A mi mamá Ma. Elena.
En general, a toda
mi familia

Agradecimientos

- A mi familia por que siempre que he necesitado, han estado allí para brindarme su apoyo incondicional.

- Al Dr. José Carlos Gómez Larrañaga por sus excelentes consejos durante los 4 años de doctorado.

- A los sinodales, los doctores Francisco (Fico), Jimmy, Jorge, José Carlos y Víctor por el tiempo dedicado en la revisión de este trabajo.

- A todos los amigos y compañeros de CIMAT que hicieron mi estancia en Guanajuato divertida y amena.

- A todo el personal de CIMAT por realizar con entusiasmo su trabajo y así facilitarnos a los estudiantes nuestra estancia.

- A CONACYT por el apoyo económico brindado para realizar este trabajo.

- A CIMAT por facilitar tan excelentes instalaciones y por construir un ambiente adecuado para hacer matemáticas.

Índice

Introducción **7**

1 El espacio de polígonos. **11**
1.1 Polígonos simples 12
1.2 Polígonos convexos 14
1.3 Polígonos módulo semejanza orientada 15
1.4 Triángulos módulo semejanza 18

2 El grupo fundamental de $\mathbb{S}(n)$ **21**
2.1 Conexidad de $\mathbb{S}(n)$ 21
2.2 Vértices deformables en polígonos 24
2.3 Espacios en $\mathbb{CP}^{n-2}$ 27
2.4 El grupo fundamental $\mathcal{S}(n)$ 28

3 Contractibilidad de $\mathcal{S}(n)$ **31**
3.1 Uniones con homotopía trivial 31
3.2 Propiedades de la intersección de $\mathcal{D}_i(n)'s$ 33
3.3 Parejas escisivas 37
3.4 $\mathcal{S}(n)$ es contraible. 40

4 Polígonos sin etiquetas en los vértices **43**
4.1 Función de cambio de enumeración 44
4.2 Definición y caso $n = 3$ 47
4.3 Propiedades topológicas de $\mathcal{P}(n)$ 48

5 Espacio de polígonos convexos **53**
5.1 La topología del interior de $\mathcal{K}(n)$ 53
5.2 La frontera de $\mathcal{K}(n)$ en $\mathbb{CP}^{n-2}$ 57
5.3 Espacio de $n-$segmentos convexos 59
5.4 Descripción de $\partial\mathcal{K}(4)$ 66

A Dos estructuras geométricas en $\mathbb{CP}^n$ **71**
A.1 La métrica de Fubini-Study 71
A.2 La forma hermitiana de área 72

B Schwarz-Christoffel para triángulos **75**
B.1 La Fórmula de Schwarz-Christoffel 75
B.2 Schwarz-Christoffel en Triángulos 77

Notación **81**

Introducción

En esta tesis estudiamos el espacio de polígonos desde el punto de vista de Topología y Geometría. Pensaremos a un polígono como el conjunto determinado por n puntos ordenados en $\mathbb{C}$ junto con los sementos que unen a dos puntos consecutivos. Los polígonos serán considerados módulo funciones afines complejas, es decir, dos polígonos son iguales si existe $f\colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, de la forma $f(z) = az + b$ lleve uno en el otro. La topología que utilizaremos será la de cociente obtenida de $\mathbb{C}^n$ por la acción del grupo afín complejo[1]. Este espacio de polígonos se conoce como *el espacio de polígonos módulo semejanza orientada* [25].

Con esta manera de comparar los polígonos, resulta que dos polígonos representan el mismo punto en el espacio de polígonos módulo semejanza orientada, si éstos tienen la misma forma (*i.e.*, los mismos ángulos y las mismas proporciones entre sus lados), sin importar el tamaño o la posición en la que se encuentran dentro del plano complejo.

Este espacio ha sido estudiado por diferentes autores en relación con espacios moduli de polígonos y poliedros: En [15] Kapovich y Millson estudian el subespacio de polígonos con longitudes fijas, ellos dan condiciones sobre las longitudes para que este subespacio sea conexo y proporcionan una descripción completa de la topología en los casos $n = 4, 5, 6$, además, establecen una dualidad entre el espacio de polígonos con longitudes de las aristas fijas y el espacio de polígonos convexos con ángulos prescritos. En [25], W. Thurston utilizó el espacio de polígonos módulo semejanza orientada para modelar desdoblados de poliedros con singularidades cónicas de ángulos menores que 2π, él empleó este espacio, ya que dos polígonos semejantes que se obtienen como desdoblados de poliedros, determinan poliedros con la misma forma. En este trabajo también se demuestra que el subespacio de polígonos que son desdoblados de tetraedros admite geometría hiperbólica proveniente de la forma de área. En [17] Kojima y Yamashita demuestran que el espacio de pentágonos con "forma de estrella" se ve como un haz fibrado sobre cierto espacio de ángulos, ellos describen por completo la topología de la fibra y

[1] Ver Sección 3 del Capítulo 1 para más detalles.

demuestran que dicha fibra admite geometría hiperbólica. En [2] Bavard y Ghys demuestran que el espacio de polígonos convexos con ángulos dados es un poliedro convexo en el espacio hiperbólico. Por último, en un trabajo conjunto con Jorge López-López [11], utilizamos el espacio de hexágonos módulo semejanza orientada, para calcular explícitamente la región que corresponde a hexágonos que son desdoblados de tetraedros. En este trabajo se incluye el caso en que hay singularidades cónicas de ángulo mayor que 2π.

Durante la tesis estudiaremos subconjuntos del espacio de polígonos determinados por sus propiedades topológicas o geométricas. Una manera de ordenar los polígonos de acuerdo a sus propiedades geométricas se muestra en el siguiente diagrama:

$$\begin{tikzcd}
 & & POLÍGONOS \arrow[dl] \arrow[dr] & & \\
 & SIMPLES \arrow[d] \arrow[dr] & & COMPLEJOS \arrow[d] & \\
 & CÓNCAVOS & CONVEXOS \arrow[d] & SEGMENTOS & \\
 & & REGULAR & &
\end{tikzcd}$$

Los polígonos simples son polígonos que no se autointersectan y los complejos son los que sí lo hacen. Los segmentos son los polígonos en los que todos sus vértices son colineales.

El objetivo central de este trabajo es *estudiar propiedades topológicas y geométricas de los espacios de polígonos simples y convexos módulo semejanza orientada.* Para realizar dicho estudio, hemos organizado la tesis de la siguiente forma:

En el Capítulo 1, proporcionamos las definiciones y resultados sobre polígonos que utilizaremos durante la tesis, mostramos que el espacio de n-ágonos módulo semejanza orientada es biholomorfo a $\mathbb{CP}^{n-2}$, calculamos a detalle el espacio de triángulos (*i.e.* el caso $n = 3$) y por último, comparamos los espacios de triángulos módulo semejanza y módulo semejanza orientada.

En el Capítulo 2, introducimos la noción de vértice deformable en un polígono simple y mostramos algunas propiedades de dichos vértices. Con ayuda de estos vértices, demostramos que el subconjuto de $\mathbb{CP}^{n-2}$ correspondiente a polígonos simples ($\mathcal{S}(n)$), tiene dos componentes conexas, abiertas, simplemente conexas y biholomorfas entre sí.

Comenzamos el Capítulo 3 con un teorema que brinda un criterio para saber si la unión de conjuntos abiertos con grupos de homotopía triviales,

tiene grupos de homotopía triviales. En el resto del capítulo, se intenta demostrar que ciertos subconjuntos de $\mathcal{S}(n)$ cumplen las hipótesis del teorema mencionado, esto con el fin de probar que $\mathcal{S}(n)$ es contraible. Aunque no se tuvo éxito con este objetivo, aquí se explican a detalle las dificultades que se encontraron. Cabe mencionar que dichas dificultades son técnicas y creemos que se pueden evitar.

En el Capítulo 4 se estudia la topología del cociente que se obtiene de eliminar las etiquetas en los vértices de los polígonos. Entre otras cosas, se demuestra que dicho cociente es simplemente conexo, se prueba que no es variedad y se da una descripción local del espacio al rededor del polígono regular. La mayoría de los resultados de este capítulo, son consecuencia de los teoremas demostrados en capítulos anteriores.

En el Capítulo 5, se estudia el espacio de polígonos convexos y su frontera. Primero demostramos que el interior del espacio de polígonos convexos es difeomorfo a $\mathbb{R}^{2n-4}$, después se mencionan los tipos de polígonos que pueden aparecer en la frontera de dicho espacio y se proporciona una descripción completa del espacio de cuadriláteros convexos y su frontera. Además, se estudia el espacio de arreglos convexos de n puntos en un segmento.

En el Apéndice A calculamos explícitamente dos estructuras geométricas en el espacio proyectivo complejo, éstas se utilizan durante el desarrollo del trabajo como herramienta para algunas pruebas y para dotar con geometría a los espacios mencionados en los ejemplos.

Por último, en la primera sección del Apéndice B se menciona la Fórmula de Schwarz-Christoffel junto con varias de sus propiedades y en la segunda sección se demuestra sobre el Mapeo de Schwarz-Christoffel se utiliza fuertemente en la primera sección del Capítulo 5.

Durante este trabajo se utiliza notación que no es estándar, para hacer más sencilla la lectura decidimos agregar una sección de notación al final. Dicha sección se puede consultar en la página 81.

Capítulo 1

El espacio de polígonos.

Si a cada punto $Z = (z_1, z_2, ..., z_n) \in \mathbb{C}^n$ $(n \geq 3)$ le asociamos el subconjunto de $\mathbb{C}$ determinado por $\{\overline{z_1 z_2} \cup \overline{z_2 z_3} \cup \cdots \cup \overline{z_{n-1} z_n} \cup \overline{z_n z_1}\}$, donde $\overline{xy} \subset \mathbb{C}$ denota el segmento dirigido de x a y, entonces podemos pensar a $\mathbb{C}^n$ como el conjunto de n-ágonos con vértices marcados contenidos en $\mathbb{C}$. La ventaja de esta asosiación, es que dotamos con la topología usual de $\mathbb{C}^n$ al conjunto de n-ágonos con vértices marcados. Dos consecuencias de esta asociación son:

- *Contamos $2n$ veces cada n-ágono en $\mathbb{C}$, ya que hay $2n$ posibles enumeraciones.*
- *Permitimos autointersecciones y vértices repetidos en los n-ágonos.*

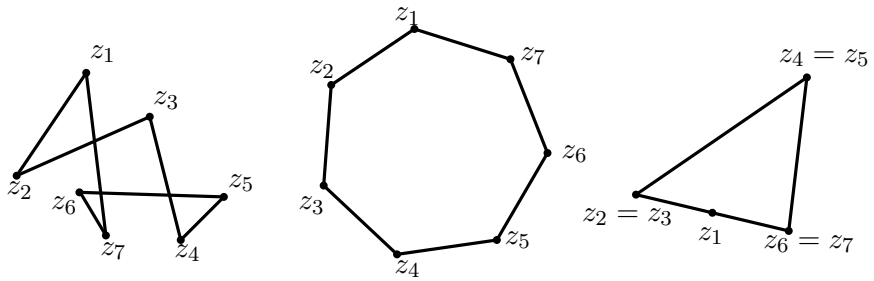

FIGURA 1: En $\mathbb{C}^7$ hay puntos que representan polígonos simples y otros con autointersecciones y vértices repetidos.

Como se mencionó en la introducción, en este trabajo se estudiarán las propiedades topológicas de los subconjuntos de $\mathbb{C}^n$ determinados por los polígonos simples y los polígonos convexos. Por ello, en las primeras dos secciones de este capítulo se proporcionan las definiciones de polígono simple y de polígono convexo y se demuestran algunos resultados que utilizaremos

en capítulos posteriores. Cabe mencionar que aunque dichos resultados son clásicos y sencillos, el objetivo principal de estas secciones es introducir notación y familiarizar al lector con el tema.

En la Sección 3 se define y se calcula el espacio de polígonos módulo semejanza orientada, que es el espacio en el que se trabajará más durante el desarrollo de la tesis. En la cuarta y última sección, se calcula el espacio de triángulos módulo semejanza y se mencionan las diferencias que hay entre éste y el espacio calculado en la Sección 3.

1.1 Polígonos simples

Es claro que hay puntos de $\mathbb{C}^n$ que mediante la asociación

$$(z_1, z_2, ..., z_n) \longleftrightarrow \{\overline{z_1 z_2} \cup \overline{z_2 z_3} \cup \cdots \cup \overline{z_{n-1} z_n} \cup \overline{z_n z_1}\},$$

determinan polígonos "complicados" en $\mathbb{C}$ (Figura 1). En este trabajo sólo nos van a interesar los polígonos simples. Debido a ello, en esta sección proporcionamos la definiciones y los resultados sobre polígonos simples que necesitaremos posteriormente. La referencia principal de esta Sección es [13].

Definición 1.1. *Decimos que el polígono $Z \in \mathbb{C}^n$ es simple si tiene todos sus vértices distintos y no se autointersecta. Denotaremos con $\mathbb{S}(n) \subset \mathbb{C}^n$ al subconjuto de polígonos simples.*

Para el estudio de las propiedades topológicas de $\mathbb{S}(n)$ dentro de $\mathbb{C}^n$ con su topología usual, utilizaremos las notaciones y nomenclatura clásicas de polígonos, las cuales se mencionan a continuación:

Definición 1.2. *Para todo $Z = (z_1, z_2, ..., z_n) \in \mathbb{S}(n)$.*

a) Llamaremos vértices a los puntos z_i y aristas a los segmentos $\overline{z_i z_{i+1}}$ (aquí $\overline{z_n z_{n+1}} = \overline{z_n z_1}$).

b) Una diagonal de Z es un segmento $\overline{z_i z_j}$ con $j \neq i-1, i, i+1$. A $\overline{z_{i-1} z_{i+1}}$ la llamaremos la diagonal de z_i.

c) A la compononte acotada de $\mathbb{C} - Z$ la llamamos el interior[1] de Z y la denotamos con Z°.

d) La cerradura de Z es el conjunto $cl(Z) = Z \cup Z^\circ$.

[1] Aquí utilizamos el Teorema de Jordan polígonal, ver [20, pág. 16].

e) Decimos que una diagonal $\overline{z_i z_j}$ es interna, si para todo $x \in \{\overline{z_i z_j} - \{z_i, z_j\}\}$, $x \in Z^\circ$.

Los incisos c, d y e de la definición anterior, son válidos sólo para polígonos simples, ya que no podemos hablar del interior de un polígono no simple (Figura 1). Un resultado sobre diagonales interiores en polígonos simples que utilizaremos mucho es el siguiente:

Teorema 1.3. *Si $n \geq 4$ y $Z \in \mathbb{S}(n)$, entonces Z tiene una diagonal interna.*

Demostración: Dado $Z = (z_1, z_2, ..., z_n) \in \mathbb{S}(n)$ y un vértice $z_i \in Z$, tracemos todos los rayos que emanan de z_i y pertenecen al sector angular contenido en Z° y delimitado por las aristas $\overline{z_{i-1} z_i}$ y $\overline{z_i z_{i+1}}$. Por la compacidad de Z, existen sólo dos posibilidades:

1 - Todos los rayos intersectan a la misma arista.

2 - No todos los rayos intersectan a la misma arista.

En el primer caso, la diagonal $\overline{z_{i-1} z_{i+1}}$ es interna a Z. En el segundo caso, existe un rayo que pasa por un vértice z_j y por lo tanto $\overline{z_i z_j}$ es interna a Z. □

Corolario 1.4. *Si $n \geq 4$ y $Z \in \mathbb{S}(n)$, entonces Z se puede dividir en $n-2$ triángulos con $n-3$ diagonales internas.*

Demostración: Procederemos por inducción en el número de aristas de Z. Para $n = 4$, el resultado se sigue inmediatamente del teorema anterior. Supongamos que el resultado es válido para toda k entre 4 y $n-1$.

Si Z es un n-ágono simple, entonces por el Teorema 1.3 existe diagonal interior a Z. Dicha diagonal divide a Z en dos polígonos Z_1 y Z_2 con m y $n-m+2$ vértices respectivamente. Por hipótesis de inducción, Z_1 y Z_2 se pueden dividir en $m-2$ y $n-m$ triángulos con $m-3$ y $n-m-1$ diagonales internas respectivamente.

Es claro que las diagonales internas a Z_1 y Z_2, también son diagonales internas a Z. Por lo que concluimos que Z se puede dividir en $m-2+n-m = n-2$ triángulos con $n-m-1+m-3+1 = n-3$ diagonales internas. □

Corolario 1.5. *Si $n \geq 4$ y $Z \in \mathbb{S}(n)$, entonces existen dos vértices no adyacentes z_i, z_j tales que sus diagonales son interiores a Z.*

Demostración: Nótese que en una triangulación de Z, cada lado pertenece a uno y sólo a uno de los triángulos, por lo tanto existen al menos dos triángulos que tienen dos lados de Z como aristas. Los vértices entre dichos lados son los buscados. □

Este segundo corolario, muestra la existencia de dos vértices en un polígono simple tales que su diagonal es interna, la Figura 2 muestra dos polígonos simples que tienen exactamente dos vértices con estas características.

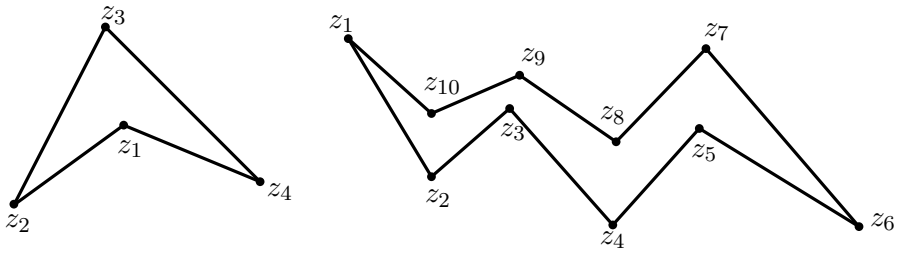

FIGURA 2: Dos polígonos simples con exactamente dos vértices cuyas diagonales son internas. En el primer polígono los vértices son z_2 y z_4 y en el segundo z_1 y z_6.

La última definición de esta sección se hace sólo sobre polígonos positivamente orientados, es decir, polígonos tales que, al recorrerlos de manera creciente en sus vértices, giramos en sentido contrario a las manecillas del reloj (como el decágono en la Figura 2). El lector notará que de manera completamente análoga se puede hacer la definición para polígonos negativamente orientados.

Definición 1.6. *Supongamos que $Z \in \mathbb{S}(n)$ es positivamente orientado. Al ángulo α_i medido desde $\overline{z_i z_{i+1}}$ hasta $\overline{z_{i-1} z_i}$ en el sentido positivo, le llamamos ángulo interior a Z en el vértice z_i.*

Una observación sencilla que se sigue del Corolario 1.4 y del hecho que todo triángulo tiene suma de ángulos interiores igual a π, es que si $Z \in \mathbb{S}(n)$, entonces $\alpha_1 + \alpha_2 + ... + \alpha_n = (n-2)\pi$.

1.2 Polígonos convexos

En el Capítulo 5 estudiaremos la topología del espacio de polígonos convexos, debido a ello, en esta sección proporcionamos la definición y demostramos un resultado bien conocido que caracteriza a los polígonos convexos.

Definición 1.7. *Decimos que $Z \in \mathbb{C}^n$ es convexo si es simple y para cualesquiera $p, q \in Z$, el segmento $\overline{pq} \subset cl(Z)$. Denotaremos con $\mathbb{K}(n) \subset \mathbb{C}^n$ al subconjunto de polígonos convexos.*

Por definición tenemos que $\mathbb{K}(n) \subset \mathbb{S}(n)$. Como todo triángulo simple es convexo, para $n = 3$, $\mathbb{K}(3) = \mathbb{S}(3)$. La Figura 2 muestra un cuadrilátero que no es convexo, de manera que para $n > 3$, la contención es propia.

El siguiente resultado proporciona una manera sencilla de identificar si un polígono simple postivamente orientado es convexo. El resultado análogo para polígonos negativameten orientados también es válido.

Teorema 1.8. *Si $n \geq 4$ y $Z \in \mathbb{S}(n)$ positivamente orientado, entonces Z es convexo si y sólo si para toda $i \in \{1, 2, ..., n\}$, $\alpha_i \leq \pi$.*

Demostración. Si $Z = (z_1, z_2, ..., z_n)$ es convexo, entonces $\overline{z_n z_2}$ está contenida en $cl(Z)$ y por lo tanto el ángulo interior en z_1 es menor o igual π. Procediendo análogamente en el resto de los vértices, concluimos que para toda i, $\alpha_i \leq \pi$.

Ahora supongamos que todos los ángulos interiores a Z son menores o iguales a π. Procederemos por inducción para demostrar que Z es convexo.

Para $n = 4$ es claro que $\overline{z_1 z_3}, \overline{z_2 z_4} \subset cl(Z)$. Luego, si $p, q \in Z$ pertenecen a aristas adyacentes (el caso $p, q \in \overline{z_i z_{i+1}}$ es claro), entonces están en el triángulo determinado por dichas aristas y una diagonal de Z y por lo tanto $\overline{pq} \subset cl(Z)$. Sólo resta probar el caso en que p, q pertenecen a aristas no adyacentes. Sin pérdida de generalidad supongamos que $p \in \overline{z_1 z_2}$ y $q \in \overline{z_3 z_4}$. Nótese que $\overline{qz_1}$ pertenece al triángulo $cl(z_1, z_3, z_4)$ y por lo tanto $\overline{qz_1} \subset cl(Z)$. Análogamente concluimos que $\overline{qz_2} \subset cl(Z)$. Concluimos que $\overline{pq} \subset cl(q, z_1, z_2) \subset cl(Z)$.

Supongamos que el resultado vale para toda $k < n$.

Si $\overline{z_i z_j}$ es una diagonal interior a Z, entonces ésta divide a Z en dos polígonos Z_1, Z_2 con menor número de lados y con ángulos interiores menores o iguales a π. Por hipótesis de inducción, dichos polígonos son convexos.

Sin pérdida de generalidad, supongamos que Z_2 tiene menor o igual número de vértices que Z_1. Si $p \in Z_1 - \{\overline{z_i z_j}\}$, entonces el polígono

$$Z_p = (Z_2 - \{\overline{z_i z_j}\}) \cup \{\overline{pz_i}, \overline{pz_j}\}$$

tiene menos de n lados y sus ángulos son menores o iguales a π (en z_i y z_j sus ángulos son menores que los de Z y en p, su ángulo interior coincide con el del triángulo (z_i, p, z_j)), luego el resultado se vale en Z_p. Terminamos la demostración procediendo análogamente para todo $p \in Z_1$. $\square$

1.3 Polígonos módulo semejanza orientada

En este trabajo nos interesa la forma de los polígonos y no la posición en la que se encuentran dentro de $\mathbb{C}$. Por ello, en esta sección definimos semejanza orientada entre polígonos, introducimos el espacio de polígonos módulo semejanza orientada y mencionamos algunas propiedades sencillas de dicho

espacio. En las definiciones utilizaremos una acción del grupo afín complejo $\{f(z) = az + b \mid a, b \in \mathbb{C}, a \neq 0\}$, al que denotaremos con $\mathbb{A}_{\mathbb{C}}$.

Definición 1.9. *Si $Z = (z_1, z_2, ..., z_n), W = (w_1, w_2, ...w_n) \in \mathbb{C}^n$, entonces:*

a) Una semejanza orientada entre Z y W es un elemento $f \in \mathbb{A}_{\mathbb{C}}$ tal que para toda $i \in \{1, 2, ..., n\}$, $f(z_i) = w_i$.

b) Decimos que $Z, W \in \mathbb{C}^n$ están relacionados, si existe semejanza orientada entre ellos.

Nótese que esta relación entre polígonos es de equivalencia, además, dos polígonos equivalentes difieren por una composición de rotación, traslación y homotecia y por lo tanto "tienen la misma forma". Procedemos a calcular el cociente de $\mathbb{C}^n$ por esta relación.

Es claro que salvo traslación, cada clase de equivalencia tiene un representante en el subespacio $V(n) = \{(0, z_2, z_3, ..., z_n) \mid z_i \in \mathbb{C}\}$, además, si $Z, W \in V(n)$ están relacionados, entonces existe $a \in \mathbb{C}^* := \mathbb{C} - \{0\}$ tal que $Z = aW$. De manera que $\mathbb{C}^n/\mathbb{A}_{\mathbb{C}} = \mathbb{P}_{\mathbb{C}}V(n)$. Para obtener una variedad al proyectivizar, es necesario quitar el punto $(0, 0, ..., 0) \in V(n)$, el cual corresponde a la clase de la recta $\{(z, z, ..., z)\} \subset \mathbb{C}^n$ (polígonos con todos sus vértices iguales), por lo tanto

$$\big(\mathbb{C}^n - \{(z, z, ..., z)\}\big)/\mathbb{A}_{\mathbb{C}} = \mathbb{P}_{\mathbb{C}}\big(V(n) - \{(0, 0, ..., 0)\}\big) \cong \mathbb{CP}^{n-2}$$

donde la última identificación está dada por el biholomorfismo

$$[(z_1, z_2, z_3, ..., z_n)] \mapsto [z_2 - z_1 : z_3 - z_1 : \cdots : z_n - z_1].$$

De manera que $\mathbb{CP}^{n-2}$ es *"el espacio de n-ágonos módulo semejanza orientada"*. Denotaremos con η a la función cociente $\big(\mathbb{C}^n - \{(z, z, ..., z)\}\big) \to \mathbb{CP}^{n-2}$ y con $[z_1, z_2, ..., z_n] \in \mathbb{CP}^{n-2}$ a la clase del polígono $(z_1, z_2, ..., z_n) \in \mathbb{C}^n$.

Algunas observaciones sencillas que se siguen de estas definiciones y construcciones son:

1. Todas las definiciones y los resultados demostrados en las secciones 1 y 2 permanecen válidas en $\mathbb{CP}^{n-2}$. Esto ya que las propiedades de ser simple o convexo son independientes del tamaño o la posición de un polígono dentro de $\mathbb{C}$.

2. En $\eta(\mathbb{S}(n))$ existe sólo un elemento que representa al polígono regular $R_n = (1, e^{2i\pi/n}, e^{4i\pi/n}, ..., e^{2(n-1)i\pi/n}) \in \mathbb{C}^n$. Esto se debe a que las distintas enumeraciones (en el mismo sentido) del polígono regular se obtienen mediante rotaciones en su centro. Denotaremos con $R_n \in \eta(\mathbb{S}(n))$ a dicho representante.

3. Como los polígonos simples tienen vértices distintos, en el hiperplano $L_n = \{(0, 1, z_3, z_4, ..., z_n)\} \subset \mathbb{C}^n$ hay un único representante de cada clase de equivalencia en $\mathbb{S}(n)$. De manera que si $U_2 := \{[0, 1, z_3, ..., z_n] \in \mathbb{CP}^{n-2}\}$, entonces la carta del proyectivo complejo dada por

$$\phi_2 \colon U_2 \to \mathbb{C}^{n-2} \text{ tal que } \phi_2([0, 1, z_3, ..., z_n]) = (z_3, ..., z_n),$$

permite ver a $\eta(\mathbb{S}(n))$ como un subconjunto de $\mathbb{C}^{n-2}$. Lo mismo se puede hacer si hacemos 0 a otro vértice y tomamos otra carta de $\mathbb{CP}^{n-2}$. Con esta observación concluimos que un abierto alrededor de $[0, 1, z_3, ..., z_n] \in \mathbb{CP}^{n-2}$ está dado por (el polidisco) $\prod_{k=3}^{n} B_r(z_k)$.

4. Notemos que si $[0, 1, z_3, ..., z_n] \in U_2$, entonces

$$\eta^{-1}([0, 1, z_3, ..., z_n]) = \{(b, a+b, az_3+b, ..., az_n+b) \mid a, b \in \mathbb{C},\ a \neq 0\} \cong \mathbb{A}_{\mathbb{C}}.$$

Lo mismo sucede con los polígonos de otras cartas de $\mathbb{CP}^{n-2}$. De manera que se forma el haz fibrado

$$\mathbb{A}_{\mathbb{C}} \longrightarrow \mathbb{C}^n - \{(z, z, ..., z)\} \xrightarrow{\eta} \mathbb{CP}^{n-2}.$$

Utilizando que $\mathbb{A}_{\mathbb{C}} \cong \mathbb{C}^* \times \mathbb{C}$, concluimos que $\mathbb{C}^n - \{(z, z, ..., z)\}$ fibra sobre $\mathbb{CP}^{n-2}$ con fibra $\mathbb{C}^* \times \mathbb{C}$.

Ahora procedemos a calcular un ejemplo que será muy importante en todo el desarrollo del trabajo, ya que se utilizará para ilustrar las construcciones que realicemos y servirá como base de inducción para muchas de las demostraciones posteriores.

