

CENTRO DE INVESTIGACIÓN EN MATEMÁTICAS A.C.

TESIS DE MAESTRÍA

Modelación y Control de un Robot Bípedo

Autor:

Juan Eduardo MACHADO
MARTÍNEZ

Supervisores:

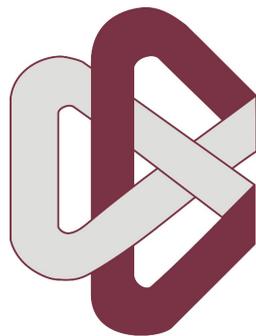
Dr. Héctor Manuel BECERRA
FERMÍN y Dra. Mónica
MORENO ROCHA

*Tesis presentada como requisito para la obtención
del grado de Maestro en Ciencias*

con especialidad en

[Matemáticas Aplicadas](#)

14 de diciembre de 2014



CIMAT

CENTRO DE INVESTIGACIÓN EN MATEMÁTICAS A.C.

Resumen

Departamento de Matemáticas

Modelación y Control de un Robot Bípedo

por Juan Eduardo MACHADO MARTÍNEZ

En esta tesis se estudia el problema de modelación y control de un robot bípedo plano de seis grados de libertad, generados por la interacción de siete vínculos que constituyen el cuerpo del robot, incluyendo pies. Se detallan los aspectos de modelación del sistema que se divide en dos partes. Primero, se obtiene un modelo de las ecuaciones de movimiento del robot usando las ecuaciones de Euler-Lagrange, que es representado por un sistema de ecuaciones diferenciales ordinarias no-lineales con entradas. Luego, se presenta la obtención de un modelo en ecuaciones algebraicas que describe la transición en el campo de velocidades causada por la colisión de las piernas del robot con el suelo. Con la composición de ambos modelos se formula un sistema dinámico híbrido que representa las fases de la locomoción bípeda. Para obtener una caminata estable, se presenta el diseño de diversos controladores que se basan en la construcción de un difeomorfismo linealizante que codifica diversas características de la locomoción. Con el difeomorfismo anterior, se propone un sistema de control lineal cuya regulación permite que la dinámica del robot siga trayectorias deseadas. El desempeño de los diferentes controladores se presenta a través de simulaciones numéricas realizadas en Python, en el cual se ha implementado el modelo híbrido que representa a el sistema completo. Se da una demostración para la robustez del sistema en retroalimentación ante un tipo de perturbación externa de tipo impulsiva.

Agradecimientos

A toda mi familia, especialmente a mis padres y hermanos, por todo su amor y apoyo incondicional para el cumplimiento de cada uno de mis sueños.

A los profesores que contribuyeron a mi formación en la maestría de Matemáticas Aplicadas, especialmente a mis co-asesores de tesis, el Dr. Héctor Manuel Becerra y la Dra. Mónica Moreno Rocha, por todo el apoyo y paciencia que tuvieron hacia mí durante la realización de esta tesis. Además, quiero agradecer al comité de sinodales, el Dr. José Ignacio Barradas Bribiesca y la Dra. Claudia Elvira Esteves Jaramillo, por sus valiosas aportaciones para la versión final de este documento.

A mis amigos, el M.C. Emilio Salcedo Martínez y el M.C. Mauricio Salazar Méndez, por su enorme ayuda durante el desarrollo de algunos mis cursos en esta maestría.

Al Consejo Nacional de Ciencia y Tecnología (CONACyT), por la beca que me fue otorgada para la realización de mis estudios de maestría en el periodo de Agosto 2012 a Julio 2014.

Al Centro de Investigación en Matemáticas A.C. (CIMAT), por los diferentes apoyos que me fueron otorgados, en particular por la beca de tesis de maestría que gocé de Agosto 2014 a Diciembre 2014.

Por último, quisiera agradecer a Anna Karen Sedano Flores por todo su cariño, paciencia y sacrificio durante mi estancia en el CIMAT.

Índice general

Resumen	I
Agradecimientos	II
Índice general	III
Índice de figuras	IV
Índice de cuadros	V
1. Introducción	1
1.1. Antecedentes	1
1.2. Trabajos Relacionados	2
1.3. Objetivos de la Tesis	4
1.4. Estructura del Documento	4
2. Modelación de un Robot Bípedo	6
2.1. Preliminares de Mecánica de Cuerpo Rígido	6
2.1.1. Terminología en Locomoción Bípeda	9
2.2. Planteamiento de Hipótesis	10
2.3. Construcción del Modelo Completo	11
2.3.1. Cinemática y Fuerzas del Robot	11
2.3.2. Dinámica Lagrangiana	13
2.3.3. Modelo de Colisión	20
2.3.4. Modelo Híbrido	25
2.3.4.1. Preliminares de Sistemas con Efectos Impulsivos	26
2.3.4.2. Modelo del Bípedo como un Sistema Híbrido	30
2.4. Restricciones Dinámicas	31
3. Control de un Robot Bípedo	34
3.1. Preliminares de Teoría de Control	34
3.1.1. Resultados de Control Lineal	37
3.1.1.1. Control Óptimo: Diseño de un Regulador Cuadrático Li- neal	38
3.1.2. Resultados de Control No Lineal	41
3.1.2.1. Esquema Twisting para Estabilización Robusta en Tiem- po Finito	43

