c) + r_{m_c} \sum_{i=1}^{m_c-1} a_j(m_c - i)p_i, \\ &\geq d_j(m_c) - c + (\beta_j - \varepsilon')r_{m_c} \sum_{i=1}^{m_c-1} b_j(m_c - i)p_i \\ &= D_j(a) + ja_{j-1}(m_c) - c + (\beta_j - \varepsilon')r_{m_c}(b_j(m_c) - D_j(b) - jb_{j-1}(m_c)) \\ &\quad - (\beta_j - \varepsilon')(b_j(m_c) - D_j(b) - jb_{j-1}(m_c)) \\ &\quad + (\beta_j - \varepsilon')(b_j(m_c) - D_j(b) - jb_{j-1}(m_c)) \\ &= D_j(a) + ja_{j-1}(m_c) - c \\ &\quad + (\beta_j - \varepsilon')(r_{m_c} - 1)(b_j(m_c) - D_j(b) - jb_{j-1}(m_c)) \\ &\quad + (\beta_j - \varepsilon')b_j(m_c) - (\beta_j - \varepsilon')(D_j(b) + jb_{j-1}(m_c)), \end{aligned}$$

Así, nos queda la desigualdad

$$\begin{aligned} & D_j(a) + ja_{j-1}(m_c) + (\beta_j - \varepsilon')(r_{m_c} - 1)(b_j(m_c) - D_j(b) - jb_{j-1}(m_c)) \\ & - (\beta_j - \varepsilon')(D_j(b) + jb_{j-1}(m_c)) < 0. \end{aligned} \quad (3.3.13)$$

Luego, definamos  $w(c) := m_c^{(j-1)\alpha} / L^{j-1}(m_c)$ . Así, dividiendo (3.3.13) por  $w(c)$  y haciendo  $c \rightarrow \infty$  (y por lo tanto  $m_c \rightarrow \infty$ ), de manera análoga como en el caso anterior, llegamos a que

$$ja_{j-1} + (\beta_j - \varepsilon')b_j - (\beta_j - \varepsilon')jb_{j-1} < 0,$$

lo cual es equivalente a  $0 = j(a_{j-1} - \beta_j(b_{j-1} - j^{-1}b_j)) < \varepsilon'(b_j - jb_{j-1})$ , que es, de nuevo, una contradicción. De esta manera, llegamos a que

$$\beta_j \leq \liminf_{n \rightarrow \infty} \frac{a_j(n)}{b_j(n)}.$$

Por lo tanto,  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_j(n)/b_j(n) = \beta_j$ , es decir,

$$a_j(n) \sim \beta_j b_j(n) \sim \beta_j b_j \frac{n^{j\alpha}}{L^j(n)} = a_j \frac{n^{j\alpha}}{L^j(n)},$$

y con esto, queda demostrado el teorema.

En la siguiente sección se da una demostración alternativa del Teorema 3.1.6 usando un enfoque probabilístico. Para hacer esto, nos será de gran utilidad el siguiente lema cuya prueba se da a continuación.

**Lema 3.3.1** *Para  $n \in \mathbb{N}$  fijo y cualquier  $i \in \mathbb{N}$ , se tienen las siguientes igualdades*

$$\hat{M}_n(i) \stackrel{\mathcal{L}}{=} M_n, \quad (3.3.14)$$

y

$$M_n - N_n + 1 = \hat{M}_{Y_n}(N_n) \stackrel{\mathcal{L}}{=} M'_{Y_n}, \quad (3.3.15)$$

donde  $(M'_n, n \geq 1)$  tiene la misma ley que  $(M_n, n \geq 1)$  y es independiente de  $(N_n, Y_n)$ , además,  $\hat{R}_0^{(j)}(i) = 0$  y

$$\hat{R}_k^{(n)}(i) = \hat{R}_{k-1}^{(n)}(i) + \xi_{i+k} 1_{\{\hat{R}_{k-1}^{(n)}(i) + \xi_{i+l+1} < n\}} \quad y \quad \hat{M}_n(i) = \sum_{l=0}^{\infty} 1_{\{\hat{R}_l^{(n)}(i) + \xi_{i+l+1} < n\}}, \quad k \in \mathbb{N}.$$



**Demostración.** Sea  $i \in \mathbb{N}$ , entonces

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(\hat{M}_n(i) = k) &= \mathbb{P}\left(\sum_{l=0}^{\infty} 1_{\{\hat{R}_l^{(n)}(i) + \xi_{i+l+1} < n\}} = k\right) = \mathbb{P}\left(\sum_{l=0}^{\infty} 1_{\{R_{l+i}^{(n)} + \xi_{i+l+1} < n\}} = k\right) \\ &= \mathbb{P}\left(\sum_{l=0}^{\infty} 1_{\{R_l^{(n)} + \xi_{l+1} < n\}} = k\right) = \mathbb{P}(M_n = k). \end{aligned}$$

en la tercera igualdad se aplicó la propiedad de Markov al tiempo  $i$ . Esto demuestra (3.3.14). Ahora procedamos a probar las igualdades (3.3.15).

$$\begin{aligned} M_n &= \sum_{l=0}^{\infty} 1_{\{R_l^{(n)} + \xi_{l+1} < n\}} = \sum_{l=0}^{N_n-2} 1 + \sum_{l=N_n}^{\infty} 1_{\{R_l^{(n)} + \xi_{l+1} < n\}} \\ &= N_n - 1 + \sum_{l=0}^{\infty} 1_{\{R_{l+N_n}^{(n)} + \xi_{l+N_n+1} < n\}} = N_n - 1 + \sum_{l=0}^{\infty} 1_{\{\hat{R}_l^{(n)}(N_n) + \xi_{N_n+l+1} < n\}} \\ &= N_n - 1 + \sum_{l=0}^{\infty} 1_{\{\hat{R}_l^{(n-S_{N_n-1})}(N_n) + \xi_{N_n+l+1} < n-S_{N_n-1}\}} = N_n - 1 + \hat{M}_{Y_n}(N_n), \end{aligned}$$

en la segunda igualdad, el  $(N_n - 1)$ -ésimo término desaparece debido a que  $S_{N_n} \geq n$ ; mientras que la quinta igualdad se sigue gracias a que la caminata aleatoria con barrera  $\hat{R}^{(n)}$  no salta en el intervalo  $[N_n - 1, N_n)$ . Así, la primera igualdad de (3.3.15) queda probada. Sea  $k \in \mathbb{N}$ , entonces

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(\hat{M}_{Y_n}(N_n) = k) &= \sum_{i=1}^n \sum_{j=0}^{n-1} \mathbb{P}(\hat{M}_{Y_n}(i) = k, N_n = i, S_{N_n-1} = j) \\ &= \sum_{i=1}^n \sum_{j=0}^{n-1} \mathbb{P}\left(\sum_{l=0}^{\infty} 1_{\{\hat{R}_l^{(n-j)}(i) + \xi_{i+l+1} < n-j\}} = k, N_n = i, S_{N_n-1} = j\right). \end{aligned} \tag{3.3.16}$$

Vemos que la sucesión  $\{\hat{R}_l^{(n-j)}(i) + \xi_{i+l+1}\}_{l \geq 0}$  es independiente de  $1_{\{N_n=i, S_{N_n-1}=j\}}$  y tiene la misma ley que  $\{(R_l^{(n-j)})' + \xi'_{l+1}\}_{l \geq 0}$  que se puede construir a partir de  $\{\xi'_k\}_{k \geq 1}$  que es una copia independiente de  $\{\xi_k\}_{k \geq 1}$ . Por lo dicho en esto último, tenemos que

(3.3.16) se puede escribir como

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(\hat{M}_{Y_n}(N_n) = k) &= \sum_{i=1}^n \sum_{j=0}^{n-1} \mathbb{P}\left(\sum_{l=0}^{\infty} 1_{\{(R_l^{(n-j)})' + \xi'_{l+1} < n-j\}} = k\right) \mathbb{P}(N_n = i, S_{N_{n-1}} = j) \\ &= \mathbb{P}\left(\sum_{l=0}^{\infty} 1_{\{(R_l^{(n-S_{N_{n-1}})})' + \xi'_{l+1} < n-S_{N_{n-1}}\}} = k\right) = \mathbb{P}(M'_{n-S_{N_{n-1}}} = k). \end{aligned}$$

Esto demuestra el Lema 3.3.1.  $\square$

### 3.3.2. Demostración Alternativa del Teorema 3.1.6

Recordemos que  $Y_n = n - S_{N_{n-1}}$  para  $n \in \mathbb{N}$ . Tenemos que la sucesión de distribuciones de  $\{M_n/\mathbb{E}[M_n], n \geq 1\}$  es tensa ya que esta sucesión es uniformemente integrable. En efecto, de acuerdo a

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{L(n)^k}{n^{\alpha k}} \mathbb{E}[M_n^k] = \frac{k!}{\Phi(1) \dots \Phi(k)} := a_k, \quad k \in \mathbb{N},$$

tenemos que

$$\mathbb{E}\left[\left(\frac{M_n}{\mathbb{E}[M_n]}\right)^k\right] = \frac{\mathbb{E}[M_n^k]}{(\mathbb{E}[M_n])^k} \sim \frac{a_k \frac{n^{\alpha k}}{L^k(n)}}{\left(a_1 \frac{n^\alpha}{L(n)}\right)^k} = a'_k < \infty, \quad n \rightarrow \infty$$

donde  $a'_k := a_1^{-k} a_k$  para  $k \in \mathbb{N}$ , lo cual implica que  $\{M_n/\mathbb{E}[M_n], n \geq 1\}$  es uniformemente integrable y por lo tanto es tensa. Se tiene que  $\mathbb{E}[M_n] \sim \text{constante} \cdot w(n)$ ,  $n \rightarrow \infty$ . Por lo tanto, existe una sucesión  $\{n_k\}_{k \geq 1}$  con  $n_k \rightarrow \infty$  cuando  $k \rightarrow \infty$  tal que

$$\frac{M_{n_k}}{w(n_k)} \xrightarrow{\mathcal{L}} Z \text{ propia, cuando } k \rightarrow \infty.$$

Vemos que  $Y_n \xrightarrow{P} \infty$  y el Lema 3.3.1 implican

$$\frac{\hat{M}_{n_k}}{w(Y_{n_k})} \xrightarrow{\mathcal{L}} Z'' \stackrel{\mathcal{L}}{=} Z.$$

Por la Proposición 3.2.7, cuando  $k \rightarrow \infty$ , se obtiene

$$\left(\frac{w(Y_{n_k})}{w(n_k)}, \frac{N_{n_k} - 1}{w(n_k)}\right) \xrightarrow{\mathcal{L}} (M, Q) := \left(e^{-U_T}, \int_0^T e^{-U_t} dt\right).$$

Por el Lema 3.3.1 tenemos que

$$\frac{M_{n_k}}{w(n_k)} = \frac{\hat{M}_{Y_{n_k}} + N_{n_k} - 1}{w(n_k)} = \frac{\hat{M}_{Y_{n_k}}}{w(Y_{n_k})} \cdot \frac{w(Y_{n_k})}{w(n_k)} + \frac{N_{n_k} - 1}{w(n_k)},$$

luego, cuando  $k \rightarrow \infty$ , se tiene

$$\left( \frac{\hat{M}_{Y_{n_k}}}{w(Y_{n_k})}, \frac{w(Y_{n_k})}{w(n_k)}, \frac{N_{n_k} - 1}{w(n_k)} \right) \xrightarrow{\mathcal{L}} (Z'', M, Q),$$

donde  $Z'' \stackrel{\mathcal{L}}{=} Z$ , y usando funciones características, se puede ver que  $Z''$  es independiente de  $(M, Q)$ . Además,

$$Z \stackrel{\mathcal{L}}{=} MZ'' + Q. \quad (3.3.17)$$

De la igualdad en ley  $A_\infty \stackrel{\mathcal{L}}{=} MA'_\infty + Q$  se sigue que  $A_\infty = \int_0^\infty e^{-U_t} dt$  es solución de (3.3.17) y por el Teorema 1.5(i) de [46], ésta resulta ser única. Por lo tanto,

$$\frac{M_{n_k}}{w(n_k)} \xrightarrow{\mathcal{L}} \int_0^\infty e^{-U_t} dt.$$

Se puede repetir el mismo argumento para cualquier sucesión como  $\{n_k\}_{k \geq 1}$ . Así, cuando  $n \rightarrow \infty$ , se concluye que

$$\frac{L(n)}{n^\alpha} M_n \xrightarrow{\mathcal{L}} \int_0^\infty e^{-U_t} dt.$$

Esto demuestra el teorema.

### 3.3.3. Demostración del Teorema 3.1.7

La demostración usa el siguiente resultado.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{P}(n - S_{N_n-1} \leq k) = m^{-1} \sum_{i=1}^k \mathbb{P}(\xi \geq i) = \mathbb{P}(W \leq k), \quad k \in \mathbb{N}. \quad (3.3.18)$$

En efecto, (3.3.18) se cumple ya que

$$\begin{aligned}
 \mathbb{P}(n - S_{N_n-1} = k) &= \mathbb{P}(S_{N_n-1} = n - k) = \sum_{i=1}^n \mathbb{P}(S_{i-1} = n - k, N_n = i) \\
 &= \sum_{i=1}^n \mathbb{P}(S_{i-1} = n - k, S_i \geq n) = \sum_{i=0}^{n-1} \mathbb{P}(S_i = n - k, S_{i+1} \geq n) \\
 &= \sum_{i=0}^{n-1} \mathbb{P}(S_i = n - k, \xi \geq k) = \sum_{i=0}^{n-1} \mathbb{P}(S_i = n - k) \mathbb{P}(\xi \geq k) \\
 &= \mathbb{P}(\xi \geq k) \sum_{i=0}^{n-k} \mathbb{P}(S_i = n - k) \\
 &\rightarrow m^{-1} \mathbb{P}(\xi \geq k), \quad n \rightarrow \infty,
 \end{aligned}$$

la convergencia es gracias al *Teorema de Blackwell*. De esta manera, esto implica que

$$\mathbb{P}(n - S_{N_n-1} \leq k) = \sum_{j=1}^k \mathbb{P}(n - S_{N_n-1} = j) \rightarrow \frac{1}{m} \sum_{j=1}^k \mathbb{P}(\xi \geq j) =: \mathbb{P}(W \leq k), \quad n \rightarrow \infty.$$

Por lo tanto, se cumple (3.3.18).

Vemos que de (3.3.15) se sigue

$$M_n - N_n \xrightarrow{\mathcal{L}} M'_W - 1, \tag{3.3.19}$$

ya que se acaba de probar que  $Y_n \xrightarrow{\mathcal{L}} W$ , donde  $W$  es una variable aleatoria con distribución (3.3.18) que es independiente de  $(M'_n, n \geq 1)$  (ya que  $Y_n$  es independiente de  $(M'_n, n \geq 0)$ ).

Por lo tanto, para cualquier sucesión  $(d_n, n \geq 1)$  tal que  $\lim_{n \rightarrow \infty} d_n = \infty$ , se tiene que

$$\frac{M_n - N_n}{d_n} \xrightarrow{P} 0. \tag{3.3.20}$$

Para demostrar la equivalencia entre (i) y (ii) vamos a usar el Teorema 3.2 que se puede encontrar en [25, pág. 142].

Supongamos que se cumple (i), esto es, existen sucesiones  $(a_n)_{n \geq 1} \subset \mathbb{R}^+$  y  $(b_n)_{n \geq 1} \subset \mathbb{R}$  tales que

$$\frac{M_n - b_n}{a_n} \xrightarrow{\mathcal{L}} X,$$

donde  $X$  tiene ley de probabilidad propia y no degenerada. En particular, se tiene esto último para el caso de que  $X$  tenga ley  $\alpha$ -estable con índice  $\alpha \in [1, 2]$ . Luego, debido a (3.3.20), se puede decir lo mismo para  $N_n$ , y por la igualdad

$$\mathbb{P}(N_n > m) = \mathbb{P}(S_m \leq n - 1),$$

se sigue que

$$\frac{S_n - b_n}{a_n} \xrightarrow{\mathcal{L}} X.$$

Esto significa que la distribución de  $\xi$  pertenece al dominio de atracción de alguna ley  $\alpha$ -estable de índice  $\alpha \in [1, 2]$ . Entonces, gracias al Teorema A.0.29, lo anterior se cumple si y sólo si

$$\sum_{k=1}^n k^2 p_k \sim n^{2-\alpha} L(n), \quad n \rightarrow \infty,$$

para cualquier función  $L$  de variación lenta en  $\infty$ , y por tanto,  $\sigma^2 < \infty$ . Esto demuestra la equivalencia entre (i) y (ii).