Ejemplo 1.10. *El caso $n = 3$.*

El espacio de triángulos módulo semejanza orientada es $\mathbb{CP}^1$, que a su vez es homeomorfo a la esfera $\mathbb{S}^2$. Nótese que en la línea compleja $L_3 = \{(0, 1, z_3\} \subset \mathbb{C}^3$, los puntos en los semiplanos superior e inferior corresponden a triángulos positiva y negativamente orientados respectivamente, además, el eje real corresponde a triángulos que se degeneran a un segmento (ver Figura 3). Por último, es claro que el triángulo determinado por la recta $\{(0, 0, z_3)\} \subset V(3)$ (el infinito de L_3), también se degenera a un segmento.

De manera que $\mathbb{CP}^1$ está dividido por un círculo, en dos discos que determinan a los triángulos simples positiva y negativamente orientados ($\eta(\mathbb{S}(3))$), el círculo que divide corresponde a triángulos que se degeneran a un segmento.

Con este ejemplo, concluimos que $\mathbb{S}(3) \subset \mathbb{C}^3$ y $\eta(\mathbb{S}(3)) \subset \mathbb{CP}^1$ son abiertos y tienen dos componentes conexas por trayectorias que son homeomorfas entre sí.

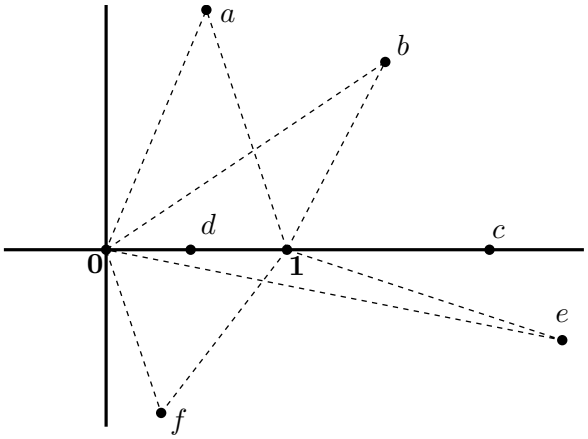

FIGURA 3: Triángulos en la línea $L_3 = (0, 1, z) \subset \mathbb{C}^3$.

1.4 Triángulos módulo semejanza

En esta sección, calculamos el espacio de triángulos módulo semejanza y mencionamos las diferencias que existen entre este espacio y el calculado en la sección anterior.

Ejemplo 1.11. *El espacio de triángulos módulo semenjanza.*

En este caso consideraremos triángulos módulo semejanza, es decir, dos triángulos serán equivalentes si existe una función $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ de la forma

$$f\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = rA\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + v \quad \text{con} \quad r > 0,\ v \in \mathbb{R}^2 \quad \text{y} \quad A \in O(2)^2$$

que lleva un triángulo en el otro.

Nótese que en este caso permitimos funciones en $\mathbb{R}^2$ que invierten orientación y no pedimos que las funciones preserven el orden en los vértices (como sí hacemos en el Ejemplo 1.10), de manera que los vértices no están etiquetados.

Por el criterio ángulo-ángulo-ángulo de semenjanza, sabemos que cualesquiera dos triángulos en $\mathbb{R}^2$ con ángulos iguales son semejantes, de manera que una tercia de números reales positivos cuya suma sea igual a π, determina un único triángulo hasta semejanza. El conjunto de tercias con estas condiciones es el triángulo $T' \subset \mathbb{R}^3$ con vértices en los puntos $(\pi, 0, 0)$, $(0, \pi, 0)$ y $(0, 0, \pi)$ (Figura 4, (a)).

[2]El grupo ortogonal 2 dimensional.

En este caso la relación no pide que llevemos vértices en vértices, por lo que cualquier permutación de los ángulos θ_1, θ_2 y θ_3 determina triángulos equivalentes. De manera que el espacio de triángulos módulo semejanza se obtiene dividiendo a T' por la acción del grupo de permutaciones de las entradas de los puntos en T'. Dicho cociente lo denotaremos con T.

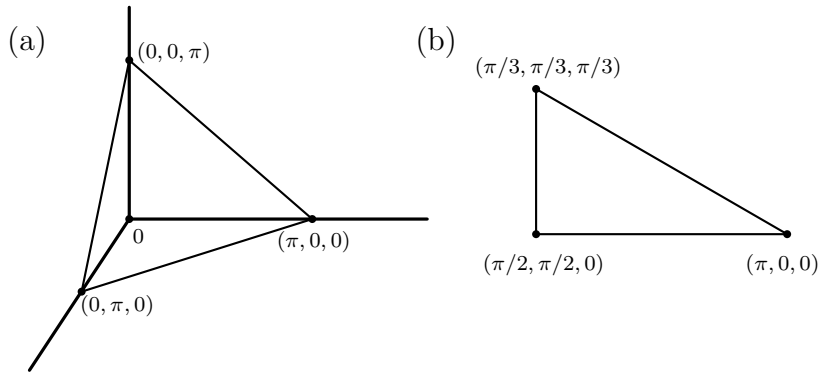

FIGURA 4: (a) El triángulo $T' \subset \mathbb{R}^3$ de tercias de números positivos que suman π. (b) El cociente de T' por la acción de S_3.

En la Figura 4, (b), se muestra que T es un triángulo rectángulo con ángulos $\pi/3$ y $\pi/6$. El cateto menor de T corresponde a triángulos isóceles para los que el ángulo desigual es el más chico, la hipotenusa de T corresponde a tríangulos isóceles en los que el ángulo desigual es el más grande y el cateto mayor de T corresponde a triángulos que se degeneran a un segmento.

Por un lado, este ejemplo muestra que el espacio de triángulos módulo semejanza es topológicamente un disco cerrado T. Por el otro, el Ejemplo 1.10 muestra que el espacio de triángulos módulo semejanza orientada es la esfera $\mathbb{S}^2$. La diferencia radica en que aquí los vértices no están etiquetados y que permitimos funciones que invierten la orientación, de hecho, podemos recuperar a T de $\mathbb{S}^2$, dividiendo por una rotación que elimine las etiquetas de los vértices (lo que haremos en el Capítulo 4) y por una reflexión que invierta la orientación.

Capítulo 2

El grupo fundamental de $\mathbb{S}(n)$

El objetivo principal de este capítulo es entender las propiedades de conexidad de $\mathbb{S}(n)$ y calcular su grupo fundamental. Para alcanzar dicho objetivo, hemos dividido el capítulo en cuatro secciones. En la Sección 1 se estudia la conexidad de $\mathbb{S}(n) \subset \mathbb{C}^n$. En la Sección 2, proporcionamos la definición de vértices deformables en polígonos simples y demostramos algunos resultados sobre ellos. La Sección 3 es auxiliar y sólo nos muestra la notación que utilizaremos en el proyectivo $\mathbb{CP}^{n-2}$. Por último, en la Sección 4 se demuestra el teorema que calcula el grupo fundamental de las componentes de $\mathbb{S}(n)$.

Cabe mencionar que la teoría básica de topología algebráica que será necesaria en el desarrollo de este capítulo se puede consultar en [12].

2.1 Conexidad de $\mathbb{S}(n)$

En esta sección demostramos que $\mathbb{S}(n)$ es abierto y tiene dos componentes conexas por trayectorias. Antes necesitamos demostrar el siguiente resultado que exhibe algunos encajes de $\mathbb{S}(m)$ en $\mathbb{S}(n)$ con $3 \leq m < n$.

Proposición 2.1. *Si $n \geq 4$ y $J \subset \{1, 2, ..., n\}$ es tal que $|J| \leq n-3$, entonces*

$$\mathbb{S}_J(n - |J|) := \left\{ Z \in \mathbb{S}(n) \mid z_k = \frac{z_{k-1} + z_{k+1}}{2} \quad si \quad k \in J \right\}$$

es un encaje de $\mathbb{S}(n - |J|)$ en $\mathbb{S}(n)$.

Demostración: Nótese que $W(n-|J|) := \{Z \in \mathbb{C}^n \mid z_k = \frac{z_{k-1}+z_{k+1}}{2} \text{ si } k \in J\}$ es subespacio vectorial de $\mathbb{C}^n$, que su dimensión es $n-|J|$ y que $\mathbb{S}_J(n-|J|) \subset W(n - |J|)$.

Si $\hat{L}\colon \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}^{n-|J|}$ es la proyección en las coordenadas $\{1, 2, ..., n\} - J$ y L es la restricción de $\hat{L}$ a $W(n - |J|)$, entonces L un isomorfismo lineal y

para todo $Z \in \mathbb{S}_J(n-|J|)$, $L(Z) \in \mathbb{S}(n-|J|)$. Por lo tanto, la restricción de L^{-1} a $\mathbb{S}(n-|J|)$, es el encaje buscado. $\square$

Notemos que si $Z \in \mathbb{S}(n)$ y $re^{i\theta}, b \in \mathbb{C}$ con $r \neq 0$, entonces las trayectorias $\alpha_1, \alpha_2 \colon [0,1] \to \mathbb{S}(n)$, con $\alpha_1(t) = (1-t(1-r))e^{it\theta}Z$ y $\alpha_2(t) = Z + tb$, unen Z con $re^{i\theta}Z$ y $Z+b$ respectivamente, luego la concatenación $\alpha_1 * \alpha_2$ une Z con $re^{i\theta}Z + b$. Concluimos que la órbita de un polígono bajo la acción de $\mathbb{A}_{\mathbb{C}}$ es conexa por trayectorias. El siguiente teorema nos muestra cuando podemos unir dos polígonos simples con una trayectoria que permanezca dentro de los polígonos simples.

Teorema 2.2. *$\mathbb{S}(n) \subset \mathbb{C}^n$ es abierto y tiene dos componenetes conexas por trayectorias homeomorfas entre sí.*

Demostración: Primero demostraremos que $\mathbb{S}(n)$ es abierto.

Dado $Z = (z_1, z_2, ..., z_n) \in \mathbb{S}(n)$, para toda $k \in \{1, 2, ..., n\}$ definimos $\mathcal{L}_k := \{\overline{z_{k+1}z_{k+2}} \cup \overline{z_{k+2}z_{k+3}} \cup \cdots \cup \overline{z_{k-2}z_{k-1}}\}$ y hacemos

$$r_k = d(z_k, \mathcal{L}_k) = \inf_{x \in \mathcal{L}_k} \{d(z_k, x)\}$$

donde y $d(-,-)$ es la distancia euclideana en $\mathbb{C}$. Por ser $\mathcal{L}_k$ compacto y Z simple, $r_k > 0$ y $r_Z := \min\{r_1, r_2, ..., r_n\}$ también es mayor que 0. Luego, la vecindad de Z dada por el polidisco

$$\mathcal{U}_Z := \prod_{k=1}^{n} B_{\frac{r_Z}{3}}(z_k) \quad \text{donde} \quad B_{\frac{r_Z}{3}}(z_k) = \{z \in \mathbb{C} \mid d(z_k, z) < \frac{r_Z}{3}\},$$

es abierta y está contenida en $\mathbb{S}(n)$, por lo tanto $\mathbb{S}(n) \subset \mathbb{C}^n$ es abierto.

Procedemos a demostrar que las componentes conexas mencionadas corresponden a los polígonos simples positiva y negativamente orientados, para ello, sólo durante esta sección denotaremos a dichas componentes con $\mathbb{S}_n^+$ y $\mathbb{S}_n^-$ respectivamente. Antes de la demostración, veamos dos propiedades sencillas:

1 - $\mathbb{S}_n^+ \cap \mathbb{S}_n^- = \emptyset$ - Ya que si $\gamma \colon [0,1] \to \mathbb{S}(n)$ es tal que $\gamma(0) \in \mathbb{S}_n^+$ y $\gamma(1) \in \mathbb{S}_n^-$, entonces la continuidad de $\mathcal{A} \colon \mathbb{C}^n \to \mathbb{R}$ implica que existe $t \in [0,1]$ con $\mathcal{A}(\gamma(t)) = 0$, por lo tanto $\gamma(t)$ no pertenece a $\mathbb{S}(n)$ (ver Sección $A.2$, Apéndice A).

2 - $\mathbb{S}_n^+ \cong \mathbb{S}_n^-$ - Un homeomorfismo está dado por la función

$$(z_1, z_2, ..., z_{n-1}, z_n) \mapsto (z_1, z_n, z_{n-1}, ..., z_2).$$

Utilizaremos inducción para demostrar que para todo $Z \in \mathbb{S}_n^+$, existe trayectoria $\Gamma_Z \colon [0,1] \to \mathbb{S}_n^+$ tal que:

$$\Gamma_Z(0) = Z \text{ y } \Gamma_Z(1) = (1, e^{2\pi i/n}, (e^{2\pi i/n})^2, ..., (e^{2\pi i/n})^{n-1}) = R_n.$$

Para el caso $n = 3$, el resultado se sigue del Ejemplo 1.10 y de la observación 4 del Capítulo anterior.

Si $Z \in \mathbb{S}_n^+$ y $z_k \in Z$ es un vértice tal que $\overline{z_{k-1}z_{k+1}}$ es diagonal interna de Z, entonces la función $\gamma_1 \colon [0,1] \to \mathbb{C}^n$;

$$\gamma_1(t) = (z_1, ..., z_{k-1}, (1-t)z_k + t\frac{z_{k-1} + z_{k+1}}{2}, z_{k+1}, ..., z_n),$$

es continua, $\gamma_1(0) = Z$, $\gamma_1(1) \in (\mathbb{S}_k(n-1) \cap \mathbb{S}_n^+)$ y para todo $t \in [0,1]$, $\gamma_1(t) \in \mathbb{S}_n^+$. De la proposición anterior y la hipótesis de inducción se sigue que existe $\gamma_2 \colon [0,1] \to (\mathbb{S}_k(n-1) \cap \mathbb{S}_n^+)$ continua y tal que $\gamma_2(0) = \gamma_1(1)$ y

$$\gamma_2(1) = \left(1, ..., (e^{2\pi i/n})^{k-2}, \frac{(e^{2\pi i/n})^{k-2} + (e^{2\pi i/n})^k}{2}, (e^{2\pi i/n})^k, ..., (e^{2\pi i/n})^{n-1}\right),$$

donde $\gamma_2(1)$ es el n-ágono regular con el k-ésimo vértice movido al punto medio de la diagonal $\overline{(e^{2\pi i/n})^{k-2}(e^{2\pi i/n})^k}$. La curva $\gamma_3 \colon [0,1] \to \mathbb{S}_n^+$ tal que

$$\gamma_3(t) = \left(1, ..., (1-t)\frac{(e^{2\pi i/n})^{k-2} + (e^{2\pi i/n})^k}{2} + t(e^{2\pi i/n})^{k-1}, ..., (e^{2\pi i/n})^{n-1}\right),$$

regresa el k-ésimo vértice del polígono regular a su posición original. Es claro que la curva $\Gamma_Z = \gamma_3 * \gamma_2 * \gamma_1$ sirve como trayectoria entre Z y R_n. □

Corolario 2.3. *El conjunto $\eta(\mathbb{S}(n)) \subset \mathbb{CP}^{n-2}$ es abierto y tiene dos componentes conexas por trayectorias homeomorfas entre sí.*

Demostración: Por el Teorema 2.2 es claro que $\eta(\mathbb{S}(n))$ es abierto y tiene dos componentes. El homeomorfismo entre las componentes está dado por la función $[z_1, z_2, ..., z_n] \mapsto [z_1, z_n, z_{n-1}, ..., z_2]$[1], la cual claramente no depende del representante. □

Corolario 2.4. *Los conjuntos $\mathbb{K}(n) \subset \mathbb{C}^n$ y $\eta(\mathbb{K}(n)) \subset \mathbb{CP}^{n-2}$ tienen dos componentes conexas por trayectorias homeomorfas entre sí.*

Demostración: El procedimiento utilizado en el Teorema 2.2 para demostrar que $\mathbb{S}_n^+$ es conexo, se puede hacer con polígonos convexos sin perder la convexidad, de manera que $\mathbb{K}_n^+ \subset \mathbb{C}^n$ y $\eta(\mathbb{K}_n^+) \subset \mathbb{CP}^{n-2}$ son conexos por trayectorias. Los homeomorfismo entre las componentes correspondientes, se obtienen restringiendo los homoemorfismos mencionados antes. □

[1]Recordemos que $[z_1, ..., z_n]$ denota la clase del polígono $(z_1, ..., z_n)$

2.2 Vértices deformables en polígonos

En la demostración del Teorema 2.2 nos ayudamos de un vértice en un polígono simple que se pudo llevar a su diagonal de manera continua y sin perder la simpleza del polígono, dichos vértices serán importantes durante todo este trabajo, es por ello dedicamos esta sección a estudiar sus propiedades y probar algunos resultados útiles sobre ellos.

Definición 2.5. *Si $Z \in \mathbb{S}(n)$ y $z_k \in Z$ es un vértice, entonces:*

a) *z_k es fuerte-deformable si la diagonal $\overline{z_{k-1}z_{k+1}}$ es interna o si $z_k \in \overline{z_{k-1}z_{k+1}}$. Denotamos con $\mathbb{D}_k(n) = \{Z \in \mathbb{S}(n) \mid z_k$ es fuerte-deformable$\}$ y con $\tilde{z}_k = \frac{z_{k-1}+z_{k+1}}{2}$.*

b) *z_k es deformable si $\mathcal{L}_k \cap cl((z_{k-1}, z_k, z_{k+1})) = \{z_{k-1}, z_{k+1}\}$. Denotamos con $\mathbb{T}_k(n) = \{Z \in \mathbb{S}(n) \mid z_k$ es deformable$\}$.*

Claramente $\mathbb{D}_k(n) \subset \mathbb{T}_k(n)$ para toda $k \in \{1, 2, ..., n\}$. La diferencia es que si $z_k \in Z$ es fuerte-deformable, entonces z_k se puede mover a $\tilde{z}_k$ por la $cl(Z)$ (por lo tanto $\alpha_k \leq \pi$), mientras que si $z_k \in Z$ es deformable, entonces se puede mover a $\tilde{z}_k$ por la $cl(Z)$ o por el exterior de Z (no hay condición sobre α_k), ver Figura 5.

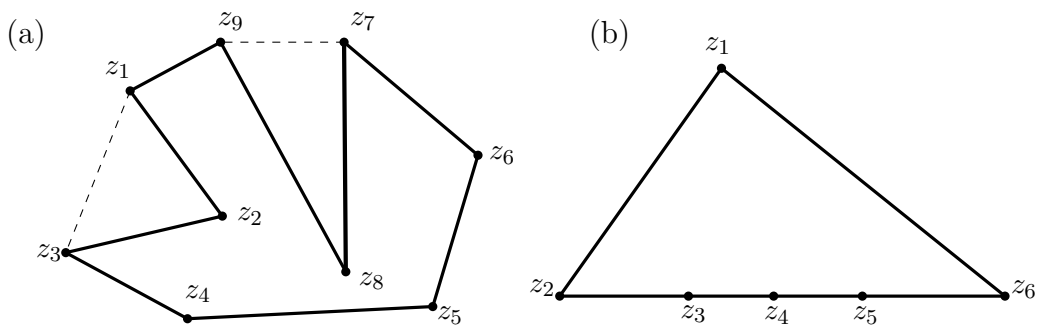

FIGURA 5: En (a), z_5 no es deformable y z_2 y z_8 son deformables pero no fuerte-deformables. En (b), el polígono es convexo y z_1 no es deformable.

Observaciones.

1. Los triángulos no tienen vértices deformables.

2. Si $n > 3$ y $Z \in \mathbb{S}(n)$ es convexo, entonces Z tiene a lo más un vértice que no es deformable (Figura 5, (b)). Si Z es convexo y para toda $k \in \{1, 2, ..., n\}$, $\alpha_k < \pi$, entonces todos sus vértices son fuerte-deformables.

3. Para todas $k \neq j$, $\mathbb{T}_k(n) \cong \mathbb{T}_j(n)$ y $\mathbb{D}_k(n) \cong \mathbb{D}_j(n)$. Basta ver que si $1 < k \leq n$, entonces $(z_1, ..., z_k, ..., z_n) \mapsto (z_k, ..., z_n, z_1, ..., z_{k-1})$ se restringe como homeomorfismos entre $\mathbb{T}_k(n)$ y $\mathbb{T}_1(n)$ y entre $\mathbb{D}_k(n)$ y $\mathbb{D}_1(n)$.

4. Del Corolario 1.5, sabemos que si $n > 3$, entonces todo n-ágono simple tiene al menos 2 vértices fuerte-deformables no adyacentes. Por lo tanto:
$$\mathbb{S}(n) = \bigcup_{k=3}^{n} \mathbb{D}_k(n) = \bigcup_{k=3}^{n} \mathbb{T}_k(n).$$

Proposición 2.6. *Si $n \geq 4$ y $Z \in \mathbb{S}(n)$, entonces Z tiene al menos 3 vértices deformables.*

Demostración: Si Z es covexo, el resultado se sigue de la Observación 2.

Si Z no es convexo, basta demostrar que Z tiene un vértice que es deformable pero no fuerte-deformable, ya que sabemos que Z siempre tiene al menos 2 vértices fuerte-deformables.

Si $E(Z)$ es la envolvente convexa de Z, entonces $E(Z)$ es un polígono formado con aristas y diagonales (esto es claro, ya que todo polígono simple siempre está contenido en la cerradura de un polígono convexo) de Z y tal que $Z \subset cl(E(Z))$.

Supongamos que $\overline{z_i z_j}$ es una diagonal de Z que es arista de $E(Z)$ y que $\hat{Z} = (z_i, z_{i+1}, ..., z_{j-1}, z_j)$[2] cumple que $\hat{Z}^\circ \subset (cl(E(Z)) - cl(Z))$ (si no es cierto para $\hat{Z}$, entonces lo cumple $(z_j, z_{j+1}, ..., z_{i-1}, z_i)$). Hay dos casos a cosiderar:

1 - $\hat{Z}$ es un triángulo.

2 - $\hat{Z}$ es un k-ágono simple con $k \geq 4$.

En el primer caso, z_{i+1} es deformable. En el segundo caso, por la Observación 4, $\hat{Z}$ tiene al menos un vértice distinto de z_i, z_j que es fuerte-deformable. Claramente dicho vértice es deformable en Z. □

La Figura 6 muestra un 15-ágono con sólo 3 vértices deformables y la Figura 2 muestra un cuadrilátero con sólo 3 vértices deformables pero consecutivos.

La siguiente propiedad de los conjuntos $\mathbb{T}_k(n)$ y $\mathbb{D}_k(n)$ jugará un papel importante en construcciones posteriores.

[2] Los vértices se toman módulo n.

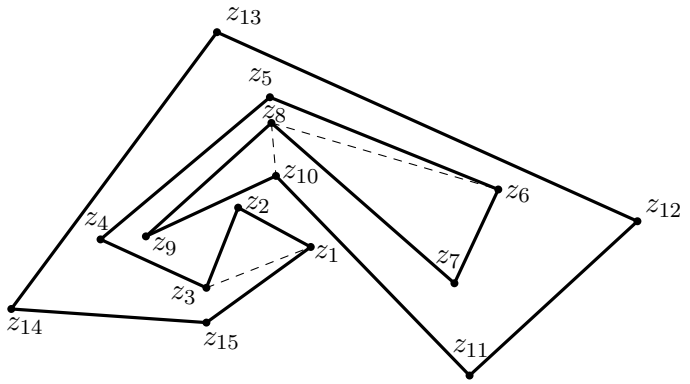

FIGURA 6: 15-ágono con sólo 3 vértices deformables, z_7 deformable y z_2 y z_9 fuerte-deformables.

Proposición 2.7. *Para toda $k \in \{1, 2, ..., n\}$, el conjunto $\mathbb{T}_k(n) \subset \mathbb{S}(n)$ es abierto y tiene como retracto por deformación a $\mathbb{D}_k(n)$.*

Demostración: Por la Observación 3, es suficiente con demostrar el resultado para $\mathbb{T}_2(n)$.

Si $Z = (z_1, z_2, ..., z_n) \in \mathbb{T}_2(n)$, entonces para cada $k = 4, 5, ..., n$ el número $s_k = \min\{r_Z, d(z_k, cl((z_1, z_2, z_3)))\}$ es positivo, ya que $cl((z_1, z_2, z_3)) \subset \mathbb{C}$ es compacto y no contiene a z_k. Luego, $s_0 = \min\{s_4, s_5, ..., s_n\} > 0$. Por lo tanto $\prod_{k=1}^{n} B_{\frac{s_0}{3}}(z_k)$ es una vecindad abierta de Z contenida en $\mathbb{T}_2(n)$. Concluimos que $\mathbb{T}_2(n)$ es abierto.

Para cada $Z \in \mathbb{T}_2(n)$, llamemos $d_2 := \frac{|z_1 - z_2|}{|z_2 - z_3|}$[3] y z_{d_2} al punto en $\overline{z_1 z_3}$ tal que $d_2 = \frac{|z_1 - z_{d_2}|}{|z_{d_2} - z_3|}$. Luego consideremos la función $F\colon [0, 1] \times \mathbb{T}_2(n) \to \mathbb{T}_2(n)$, tal que

$$(t, (z_1, z_2, z_3, ..., z_n)) \mapsto \begin{cases} (z_1, z_2, z_3, ..., z_n) & \text{si } Z \in \mathbb{D}_2(n) \\ (z_1, (1-t)z_2 + tz_{d_2}, z_3, ..., z_n) & \text{si } Z \in \mathbb{T}_2(n) - \mathbb{D}_2(n) \end{cases}$$

F es continua pues es la identidad en $\mathbb{D}_2(n)$ y los puntos de $\mathbb{T}_2(n)$ cercanos a $\partial\mathbb{D}_2(n) \cap \mathbb{T}_2(n)$ se mueven en puntos cercanos de $\partial\mathbb{D}_2(n)$. Además, F_0 es la identidad en $\mathbb{T}_2(n)$ y para todo $t \in [0, 1]$, F_t es la identidad en $\mathbb{D}_2(n)$. Por último, nótese que para todo $Z \in \mathbb{T}_2(n)$, $F_1(Z) \in \mathbb{D}_2(n)$. Por lo tanto F es retracto por deformación de $\mathbb{T}_2(n)$ en $\mathbb{D}_2(n)$. $\square$

La Figura 7 muestra que $\mathbb{D}_k(n)$ no es abierto ni cerrado en $\mathbb{S}(n)$.

[3]Donde $|z|$ es la norma de z.

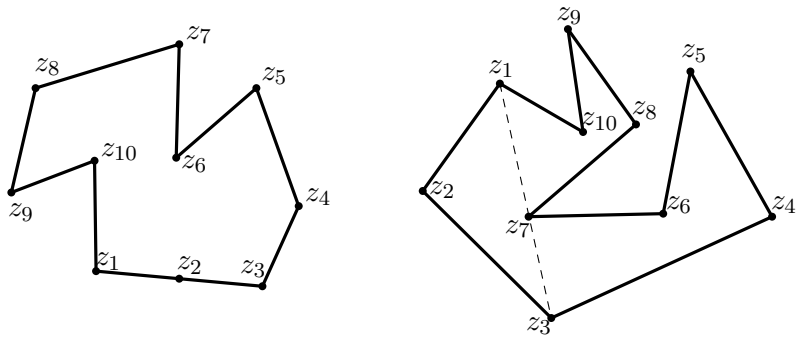

FIGURA 7: El primer polígono está en $\partial\mathbb{D}_2(10) \cap \mathbb{D}_2(10)$ y el segundo es un punto de acumulación de $\mathbb{D}_2(10)$ que no pertence a $\mathbb{D}_2(10)$.

2.3 Espacios en $\mathbb{CP}^{n-2}$

De ahora en adelante trabajaremos con polígonos simples módulo semenjanza orientada, por ello, dedicamos esta pequeña sección para introducir la notación que usaremos para las imágenes bajo η de los espacios que hemos definido hasta ahora. También mencionamos cuáles de las propiedades demostradas hasta ahora se mantienen válidas al pasar a $\mathbb{CP}^{n-2}$.

- Denotaremos con $\mathcal{S}(n)$ a la componente de $\eta(\mathbb{S}(n))$ correspondiente a polígonos positivamente orientados (es decir, $\eta(\mathbb{S}_n^+)$). Es claro que $\mathcal{S}(n) \subset \mathbb{CP}^{n-2}$ es abierto y conexo por trayectorias.

- $\mathcal{K}(n) = \eta(\mathbb{K}_n) \cap \mathcal{S}(n)$. Claramente aún es válido que $\mathcal{K}(n) \subset \mathcal{S}(n)$ es conexo por trayectorias.

- Para $J \subset \{1, 2, ..., n\}$, $\mathcal{S}_J(n - |J|) = \eta(\mathbb{S}_J(n - |J|)) \cap \mathcal{S}(n)$. Es fácil ver que la función que daba en el encaje de $\mathbb{S}(n-|J|)$ en $\mathbb{S}_J(n-|J|) \subset \mathbb{S}(n)$, define un encaje de $\mathcal{S}(n - |J|)$ en $\mathcal{S}_J(n - |J|) \subset \mathcal{S}(n)$.

- $\mathcal{D}_k(n) = \eta(\mathbb{D}_k(n)) \cap \mathcal{S}(n)$. La función definida en la Observación 3 de la sección anterior, define un hoemomorfismo entre $\mathcal{D}_k(n) \cong \mathcal{D}_j(n)$.