3.1.2.2.	Sintonización del Algoritmo Twisting	45
3.1.2.3.	Sintonización de un Control Lineal	45
3.2.	Estabilización a Puntos de Equilibrio	46
3.3.	Control de Locomoción	50
3.4.	Estudio de Robustez	58
3.5.	Resultados en Simulación Numérica	61
3.5.1.	Control de Locomoción	65
3.5.1.1.	Control Lineal	66
3.5.1.2.	Control Twist para el Caso $0 < \alpha < 1$	68
4.	Análisis de Estabilidad	71
4.1.	Aplicaciones de Poincaré en Sistemas de Ecuaciones Diferenciales	71
4.2.	Preliminares de Aplicaciones de Poincaré en Sistemas Híbridos	72
4.3.	Sistemas Híbridos con Dos Fases Continuas	74
4.3.1.	Algunas Definiciones Básicas	75
4.3.2.	Existencia y Estabilidad de Órbitas Periódicas	76
4.4.	Aplicación de Poincaré para el Modelo del Bípido	77
4.4.1.	Resultados de Simulación	78
5.	Conclusiones y Trabajo Futuro	84
A.	Ecuaciones de Euler-Lagrange	87
B.	Código de Python	94
Bibliografía		119

Índice de figuras

2.1.	Algunas fases de caminata bípeda con pies.	10
2.2.	Diagrama esquemático de un bípedo plano.	12
2.3.	Diagrama de torques en el robot.	14
2.4.	Continuidad izquierda y derecha.	28
3.1.	Evolución temporal de las coordenadas generalizadas q_2, \dots, q_7 del sistema usando un control lineal óptimo.	64
3.2.	Evolución temporal de las velocidades generalizadas $\dot{q}_2, \dots, \dot{q}_7$ del sistema usando un control lineal óptimo.	64
3.3.	Evolución temporal del centro de presión del bípedo usando un control lineal óptimo.	65
3.4.	Evolución temporal de la salida del sistema usando un control lineal.	67
3.5.	Evolución temporal del vector de estados del sistema usando un control lineal.	67
3.6.	Evolución temporal de las posiciones angulares contra sus velocidades angulares para los vínculos \mathcal{B}_2 y \mathcal{B}_3 usando un control lineal.	68
3.7.	Evolución temporal del centro de presión y de la posición del pie de balanceo usando un control lineal.	68
3.8.	Evolución temporal de la salida del sistema usando un control twisting con $0 < \alpha < 1$	69
3.9.	Evolución temporal del vector de estados del sistema usando un control twisting con $0 < \alpha < 1$	70
3.10.	Evolución temporal de las posiciones angulares contra sus velocidades angulares para los vínculos \mathcal{B}_2 y \mathcal{B}_3 usando un control twisting con $0 < \alpha < 1$	70
3.11.	Evolución temporal del centro de presión y de la posición del pie de balanceo usando un control twisting con $0 < \alpha < 1$	70
4.1.	Aplicación de Poincaré en sistemas híbridos.	73

Índice de cuadros

3.1. Valores numéricos de los parámetros físicos del bípedo.	61
3.2. Valores numéricos de los parámetros para la caminata del bípedo.	65
4.1. Resultados de punto fijo para un control lineal.	80
4.2. Resultados de punto fijo para un control twisting.	81
4.3. Resultados de estabilidad de una órbita periódica para un control lineal. .	82
4.4. Resultados de estabilidad de una órbita periódica para un control twisting.	83

Capítulo 1

Introducción

El estudio de robots caminantes es una área de investigación de gran interés científico y tecnológico [35]. Una clase particular de los robots con piernas son los robots bípedos. Las aplicaciones potenciales para los robots bípedos pueden variar desde la realización de trabajos peligrosos (minería, inspección de plantas nucleares, desactivación de explosivos, intervención militar, etc.), hasta aplicaciones médicas como es el diseño de exoesqueletos y prótesis para personas con discapacidad motriz. Sin embargo, dada la complejidad cinemática y dinámica de este tipo de robots, el diseño de controladores eficientes y robustos para lograr una caminata estable resulta desafiante [35]. El presente documento de tesis se orienta al estudio de un robot bípedo plano conformado por 7 vínculos de geometría cilíndrica. Este tipo de robot es el más simple que reproduce de manera aproximada a el mecanismo de caminata humana.