Suponga que las condiciones del Teorema 3.1.7(ii) se cumplen. Si  $\sigma^2 = \infty$  y (3.1.8) se cumple para  $\alpha = 2$ , entonces, usando el Teorema A.0.27 con  $a_n$  y  $b_n$  definidos como en el Teorema 3.1.7, vemos que

$$\frac{N_n - b_n}{a_n} \xrightarrow{\mathcal{L}} \mu_2.$$

En efecto, tomando las sucesiones  $b_n = n/m$  y  $a_n = m^{-1}c_n$ , donde  $c_n$  es una sucesión de números positivos tal que

$$\frac{nL(c_n)}{c_n^2} \rightarrow C > 0 \quad n \rightarrow \infty,$$

donde  $c_n$  juega el papel de  $B(x)$  en el Teorema A.0.27 y  $C = m/k_1^2$  en el mismo teorema.

De manera análoga, si  $\sigma^2 = \infty$  y (3.1.8) se cumple para  $\alpha \in [1, 2)$ , además, eligiendo  $a_n$  y  $b_n$  como en el Teorema 3.1.7 y apoyándonos en el Teorema A.0.27, podemos implicar que

$$\frac{N_n - b_n}{a_n} \xrightarrow{\mathcal{L}} \mu_\alpha, \quad n \rightarrow \infty.$$

Hay una pequeña diferencia en la elección de la sucesión  $(c_n)_{n \geq 1}$  con respecto a la que se hizo para  $B(x)$  en la demostración del Teorema A.0.27,  $B(\cdot)$  es tal que

$$\frac{xL(B(x))}{[B(x)]^\alpha} \rightarrow \frac{2-\alpha}{\alpha} C \quad x \rightarrow \infty,$$

donde  $C > 0$  definida como  $C := m/k_2^\alpha$  para alguna constante  $k_2 > 0$ .

Por último, si  $\sigma^2 < \infty$ , podemos usar el Teorema A.0.28 con  $a_n$  y  $b_n$  como en el Teorema 3.1.7 para concluir que

$$\frac{N_n - b_n}{a_n} \xrightarrow{\mathcal{L}} \mu_2, \quad n \rightarrow \infty.$$

En vista de (3.3.20), las mismas relaciones límites se cumplen para  $M_n$ . Así, queda demostrado el Teorema 3.1.7.

### 3.3.4. Demostración del Teorema 3.1.8

Primero supongamos que  $m = \infty$ . De acuerdo a (3.2.2) se tiene que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{L(n)^k}{n^k} \mathbb{E}[N_n^k] = 1,$$

lo cual es equivalente a

$$\mathbb{E}[N_n^k] \sim \frac{n^k}{L(n)^k}, \quad k \in \mathbb{N}.$$

De la demostración del Teorema 3.1.6, vemos que

$$\mathbb{E}[M_n^k] \sim \frac{n^k}{L(n)^k} = \left( \frac{n}{L(n)} \right)^k \sim (\mathbb{E}[M_n])^k, \quad k \in \mathbb{N}. \quad (3.3.21)$$

En efecto, basándonos en la demostración del Teorema 3.1.6, denotemos  $a_k(n) = \mathbb{E}[M_n^k]$  y  $b_k(n) = \mathbb{E}[N_n^k]$  para  $k \in \mathbb{N}$ . Ahí se demostró que

$$a_k(n) = d_k(n) + r_n \sum_{i=1}^{n-1} a_k(n-i)p_i, \quad k \in \mathbb{N}, \quad (3.3.22)$$

donde  $d_k(n) := D_k(a_1(n), \dots, a_{k-2}(n)) + ka_{k-1}(n)$  y

$$D_k(x_1, \dots, x_{k-2}) = \gamma_{0,k} + \sum_{i=1}^{k-2} \gamma_{i,k} x_i, \quad \gamma_{i,k} \in \mathbb{R},$$

y  $r_n = 1/(p_1 + \dots + p_{n-1})$ .

Análogamente, se demostró que

$$b_k(n) = c_k(n) + r_n \sum_{i=1}^{n-1} b_k(n-i)p_i, \quad k \in \mathbb{N}, \quad (3.3.23)$$

donde  $c_1(n) = 1$  y  $c_k(n) := D_k(b_1(n), \dots, b_{k-2}(n)) + kb_{k-1}(n)$  para  $k \geq 2$ . Hagamos  $\beta_j = a_j = b_j = 1$ . Esto se reduce a probar

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{L^k(n)}{n^k} a_k(n) = 1, \quad k \in \mathbb{N}. \quad (3.3.24)$$

Para ello vamos a usar inducción sobre  $k$ . Supongamos que (3.3.24) se cumple para  $k \in \{1, 2, \dots, j-1\}$ . Entonces, para  $k = j$  y siguiendo la misma prueba del teorema antes mencionado, vamos a suponer que existe  $\varepsilon > 0$  tal que  $a_j(n) > (1 + \varepsilon)b_j(n)$  para infinitos  $n$ . Haciendo el mismo análisis como en la prueba de ese teorema, llegamos a que

$$0 < D_j(a) + ja_{j-1}(n_c) + (1 + \varepsilon)(r_{n_c} - 1)(b_j(n_c) - D_j(b) - jb_{j-1}(n_c)) - (1 + \varepsilon)(D_j(b) + jb_{j-1}(n_c)). \quad (3.3.25)$$

donde  $n_c = \inf\{n \geq 1 : a_j(n) > (1 + \varepsilon)b_j(n) + c\}$  para cualquier constante  $c > 0$ ,  $D_j(a) := D_j(a_1(n), \dots, a_{j-2}(n))$  y  $D_j(b) := D_j(b_1(n), \dots, b_{j-2}(n))$  por conveniencia. A continuación, definamos  $z(c) := n_c^{j-1}/L^{j-1}(n_c)$ . Dividiendo (3.3.25) entre  $z(c)$  y haciendo  $c \rightarrow \infty$  (esto implica que  $n_c \rightarrow \infty$ ), se obtiene

$$\frac{D_j(a)}{z(c)} = \frac{D_j(a_1(n), \dots, a_{j-2}(n))}{z(c)} \rightarrow 0, \quad \text{cuando } c \rightarrow \infty,$$

ya que  $n/L(n) \rightarrow \infty$  cuando  $n \rightarrow \infty$ . También

$$\frac{ja_{j-1}(n)}{z(c)} = j \frac{L^{j-1}(n)}{n^{j-1}} a_{j-1}(n_c) \rightarrow j \quad \text{cuando } c \rightarrow \infty,$$

gracias a la hipótesis de inducción. Ahora nos fijamos en el tercer término de (3.3.25). Vemos que

$$r_n - 1 = \frac{1}{p_1 + \dots + p_{n-1}} - 1 = \frac{p_n + p_{n+1} + \dots}{p_1 + \dots + p_{n-1}} = \frac{\mathbb{P}(\xi \geq n)}{\mathbb{P}(\xi < n)} \\ \sim \mathbb{P}(\xi \geq n), \quad n \rightarrow \infty.$$

Pero, de acuerdo a (iv) del Teorema A.0.23, tenemos que

$$\mathbb{P}(\xi \geq n) = o\left(\frac{\sum_{j=1}^n \mathbb{P}(\xi \geq j)}{n}\right) \sim o\left(\frac{L(n)}{n}\right), \quad n \rightarrow \infty.$$

Así, dicho término es despreciable. Por último, se tiene que

$$\frac{D_j(b)}{z(c)} = \frac{D_j(b_1(n), \dots, b_{j-2}(n))}{z(c)} \rightarrow 0, \quad \text{cuando } c \rightarrow \infty,$$

y además

$$\frac{jb_{j-1}(n)}{z(c)} = j \frac{L^{j-1}(n)}{n_c^{j-1}} b_{j-1}(n_c) \rightarrow j \quad \text{cuando } c \rightarrow \infty.$$

Luego, de (3.3.25) se obtiene  $(1 + \varepsilon)j \leq j$ , lo cual es una contradicción. De esta manera, se sigue que

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{a_j(n)}{b_j(n)} \leq 1.$$

Análogamente, podemos deducir que  $j \leq (1 - \varepsilon)j$  (lo cual también es una contradicción) haciendo los mismos cálculos que en la demostración del Teorema 3.1.6 tomando  $\beta_j$ ,  $b_j$  y  $a_j$  como antes, y deducimos que

$$\liminf_{n \rightarrow \infty} \frac{a_j(n)}{b_j(n)} \geq 1.$$

Entonces,  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_j(n)/b_j(n) = 1$ , es decir,  $a_j(n) \sim b_j(n) \sim n^j/L^j(n)$  cuando  $n \rightarrow \infty$ . Esto demuestra (3.3.24) y por tanto también (3.3.21).

Así, cuando  $n \rightarrow \infty$ ,

$$\mathbb{E} \left[ \frac{M_n}{\mathbb{E}[M_n]} \right]^k \rightarrow 1, \quad k \in \mathbb{N}.$$

Como los momentos de  $M_n/\mathbb{E}[M_n]$  determinan a 1, entonces<sup>3</sup>

$$\frac{M_n}{\mathbb{E}[M_n]} \xrightarrow{\mathcal{L}} 1,$$

lo cual implica que

$$\frac{M_n}{\mathbb{E}[M_n]} \xrightarrow{P} 1.$$

Esto prueba (3.1.9).

---

<sup>3</sup>Realmente en esta convergencia en ley,  $1 \equiv \delta(1)$ , donde  $\delta(1)$  es una variable aleatoria degenerada cuya distribución está concentrada en 1.



Ahora supongamos que  $m < \infty$ . Por el teorema de renovación clave, tenemos que cuando  $n \rightarrow \infty$ ,

$$\frac{N_n}{n} \xrightarrow{\text{c.s.}} \frac{1}{m}. \quad (3.3.26)$$

De la ecuación 3.3.19, se sigue que cuando  $n \rightarrow \infty$ ,

$$\frac{M_n - N_n}{n} \xrightarrow{\text{c.s.}} 0.$$

Entonces

$$\frac{M_n}{n} = \frac{M_n - N_n}{n} + \frac{N_n}{n} \xrightarrow{\text{c.s.}} \frac{1}{m}. \quad (3.3.27)$$

Gracias al *Teorema de Renovación Elemental*  $\mathbb{E}[N_n] \sim n/m$  cuando  $n \rightarrow \infty$ . De acuerdo a lo probado arriba, tenemos que  $\mathbb{E}[M_n] \sim \mathbb{E}[N_n] \sim n/m$  cuando  $n \rightarrow \infty$ . Como  $M_n/a_n \xrightarrow{P} 1$ , cuando  $n \rightarrow \infty$  para alguna sucesión de números positivos  $(a_n)_{n \geq 1}$ , entonces (3.3.20) implica que

$$\frac{M_n - N_n}{a_n} \xrightarrow{P} 0, \quad n \rightarrow \infty.$$

Esto implica

$$\frac{N_n}{a_n} = \frac{M_n}{a_n} - \frac{M_n - N_n}{a_n} \xrightarrow{P} 1, \quad n \rightarrow \infty.$$

Por lo tanto, de (3.3.26) concluimos que  $a_n \sim n/m$  cuando  $n \rightarrow \infty$ .

### 3.3.5. Demostración del Teorema 3.1.9

Por el Teorema 3(c) en [12], se sigue que

$$\frac{N_n - b(n) - 1}{a(n)} \xrightarrow{\mathcal{L}} \mu_1,$$

donde  $\mu_1$  es la ley 1-estable con función característica

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{itx} \mu_1(dx) = e^{it \log |t| - |t| \pi/2}, \quad t \in \mathbb{R}.$$

Por el Corolario 3.2.5, tenemos que

$$\frac{M_n}{N_n - 1} \xrightarrow{P} 1. \quad (3.3.28)$$

Por lo tanto,

$$\frac{M_n - b(n)}{a(n)} - \frac{M_n - N_n + 1}{N_n - 1} \cdot \frac{b(n)}{a(n)} \xrightarrow{\mathcal{L}} \mu_1. \quad (3.3.29)$$

Esto sucede debido a que

$$\frac{b(n)}{N_n - 1} \xrightarrow{P} 1, \quad n \rightarrow \infty. \quad (3.3.30)$$

En efecto, tenemos que

$$\frac{M_n}{N_n - 1} = \frac{M_n - b(n)}{N_n - 1} + \frac{b(n)}{N_n - 1} \xrightarrow{P} 1, \quad n \rightarrow \infty,$$

ya que

$$\frac{M_n - b(n)}{N_n - 1} \xrightarrow{P} 0, \quad n \rightarrow \infty.$$

De esta manera, es suficiente demostrar que el segundo término de (3.3.29) tiende a cero en probabilidad. Recordando la notación  $Y_n = n - S_{N_n - 1}$  y usando el Lema 3.3.1 esto nos da

$$\begin{aligned} \frac{M_n - N_n + 1}{N_n - 1} \cdot \frac{b(n)}{a(n)} &= \frac{\hat{M}_{Y_n}}{Y_n/m(Y_n)} \cdot \frac{m(n)}{m(Y_n)} \cdot \frac{b(n)Y_n}{na(n)} \cdot \frac{n}{m(n)(N_n - 1)} \\ &= \prod_{i=1}^4 K_i(n), \end{aligned}$$

donde

$$K_1(n) := \frac{\hat{M}_{Y_n}}{Y_n/m(Y_n)}, \quad K_2(n) := \frac{m(n)}{m(Y_n)}, \quad K_3(n) := \frac{b(n)Y_n}{na(n)} \quad \text{y} \quad K_4(n) := \frac{n}{m(n)(N_n - 1)}.$$

Por el Corolario 3.2.5, tenemos que  $m(n)M_n/n \xrightarrow{P} 1$ . Usando el Lema 3.3.1 y el hecho de que  $Y_n \xrightarrow{P} \infty$ , podemos implicar que  $K_1(n) \xrightarrow{P} 1$ . Por el Teorema A.0.26,  $K_2(n) \xrightarrow{\mathcal{L}} 1/R$ , donde  $R$  es una variable aleatoria con distribución uniforme en  $(0, 1)$ . Por la Proposición 3.2.6, se sigue que  $K_3(n) \xrightarrow{P} 0$ . Por último, por el Corolario 3.2.5,  $K_4(n) \xrightarrow{P} 1$ . Esto demuestra el teorema.

# Capítulo 4

## Aplicaciones a los Procesos de Coalescencia

En el presente capítulo vamos a considerar unos procesos estocásticos especiales llamados  $\beta$ -coalescentes, los cuales se definirán en la siguiente sección. Primero vamos a introducir a los  $\Lambda$ -coalescentes, donde  $\Lambda$  es una medida finita en  $[0, 1]$  subyacente al coalescente en cuestión que determina a las tasas de transición de dicho proceso. Después se calculan las tasas infinitesimales y las tasas totales de manera general, luego tomamos a la distribución Beta como la medida subyacente para así poder trabajar con los  $\beta$ -coalescentes en algunos casos particulares interesantes. De ahí que surjan como consecuencia, el coalescente de Kingman y el coalescente de Bolthausen-Sznitman.

### 4.1. $\Lambda$ -Coalescentes

Para lo que sigue, vamos a denotar por  $\bar{\mathbb{N}}$  al conjunto de los números naturales extendidos, esto es,  $\bar{\mathbb{N}} = \mathbb{N} \cup \{\infty\}$ . Un bloque es un subconjunto  $B \subset \mathbb{N}$ . Para lo que resta del capítulo, será conveniente usar la siguiente notación,  $[n] = \{1, \dots, n\}$ . Esto quiere decir que  $[\infty] = \mathbb{N}$ .