- $\mathcal{T}_k(n) = \eta(\mathbb{T}_k(n)) \cap \mathcal{S}(n)$. Es claro que aún se vale que $\mathcal{T}_k(n)$ es abierto y que $\mathcal{T}_k(n) \cong \mathcal{T}_j(n)$. Además, el retracto por deformación definido en la Proposición 2.7, define un retracto por deformación de $\mathcal{T}_k(n)$ en $\mathcal{D}_k(n)$. También sigue siendo válido que

$$\mathcal{S}(n) = \bigcup_{k=3}^{n} \mathcal{D}_k(n) = \bigcup_{k=3}^{n} \mathcal{T}_k(n).$$

En lo sucesivo realizaremos construcciones sobre $\mathcal{S}(n)$ que son independientes de los representantes, con afán de dejar más claras dichas construcciones, intentamos siempre trabajar con los representantes $[0, 1, z_3, ..., z_n]$ que pertencen al hiperplano $L_n \subset \mathbb{C}^n$ mencionado en la Sección 1.3.

2.4 El grupo fundamental $\mathcal{S}(n)$

En esta sección demostraremos que $\mathcal{S}(n) \subset \mathbb{CP}^{n-2}$ tiene grupo fundamental trivial. Después, con ayuda de este resultado, calcularemos el grupo fundamental de las componenetes de $\mathbb{S}(n) \subset \mathbb{C}^n$.

En la demostración del teorema principal de este capítulo necesitaremos el siguiente lema que se sigue del Teorema de Van Kampen [12, pág.43].

Lema 2.8. *Si $U_1, U_2, ..., U_n \subset X$ son abiertos simplemente conexos tales que $\bigcap_{k=1}^n U_k \neq \emptyset$, $\bigcup_{k=1}^n U_k = X$ y para todas $1 \leq k < j \leq n$, $U_k \cap U_j$ es conexo por trayectorias, entonces X es simplemente conexo.*

Teorema 2.9. *$\mathcal{S}(n) \subset \mathbb{CP}^{n-2}$ es simplemente conexo.*

Demostración: Nuevamente procederemos por inducción y nuevamente el Ejemplo 1.10 muestra que el resultado es válido para $n = 3$. Supongamos que el resultado es válido para todo número menor que n.

Para llegar al resultado, demostraremos que los conjuntos $\mathcal{T}_k(n)$ satisfacen las hipótesis del Lema 2.8. Sabemos que $\mathcal{S}(n) = \bigcup_{k=3}^n \mathcal{T}_k(n)$, que $\bigcap_{k=3}^n \mathcal{T}_k(n) \neq \emptyset$ y que los $\mathcal{T}_k(n)$ son abiertos (Proposición 2.7). Sólo resta probar que los $\mathcal{T}_k(n)$ son simplemente conexos y que las intersecciones $\mathcal{T}_k(n) \cap \mathcal{T}_j(n)$ son conexas por trayectorias.

Nótese que la función $F\colon [0,1] \times \mathcal{T}_3(n) \to \mathcal{T}_3(n)$, tal que:

$$(t, [0, 1, z_3, z_4, ..., z_n]) \mapsto [0, 1, (1-t)z_3 + t\tilde{z}_3, z_4..., z_n],$$

es continua (lo es en cada coordenada), para todo $Z \in \mathcal{T}_3(n)$, $F_0(Z) = Z$, $F_1(Z) \in \mathcal{S}_3(n-1)$ y para todos $t \in [0,1]$ y $Z \in \mathcal{S}_3(n-1)$, $F_t(Z) = Z$, luego, F es un retracto por deformación de $\mathcal{T}_3(n)$ en $\mathcal{S}_3(n-1)$. De la hipótesis de inducción se sigue que $\mathcal{T}_3(n)$ es simplemente conexo. Usando la Observación 3 de la Sección 2.2, concluimos que para toda $k \in \{1, 2, ..., n\}$, $\mathcal{T}_k(n) \subset \mathcal{S}(n)$ es simplemente conexo.

Por demostrar que si $k \neq j$, entonces $\mathcal{T}_k(n) \cap \mathcal{T}_j(n)$ es conexo por trayectorias. Existen los siguientes 2 casos a considerar:

Caso 1: $j \neq k-1, k+1$.

Dados $Z, W \in \mathcal{T}_k(n) \cap \mathcal{T}_j(n)$, deformamos sus vértices k-ésimo y j-ésimo a los puntos $\tilde{z}_k$ y $\tilde{z}_j$ respectivamente. Así obtenemos los polígonos $Z', W' \in \mathcal{S}_{\{kj\}}(n-2)$ que por el Teorema 2.2, es conexo por trayectorias.

Caso 2: $j = k-1$ *ó* $j = k+1$.

Sin pérdida de generalidad, supongamos que $j = 3$ y $k = 4$ (se procede igual en otros casos). Si $Z = [0, 1, z_3, ..., z_n] \in \mathcal{T}_3(n) \cap \mathcal{T}_4(n)$ y parametrizamos a la diagonal $\overline{z_4 1}$ con $\mu(s) = (1-s)z_4 + s1$, entonces definimos

$$s_3(Z) = \sup_{s\in[0,1]} \left\{ \overline{z_5\mu(s)} \cap \{\overline{z_5 z_6} \cup \overline{z_6 z_7} \cup \cdots \cup \overline{z_{n-1} z_n} \cup \overline{z_n 0} \cup \overline{01}\} = \{z_5\} \right\}.$$

Consideremos $f\colon \mathcal{T}_3(n) \cap \mathcal{T}_4(n) \to (0,1]$ tal que $Z \mapsto s_3$. Es claro dados Z_0 y $\epsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que el polidisco $\prod_i B_\delta(z_i)$, satisface que $f(\eta\,(\prod_i B_\delta(z_i)) \subset (f(Z_0) - \epsilon, f(Z_0) + \epsilon)$. De manera que f es continua. Luego, la función $G\colon [0,1] \times (\mathcal{T}_3(n) \cap \mathcal{T}_4(n)) \to \mathcal{T}_3(n) \cap \mathcal{T}_4(n)$

$$G(t, [0, 1, z_3, z_4, ..., z_n]) = [0, 1, (1-t)z_3 + t\mu(\frac{s_3}{2}), z_4, ..., z_n],$$

también es continua. G además satisface que para todo $Z \in \mathcal{T}_3(n) \cap \mathcal{T}_4(n)$, $G_0(Z) = Z$ y para todos $t \in [0,1]$ y $Z \in G_1(\mathcal{T}_3(n) \cap \mathcal{T}_4(n))$, $G_t(Z) = Z$. De forma que G es retracto por deformación de $\mathcal{T}_3(n) \cap \mathcal{T}_4(n)$ en $G_1(\mathcal{T}_3(n) \cap \mathcal{T}_4(n))$. Notemos que $[0, 1, \mu\left(\frac{s_3}{2}\right), z_4, ..., z_n] \mapsto [0, 1, \tilde{z}_3, z_4, ..., z_n]$ es continua ya que la elección de s_3 es conti—nua. Es suprayectiva e inyectiva por que una vez dados los vértices $0, 1, z_4, ..., z_n$, el valor de s_3 es único. Además, es abierta pues los abiertos en $G_1(\mathcal{T}_3(n) \cap \mathcal{T}_4(n))$ y en $\mathcal{S}_3(n-1)$ sólo dependen de los vértices $0, 1, z_4, ..., z_n$ (son los mismos). Concluimos que esta función es un homeomorfismo entre $G_1(\mathcal{T}_3(n) \cap \mathcal{T}_4(n))$ y $\mathcal{S}_3(n-1)$ y por lo tanto $\mathcal{T}_3(n) \cap \mathcal{T}_4(n)$ es conexo por trayectorias. □

Teorema 2.10. $\pi_1(\eta^{-1}(\mathcal{S}(n)))$ *es isomorfo a* $\mathbb{Z}$.

Demostración. De la Observación 4 de la Sección 1.3, sabemos se forma un haz fibrado

$$\mathbb{A}_{\mathbb{C}} \longrightarrow \eta^{-1}(\mathcal{S}(n)) \xrightarrow{\eta} \mathcal{S}(n)$$

donde $\eta\colon \eta^{-1}(\mathcal{S}(n)) \to \mathcal{S}(n)$ es la restricción de η a $\mathcal{S}(n)$.

Si $\tilde{\alpha}\colon [0,1] \to \eta^{-1}(\mathcal{S}(n))$ es tal que $\tilde{\alpha}(0) = \tilde{\alpha}(1) = Z_0$, entonces $\alpha = \eta \circ \tilde{\alpha}\colon [0,1] \to \mathcal{S}(n)$ es una curva tal que $\alpha(0) = \alpha(1) = [Z_0]$. Por el Teorema 2.9, existe homotopía

$$H\colon [0,1] \times [0,1] \to \mathcal{S}(n) \text{ tal que } H(0,t) = \alpha \text{ y } H(1,t) = [Z_0],$$

luego, por la propiedad de levantamiento de homotopías (Proposición 4.48 [12, pág. 379]), existe homotopía

$$\tilde{H}\colon [0,1]\times[0,1]\to \eta^{-1}(\mathcal{S}(n)) \text{ tal que } \tilde{H}=\eta\circ H.$$

De manera que $\tilde{H}(1,t)\subset \eta^{-1}([Z_0])$. Concluimos que toda curva en $\eta^{-1}(\mathcal{S}(n))$ es homotópica a una curva en $\eta^{-1}([Z_0])$, por lo tanto $\pi_1(\eta^{-1}(\mathcal{S}(n)))$ es isomorfo a $\pi_1(\mathbb{A}_{\mathbb{C}})=\pi_1(\mathbb{C}^*\times\mathbb{C})=\mathbb{Z}$. □

De este resultado se concluye que $\pi_1(\mathbb{S}(n))$ es isomorfo a $(\simeq)$ $\mathbb{Z}\oplus\mathbb{Z}$, pues del Teorema 2.2 sabemos que hay dos componentes homeomorfas entre sí.

Corolario 2.11. *Para toda $k\geq 2$ se cumple que $\pi_k(\eta^{-1}(\mathcal{S}(n)))\simeq \pi_k(\mathcal{S}(n))$.*

Demostración. En este caso, la sucesión exacta larga para grupos de homotopía de un haz fibrado [12, pág. 376] se ve de la siguiente forma

$$\cdots\to \pi_k(\mathbb{C}^*\times\mathbb{C})\to \pi_k(\eta^{-1}(\mathcal{S}(n)))\to \pi_k(\mathcal{S}(n))\to \pi_{k-1}(\mathbb{C}^*\times\mathbb{C})\to\cdots$$

El resultado para $k\geq 3$ se sigue inmediatamente de esta sucesión y del hecho de que $\pi_k(\mathbb{C}^*\times\mathbb{C})=0$ para $k\geq 2$. Para el caso $k=2$, la sucesión exacta es

$$\cdots\to 0\to \pi_2(\eta^{-1}(\mathcal{S}(n)))\xrightarrow{h_1}\pi_2(\mathcal{S}(n))\xrightarrow{h_2}\mathbb{Z}\xrightarrow{h_3}\mathbb{Z}\to 0\to 0.$$

Del Teorema anterior sabemos que h_3 es isomorfismo, luego $h_2=0$ y h_1 es suprayectiva. Utilizando la exactitud, concluimos que h_1 es isomorfismo. □

Capítulo 3

Contractibilidad de $\mathcal{S}(n)$

Comenzamos mencionando que no logramos demostrar que $\mathcal{S}(n)$ es contraible, pero creemos que se realizó un gran avance. Decidimos realizar este capítulo para exponer los resultados obtenidos y las dificultades con las que nos encontramos al intentar demostrar esta propiedad de $\mathcal{S}(n)$.

Este capítulo está dividido en 4 secciones. En la Sección 1 probamos un teorema que brinda una condición para que la unión de abiertos tenga grupos de homotopía triviales. En la Sección 2 demostraremos un resultado sobre intersecciones de los conjuntos $\mathcal{D}_i(n)$. En la Sección 3, se explica a detalle el impedimento técnico que nos evitó probar que los conjuntos $\mathcal{D}_i(n)$ satisfacen las hipótesis del teorema de la primera sección. Por último, en la Sección 4 mencionamos las implicaciones que tendría que los $\mathcal{D}_i(n)$ satisfaciéran dichas hipótesis.

Cabe señalar que aquí utilizaremos algunas herramientas de Topología Algebráica clásica, como lo son las sucesiones de Mayer-Vietoris, el Teorema de Hurewicz, algunos resultados sobre grupos homotopía superiores y un resultado sobre haces fibrados. La referencia general para la teoría utilizada en este capítulo es [12].

3.1 Uniones con homotopía trivial

En esta sección demostramos un teorema que nos brinda un criterio para saber si la unión de abiertos con grupos de homotopía trivial tiene grupos homotopía trivial, este resultado es válido sobre cualquier espacio topológico en general (basta que se puedan definir los grupos de homología y homotopía). Cabe mencionar que no se encontró en la literatura ninguna referencia para dicho teorema, por lo que creemos que forma parte de las aportaciones originales de esta tesis.

Teorema 3.1. *Si $V_1, V_2, ..., V_n \subset X$ son abiertos conexos por trayectorias, tales que $X = \bigcup_{i=1}^{n} V_i$ y para todas $i \in \{1, 2, ..., n\}$ y $k \geq 1$, $\pi_k(V_i) = 1$, si además para todo $I \subset \{1, 2, ..., n\}$, la intersección $\bigcap_{i \in I} V_i$ es no vacia, conexa por trayectorias y $\pi_k(\bigcap_{i \in I} V_i) = 1$ para toda $k \geq 1$, entonces $\pi_k(X) = 1$ para toda $k \geq 1$.*

Demostración: Procederemos por inducción sobre el número de abiertos.

Para $n = 2$, tenemos $X = V_1 \cup V_2$. Por hipótesis tenemos que $\pi_1(V_1) = \pi_1(V_2) = 1$ y $V_1 \cap V_2$ es conexa por trayectorias, por el Teorema de Van Kampen $\pi_1(V_1 \cup V_2) = \pi_1(X) = 1$. Utilizando las hipótesis en el último y en los primeros dos términos de la j-ésima parte de la sucesión de Mayer-Vietoris

$$\cdots \to H_j(V_1 \cap V_2) \to H_j(V_1) \oplus H_j(V_2) \to H_j(V_1 \cup V_2) \to H_{j-1}(V_1 \cap V_2) \to \cdots$$

concluimos que para todo $j \geq 2$, $H_j(X) = 1$. Usando el Teorema de Hurewicz se concluye que $\pi_k(X) = 1$ para toda $k \geq 2$.

Supongamos que el resultado es válido para $n - 1$.

Si $X' = \bigcup_{i=1}^{n-1} V_i \subset X$, entonces X' cumple las hipótesis del teorema. Luego, por hipótesis de inducción se sigue que $\pi_k(X') = 1$ para $k \geq 1$.

El conjunto $X' \cap V_n = \bigcup_{i=1}^{n-1}(V_i \cap V_n)$, es unión de $n - 1$ abiertos conexos por trayectorias, tales que para todo $i \in \{1, ..., n-1\}$ y $k \geq 1$, $\pi_k(V_i \cap V_n) = 1$ y si $I \subset \{1, 2, ..., n - 1\}$, entonces $\bigcap_{i \in I}(V_i \cap V_n) = \bigcap_{i \in I \cup \{n\}} V_i$ es no vacio, conexo por trayectorias y tienen sus grupos de homotopía triviales. Usando nuevamente la hipótesis de inducción, tenemos que para toda $k \geq 1$, $\pi_k(X' \cap V_n) = 1$.

Utilizando estos resultados en el último y en los primeros dos términos de la j-ésima parte de la sucesión de Mayer-Vietoris

$$H_j\big((\bigcup_{i=1}^{n-1} V_i) \cap V_n\big) \to H_j(\bigcup_{i=1}^{n-1} V_i) \oplus H_j(V_n) \to H_j(\bigcup_{i=1}^{n} V_i) \to H_{j-1}\big((\bigcup_{i=1}^{n-1} V_i) \cap V_n\big)$$

concluimos que para toda $k \geq 1$, $H_k(\bigcup_{i=1}^{n} V_i) = H_k(X) = 1$.

Por hipótesis sabemos que $\pi_1(\bigcup_{i=1}^{n-1} V_i) = \pi_1(V_n) = 1$ y $\big(\bigcup_{i=1}^{n-1} V_i\big) \cap V_n = \bigcup_{i=1}^{n-1}(V_i \cap V_n)$ es conexo por trayectorias, ya que cada uniendo lo es y $\bigcap_{i=1}^{n} V_i \neq \emptyset$. Por lo tanto $\pi_1\big(\big(\bigcup_{i=1}^{n-1} V_i\big) \cup V_n\big) = \pi_1(X) = 1$.

Finalizamos la demostración utilizando el Teorema de Hurewicz en X. $\square$

Nótese que en la demostración de este teorema es crucial el hecho de que los subconjuntos V_i son abiertos, esto esto nos permite usar el Teorema de Van-Kampen y la sucesión de Mayer-Vietoris sobre ellos y uniones e intersección de ellos.

El procidimento que se siguió para intentar probar que $\mathcal{S}(n)$ es contraible, consiste en tratar de encontrar conjuntos abiertos que satisfagan las hipótesis

de este teorema. Aunque no se logragon encontrar conjuntos abiertos, el resto de este capítulo se centra en probar que los conjuntos (que no son abiertos ni cerrados) $\mathcal{D}_i(n)$ satisfacen las hipótesis del Teorema 3.1.

3.2 Propiedades de la intersección de $\mathcal{D}_i(n)'s$

El teorema principal de esta sección muestra una propiedad que tiene la intersección de conjuntos $\mathcal{D}_i(n)$. En la demostración de dicho resultado se realizarán construcciones rebuscadas, es por ello que al final de la sección, se calcula un ejemplo que ilustra los pasos realizados en la prueba.

Teorema 3.2. *Para todo $I \subset \{3, 4, ..., n\}$, existe un conjunto $\mathcal{W} \subset \bigcap_{i\in I} \mathcal{D}_i(n)$ tal que $\mathcal{W}$ es retracto por deformación de $\bigcap_{i\in I} \mathcal{D}_i(n)$ y $\mathcal{W}$ es homeomorfo a $\mathcal{S}_J(n - |J|)$, para algún $J \subset I$.*

Demostración: Dividiremos la demostración en 5 pasos. En los primeros 3 supondremos que $I = \{3, 4, ..., k\}$ con k par.

Paso 1: *Elección del valor t_Z.*

Fijemos $Z = [0, 1, z_3, z_4, ..., z_n] \in \bigcap_{i\in I} \mathcal{D}_i(n)$. Para cada $j \in \{3, 5, ..., k - 3, k - 1\}$ llamamos $\mu_j \colon [0, 1] \to \mathbb{C}$ a la función $\mu_j(t) = (1 - t)z_{j+1} + tz_{j-1}$ y

$$t_j = \sup_{t\in[0,1]} \{\overline{z_{j+3}\mu_j(t)} \subset cl(Z)\} \text{ y } t_{k-1} = \sup_{t\in[0,1]} \{\overline{z_{k+1}\mu_{k-1}(t)} \subset cl(Z)\}.$$

Para toda $j = \{3, 5, ..., k-1\}$, $t_j > 0$ pues $\overline{z_{j+3}\mu_j(0)} = \overline{z_{j+3}z_{j+1}}$ que es interior a Z y por lo tanto, para ϵ suficientemente pequeño, $\overline{z_{j+3}\mu_j(\epsilon)}$ también es interior. Luego $t_Z = \min\{t_1, t_3, ..., t_{k-1}\}$ también es positivo.

Si $f \colon \bigcap_{i\in I} \mathcal{D}_i(n) \to (0, 1]$ es la función $f(Z) = t_Z$, $(a, b) \subset (0, 1]$ es un abierto y $Z_0 \in \bigcap_{i\in I} \mathcal{D}_i(n)$ es tal que $f(Z_0) = r_0 \in (a, b)$, entonces r_0 se alcanza en algunos vértices de Z_0. Es claro que podemos tomar un polidisco U_0 centrado en Z_0 y con radio suficientemente pequeño, para que $f(\eta(U_0)) \subset (a, b)$. Concluimos que f es continua.

Paso 2: *Elección del conjunto $\mathcal{W}$.*

Consideremos la función $G \colon [0, 1] \times \bigcap_{i\in I} \mathcal{D}_i(n) \to \bigcap_{i\in I} \mathcal{D}_i(n)$, tal que $(s, [0, 1, z_3, z_4, z_5, z_6, ..., z_n]) \mapsto$

$$\begin{cases} [0, 1, \frac{k}{2}\big((\frac{2}{k} - s)z_3 + s\mu_3(\frac{t_Z}{2})\big), z_4, z_5, z_6, ..., z_n] & s \in [0, \frac{2}{k}] \\ [0, 1, \mu_3(\frac{t_Z}{2}), z_4, \frac{k}{2}\big((\frac{4}{k} - s)z_5 + (s - \frac{2}{k})\mu_5(\frac{t_Z}{2})\big), z_6, ..., z_n] & s \in [\frac{2}{k}, \frac{4}{k}] \\ \quad . & \quad . \\ \quad . & \quad . \\ \quad . & \quad . \\ [0, 1, \mu_3(\frac{t_Z}{2}), ..., \frac{k}{2}\big((1 - s)z_{k-1} + (s - \frac{k-2}{k})\mu_{k-1}(\frac{t_Z}{2})\big), z_k, z_{k+1}, ..., z_n] & s \in [\frac{k-2}{k}, 1] \end{cases}$$

G mueve uno por uno, linealmente y en orden los vértices $\{z_3, ..., z_{k-1}\}$ hacia los puntos $\{\mu_3(\frac{t_Z}{2}), \mu_5(\frac{t_Z}{2}), ..., \mu_{k-1}(\frac{t_Z}{2})\}$. La función G tiene las siguientes propiedades:

- Es continua en cada coordenada pues la elección de t_Z es continua. Además, pega bien en los límites de la división de $[0, 1]$, por lo tanto G es continua.

- G_0 es la identidad en $\bigcap_{i\in I} \mathcal{D}_i(n)$ y para todo $s \in [0, 1]$, G_s se restringe a $G_1\big(\bigcap_{i\in I} \mathcal{D}_i(n))\big)$ como la identidad.

- Para todos $Z \in \bigcap_{i\in I} \mathcal{D}_i(n)$ y $s \in [0, 1]$, $G_s(Z) \in \bigcap_{i\in I} \mathcal{D}_i(n)$. Escogemos $z_j \in Z$ con $j \leq k$. Si j es impar, entonces z_j es fuerte-deformable para todo s, ya que la diagonal $\overline{z_{j-1}z_{j+1}}$ no se mueve en todo el proceso. Si j es par, entonces z_j es fuerte-deformable para $s \in [0, \frac{j-2}{k}]$ ya que en este tiempo no se mueve la diagonal $\overline{z_{j-1}z_{j+1}}$. Para $s \in [\frac{j-2}{k}, \frac{j}{k}]$, el triángulo $(z_{j-1}, \mu_{j-1}(\frac{t_Z}{2}), z_{j+1})$ está contenido en $cl(Z)$, luego el segmento de z_{j+1} a $\frac{k}{2}\big((\frac{j}{k} - s)z_{j-1} + (s - \frac{j-2}{k})\mu_{j-1}(\frac{t_Z}{2})\big)$ es diagonal interior de $G_s(Z)$ y por lo tanto z_j es fuerte-deformable. Por último, si $s \in [\frac{j}{k}, 1]$, entonces el triángulo $(\mu_{j-1}(\frac{t_Z}{2}), z_{j+1}, \mu_{j+1}(\frac{t_Z}{2}))$ está contenido en $cl(Z)$, de manera que z_j se mantiene fuerte-deformable.

Concluimos que G es un retracto por deformación de $\bigcap_{i\in I} \mathcal{D}_i(n)$ en el espacio $\mathcal{W} := G_1\big(\bigcap_{i\in I} \mathcal{D}_i(n)\big)$.

Paso 3: *$\mathcal{W}$ es homeomorfo a un $\mathcal{S}_J(n - |J|)$.*

La función $g\colon \mathcal{W} \to \mathcal{S}_{\{3,5,...,k-1\}}(n - \frac{k-2}{2})$ tal que

$$[0, 1, \mu_3(\frac{t_Z}{2}), z_4, ..., \mu_{k-1}(\frac{t_Z}{2}), z_k, ..., z_n] \mapsto [0, 1, \tilde{z}_3, z_4, ..., \tilde{z}_{k-1}, z_k, ..., z_n],$$

tiene las siguienes propiedades:

- *g es continua* - Se sigue de que la elección de t_Z es continua (Paso 1).

- *g es sobre* - Basta notar que todo $Z \in \mathcal{S}_{\{3,...,k-1\}}(n - \frac{k-2}{2})$ tiene un t_Z asociado, por lo que el polígono $Z' \in G_1\big(\bigcap_{i\in I} \mathcal{D}_i(n)\big)$ que tiene los vértices $\{z_3, ..., z_{k-1}\}$ de acuerdo a la construcción anterior, cumple que $g(Z') = Z$.

- *g es inyectiva* - Dado $Z \in \bigcap_{i\in I} \mathcal{D}_i(n)$. Supongamos que $t_j < 1$, entonces $\overline{z_{j+3}\mu_j(t_j)} \cap \mathcal{L}_j \neq \emptyset$. Si $z_l \in \overline{z_{j+3}\mu_j(t_j)} \cap \mathcal{L}_j$ es el vértice en la diagonal $\overline{z_{j+3}\mu_j(t_j)}$ más cercano a z_{j+3}, entonces el ángulo interior en z_l es mayor que π (t_j es mínimo) y por lo tanto, z_l no puede ser fuerte-deformable. Esto prueba que t_Z depende sólo de los vértices $\{z_2, z_4, ..., z_k, z_{k+1}, ..., z_n\}$, los cuales quedan fijos por g.

- *g es homeomorfismo* - Ya que $g^{-1}(Z)$ lleva los vértices $\{\tilde{z}_3, \tilde{z}_5, ..., \tilde{z}_{k-1}\}$ en los puntos construidos anteriormente, por lo tanto es continua.

Así terminamos el resultado para el caso $I = \{3, 4, ..., k\}$ con k par.

Paso 4: *Caso $I = \{3, 4, ..., k\}$ con k impar.*

Para cada $j \in \{3, 5, ..., k-2\}$, hacemos $\mu_j(t) = (1-t)z_{j+1} + tz_{j-1}$ y

$$t_j = \sup_{t\in[0,1]} \{\overline{z_{j+3}\mu_j(t)} \subset cl(Z)\},$$

i.e. calculamos t_j justo como en los primeros $k-3$ vértices del caso k par. De manera análoga que en el Paso 1, $t_j > 0$, $t_Z = \min\{t_3, t_5, ..., t_{k-2}\} > 0$ y la función que para cada Z elige t_Z es continua.

La función $G\colon [0,1]\times\bigcap_{i\in I}\mathcal{D}_i(n) \to \bigcap_{i\in I}\mathcal{D}_i(n)$ que mueve $\{z_3, ..., z_{k-2}, z_k\}$, uno a uno y en orden hacia $\{\mu_3(\frac{t_Z}{2}), \mu_5(\frac{t_Z}{2}), ..., \mu_{k-2}(\frac{t_Z}{2}), \tilde{z}_k\}$, es nuevamente un retracto por deformación de $\bigcap_{i\in I}\mathcal{D}_i(n)$ en $G_1\big(\bigcap_{i\in I}\mathcal{D}_i(n)\big)$ (la demostración es igual que en el Paso 2).

Nótese que en este caso, G movió al último vértice al punto medio de $\overline{z_{k-1}z_{k+1}}$. Es fácil notar que esto asegura que z_{k-1} es fuerte-deformable para todo tiempo. Además, de esta forma tenemos que si $k = 3$, entonces G sólo deforma z_3 en $\tilde{z}_3$.

Es claro que la paridad de k no influye en la demostración de el Paso 3. Por lo que el resultado también es válido para $I = \{3, 4, ..., k\}$ con k impar.

Paso 5: *Caso general $I \subset \{3, 4, ..., n\}$.*

Primero notemos que para el caso $\{z_l, z_{l+1}, ..., z_{l+k}\}$ se puede proceder de manera completamente análoga a los casos anteriore, ya que en las demostraciones es irrelevante que comencemos en el vértice z_3.

En este caso $I = \bigcup_{j=1}^{m} A_j$ con $A_j = \{l_j, l_j+1, ..., l_j+k_j\}$, de manera que $A_j \cap A_{j+1} = \emptyset$, entre A_j y A_{j+1} hay al menos un vértice no fuerte-deformable que los separa y las A_j están acomodadas de manera cíclica (*i.e.* en el orden de los vértices, después de A_j sigue A_{j+1}).

Fijemos $Z \in \bigcap_{i\in I}\mathcal{D}_i(n)$. Procediendo de manera análoga a los pasos 1 o 4 en cada A_j (dependiendo de la paridad de $|A_j|$), obtenemos un número $t_{A_j} > 0$ que es el tiempo mínimo en el bloque A_j. Luego $t_Z = \min\{t_{A_1}, t_{A_2}, ..., t_{A_m}\} > 0$ es el tiempo buscado para Z. Nótese que la función $\bigcap_{i\in I}\mathcal{D}_i(n) \to (0,1]$, $Z \mapsto t_Z$ es mínimo de funciones continuas y por lo tanto es continua.