1.1. Antecedentes

Los **robots móviles con piernas** son artefactos electromecánicos compuestos de múltiples cuerpos interconectados por medio de articulaciones. Algunos de estos cuerpos forman extremidades inferiores (piernas), cuyos extremos (pies) se ponen en contacto de forma periódica con el suelo para realizar el movimiento [28].

En general, un **robot bípedo** se conforma por una cadena cinemática abierta que consiste típicamente en tres subcadenas, dos de ellas las piernas y una más el torso, todas conectadas en el punto llamado cintura. Investigaciones recientes sugieren que la caminata bípeda del humano es un mecanismo de evolución que resultó en un menor costo metabólico sobre otras formas de estructura de piernas [30]. Sin embargo, la caminata bípeda es un problema de control muy difícil, esto no sólo por su dinámica de naturaleza

no lineal e inestable, sino porque la dinámica es además discontinua (cada vez que se da un paso, la velocidad del pie se anula) y por su contacto limitado con el suelo.

En la **modelación** de robots, debe tenerse en cuenta la cinemática de la estructura mecánica, esto se refiere a la descripción del movimiento respecto a un marco de referencia cartesiana fija, ignorando las fuerzas y momentos que causan el movimiento de la estructura. La formulación de las relaciones cinemáticas representa la base de una derivación sistemática y general de la dinámica, i.e., las *ecuaciones de movimiento* del robot como una función de las fuerzas y los momentos que actúan en él. En general, estas pueden ser representadas por un número finito de ecuaciones diferenciales ordinarias acopladas, que en forma vectorial pueden ser descritas por:

$$\frac{d}{dt}\mathbf{x} = \mathbf{f}(t, \mathbf{x}, \mathbf{u}),$$

donde $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ son llamadas variables de estado y $\mathbf{u} = (u_1, u_2, \dots, u_p)$ son variables de entrada especificadas (variables manipulables). Típicamente las variables de estado representarán posiciones y velocidades de las articulaciones del robot, mientras que las variables de entrada representarán las fuerzas y/o los torques que se pueden aplicar al robot a través de actuadores que generalmente son motores eléctricos.

La parte de **control** es la encargada de ordenar la aplicación de las fuerzas y torques necesarios para que la estructura mecánica del robot tenga un comportamiento deseado. En términos de cambiar el comportamiento cualitativo de las soluciones del modelo, el objetivo del control consiste en el diseño una ley de control en retroalimentación del tipo

$$\mathbf{u} = \gamma(t, \mathbf{x}),$$

de tal forma que el sistema en retroalimentación, dado por

$$\frac{d}{dt}\mathbf{x} = \mathbf{f}(t, \mathbf{x}, \gamma(t, \mathbf{x})),$$

tenga ciertas características en sus soluciones, como puede ser el modificar la estabilidad de sus soluciones de equilibrio.

1.2. Trabajos Relacionados

En esta sección se describen las investigaciones relacionadas más cercanas a este trabajo de tesis sin ser exhaustivos en torno al tema de robots bípedos, pues la literatura es extensa. En [12] es posible encontrar información más general relacionada con los robots bípedos.

La modelación de robots bípedos visto como un sistema de múltiples péndulos se ha planteado desde el caso más simple en [8], donde con solo tres vínculos se representa a un bípedo sin rodillas ni pies. Con el fin de analizar un modelo más cercano a la anatomía humana, el modelo de cinco vínculos, que incluye rodillas pero no pies, ha sido uno de los más estudiados en la literatura, ver por ejemplo [26], [19], [20] y [14]. Detalles de los modelos mencionados se proporcionan en [35].

Cabe mencionar que en las referencias mencionadas se modelan bípedos planos cuyo movimiento se restringe al plano sagital. A pesar de que un robot real realiza su movimiento en el espacio tridimensional, la dinámica en el plano sagital básicamente está desacoplada de la dinámica en el plano frontal ([35]). Además, las componentes esenciales de la caminata bípeda se observan en el plano sagital, por lo que en este trabajo de tesis se estudia un robot plano.

En la literatura, varios de los modelos de robots planos se han considerado sin pies, esto es, el contacto con el suelo se supone puntual (como por ejemplo en [26] y [20]). Sin embargo, los pies juegan un rol importante en la progresión de la caminata, en el soporte vertical y en la inicialización de levantar la pierna de balanceo correspondiente desde el suelo. Ejemplos de modelos de bípedos con pies se encuentran en [11] y [35].