Consideremos al tiempo  $t = 0$  un número  $n \in \mathbb{N}$  de individuos y miramos hacia atrás en el tiempo. Denotemos por  $\mathcal{E}$  al conjunto de todas las particiones en  $\mathbb{N}$  y por  $\mathcal{E}_n$  al conjunto de particiones en  $[n] := \{1, \dots, n\}$ . Para cada  $n \in \mathbb{N}$  y  $\pi \in \mathcal{E}$ , definamos la función  $\varrho_n : \mathcal{E} \rightarrow \mathcal{E}_n$  mediante  $\pi \mapsto \varrho_n \pi$ , esta la restricción natural al conjunto  $\mathcal{E}_n$ . Si  $\Pi = (\Pi_t, t \geq 0) \in \mathcal{E}$ , representa el proceso de las particiones ancestrales, entonces  $\varrho_n \Pi_t$  representará cuáles de los  $n$  individuos iniciales tienen un

ancestro común al tiempo  $-t$ .

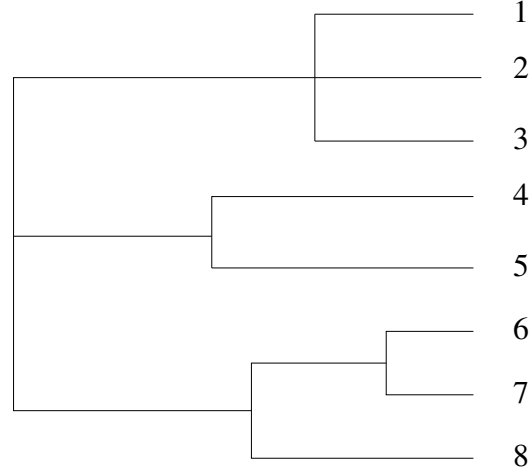


Figura 4.1: Las genealogías de 8 individuos.

**Definición 4.1.1** Un  $\Lambda$ -coalescente es un proceso de Markov  $(\Pi_t, t \geq 0)$  con valores en  $\mathcal{E}$  tal que, para cada  $n \in \mathbb{N}$ , el proceso  $(\varrho_n \Pi_t, t \geq 0)$  es una cadena de Markov con valores en  $\mathcal{E}_n$  con la propiedad de que siempre que  $|\varrho_n \Pi_t| = b$  bloques,  $k$  de estos bloques se fusionan en un bloque a una tasa igual a  $\lambda_{b,k}$ , siendo estas las transiciones posibles.

**Observación 4.1.2** Pitman en [41] demostró que las tasas de transición  $\lambda_{b,k}$  satisfacen

$$\lambda_{b,k} = \int_0^1 x^{k-2}(1-x)^{b-k} \Lambda(dx), \quad 2 \leq k \leq b \quad (4.1.1)$$

para alguna medida finita  $\Lambda$  en  $[0, 1]$ , gracias a que el proceso es intercambiable.

Así, un proceso de coalescencia que cumple (4.1.1) para una medida particular  $\Lambda$ , es llamado el  $\Lambda$ -coalescente.

**Ejemplo 4.1.3** Sea  $\Lambda$  la masa de Dirac unitaria en 0 dada por

$$\Lambda(dx) = \delta_0(dx).$$

En este caso, las tasas de transición (4.1.1) se reducen a

$$\lambda_{b,k} = \begin{cases} 1 & \text{si } k = 2 \\ 0 & \text{si } k \neq 2 \end{cases}$$

Así, este  $\Lambda$ -coalescente corresponde al *coalescente de Kingman*, en donde cualquier par de bloques se fusionan a tasa 1.

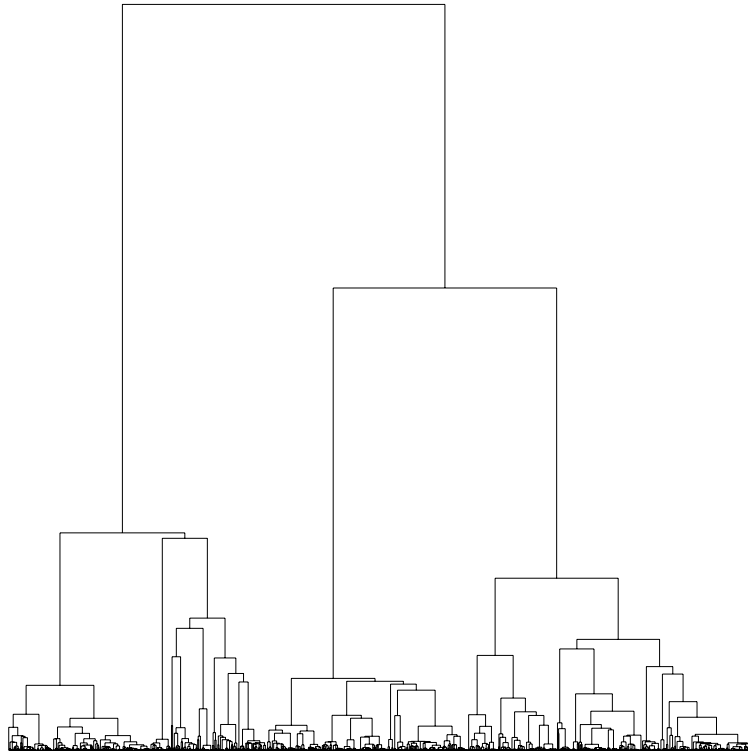


Figura 4.2: Simulación del  $n$ -coalescente de Kingman con  $n = 500$ .

**Ejemplo 4.1.4** Sea  $\Lambda(dx) = dx$  la medida de Lebesgue en  $(0, 1)$ . Luego, las tasas de transición (4.1.1) se reducen a

$$\begin{aligned} \lambda_{b,k} &= \int_0^1 x^{k-2}(1-x)^{b-k} dx = \int_0^1 x^{(k-1)-1}(1-x)^{(b-k+1)-1} dx \\ &= \frac{\Gamma(b-k+1)\Gamma(k-1)}{\Gamma(b)} = \frac{(b-k)!(k-2)!}{(b-1)!}, \quad 2 \leq k \leq b. \end{aligned}$$

Este  $\Lambda$ -coalescente es el *coalescente de Bolthausen-Sznitman*. Este coalescente primero surgió en la conexión con la física de “*spin glass*” (vidrios centrifugados).

**Ejemplo 4.1.5** Sea  $\Lambda$  la distribución Beta de parámetros  $a > 0$  y  $b > 0$ , entonces llamamos a  $(\Pi_t, t \geq 0)$  el  $\beta(a, b)$ -coalescente, o más sencillamente, el  $\beta$ -coalescente. En particular, si tomamos  $0 < \alpha < 2$ , y definimos  $\Lambda$  como la distribución Beta( $2 - \alpha, \alpha$ ), es decir,

$$\Lambda(dx) = \frac{1}{\Gamma(2 - \alpha)\Gamma(\alpha)} \cdot x^{1-\alpha}(1 - x)^{\alpha-1}dx, \quad (4.1.2)$$

y si tomamos  $\alpha = 1$ , este es justamente el coalescente de Bolthausen-Sznitman. Mientras que si hacemos  $\alpha \uparrow 2$ , entonces la distribución Beta es una aproximación de la masa de Dirac en 0, esto es, si  $\mu_\alpha$  es la distribución de (4.1.2), entonces

$$\mu_\alpha \xrightarrow{v} \delta_0, \quad \text{cuando } \alpha \uparrow 2,$$

donde “ $\xrightarrow{v}$ ” denota convergencia vaga; este es el coalescente de Kingman. Por razones teóricas y prácticas, los  $\beta$ -coalescentes forman una familia muy importante de procesos de coalescencia.

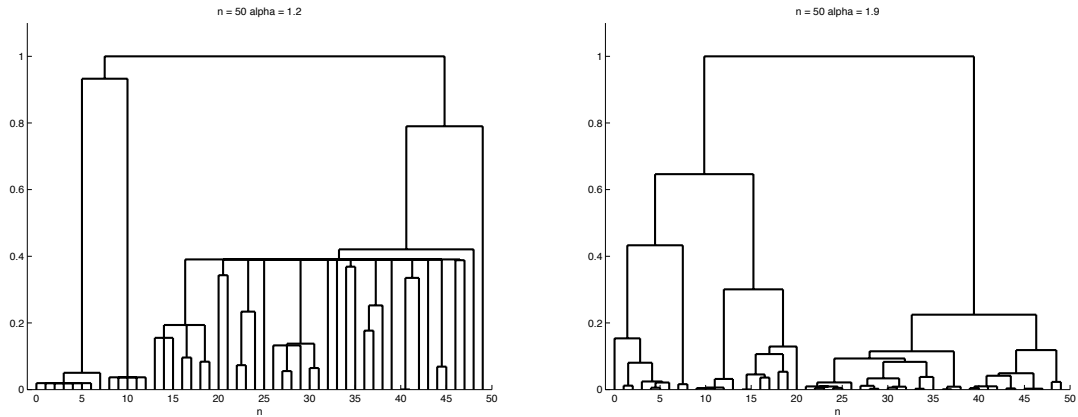


Figura 4.3: Simulaciones de Beta-coalescentes para una población inicial de 50 individuos.

## 4.2. Tasas de Transición de los $\beta$ -Coalescentes

Vamos a denotar por  $Y_t^{(n)} = |\varrho_n \Pi_t|$  el número de bloques de  $\varrho_n \Pi_t$ . Entonces, de acuerdo con lo que se dijo arriba,  $Y_0^{(n)} = n$  y  $Y_t^{(n)}$  se puede interpretar como

el número de ancestros vivos al tiempo  $-t$ . Luego, el proceso  $(Y_t^{(n)}, t \geq 0)$  es una cadena de Markov decreciente a tiempo continuo con espacio de estados  $[n]$ .

Para un proceso  $\Lambda$ -coalescente  $(\Pi_t, t \geq 0)$  se sabe que el proceso  $(Y_t^{(n)}, t \geq 0)$  tiene tasas infinitesimales

$$g_{nk} = \lim_{t \downarrow 0} \frac{\mathbb{P}(Y_t^{(n)} = k)}{t} = \binom{n}{k-1} \int_{[0,1]} x^{n-k-1} (1-x)^{k-1} \Lambda(dx), \quad (4.2.1)$$

para todo  $k, n \in \mathbb{N}$  con  $k < n$ . Esto se debe a que el número de maneras posibles de elegir  $n-k+1$  bloques de  $n$  es igual a  $\binom{n}{k-1}$  y, cuando hay  $n$  bloques, cada grupo de  $n-k+1$  bloques se fusiona en uno a tasa  $\lambda_{n, n-k+1}$ . Sea

$$g_n = \sum_{k=1}^{n-1} g_{nk}, \quad n \in \mathbb{N}$$

las tasas totales.

Definamos al proceso de los diferentes estados de  $Y^{(n)}$  mediante  $W_0^{(n)} = Y_0^{(n)}$ , y  $W_k^{(n)} = Y_{T_k}^{(n)}$ ,  $k \geq 1$ , donde  $(T_k, k \geq 0)$  es una sucesión de tiempos de salto del proceso  $(Y_t^{(n)}, t \geq 0)$  definida por  $T_0 = 0$  y

$$T_k = \inf \{t > T_{k-1} : Y_t^{(n)} \neq Y_{T_{k-1}}^{(n)}\}, \quad k \geq 1.$$

Entonces  $(W_k^{(n)}, k \in \mathbb{N})$  es una cadena de Markov con espacio de estados  $[n]$  y probabilidades de transición dadas por

$$\pi_{n, n-k} = \frac{g_{n, n-k}}{g_n} = \frac{1}{g_n} \binom{n}{k+1} \lambda_{n, k+1}, \quad 1 \leq k \leq n-1. \quad (4.2.2)$$

Ahora, sea  $X_n = \inf \{k \in \mathbb{N} : W_k^{(n)} = 1 \text{ dado } W_0^{(n)} = n\}$  el número de pasos necesarios para que el proceso  $W^{(n)}$  alcance al estado absorbente 1.

En otras palabras,  $X_n$  es el número de colisiones (saltos) que hay en el coalescente restringido  $(\varrho_n \Pi_t, t \geq 0)$  hasta que haya un sólo bloque. Notemos que  $\mathbb{P}(I'_n = k) = \pi_{n, n-k}$ , donde  $I'_n$  es el tamaño del primer salto de  $Y^{(n)}$ . Como se demostró al inicio de este capítulo, gracias a que  $(W_k^{(n)}, k \geq 1)$  es una cadena de Markov (decreciente en este caso),  $(X_n, n \geq 1)$  satisface la recursión distribucional  $X_1 = 0$  y  $X_n \stackrel{\mathcal{L}}{=} 1 + X_{n-I'_n}$ ,  $n \geq 2$ , donde  $I'_n$  es independiente de  $X_2, \dots, X_{n-1}$  con distribución

$$\mathbb{P}(I'_n = k) = g_{n, n-k} / g_n, \quad k \in \{1, \dots, n-1\}.$$

La variable aleatoria  $n - I'_n$  es el estado del proceso  $(Y_t^{(n)}, t \geq 0)$  después de su primer salto.

Vamos a considerar  $\beta$ -coalescentes, esto es,  $\Lambda$ -coalescentes con distribución  $\Lambda = \beta(a, b)$ , es decir,

$$\Lambda(dx) = \frac{1}{B(a, b)} x^{a-1} (1-x)^{b-1} dx, \quad 0 < x < 1,$$

donde  $B(a, b) = \Gamma(a)\Gamma(b)/\Gamma(a+b)$  es la función beta con  $a, b > 0$ . En este caso, las tasas infinitesimales (4.2.1) adquieren la forma

$$\begin{aligned} g_{nk} &= \binom{n}{k-1} \frac{1}{B(a, b)} \int_0^1 x^{b+k-2} (1-x)^{a+n-k-2} dx \\ &= \binom{n}{k-1} \frac{B(a+n-k-1, b+k-1)}{B(a, b)}, \quad k, n \in \mathbb{N}, k < n. \end{aligned} \quad (4.2.3)$$

De la relación

$$g_{k+1, k} = \frac{k(k+1)}{2} \frac{B(a, b+k-1)}{B(a, b)},$$

se sigue que

$$g_n = \sum_{k=1}^{n-1} (g_{k+1} - g_k) = \sum_{k=1}^{n-1} \frac{2}{k+1} g_{k+1, k} = \frac{1}{B(a, b)} \sum_{k=1}^{n-1} k B(a, b+k-1). \quad (4.2.4)$$

Si en (4.2.3) hacemos  $b = 1$ , entonces  $g_{nk}$  tiene la forma

$$g_{nk} = \binom{n}{k-1} \frac{B(a+n-k-2, k)}{B(a, 1)} = \frac{n!a}{(n-k+1)!} \frac{\Gamma(a+n-k-1)}{\Gamma(a+n-1)}. \quad (4.2.5)$$

En efecto, la segunda igualdad en (4.2.5) se sigue, ya que

$$\begin{aligned} g_{nk} &= \binom{n}{k-1} \frac{B(a+n-k-2, k)}{B(a, 1)} = \frac{n!}{(n-k+1)!(k-1)!} \cdot \frac{\Gamma(a+n-k-1)\Gamma(k)}{\Gamma(a+n-1)} \\ &= \frac{n!a}{(n-k+1)!} \cdot \frac{\Gamma(a+n-k-1)}{\Gamma(a+n-1)}. \end{aligned}$$



Por lo tanto, las tasas totales se reducen a

$$g_n = a \sum_{k=1}^{n-1} kB(a, k) = \begin{cases} \frac{a}{a-2} \left( 1 - \frac{\Gamma(a)\Gamma(n+1)}{\Gamma(a+n-1)} \right) & \text{para } a > 0, a \neq 2 \\ 2(h_n - 1) & \text{para } a = 2 \end{cases}$$

donde  $h_n = \sum_{i=1}^n 1/i$  es el  $n$ -ésimo número armónico. En efecto, se tiene que

$$g_n = a \sum_{k=1}^{n-1} kB(a, k) = a \left( \sum_{k=1}^{\infty} kB(a, k) - \sum_{k=n}^{\infty} kB(a, k) \right). \quad (4.2.6)$$