La función $G\colon [0,1] \times \bigcap_{i\in I}\mathcal{D}_i(n) \to \bigcap_{i\in I}\mathcal{D}_i(n)$, que dependiendo de la paridad de $|A_j|$, deforma los vértices de cada bloque A_j y lo hace de manera creciente sobre los A_j, es un retracto por deformación de $\bigcap_{i\in I}\mathcal{D}_i(n)$ en $G_1\big(\bigcap_{i\in I}\mathcal{D}_i(n)\big)$ (la demostración es igual que en el Paso 2).

Por último, si $J \subset I$ es el conjunto de vértices que fueron deformados por G, entonces $\mathcal{W} = G_1\big(\bigcap_{i\in I} \mathcal{D}_i(n)\big)$ es homeomorfo a $\mathcal{S}_J(n - |J|)$. El homeomorfismo se construye de manera análoga al Paso 3. $\square$

Para ilustrar las construcciones elaboradas en la demostración realizaremos un ejemplo.

Ejemplo 3.3. *Los pasos de la demostración del Teorema 3.2 aplicados a un* $Z_0 \in \bigcap_{i\in I} \mathcal{D}_i(n)$*, con* $I = \{3, 4, 5, 9, 11, 12, 13, 14, 16, 17, 21, 22, 23, 24, 25, 28\}$.

El polígono Z_0 que utilizaremos se muestra en la Figura 7. Es fácil notar los vértices $z_3, z_4, z_5, z_9, z_{11}, z_{12}, z_{13}, z_{14}, z_{16}, z_{17}, z_{21}, z_{22}, z_{23}, z_{24}, z_{25}, z_{28}$ son fuerte-deformables en Z_0.

En la Figura 8, se muestran en líneas punteadas las diagonales internas $\mu_j(t)$ que se utilizan en el Paso 1 de la demostración, recordemos que los vértices correspondientes a dichas diagonales son los que se van a deformar. También en la Figura 8, se muestra el punto $X \in \mu_{21}([0, 1])$ donde se alcanza el valor t_{Z_0}.

Como menciona el Paso 2, los vértices serán deformados hacia los puntos $\mu_j(t_{Z_0}/2)$ a excepción de los vértices aislados y los últimos en una cadena impar, que se deformarán al punto medio de sus aristas. La Figura 9 muestra el polígono Z_0' que se obtiene al deformar los vértices de Z_0 de acuerdo al patrón mencionado.

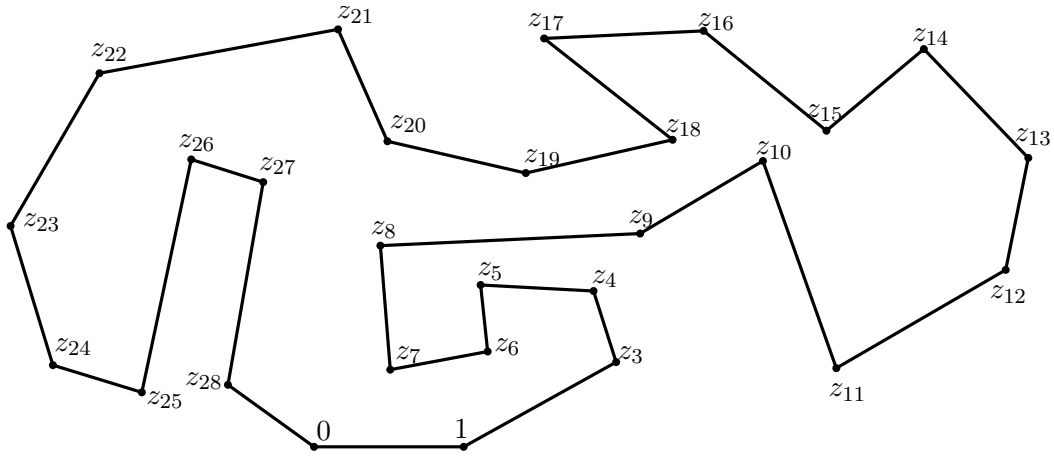

FIGURA 7: El 28-ágono Z_0 que utilizaremos como ejemplo. Notar que los vértices $z_3, z_4, z_5, z_9, z_{11}, z_{12}, z_{13}, z_{14}, z_{16}, z_{17}, z_{21}, z_{22}, z_{23}, z_{24}, z_{25}, z_{28}$ son fuerte-deformables.

Este ejemplo muestra la contrucción está realizada de esta manera, para lograr que para todo $t \in [0, 1]$, el polígono $G_t(Z_0)$ pertenezca a $\cap_{i\in I}\mathcal{D}_i(n)$ con $I = \{3, 4, 5, 9, 11, 12, 13, 14, 16, 17, 21, 22, 23, 24, 25, 28\}$.

Una observación sencilla, es que si Z es un polígono convexo, entonces $t_Z = 1$ y por lo tanto la construcción deforma todo vértice al punto medio de su arista.

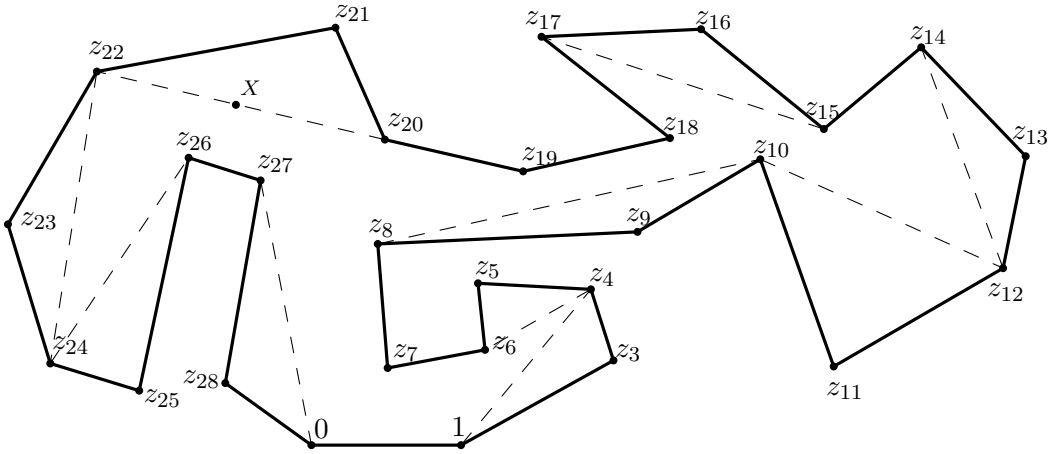

FIGURA 8: Las líneas punteadas, son las diagonales μ_j de los vértices de Z_0 que van a ser deformados. El punto X es donde se alcanza t_{Z_0}.

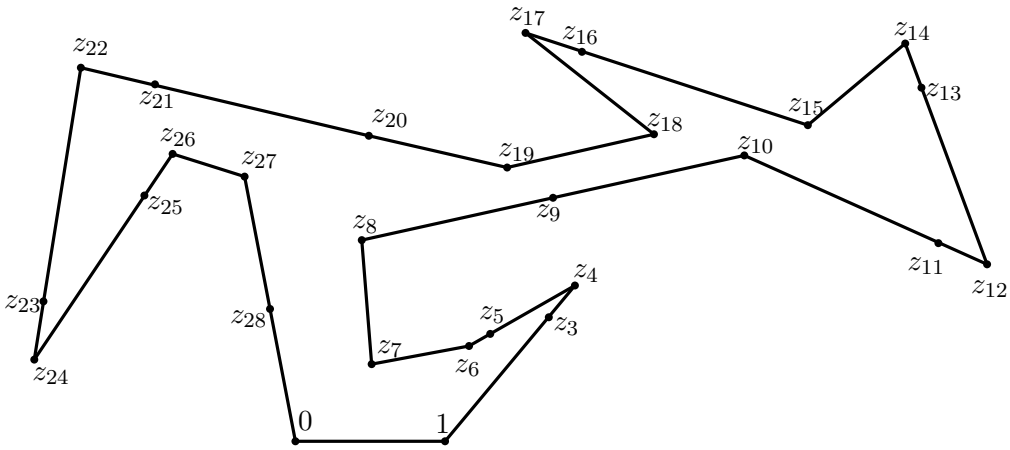

FIGURA 9: Polígono Z_0' que se obtiene como imagen de la deformación G.

3.3 Parejas escisivas

La herramienta clave en la demostración del Teorema 3.1 fue la sucesión de Mayer-Vietoris, que se utiliza sobre una pareja de subconjuntos de un espacio X. Resulta que esta sucesión exacta no se puede usar con cualquier pareja de subconjuntos, en esta sección, mencionamos cierto tipo de parejas sobre

las que sí es posible utilizar Mayer-Vietoris. Aquí, también mostraremos dos subconjuntos de $\mathbb{S}^2$ sobre los cuales no es válido usar la sucesión de Mayer-Vietoris.

Definición 3.4. *Se dice que una pareja (X_1, X_2) es escisiva si la inclusión $i\colon (X_1, X_1 \cap X_2) \to (X_1 \cup X_2, X_2)$ es tal que para toda k, el homomorfismo asociado $i_{\#}\colon H_k(X_1, X_1 \cap X_2) \to H_k(X_1 \cup X_2, X_2)$ es un isomorfismo.*

Algunos ejemplos de parejas escisivas son:

1. Parejas (X_1, X_2) donde $X_2 \subset X_1$ o $X_1 \subset X_2$. En el primer caso $X_1 \cap X_2 = X_2$ y $X_1 \cup X_2 = X_1$, por lo tanto la inclusión $i\colon (X_1, X_2) \to (X_1, X_2)$ es la identidad. En el segundo caso $X_1 \cap X_2 = X_1$, $X_1 \cup X_2 = X_2$ y la inclusión $i\colon (X_1, X_1) \to (X_2, X_2)$ induce isomorfismo, ya que para toda k, los k-ésimos grupos de homología en ambos casos son triviales.

2. (X_1, X_2) tales que $X_1, X_2 \subset Y$ son abiertos.

3. (X_1, X_2) con $X_1, X_2 \subset Y$ tales que $Y = X_1^\circ \cup X_2^\circ$.

4. Parejas (X_1, X_2) donde X_1, X_2 son retractos por deformación de abiertos U_1, U_2 y $X_1 \cap X_2$ es retracto por deformación de $U_1 \cap U_2$.

Las demostraciones de los ejemplos 2 y 3 se siguen del Teorema 4.14 [22, pág. 178]. Para el ejemplo 4, ver [12, pág. 150].

Las parejas escisivas son útiles por que con ellas podemos usar la suceción de Mayer-Vietoris [22, pág. 189]. De hecho, si en el Teorema 3.1 pedimos que los $V_i's$ y sus intersecciones formen parejas escisivas, entonces la demostración se seguiría de manera análoga.

Ejemplo 3.5. *Una pareja que no es escisiva.*

Consideremos los conjuntos $X_2 = \{(x, y, z) \in \mathbb{S}^2 \mid z \geq 0\}$ y $X_1 = A_1 \cup A_2$ donde

$$A_1 = \{(x, y, z) \in \mathbb{S}^2 \mid z < 0\} \quad \text{y} \quad A_2 = \{(x, y, 0) \in \mathbb{S}^2 \mid y < 0\}.$$

Claramente X_1 y X_2 son contraibles, $X_1 \cup X_2 = \mathbb{S}^2$ y $X_1 \cap X_2 = A_2 \cong (0, 1)$.

La inclusión $i\colon (X_1, A_2) \to (\mathbb{S}^2, X_2)$ no puede inducir isomorfismos en homología, ya que la pareja (X_1, A_2) tiene homología trivial (pues el cociente X_1/A_2 es contraible) y la pareja $(\mathbb{S}^2, X_2)$ tiene la homología de $\mathbb{S}^2$. De hecho, si intentamos aplicar Mayer-Vietoris, en grado 2 obtenemos la sucesión

$$\cdots \to H_2\left((0, 1)\right) \to H_2(X_1) \oplus H_2(X_2) \to H_2(\mathbb{S}^2) \to H_1\left((0, 1)\right) \to \cdots$$

que no puede ser exacta por que $H_2(\mathbb{S}^2) \simeq \mathbb{Z}$ y los otros grupos son triviales.

Procedemos a demostrar que los $\mathcal{D}_i(n)$ no satisfacen ninguna de las condiciones que se mencionan en los Ejemplos 2, 3 y 4:

- Como se ilustra la Figura 7, los $\mathcal{D}_i(n)$ no son abiertos.

- Con los $\mathcal{D}_i(n)$ se cumple que $\mathcal{D}_i^\circ(n) \cup \mathcal{D}_j^\circ(n) \subsetneq \mathcal{D}_i(n) \cup \mathcal{D}_j(n)$, ya que claramente los polígonos en $\mathcal{S}_{ij}(n-2)$ no pertenecen a la unión de los interiores pero sí a la unión de los conjuntos.

- De la Proposición 2.7 sabemos que $\mathcal{D}_i(n)$ es retracto por deformación del abierto $\mathcal{T}_i(n)$, pero $\mathcal{T}_i(n) \cap \mathcal{T}_{i+1}(n)$ no tiene como retracto por deformación a $\mathcal{D}_i(n) \cap \mathcal{D}_{i+1}(n)$. Para verificar esto, basta tomar un polígono con dos vértices deformables (pero no fuerte-deformables) consecutivos, que no se puedan hacer fuerte-deformables.

- El abierto $\mathcal{T}_i(n) \cap (\mathcal{D}_i(n) \cap \mathcal{D}_{i+1}(n)) \subset \mathcal{D}_i(n) \cap \mathcal{D}_{i+1}(n)$, no tiene a $\mathcal{D}_i(n)$ como retracto por deformación. La Figura 10 muestra un 10-ágono que pertenece a $\mathcal{T}_3(10) \cap (\mathcal{D}_3(10) \cap \mathcal{D}_4(10))$ para el cual la restricción de la retracción de la Proposición 2.7, se sale de $\mathcal{D}_3(n) \cap \mathcal{D}_4(n)$.

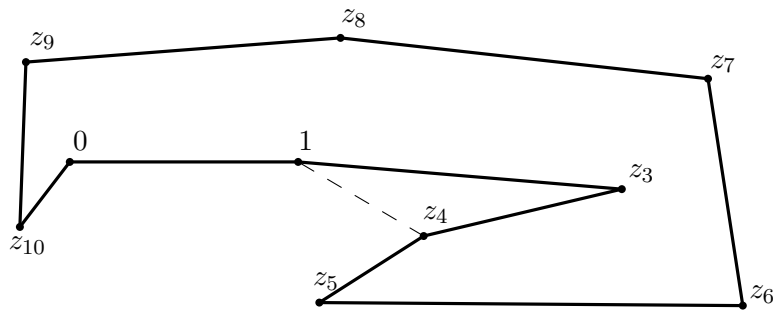

FIGURA 10: Polígono en $\mathcal{T}_3(10) \cap (\mathcal{D}_3(10) \cap \mathcal{D}_3(10))$ para el cual la restricción de la retracción de $\mathcal{T}_3(10)$ en $\mathcal{D}_3(10)$ se sale de $\mathcal{D}_3(10) \cap \mathcal{D}_4(10)$.

Cabe mencionar que no usamos los abiertos $\mathcal{T}_i(n)$ por que para ellos no tenemos un resultado análogo al Teorema 3.2. De hecho, al intentar probar con los $\mathcal{T}_i(n)$ un resultado análogo a dicho Teorema, no logramos el Paso 3, ya que la función g mencionada allí, no necesariamente sería homeomorfismo en este caso.

3.4 $\mathcal{S}(n)$ es contraible.

Aquí trabajaremos bajo la suposición de que podemos usar Mayer-Vietoris en los $\mathcal{D}_i(n)'s$ y en intersecciones de ellos. El objetivo de esta sección es mostrar los avances que tendríamos en caso de que este hecho fuese cierto. Los resultados serán marcados con un asterisco para recalcar que no se deben tomar como totalmente verdaderos.

Teorema 3.6. ***(*):*** *$\mathcal{S}(n)$ es contraible*

Demostración: Procederemos por inducción sobre n. El Ejemplo 1.10 muestra que el resultado se vale para $\mathcal{S}(3)$. Supongamos que el resultado es válido para todo $k < n$. Demostraremos que los conjuntos $\mathcal{D}_i(n)$ con $i \in \{3, 4, ..., n\}$ satisfacen las hipótesis del Teorema 3.1.

- Sabemos que los $\mathcal{D}_i(n)$ son conexos por trayectorias y $\mathcal{S}(n) = \bigcup_{i=3}^{n} \mathcal{D}_i(n)$.
- Para todo $I \subset \{3, 4, ..., n\}$, $\cap_{i \in I} \mathcal{D}_i(n) \neq \emptyset$ pues el polígono regular pertenece a todas estas intersecciones.
- Recordemos que la función $G\colon [0,1] \times \mathcal{D}_3(n) \to \mathcal{D}_3(n)$ tal que

  $$(t, [0, 1, z_3, z_4, ..., z_n]) \mapsto [0, 1, (1-t)z_3 + t\tilde{z}_3, z_4, ..., z_n],$$

  es un retracto por deformación de $\mathcal{D}_3(n)$ en $\mathcal{S}_3(n-1)$. Por hipótesis de inducción, $\mathcal{D}_3(n)$ es contraible. Análogamente $\mathcal{D}_j(n)$ es contraible para toda $j \in \{3, 4, ..., n\}$.
- Del Teorema 3.2, se sigue que $\cap_{i \in I} \mathcal{D}_i(n)$ es conexo por trayectorias y que para toda $k > 0$, $\pi_k\left(\cap_{i \in I} \mathcal{D}_i(n)\right) = 1$.

Usando el Teorema 3.1 concluimos que $\pi_k(\mathcal{S}(n)) = 1$ para toda $k > 0$. Como $\mathcal{S}(n) \subset \mathbb{CP}^{n-2}$ es una variedad (es abierto), el Corolario 1 en [19] nos dice que tiene el tipo de homotopía de un CW-complejo. Luego, por el Teorema de Whitehead [12, pág. 346], concluimos que $\mathcal{S}(n)$ es contraible. $\square$

Corolario 3.7. ***(*):*** *Las componenetes de $\mathbb{S}(n) \subset \mathbb{C}^n$ son homeomorfas a $\mathcal{S}(n) \times (\mathbb{C} \times \mathbb{C}^*)$.*

Demostración: Recordemos que $\eta\colon \mathbb{C}^n - \{(z, z, ..., z)\} \to \mathbb{CP}^{n-2}$ es un haz fibrado con fibra $\mathbb{C}^* \times \mathbb{C}$ (ver Observación 4, Sección 1.3). Por el Teorema 3.6, el haz fibrado dado por la restricción $\eta\colon \eta^{-1}(\mathcal{S}(n)) \to \mathcal{S}(n)$ tiene base contraible. El resultado se sigue de que todo haz fibrado sobre un espacio

contraible es homeomorfo al producto de la base del haz con la fibra (Teorema 9.9 en [14, pág. 52]). $\square$

Hasta ahora tenemos que $\mathcal{S}(n) \subset \mathbb{CP}^{n-2}$ es un abierto contraible, pero:

¿Será $\mathcal{S}(n)$ homeomorfo a $\mathbb{R}^{2n-4}$?

La conocida vairedad de Whitehead es un ejemplo de un abierto contraible contenido en $\mathbb{R}^3$ que no es homeomorfo a $\mathbb{R}^3$ [26]. Dicha variedad, muestra que la respuesta a la pregunta anterior no es obvia. A continuación damos respuesta al caso $n = 4$:

Proposición 3.8. $\mathcal{S}(4) \cong \mathbb{R}^4$.

Demostración: Para que un punto $[0, 1, z_3, z_4] \in L_4$ pertenezca a $\mathcal{S}(4)$, es necesario que $z_3 = x_3 + iy_3$ pertezca a $\mathbb{C} - \{x \in \mathbb{R} \mid x < 1\}$. Una vez que z_3 es escogido, tenemos las siguientes 3 posibilidades para z_4:

1. $y_3 > 0$ - z_4 debe pertenece a la misma región que el -1 al dividir el plano con las siguientes líneas:

$$\{\lambda z_3 \mid \lambda \leq 0\} \ \cup \ \overline{01} \ \cup \ \overline{1z_3} \ \cup \ \{\lambda z_3 \mid \lambda \geq 1\}.$$

2. $y_3 = 0$ - Claramente z_4 debe pertenecer al semiplano superior.

3. $y_3 < 0$ - z_4 debe pertenecer a la región delimitada por el rayo de números reales mayores que 1 y el rayo que emana de 1 con pendiente $\frac{y_3}{x_3-1}$ y está contenido en el semiplano superior.

Es claro que las líneas que se mencionan en cada caso, no son posibles valores de z_4. De manera que en los 3 casos las regiones son homeomorfas a discos abiertos.

La función $f\colon \mathcal{S}(4) \to \mathbb{C} - \{x \in \mathbb{R} \mid x < 1\}$, $f([0, 1, z_3, z_4]) = z_3$ es un haz fibrado con fibra un disco. Como $\mathbb{C} - \{x \in \mathbb{R} \mid x < 1\}$ también es homeomorfo a un disco, $\mathcal{S}(4)$ es un haz fibrado con fibra un disco y base un disco. Por Teorema 9.9 de [14, pág. 52], concluimos que $\mathcal{S}(4)$ es homeomorfo al producto de dos discos y por lo tanto a $\mathbb{R}^4$. $\square$

Esta proposición y el Ejemplo 1.10 nos hacen pensar que lo mismo vale para el caso general, por lo tanto mencionamos nuestra primera conjetura:

Conjetura 1.- $\mathcal{S}(n) \cong \mathbb{R}^{2n-4}$.

Capítulo 4

Polígonos sin etiquetas en los vértices

Recordemos que estamos identificando puntos de $\mathbb{C}^n$ con polígonos en $\mathbb{C}$ mediante la asociación

$$(z_1, z_2, ..., z_n) \longleftrightarrow \{\overline{z_1 z_2} \cup \overline{z_2 z_3} \cup \cdots \cup \overline{z_{n-1} z_n} \cup \overline{z_n z_1}\}.$$

Por el orden natural que tienen las coordenadas en $\mathbb{C}^n$, dichos polígonos tienen sus vértices etiquetados. Al dividir por la acción de $\mathbb{A}_{\mathbb{C}}$ y pasar al proyectivo $\mathbb{CP}^{n-2}$, consideramos a los polígonos módulo rotaciones, traslaciones y homotecias pero aún con etiquetas en sus vértices.

En este capítulo, estudiaremos las implicaciones que tienen los resultados probados hasta ahora sobre el espacio de polígonos simples en el espacio de polígonos sin etiquetas en sus vértices, el cual denotaremos con $\mathbb{P}(n)$.

Para estudiar el espacio de polígonos con vértices sin etiquetas, dividimos este capítulo en tres secciones. En la primera estudiamos la función que reenumera los vértices de un polígono y algunas de sus propiedades, en la segunda definimos el espacio $\mathbb{P}(n)$ y calculamos $\mathbb{P}(3)$ con todo detalle. Por último, en la tercera sección estudiamos las propiedades topológicas que $\mathbb{P}(n)$ hereda de los resultados demostrados en los Capítulos 2 y 3 y damos una descripción de la topología de $\mathbb{P}(n)$ al rededor del polígonos regular.

Cabe mencionar que para algunas pruebas de este capítulo necesitaremos herramientas clásicas de Geometría Riemanniana, las cuales se pueden consultar en [7].

4.1 Función de cambio de enumeración

Para cambiar la enumeración en los vértices de un polígono, consideraremos la acción del isomorfismo lineal $\hat{\delta}\colon \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}^n$ tal que

$$(z_1, z_2, z_3, ..., z_{n-1}, z_n) \mapsto (z_2, z_3, ..., z_{n-1}, z_n, z_1).$$

Es claro que $\hat{\delta}$ reenumera al polígono $(z_1, z_2, ..., z_n)$ comenzando ahora en el segundo vértice. Este isomorfismo tiene las siguientes propiedades:

a) *$\hat{\delta}^n = id_{\mathbb{C}^n}$, por lo tanto el grupo generado por $\hat{\delta}$ ($\langle\hat{\delta}\rangle$) es el grupo cíclico de orden n.*

b) *Si $Z, W \in \mathbb{C}^n$, entonces Z y W están relacionados si y sólo si $\hat{\delta}(Z)$ y $\hat{\delta}(W)$ también lo están* - Es claro por que la acción de $\mathbb{A}_{\mathbb{C}}$ en $\mathbb{C}^n$ es por entradas.

c) *$\hat{\delta}$ es una isometría del prducto hermitiano asociado a la forma de área (ver Sección A.2, Apéndice A) y del euclideano* - Los productos mencionados respectivamente son:

$$\langle Z, W\rangle_{\mathcal{A}} = \frac{i}{4}\sum_{k=1}^{n}(z_k\bar{w}_{k+1} - z_{k+1}\bar{w}_k) \quad \text{y} \quad \langle Z, W\rangle = \sum_{k=1}^{n} z_k\bar{w}_k,$$

donde $Z = (z_1, z_2, ..., z_n), W(w_1, w_2, ..., w_n)$. Usando la expresión de $\hat{\delta}$, es fácil ver que $\langle Z, W\rangle_{\mathcal{A}} = \langle\hat{\delta}(Z), \hat{\delta}(W)\rangle_{\mathcal{A}}$ y $\langle Z, W\rangle = \langle\hat{\delta}(Z), \hat{\delta}(W)\rangle$.

Proposición 4.1. *$\hat{\delta}\colon \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}^n$ define el biholomorfismo*[1] *$\delta\colon \mathbb{CP}^{n-2} \to \mathbb{CP}^{n-2}$ tal que $[z_1, z_2, ..., z_n] \mapsto [z_2, ..., z_n, z_1]$.*

Demostración: Recordemos que $\eta\colon \mathbb{C}^n - \{(z, z, ..., z)\} \to \mathbb{CP}^{n-2}$ es la función de paso al cociente (Sección 1.3). De la propiedad b) se sigue que existe función biyectiva $\delta\colon \mathbb{CP}^{n-2} \to \mathbb{CP}^{n-2}$ tal que $\delta \circ \eta = \eta \circ \hat{\delta}$. Por demostrar que δ es holomorfa.

La acción de δ sobre los representantes del abierto $U_2 = \{[0, 1, z_3, ..., z_n]\} \subset \mathbb{CP}^{n-2}$ se ve de la siguiente forma

$$\delta\left([0, 1, z_3, z_4, ..., z_n]\right) = \left[0, 1, \frac{z_4 - 1}{z_3 - 1}, ..., \frac{z_n - 1}{z_3 - 1}, \frac{-1}{z_3 - 1}\right].$$

[1] Función holomorfa y con inversa holomorfa.

Notar que los representantes $\{[0,1,1,z_4,...,z_n]\}$ son enviados fuera de U_2. Expresando esta acción en la carta $\phi_2\colon U_2 \to \mathbb{C}^{n-2}$ (ver Observación 3, página 16) obtenemos

$$\phi_2 \circ \delta \circ \phi_2^{-1}\colon \mathbb{C}^{n-2} \to \mathbb{C}^{n-2}, \quad (z_3, z_4, ..., z_n) \mapsto \left(\frac{z_4-1}{z_3-1}, ..., \frac{z_n-1}{z_3-1}, \frac{1}{1-z_3}\right),$$

que claramente es holomorfa en el abierto $L_n - \{z_3 = 1\}$. Procediendo de manera análoga sobre todas las cartas de $\mathbb{CP}^{n-2}$ concluimos que δ es biholomorfismo. $\square$

$\delta\colon \mathbb{CP}^{n-2} \to \mathbb{CP}^{n-2}$ satisface las siguientes propiedades:

1. *Si $Z \in \mathcal{S}(n)$, entonces $\delta(Z) \in \mathcal{S}(n)$. Denotaremos con δ a la restricción de $\delta\colon \mathbb{CP}^{n-2} \to \mathbb{CP}^{n-2}$ a $\mathcal{S}(n)$.*

2. *$Z \in \mathcal{S}(n)$ es tal que $\delta(Z) = Z \iff Z = R_n$* - Es claro que $\delta(R_n) = R_n$. Si $\delta(Z) = Z$, entonces $\delta^k(Z) = Z$ para toda k, por lo tanto Z tiene lados de igual longitud y todos sus ángulos interiores deben valer $\frac{(n-2)\pi}{n}$. Concluimos que Z es el polígono regular.

3. *Si $Z \in \mathcal{S}(n)$ y $1 < k < n$ son tales que $\delta^k(Z) = Z$, entonces el número $k_{_Z} = \min\{k \mid \delta^k(Z) = Z\}$ divide a n y por lo tanto el subgrupo $\langle \delta^{k_Z} \rangle$ fija a Z* - $\delta^{2k_Z}(Z) = \delta^{k_Z}(\delta^{k_Z}(Z)) = Z$, análogamente $\delta^{lk_Z}(Z) = Z$. Por ser $k_{_Z}$ mínimo, existe l_0 tal que $l_0 k_{_Z} = n$.