Diferentes técnicas de control han sido evaluadas en diferentes modelos de robots bípedos. Algunas que han demostrado conseguir una caminata estable en robots bípedos planos son el control Proporcional-Derivativo (PD) con alta ganancia implementado en [19], el control no lineal con convergencia en tiempo finito de [4], aplicado por ejemplo en [26] y [14], y el control con modos deslizantes clásico en [20].

En este trabajo de tesis, dentro de los diferentes esquemas de control propuestos se incluye un control robusto basado en un algoritmo *twisting* introducido por primera vez en [16]. Sin embargo, el enfoque presentado se basa en los resultados para estabilización robusta del origen de un sistema doble integrador a través de un esquema de control cuya variable de control es continua a trozos ([21]) y otro esquema donde la variable de control es continua pero diferenciable a trozos ([22]). En particular, los algoritmos con modos deslizantes de segundo orden *twisting* y *super-twisting* han sido aplicados en diferentes problemas, por ejemplo, control de robots móviles [2] y control de motores [17]. La aplicación de estos esquemas en bípedos planos es más reciente [25] y consiste en el uso del algoritmo propuesto en [21] mediante la aplicación de reglas de sintonización de los parámetros del control. Esta sintonización, propuesta en [24], permite la convergencia al origen en tiempo finito y en un tiempo pre-especificado a priori de un sistema doble integrador.

1.3. Objetivos de la Tesis

El objetivo general de este trabajo de tesis es estudiar la dinámica en retroalimentación de un bípedo plano bajo distintos esquemas de control que permitan una locomoción estable y robusta frente a perturbaciones externas.

Como objetivos particulares se pueden enunciar los siguientes:

- Formular un modelo matemático que represente las diferentes fases de la locomoción del robot.
- Diseñar un controlador lineal que permita la estabilización local del sistema en retroalimentación sobre algún punto de equilibrio de interés.
- Diseñar controladores no lineales que logren la generación de un ciclo de locomoción estable y robusto.
- Desarrollar un simulador numérico que permita evaluar soluciones del modelo matemático bajo los diferentes esquemas de control que sean propuestos.

1.4. Estructura del Documento

En el **Capítulo 2** se presenta la construcción de un modelo que describe la dinámica de un robot bípedo plano. Para ello, se introducen una serie de conceptos usados en mecánica de cuerpo rígido, así como en locomoción bípeda. Se presenta un conjunto de hipótesis de modelación con las que se plantea un modelo en ecuaciones diferenciales ordinarias derivado de las ecuaciones de Euler-Lagrange. Este modelo describe la dinámica del bípedo cuando una de sus piernas está fija al suelo y la otra pierna está en el aire. Adicionalmente, se propone un modelo que describe el evento de colisión de alguno de los pies del bípedo con el suelo. El capítulo finaliza con la propuesta de un sistema híbrido (los cuales son descritos en este mismo capítulo) que incorpora los dos modelos anteriores.

El **Capítulo 3** contiene el desarrollo de diferentes algoritmos de control que permiten manipular el comportamiento cualitativo del modelo. Se inicia con la introducción de nociones básicas sobre teoría de control, así como algunos resultados elementales de control lineal y no lineal. El capítulo concluye con la presentación de diferentes simulaciones numéricas del modelo bajo el efecto de los diferentes esquemas de control propuestos.

En el **Capítulo 4** se presenta el estudio numérico de la existencia de órbitas periódicas del sistema híbrido que modela la locomoción del bípedo. El capítulo inicia con algunos

conceptos básicos de aplicaciones de Poincaré en sistemas de ecuaciones diferenciales así como en sistemas híbridos. Se presenta la construcción de una aplicación de Poincaré para el sistema híbrido, con el cual se plantea un sistema dinámico discreto cuyos puntos fijos representan órbitas periódicas del sistema.

El **Capítulo 5** contiene diversas conclusiones que pueden destacarse sobre los resultados planteados en esta tesis, así como algunas perspectivas de trabajo futuro.

Capítulo 2

Modelación de un Robot Bípedo

2.1. Preliminares de Mecánica de Cuerpo Rígido

En este apartado se presentan un conjunto de definiciones y propiedades mecánicas de los cuerpos rígidos. Estos conceptos son necesarios para el estudio cinemático del robot así como para la formulación de las ecuaciones de movimiento. Los conceptos que a continuación se presentan, pueden ser consultados por ejemplo en los libros [32], [28] y [13].