Vamos a calcular las dos sumas de (4.2.6). Tenemos que

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{\infty} kB(a, k) &= \sum_{k=1}^{\infty} k \frac{\Gamma(a)\Gamma(k)}{\Gamma(a+k)} = (a-1) \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\Gamma(a-1)\Gamma(k+1)}{\Gamma(a+k)} \\ &= (a-1) \sum_{k=1}^{\infty} B(a-1, k+1) = (a-1) \sum_{k=1}^{\infty} \int_0^1 x^{a-2}(1-x)^k dx \\ &= (a-1) \int_0^1 x^{a-2} \left( \sum_{k=1}^{\infty} (1-x)^k \right) dx = (a-1) \int_0^1 x^{a-3}(1-x) dx \\ &= (a-1)B(a-2, 2) = \frac{a-1}{a-2} \frac{(a-2)\Gamma(a-2)\Gamma(2)}{\Gamma(a)} \\ &= \frac{1}{a-2} \frac{(a-1)\Gamma(a-1)}{\Gamma(a)} = \frac{1}{a-2}. \end{aligned} \quad (4.2.7)$$

Haciendo cálculos similares, llegamos a que

$$\begin{aligned} \sum_{k=n}^{\infty} kB(a, k) &= (a-1) \int_0^1 x^{a-2} \left( \sum_{k=n}^{\infty} (1-x)^k \right) dx = (a-1) \int_0^1 x^{a-2} \left( \sum_{k=1}^{\infty} (1-x)^{k+n-1} \right) dx \\ &= (a-1) \int_0^1 x^{a-2}(1-x)^{n-1} \frac{1-x}{x} dx = (a-1) \int_0^1 x^{a-3}(1-x)^n dx \\ &= (a-1)B(a-2, n+1) = (a-1) \frac{\Gamma(a-2)\Gamma(n+1)}{\Gamma(a+n-1)} \\ &= \frac{1}{a-2} \frac{(a-1)\Gamma(a-1)\Gamma(n+1)}{\Gamma(a+n-1)} = \frac{1}{a-2} \frac{\Gamma(a)\Gamma(n+1)}{\Gamma(a+n-1)}. \end{aligned} \quad (4.2.8)$$

Luego, sustituyendo (4.2.7) y (4.2.8) en (4.2.6), se llega a que

$$g_n = a \sum_{k=1}^{n-1} kB(a, k) = \frac{a}{a-2} \left( 1 - \frac{\Gamma(a)\Gamma(n+1)}{\Gamma(a+n-1)} \right).$$

Ahora, para  $a = 2$ , tenemos que

$$\begin{aligned} g_n &= 2 \sum_{k=1}^{n-1} kB(2, k) = 2 \sum_{k=1}^{n-1} k \frac{\Gamma(2)\Gamma(k)}{\Gamma(k+2)} = 2 \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k+1} \\ &= 2 \left( \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k+1} + 1 - 1 \right) = 2 \left( \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{k+1} - 1 \right) = 2 \left( \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} - 1 \right) = 2(h_n - 1). \end{aligned}$$

### 4.3. Comportamiento Asintótico del Número de Colisiones en los $\beta$ -Coalescentes

En esta sección se aplican los resultados vistos en el Capítulo 3. Tenemos que existe una variable aleatoria  $\xi'$  con valores en  $\mathbb{Z}^+$  tal que

$$p_k := \mathbb{P}(\xi' = k) = \frac{(2-a)\Gamma(a+k-1)}{\Gamma(a)\Gamma(k+2)}, \quad k \in \mathbb{N}.$$

Notemos que  $(p_k)_{k \geq 1}$  es una distribución de probabilidad. En efecto, se tiene que  $p_k \geq 0$  para todo  $k \in \mathbb{N}$  para  $0 < a < 2$ . Luego, tenemos que

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{\infty} p_k &= \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(2-a)\Gamma(a+k-1)}{\Gamma(a)\Gamma(k+2)} = \frac{1}{\Gamma(a)\Gamma(2-a)} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\Gamma(3-a)\Gamma(a+k-1)}{\Gamma(k+2)} \\ &= \frac{1}{\Gamma(a)\Gamma(2-a)} \sum_{k=1}^{\infty} \int_0^1 x^{2-a}(1-x)^{a+k-2} dx \\ &= \frac{1}{\Gamma(a)\Gamma(2-a)} \int_0^1 x^{2-a}(1-x)^{a-2} \left( \sum_{k=1}^{\infty} (1-x)^k \right) dx \\ &= \frac{1}{\Gamma(a)\Gamma(2-a)} \int_0^1 x^{2-a-1}(1-x)^{a-1} dx = \frac{1}{\Gamma(a)\Gamma(2-a)} \frac{\Gamma(2-a)\Gamma(a)}{\Gamma(2)} = 1. \end{aligned}$$

Por lo tanto, lo anterior se cumple. Haciendo cálculos similares, llegamos a que

$$\mathbb{P}(\xi' \geq n) = \frac{\Gamma(a+n-1)}{\Gamma(a)\Gamma(n+1)}, \quad n \in \mathbb{N}. \quad (4.3.1)$$

En efecto, tenemos que para  $n \in \mathbb{N}$ ,

$$\begin{aligned}
 \mathbb{P}(\xi' \geq n) &= \sum_{k=n}^{\infty} \mathbb{P}(\xi' = k) = \sum_{k=1}^{\infty} \mathbb{P}(\xi' = k + n - 1) \\
 &= \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(2-a)\Gamma(a+k+n-2)}{\Gamma(a)\Gamma(k+n+1)} = \frac{2-a}{\Gamma(a)\Gamma(3-a)} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\Gamma(3-a)\Gamma(a+n+k-2)}{\Gamma(n+k+1)} \\
 &= \frac{1}{\Gamma(a)\Gamma(2-a)} \sum_{k=1}^{\infty} \int_0^1 x^{2-a}(1-x)^{a+n+k-3} dx \\
 &= \frac{1}{\Gamma(a)\Gamma(2-a)} \int_0^1 x^{2-a}(1-x)^{a+n-3} \left( \sum_{k=1}^{\infty} (1-x)^k \right) dx \\
 &= \frac{1}{\Gamma(a)\Gamma(2-a)} \int_0^1 x^{1-a}(1-x)^{a+n-2} dx = \frac{1}{\Gamma(a)\Gamma(2-a)} \frac{\Gamma(2-a)\Gamma(n+1)}{\Gamma(a+n-1)} \\
 &= \frac{\Gamma(a)\Gamma(n+1)}{\Gamma(a+n-1)}.
 \end{aligned}$$

Luego, la distribución de  $I'_n$  se calcula de la siguiente manera,

$$\begin{aligned}
 \mathbb{P}(I'_n = k) &= \frac{g_{n,n-k}}{g_n} = \frac{\frac{n!a}{(k+1)!} \cdot \frac{\Gamma(a+k-1)}{\Gamma(a+n-1)}}{\frac{a}{a-2} \left( 1 - \frac{\Gamma(a)\Gamma(n+1)}{\Gamma(a+n-1)} \right)} = \frac{\frac{(2-a)\Gamma(a+k-1)}{\Gamma(a)\Gamma(k+2)}}{\frac{\Gamma(a+n-1)}{n!\Gamma(a)} \left( 1 - \frac{\Gamma(a)\Gamma(n+1)}{\Gamma(a+n-1)} \right)} \\
 &= \frac{p_k}{1 - \frac{\Gamma(a+n-1)}{\Gamma(n+1)\Gamma(a)}} = \frac{p_k}{1 - \mathbb{P}(\xi' \geq n)} = \frac{p_k}{p_1 + \dots + p_{n-1}}.
 \end{aligned}$$

Así, la sucesión  $I'_n$  satisface (3.1.3). Por lo tanto, podemos usar los resultados del Capítulo 3 para demostrar los siguientes teoremas.

**Teorema 4.3.1** *Para el  $\beta(a, 1)$ -coalescente con  $1 < a < 2$ , es decir,  $0 < \alpha = 2 - a < 1$ , el número de colisiones  $X_n$  satisface*

$$\frac{X_n}{\Gamma(2-\alpha)n^\alpha} \xrightarrow{\mathcal{L}} \int_0^\infty e^{-U_t} dt,$$

donde  $(U_t, t \geq 0)$  es un subordinador sin drift con medida de Lévy (3.1.7).

**Demostración.** Usando que  $\Gamma(n+x) \sim \Gamma(n)n^x$  cuando  $n \rightarrow \infty$  para todo  $x \in \mathbb{R}^+$ , vemos que

$$\mathbb{P}(\xi' \geq n) = \frac{\Gamma(a+n-1)}{\Gamma(a)\Gamma(n+1)} \sim \frac{\Gamma(n)n^{a-1}}{\Gamma(a)n\Gamma(n)} = \frac{n^{a-2}}{\Gamma(a)} = \frac{n^{-\alpha}}{\Gamma(2-\alpha)}, \quad \text{cuando } n \rightarrow \infty.$$

donde  $\alpha = a - 2$ . De esta manera, si  $1 < a < 2$ , o equivalentemente, si  $0 < \alpha < 1$ , se puede aplicar el Teorema 3.1.6 con  $L(n) = 1/\Gamma(a) = 1/\Gamma(2-\alpha)$ , y así, queda demostrado el teorema.  $\square$

Hass y Miermont prueban este teorema con otro método, ver [26]. Vamos a usar la notación de este artículo. Este método considera cadenas de Markov no crecientes  $X_n := (X_n(k), k \geq 0)$  que cuentan el número de bloques después de que hayan  $k$  coalescencias, las cuales empiezan con  $n$  bloques. Luego, éstas cadenas de Markov reescaladas en el tiempo, convergen a un proceso de Markov no creciente cambiado de tiempo. Por último, se deduce el comportamiento asintótico de la variable  $A_n := \inf\{k \geq 1 : X_n(k) = 1\}$  adecuadamente renormalizada y se llega a la misma conclusión del Teorema 4.3.1.

**Teorema 4.3.2** *Para el  $\beta(a, 1)$ -coalescente con  $0 < a < 1$ , esto es,  $1 < \alpha = 2 - a < 2$ , el número de colisiones de  $X_n$  satisface*

$$\frac{X_n - n(\alpha - 1)}{(\alpha - 1)^{(\alpha+1)/\alpha} n^{1/\alpha}} \xrightarrow{\mathcal{L}} \mu_\alpha,$$

o equivalentemente,

$$\frac{X_n - n(\alpha - 1)}{(\alpha - 1)n^{1/\alpha}} \xrightarrow{\mathcal{L}} S_\alpha, \tag{4.3.2}$$

donde  $S_\alpha$  es una variable aleatoria tal que

$$\mathbb{E}\left[\exp(itS_\alpha)\right] = \exp\left(|t|^\alpha \left(\cos \frac{\pi\alpha}{2} + i \sin \frac{\pi\alpha}{2} \operatorname{sgn}(t)\right)\right), \quad t \in \mathbb{R}.$$

**Demostración.** Ahora supongamos que  $0 < a := 2 - \alpha < 1$ . Entonces  $m = \mathbb{E}[\xi'] = 1/(1 - a) < \infty$ . En efecto, lo anterior se obtiene mediante,

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[\xi'] &= \sum_{k=1}^{\infty} \mathbb{P}(\xi' \geq k) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\Gamma(a+k-1)}{\Gamma(a)\Gamma(k+1)} \\ &= \frac{1}{\Gamma(a)\Gamma(2-a)} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\Gamma(2-a)\Gamma(a+k-1)}{\Gamma(k+1)} \\ &= \frac{1}{\Gamma(a)\Gamma(2-a)} \sum_{k=1}^{\infty} \int_0^1 x^{1-a}(1-x)^{a+k-2} dx \\ &= \frac{1}{\Gamma(a)\Gamma(2-a)} \int_0^1 x^{1-a}(1-x)^{a-2} \left(\sum_{k=1}^{\infty} (1-x)^k\right) dx \\ &= \frac{1}{\Gamma(a)\Gamma(2-a)} \int_0^1 x^{-a}(1-x)^{a-1} dx = \frac{1}{\Gamma(a)\Gamma(2-a)} \frac{\Gamma(1-a)\Gamma(a)}{\Gamma(1)} \\ &= \frac{1}{1-a} < \infty. \end{aligned}$$

Notemos que si definimos  $a_k := k^2 p_k$  para  $k \geq 1$ , entonces la serie de potencias  $\sum_{k=1}^{\infty} a_k s^k$  es absolutamente convergente para  $s \in [0, 1)$ . Además, haciendo  $c = 1$ ,  $L'(n) = 2 - a$ , y usando de nueva cuenta la aproximación de Stirling, se obtiene

$$a_k = k^2 \frac{(2-a)\Gamma(a+k-1)}{\Gamma(a)\Gamma(k+2)} \sim k^2 \frac{(2-a)\Gamma(k)k^{a-1}}{\Gamma(a)\Gamma(k)k^2} = \frac{c}{\Gamma(a)} k^{a-1} L'(k), \quad k \rightarrow \infty,$$

podemos aplicar el Teorema A.0.13 para obtener

$$\sum_{k=1}^n k^2 p_k \sim \frac{cL'(n)}{\Gamma(a+1)} n^a = \frac{2-a}{\Gamma(a+1)} n^a = \frac{\alpha}{\Gamma(3-\alpha)} n^{2-\alpha}, \quad \text{cuando } n \rightarrow \infty. \quad (4.3.3)$$

En particular, la varianza de  $\xi$  es infinita. Así, se puede aplicar el Teorema 3.1.7 con  $L(n) = (2-a)/\Gamma(a+1) = \alpha/\Gamma(3-\alpha)$ ,  $C = 1/\Gamma(a) = 1/\Gamma(2-\alpha)$ ,  $b_n = n(1-a) = n(\alpha-1)$  y  $c_n = n^{1/\alpha}$ . Esto demuestra el teorema.  $\square$

Los Teoremas 4.3.1 y 4.3.2 sólo analizan los casos  $1 < a < 2$  y  $0 < a < 1$ . ¿Qué pasa en el caso  $a = 1$ ? De acuerdo al Ejemplo 4.1.4, si  $a = 1$ , o equivalentemente,  $\alpha = 2 - a = 1$ , corresponde al coalescente de Bolthausen-Sznitman. Por lo tanto, podemos enunciar el siguiente teorema.

**Teorema 4.3.3** *Para el coalescente de Bolthausen-Sznitman, el número de colisiones  $X_n$  satisfacen*

$$\frac{(\log n)^2}{n} X_n - \log n - \log(\log n) \xrightarrow{\mathcal{L}} X, \quad (4.3.4)$$

donde  $X$  tiene ley 1-estable cuya función característica es

$$\mathbb{E}[e^{itX}] = \exp\left(it \log |t| - \frac{\pi}{2}|t|\right), \quad t \in \mathbb{R}.$$

**Demostración.** Como ya se dijo arriba, el coalescente de Bolthausen-Sznitman corresponde al caso en que  $a = b = 1$ , entonces las probabilidades  $p_k$  para  $k \geq 1$  se reducen a

$$p_k = \frac{(2-1)\Gamma(1+k-1)}{\Gamma(1)\Gamma(k+2)} = \frac{\Gamma(k)}{\Gamma(k+2)} = \frac{1}{k(k+1)}.$$

Además, para  $n \geq 2$  se tiene que

$$\sum_{k=1}^{n-1} p_k = 1 - \frac{\Gamma(1+n-1)}{\Gamma(n+1)\Gamma(1)} = 1 - \frac{\Gamma(n)}{\Gamma(n+1)} = 1 - \frac{1}{n} = \frac{n-1}{n}.$$

Entonces, en este caso, la ley del tamaño del primer salto de  $Y^{(n)}$  se escribe como

$$\mathbb{P}(I_n = k) = \frac{n}{n-1} \cdot \frac{1}{k(k+1)}, \quad k, n \in \mathbb{N} \text{ con } k < n.$$

Luego,

$$\mathbb{P}(\xi' \geq n) = \frac{\Gamma(1+n-1)}{\Gamma(1)\Gamma(n+1)} = \frac{1}{n} \sim \frac{L(n)}{n},$$

donde  $L(x) := 1$  es de variación lenta en  $\infty$ . También se tiene,

$$\mathbb{E}[\xi'] = \sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{P}(\xi' \geq n) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = \infty.$$

por lo tanto, si definimos las funciones  $c(x) := x$ ,

$$b(x) := \frac{x}{\log x} + \frac{x \log(\log x)}{(\log x)^2} \quad \text{y} \quad a(x) := \frac{b^2(x)}{x} \sim \frac{x}{(\log x)^2},$$

podemos usar el Teorema 3.1.9 para concluir que

$$\begin{aligned} \frac{(\log n)^2}{n} X_n - \log n - \log(\log n) &= \frac{(\log n)^2 X_n - n \log n - n \log(\log n)}{n} \\ &= \frac{X_n - \left( \frac{n}{\log n} + \frac{n \log(\log n)}{(\log n)^2} \right)}{\frac{n}{(\log n)^2}} \\ &\sim \frac{X_n - b(n)}{a(n)} \xrightarrow{\mathcal{L}} X \quad \text{cuando } n \rightarrow \infty, \end{aligned}$$

donde  $X$  tiene distribución 1-estable. Esto demuestra el teorema. □





# Apéndice A

## Funciones de Variación Regular

Para lo que sigue, vamos a usar la siguiente notación. Si  $f$  y  $g$  son funciones, decimos que  $f(\cdot) \sim g(\cdot)$  si

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{g(x)} = 1.$$

Vamos a denotar por  $L$  a una función de variación lenta en  $\infty$ , esto es, para todo  $\lambda \in \mathbb{R}^+$  se tiene  $L(\lambda x) \sim L(x)$  cuando  $x \rightarrow \infty$ .