4. *Para todo divisor k de n, existe $Z \in \mathcal{S}(n)$ tal que $\delta^l(Z) \neq Z$ para $1 < l < k$ y $\delta^k(Z) = Z$* - Supongamos que $l_0 k = n$, entonces basta tomar R_k y marcar $l_0 - 1$ puntos equitativamente distribuidos en cada arista. La Figura 11 muestra dos ejemplos.

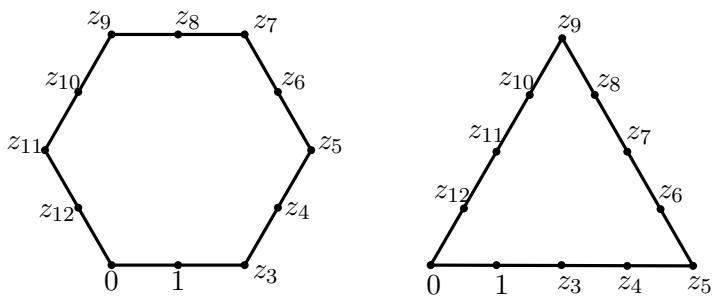

FIGURA 11: En el primer 12-ágono se satisface que δ^2 es la identidad. En el segundo se cumple que δ^4 es la identidad.

Teorema 4.2. *La diferencial de δ en el polígono regular $(D_{R_n}\delta)$ es conjugada a una matriz diagonal con entradas $e^{4\pi i/n}, e^{6\pi i/n}, ..., e^{2(n-2)\pi i/n}, e^{2(n-1)\pi i/n}$.*

Demostración: En esta demostración utilizaremos la siguiente base de $\mathbb{C}^n$ (ver [18, Proposición 3])

$$\beta = \left\{ P_k = (1, e^{2\pi ik/n}, \left(e^{2\pi ik/n}\right)^2, \ldots, \left(e^{2\pi ik/n}\right)^{n-1}) \right\}_{k=0}^{n-1}.$$

Notar que para toda n, $P_0 = (1, 1, ..., 1)$ y $P_1 = R_n$. Los productos (con respecto al producto euclideano en $\mathbb{C}^n$) entre estos polígonos son

$$\langle P_k, P_l \rangle = \sum_{m=0}^{n-1} \left(e^{\frac{2\pi i(k-l)}{n}} \right)^m = \begin{cases} n & \text{si} \quad k = l \\ 0 & \text{si} \quad k \neq l \end{cases},$$

el caso $k \neq l$, se anula por que $e^{\frac{2\pi i(k-l)}{n}}$ es raíz n-ésima de la unidad distinta de 1 y por lo tanto anula al polinomio $z^{n-1} + z^{n-2} + ... + z + 1$. Concluimos que β es ortogonal.

Es fácil notar que para toda $k = 0, 1, 2, \ldots, n-1$, $\hat{\delta}(P_k) = e^{2\pi ik/n} P_k$, es decir, P_k es vector propio de $\hat{\delta}$ con valor propio $e^{2\pi ik/n}$. De manera que β es base de vectores propios para la acción de $\hat{\delta}$.

Trasladando el centroide de los n-ágonos al origen, obtenemos representantes en el subespacio $V_n = \{(z_1, z_2, ..., z_n) \in \mathbb{C}^n \mid z_1 + z_2 + \cdots + z_n = 0\}$. Nótese que $0 \in V_n$ representa la clase de la línea $\{(z, z, ..., z)\} \subset \mathbb{C}^n$. Luego, $\mathbb{P}_{\mathbb{C}} V_n$ es nuevamente el espacio de polígonos módulo semejanza orientada. $\{P_k\}_{k=1}^{n-1}$ es base de V_n pues $P_0 \in \{(z, z, ..., z)\}$. Es claro que V_n es invariante por la acción de $\hat{\delta}$.

Es sabido que al proyectivizar $T_{R_n} V_n$ (el espacio tangente a V_n en el polígono regular), se anula la dirección dada por $R_n = P_1$. Como β ortogonal, el subespacio generado por $\{P_k\}_{k=2}^{n-1}$ es una presentación de $T_{R_n} \mathbb{CP}^{n-2}$. La acción de $\hat{\delta}$ en esta presentación del tangente, se corresponde con la acción de $D_{R_n}\delta$ en $T_{R_n} \mathbb{CP}^{n-2}$ (basta tomar la expresión de la acción en la carta $\phi_2 \colon U_2 \to \mathbb{C}^{n-2}$ que se calcula en la Proposición 4.1). Concluimos que $D_{R_n}\delta$ es conjugada a la matriz

$$\Delta_n = \begin{pmatrix} e^{\frac{4\pi i}{n}} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & e^{\frac{6\pi i}{n}} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & e^{\frac{2(n-1)\pi i}{n}} \end{pmatrix} \qquad \square$$

Notar que para este resultado es importante tomar la diferencial en el polígono regular, ya que este es fijo por la acción de δ y pertenece a la base β mencionada en la demostración. Si tomáramos otro elemento de β (todos

son fijos por la acción de δ), entonces tendríamos un resultado análogo a este teorema pero con distintos valores y vectores propios.

4.2 Definición y caso $n = 3$

Ahora estamos listos para definir los espacios de polígonos con vértices que no están etiquetados.

Definición 4.3. *Si $n \geq 3$ entonces*

a) A $\mathbb{P}(n) = \mathbb{CP}^{n-2}/\langle\delta\rangle$ le llamaremos espacio de n-ágonos sin etiquetas en los vértices módulo semejanza orientada. Denotaremos con $\hat{\sigma}$ a la proyección cociente $\mathbb{CP}^{n-2} \to \mathbb{P}(n)$.

b) A $\mathcal{P}(n) = \mathcal{S}(n)/\langle\delta\rangle$ lo llamamos el espacio de polígonos simples sin etiquetas en los vértices módulo semejanza orientada. Denotaremos con σ a la restricción de $\hat{\sigma}\colon \mathbb{CP}^{n-2} \to \mathbb{P}(n)$ a $\mathcal{S}(n) \to \mathcal{P}(n)$.

Observaciones de la definición:

1. Si $Z \in \mathbb{CP}^{n-2}$ es tal que $\delta^k(Z) = Z$ para algún $1 < k < n$, entonces $\hat{\sigma}(Z)$ es una singularidad en $\mathbb{P}(n)$.

2. De las Propiedades 3 y 4 de δ se sigue que para q primo, la proyección $\sigma\colon \mathcal{S}(q) - \{R_q\} \to \mathcal{P}(q) - \{\sigma(R_q)\}$ es función cubriente.

3. Los espacios $\mathbb{P}(n)$ y $\mathcal{P}(n)$ tiene una estructura de buen orbifold, pues son cocientes de una variedad por un grupo finito [3, Cap. 3].

4. Por la Propiedad c) de la sección anterior, la métrica de Fubini-Study que se explica en la Sección 1 del Apéndice A, baja a $\mathbb{P}(n)$.

5. El producto asociado a la forma de área que se explica en la Sección 2 del Apéndice A, baja a $\mathcal{P}(n)$. Cabe mencionar que éste no baja a $\mathbb{P}(n)$ por que aquí existen polígonos con área 0.

Ejemplo 4.4. *El caso $n = 3$.*

La acción de δ en la línea L_3 se ve de la forma $[0, 1, z] \mapsto [0, 1, \frac{1}{1-z}]$. De manera que en $\mathbb{CP}^1$, δ intercambia los círculos que se muestran en la Figura 11 (la línea entre $e^{\frac{i\pi}{3}}$ y $e^{\frac{10i\pi}{6}}$, determina un círculo en $\mathbb{CP}^1$). El cociente $\mathbb{P}(3)$ es topológicamente una esfera. El eje real de L_3 determina un círculo en

$\mathbb{P}(3)$ y los semiplanos superior e inferior de L_3 determinan los hemisferios. La Figura 11, muestra una forma de obtener a $\mathbb{P}(3)$ como un pegado de semicírculos.

En este caso la métrica de Fubini-Study en $\mathbb{CP}^1$ coincide con la métrica esférica en $\mathbb{S}^2$ (ver Sección 1, Apéndice A), de manera que $\mathbb{P}(3)$ admite geometría esférica. En dicha geometría, los puntos $\sigma(e^{\frac{i\pi}{3}})$ y $\sigma(e^{\frac{10i\pi}{6}})$ son singularidades cónicas [25, Pág.523] de ángulos cónicos iguales $\frac{2\pi}{3}$, por lo que $\mathbb{P}(3)$ es como un "balón de fútbol americano".

En este caso, $\mathcal{S}(3)$ junto con el producto asociado a la forma de área es el Plano Hiperbólico (ver Sección 2, Apéndice A). $\mathcal{P}(3)$ es el disco que corresponde al hemisferio superior de $\mathbb{P}(3)$. Además, como $\frac{1}{1-z}$ es una isometría hiperbólica, $\mathcal{P}(3)$ admite geometría hiperbólica. En esta geometría, el punto $\sigma(e^{\frac{i\pi}{3}})$ es una singularidad cónica de ángulo cónico $\frac{2\pi}{3}$.

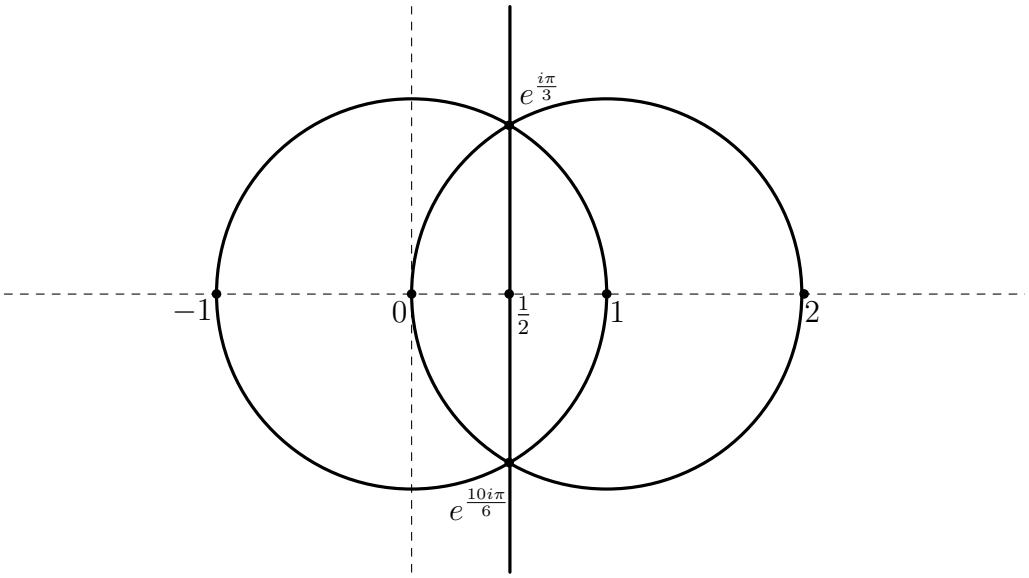

FIGURA 11: Circunferencias de $\mathbb{CP}^1$ que corresponden a los triángulos isóceles y son intercambiadas por δ. Una región fundamental para la acción, está dada por los semicirculos con extremos $e^{\frac{i\pi}{3}}$ y $e^{\frac{10i\pi}{6}}$ que pasan por 0 y 1. Dichos semicírculos se identifican por la reflexión en la recta $x = 1/2$ para obtener a $\mathbb{P}(3)$. $\mathcal{P}(3)$ se obtiene identificando las mitades superiores de dichos semicírculos.

4.3 Propiedades topológicas de $\mathcal{P}(n)$

En esta sección, se utilizarán las características de δ demostradas en la Sección 4.1 y los resultados de los Capítulos 2 y 3, para demostrar propiedades topológicas que $\mathbb{P}(n)$ y $\mathcal{P}(n)$ heredan de $\mathbb{CP}^{n-2}$ y $\mathcal{S}(n)$ respectivamente.

Teorema 4.5. *$\mathbb{P}(n)$ y $\mathcal{P}(n)$ son simplemente conexos.*

Demostración. Por ser finito, $\langle\delta\rangle$ actúa en $\mathbb{CP}^{n-2}$ de manera propiamente discontinua. Además, $\langle\delta\rangle$ fija a R_n. Utilizando el Teorema de Armstrong [1], concluimos que $\pi_1(\mathbb{P}(n)) \simeq \pi_1(\mathbb{CP}^{n-2}) = 1$ y $\pi_1(\mathcal{P}(n)) \simeq \pi_1(\mathcal{S}(n)) = 1$. $\square$

El siguiente teorema nos brinda una descripción local de $\mathbb{P}(n)$ al rededor del polígono regular. Cabe mencionar que en la demostración usaremos ideas de Geometría Riemanniana clásica.

Teorema 4.6. *En $\mathbb{P}(n)$ existe una vecindad $\mathcal{U}$ de $\sigma(R_n)$ homeomorfa a un cono sobre $\mathbb{S}^{2n-5}/\Delta_n$*[2].

Demostración. Si g^{FS} es la métrica de Fubini-Study en $\mathbb{CP}^{n-2}$ (Sección 1 del Apéndice A) y $v \in T_{R_n}\mathcal{S}(n)$, entonces $g^{FS}_{R_n}(v,v) = g^{FS}_{R_n}(D_{R_n}\delta(v), D_{R_n}\delta(v))$, por lo que $D_{R_n}\delta$ preserva las esferas de nivel $\tilde{E}_s := \{v \mid g^{FS}_{R_n}(v,v) = s\}$. Por el Teorema 4.2, concluimos que el cociente $T_{R_n}\mathcal{S}(n)/D_{R_n}\delta$ es homeomorfo al cono sobre $\mathbb{S}^{2n-5}/\Delta_n$.

Demostraremos que esta estructura de cono se puede bajar sobre una vecindad suficientemente pequeña del polígono regular. Para ello utilizaremos la distancia asociada a g^{FS} ([7, pág. 146]), la cual denotaremos con $d_{FS}\colon \mathcal{S}(n) \times \mathcal{S}(n) \to \mathbb{R}$.

Como δ es isometría de $(\mathbb{CP}^{n-2}, g^{FS})$, también lo es de $(\mathbb{CP}^{n-2}, d_{FS})$. Luego, para todos $Z \in \mathcal{S}(n)$ y $1 \leq k \leq n$, se cumple

$$d_{FS}(R_n, Z) = d_{FS}(\delta^k(R_n), \delta^k(Z)) = d_{FS}(R_n, \delta^k(Z)),$$

es decir, los polígonos de la órbita de Z equidistan del polígono regular.

Si $exp_{R_n}\colon (T_{R_n}\mathcal{S}(n), g^{FS}_{R_n}) \to (\mathcal{S}(n), d_{FS})$ es el mapeo exponencial de g^{FS} en el polígono regular, entonces existe $r > 0$ tal que en la vecindad

$$\tilde{\mathcal{U}} = \{v \in T_{R_n}\mathcal{S}(n) \mid g^{FS}_{R_n}(v,v) < r\},$$

exp_{R_n} es isometría [7, pág. 65]. De manera que si $s < r$, entonces $exp_{R_n}(\tilde{E}_s) = \{Z \in \mathcal{S}(n) \mid d_{FS}(R_n, Z) = s\} =: E_s$ son los conjuntos de nivel de d_{FS} en $\mathcal{S}(n)$. Concluimos que para toda $s < r$, E_s es homoemorfo a $\mathbb{S}^{2n-5}$ y es invariante por la acción del grupo $\langle\delta\rangle$.

Es claro que δ manda la geodésica de condición inicial $v_0 \in T_{R_n}\mathcal{S}(n)$ en la geodésica de condición inicial $D_{R_n}\delta(v_0)$, por lo tanto se cumple que $\delta \circ exp_{R_n} = exp_{R_n} \circ D_{R_n}\delta$. Luego, para toda $s < r$,

$$E_s/\langle\delta\rangle \cong \tilde{E}_s/D_{R_n}\delta \cong \tilde{E}_s/\Delta_n \cong \mathbb{S}^{2n-5}/\Delta_n$$

[2] Es decir, $\left((\mathbb{S}^{2n-5}/\Delta_n) \times [0,1]\right)/\{(x,0)\}$.

donde el primer homeomorfismo está dado por el mapeo exponencial, el segundo por que $D_{R_n}\delta$ es semejante a Δ_n (Teorema 4.2) y el tercero por que $\tilde{E}_s$ es homoemorfo $\mathbb{S}^{2n-5}$.

La vecindad buscada es $\mathcal{U} = \sigma(\exp(\tilde{\mathcal{U}})) \subset \mathbb{P}(n)$. □

El Ejemplo 4.4 muestra que $\mathbb{P}(3)$ y $\mathcal{P}(3)$ son topológicamente la esfera y el disco respectivamente. Ahora veremos que $n = 3$ es el único caso en que $\mathbb{P}(n)$ y $\mathcal{P}(n)$ son variedades.

Corolario 4.7. *Si $n \geq 4$, entonces $\mathbb{P}(n)$ y $\mathcal{P}(n)$ no son variedades.*

Demostración. Existen los siguientes dos casos a considerar:

Caso 1: *n es primo.*

Por la Observación 2 de la sección anterior, la restricción de σ a una esfera de nivel E_s es cubriente luego, $\pi_1(E_s/ < \delta >) = \mathbb{Z}_n$.

Caso 2: *n no es primo.*

Si $rd = n$ con d es el divisor más pequeño de n (distinto de 1), entonces δ^r tiene puntos fijos en E_s (pues $e^{\frac{2ri\pi}{n}}$ tiene puntos fijos en $\mathbb{S}^{2n-5}$). Usando el Teorema de Armstrong [1], concluimos que $\pi_1(E_s/ < \delta >) = \mathbb{Z}_r$.

En ambos casos es claro que $(E_s/ < \delta >)$ no es una esfera, por lo tanto el cono sobre dicho espacio no es una bola. □

Para la demostración del último resultado de esta sección, necesitaremos el siguiente lema general sobre variedades contraibles.

Lema 4.8. *Si $n > 2$, M es una variedad contraible de dimensión n y p es un punto interior a M, entonces $M - \{p\}$ es homotópicamente equivalente a S^{n-1}.*

Demostración. Supongamos que $p \in \Omega \subset M$ es una vecindad abierta y $\phi\colon \Omega \to \{x \in \mathbb{R}^n \mid |x| < 1\}$ es un homeomorfismo tal que $\phi(p) = 0$ (una carta al rededor de p). Usando el Teorema de Van-Kampen [12, pág.43] con M, $M - \{p\}$ y Ω, concluimos que $\pi_1(M - \{p\}) = 1$.

Como $\Omega \cap (M - \{p\}) \cong \mathbb{S}^{n-1} \times (0, 1)$, entonces la sucesión de Mayer-Vietoris;

$$\cdots H_{k+1}(M) \to H_k(\Omega \cap (M - \{p\})) \to H_k(\Omega) \oplus H_k(M - \{p\}) \to H_k(M) \cdots$$

implica que para toda k, $H_k(M - \{p\})$ es isomorfo a $H_k(\mathbb{S}^{n-1} \times (0, 1)) = H_k(\mathbb{S}^{n-1})$. De manera que la función $\phi^{-1}\colon \{x \in \mathbb{R}^n \mid 0 < |x| < 1\} \to M - \{p\}$, es tal que para toda k, $\phi_*^{-1}\colon H_k(\mathbb{S}^{n-1}) \to H_k(M - \{p\})$ es un isomorfismo. Usando el Teorema de Whitehead [12, pág. 367], concluimos que ϕ^{-1} es una equivalencia homotópica. □

Teorema 4.9. *(*)*[3] *Si $q \geq 3$ es primo y $k \leq 2q-6$, entonces $\pi_k(\mathcal{P}(q)) = 1$.*

Demostración. Del Lema 4.8 tenemos que $\pi_k(\mathcal{S}(q)-\{R_q\}) = 1$ para $k \leq 2q-6$. De la Observación 1 en la sección anterior, sabemos que $\sigma\colon \mathcal{S}(q)-\{R_q\} \to \mathcal{P}(q)-\{\sigma(R_q)\}$ es cubriente y por lo tanto para $k > 1$, $\pi_k(\mathcal{P}(q)-\{\sigma(R_q)\}) \cong \pi_k(\mathcal{S}(q)-\{R_q\})$. Luego la sucesión de Mayer-Vietoris;

$$H_k(\mathcal{U}) \to H_k(\mathcal{U}) \oplus H_k(\mathcal{P}(q) - \{\sigma(R_q\}) \to H_k(\mathcal{P}(q)) \to H_{k-1}(\mathcal{U})$$

nos dice que $H_k(\mathcal{P}(q)) = 1$ para $k \leq 2q-6$.

Concluimos la demostración utilizando el Teorema 4.5 y el Teorema de Hurewicz. $\square$

[3]Este resultado utiliza que $\mathcal{S}(n)$ es contraible.

Capítulo 5

Espacio de polígonos convexos

En este capítulo se estudian las propiedades topológicas del subconjunto de $\mathbb{CP}^{n-2}$ correspondiente a los polígonos convexos positivamente orientados, al que denotaremos con $\mathcal{K}(n)$. Contrario a lo que sucedió con polígonos simples, en este caso sí logramos dar una descripción completa de la topología del interior del espacio de polígonos convexos, esto gracias a que ellos tienen todos sus vértices deformables.

Los temas tratados en este capítulo se dividen en 4 secciones de la siguiente manera: En la Sección 1, calculamos el interior de $\mathcal{K}(n)$, su topología y su estructura diferenciable. En la Sección 2, otorgamos una lista del tipo de polígonos que aparecen en la frontera de $\mathcal{K}(n)$ y demostramos algunas propiedades de dicha frontera. En la Sección 3, se estudia el subconjunto de $\mathbb{CP}^{n-2}$ que corresponde a los n-ágonos que se degeneran a un segmento, entre éstos están los n-segmentos convexos, que son uno de los tipos de n-ágonos que aparece en la frontera de $\mathcal{K}(n)$. Por último, en la Sección 4 se da una descripción detallada de la frontera de $\mathcal{K}(4)$ y del espacio de 4-segmentos.

5.1 La topología del interior de $\mathcal{K}(n)$

En esta sección calculamos el interior de $\mathcal{K}(n)$ y describimos su topología y su estructura diferenciable. Después, como corolario de estos resultados, damos una descripción de la topológia y la estructura diferenciable del interior de $\mathbb{K}(n) \subset \mathbb{C}^n$.

Lema 5.1. *El conjunto* $\mathcal{K}^\circ(n) = \{Z \in \mathcal{S}(n) \mid \text{para toda } i,\ \alpha_i < \pi\}$[1] *es el interior de* $\mathcal{K}(n)$.

[1] α_i es el ángulo interior de Z en el vértice z_i (ver Definición 1.6).

Demostración. Si $W = [w_1, w_2, ..., w_n] \in \mathcal{K}(n)$ es tal que para toda i, $\alpha_i < \pi$, entonces los segmentos $\overline{w_{i-1}w_{i+1}}$ son diagonales internas a W. Luego, para toda i, el número $r_i = \min\{r_z, d(w_i, \overline{w_{i-1}w_{i+1}})\}$[2] es positivo. Por lo tanto, la vecindad de W dada por

$$\eta\left(\prod_{k=1}^{n} B_{\frac{r}{3}}(w_k)\right) \quad \text{donde} \quad r = \min\{r_1, r_2, ..., r_n\}$$

está conformada sólo con polígonos de ángulos interiores menores que π.

Es claro que si $Z \in \mathcal{K}(n)$ es tal que $\alpha_i = \pi$ para algún i, entonces cualquier vecindad de Z intersecta al complemento de $\mathcal{K}(n)$. □

Teorema 5.2. *$\mathcal{K}^\circ(n)$ es difeomorfo a $\mathbb{R}^{2n-4}$.*

Demostración. Procederemos por inducción. Como muestra el Ejemplo 1.10, $\mathcal{K}^\circ(3) \subset \mathbb{CP}^1$ es el semiplano superior en la imagen de la carta $\phi_2 \colon U_2 \to \mathbb{C}$, por lo tanto es difeomorfo a $\mathbb{R}^2$. Supongamos que el resultado es válido para toda $k < n$. Realizaremos la demostración del caso general en 4 pasos.

Paso 1: *Construcción del triángulo Δ_W.*

Usando el encaje de la Proposición 2.1, concluimos que el conjunto

$$\mathcal{K}_3^\circ(n-1) = \left\{\left[0, 1, \frac{1+w_4}{2}, w_4, ..., w_n\right] \in \mathcal{K}(n) \mid \text{ para } i \neq 3, \alpha_i < \pi\right\}$$

es difeomorfo a $\mathcal{K}^\circ(n-1)$. Luego, por hipótesis de inducción, $\mathcal{K}_3^\circ(n-1)$ es difeomorfo a $\mathbb{R}^{2n-6}$.Para todo $W = [0, 1, \tilde{w}_3, w_4, ..., w_n] \in \mathcal{K}_3^\circ(n-1)$ (donde $\tilde{w}_3 = \frac{1+w_4}{2}$), definimos el conjunto

$$\Delta_W = \{Z \in \mathcal{K}^\circ(n) \mid Z = [0, 1, z, w_4, ..., w_n]\}.$$

Procedemos a demostrar que independientemente de W, Δ_W es el interior de un triángulo (puede ser infinito).

Dado $W = [0, 1, \tilde{w}_3, w_4, ..., w_n] \in \mathcal{K}_3^\circ(n-1)$, llamemos R_W al rayo que emana de w_4 con dirección $\overline{w_5 w_4}$. Existen las siguientes dos posibilidades para Δ_W:

1. - $[1, \infty) \cap R_W = p$ - Los n-ágonos en Δ_W se obtienen tomando al tercer vértice en el interior del triángulo $(1, p, w_4)$, ver Figura 13.a.

2. - $[1, \infty) \cap R_W = \emptyset$ - Los n-ágonos en Δ_W se obtienen tomando al tercer vértice del interior de la región infinita delimitada por $[1, \infty), \overline{1w_4}$ y R_W (triángulo con un vértice en el infito), ver Figura 13.b.

[2]Ver definición de r_z en Teorema 2.2.

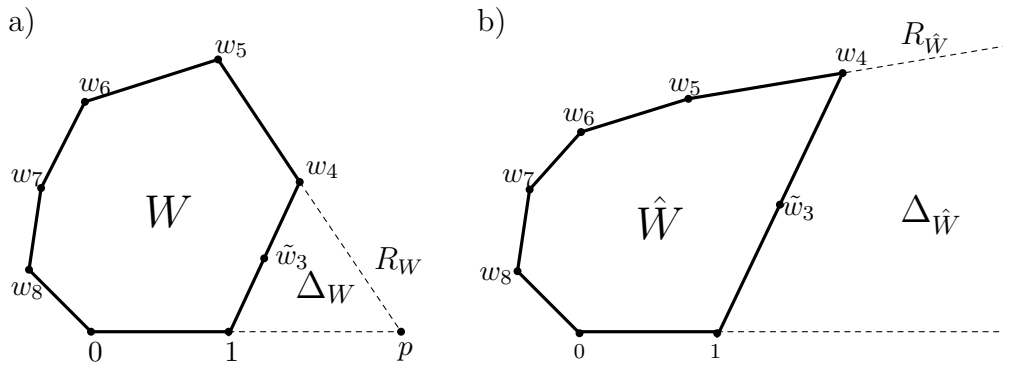

FIGURA 13: En a), el polígono W determina un Δ_W acotado y en b), el polígono $\hat{W}$ determina un $\Delta_{\hat{W}}$ no acotado.

Paso 2: *Propiedades de los Δ_W.*

Dado $W = [0, 1, \tilde{w}_3, w_4, ..., w_n] \in \mathcal{K}_3^\circ(n-1)$, procedemos a calcular una expresión analítica de los ángulos interiores a Δ_W. Llamemos θ_1' y θ_4' a los ángulos interiores en los vértices 1 y w_4 respectivamente (medidos en sentido contrario a las manecillas del reloj), dichos ángulos se escriben de la siguiente manera en términos de los vértices 1, $w_4 = x_4 + iy_4$ y $w_5 = x_5 + iy_5$:

$$\theta_1' = \frac{\pi}{2} + arctg\left(\frac{1-x_4}{y_4}\right), \quad \theta_4' = \frac{\pi}{2} + arctg\left(\frac{(x_4-1)(x_4-x_5)+y_4(y_4-y_5)}{(x_4-1)y_5-(x_5-1)y_4}\right).$$

Para llegar a estas expresiones, medimos a θ_1' y θ_4' con respecto a las perpendiculares a los segmentos $\overline{01}$ y $\overline{\tilde{w}_3 w_4}$ respectivamente. Como $W \in \mathcal{K}_3^\circ(n-1)$, $y_4, y_5 > 0$ y x_4 y x_5 no pueden simultaneamente valer 1, de lo contrario, el ángulo interior en w_4 valdría π. Además, si $(x_4-1)y_5 - (x_5-1)y_4 = 0$, entonces $y_5 = r_0 y_4$ y $(x_5 - 1) = r_0(x_4 - 1)$ y por lo tanto nuevamente el ángulo interior en w_4 sería π. Esto demuestra que los argumentos de las arcotangentes en las expresiones de θ_1' y θ_4' están definidas para todo $W \in \mathcal{K}_3^\circ(n-1)$.