Un *cuerpo rígido* o *vínculo* es la idealización de un cuerpo sólido como un conjunto de puntos caracterizado por la restricción de que la distancia entre cualesquiera dos puntos es siempre constante. Una *cadena cinemática* es un conjunto de vínculos interconectados, la cadena se dice *abierta* cuando sólo hay una sucesión de vínculos conectando los dos extremos de la cadena. Un *actuador* es un dispositivo que convierte alguna forma de energía (generalmente eléctrica) en energía mecánica. En éste trabajo de tesis se supone que los actuadores producen energía mecánica de rotación sobre los cuerpos rígidos.

Considérese un cuerpo rígido \mathcal{B} que se mueve respecto a un marco de referencia ortonormal $O - xyz$ ¹ de vectores unitarios \mathbf{x} , \mathbf{y} y \mathbf{z} , llamado *marco fijo*. La suposición de rigidez de \mathcal{B} permite la introducción de un marco ortonormal $O' - x'y'z'$ sujeto al cuerpo, llamado *marco móvil*, con respecto al cual la posición de cada punto de \mathcal{B} es independiente del tiempo. Sean $\mathbf{x}(t)'$, $\mathbf{y}(t)'$ y $\mathbf{z}(t)'$ vectores unitarios que definen el marco móvil respecto al marco fijo en un instante de tiempo t .

La orientación del marco móvil respecto al marco fijo en un instante de tiempo puede ser expresada mediante la matriz ortogonal de tamaño 3×3

¹Esta notación representa los ejes formado por los vectores \mathbf{x} , \mathbf{y} y \mathbf{z} que se intersectan en el punto O , que es el origen del marco de referencia.

$$\mathbf{R}(t) = \begin{bmatrix} \mathbf{x}'^T(t)\mathbf{x} & \mathbf{y}'^T(t)\mathbf{x} & \mathbf{z}'^T(t)\mathbf{x} \\ \mathbf{x}'^T(t)\mathbf{y} & \mathbf{y}'^T(t)\mathbf{y} & \mathbf{z}'^T(t)\mathbf{y} \\ \mathbf{x}'^T(t)\mathbf{z} & \mathbf{y}'^T(t)\mathbf{z} & \mathbf{z}'^T(t)\mathbf{z} \end{bmatrix} \quad (2.1)$$

que es conocida como *matriz de rotación* y está definida en el grupo especial ortonormal $SO(3)$ de matrices de (3×3) con columnas ortonormales y determinante igual a uno. Las columnas de $\mathbf{R}(t)$ de la Ec. (2.1) representan las componentes de los vectores unitarios del marco móvil cuando está expresado con respecto al marco fijo. Análogamente, los renglones representan las componentes de los vectores unitarios del marco fijo cuando es expresado con respecto al marco móvil.

Definición 2.1 (Centro de masa). Sea ρdV la masa de una partícula elemental de un cuerpo rígido \mathcal{B} , donde ρ denota la densidad de la partícula de volumen dV . Sea además $V_{\mathcal{B}}$ el volumen del cuerpo y $m = \int_{V_{\mathcal{B}}} \rho dV$ su masa total la cual supone constante. Si \mathbf{p} denota el vector posición de la partícula de masa ρdV en el marco $O - xyz$, entonces el *centro de masa* de \mathcal{B} es el punto C cuyo vector posición es:

$$\mathbf{p}_C = \frac{1}{m} \int_{V_{\mathcal{B}}} \mathbf{p} \rho dV. \quad (2.2)$$

En el caso cuando \mathcal{B} es la unión de $n_{\mathcal{B}}$ cuerpos rígidos de masa $m_1, \dots, m_{n_{\mathcal{B}}}$ y centros de masa $\mathbf{p}_{C_1}, \dots, \mathbf{p}_{C_{n_{\mathcal{B}}}}$, el centro de masa de \mathcal{B} se representa por

$$\mathbf{p}_C = \frac{1}{m} \sum_{i=1}^{n_{\mathcal{B}}} m_i \mathbf{p}_{C_i}.$$