**Teorema A.0.4 (Teorema de Convergencia Uniforme)** *Si  $f$  es una función de variación regular en  $\infty$  de índice  $\rho$ , entonces (en el caso  $\rho > 0$ , se supone  $f$  acotada en cada intervalo  $(0, X]$ )*

$$\begin{aligned} f(\lambda x)/f(x) &\rightarrow \lambda^\rho, \quad x \rightarrow \infty \text{ uniformemente en } \lambda \\ \text{en cada intervalo } [a, b], \quad &0 < a \leq b < \infty \quad \text{si } \rho = 0, \\ \text{en cada intervalo } (0, b], \quad &0 < b < \infty \quad \text{si } \rho > 0, \\ \text{en cada intervalo } [a, \infty), \quad &0 < a < \infty \quad \text{si } \rho < 0. \end{aligned}$$

**Definición A.0.5** Decimos que una función  $f$  es **localmente acotada** en  $A$  si es acotada en cada subconjunto compacto de  $A$ .

**Definición A.0.6** Sea  $f$  una función a valores reales definida en  $E \subset \mathbb{R}$ . Definimos la **variación total** de  $f$  en  $E$  como

$$V(f; E) = \sup \sum_{j=1}^n |f(x_j) - f(x_{j-1})|,$$

en donde el supremo se toma sobre todos los puntos  $x_0 \leq x_1 \leq \dots \leq x_n$  en  $E$ .

**Definición A.0.7** (i) Sea  $I$  un intervalo de  $\mathbb{R}$ . Decimos que una función  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$  continua por la derecha es de **variación acotada** en  $I$  si  $V(f; I) < \infty$ .

(ii) Decimos que  $f$  es **localmente de variación acotada** si  $V(f; J)$  para cada  $J \subset I$  compacto.

**Teorema A.0.8 (Teorema de Potter)** (i) Si  $L$  es de variación lenta en  $\infty$ , entonces para cualesquiera constantes  $A > 0$ ,  $\delta > 0$ , existe  $X = X(A, \delta)$  tal que

$$\frac{L(y)}{L(x)} \leq A \max \left\{ \left( \frac{y}{x} \right)^\alpha, \left( \frac{y}{x} \right)^{-\alpha} \right\}, \quad x \geq X, y \geq X.$$

(ii) Si además,  $L$  es acotada fuera de  $0$  e  $\infty$  sobre cualquier subconjunto compacto de  $[0, \infty)$ , entonces para todo  $\delta > 0$  existe  $A' = A'(\delta) > 1$  tal que

$$\frac{L(y)}{L(x)} \leq A' \max \left\{ \left( \frac{y}{x} \right)^\alpha, \left( \frac{y}{x} \right)^{-\alpha} \right\}, \quad x > 0, y > 0.$$

(iii) Si  $f$  es de variación regular en  $\infty$  de índice  $\rho$ , entonces para cualesquiera constantes  $A > 0$ ,  $\delta > 0$ , existe  $X = X(A, \delta)$  tal que

$$\frac{f(y)}{f(x)} \leq A \max \left\{ \left( \frac{y}{x} \right)^{\rho+\alpha}, \left( \frac{y}{x} \right)^{\rho-\alpha} \right\}, \quad x \geq X, y \geq X.$$

**Teorema A.0.9** Si  $L$  es una función de variación lenta en  $\infty$  que es localmente acotada en  $[X, \infty)$  para  $X$  suficientemente grande, y  $\alpha > -1$ , entonces

$$\int_X^x t^\alpha L(t) dt \sim \frac{x^{\alpha+1} L(x)}{\alpha+1}, \quad x \rightarrow \infty. \quad (\text{A.0.1})$$

**Demostración.** Elijamos  $\delta \in (0, \alpha + 1)$ . Tomando  $X(2, \delta)$  como en el inciso (i) del Teorema de Potter, tomemos  $X' = \max\{X, X(2, \delta)\}$ . Escribamos

$$\frac{1}{x^{\alpha+1} L(x)} \int_{X'}^x t^\alpha L(t) dt = \int_0^1 \frac{L(ux)}{L(x)} 1_{\{X'/x, 1\}}(u) u^\alpha du, \quad (\text{A.0.2})$$

el integrando del lado derecho de (A.0.2) converge a  $u^\alpha$  puntualmente, y por el Teorema de Potter está dominado por  $2u^{\alpha-\delta}$ . Por el Teorema de Convergencia Dominada, esta integral converge a

$$\int_0^1 u^\alpha du = \frac{1}{\alpha+1}.$$

Luego, como el lado derecho de (A.0.2) tiende a  $\infty$ , uno puede cambiar  $X'$  por  $X$ , y de esta manera, se tiene el resultado.  $\square$

**Teorema A.0.10 (Teorema Tauberiano de Karamata)** *Sea  $U$  una función continua en  $\mathbb{R}$  por la derecha no decreciente con  $U(x) = 0$  para todo  $x < 0$ . Si  $L$  es una función de variación lenta en  $\infty$ , y  $c \geq 0, \rho \geq 0$ , entonces las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

$$U(x) \sim \frac{cx^{\rho+1}L(x)}{\Gamma(1+\rho)}, \quad x \rightarrow \infty, \quad (\text{A.0.3})$$

$$\hat{U}(s) \sim cs^{-\rho}L(1/s), \quad s \downarrow 0. \quad (\text{A.0.4})$$

**Demostración.** Vamos a suponer que se cumple (A.0.3). Para  $x > 0$ , tenemos que

$$\begin{aligned} \hat{U}(1/x) &= \int_0^\infty e^{-y/x} dU(y) = \int_0^x e^{-y/x} dU(y) + \int_x^\infty e^{-y/x} dU(y) \\ &= \int_0^x e^{-y/x} dU(y) + \sum_{n=1}^\infty \int_{2^{n-1}x}^{2^n x} e^{-y/x} dU(y) \\ &\leq U(x) + \sum_{n=1}^\infty e^{-2^{n-1}} U(2^n x) \\ &\leq \frac{2c}{\Gamma(1+\rho)} \left[ x^\rho L(x) + \sum_{n=1}^\infty e^{-2^{n-1}} (2^n x)^\rho L(2^n x) \right], \quad \text{para } x \text{ grande.} \end{aligned}$$

Luego, por (iii) del Teorema de Potter, para  $x$  suficientemente grande, tenemos que esto último es a lo más

$$\frac{2cx^\rho L(x)}{\Gamma(1+\rho)} \left[ 1 + \sum_{n=1}^\infty e^{-2^{n-1}} 2(2^n)^{1+\rho} \right],$$

así,  $\hat{U}(1/x)/(x^\rho L(x))$  se vuelve acotada para  $x \rightarrow \infty$ . Ahora, para  $x$  fijo,  $U(yx)$  tiene transformada de Laplace  $\hat{U}(s/x)$ , así  $U(yx)/(x^\rho L(x))$  tiene transformada de Laplace  $\hat{U}(s/x)/(x^\rho L(x))$ . De acuerdo a (A.0.3), y teniendo en cuenta que  $L$  es una función de variación lenta en  $\infty$ , para cada  $y$ , esto da

$$\frac{U(yx)}{x^\rho L(x)} \rightarrow \frac{cy^\rho}{\Gamma(1+\rho)}, \quad x \rightarrow \infty, \quad (\text{A.0.5})$$

y esto último tiene transformada de Laplace

$$\frac{c}{\Gamma(1+\rho)} \int_0^\infty e^{-sy} d(y^\rho) = \frac{c}{s^\rho}.$$

Esto siempre se cumple para  $\rho = 0$ , y para  $y \neq 0$  fijo, el lado izquierdo de (A.0.5) converge a  $c1_{[0,\infty)}(y)$ , con transformada  $c$ . Como  $\hat{U}(1/x)/(x^\rho L(x))$  es acotada, entonces podemos aplicar el teorema de continuidad para transformadas de Laplace de medidas positivas, y esto nos da

$$\frac{\hat{U}(s/x)}{x^\rho L(x)} \rightarrow \frac{c}{s^\rho}, \quad x \rightarrow \infty, \quad (\text{A.0.6})$$

para cada  $s > 1$ . Luego, haciendo  $s = 2$ , y escribiendo  $2/s$  como  $x$ , nos da (A.0.4). Ahora supongamos que (A.0.4) se cumple, por la variación lenta se sigue (A.0.6) para cada  $s > 0$ . Ahora, la parte izquierda de (A.0.6) es la transformada de Laplace de  $U(yx)/(x^\rho L(x))$ , la parte derecha es la transformada de Laplace de  $cy^\rho/\Gamma(1 + \rho)$ , y la parte izquierda está acotada por  $s = 1$ ; entonces por el teorema de continuidad para transformadas de Laplace, esto implica (A.0.5). Tomando  $y = 1$  da (A.0.3).  $\square$

**Definición A.0.11** Una función  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  se dice que es *últimamente monótona* si existe  $a \in \mathbb{R}$  tal que  $f$  es monótona en el intervalo  $[a, \infty)$ .

**Teorema A.0.12 (Teorema de Densidad Monótona)** Sea  $U(x) = \int_0^x u(y) dy$ . Si  $U(x) \sim cx^\rho L(x)$  cuando  $x \rightarrow \infty$ , con  $c \in \mathbb{R}$ ,  $\rho \in \mathbb{R}$  y  $L$  de variación lenta en  $\infty$ , y si  $u$  es últimamente monótona, entonces

$$u(x) \sim c\rho x^{\rho-1} L(x), \quad x \rightarrow \infty. \quad (\text{A.0.7})$$

**Demostación.** Primero supongamos que  $u$  es eventualmente no decreciente. Si  $0 < a < b < \infty$ , entonces

$$U(bx) - U(ax) = \int_{ax}^{bx} u(y) dy,$$

así, para  $x$  suficientemente grande,

$$\frac{(b-a)xu(ax)}{x^\rho L(x)} \leq \frac{U(bx) - U(ax)}{x^\rho L(x)} \leq \frac{(b-a)xu(bx)}{x^\rho L(x)}. \quad (\text{A.0.8})$$

Reescribiendo el término de en medio de (A.0.8), tenemos que

$$\frac{U(bx)}{(bx)^\rho L(bx)} b^\rho \frac{L(bx)}{L(x)} - \frac{U(ax)}{(ax)^\rho L(ax)} a^\rho \frac{L(ax)}{L(x)} \rightarrow c(b^\rho - a^\rho), \quad x \rightarrow \infty,$$

esto último es gracias a que  $L$  es una función de variación lenta en  $\infty$  y por la hipótesis sobre  $U$ . Luego, la desigualdad izquierda de (A.0.8) da

$$\limsup_{x \rightarrow \infty} \frac{u(ax)}{x^{\rho-1}L(x)} \leq \frac{c(b^\rho - a^\rho)}{b - a},$$

tomando  $a = 1$  y haciendo  $b \downarrow 1$ , se tiene que

$$\limsup_{x \rightarrow \infty} \frac{u(x)}{x^{\rho-1}L(x)} \leq c\rho.$$

De manera similar, podemos trabajar con la desigualdad derecha en (A.0.8) con  $b = 1$  y haciendo  $a \uparrow 1$  encontramos que

$$\liminf_{x \rightarrow \infty} \frac{u(x)}{x^{\rho-1}L(x)} \geq c\rho.$$

Así, la conclusión se sigue. Si suponemos que  $u$  es no creciente, el argumento es similar al anterior. Con esto, queda demostrado el teorema.  $\square$

**Teorema A.0.13 (Teorema Tauberiano de Karamata para series de potencias)**

Si  $a_n \geq 0$  y la serie de potencias  $A(s) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n s^n$  converge para  $s \in [0, 1)$ , entonces para  $c, \rho \geq 0$  y  $L$  una función de variación lenta en  $\infty$ , se tiene

$$\sum_{k=0}^n a_k \sim \frac{cn^\rho L(n)}{\Gamma(1 + \rho)}, \quad n \rightarrow \infty, \quad (\text{A.0.9})$$

si y sólo si

$$A(s) \sim \frac{cL((1-s)^{-1})}{(1-s)^\rho}, \quad s \uparrow 1. \quad (\text{A.0.10})$$

Si  $c\rho > 0$  y  $a_n$  es últimamente monótona, entonces ambas afirmaciones son equivalentes a

$$a_n \sim \frac{cn^{\rho-1}L(n)}{\Gamma(\rho)}, \quad n \rightarrow \infty. \quad (\text{A.0.11})$$

**Demostración.** Definamos

$$U(x) := \sum_{k=0}^n a_k, \quad \text{para } n \leq x < n + 1.$$

Vemos que (A.0.9) es equivalente a

$$U(x) \sim \frac{cx^\rho L(x)}{\Gamma(\rho + 1)}, \quad x \rightarrow \infty, \quad (\text{A.0.12})$$

ya que  $L(x) \sim L(n)$  para  $n \leq x < n + 1$  por el *Teorema de Convergencia Uniforme*. De igual manera, (A.0.11) es equivalente a

$$u(x) \sim \frac{cx^{\rho-1}L(x)}{\Gamma(\rho)}, \quad x \rightarrow \infty, \quad (\text{A.0.13})$$

donde  $u(x) := a_n$  para  $n \leq x < n + 1$ . Luego, por el Teorema A.0.10, (A.0.12) es equivalente a  $\hat{U}(s) \sim cs^{-\rho}L(1/s)$  cuando  $s \downarrow 0$ , o bien, equivalente a  $\hat{U}(1-s) \sim c(1-s)^{-\rho}L(1/(1-s))$  cuando  $s \uparrow 1$ . Pero

$$\hat{U}(1-s) = \int_0^\infty e^{-(1-s)x} dU(x) = \sum_{n=0}^\infty \int_n^{n+1} e^{-(1-s)x} u(x) dx,$$

y además

$$A(s) = \sum_{n=0}^\infty a_n s^n \sim \sum_{n=0}^\infty a_n e^{-(1-s)n} = \sum_{n=0}^\infty \int_n^{n+1} e^{-(1-s)x} u(x) dx = \hat{U}(1-s), \quad s \uparrow 1.$$

Luego, por Teorema A.0.10, (A.0.9) es equivalente a (A.0.10). Y por Teorema A.0.12, (A.0.9) y (A.0.10) implican (A.0.11). Esto demuestra el teorema.  $\square$

**Definición A.0.14** Una función  $f : [X, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$  se dice que es **lentamente decreciente** si

$$\lim_{\lambda \downarrow 1} \liminf_{x \rightarrow \infty} \inf_{t \in [1, \lambda]} [f(tx) - f(x)] \geq 0, \quad (\text{A.0.14})$$

y es **lentamente creciente** si  $-f$  es **lentamente decreciente**.