Los triángulos Δ_W satisfacen las siguientes propiedades:

1. Si $W \in \mathcal{K}_3^\circ(n-1)$ es tal que $Z_1, Z_2 \in \Delta_W$ son distintos, entonces $[Z_1] \neq [Z_2]$ pues difieren en su tercer vértice.

2. Si $W, W' \in \mathcal{K}_3^\circ(n-1)$ son distintos, entonces $\Delta_W \cap \Delta_{W'} = \emptyset$.

3. Todo polígono $[0, 1, z_3, z_4, ..., z_n] \in \mathcal{K}^\circ(n)$ pertenece a Δ_W con $W = [0, 1, \tilde{z}_3, z_4, ..., z_n]$. Por lo tanto

$$\bigcup_{W \in \mathcal{K}_3^\circ(n-1)} \Delta_W = \mathcal{K}^\circ(n).$$

Paso 3: *Construcción del difeomorfismo buscado y su expresión en cartas.*

Supongamos que $W = [0, 1, \tilde{w}_3, w_4, ..., w_n] \in \mathcal{K}_3^\circ(n-1)$, que θ_1', θ_4' son los ángulos interiores de Δ_W y que $\tilde{\Delta}_W := \{z \in \mathbb{C} \mid [0, 1, z, w_4, ..., w_n] \in \Delta_W\}$ (nótese que $\tilde{\Delta}_W \subset \mathbb{C}$ es una copia del Δ_W construido en el Paso 1).

Como se muestra en la Sección 2 del Apéndice B, si $\theta_1 = \frac{\pi-\theta_1'}{\pi}$ y $\theta_4 = \frac{\pi-\theta_4'}{\pi}$, entonces $f_W \colon \mathbb{H} \to \tilde{\Delta}_W$ tal que

$$z \mapsto \frac{(w_4-1)\int_i^z \zeta^{\theta_1'}(\zeta-1)^{\theta_4'}d\zeta + \int_i^0 \zeta^{\theta_1'}(\zeta-1)^{\theta_4'}d\zeta - w_4\int_i^1 \zeta^{\theta_1'}(\zeta-1)^{\theta_4'}d\zeta}{\int_i^0 \zeta^{\theta_1'}(\zeta-1)^{\theta_4'}d\zeta - \int_i^1 \zeta^{\theta_1'}(\zeta-1)^{\theta_4'}d\zeta}$$

es un biholomorfismo. Además, si $\tilde{f}_W \colon \mathbb{R} \cup \{\infty\} \to \mathbb{C}$ es la extensión de f_W, entonces $\tilde{f}_W(0) = w_4$, $\tilde{f}_W(1) = 1$ y $\tilde{f}_W(\infty)$ es el vértice restante de $\tilde{\Delta}_W$.

Demostraremos que la función $\Psi \colon \mathbb{H} \times \mathcal{K}_3^\circ(n-1) \to \mathcal{K}^\circ(n)$ tal que

$$(z, W) = (z, [0, 1, \tilde{w}_3, w_4, ..., w_n]) \mapsto [0, 1, f_W(z), w_4, ..., w_n],$$

es el difeomorfismo buscado. Es claro que Ψ es biyectiva pues $f_W \colon \mathbb{H} \to \tilde{\Delta}_W$ es biholomorfismo y en el resto de las coordenadas Ψ es la identidad. Sólo resta demostrar la diferenciabilidad (real) de Ψ y de su inversa.

Para calcular la expresión de Ψ en cartas real valuadas, utilizamos la identificación $\sigma \colon \mathbb{C}^{n-2} \to \mathbb{R}^{2n-4}$, tal que $\sigma(z_1, z_2, ..., z_{n-2}) = (x_1, y_1, ..., x_{n-2}, y_{n-2})$, donde, para toda $k = 1, 2, ..., n-2$, $z_k = x_k + iy_k$.

Sobre $\mathcal{K}_3^\circ(n-1)$, tomaremos la carta dada por $\phi_{23} = p_1 \circ \phi_2 \colon \mathcal{K}_3^\circ(n-1) \to \mathbb{C}^{n-3}$, donde $p_1 \colon \mathbb{C}^{n-2} \to \mathbb{C}^{n-3}$ es la proyección a las últimas $n-3$ coordenadas y ϕ_2 es la carta del proyectivo correspondiente a $z_2 \neq 0$ (ver Observación 3, página 16).

Si $z = x + iy$, $f_W(z) = u_W(x, y) + iv_W(x, y)$ y $w_j = x_j + iy_j$, entonces la expresión de Ψ en cartas real valuadas es

$$\sigma \circ \phi_2 \circ \Psi \circ (id_{\mathbb{H}} \times \phi_{23})^{-1} \circ \sigma^{-1} \colon \sigma \circ (id_{\mathbb{H}} \times \phi_{23})(\mathbb{H} \times \mathcal{K}_3^\circ(n-1)) \to \mathbb{R}^{2n-4} \quad \text{tal que}$$

$$(x, y, (x_4, y_4, ..., x_n, y_n)) \mapsto (u_W(x, y), v_W(x, y), x_4, y_4, ..., x_n, y_n).$$

Paso 4: Ψ *y* Ψ^{-1} *son real diferenciables.*

Demostraremos que las derivadas parciales de Ψ existen y son continuas.

Por ser f_W holomorfa con respecto a z, se cumplen $u_x = v_y$ y $u_y = -v_x$ (ecuaciones de Cauchy-Riemann). Además, de las expresiones de θ_1 y θ_4 se sigue $u_{x_j} = v_{x_j} = u_{y_j} = v_{y_j} = 0$ si $j > 5$. De manera que las únicas parciales a calcular son $u_{x_4}, v_{x_4}, u_{y_4}, v_{y_4}$ y $u_{x_5}, v_{x_5}, u_{y_5}, v_{y_5}$.

Nótese que si $a \in \{x_4, y_4, x_5, y_5\}$, entonces $\partial_a f_W$ existe y es continua si y sólo si $\partial_a \int_i^z \zeta^{\theta_1'}(\zeta-1)^{\theta_4'}d\zeta$, $\partial_a \int_i^0 \zeta^{\theta_1'}(\zeta-1)^{\theta_4'}d\zeta$ y $\partial_a \int_i^1 \zeta^{\theta_1'}(\zeta-1)^{\theta_4'}d\zeta$ existen

y son continuas. En el Teorema B.2 (página 77) se demuestra que si los ángulos en la expresión de f_W varían de manera diferenciable con respecto a la variable t, entonces $\partial_t f_W$ existe y es continua.

En este caso, es claro que θ_1 y θ_4 dependen de manera diferenciable de las variables x_4, y_4, x_5, y_5 (ver Paso 2), por lo tanto, $\partial_{x_4} f_W, \partial_{y_4} f_W, \partial_{x_5} f_W$ y $\partial_{y_5} f_W$ existen y son continuas. Luego, las derivadas parciales de Ψ también existen y son continuas, concluimos que Ψ es diferenciable.

Notar que si $(z, W) \in \mathbb{H} \times \mathcal{K}_3^\circ(n-1)$, entonces la diferencial de Ψ en esta pareja está dada por

$$D_{(z,W)}\Psi = \begin{pmatrix} u_x & u_y & u_{x_4} & u_{y_4} & \cdots & 0 \\ v_x & v_y & v_{x_4} & v_{y_4} & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Por lo que $\det\left(D_{(z,W)}\Psi\right) = \det\left(D_z f_W\right) = u_x^2 + v_x^2 > 0$. Usando el Teorema de la Función Inversa, concluimos que Ψ^{-1} es diferenciable en $\Psi(z, W)$. Variando (z, W) en todo $\mathbb{H} \times \mathcal{K}_3^\circ(n-1)$, concluimos que Ψ^{-1} es diferenciable. $\square$

Corolario 5.3. *Si $\mathbb{K}^\circ(n) \subset \mathbb{C}^n$ es el interior del conjunto de polígonos convexos, entonces $\mathbb{K}^\circ(n)$ tiene dos componentes homeomorfas a $\mathbb{C}^{n-1} \times \mathbb{C}^*$.*

Demostración: Del Corolario 2.4 sabemos que $\mathbb{K}^\circ(n)$ tiene dos componentes conexas homeomorfas entre sí. Como se muestra en la Observación 4 del Capítulo 1(página 17), sobre la componente de polígonos positivamente orientados, tenemos el haz fibrado

$$\mathbb{C} \times \mathbb{C}^* \longrightarrow \eta^{-1}(\mathcal{K}^\circ(n)) \xrightarrow{\eta} \mathcal{K}^\circ(n).$$

Por el Teorema 5.1, dicho haz tiene base contraible, luego, por el Teorema 9.9 en [14, pág. 52], concluimos que $\eta^{-1}(\mathcal{K}^\circ(n)) \cong \mathbb{C}^{n-2} \times \mathbb{C} \times \mathbb{C}^*$. $\square$

5.2 La frontera de $\mathcal{K}(n)$ en $\mathbb{CP}^{n-2}$

Como se muestra en el Lema 5.1, los polígonos convexos con un ángulo igual a π pertenecen a la frontera del conjunto de polígonos convexos, la cual denotaremos con $\partial\mathcal{K}(n)$. En esta sección veremos que otros tipos de

polígonos pueden aparecer en $\partial\mathcal{K}(n)$ y demostraremos algunas propiedades sencillas de dicha frontera. Primero veremos que los polígonos simples que son límite de polígonos convexos son convexos.

Proposición 5.4. *$\mathcal{K}(n)$ es cerrado dentro de $\mathcal{S}(n)$.*

Demostración: Supongamos que $Z = [z_1, z_2, .., z_n] \in \mathcal{S}(n)$ es un punto de acumulación de $\mathcal{K}(n)$. Si para alguna i, $\alpha_i > \pi$, entonces la vecindad

$$\eta\left(\prod_{k=1}^{n} B_{\frac{r_i}{3}}(z_k)\right) \quad \text{donde} \quad r_i = \min\{r_Z, d(z_i, \overline{z_{i-1}z_{i+1}})\}$$

está conformada por polígonos simples cuyo i-ésimo ángulo interior es mayor que π. Esto contradice que Z es punto de acumulación de $\mathcal{K}(n)$. Por lo tanto, todos los ángulos interiores de Z son menores o iguales a π. □

Ayudándonos de esta proposición y analizando las posibles maneras en las que los polígonos convexos dejan de ser simples, concluimos que en $\partial\mathcal{K}(n)$ sólo existen polígonos de los siguientes tres tipos:

1. Convexos que son simples y que tienen al menos un ángulo interior igual a π.
2. No simples con al menos dos vértices consecutivos que coinciden.
3. No simples que se degeneran a un segmento y son límite de polígonos convexos.

El Ejemplo 1.10 muestra que en $\partial\mathcal{K}(3)$ sólo aparecen polígonos del tipo 3. En la última sección de este capítulo se demostrará que en $\partial\mathcal{K}(4)$ ya aparecen polígonos de los tres tipos. Los siguientes resultados nos brindan una idea de cómo están contenidos los polígonos de los tipos 1 y 2 en $\partial\mathcal{K}(n)$. Los polígonos del tipo 3 se estudiarán en la siguiente sección.

Teorema 5.5. *El conjunto $\mathcal{B}_i \subset \partial\mathcal{K}(n)$ determinado por*

$$\{[z_1, z_2, ..., z_n] \in \partial\mathcal{K}(n) \cap \mathcal{S}(n) \mid \alpha_i = \pi, \alpha_j < \pi\}$$

es difeomorfo a $\mathbb{R}^{2n-5}$.

Demostración: Sin pérdida de generalidad supondremos que $i = 3$.

Para cada $r \in (0, \infty)$, definimos el conjunto

$$K_r = \left\{[0, 1, z_r, w_4, ..., w_n] \in \mathcal{B}_3 \mid z_r \in \overline{1w_4} \ \text{ y } \ r = \frac{|z_r - 1|}{|z_r - w_4|}\right\}.$$

Nótese que $K_1 = \mathcal{K}_3^\circ(n-1)$ que a su vez, por el Teorema 5.2 y la Proposición 2.1 es difeomorfo a $\mathbb{R}^{2n-6}$. Si $1 \neq r \in (0,\infty)$, entonces es claro que la función $f\colon K_1 \to K_r$ tal que $f([0,1,z_1,w_4,...,w_n]) = ([0,1,z_r,w_4,...,w_n])$, es difeomorfismo. Concluimos que $\mathcal{B}_3$ es difeomorfo a $\mathcal{K}_3^\circ(n-1) \times (0,\infty)$ que es difeomorfo a $\mathbb{R}^{2n-5}$. □

De esta proposición se sigue que el conjunto de n-ágonos convexos que tienen un y sólo un ángulo interior igual a π, es unión disjunta de n bolas de dimensión $2n-5$. Dichas bolas se pegan por los espacios de polígonos con dos o más ángulos interiores iguales a π para obtener el subconjunto de $\partial\mathcal{K}(n)$ que corresponde a los polígonos del primer tipo.

Proposición 5.6. *El conjunto de $\mathcal{V}_i \subset \partial\mathcal{K}(n)$ determinado por*

$$\{[z_1,z_2,...,z_n] \mid z_i = z_{i+1},\ \textit{y para toda } j \neq i, i+1, z_i \neq z_j \textit{ y } \alpha_j < \pi\}$$

es difeomorfo a $\mathbb{R}^{2n-6}$.

Demostración: Es inmediato pensando a z_i y z_{i+1} como un solo vértice y usando el Teorema 5.2. □

Claramente que $\mathcal{V}_i$ y $\mathcal{V}_{i+1}$ son los extremos de $\mathcal{B}_i$, además, hay resultados análogos a estas proposiciones en los casos en que hay más vértices con ángulos de valor π y cuando coinciden más vértices consecutivos. Una manera de describir totalmente a $\partial\mathcal{K}(n)$, es entender la combinatoria de los pegados entre estos espacios. En la Sección 5.4 realizaremos esto para el caso $n = 4$.

5.3 Espacio de $n-$segmentos convexos

Los polígonos del tercer tipo que se mencionan en la sección anterior, tienen la particularidad que sus vértices se ven como puntos marcados en un segmento. Resulta que no toda configuración de n puntos en un segmento pertenece a $\partial\mathcal{K}(n)$, la Figura 17 muestra un ejemplo de un segmento con 4 puntos marcados que no pertenece $\partial\mathcal{K}(4)$.

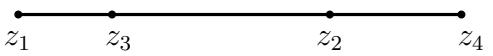

FIGURA 17: Un segmento con 4 puntos marcados que no pertenece a $\partial\mathcal{K}(4)$.

En esta sección estudiamos propiedades topológicas de los espacios de polígonos que se ven como segmentos, ya sea que pertenezcan o no a $\partial\mathcal{K}(n)$, también probamos un resultado que caracteriza a los segmentos que aparecen en $\partial\mathcal{K}(n)$.

Definición 5.7. *Supongamos que que* $W \in \mathbb{CP}^{n-2}$.

1. *Decimos que* W *un* n*-segmento si todos sus vértices están alineados. Denotaremos con* $Q_n \subset \mathbb{CP}^{n-2}$ *al subconjunto de* n*-segmentos.*

2. *Decimos que* W *es un* n*-segmento convexo si* $W \in (\partial\mathcal{K}(n) \cap Q_n)$*. Denotaremos con* $\mathcal{Q}_n$ *al subconjunto de* n*-segmentos convexos y lo llamaremos el espacio* $n-$*segmentos convexos.*

Nótese que en esta definición estamos considerando n-segmentos módulo semejanza orientada (es decir, módulo rotaciones, traslaciones y homotecias), de manera que los n-segmentos deben ser considerados con cualquier longitud y en cualquier posición dentro de $\mathbb{C}$. Por ejemplo $[0,0,1,0] = [1,1,0,1]$ pues $(1,1,0,1) = e^{i\pi}(0,0,1,0) + (1,1,1,1)$.

Teorema 5.8. Q_n *es una* $(n-2)$ *variedad cerrada*[3] *contenida en* $\partial\mathcal{S}(n)$.

Demostración: Dados $Z = [0,1,x_3,...,x_n], W = [0,1,y_3,...,y_n] \in Q_n$, es claro que moviendo los vértices de Z en $\mathbb{R}$ podemos llegar a los de W, pues tenemos libertad de movimiento. Una vecindad al rededor de Z contenida en Q_n está dada por

$$U = \prod_{k=3}^{n} (x_k - \epsilon, x_k + \epsilon).$$

Claramente U es homeomorfa a una bola de dimensión $n-2$ y por lo tanto, Q_n es una $n-2$ variedad sin frontera. Si $[0,1,...,z_n] \in \mathbb{CP}^{n-2}$ es punto límite de Q_n y para algún i, $z_i \notin \mathbb{R}$, entonces existe vecindad de $[0,1,...,z_n]$ que separa a z_i de $\mathbb{R}$, por lo que Z no sería punto límite. Concluimos que los polígonos límite de Q_n son n-segmentos y por lo tanto $Q_n \subset \mathbb{CP}^{n-2}$ es compacto (cerrado contenido en un compacto).

Para demostrar que $Q_n \subset \partial\mathcal{S}(n)$, supondremos que $Z_0 = [z_1, z_2, ..., z_n] \in Q_n$ tiene extremos z_1 y z_k (se procede análogamente con otros extremos) y utilizaremos el representante de Z_0 dado por $[0, x_2, ..., x_{k-1}, 1, x_{k+1}, ..., x_n]$.

Construiremos un polígono simple $W = [0, w_1, ..., w_{k-1}, 1, w_{k+1}, ..., w_n]$ en una vecindad de Z_0 de la forma

$$U_\epsilon = \prod_{j \neq 1,k} B_\epsilon(x_j) \quad \text{con} \quad r > 0.$$

Para hacer la demostración más ilustrativa, decidimos dividirla en tres casos:

Caso I - *Todos los vértices de* Z_0 *son distintos.*

[3]Variedad compacta, conexa y sin frontera.

Supongamos que $\epsilon > 0$ es tal que en el intervalo $[0, 3\epsilon)$ el 0 es el único vértice de Z_0.

Llamemos $1 = l_0 < l_1 < \cdots < l_r = k$ a los subíndices de Z_0 tales que para toda $0 < m < r$ y $l_{m-1} < s < l_m$, $x_s \in \overline{x_{s-1}x_{l_m}}$ y $x_{l_{m+1}} \in \overline{0x_{l_m}}$ para m impar y $x_{l_{m+1}} \in \overline{x_{l_m}1}$ para m par, estos subíndices existen pues corresponden a los puntos donde hay que regresar al recorrer los vértices de Z_0 de forma creciente.

Si resulta que $l_1 = k$, es decir, si al recorrer los primeros k vértices de Z_0 de manera creciente, no regresamos hasta llegar al otro extremo, entonces hacemos $w_1 = 0$, $w_k = 1$ y para todo $1 < s < k$, $w_s = x_s$. El intervalo $[0, 1]$ con los w_s marcados de esta forma será parte del polígono simple W.

En el caso en que $l_1 < k$, llamamos $w_1 = 0$, $w_{l_1} = x_{l_1} + i\epsilon$[4] y para $1 < s < l_1$, $w_s \in \overline{w_1 w_{l_1}}$ son los puntos con absisa x_s, entonces es claro que para toda $0 \leq s \leq l_1$, $w_s \in B_{2\epsilon}(x_s)$. Llamemos p_{l_2} al punto en $\overline{w_1 w_{l_1}}$ con absisa x_{l_2} y $\delta_2 = d(x_{l_2}, p_{l_2})/2$. Si $w_{l_2} = x_{l_2} + i\delta_2$ y para $l_1 < s < l_2$, $w_s \in \overline{w_{l_1} w_{l_2}}$ son los puntos con absisa x_s, entonces para toda $l_1 < s \leq l_2$, $w_s \in B_{2\epsilon}(x_s)$. Luego, si $w_{l_3} = x_{l_3} + i(\delta_2/2)$ y para $l_2 < s < l_3$, $w_s \in \overline{w_{l_2} w_{l_3}}$ son los puntos con absisa x_s, entonces para toda $l_2 < s \leq l_3$, $w_s \in B_{2\epsilon}(x_s)$. Llamemos p_{l_4} al punto en $\overline{w_1 w_{l_1}}$ con absisa x_{l_4} y $\delta_4 = min\{\delta_2/4, d(x_{l_4}, p_{l_4})/2\}$. Si $w_{l_4} = x_{l_4} + i\delta_4$ y para $l_3 < s < l_4$, $w_s \in \overline{w_{l_3} w_{l_4}}$ son los puntos con absisa x_s, entonces para toda $l_3 < s \leq l_4$, $w_s \in B_{2\epsilon}(x_s)$. Luego, si $w_{l_5} = x_{l_5} + i(\delta_4/2)$ y para $l_4 < s < l_5$, $w_s \in \overline{w_{l_4} w_{l_5}}$ son los puntos con absisa x_s, entonces para toda $l_4 < s \leq l_5$, $w_s \in B_{2\epsilon}(x_s)$. Procedemos de manera análoga hasta l_{r-1}. Por último, si $w_k = 1$ y para $l_{r-1} < s < k$, $w_s \in \overline{w_{l_{r-1}} w_k}$ son los puntos con absisa x_s, entonces para toda $l_{r-1} < s \leq k$, $w_s \in B_{2\epsilon}(x_s)$.

Por construcción, los segmentos $\overline{w_1 w_{l_1}}, \overline{w_{l_1} w_{l_2}}, ..., \overline{w_{l_{r-1}} w_k}$ son decrecientes y por lo tanto no se intersectan. Con estos segmentos y los puntos marcados en ellos, formamos una polígonal simple $\mathcal{L}_1$ con k vértices (incluyendo los extremos 0 y 1) que aproxima por el semiplano superior a los primeros k vértices de Z_0.

Utilizando la misma idea pero cambiando los roles de 0 y 1, podemos construir una polígonal simple $\mathcal{L}_2$ con $n - k + 2$ vértices (incluyendo los extremos 0 y 1) que aproxima por el semiplano inferior a los $n - k$ vértices $x_{k+1}, x_{k+2}, ..., x_{n-1}$. Juntando $\mathcal{L}_1$ con $\mathcal{L}_2$ por sus extremos obtenemos el polígono simple $W \in U_{2\epsilon}$ buscado.

Caso II - *El único extremo izquierdo de Z_0 es* 0.

En este caso puede haber muchos vértices repetidos, pero sólo $z_1 = 0$. Procederemos de manera parecida al Caso I mencionando qué haremos en los puntos donde coincidan varios vértices consecutivos. Supongamos que

[4] Aquí i es el número imaginario complejo.

$\epsilon > 0$ es tal que para todos $x_j \neq x_h$, $B_{2\epsilon}(x_j) \cap B_{2\epsilon}(x_h) = \emptyset$.

Supongamos que $1 = l_0 < l_1 < \cdots < l_r = k$ satisfacen que para toda $0 < m < r$ y $l_{m-1} < s < l_m$, $x_s \in \overline{x_{s-1}x_{l_m}}$ y $x_{l_{m+1}} \in \{\overline{0x_{l_m}} - \{x_{l_m}\}\}$ para m impar y $x_{l_{m+1}} \in \{\overline{x_{l_m}1} - \{x_{l_m}\}\}$ para m par. Nótese que estas condiciones implican que para $l_m < s \leq l_{m+1}$, $x_s \neq x_{l_m}$.

Si $l_1 = k$, entonces llamamos $w_1 = 0$ y $w_k = 1$. Para los vértices de en medio, hacemos $w_s = x_s$ si $x_s \neq x_t$ para todo $1 < t \leq k$. Luego, si existen $1 < s < t \leq k$ tales que $x_{s-1} \neq x_s = x_{s+1} = \cdots = x_t \neq x_{t+1}$, entonces hacemos $w_s = x_s - \epsilon$, $w_t = x_s + \epsilon$ y los vértices entre ellos los repartimos de manera creciente y equidistante en el intervalo $(x_s - \epsilon, x_t + \epsilon)$. Procediendo análogamente en todos los puntos donde coinciden vértices consecutivos (en el caso en que $x_t = 1$, hacemos $w_t = 1$ y tomamos el intervalo $(x_s - \epsilon, 1)$), obtenemos vértices $0 = w_1 < w_2 < \cdots < w_k = 1$ que pertenecen a $U_{2\epsilon}$ y que aproximan a los primeros k vértices de Z_0. El intervalo $[0, 1]$ con los w_s marcados de esta forma será parte de W.

Si $l_1 < k$, entonces llamamos $w_1 = 0$ y $w_{l_1} = x_{l_1} + i\epsilon$. Para $1 < s < l_1$, hacemos $w_s \in \overline{w_1 w_{l_1}}$ el punto con absisa x_s si $x_s \neq x_t$ para todo $1 < t < l_1$. Si existen $1 < s < t \leq k$ tales que $x_{s-1} \neq x_s = x_{s+1} = \cdots = x_t \neq x_{t+1}$, entonces en el intervalo $I_{st} = B_{2\epsilon}(x_s) \cap \overline{w_1 w_{l_1}}$, llamamos w_s al extremo inferior, w_t al extremos superior y a los vértices entre ellos los repartimos de manera creciente y equidistante en I_{st}. Procediendo de esta forma en todos los puntos donde coinciden vértices consecutivos menores que w_{l_1}, construimos el segmento $\overline{w_1 w_{l_1}}$ con vértices distintos marcados que pertenecen a $U_{2\epsilon}$ y que aproximan a los primeros l_1 vértices de Z_0. Luego, procediendo de manera similar sobre todos los segmentos $\overline{w_{l_m} w_{l_{m+1}}}$ (construidos como en el Caso I), obtenemos los vértices w_s que son distintos para todo $1 < s < k$ y que pertenecen a $U_{2\epsilon}$. Notar que si $x_{s_1} = x_{s_2}$ con $l_{m_1} < s_1 < l_{m_1+1}$ y $l_{m_2} < s_2 < l_{m_2+1}$, entonces $w_{s_1} \neq w_{s_2}$ pues pertenecen a distintos segmentos.

Con la sucesión de segmentos $\overline{w_1 w_{l_1}}, \overline{w_{l_1} w_{l_2}}, ..., \overline{w_{l_{r-1}} w_k}$ decrecientes (no se intersectan) y los puntos marcados en ellos formamos la polígonal simple $\mathcal{L}_1$ con k vértices que aproxima por el semiplano superior a los primeros k vértices del n-segmento Z_0. Utilizando el mismo procedimiento construimos una poligonal simple que aproxima los últimos $n - k + 2$ vértices de Z_0 y por lo tanto podemos construir el polígono simple $W \in U_{2\epsilon}$ buscado.

Caso III - *Puede haber cualesquiera repeticiones en Z_0.*

Ahora puede haber vértices que coincidan en 0, en las repeticiones que no están en 0 procederemos igual que en el Caos II. Sólo resta mencionar los pasos a seguir para los vértices que coinciden en 0. Supongamos que $\epsilon > 0$ es igual que en el Caso II.

Si en la división de los vértices resulta que $l_1 = k$ y existe $1 < t < k$ tal

que $0 = x_2 = x_3 = \cdots = x_t < x_{t+1}$, entonces hacemos $w_1 = 0$, $w_t = \epsilon$ y los vértices entre ellos los repartimos de manera creciente y equidistante en el intervalo $(0, \epsilon)$. Procediendo de esta forma en 0 y como en el Caso II en los vértices restantes, marcamos k puntos distintos en el intervalo $[0, 1]$ que aproximan a los primeros k vértices de Z_0.

Si $l_1 < k$ y existen $1 < t_1 < l_1$, $l_1 < t_2 \leq l_2$, $l_3 < t_4 \leq l_4$,..., $l_{r-2} < t_{r-1} \leq l_{r-1}$ tales que

$$0 = x_2 = \cdots = x_{t_1} = x_{t_2} = \cdots = x_{l_2} = x_{t_4} = \cdots = x_{l_4} = x_{t_{r-1}} = \cdots = x_{l_{r-1}},$$

entonces para $1 \leq s \leq t_1$, hacemos $w_1 = 0$, w_{t_1} igual al extremo derecho del segmento $B_\epsilon \cap \overline{0w_{l_1}}$ y los vértices entre ellos los repartimos de manera creciente y equidistante en segmento $\overline{w_1 w_{t_1}}$. Por último, movemos a ϵ/M al resto de $x_i's$ que son igual a 0 y procedemos igual que en el Caso II (realizamos esto sin mover el ϵ y con M suficientemente grande para que $w_{l_2} \in B_{2\epsilon}(0)$). De esta forma construimos la poligonal simple contenida en el semiplano superior que aproximar a los primeros k vértices de Z_0. Análogamente se construye la polígonal simple que aproxime a los últimos $n - k$ vértices de Z_0 por el semiplano inferior. □

Corolario 5.9. *Si $\mathcal{S}^-(n)$ denota al espacio de polígonos simples negativamente orientados y $n \geq 4$, entonces $Q_n \subsetneq (\partial\mathcal{S}(n) \cap \partial\mathcal{S}^-(n))$.*

Demostración: Tomando los polígonos análogos a los contruidos en el Teorema 5.8 pero negativamente orientados, concluimos que $Q_n \subset \partial\mathcal{S}^-(n)$ y por lo tanto $Q_n \subset (\partial\mathcal{S}(n) \cap \partial\mathcal{S}^-(n))$. La contención es propia por que $\partial\mathcal{S}(n) \cap \partial\mathcal{S}^-(n)$ contiene a los polígonos que se ven como una polígonal con puntos marcados, la Figura 18 muestra un ejemplo. □

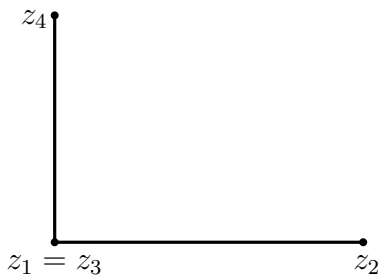

FIGURA 18: Cuadrilátero que es límite de cuadriláteros simples positiva y negativamente orientados pero que no es un 4-segmento.