Definición 2.2 (Momento de inercia). Sea r una recta que pasa por O y \mathcal{B} un cuerpo rígido de volumen $V_{\mathcal{B}}$. Adicionalmente se denota por $\mathbf{p}(t)$ la posición de una partícula de masa ρdV de \mathcal{B} . Si $d(\mathbf{p})$ representa la distancia entre r y $\mathbf{p}(t)$, entonces el *momento de inercia* de \mathcal{B} respecto a r se define como

$$I_r = \int_{V_{\mathcal{B}}} d^2(\mathbf{p}) \rho dV.$$

Definición 2.3 (Operador anti-simétrico). Sea $\mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3$. Se define el *operador anti-simétrico* $\mathbf{S} : \mathbb{R}^3 \rightarrow Mat_{3 \times 3}(\mathbb{R})$ dado por $\mathbf{x} \mapsto \mathbf{S}(\mathbf{x})$ mediante la siguiente expresión:

$$\mathbf{S}(\mathbf{x}) = \begin{bmatrix} 0 & -x_3 & x_2 \\ x_3 & 0 & -x_1 \\ -x_2 & x_1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Proposición 2.4. Sea $\mathbf{r} = (r_x, r_y, r_z)$ un vector unitario que representa la dirección de la recta r , si la posición \mathbf{p} respecto a O de cada partícula de \mathcal{B} se define en componentes como $t \mapsto (p_x, p_y, p_z)$, entonces el momento de inercia I_r de \mathcal{B} respecto a r está dado por el escalar positivo

$$I_r = \mathbf{r}^T \left(\int_{V_{\mathcal{B}}} \mathbf{S}^T(\mathbf{p}) \mathbf{S}(\mathbf{p}) \rho dV \right) \mathbf{r} =: \mathbf{r}^T \mathbf{I}_O \mathbf{r},$$

donde \mathbf{I}_O es una matriz simétrica definida positiva dada por

$$\mathbf{I}_O = \begin{bmatrix} \int_{V_{\mathcal{B}}} (p_y^2 + p_z^2) \rho dV & - \int_{V_{\mathcal{B}}} p_x p_y \rho dV & - \int_{V_{\mathcal{B}}} p_x p_z \rho dV \\ - \int_{V_{\mathcal{B}}} p_x p_y \rho dV & \int_{V_{\mathcal{B}}} (p_x^2 + p_z^2) \rho dV & - \int_{V_{\mathcal{B}}} p_y p_z \rho dV \\ - \int_{V_{\mathcal{B}}} p_x p_z \rho dV & - \int_{V_{\mathcal{B}}} p_y p_z \rho dV & \int_{V_{\mathcal{B}}} (p_x^2 + p_y^2) \rho dV \end{bmatrix}.$$

Demostración. Es suficiente probar que $d^2(\mathbf{p}) = \mathbf{r}^T \mathbf{S}^T(\mathbf{p}) \mathbf{S}(\mathbf{p}) \mathbf{r}$. Si se denota por \mathbf{p}_r la proyección de \mathbf{p} sobre \mathbf{u} , entonces $\mathbf{p}_r = (\mathbf{r}^T \mathbf{p}) \mathbf{r}$. Es posible expresar la distancia $d(\mathbf{p}) = \|\mathbf{p} - \mathbf{p}_r\|$, entonces

$$\begin{aligned} d^2(\mathbf{p}) &= (\mathbf{p} - \mathbf{p}_r)^T (\mathbf{p} - \mathbf{p}_r) \\ &= (\mathbf{p} - (\mathbf{r}^T \mathbf{p}) \mathbf{r})^T (\mathbf{p} - (\mathbf{r}^T \mathbf{p}) \mathbf{r}) \\ &= \|\mathbf{p}\|^2 - \|\mathbf{p}_r\|^2. \end{aligned}$$

Comparando las cantidades $\|\mathbf{p}\|^2 - \|\mathbf{p}_r\|^2$ con $\mathbf{r}^T \mathbf{S}^T(\mathbf{p}) \mathbf{S}(\mathbf{p}) \mathbf{r}$ es posible verificar que

$$(\|\mathbf{p}\|^2 - \|\mathbf{p}_r\|^2) - \mathbf{r}^T \mathbf{S}^T(\mathbf{p}) \mathbf{S}(\mathbf{p}) \mathbf{r} = - (r_x^2 + r_y^2 + r_z^2 - 1) c_1,$$

donde

$$c_1 = (2p_x r_x (p_y r_y + p_z r_z) + p_x^2 (r_x^2 + 1) + (p_y r_y + p_z r_z)^2 + p_y^2 + p_z^2).$$

Dado que \mathbf{r} es un vector unitario, entonces $r_x^2 + r_y^2 + r_z^2 = 1$, por lo tanto $d^2(\mathbf{p}) = \mathbf{r}^T \mathbf{S}^T(\mathbf{p}) \mathbf{S}(\mathbf{p}) \mathbf{r}$. \square

Definición 2.5 (Tensor de inercia). La matriz \mathbf{I}_O de la **Proposición 2.4** se conoce como *tensor de inercia* de \mathcal{B} respecto a O y a la recta r .