**Teorema A.0.15** Sean  $c, \rho \in \mathbb{R}$   $L$  una función de variación lenta en  $\infty$  y  $U \in L^1_{loc}[0, \infty)$  y que se cumple una de las siguientes condiciones,

$$(i) \lim_{\lambda \downarrow 1} \liminf_{x \rightarrow \infty} \inf_{t \in [1, \lambda]} \frac{U(tx) - U(x)}{x^\rho L(x)} \geq 0$$

$$(ii) \frac{U(x)}{x^\rho L(x)} \text{ es lentamente decreciente,}$$

(iii)  $U$  es eventualmente positiva y  $\log U$  es lentamente decreciente.

Entonces

$$\int_0^x U(t) dt \sim cx^{\rho+1}L(x), \quad x \rightarrow \infty,$$

implica

$$U(x) \sim c(\rho+1)x^\rho L(x), \quad x \rightarrow \infty. \quad (\text{A.0.15})$$

Las condiciones (i), (ii) y (iii) son llamadas condiciones tauberianas.

**Demostración.** Vamos a suponer que se cumple (i). Entonces para cada  $\varepsilon > 0$ , existen  $X = X(\varepsilon)$ ,  $\lambda = \lambda(\varepsilon) > 1$  tal que

$$U(y) - U(x) \geq -\varepsilon x^\rho L(x), \quad y \geq x \geq X, \quad y/x \leq \lambda. \quad (\text{A.0.16})$$

Para  $b \in (1, \lambda]$ ,

$$\int_x^{bx} U(y) dy \sim (b^{\rho+1} - 1)cx^{\rho+1}L(x).$$

Pero el lado izquierdo es al menos  $(bx - x)(U(x) - \varepsilon x^\rho L(x))$  para  $x$  muy grande. Así,

$$\limsup_{x \rightarrow \infty} \frac{U(x)}{x^\rho L(x)} \leq \frac{c(b^{\rho+1} - 1)}{(b-1) + \varepsilon}.$$

Luego, si hacemos  $b \downarrow 1$  y  $\varepsilon \downarrow 0$ , se tiene que el  $\limsup$  anterior es a lo más  $c(\rho+1)$ . Por otra parte, para  $b \in [1/\lambda, 1)$ ,

$$\int_{by}^y U(x) dx \sim (b^{\rho+1} - 1)cy^{\rho+1}L(y), \quad y \rightarrow \infty,$$

luego, para  $y$  muy grande, el lado izquierdo es a lo más

$$\int_{by}^y [U(x) + \varepsilon x^\rho L(x)] dx = (1-b)yU(y) + \varepsilon(1+o(1))y^{\rho+1}L(y) \int_b^1 t^\rho dt.$$

Así, si hacemos  $b \uparrow 1$  y  $\varepsilon \downarrow 0$ , se tiene que el  $\liminf$  anterior es al menos  $c(\rho+1)$ . Por lo tanto, se sigue (A.0.15). □

**Teorema A.0.16 (Teorema de Karamata, forma extendida)** *Supongamos que  $U(\cdot) \geq 0$ ,  $c \geq 0$ ,  $\rho > -1$ ,  $\hat{U}(s) := s \int_0^\infty e^{-sx} U(x) dx$  es convergente y  $L$  es una función de variación lenta en  $\infty$ . Entonces*

$$U(x) \sim \frac{cx^\rho L(x)}{\Gamma(1+\rho)}, \quad x \rightarrow \infty, \quad (\text{A.0.17})$$

*implica que*

$$\hat{U}(s) \sim cs^{-\rho} L(1/s), \quad s \downarrow 0. \quad (\text{A.0.18})$$

*Recíprocamente, (A.0.18) implica que (A.0.17) si y sólo si  $U$  satisface una de las siguientes condiciones tauberianas enunciadas, donde  $\rho \in \mathbb{R}$ ,  $c \in \mathbb{R}$ ,  $L$  y  $U$  son como en el Teorema A.0.15.*

**Demostración.** Escribamos  $V(x) = \int_0^x U(y) dy$ , entonces  $V$  es no decreciente y su transformada de Laplace se puede escribir como

$$\hat{V}(s) = \int_0^\infty e^{-sx} dV(x) = \frac{\hat{U}(s)}{s}.$$

De esta manera, (A.0.18) es equivalente a  $\hat{V}(s) \sim cs^{-(\rho+1)} L(1/s)$ , el cual, por la forma monótona del Teorema Tauberiano de Karamata es equivalente a

$$V(x) \sim \frac{cx^{\rho+1} L(x)}{(\rho+1)\Gamma(\rho+1)}, \quad x \rightarrow \infty. \quad (\text{A.0.19})$$

Por el Teorema A.0.9, (A.0.17) implica (A.0.19), y como (A.0.19) es equivalente a  $\hat{V}(s) \sim cs^{-(\rho+1)} L(1/s)$ , cuando  $s \downarrow 0$ , entonces

$$\hat{U}(s) = s\hat{V}(s) \sim c s s^{-(\rho+1)} L(1/s) = cs^{-\rho} L(1/s), \quad s \downarrow 0.$$

Vamos a suponer que (i), (ii) o (iii) se satisfacen, supongamos también que (A.0.18) se cumple. Entonces por lo probado arriba, tenemos que

$$\hat{V}(s) = \frac{\hat{U}(s)}{s} \sim cs^{-(\rho+1)} L(1/s), \quad s \downarrow 0,$$

lo cual es equivalente a

$$\int_0^x U(t) dt = V(x) \sim \frac{cx^{\rho+1} L(x)}{(\rho+1)\Gamma(\rho+1)}, \quad x \rightarrow \infty. \quad (\text{A.0.20})$$



Entonces, por el Teorema A.0.15, se tiene

$$U(x) \sim \frac{1}{(\rho + 1)\Gamma(\rho + 1)} \cdot c(\rho + 1)x^\rho L(x) = \frac{cx^\rho L(x)}{\Gamma(\rho + 1)}, \quad x \rightarrow \infty.$$

Ahora supongamos que (A.0.17) implica (A.0.18). Entonces

$$\frac{U(x)}{x^\rho L(x)} \sim \frac{cx^\rho L(x)}{x^\rho L(x)\Gamma(\rho + 1)} = \frac{c}{\Gamma(\rho + 1)}, \quad x \rightarrow \infty.$$

Esto implica que

$$\lim_{\lambda \downarrow 1} \liminf_{x \rightarrow \infty} \inf_{t \in [1, \lambda]} \frac{U(tx) - U(x)}{x^\rho L(x)} = 0,$$

por lo cual se cumple (i). Esto demuestra completamente el teorema.  $\square$

Para la enunciación del siguiente teorema, vamos a usar la siguiente notación. Consideremos la ley  $F$  en  $(A, \infty)$  para algún número finito  $A$ . Definamos las siguientes funciones,

$$T_\sigma(x) := \int_x^\infty y^\sigma dF(y) \quad \text{y} \quad V_\sigma(x) := \int_A^x y^\sigma dF(y). \quad (\text{A.0.21})$$

Sean  $\alpha < \beta$  números reales. Introduzcamos la siguiente condición:

$$\int_A^\infty y^\alpha dF(y) < \infty, \quad \int_A^\infty y^\beta dF(y) = \infty. \quad (\text{A.0.22})$$

**Teorema A.0.17** *Si la condición A.0.22 se cumple, y si  $T_\alpha$  y  $V_\beta$  son funciones de variación regular, entonces el siguiente límite existe,*

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^{\beta-\alpha} T_\alpha(x)}{V_\beta(x)} = \gamma \in [0, \infty], \quad (\text{A.0.23})$$

*y si, además,  $\alpha < 0$ , entonces  $\gamma \in [0, \beta/(-\alpha)]$ . Recíprocamente, si (A.0.23) se cumple y definiendo  $\rho \in [\alpha, \beta]$  mediante*

$$\gamma = \frac{\beta - \rho}{\rho - \alpha}, \quad (\text{A.0.24})$$

*existe una función  $L$  de variación lenta en  $\infty$ , tal que*

$$\frac{V_\beta(x)}{x^{\beta-\rho} L(x)} \rightarrow \rho - \alpha, \quad \frac{T_\alpha(x)}{x^{\rho-\alpha} L(x)} \rightarrow \beta - \rho, \quad x \rightarrow \infty. \quad (\text{A.0.25})$$

**Lema A.0.18** Para cualquier ley  $F$  en  $[0, \infty)$  y cualquier  $\alpha > 0$ , tenemos

$$\int_0^\infty x^\alpha dF(x) = \alpha \int_0^\infty x^{\alpha-1} [1 - F(x)] dx.$$

**Demostración.** Vemos que

$$\begin{aligned} \alpha \int_0^\infty x^{\alpha-1} [1 - F(x)] dx &= \alpha \int_0^\infty x^{\alpha-1} \int_x^\infty dF(y) dx \\ &= \int_0^\infty \left( \int_0^y \alpha x^{\alpha-1} dx \right) dF(y) = \int_0^\infty x^\alpha dF(x), \end{aligned}$$

en la segunda igualdad se usó el Teorema de Tonelli.  $\square$

Para lo que sigue, vamos a denotar por  $\mu_n$  al  $n$ -ésimo momento de la ley  $F$  en  $[0, \infty)$  mediante

$$\mu_n := \int_0^\infty x^n dF(x), \quad n = 0, 1, \dots$$

Cuando  $\mu_n < \infty$ , la transformada de Laplace  $\hat{F}$  de  $F$  se puede expandir en serie de Taylor alrededor de 0, esto es

$$\hat{F}(s) = \sum_{k=0}^n \mu_k \frac{(-s)^k}{k!} + o(s^n), \quad s \downarrow 0.$$

Para comparar el comportamiento de la cola de  $F$  con el de  $\hat{F}$  en el origen debemos eliminar el polinomio de Taylor  $\sum_{k=0}^n \mu_k (-s)^k / k!$ ; esto lo haremos de la siguiente manera

$$\begin{aligned} f_n(s) &= (-1)^{n+1} \left( \hat{F}(s) - \sum_{k=0}^n \mu_k \frac{(-s)^k}{k!} \right), \\ g_n(s) &= \frac{d^n}{ds^n} f_n(s) = \mu_n - (-1)^n \frac{d^n}{ds^n} \hat{F}(s). \end{aligned}$$

Con esto, vemos que  $f_0(s) = g_0(s) = 1 - \hat{F}(s)$ .

**Teorema A.0.19 (Bingham y Doney (1974))** Para  $L$  función de variación lenta en  $\infty$ ,  $\mu_n < \infty$  para  $n \in \mathbb{Z}^+$  y  $\alpha = n + \beta$  con  $\beta \in [0, 1]$ , las siguientes afirmaciones son equivalentes:

(i)  $f_n(s) \sim s^\alpha L(1/s)$ ,  $s \downarrow 0$ .

$$(ii) \quad g_n(s) \sim \frac{\Gamma(\alpha + 1)}{\Gamma(\beta + 1)} s^\beta L(1/s), \quad s \downarrow 0.$$

$$(iii) \quad \text{Cuando } \beta = 0, \int_x^\infty t^n dF(t) \sim n!L(x), \quad x \rightarrow \infty.$$

$$(iv) \quad \text{Cuando } 0 < \beta < 1, \text{ se tiene } 1 - F(x) \sim \frac{(-1)^n}{\Gamma(1 - \alpha)} x^{-\alpha} L(x), \quad x \rightarrow \infty.$$

$$(v) \quad \text{Cuando } \beta = 1, \int_0^x t^{n+1} dF(t) \sim (n + 1)!L(x), \quad x \rightarrow \infty.$$

Cuando  $\beta > 0$ , todas las afirmaciones anteriores son equivalentes a

$$(-1)^{n+1} \hat{F}^{(n+1)}(s) \sim \frac{\Gamma(\alpha + 1)}{\Gamma(\beta)} s^{\beta-1} L(1/s), \quad s \downarrow 0. \quad (\text{A.0.26})$$

**Corolario A.0.20** Para  $\alpha \in [0, 1]$ , y  $L$  una función de variación lenta en  $\infty$ , las siguientes afirmaciones son equivalentes:

$$\begin{aligned} 1 - \hat{F}(s) &\sim s^\alpha L(1/s), \quad s \downarrow 0 \\ 1 - F(x) &\sim \frac{L(x)}{x^\alpha \Gamma(1 - \alpha)}, \quad x \rightarrow \infty, \quad \alpha \in [0, 1). \end{aligned} \quad (\text{A.0.27})$$

Para  $\alpha = 1$ , se tienen las siguientes equivalencias,

$$\begin{aligned} \int_0^x y dF(y) &\sim L(x), \quad x \rightarrow \infty \\ \int_0^x [1 - F(y)] dy &\sim L(x), \quad x \rightarrow \infty. \end{aligned}$$

**Demostración.** Supongamos que  $\alpha = 1$ . Por el Lema A.0.18, tenemos que

$$\int_0^x y dF(y) \sim \int_0^x [1 - F(y)] dy, \quad x \rightarrow \infty.$$

Por lo tanto, se tiene la equivalencia entre las afirmaciones

$$\begin{aligned} \int_0^x y dF(y) &\sim L(x), \quad x \rightarrow \infty \\ \int_0^x [1 - F(y)] dy &\sim L(x), \quad x \rightarrow \infty. \end{aligned}$$

Para  $\alpha \in [0, 1)$ , podemos usar los incisos (iv) y (v) del Teorema A.0.19 haciendo  $n = 0$  para concluir que las afirmaciones (A.0.27) son equivalentes.  $\square$

La teoría de Karamata, considera relaciones tales como  $\phi(\lambda x)/\phi(x) \rightarrow \psi(\lambda)$  cuando  $x \rightarrow \infty$ . Si hacemos  $f = \log \phi$  y  $k = \log \psi$ , entonces la relación anterior se convierte en

$$f(\lambda x) - f(x) \rightarrow k(\lambda), \quad x \rightarrow \infty.$$

En general, se consideran relaciones asintóticas de la forma

$$\frac{f(\lambda x) - f(x)}{g(x)} \rightarrow k(\lambda), \quad x \rightarrow \infty.$$

donde  $g : (0, \infty) \rightarrow (0, \infty)$  es llamada la *función auxiliar de  $f$* . Con frecuencia, se toma a la función  $g$  como de variación regular. Si  $g$  es una función de variación regular en  $\infty$  de índice  $\rho$ , entonces  $k(\lambda)$  debe tomar la forma  $ch(\lambda)$  para alguna constante  $c$ , donde, para  $\lambda > 0$ ,

$$h(\lambda) \equiv h_\rho(\lambda) := \int_1^\lambda u^{\rho-1} du = \begin{cases} \log \lambda & \text{si } \rho = 0 \\ \frac{\lambda^\rho - 1}{\rho} & \text{si } \rho \neq 0 \end{cases}$$

Para una función de variación regular  $g$  en  $\infty$  de índice  $\rho$ , definamos la clase  $\Pi_g$  de todas las funciones medibles que satisfacen

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(\lambda x) - f(x)}{g(x)} = ch_\rho(\lambda), \quad \forall \lambda > 0. \quad (\text{A.0.28})$$

Cuando  $\rho = 0$ , podemos escribir  $g$  como  $L$ , donde  $L$  es una función de variación lenta en  $\infty$ .

**Definición A.0.21** Definimos la *clase  $\Pi$  de Haan* al conjunto de todas las funciones  $f$  medibles para las cuales existe una función de variación lenta  $L$  en  $\infty$  tal que  $f \in \Pi_L$  con  $c \neq 0$ .