El Ejemplo 1.10 muestra que $\mathcal{Q}_3 = Q_3$, pero la Figura 17 muestra que para $n \geq 4$, $\mathcal{Q}_4$ es un subconjunto propio de Q_4. Como muestra el siguiente

resultado, para identificar si un n-segmentos es convexo, basta ver si éste se recorre cíclicamente al caminar de manera creciente en sus vértices.

Teorema 5.10. *Si $1 \leq k < j \leq n$ y $W = [w_1, w_2, ..., w_n] \in \mathbb{CP}^{n-2}$ es un n-segmento con extremos w_k, w_j, entonces $W \in \mathcal{Q}_n$ si y sólo si para toda $s \in \{1, 2, ..., j-k-1\}$ se cumple que $w_{k+s} \in \overline{w_{k+s-1}w_j}$ y para toda $l \in \{1, 2, ..., n-j\}$ se cumple*[5] *$w_{j+s} \in \overline{w_{j+s-1}w_k}$.*

Demostración: Sin pérdida de generalidad supondremos que $k = 1$ y trabajaremos con el representante de W dado por $[0, x_2, ..., x_{j-1}, 1, x_{j+1}, ..., x_n]$. Es claro que se puede proceder de forma análoga en otro caso.

Si $W \in \mathcal{Q}_n$ y $x_3 \notin \overline{x_2 1}$, entonces los polígonos simples que pertenecen a la vecindad de W dada por

$$\prod_{m \neq 1,j} B_{\frac{r}{4}}(x_m) \text{ donde } r = d(x_3, x_2),$$

tienen su tercer ángulo interior mayor que π, por lo que no pueden pertecer a $\partial\mathcal{K}(n)$. De manera que $x_3 \in \overline{x_2 1}$. Procediendo análogamente en todos los vértices de W, concluimos que éste debe satisfacer las hipótesis del teorema.

Existen dos casos a considerar para demostrar que si W satisface las hipótesis, entonces $W \in \partial\mathcal{K}(n)$:

Caso I - *No hay vértices repetidos.*

Nótese que para toda $\nu \in \mathbb{N}$, el polígono

$$Z_\nu = \left[0, x_2, x_3, ..., x_{j-1}, 1, x_{j+1} + \frac{i}{\nu}, ..., x_n + \frac{i}{\nu}\right]$$

es simple y tiene ángulos interiores menores o iguales a π, luego $\{Z_\nu\} \subset \mathcal{K}(n)$. Además, de la expresión de Z_ν es claro que esta sucesión converge a W y por lo tanto $W \in \partial\mathcal{K}(n)$.

Caso II - *Hay vértices repetidos .*

Supongamos que existen $l < s \in \{2, ..., j-1\}$ y $t < r \in \{j+1, j+2, ..., n\}$ tales que $x_l = x_{l+1} = \cdots = x_s = x_t = x_{t+1} = \cdots = x_r$ y que el resto de los vértices son distintos entre sí. Escojamos el representante de W dado por

$$[y_1, y_2, ..., -1, 0, 0, ..., 0, y_{s+1}, ..., y_{j-1}, y_j, y_{j+1} ..., y_{t-1}, 0, 0, ..., 0, y_{r+1}, ..., y_n],$$

donde $-1 = y_{l-1}$ es el vértice más cercano al punto de coincidencia de los vértices. Si $-2 = m_l < m_{l+1} < \cdots < m_s = -1$ y $1 = m_t < m_{t+1} < \cdots <$

[5] Los vértices deben tomarse módulo n.

$m_r = 2$ son números reales, entonces la sucesión $\{Z_\nu\}_{\nu\geq 2}$ donde Z_ν es el polígono

$$\left[y_1, y_2 - \frac{i}{\nu}, ..., -1 - \frac{i}{\nu}, \frac{1}{2\nu} - \frac{i}{\nu}, \frac{1}{-m_{l+1}\nu} - \frac{i}{\nu}, ..., \frac{1}{\nu} - \frac{i}{\nu}, y_{l+1} - \frac{i}{\nu}, ..., y_j,\right.$$

$$\left. y_{j+1} + \frac{i}{\nu}, ..., y_{t-1} + \frac{i}{\nu}, \frac{1}{\nu} + \frac{i}{\nu}, \frac{1}{m_{t+1}\nu} + \frac{i}{\nu}, ..., \frac{1}{2\nu} + \frac{i}{\nu}, y_{r+1} + \frac{i}{\nu}, ..., y_n + \frac{i}{\nu}\right]$$

está contenida en $\mathcal{K}(n)$ y converge a W. De manera que $W \in \partial\mathcal{K}(n)$.

Los casos donde hay más repeticiones de vértices, se pueden realizar procediendo de manera análoga a este caso sobre cada punto donde se repeten vértices. □

En el siguiente resultado se demuestran algunas propiedades topológicas del espacio $\mathcal{Q}_n \subset \mathbb{CP}^{n-2}$:

Teorema 5.11. *$\mathcal{Q}_n$ es conexo por trayectorias y $\mathcal{Q}_n = \partial\mathcal{K}(n) \cap \partial\mathcal{K}^-(n)$, donde $\mathcal{K}^-(n)$ es el espacio de polígonos convexos negativamente orientados.*

Demostración: Si $Z \in \partial\mathcal{K}(n)) \cap \partial\mathcal{K}^-(n)$, entonces Z (y sus representantes) es límite de polígonos con área positiva y negativa y por lo tanto tiene área 0. Es claro que de los tres tipos de polígonos en $\partial\mathcal{S}(n)$ mencionados en la sección anterior, los únicos con área 0 son los n segmentos.

Procederemos por inducción para demostrar que todo $Z \in \mathcal{Q}_n$ se puede unir con una trayectoria a $Z_n = [0, 1/(n-1), 2/(n-1), ..., (n-2)/(n-1), 1]$. El Ejemplo 1.10, muestra que el resultado es válido para $n = 3$.

Un encaje de $\mathcal{Q}_{n-1}$ en $\mathcal{Q}_n$ está dado por la función

$$f([z_1, z_2, ..., z_{n-1}]) = [z_1, z_1, z_2, ..., z_{n-1}].$$

De manera que por hipótesis de inducción, la imagen $f(\mathcal{Q}_{n-1}) = \tilde{\mathcal{Q}}_{n-1}$ es c.p.t.

Si $Z = [z_1, z_2, z_3, ..., z_n] \in \mathcal{Q}_n$, entonces la curva $\gamma_1 \colon [0,1] \to \mathcal{Q}_n$, $\gamma_1(t) = [z_1, (1-t)z_2 + tz_1, z_3, ..., z_n]$ es continua, $\gamma_1(0) = Z$ y $\gamma_1(1) \in \tilde{\mathcal{Q}}_n$. Sólo resta demostrar que para todo $t \in [0,1]$, $\gamma_1(t) \in \mathcal{Q}_n$, existen dos casos:

Caso I - $z_3 \notin \{\overline{z_1 z_2} - \{z_1, z_2\}\}$.

Para todo $t \in (0,1)$, $(1-t)z_2 + tz_1 \neq z_3$ y por lo tanto $\gamma_1(t) \in \mathcal{Q}_n$ ya que sus vértices están enumerados cíclicamente (ver Teorema 5.10).

Caso II - $z_3 \in \{\overline{z_1 z_2} - \{z_1, z_2\}\}$.

Por el Teorema 5.10, z_2 debe ser un extremo de Z y el vértice más cercano a z_2 es z_3 (y los que sean iguales a z_3). Si $t_0 \in (0,1)$ es tal que $(1-t_0)z_2 + t_0 z_1 = z_3$, entonces para $t > t_0$, z_3 es extremo de $\gamma_1(t)$. De manera que para todo $t \in (0,1)$, $\gamma_1(t)$ tiene sus vértices enumerados de forma cíclica.

Concluimos que $\gamma_1 \subset \mathcal{Q}_n$ es una trayectoria que une a Z con $\gamma_1(1) \in \tilde{\mathcal{Q}}_{n-1}$. Por hipótesis de inducción, existe trayectoria $\gamma_2 \subset \tilde{\mathcal{Q}}_{n-1}$ que une a γ_1 con $\tilde{Z}_n = [0, 0, 1/(n-2), 2/(n-2), ..., 1]$. Por último, consideremos la trayectoria $\gamma_3 \colon [0,1] \to \mathcal{Q}_n$ tal que:

$$t \mapsto \left[0, \frac{t}{n-1}, \frac{1-t}{n-2} + \frac{2t}{n-1}, ..., 1\right].$$

Esta trayectoria cumple que $\gamma_3(0) = \gamma_2(1)$, $\gamma_3(1) = Z_n$ y para todo $t \in [0,1]$, $\gamma_3(t) \in \mathcal{Q}_n$. La trayectoria buscada entre Z y Z_n es $\Gamma = \gamma_3 * \gamma_2 * \gamma_1$. □

5.4 Descripción de $\partial\mathcal{K}(4)$

En esta última sección calculamos explícitamente $\partial\mathcal{K}(4)$ y $\mathcal{Q}_4$ y probamos un resultado que nos dice cómo está acomodado $\mathcal{Q}_4$ dentro de $\partial\mathcal{K}(4)$.

Teorema 5.12. *$cl(\mathcal{K}(4)) \subset \mathbb{CP}^2$ es homeomorfo a $\mathbb{B}^4 = \{p \in \mathbb{R}^4 \mid ||p|| \leq 1\}$.*

Demostración: Analizando las intersecciones de las vecindades de los tres tipos de polígonos que pueden aparecer en $\partial\mathcal{K}(4)$ con $cl(\mathcal{K}(4))$, es fácil convencerse de que $cl(\mathcal{K}(4))$ es variedad con frontera.

Procedemos a demostrar que $\partial\mathcal{K}(4)$ es homeomorfa a $\mathbb{S}^3$. Del Lema 5.1 sabemos que $Z \in \partial\mathcal{K}(4) \cap \mathcal{K}(4)$ si tiene un ángulo interior igual a π. Aunque existen cuatro tipos de cuadriláteros con estas características (Figura 14), ahora sólo trabajaremos con los que tienen $\alpha_2 = \pi$. Es claro que todas las afirmaciones también son válidas para los otros casos.

Nótese que en el plano $L_3 = \{[0, z_2, 1, z_4]\} \subset \mathbb{CP}^2$, los cuadriláteros convexos con $\alpha_2 = \pi$ se ven de la forma $[0, r, 1, z_4]$ con $r \in (0,1)$ y z_4 en el semiplano superior. Aquí, los valores $r = 0$ y $r = 1$ determinan triángulos en los que coinciden los vértices $z_1 = z_2$ y $z_2 = z_3$ respectivamente.

Fijemos $r_0 \in [0,1]$ y consideremos los cuadriláteros $[0, r_0, 1, z_4]$. Cuando $z_4 \in \mathbb{H}$ obtenemos cuadriláteros simples, pero si $z_4 \in \mathbb{R} \cup \{\infty\}$, entonces obtenemos 4-segmentos convexos. Concluimos que para r_0, hay un disco cerrado $D_{r_0} \subset L_3$ $(\mathbb{H} \cup \mathbb{R} \cup \{\infty\})$ de posibles valores para z_4. Análogamente sucede para todo $r \in [0,1]$.

Todos lo cuadriláteros de la forma $[0, r, 1, z_4]$, se degeneran al 4-segmento $[0, 0, 0, 1]$ (los vértices z_1, z_2, z_3 juntan) cuando $z_4 \to \infty$. De manera que los discos D_r se intersectan en $[0, 0, 0, 1] \in \mathbb{CP}^2$. Concluimos que la parte de $\partial\mathcal{K}(4)$ que se obtiene de cuadriláteros con $\alpha_2 = \pi$ y límites de estos, se puede pensar como la pirámide T_2 que se muestra en la Figura 15, b. El interior de T_2, corresponde a cuadriláteros simples con $\alpha_2 = \pi$ como los de la Figura 14

y ∂T_2, corresponde a cuadriláteros no simples que son límite de cuadriláteros convexos. La Figura 16 muestra como son dichos cuadriláteros en cada región de ∂T_2.

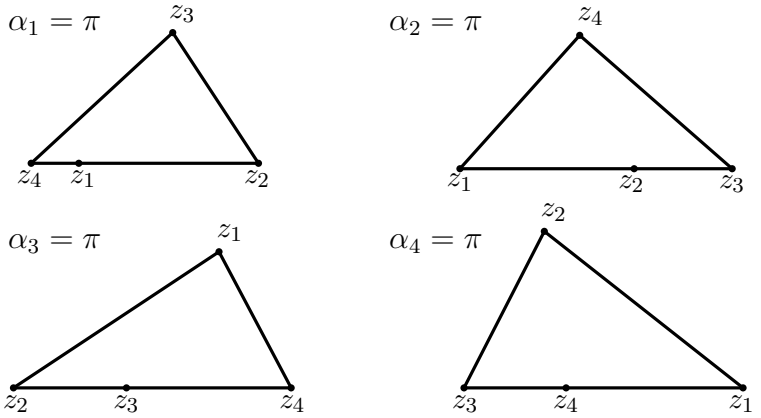

FIGURA 14: Los cuatro tipos de cuadriláteros simples en $\partial\mathcal{K}(4)$.

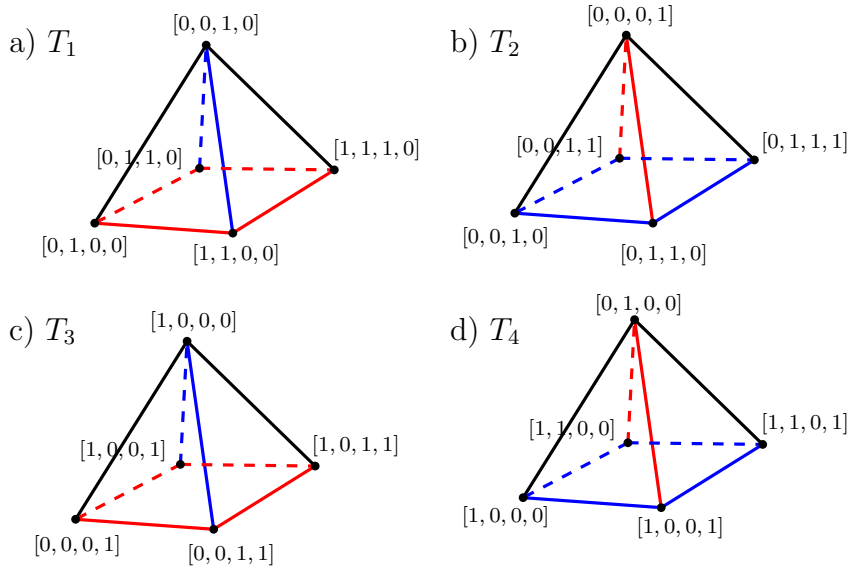

FIGURA 15: Las pirámides que se obtienen al considerar las 4 posibilidades para cuadriláteros en $\partial\mathcal{K}(4)$, los segmentos del mismo color y con extremos equivalentes se identifican.

Procediendo de manera análoga en los casos $\alpha_1 = \pi, \alpha_3 = \pi$ y $\alpha_4 = \pi$, construimos las pirámides T_1, T_3 y T_4 que se muestran en la Figura 15. Por

construcción, todos los cuadriláteros de $\partial\mathcal{K}(4)$ pertenecen a la unión de estas cuatro pirámides. Para proporcionar una descripción completa de $\partial\mathcal{K}(4)$, sólo resta hacer las identificaciones correspondientes entre las fronteras de estas cuatro pirámides.

Las aristas del mismo color que tienen extremos equivalentes determinan cuadriláteros equivalentes, por lo que que éstas deben identificarse. Como se ve en la Figura 15, las bases de T_1 y T_3 y las de T_2 y T_4 se identifican entre sí. Al pegar éstas, obtenemos dos octaedros rellenos $\mathcal{O}_{13}$ y $\mathcal{O}_{24}$. Es fácil notar que caras adyacentes de $\partial\mathcal{O}_{13}$ se identifican con caras adyacentes de $\partial\mathcal{O}_{24}$ y que dichas identificaciones se hacen preservando el orden. De manera que los pegados entre $\partial\mathcal{O}_{13}$ y $\partial\mathcal{O}_{24}$ están dados por un homeomorfismo. En conclusión, $\partial\mathcal{K}(3)$ se obtiene de pegar dos copias de $\mathbb{B}^3$ (bolas cerradas de dimensión 3) por un homeomorfismo entre sus fronteras, luego $\partial\mathcal{K}(3) \cong \mathbb{S}^3$.

De esta manera llegamos a que $cl(\mathcal{K}(4))$ es una variedad con frontera que tiene interior $\mathbb{R}^4$ y frontera $\mathbb{S}^3$ (Teorema 5.2), usando un resultado de Freedman (ver [9, pág. 374]), concluimos que $cl(\mathcal{K}(4)) \cong \mathbb{B}^4$. $\square$

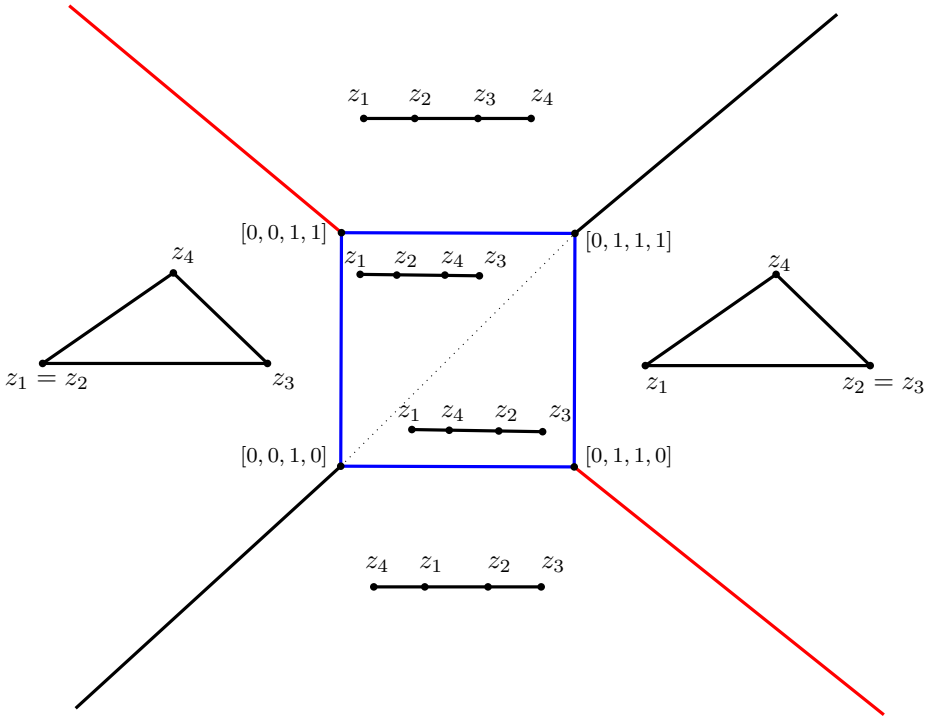

FIGURA 16: Cuadriláteros en ∂T_2 si mandamos el vértice $[0,0,0,1]$ a ∞.

El Ejemplo 1.10 muestra que $cl(\mathcal{K}(3)) \cong \mathbb{B}^2$, ahora este resultado prueba que $cl(\mathcal{K}(4)) \cong \mathbb{B}^4$. Con estos dos casos nos aventuramos a lanzar nuestra segunda conjetura.

Conjetura 2.- $cl(\mathcal{K}(n)) \cong \mathbb{B}^{2n-4}$.

Las pasos realizados en el Teorema 5.12 para construir $\partial\mathcal{K}(4)$, nos ayudan calcular de manera explícita el espacio $\mathcal{Q}_4$.

Teorema 5.13. *$\mathcal{Q}_4$ es homeomorfo a la banda Möbius cerrada.*

Demostración: La Figura 16, muestra las regiones en ∂T_2 que corresponden a 4-segmentos. De manera análoga, hay regiones en $\partial T_1, \partial T_3$ y ∂T_4 que están determinadas por 4-segmento. Realizando las identificaciones correspondientes entre estas regiones podemos brindar una descripción detallada de la topología del espacio $\mathcal{Q}_4$.

En la Figura 19 se muestra el espacio obtenido después de realizar los pegados correspondientes (excepto uno de ellos). Es claro que al identificar los extremos de dicha cinta con el patrón que muestra la Figura, obtenemos una banda de Möbius. □

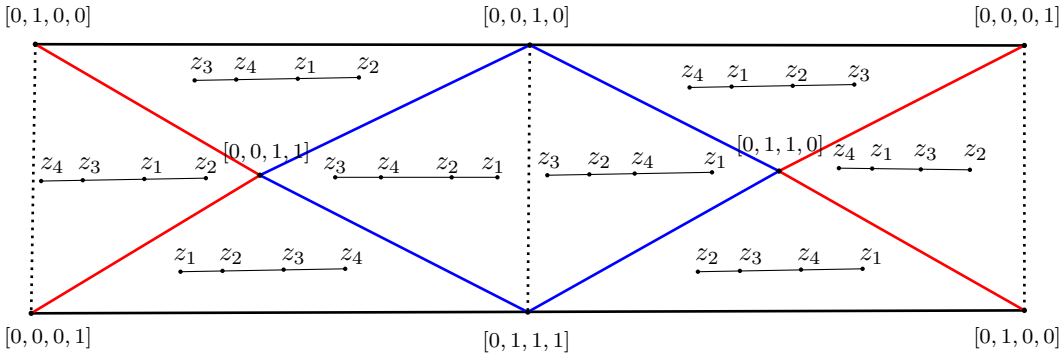

FIGURA 19: Banda que foman los 4-segmentos convexos. En cada región se muestra el tipode 4-segmento que pertenece a ella.

Recordemos del Teorema 5.11 que $\mathcal{Q}_4$ es donde se intersectan las 4 bolas cerradas $cl\mathcal{K}(4)$ y $cl\mathcal{K}^-(4)$. Para entender más este pegado, probamos el siguiente resultado que nos dice cómo está metida $\mathcal{Q}_4$ dentro de $\partial\mathcal{K}(4)$.

Teorema 5.14. *$\mathcal{Q}_4 \subset \partial\mathcal{K}(4)$ no está anudada y tiene sólo una torcedura.*

Demostración: La Figura 19 muestra que el centro de $\mathcal{Q}_4$ está formado por las diagonales de los cuadrados rojo y azul que corresponden a $c_1(t) = \{[t, 1, 1-t, 0] \mid t \in [0,1]\}$ y $c_2(t) = \{[0, t, 1, 1-t] \mid t \in [0,1]\}$ respectivamente. Las

parejas $(\mathcal{O}_{13}, c_1(t))$ y $(\mathcal{O}_{24}, c_2(t))$ forman dos ovillos triviales ($\mathcal{O}_{13}$ y $\mathcal{O}_{24}$ son los octaedros mencionados en la demostración del Teorema 5.12, ver página 68). Como $c_1(0) = c_2(1)$ y $c_1(1) = c_2(0)$, los extremos de las hebras de dichos ovillos se identifican para formar un nudo trivial. Concluimos que $\mathcal{Q}_4$ tiene como centro al nudo trivial y por lo tanto no está anudada.

Notar que las líneas negras en la frontera de las pirámides que muestran la Figura 15, conforman al círculo $\partial\mathcal{Q}_4$. De manera que $\partial\mathcal{Q}_4 \subset \partial\mathcal{O}_{13}$ (análogamente sucede con $\partial\mathcal{O}_{24}$), es frontera del cuadrado con vértices en los 4-segmentos $[1,0,0,0], [0,1,0,0], [0,0,1,0], [0,0,0,1]$.

Concluimos que $\partial\mathcal{Q}_4 \subset \partial\mathcal{K}(4)$ es el nudo trivial y por lo tanto $\mathcal{Q}_4$ tiene sólo una torcedura. $\square$

Apéndice A

Dos estructuras geométricas en $\mathbb{CP}^n$

Como se muestra en la Sección 3 del Capítulo 1, el espacio de n-ágonos módulo semejanza orientada es el espacio proyectivo complejo de dimensión $n-2$. En este apéndice, presentamos dos estructuras geométricas sobre el espacio proyectivo complejo, dichas estructuras, se utilizan durante el trabajo, para dotar con geometría a los ejemplos y hacerlos más ilustrativos y como herramienta para probar resultados topológicos. Además, aquí calculamos con detalle estas estructuras para el caso de triángulos.

A.1 La métrica de Fubini-Study

Recordemos que el producto Hermitiano estándar en $\mathbb{C}^{n+1}$ tiene la expresión $\langle Z, W\rangle = \sum_{k=0}^{n} z_k \bar{w}_k$. Resulta que dicho producto no es invariante por la acción $\mathbb{C}^* \times \mathbb{C}^{n+1} \to \mathbb{C}^{n+1}$, $(\lambda, (z_0, z_1, ..., z_n)) \mapsto (\lambda z_1, \lambda z_2, ..., \lambda z_n)$, ya que $\langle \lambda Z, \lambda W\rangle = |\lambda|^2 \langle Z, W\rangle$. Pero si $\langle\, ,\, \rangle_S$ es la restricción de $\langle\, ,\, \rangle$ a la esfera unitaria $\mathbb{S}^{2n+1}$, entonces $\langle\, ,\, \rangle_S$ sí es invariante por la acción

$$\mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^{2n+1} \to \mathbb{S}^{2n+1} \text{ tal que } (e^{i\theta}, (z_0, z_1, ..., z_n)) \mapsto (e^{i\theta} z_0, e^{i\theta} z_1, ..., e^{i\theta} z_n),$$

pues para todos $e^{i\theta} \in \mathbb{S}^1$, $p \in \mathbb{S}^{2n+1}$ y $Z, W \in T_p\mathbb{S}^{2n+1}$, $\langle e^{i\theta} Z, e^{i\theta} W\rangle_{S_p} = |e^{i\theta}| \langle Z, W\rangle_{S_p} = \langle Z, W\rangle_{S_p}$.

Sabemos que $Re\,\langle\, ,\, \rangle$ es precisamente la métrica euclideana en $\mathbb{C}^{n+1}$ y que $Re\,\langle\, ,\, \rangle_S$ es la métrica esférica en $\mathbb{S}^{2n+1}$. Es claro que $Re\,\langle\, ,\, \rangle_S$ también es invariante por la acción $\mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^{2n+1} \to \mathbb{S}^{2n+1}$. De manera que $Re\langle\, ,\, \rangle_S$ define una métrica riemanniana en el cociente $S^{2n-1}/\mathbb{S}^1 \cong \mathbb{C}^{n+1}/\mathbb{C}^* = \mathbb{CP}^n$. Dicha métrica se conoce como la métrica de Fubini-Study ([10], [23]) y la

denotaremos como g^{FS}. Ésta se utilizó en el Ejemplo 4.4 y en la demostración del Teorema 4.6.

Procedemos a calcular explícitamente el caso $n = 3$.

Ejemplo A.1. *Métrica de Fubini-Study en triángulos.*

Si $Z_0 = [1 : z_0] \in \mathbb{CP}^1$ y $U, V \in T_{Z_0}\mathbb{CP}^1$, entonces en la línea $L = \{(1, z)\}$ dichos vectores se ven de la forma $U = (0, \alpha), V = (0, \beta)$. Ahora procedemos a calcular $g^{FS}(U, V)$.

Nótese que Z_0 y $\bar{Z}_0 = (\bar{z}_0, -1)$ satisfacen $\langle Z_0, \bar{Z}_0\rangle = 0$, por lo que forman una base $\langle\ ,\ \rangle$-ortogonal para $T_{Z_0}\mathbb{C}^2$. Luego, existen $u_1, u_2, v_1, v_2 \in \mathbb{C}$ tales que:

$$U = u_1 Z_0 + u_2 \bar{Z}_0 \quad \text{y} \quad V = v_1 Z_0 + v_2 \bar{Z}_0.$$

Recordemos que al proyectivizar, las componentes de U y V sobre la línea $\mathbb{C}Z_0$ se eliminan y las componentes sobre $\mathbb{C}\bar{Z}_0$ no se afectan. Multiplicando ambos vectores por $\bar{Z}_0$ para calcular las componentes de U y V en $\mathbb{C}\bar{Z}_0$, obtenemos:

$$u_2 = \frac{-\alpha}{1 + ||z_0||^2} \quad \text{y} \quad v_2 = \frac{-\beta}{1 + ||z_0||^2}.$$

De manera que

$$g^{FS}_{Z_0}(U, V) = \frac{\langle u_2\bar{Z}_0, v_2\bar{Z}_0\rangle}{\langle Z_0, Z_0\rangle} = \frac{u_2\bar{v}_2\langle \bar{Z}_0, \bar{Z}_0\rangle}{\langle Z_0, Z_0\rangle} = \frac{\alpha\bar{\beta}}{(1 + ||z_0||^2)^2}.$$

Que es precisamente un cuarto de la métrica esférica en $\mathbb{S}^2 \cong \mathbb{CP}^1$.