Observación 2.6. Si $\mathbf{p}(t)$ varía respecto al tiempo t , entonces el momento de inercia I_r será una función escalar dependiente del tiempo. Sin embargo si O se fija sobre un punto del cuerpo rígido \mathcal{B} entonces $d(\mathbf{p})$ se convierte en una cantidad escalar constante $\forall \mathbf{p} \in \mathcal{B}$, implicando a su vez que $I_r \in \mathbb{R}$ es constante. Una consecuencia de lo anterior es que la

matriz de inercia respecto al centro de masa de algún cuerpo rígido es una matriz de tamaño (3×3) de coeficientes constantes.

Observación 2.7. Puesto que \mathbf{I}_O es simétrica, entonces puede diagonalizarse mediante una elección apropiada del sistema de referencia. Un sistema de referencia en la cual \mathbf{I}_O sea diagonal es llamado *sistema de referencia principal*, su base ortonormal es llamada *ejes principales de inercia* y los elementos diagonales son los *momentos principales de inercia*. Si un cuerpo es simétrico respecto a algún eje, entonces existe un sistema de referencia principal. ([18] pág. 504, [28] pág. 582 y [13] pág. 100).

2.1.1. Terminología en Locomoción Bípeda

Un *bípido* es una cadena cinemática abierta que consiste en dos subcadenas llamadas *piernas*, y a menudo, una sub-cadena adicional llamada *torso*, todas conectadas a un punto en común llamado *cadera*. Una o ambas piernas pueden estar en contacto con el suelo. Cuando solo una de las piernas está en contacto con el suelo, la pierna que hace contacto se le llama *pierna de soporte* y la otra pierna se llama *pierna de balanceo*. Es referido como *pie* al extremo de alguna pierna, ya sea que tenga un vínculo o no.

La *fase de soporte simple* o *fase de balanceo* es definida como la fase de locomoción donde solo uno de los pies está en contacto con el suelo. En cambio, la fase de *doble soporte* cuando ambos pies están en contacto con el suelo; ver la Fig. (2.1). La *Caminata* se define entonces como el intercambio entre fases de simple y doble soporte, con el requerimiento de que el desplazamiento de la componente horizontal del centro de masa del robot sea estrictamente monótono. Dentro de esta descripción está implícita la suposición de que el pie no se desliza si está en contacto con el suelo.

El *plano sagital* es el plano longitudinal que divide al cuerpo en secciones izquierda y derecha. El *plano frontal* es el plano que divide al cuerpo en sección delantera y trasera. El plano *transversal* es un plano ortogonal a ambos planos anteriores. Un *bípido plano* es un bípido cuyo movimiento se lleva a cabo sólo en en plano sagital.

La distribución de fuerza que realiza el suelo sobre el pie de soporte puede sustituirse por una sola fuerza resultante que actúa sobre un punto en particular del pie, a dicho punto se le conoce como *centro de presión* (o CoP por sus siglas en inglés) [34]. Se llama *polígono de soporte* a la cubierta convexa formada por los puntos de contacto del robot con el entorno. Se dice que el bípido tiene *caminata estáticamente estable* si la proyección del centro de masa sobre el suelo se mantiene dentro del polígono de soporte. Una caminata es *cuasi-estáticamente estable* si el centro de presión del bípido se mantiene estrictamente en el interior del polígono de soporte. En términos coloquiales el bípido desarrolla una caminata *dinámicamente estable* si el centro de presión llega a pertenecer a la frontera del polígono de soporte sin que el bípido se caiga.