**Teorema A.0.22 (Teorema de Dynkin-Lamperti)** Cuando  $t \rightarrow \infty$ , existe una ley límite no degenerada para cada una de las variables aleatorias  $Y_t/t$ ,  $Z_t/t$  y  $(Y_t/t, Z_t/t)$  si y sólo si las siguientes afirmaciones se cumplen para  $\alpha \in (0, 1)$ :

$$(i) \quad 1 - F(x) \sim \frac{L(x)}{x^\alpha \Gamma(1 - \alpha)}, \quad x \rightarrow \infty.$$

$$(ii) \quad 1 - \hat{F}(s) \sim s^\alpha L(1/s), \quad s \downarrow 0.$$

$$(iii) \quad U(x) \sim \frac{x^\alpha}{L(x)\Gamma(1+\alpha)}, \quad x \rightarrow \infty.$$

Las correspondientes leyes límites tienen densidades  $q_\alpha(\cdot)$ ,  $p_\alpha(\cdot)$  y  $r_\alpha(\cdot, \cdot)$  respectivamente, donde

$$q_\alpha(x) = \frac{\sin \pi \alpha}{\pi} x^{-\alpha} (1-x)^{\alpha-1}, \quad 0 < x < 1,$$

$$p_\alpha(x) = \frac{\sin \pi \alpha}{\pi} \cdot \frac{1}{x^\alpha (1+x)}, \quad x > 0,$$

$$r_\alpha(u, v) = \frac{\alpha \sin \pi \alpha}{\pi} \cdot \frac{1}{(1-u)^{1-\alpha} (u+v)^{1+\alpha}}, \quad 0 < u < 1, v > 0.$$

**Teorema A.0.23** Si  $F$  es una ley sobre  $[0, \infty)$  y  $U$  es su función de renovación asociada, entonces las siguientes afirmaciones son equivalentes

$$(i) \quad \int_{[0,x]} y dF(y) \sim L(x), \quad x \rightarrow \infty, \text{ para alguna } L \text{ de variación lenta en } \infty.$$

$$(ii) \quad \int_0^x [1 - F(y)] dy \sim L(x), \quad x \rightarrow \infty, \text{ para alguna } l \text{ de variación lenta en } \infty.$$

$$(iii) \quad 1 - \hat{F}(s) \sim sL(1/s), \quad s \downarrow 0, \text{ para alguna } L \text{ de variación lenta en } \infty.$$

$$(iv) \quad \frac{x[1 - F(x)]}{\int_{[0,x]} y dF(y)} \rightarrow 0 \quad \text{cuando } x \rightarrow \infty.$$

**Demostración.** La equivalencia entre (i), (ii) y (iii) es una consecuencia de la Proposición 3.2.3 y el Corolario A.0.20, esto es, (i) y (ii) son equivalentes gracias al Teorema A.0.20, mientras que (ii) y (iii) son equivalentes debido a la Proposición 3.2.3. Por último, vemos que (i) y (iv) son equivalentes gracias al Teorema A.0.17 haciendo  $\alpha = 0$ ,  $\beta = \rho = 1$ .  $\square$

Para lo que sigue, vamos a necesitar las siguientes notaciones y definiciones.

Sea  $(X_t^x, \geq t \geq 0)$  un proceso de Markov con probabilidades de transición estacionarias  $P(x, dy, t)$  que empieza en  $x$ . Vamos a definir un “tiempo de ocupación”<sup>1</sup>

<sup>1</sup>En realidad, el tiempo de ocupación que un proceso de Markov estacionario  $X = (X_t, t \geq 0)$  pasa en  $B \subset S$  en el intervalo  $[0, t)$ , donde  $S$  es el espacio de estados de  $X$ , se define como

$$Y_t = \int_0^t 1_{\{X_u \in B\}} du, \quad t \geq 0.$$

mediante

$$H_t^x = \int_0^t V(X_u^x) du, \quad (\text{A.0.29})$$

donde  $V$  es una función no negativa y acotada. Esta variable aleatoria es finita y su media también lo es, y esta se puede escribir como

$$\mathbb{E}[H_t^x] = \int_0^t \mathbb{E}[V(X_u^x)] du = \int_0^t du \int_{\mathbb{R}} V(u) P(x, dy, u). \quad (\text{A.0.30})$$

Vemos que el comportamiento de  $\mathbb{E}[H_t^x]$  cuando  $t \rightarrow \infty$  está determinado por el comportamiento de

$$\int_0^\infty e^{-st} d_t \mathbb{E}[H_t^x] = \int_0^\infty s e^{-st} \mathbb{E}[H_t^x] dt. \quad (\text{A.0.31})$$

En seguida, introduzcamos la condición de Darling-Kac

$$\int_0^\infty e^{-st} d_t \mathbb{E}[H_t^x] \sim h(s), \quad s \downarrow 0, \text{ uniformemente en } x \in \{y : V(y) > 0\} \quad (\text{A.0.32})$$

para alguna función  $h(s) \rightarrow \infty, \quad s \downarrow 0$ .

Para mayor simplicidad, vamos a prescindir del subíndice  $x$  del tiempo de ocupación ( $H_t^x, t \geq 0$ ) y vamos a denotar a este proceso mediante  $H_t^x \equiv H_t$  para  $t \geq 0$ .

**Teorema A.0.24** *Bajo la condición (A.0.32), si  $h(1/\cdot)$  es una función de variación regular en  $\infty$  de índice  $\alpha \in [0, 1]$ , entonces  $H_t/h(1/t)$  converge en ley a  $G_\alpha$  cuando  $t \rightarrow \infty$ , donde  $G_\alpha$  es la ley de Mittag-Leffler.*

**Demostración.** Si  $h(1/t) = t^\alpha L(t)$  para alguna función  $L$  de variación lenta, entonces aplicando el Teorema Tauberiano de Karamata a (3.2.3) nos da

$$\mathbb{E}[H_t^k] \sim \frac{k! t^{k\alpha} L^k(t)}{\Gamma(1 + k\alpha)}, \quad t \rightarrow \infty,$$

así,

$$\mathbb{E} \left[ \left( \frac{H_t}{h(1/t)} \right)^k \right] \rightarrow \frac{k!}{\Gamma(1 + k\alpha)}, \quad t \rightarrow \infty,$$

y por lo tanto el resultado se sigue por el método de momentos. □

**Teorema A.0.25 (Teorema de Darling-Kac)** *Si la condición (A.0.32) se cumple y  $H_t/a(t)$  converge en ley a una ley no degenerada cuando  $t \rightarrow \infty$  para alguna función normalizadora  $a(\cdot)$ , entonces*

$$a(t) \sim Ch(1/t) \in R_\alpha,$$

para algunas constantes  $C > 0$ ,  $0 \leq \alpha < 1$ , y  $H_t/h(1/t)$  converge en ley a la distribución de Mittag-Leffler  $G_\alpha$ .

**Demostración.** Sea  $T$  una variable aleatoria que tiene distribución exponencial estándar independiente de el proceso  $X$ . Vemos que (3.2.3) se puede escribir como

$$\int_0^\infty e^{-t} \mathbb{E}[H_{t/s}/h(s)] dt \rightarrow k!, \quad s \downarrow 0,$$

o bien,

$$\mathbb{E}[H_{T/s}/h(s)] \rightarrow k!.$$

Notemos que el lado derecho de la ecuación anterior es el  $k$ -ésimo momento de  $T$ , y por el método de momentos, tenemos que

$$\mathbb{P}(H_{T/s}/h(s) \leq x) \rightarrow 1 - e^{-x}, \quad s \downarrow 0, \forall x \geq 0.$$

Esto es,

$$\int_0^\infty e^{-t} \mathbb{P}(H_{t/s}/h(s) \leq x) dt \rightarrow 1 - e^{-x}, \quad s \downarrow 0. \quad (\text{A.0.33})$$

Supongamos por hipótesis, que  $H_t/a(t) \rightarrow G$ , donde  $G$  es una ley no degenerada. Como  $H_t$  es no decreciente en  $t$ , podemos suponer que  $a(\cdot)$  es no decreciente. Así, la función  $a(t/s)/h(s)$  es no decreciente en  $t$ . Por el principio de selección de Helly, cada sucesión tal que  $\sigma_n \downarrow 0$ , contiene una subsucesión con  $s_n \downarrow 0$  tal que

$$a(t/s_n)/h(s_n) \rightarrow f(t), \quad n \rightarrow \infty,$$

para alguna función  $f$  no decreciente con valores en  $[0, \infty]$  en los puntos de continuidad de  $f$ . Reescribiendo (A.0.33), tenemos que

$$\int_0^\infty e^{-t} \mathbb{P}\left(\frac{H_{t/s}}{a(t/s)} \leq x \frac{h(s)}{a(t/s)}\right) dt \rightarrow 1 - e^{-x}, \quad s \downarrow 0,$$

haciendo  $s \downarrow 0$  a través de  $(s_n)_{n \geq 1}$  tenemos que

$$\int_0^\infty e^{-t} G(x/f(t)) dt = 1 - e^{-x}, \quad x > 0.$$

Si  $f$  toma el valor  $\infty$ , necesariamente en algún intervalo  $(t_0, \infty)$ , entonces el integrando es idénticamente  $e^{-t}G(0)$  en ese intervalo, y como  $G(0) < 1$  llegamos a una contradicción haciendo  $x \rightarrow \infty$ . De manera similar, podemos llegar a una contradicción cuando  $f$  toma el valor 0 en algún intervalo. La última ecuación dice que

$$\mathbb{E}[G(x/f(T))] = 1 - e^{-x},$$

o escribiendo  $H$  como la ley de  $f(T)$ ,

$$\int_0^\infty G(x/y)dH(y) = 1 - e^{-x}, \quad x > 0.$$

El lado izquierdo de esta última ecuación es conocida como la **convolución de Mellin-Stieltjes** de  $G$  y  $H$ . La transformada de Mellin-Stieltjes de  $1 - e^{-e^x}$  (la función característica de  $1 - e^{-e^x}$ ) es  $\Gamma(1 + it)$ , la cual es distinta de cero para todo  $t \in \mathbb{R}$ . Así, podemos encontrar la función característica de  $H(e^x)$  mediante división. Luego,  $H$  queda determinada de manera única (por la ley  $G$ ); consecuentemente,  $f$  también está determinada de manera única. Por lo tanto,  $f$  no depende de la elección de las sucesiones  $(\sigma_n)_{n \geq 1}$  y  $(s_n)_{n \geq 1}$ , lo cual da

$$a(t/s)/h(s) \rightarrow f(t), \quad s \downarrow 0, \quad \forall t > 0,$$

de donde

$$\frac{a(t/s)}{a(1/s)} \rightarrow \frac{f(t)}{f(1)}, \quad s \downarrow 0.$$

Por el Teorema 1.10.2,  $a \in R_\alpha$ ,  $\alpha \geq 0$ , y  $f(t) = f(1)t^\alpha$ . Entonces, lo anterior nos da  $a(1/s) \sim Ch(s)$ , donde  $C = f(1) \in (0, \infty)$ , así  $h(1/t) \in R_\alpha$ . Finalmente, la variable aleatoria  $f(T) = CT^\alpha$  tiene transformada de Mellin-Stieltjes  $\mathbb{E}[(CT^\alpha)^{it}] = C^{it}\Gamma(1 + \alpha it)$ , de donde la ley límite  $G$  tiene transformada de Mellin-Stieltjes

$$\frac{C^{-it}\Gamma(1 + it)}{\Gamma(1 + \alpha it)}.$$

Aparte del factor escalar, esto es  $\Gamma(1 + it)/\Gamma(1 + \alpha it)$  el cual es la transformada de la ley de Mittag-Leffler  $G_\alpha$  para  $0 \leq \alpha < 1$  de otro modo lo anterior no sería la transformada de Mellin-Stieltjes de ninguna ley de probabilidad no degenerada. Por lo tanto,  $h(1/t) \in R_\alpha$  para  $0 \leq \alpha < 1$ , y el resultado se sigue gracias la Teorema A.0.24.  $\square$



**Teorema A.0.26** Sea  $F$  una ley que cumple

$$1 - F(t) = L(t)/t, \quad t > 0,$$

donde  $L$  es una función de variación lenta en  $\infty$  y supongamos que la media de  $F$  es infinita. Entonces para  $0 \leq a \leq 1, b \geq 0$ ,

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \mathbb{P} \left( \frac{m(Y_t)}{m(t)} \leq a, \frac{m(Z_t)}{m(t)} \leq b \right) = \min\{a, b\}. \quad (\text{A.0.34})$$

donde  $Y_t = t - S_{N_t}$ ,  $Z_t = S_{N_{t+1}} - t$  para  $t \geq 0$  y  $N_t = \max\{n \geq 1 : S_n \leq t\}$  es la última vez que  $S$  está por debajo de  $t$ .

**Demostración.** Vamos a suponer que  $F$  es no aritmética. Sea  $g$  la función inversa de  $m$  continua estrictamente creciente, esto es,  $g(m(t)) = m(g(t)) = t$ . Como  $F$  tiene media infinita, tenemos que  $m(t) \rightarrow \infty$  cuando  $t \rightarrow \infty$ , así,  $g$  está definida en el intervalo  $[0, \infty)$ . Fijemos  $0 < a < 1, b > 0$  y sea

$$a_t = g(am(t)), \quad b_t = g(bm(t)). \quad (\text{A.0.35})$$

Vamos a demostrar que

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \mathbb{P}(Y_t \leq a_t, Z_t > b_t) = \max\{a, b\} - b, \quad (\text{A.0.36})$$

lo cual, es lo mismo que (A.0.34). Para probar (A.0.36), es necesaria la siguiente igualdad:

$$\mathbb{P}(Y_t \leq a, Z_t > b) = \int_{t-a}^t [1 - F(t + b - y)] U(dy). \quad (\text{A.0.37})$$

En efecto, por definición,  $Y_t = t - S_{N_t}$ ,  $Z_t = S_{N_{t+1}} - t$  y  $N_t = n$  si y sólo si  $S_n \leq t < S_{n+1}$ . Por lo tanto, el evento  $\{Y_t \leq a, Z_t > b\}$  ocurre si y sólo si para algún  $n$  se tiene que  $S_n = y$  para  $t - a \leq y \leq t$  y entonces  $Z_t = S_{n+1} - t = X_{n+1} + y - t > b$ . Gracias a la independencia entre  $S_n$  y  $X_{n+1}$ , la probabilidad condicional del segundo evento es simplemente  $\mathbb{P}(X_{n+1} > t + b - y) = 1 - F(t + b - y)$ . Multiplicando esto por  $F^{*n}(dy)$ , la distribución de  $S_n$  y sumando sobre todos los  $y$  tal que  $t - a \leq y \leq t$ , se obtiene

$$\mathbb{P}(Y_t \leq a, Z_t > b, N_t = n) = \int_{t-a}^t [1 - F(t + b - y)] F^{*n}(dy).$$

Sumando sobre todos los  $n \geq 0$  la ecuación anterior, llegamos a (A.0.37) ya que  $\sum_{n=0}^{\infty} F^{*n} = U$ .  $\square$

Para lo que sigue, vamos a utilizar algunas notaciones y definiciones. Sea  $S_0 = 0$  c.s. donde  $S_n = \sum_{i=1}^n X_i$ , para  $n \geq 1$  una caminata aleatoria en los enteros, donde  $(X_i)_{i \geq 1}$  son variables aleatorias independientes e idénticamente distribuidas con media  $\mathbb{E}[X_1] = \mu > 0$ . Definamos también  $M_n = \max_{1 \leq k \leq n} S_k$ , y para  $x \geq 0$ ,

$$M(x) = \max \{k \geq 1 : M_k \leq x\}.$$

En este caso,  $M(x) + 1$  es el primer tiempo de pasada fuera del intervalo  $(-\infty, x]$  por la caminata aleatoria  $(S_n)_{n \geq 1}$ . Para la demostración del Teorema 3.1.7 vamos a necesitar los siguientes resultados, el primero se puede encontrar en [27] y el otro en [23].