A.2 La forma hermitiana de área

En esta sección, calcularemos un producto Hemitiano que proviene de la fórmula del área en un polígono. Dicho producto será definido sobre un abierto de $\mathbb{CP}^{n-2}$ que contiene a los polígonos simples $\eta(\mathbb{S}(n))$ (Secciones 1.3). Dicho producto se utiliza en Ejemplo 4.4 y en la demotración del Teorema 2.9. La siguiente definición se puede consultar en [25, Pág. 527].

Definición A.2. *Para todo $Z \in \mathbb{C}^n$, el área con signo de Z es el número:*

$$\mathcal{A}(Z) := \frac{i}{4}\sum_{k=1}^{n}(z_k\bar{z}_{k+1} - z_{k+1}\bar{z}_k) \qquad \textit{donde} \quad z_{n+1} = z_1.$$

Nótese que el término $\frac{i}{4}(z_k\bar{z}_{k+1} - z_{k+1}\bar{z}_k)$ calcula el área con signo del tríangulo con vértices en $0, z_k, z_{k+1}$, *i.e.* el área es negativa si dicho triángulo está orientado en el sentido de las manecillas del reloj y positiva en caso contrario.

Es fácil convencerse de que si Z es un polígono simple positivamente (negativamente) orientado, entonces $\mathcal{A}(Z)$ es positiva (negativa). Además, en este caso $\mathcal{A}(Z)$ ($|\mathcal{A}(Z)|$) coincide con la noción usual que tenemos de área.

Esta fórmula define una función $\mathcal{A}\colon \mathbb{C}^n \to \mathbb{R}$ tal que para toda $\lambda \in \mathbb{C}$, $\mathcal{A}(\lambda Z) = |\lambda|^2\mathcal{A}(Z)$. Usando la identidad de polarización, encontramos que el producto hermitiano asociado a $\mathcal{A}$ es:

$$\langle Z, W\rangle_{\mathcal{A}} := \frac{i}{4}\sum_{k=1}^{n}(z_k\bar{w}_{k+1} - z_{k+1}\bar{w}_k). \qquad (*)$$

La restricción de este producto al hiperplano $V(n) = \{(0, z_2, z_3, ..., z_n) \mid z_i \in \mathbb{C}\}$, no pasa al proyectivo $\mathbb{P}_{\mathbb{C}}V(n)$, ya que para $\lambda \in \mathbb{C}$ y $Z, W \in V(n)$, $\langle \lambda Z, \lambda W\rangle_{\mathcal{A}} = |\lambda|^2\langle Z, W\rangle_{\mathcal{A}}$.

Para definir un producto en el cociente, nos ayudaremos del conjunto abierto $\mathcal{A}^{-1}(\mathbb{R} - \{0\}) \subset \mathbb{C}^n$ ($\mathcal{A}$ es continua). Dados $Z \in \mathcal{A}^{-1}(\mathbb{R} - \{0\})$ y $U, V \in T_Z\mathcal{A}^{-1}(\mathbb{R} - \{0\})$ definimos:

$$g_{_Z}(U, V) := \frac{\langle U, V\rangle_{\mathcal{A}}}{|\mathcal{A}(Z)|}.$$

Nótese que si $\lambda \in \mathbb{C}^*$, entonces la función lineal $Z \mapsto \lambda Z$ es una isometría de la pareja $(\mathcal{A}^{-1}(\mathbb{R} - \{0\}), g_{_Z})$, pues

$$g_{_{\lambda Z}}(\lambda U, \lambda V) = \frac{\langle \lambda U, \lambda V\rangle_{\mathcal{A}}}{|\mathcal{A}(\lambda Z)|} = \frac{|\lambda|^2\langle U, V\rangle_{\mathcal{A}}}{|\lambda|^2|\mathcal{A}(Z)|} = g_{_Z}(U, V).$$

De manera que $g_{_Z}$ sí está definido en el abierto $\eta\big(\mathcal{A}^{-1}(\mathbb{R} - \{0\})\big) \subset \mathbb{CP}^{n-2}$.

Es claro que para la definición de $g_{_Z}$, es indispensable que $\mathcal{A}(Z) \neq 0$, por lo que el producto no se puede extender a $\mathcal{A}^{-1}(0)$.

Ejemplo A.3. *Producto asociado a la forma de área en triángulos.*

Si $Z \in \mathcal{A}^{-1}(\mathbb{R}-\{0\})$ y $U, V \in T_Z\mathcal{A}^{-1}(\mathbb{R}-\{0\})$, entonces sus representates en la línea $L = \{(0, 1, z_3)\}$ se ven de la forma $Z = (0, 1, z)$ con $\operatorname{Im} z \neq 0$ y $U = (0, 0, \alpha), V = (0, 0, \beta)$.

Usando la fórmula $(*)$, obtenemos que $Z = (0, 1, z)$ y $\bar{Z} = (0, 1, \bar{z})$ satisfacen $\langle Z, \bar{Z}\rangle = 0$, luego $\{Z, \bar{Z}\}$ es una base $\langle\ ,\ \rangle_{\mathcal{A}}$-ortogonal para $T_Z\mathcal{A}^{-1}(\mathbb{R} - \{0\})$. Por lo tanto existen $u_1, u_2, v_1, v_2 \in \mathbb{C}$ tales que:

$$U = u_1Z + u_2\bar{Z} \quad \text{y} \quad V = v_1Z + v_2\bar{Z}.$$

Como antes, al proyectivizar las componente de U y V sobre $\mathbb{C}Z$ se eliminan y las componentes sobre $\mathbb{C}\bar{Z}$ no se afectan. Multiplicando ambos vectores por $\bar{Z}$ con el producto $\langle\ ,\ \rangle_{\mathcal{A}}$ para calcular las componentes de U y V en $\mathbb{C}\bar{Z}$, obtenemos

$$u_2 = \frac{-i\alpha}{4\mathcal{A}(\bar{Z})} \quad \text{y} \quad v_2 = \frac{-i\beta}{4\mathcal{A}(\bar{Z})},$$

luego

$$g_{_Z}(U,V) = \frac{\langle u_2\bar{Z}, v_2\bar{Z}\rangle_{\mathcal{A}}}{|\mathcal{A}(Z)|} = \frac{u_2\bar{v}_2\mathcal{A}(\bar{Z})}{|\mathcal{A}(Z)|} = \frac{\alpha\bar{\beta}}{16\mathcal{A}(\bar{Z})|\mathcal{A}(Z)|}.$$

Utilizando que $\mathcal{A}(0,1,z) = (\text{Im } z)/2$ y $\mathcal{A}(\bar{Z}) = -\mathcal{A}(Z)$, concluimos

$$g_{_Z}(U,V) = \frac{-\alpha\bar{\beta}}{4(\text{Im } z)^2}.$$

Por último si $\alpha = \alpha_1 + i\alpha_2$, $\beta = \beta_1 + i\beta_2$ y Re $g_{_Z}$ es la parte real del producto, haciendo las cuentas obtenemos que en cada componente de $\eta\big(\mathcal{A}^{-1}(\mathbb{R} - \{0\})\big)$ el producto se ve de la forma:

$$\text{Re } g_{_Z}(U,V) = \frac{-(\lambda_1\alpha_1 + \lambda_2\alpha_2)}{4(\text{Im } z)^2}.$$

Que es la métrica hiperbólica multiplicada por $-1/4$.

En [18, Proposición 3] se demuestra que este es el único n para el que Re $g_{_Z}$ se ve como un múltiplo de una métrica riemanniana en $\eta\big(\mathcal{A}^{-1}(\mathbb{R} - \{0\})\big)$.

Apéndice B

Schwarz-Christoffel para triángulos

La clásica Fórmula de Schwarz-Christoffel descubierta de manera independiente por los matemáticos B. Christoffel [6] y A. Schwarz [21], proporciona un biholomorfismo entre el semiplano superior y el interior de cualquier polígono simple contenido en $\mathbb{C}$, a dicho biholomorfismo se le conoce como el Mapeo de Schwarz-Christoffel (MSC). En el Capítulo 5, particularmente en la demostración del Teorema 5.2, se utilizan algunas características de este mapeo que se explicarán en este apéndice.

El apéndice está dividido en dos secciones. En la primera de ellas se enuncia el Teorema de Schwarz-Cristoffel en su forma general y se mencionan algunas propiedades sencilas del MSC. En la segunda sección, demostraremos un resultado que habla sobre la diferenciabilidad del MSC con respecto a los ángulos internos de un triángulo (es válida para polígonos en general), esta propiedad del MSC se utiliza fuertemente en la demostración Teorema 5.2. Cabe mencionar que no se encontró alguna referencia para este resultado, por lo que se cree que forma parte de las aportaciones originales de este trabajo.

B.1 La Fórmula de Schwarz-Christoffel

Es claro que si $W \in \mathbb{S}(n)$ es positivamente orientado, entonces $W^\circ \subset \mathbb{C}$ es simplemente conexo y, por el Teorema del Mapeo de Riemann [4], existe biholomorfismo $f\colon \mathbb{H} \to W^\circ$. En esta sección mencionaremos el Teorema de Schwar-Christoffel, el cual nos proporciona la expresión analítica de f en términos de los vértices de W y de sus ángulos exteriores.

Si $W \in \mathbb{S}(n)$ es positivamente orientado y $\alpha_1, ..., \alpha_n$ son sus ángulos interiores (ver Definición 1.6), entonces a los números $\bar{\theta}_1 = \pi - \alpha_1, ..., \bar{\theta}_n = \pi - \alpha_n$ les

llamamos los ángulos exteriores de W. Es claro que para toda k, $\bar{\theta}_k \in (-\pi, \pi)$ y que estos ángulos satisfacen que $\bar{\theta}_1 + \cdots + \bar{\theta}_n = 2\pi$.

Teorema B.1. *Si $W = (w_1, w_2, ..., w_n) \in \mathbb{S}(n)$ es positivamente orientado y $\bar{\theta}_1, \bar{\theta}_2, ..., \bar{\theta}_n$ son sus ángulos exteriores, entonces cualquier biholomorfismo $f\colon \mathbb{H} \to W^\circ$ tal que para $z \to \infty$, $f(z) \to w_n$, está dado por*

$$f(z) = A + B \int_{z_0}^{z} \prod_{k=1}^{n-1} (\zeta - a_k)^{\theta_k} d\zeta,$$

donde $\theta_k = -\frac{\bar{\theta}_k}{\pi}$, $a_1 < a_2 < \cdots < a_{n-1} \in \mathbb{R}$, $z_0 \in \mathbb{H}$ y $A, B \in \mathbb{C}$ con $B \neq 0$.

Una demostración detallada se pueden consultar en los artículos originales ([6],[21]) o en la referencia [8, pág.10]. A continuación mencionamos algunas propiedades de las funciones que se obtienen de la Fórmula de Schwarz-Christoffel.

1. *Las constantes $A, B \in \mathbb{C}$ sólo cambian a W (el polígono imagen) por una traslación, una rotación o una homotecia. De manera que éstas determinan polígonos de $\mathbb{S}(n)$ que son orientablemente semejantes (ver Definición 1.9).*

2. *Si cambiamos el límite de integración por otro punto $z_0' \in \mathbb{H}$, entonces el polígono imagen es una traslación de W.* Se sigue de que $\mathbb{H}$ es simplemente conexo y por lo tanto se cumple

$$\int_{z_0'}^{z} \prod_{k=1}^{n-1} (\zeta - a_k)^{\theta_k} d\zeta = \int_{z_0'}^{z_0} \prod_{k=1}^{n-1} (\zeta - a_k)^{\theta_k} d\zeta + \int_{z_0}^{z} \prod_{k=1}^{n-1} (\zeta - a_k)^{\theta_k} d\zeta$$

3. *Si $\bar{\mathbb{H}} = \mathbb{H} \cup \mathbb{R} \cup \{\infty\}$, entonces existe función continua $\tilde{f}\colon \bar{\mathbb{H}} \to cl(Z)$ que extiende a f y tal que $\tilde{f}(a_1) = w_1$, $\tilde{f}(a_2) = w_2$,...,$\tilde{f}(a_{n-1}) = w_{n-1}$ y $\tilde{f}(\infty) = w_n$.* Esto se sigue del Teorema Carathéodory [5].

4. *Tenemos libertad para escoger $a_1, a_2 \in \mathbb{R}$.* Para verificar esto pensemos que $\lambda, b \in \mathbb{R}$ y $\lambda \neq 0$, entonces para valores adecuados de A' y B', la función

$$g(z) = A' + B' \int_{z_0}^{z} \prod_{k=1}^{n-1} (\zeta - (\lambda a_k + b))^{\theta_k} d\zeta,$$

tiene como imagen a W (no cambiaron los ángulos y las proporciones entre los $a_i's$ son las mismas pues $\frac{|\lambda a_i + b - \lambda a_j - b|}{|\lambda a_j + b - \lambda a_k - b|} = \frac{|a_i - a_j|}{|a_j - a_k|}$). Además, si $\tilde{g}$ es la extensión de g a $\bar{\mathbb{H}}$, entonces $\tilde{g}(\lambda a_i + b) = w_i$.

5. *La fórmula también es válida para polígonos que tienen un vértice al infinito, sólo que en dicho vértice debe medirse su ángulo interior en el sentido negativo (contrario a las manecillas del reloj)* [8, pág.9].

B.2 Schwarz-Christoffel en Triángulos

En esta sección veremos que la Fórmula de Schwarz-Christoffel varía diferenciablemente con respecto a los ángulos interiores de un triángulo, este resultado se utiliza en la Sección 5.1 durante la prueba del Teorema 5.2. Cabe mencionar que este resultado también es válido para polígonos de mayor número de lados.

De las propiedades 2 y 3 mencionadas en la sección anterior, sabemos que si $W = (w_1, w_2, w_3) \in \mathbb{S}(3)$ es positivamente orientado, entonces existen unas únicas constantes $\theta_1, \theta_2 \in (-1, 1)$ y $A, B \in \mathbb{C}$ de manera que la función

$$f_W(z) = A + B \int_i^z \zeta^{\theta_1}(\zeta - 1)^{\theta_2} d\zeta$$

manda $\mathbb{H}$ en W° y $\tilde{f}_W(0) = w_1$, $\tilde{f}_W(1) = w_2$ y $\tilde{f}_W(\infty) = w_3$. El caso en que $w_3 = \infty$, también existen valores únicos para los ángulos y para las constantes complejas. Usando estos valores, se calcula fácilmente que $f_W(z) =$

$$\frac{w_1 \int_i^1 \zeta^{\theta_1}(\zeta - 1)^{\theta_2} d\zeta - w_2 \int_i^0 \zeta^{\theta_1}(\zeta - 1)^{\theta_2} d\zeta + (w_2 - w_1) \int_i^z \zeta^{\theta_1}(\zeta - 1)^{\theta_2} d\zeta}{\int_i^0 \zeta^{\theta_1}(\zeta - 1)^{\theta_2} d\zeta - \int_i^1 \zeta^{\theta_1}(\zeta - 1)^{\theta_2} d\zeta}.$$

Concluimos que para cada triángulo simple $W = (w_1, w_2, w_3) \subset \mathbb{C}$ (w_3 puede ser infinito), el Mapeo de Schwarz-Christoffel f_W, es el único que manda $\mathbb{H}$ en W° y $\tilde{f}_W(0) = w_1$, $\tilde{f}_W(1) = w_2$ y $\tilde{f}_W(\infty) = w_3$.

Teorema B.2. *Si $W = (w_1, w_2, w_3) \in \mathbb{S}(3)$ y $\theta_1, \theta_2 \colon \mathbb{R} \to (-1, 1)$ son diferenciables, entonces la función $f_W(z, t) =$*

$$\frac{w_1 \int_i^1 \zeta^{\theta_1}(\zeta - 1)^{\theta_2} d\zeta - w_2 \int_i^0 \zeta^{\theta_1}(\zeta - 1)^{\theta_2} d\zeta + (w_2 - w_1) \int_i^z \zeta^{\theta_1}(\zeta - 1)^{\theta_2} d\zeta}{\int_i^0 \zeta^{\theta_1}(\zeta - 1)^{\theta_2} d\zeta - \int_i^1 \zeta^{\theta_1}(\zeta - 1)^{\theta_2} d\zeta}$$

es diferenciable con respecto a t.

Demostración: Es claro que $\partial_t f_W$ existe y es continua si y sólo si $\partial_t \int_i^0 \zeta^{\theta_1}(\zeta - 1)^{\theta_2} d\zeta$, $\partial_t \int_i^1 \zeta^{\theta_1}(\zeta - 1)^{\theta_2} d\zeta$ y $\partial_t \int_i^z \zeta^{\theta_1}(\zeta - 1)^{\theta_2} d\zeta$ existen y son continuas. Sin importar el límite de integración, se cumple:

$$\partial_t \int \zeta^{\theta_1}(\zeta - 1)^{\theta_2} d\zeta = \int \left[\left(\partial_t \zeta^{\theta_1}\right)(\zeta - 1)^{\theta_2} + \zeta^{\theta_1} \left(\partial_t (\zeta - 1)^{\theta_2}\right) \right] d\zeta =$$

$$\theta_1' \int \zeta^{\theta_1}(\zeta-1)^{\theta_2}\log(\zeta)d\zeta + \theta_2' \int \zeta^{\theta_1}(\zeta-1)^{\theta_2}\log(\zeta-1)d\zeta.$$

Denotemos con $I_1(\zeta) = \zeta^{\theta_1}(\zeta-1)^{\theta_2}\log(\zeta)$ y $I_2(\zeta) = \zeta^{\theta_1}(\zeta-1)^{\theta_2}\log(\zeta-1)$.

Nótese que I_1 y I_2 son holomorfas en $\mathbb{H}$, por lo tanto, también lo son $z \mapsto \int_i^z I_1 d\zeta$ y $z \mapsto \int_i^z I_2 d\zeta$. Las funciones $t \mapsto \int_i^1 I_1 d\zeta$ y $t \mapsto \int_i^0 I_2 d\zeta$ están bien definidas y son continuas ya que en estos límites de integración, los correspondientes logaritmos están acotados y el resto de los términos ya sabemos que sí se puede extender [5].

Por demostrar que $t \mapsto \int_i^0 I_1 d\zeta$ y $t \mapsto \int_i^1 I_2 d\zeta$ están bien definidas y son continuas. Aquí demostraremos el resultado sólo para la primera función (para la segunda se procede análogamente).

I_1 es holomorfa y univaluada en la rama $\mathbb{C} - \{\{iy \mid y \leq 0\} \cup \{1+iy \mid y \leq 0\}\}$, por lo que basta demostrar que para toda trayectoria $\gamma\colon [0,1] \to \bar{\mathbb{H}}$ diferenciable tal que $\gamma(0) = i$ y $\gamma(1) = 0$, se cumple

$$\int_\gamma I_1 d\zeta = i\int_1^0 (iy)^{\theta_1}(iy-1)^{\theta_2}\left(\log|y| + i\frac{\pi}{2}\right)dy < \infty$$

donde el segundo término es la integral a lo largo del segmento $\overline{i0}$. Dividiremos la demostración en dos casos:

Caso I - $\gamma \cap \overline{i0} = \emptyset$.

Supongamos que $\epsilon > 0$ es tal que para todo $0 < r \leq \epsilon$, $B_r(0) \cap \gamma([0,1]) = \{\gamma(t_r)\}$ para algún $t_r \in [0,1]$ (por la diferenciabilidad de γ existe este ϵ). Llamemos β_ϵ a la curva $\overline{i(\epsilon i)} \cup \mathcal{C}_\epsilon \cup \gamma^-([0,t_\epsilon])$, donde $\mathcal{C}_\epsilon \subset \bar{\mathbb{H}}$ es la porción de círculo entre $i\epsilon$ y $\gamma(t_\epsilon)$ y $\gamma^-([0,t_\epsilon])$ denota la curva $\gamma([0,t_\epsilon])$ recorrida de $\gamma(t_\epsilon)$ a $\gamma(0) = i$. Como I_1 es holomorfa en $\mathbb{H}$, se cumple

$$0 = \int_{\beta_\epsilon} I_1 d\zeta = \int_{\overline{i(\epsilon i)}} I_1 d\zeta + \int_{\mathcal{C}_\epsilon} I_1 d\zeta + \int_{\gamma^-([0,t_0])} I_1 d\zeta.$$

Por demostrar que cuando $\epsilon \to 0$, entonces la integral

$$\int_{\mathcal{C}_\epsilon} I_1 d\zeta = i\epsilon^{1+\theta_1}\int_{\pi/2}^{\delta_0} e^{i(\delta+\theta_1)}(\epsilon e^{i\delta}-1)^{\theta_2} log(\epsilon e^{i\delta})e^{i\delta}d\delta \to 0.$$

Utilizando $\left|\int_{\mathcal{C}_\epsilon} I_1 d\zeta\right| \leq \int_{\mathcal{C}_\epsilon} |I_1| d\zeta$ y la desigualdad del triángulo,

$$\left|\int_{\mathcal{C}_\epsilon} I_1 d\zeta\right| \leq \epsilon^{1+\theta_1}|\log\epsilon|\int_{\pi/2}^{\delta_0}|\epsilon e^{i\delta}-1|^{\theta_2}d\delta + \epsilon^{1+\theta_1}\int_{\pi/2}^{\delta_0}|\epsilon e^{i\delta}-1|^{\theta_2}\delta\, d\delta.$$

Que claramente tiende a 0 cuando $\epsilon \to 0$ pues $-1 < \theta_1$.

Caso II - $\gamma \cap \overline{i0} \neq \emptyset$.

Si $\gamma \cap \overline{i0} = \{\gamma(t_1)\}$ entonces la $\int_{\overline{i\gamma_{t_1}}} I_1 d\zeta = -\int_{\gamma^-[0,t_1]} I_1 d\zeta$ ya que I_1 es holomorfa en $\mathbb{H}$. Continuando como en el caso anterior a partir de $\gamma(t_1)$, demostramos este caso. Procediendo por inducción, se demuestra el caso en que $\gamma \cap \overline{i0} = \{\gamma(t_1), ..., \gamma(t_n)\}$. $\square$

Notación

En el desarrollo de la tesis se utiliza bastante notación nueva. Para facilitar la lectura se decidió agregar esta sección donde ponemos la notación más usada.

Z°	Interior del polígono simple Z.
$cl(Z)$	Cerradura del polígono simple Z, es decir, $cl(Z) = Z \cup Z^\circ$.
$\mathbb{A}_\mathbb{C}$	Grupo afín complejo.
$\mathbb{S}(n)$	Conjunto de n-ágonos simples contenido en $\mathbb{C}^n$.
$\mathbb{K}(n)$	Conjunto de n-ágonos convexos en $\mathbb{C}^n$.
η	Función de paso al cociente $\mathbb{C}^n \to \mathbb{C}^n/\mathbb{A}_\mathbb{C}$.
r_Z	Radio tal que si $Z \in \mathbb{S}(n)$, entonces $\prod B_{r_Z}(z_i) \subset \mathbb{S}(n)$.
$\mathcal{S}(n)$	Componente de n-ágonos simples pos. orient. en $\mathbb{CP}^{n-2}$.
$\mathcal{K}(n)$	Componente de n-ágonos convexos pos. orient. en $\mathbb{CP}^{n-2}$.
R_n	El n-ágono regular positivamente orientado.
$\mathcal{D}_i(n)$	Polígonos en $\mathcal{S}(n)$ con el i-ésimo vértice fuerte-deformable.
$\mathcal{T}_i(n)$	Polígonos en $\mathcal{S}(n)$ con el i-ésimo vértice deformable.
δ	Función de $\mathcal{S}(n)$ en sí mismo que cambia la enumeración.
$\mathcal{P}(n)$	Espacio de polígonos sin etiquetas en los vértices $(\mathcal{S}(n)/\delta)$.
∂A	Frontera del conjunto A.

Bibliografía

[1] M. A. Armstrong, The fundamental group of the orbit space of a discontinuous group. Mathematical Proceedings of the Cambridge Philosophical Society, Vol. 64 (1968), 299-301.

[2] Bavard, C. & E. Ghys, Polygones du plan et polyèdres hyperboliques. Geometriae Dedicata Vol. 43 (1992), No. 2, 207–224.

[3] M. Boileau, S. Maillot & J. Porti, Three-Dimensional Orbifolds and their Geometric Structures. Panoramas et Synthèses SMF, No. 15, 2004.

[4] C. Carathéodory, Untersuchungen über die konformen Abbildungen von festen und veränderlichen Gebieten. Math. Ann. 72 (1912), No. 1, 107–144.

[5] C. Carathéodory, Über die gegenseitige Beziehung der Ränder bei der konformen Abbildung des Inneren einer Jordanschen Kurve auf einen Kreis. Math. Ann. 73 (1913), No. 2, 305–320.

[6] E. B. Christoffel, Sul problema delle temperature stazonarie e la rappresentazione di una data superficie. Ann. Mat. Pura Appl. Serie II, 1:89–103, 1867.

[7] M. P. Do Carmo, Rimannian Geometry, Mathematics: Theory & Applications, Birkhäuser, 1992.

[8] A. Driscoll & N. Trefethen, Schwarz-Christoffel Mapping. Cambridge Monographs on Applied an Computational Mathematics 8, Cambridge University Press, 2002.

[9] M. H. Freedman, The Topology of Four-Dimensional Manifolds. Journal of Differential Geometry 17 (1982), No. 3, 357-453.

[10] G. Fubini, Sulle metrice definite da una forma Hermitiana. Atti Instit. Veneto 6 (1903), 501 − 513.

[11] A. GONZÁLEZ & J. L. LÓPEZ-LÓPEZ, Shapes of Tetrahedra with Prescribed Cone Angles. Conformal Geometry and Dynamics, Vol. 15(2011), 50-63.

[12] A. HATCHER, Algebraic Topology. Cambridge University Press, 2002.

[13] L. I. GOLOVINÁ & I. M. YAGLÓM, Inducción en la Geometria (Segunda Edición), Lecciones populares de Matemáticas. MIR, 1981.

[14] D. HUSEMOLLER, Fibre Bundles, Graduate Text in Mathematics 20. Springer-Verlag, Third Edition, 1993.

[15] M. KAPOVICH & J. MILLSON, On the Moduli Space of Polygons in the Euclidean Plane. Journal of Differential Geometry, Vol. 42 (1995), No. 2, 430 – 464.

[16] KLINGENBERG W. P. Riemannian Geometry. Walter de Gruyter, Second Edition, 1995.

[17] S. KOJIMA & Y. YAMASHITA, Shapes of stars. Proc. of the American Mathematical Society Vol. 117 (1993), No. 3, 845–851.

[18] J. L. LÓPEZ-LÓPEZ, The area as a natural pseudo-Hermitian structure on the spaces of plane polygons and curves. Differential Geometry and its Applications 28 (2010), No. 5, 582–592.

[19] J. MILNOR, On Spaces Having the Homotopy Type of a CW-Complex. Trans. of the American Mathematical Society, Vol. 90, No. 2 (1959), 272-280.

[20] E. MOISE, Geometric Topology in Dimensions 2 and 3, Graduate Text in Mathematics 47. Springer-Verlag, 1977.

[21] H. A. SCHWARZ, Conforme Abbildung der Oberfläche eines Tetraeders auf die Oberfläche einer Kugel. J. Reine Ange. Math., 70:121–36, 1869.

[22] E. H. SPANIER, Algebraic Topology. Springer-Verlag, 1966.

[23] E. STUDY Kürzeste Wege im komplexen Gebiete. Math. Ann. 60 (1905), 321 – 337.

[24] W. P. THURSTON, Three-Dimensional Geometry and Topology, Volume 1. Princeton University Press, 1997.

[25] W. P. Thurston, Shapes of polyhedra and triangulations of the sphere. The Epstein Birthday Shrift. Geom. Topol. Monogr., vol. 1 (1998), 511–549.

[26] J. H. C. Whitehead, A certain open manifold whose group is unity. Quart. J. Math. Oxford 6 (1935), 268–279.

Índice Analítico

n-segmentos, 58
n-segmentos convexos, 58
Ángulo
    exterior, 74
    interior, 12

Forma de área, 70

Métrica de Fubini-Study, 69
Mayer-Vietoris, 35

Parejas escisivas, 36
Polígono
    cerradura de, 10
    convexo, 12
    interior de, 10
    posit. orient., 12
    regular, 14
    simple, 10

Schwarz-Christoffel, 73
Semejanza orientada, 14

Vértice
    deformable, 22
    fuerte-deformable, 22
Vértices
    reenumeración de, 42