**Teorema A.0.27** *Supongamos que  $(\xi_n)_{n \geq 1}$  es una sucesión de variables aleatorias independientes e idénticamente distribuidas que satisfacen*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{P} \left( \frac{S_n - n\mu}{B_n} \leq a \right) = G_\alpha(a), \quad (\text{A.0.38})$$

donde  $G_\alpha$  es la función de distribución de una ley estable de índice  $\alpha \neq 1$  con la propiedad de que  $G_\alpha(0) = 0$  para  $0 < \alpha < 1$  y  $(B_n)_{n \geq 1}$  es una sucesión de constantes positivas normalizadoras que satisfacen (A.0.38). Entonces

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \mathbb{P} \left( \frac{M(x) - \mu^{-1}x}{\mu^{-1}B(x)} \geq -a \right) = G_\alpha(a), \quad 1 < \alpha \leq 2, \quad (\text{A.0.39})$$

donde, para el caso  $\alpha = 2$ ,  $B(x)$  satisface

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{xL(B(x))}{B(x)^2} = \frac{\mu}{k_1^2}, \quad \text{para algún } k_1 > 0,$$

y para el caso  $1 < \alpha < 2$ ,  $B(x)$  satisface

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{xL(B(x))}{B(x)^\alpha} = \frac{2 - \alpha}{\alpha k_2^\alpha} \mu, \quad \text{para algún } k_2 > 0.$$

**Demostración.** Primero, veamos el caso  $\alpha = 2$ . Escribamos

$$U(x) = \int_{|u| < x} u^2 d\mathbb{P}(X_1 < u),$$

entonces  $U(x) \sim L(x)$  cuando  $x \rightarrow \infty$ , donde  $L$  es una función de variación lenta en  $\infty$ . Además, existe una constante  $k_1 > 0$  tal que

$$\frac{nU(B_n)}{B_n^2} \rightarrow \frac{1}{k_1^2}, \quad n \rightarrow \infty. \quad (\text{A.0.40})$$

Ahora, sean  $n$  y  $x$  que crecen de tal manera que

$$x - n\mu \sim B_n a \quad (\text{A.0.41})$$

y vemos que

$$B(x) \sim B_n. \quad (\text{A.0.42})$$

Luego, de (A.0.40), (A.0.41) y (A.0.42), vemos que  $B(x)$  satisface

$$\frac{nU(B(x))}{B^2(x)} \rightarrow \frac{\mu}{k_1^2}, \quad x \rightarrow \infty. \quad (\text{A.0.43})$$

Entonces,

$$\mathbb{P}(M(x) < n) = \mathbb{P}\left(\frac{M(x) - x\mu^{-1}}{\mu^{-1}B(x)} < \frac{n\mu - x}{B(x)}\right) \rightarrow \mathbb{P}\left(\frac{M(x) - x\mu^{-1}}{\mu^{-1}B(x)} < -a\right), \quad x \rightarrow \infty. \quad (\text{A.0.44})$$

Por otra parte, tenemos que

$$\mathbb{P}(M(x) < n) = \mathbb{P}(M_n > x) = \mathbb{P}\left(\frac{M_n - n\mu}{B_n} > \frac{x - n\mu}{B_n}\right) \rightarrow 1 - G_\alpha(a), \quad x \rightarrow \infty. \quad (\text{A.0.45})$$

Por lo tanto, de (A.0.44) y (A.0.45), se obtiene

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \mathbb{P}\left(\frac{M(x) - x\mu^{-1}}{\mu^{-1}B(x)} \geq -a\right) = G_\alpha(a),$$

que era lo que se quería.

Ahora consideremos el caso  $1 < \alpha < 2$ . En este caso, podemos escribir

$$\mathbb{P}(|X_1 - \mu| > x) \sim x^{-\alpha} L(x), \quad x \rightarrow \infty,$$

donde  $L(x)$  es una función de variación lenta en  $\infty$  y para algún  $k_2 > 0$  se cumple que

$$\frac{nL(B_n)}{B_n^\alpha} \rightarrow \frac{2 - \alpha}{\alpha k_2^\alpha}, \quad n \rightarrow \infty. \quad (\text{A.0.46})$$

Como antes, hagamos crecer a  $x$  y a  $n$  de tal forma que

$$x - n\mu \sim B_n a \quad (\text{A.0.47})$$

y con ello tenemos que

$$B(x) \sim B_n. \quad (\text{A.0.48})$$

Luego, de (A.0.46), (A.0.47) y (A.0.48) tenemos que  $B(x)$  satisface

$$\frac{xL(B(x))}{B^\alpha(x)} \rightarrow \frac{2-\alpha}{\alpha k_2^\alpha} \mu, \quad x \rightarrow \infty. \quad (\text{A.0.49})$$

El resto de la demostración es como arriba.  $\square$

**Teorema A.0.28** Si  $\sigma^2 := \text{Var}(\xi) < \infty$ , entonces

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{P} \left( N_n \geq \frac{n}{\mu} - \frac{\sigma x}{\mu^{3/2}} n^{1/2} \right) = \Phi(x) := \frac{1}{(2\pi)^{1/2}} \int_{-\infty}^x e^{-y^2/2} dy. \quad (\text{A.0.50})$$

**Demostración.** Si  $\sigma^2 := \text{Var}(X_1) < \infty$ , podemos usar la igualdad

$$\mathbb{P}(N_n \geq m) = \mathbb{P}(S_m \leq n) \quad (\text{A.0.51})$$

y el teorema del límite central, y obtenemos, para  $x$  fijo

$$\mathbb{P}(S_k \leq k\mu + k^{1/2}\sigma x) \rightarrow \Phi(x) = \frac{1}{(2\pi)^{1/2}} \int_{-\infty}^x e^{-y^2/2} dy.$$

Luego, haciendo  $n = k\mu + k^{1/2}\sigma x$ , vemos que

$$k = \frac{n}{\mu} - \frac{\sigma x}{\mu^{1/2}} k^{1/2} \sim \frac{n}{\mu} - \frac{\sigma x}{\mu^{3/2}} n^{1/2},$$

y por (A.0.51) tenemos que

$$\mathbb{P} \left( N_n \geq \frac{n}{\mu} - \frac{\sigma x}{\mu^{3/2}} n^{1/2} \right) \sim \mathbb{P} \left( N_n \geq \frac{n}{\mu} - \frac{\sigma x}{\mu^{1/2}} k^{1/2} \right) = \mathbb{P}(S_k \leq n) \rightarrow \Phi(x), \quad n \rightarrow \infty.$$

$\square$

**Teorema A.0.29** Una variable aleatoria con distribución  $F$  pertenece al dominio de atracción de una distribución estable si y sólo si existe una función  $L$  de variación lenta en  $\infty$  tal que

$$\mathbb{E}[X^2 1_{\{|X| \leq x\}}] \sim x^{2-\alpha} L(x), \quad x \rightarrow \infty. \quad (\text{A.0.52})$$

# Conclusiones

- La introducción de la variable aleatoria  $N_n$ , el tiempo que tarda la caminata aleatoria  $(S_n, n \geq 0)$  en sobrepasar el nivel  $n$ , jugó un papel crucial en la determinación del comportamiento asintótico de cualquier colección de variables aleatoria  $(M_n, n \geq 1)$  que cumplieran (3.1.2). Lo que se desarrolló en el Capítulo 3 aclara este punto. El comportamiento límite de  $N_n$  determinó el comportamiento límite de  $M_n$ .
- El método de momentos enunciado y demostrado en el Capítulo 2 fue pieza fundamental en la demostración de uno de los teoremas más importantes de este trabajo, a saber, el Teorema 3.1.6.
- Tres de los cuatro teoremas enunciados en el Capítulo 3 fueron utilizados para determinar el comportamiento asintótico de  $X_n$ , la variable aleatoria subyacente al  $\beta(a, b)$ -coalescente asociado en cuestión, en uno de cuyos casos apareció el *coalescente de Bolthausen-Sznitman* al hacer  $a = 1$  y  $b = 1$ . El *coalescente de Kingman* apareció cuando se consideró a la medida finita  $\Lambda$  en  $[0, 1]$  como la distribución Beta de parámetros  $2 - \alpha$  y  $\alpha$  con  $0 < \alpha < 2$  y haciendo  $\alpha \uparrow 2$ . El caso cuando  $a \geq 2$  se descartó, ya que el enfoque que se utiliza para estudiar a los  $\beta$ -coalescentes es muy diferente al de este trabajo.
- Vale la pena mencionar que existen resultados más generales y más fuertes que los mencionados en este trabajo de tesis. Estos hablan sobre la convergencia de procesos estocásticos muy particulares, los cuales están relacionados con lo hecho en esta tesis, véase [38]. Resulta que el modelo de Wright-Fisher se obtiene como el límite de procesos ancestrales escalados en el tiempo a través de la convergencia de sus distribuciones finito-dimensionales.
- En resumen, lo que se puede obtener de todo lo hecho en este trabajo en relación a  $X_n$ , lo podemos resumir en la siguiente tabla (véase [45]), la cual ilustra los distintos casos que se presentan cuando se toma  $b = 1$  y  $0 < a := 2 - \alpha < 2$  :

$\alpha$	Comportamiento asintótico de $X_n$
$\alpha \rightarrow 2$	$X_n = n - 1$
$1 < \alpha < 2$	$\frac{X_n - (\alpha - 1)n}{(\alpha - 1)n^{1/\alpha}} \xrightarrow{\mathcal{L}} \mu_\alpha, (\alpha\text{-estable})$
$\alpha = 1$	$\frac{(\log n)^2}{n} X_n - \log n - \log(n \log n) \xrightarrow{\mathcal{L}} \mu_1, (1\text{-estable})$
$0 < \alpha < 1$	$\frac{X_n}{\Gamma(2 - \alpha)n^\alpha} \xrightarrow{\mathcal{L}} \int_0^\infty e^{-U_t} dt, (U \text{ es un subordinador})$

# Bibliografía

- [1] Akhiezer N. I. (1965). *The classical moment problem*. Oliver and Boyd, Edinburgh.
- [2] Aldous D. J. (1997). *Brownian excursions, critical random graphs and the multiplicative coalescent*. Ann. Probab. **25**, 812-854.
- [3] Aldous D. J. and Pitman J. (1998). *The standard additive coalescent*. Ann. Probab. **26**, 1703-1726.
- [4] Bertoin J. (1996). *Lévy Processes*. Cambridge University Press.
- [5] Bertoin J. (2006). *Random fragmentation and coagulation processes*. Cambridge University Press.
- [6] Bertoin J. and Le Gall J.-F. (2000). *The Bolthausen-Sznitman coalescent and the genealogy of continuous-state branching processes*. Probab. Theory Related Fields **117**, 249-266.
- [7] Bertoin J. and Pitman J. (2000). *Two coalescents derived from the ranges of stable subordinators*. Electron J. Probab. **5**.
- [8] Bertoin J. and Yor M. (2001). *On subordinators, self-similar Markov processes and some factorizations of the exponential law*. Electron. Commun. Probab. **6**, 95-106.
- [9] Bertoin J. and Yor M. (2002). *On the entire moments of self-similar Markov processes and exponential functionals of certain Lévy processes*. Ann. Fac. Sci. Toulouse **11**, 33-45.
- [10] Bertoin J. and Yor M. (2004). *Exponential functionals of Lévy processes*. Prob. Surv. 1-20.

- [11] Bertoin J., Biane Ph. and Yor M. (2004). *Poissonian exponential functionals,  $q$ -series,  $q$ -integrals and moment problem for log-normal distributions*. Proceedings Stochastic Analysis, Ascona, Progress in Probability vol. 58, Birkhäuser, 45-56.
- [12] Bingham N. H. (1972). *Limit theorems for regenerative phenomena, recurrent events and renewal theory*. Z. Wahrscheinlichkeitsth. **21**, 20-44.
- [13] Bingham N. H. , Goldie C. M. and Teugels J. L. (1989). *Regular Variation*. Cambridge University Press.
- [14] Bolthausen E. and Sznitman A.-S. (1998). *On Ruelle's probability cascades and an abstract cavity method*. Comm. Math. Phys. **197**, 247-276.
- [15] Carmona P., Petit F. and Yor M. (1994). *Sur les fonctionnelles exponentielles de certains processus de Lévy*. Stochastics and Stochastics Reports **47**, 71-101.
- [16] Carmona P., Petit F. and Yor M. (1997). *On the distribution and asymptotic results for exponential functionals of Lévy processes*. In Exponential Functionals and Principal Values Related to Brownian Motion, ed. M. Yor, Rev. Mate. Iberoamericana, Madrid, 73-121.
- [17] Delmas J. F, Dhersin J. S. and Siri-Jégousse A. (2008). *Asymptotic results on the length of coalescent trees*. The Annals of Applied Probability, vol. 18, **3**, 997-1025.
- [18] Doney R. A. (2005). *Fluctuation theory for Lévy processes*. Springer-Verlag Berlin Heidelberg.
- [19] Donnelly P. and Tavaré S. (1995). *Coalescents and genealogical structure under neutrality*. Ann. Rev. Genet. **29**, 401-421.
- [20] Dufresne D. (1990). *The distribution of a perpetuity; with applications to risk theory and pension funding*. Scand. Actuar. J. **1-2**, 39-79.
- [21] Erickson K. B. (1970). *Strong renewal theorems with infinite mean*. Trans. Amer. Math. Soc. **151**, 263-291.
- [22] Evans S. N. and Pitman J. (1998). *Construction of Markovian coalescents*. Ann. Inst. H. Poincaré Probab. Statist. **34**, 339-383.
- [23] Feller W. (1949). *Fluctuation theory of recurrent events*. Trans. Amer. Math. Soc. **67**, 98-119.



- [24] Gjessing H. K. and Paulsen J. (1997). *Present value distributions with application to ruin theory and stochastic equations*. Stochastic Processes. Appl. **71**, 123-144.
- [25] Gut A. (2005). *Probability: A Graduate Course*. Springer Science+Business Media, Inc.
- [26] Haas B. and Miermont G. (2011). *Self-similar scaling limits of non-increasing Markov chains*. Bernoulli vol. **17**, 1127-1442.
- [27] Heyde C.C. (1967). *A limit theorem for random walks with drift*. J. Appl. Prob. **4**, 144-150.
- [28] Hudson R. R. (1991). *Genealogies and the coalescent process*. Oxford Survey Evol. Biol. **7**, 1-44.
- [29] Iksanov A. and Möhle M. (2007). *A probabilistic proof of a weak limit law for the number of cuts needed to isolate a root of a random recursive tree*. Electro. Commun. Prob. **12**, 28-35.
- [30] Iksanov A. and Möhle M. (2007). *On a random recursion related to absorption times of death Markov chains*. Preprint. Available at [www.arxiv.org](http://www.arxiv.org).
- [31] Iksanov A. and Möhle M. (2008). *On the number of jumps of random walks with a barrier*. Adv. Appl. Prob. **40**, 206-228.
- [32] Kingman J. F. C. (1982). *On the genealogy of large populations*. J. Appl. Probab. **19A**, 27-43.
- [33] Kingman J. F. C. (1982). *Exchangeability and the evolution of large populations*. In Exchangeability in Probability and Statistics (G. Koch and F. Spizzichino, eds.) 97-112. North-Holland, Amsterdam.
- [34] Kingman J. F. C. (1982). *The coalescent*. Stochastic Process. Appl. **13**, 235-248.
- [35] Li W. H. and Fu Y. X. (1999). *Coalescent theory and its applications in population genetics*. In Statistics in Genetics (M. E. Halloran and S. Geisser, eds.) Springer, Berlin.
- [36] Möhle M. (2000). *Ancestral processes in population genetics: the coalescent*. J. Theoret. Biol. **204**, 629-638.

- [37] Möhle M. (2006). *On the number of segregating sites for populations with large family sizes*. Adv. Appl. Prob. **38**, 750-767.
- [38] Möhle M. and Sagitov S. (2001). *A classification of coalescent processes for haploid exchangeable population models*. The Annals of Probability. Vol. 29, **4**, 1547-1562.
- [39] Nordborg, M. (2001). *Coalescent theory*. In Handbook of Statistical Genetics (D. J. Balding, C. Cannings and M. Bishop, eds.) Wiley, Chichester. To appear.
- [40] Petersen L. C. (1982). *On the relation between multidimensional moment problem and one-dimensional moment problem*. **57**, 361-366.
- [41] Pitman J. (1999). *Coalescents with multiple collisions*. Ann. Prob. **27**, 1870-1902.
- [42] Revuz D. and Yor M. (1999). *Continuous Martingales and Brownian Motion*. Springer-Verlag Berlin Heidelberg. 3rd. Edition.
- [43] Riesz M. (1923). *Sur le problème des moments et le théorème de Parseval correspondant*. Acta Litt. Acad. Sci. Szeged. **1**, 209-255.
- [44] Schilling R., Song R. and Vondracek Z. (2010). *Bernstein functions*. De Gruyter, Berlin.
- [45] Siri-Jégousse A. (2009). *Etude des généalogies dans des modèles de génétique des populations*. Thèse de doctorat. Université Paris Descartes.
- [46] Vervaat W. (1979). *On a stochastic difference equation and a representation of nonnegative infinitely divisible random variables*. Adv. Appl. Prob. **11**, 750-783.