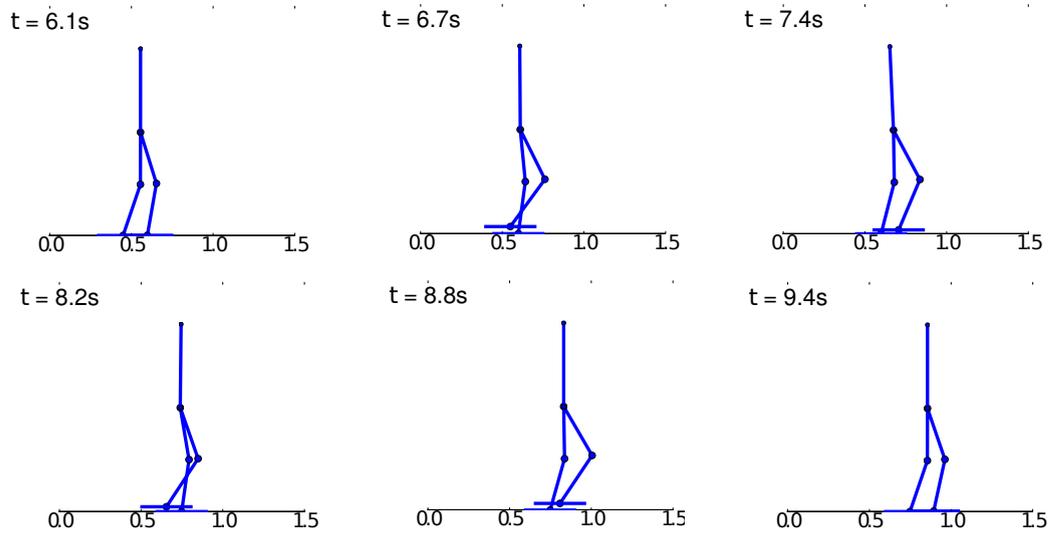


FIGURA 2.1: Algunas fases de caminata bípeda con pies. El robot inicia ($t = 6.1s$) en una fase de doble soporte. Posteriormente realiza dos pasos a través transiciones entre las fases de soporte simple y doble soporte.

2.2. Planteamiento de Hipótesis

A continuación, se enuncia un conjunto de hipótesis sobre las características del robot bajo estudio. Se considera que el robot:

- HR1)** Está conformado por 7 vínculos de geometría cilíndrica y densidad homogénea, estos son: 2 pies, 2 pantorrillas, 2 muslos y 1 torso. Los vínculos están conectados por 6 articulaciones rotatorias ideales (i.e., rígidas y sin fricción) para formar una sola cadena cinemática abierta; además, cada vínculo tiene masa distinta de cero y momento de inercia diferente cero al menos respecto a alguna articulación.
- HR2)** Es plano, con movimiento restringido al plano sagital.
- HR3)** Es bípedo, con dos piernas simétricas conectadas a un punto común (cadera) pero de forma independiente. Un vínculo adicional unido a la cadera representa el torso. Ambas piernas tienen en sus extremos vínculos de longitud mayor a cero que representan los pies.
- HR4)** Es independientemente actuado en cada una de las articulaciones rotatorias, en particular los tobillos son actuados.

Se supone además que la caminata satisface la siguientes hipótesis:

- HC1)** La caminata consiste en dos fases sucesivas: una fase completamente actuada y una fase de doble soporte.
- HC2)** Durante la fase completamente actuada, el pie de soporte permanece plano en el suelo y sin deslizamiento.
- HC3)** La fase de doble soporte es instantánea y la colisión asociada puede ser modelada como contacto rígido.
- HC4)** En cada paso, la pierna de balanceo es llevada desde una posición detrás de la pierna de soporte hacia una posición adelante.
- HC5)** En estado estacionario el movimiento es simétrico con respecto a ambas piernas.
- HC6)** La caminata se realiza de izquierda a derecha y a nivel del suelo.

En la **Sección 2.3.3** se presentan hipótesis correspondientes a la colisión entre el pie de balanceo y el suelo.

2.3. Construcción del Modelo Completo

En esta sección se describe la construcción del modelo completo de un robot bípedo en consistencia con las hipótesis planteadas en la sección anterior. Primero se estudia la cinemática del robot que consiste en establecer la relación entre posiciones de puntos particulares (de cada vínculo) con respecto a las posiciones angulares de las articulaciones rotatorias. Luego se procede a estudiar las fuerzas de rotación que producen los actuadores sobre los vínculos. Posteriormente se procede al desarrollo de un modelo híbrido. La parte continua correspondiente a la fase de soporte simple del robot es obtenida mediante las ecuaciones de Euler-Lagrange. La parte discreta del modelo corresponde al evento de colisión del pie de balanceo con el suelo.

2.3.1. Cinemática y Fuerzas del Robot

En este apartado se estudia la relación que existe entre las posiciones angulares de los vínculos con las posiciones cartesianas de las articulaciones del robot y de los centros de masa de cada vínculo. Todas las coordenadas cartesianas son expresadas respecto a un marco fijo $O_0 - x_0 y_0 z_0$ de vectores unitarios \mathbf{x}_0 , \mathbf{y}_0 y \mathbf{z}_0 . Se denotan las coordenadas cartesianas de las articulaciones y de los centros de masa de los vínculos por \mathbf{P}_i y \mathbf{Q}_i respectivamente para $i = 1, \dots, 7$. Las posiciones angulares de los vínculos, denotadas por q_i para $i = 1, \dots, 7$, se expresan respecto a un eje paralelo a \mathbf{y}_0 que interseca a

cada articulación en su centro de masa. Se supone un valor positivo en sentido opuesto al de las manecillas del reloj. En la Fig. (2.2) puede apreciar un diagrama esquemático del robot junto con la definición de las articulaciones y las posiciones angulares de los vínculos.

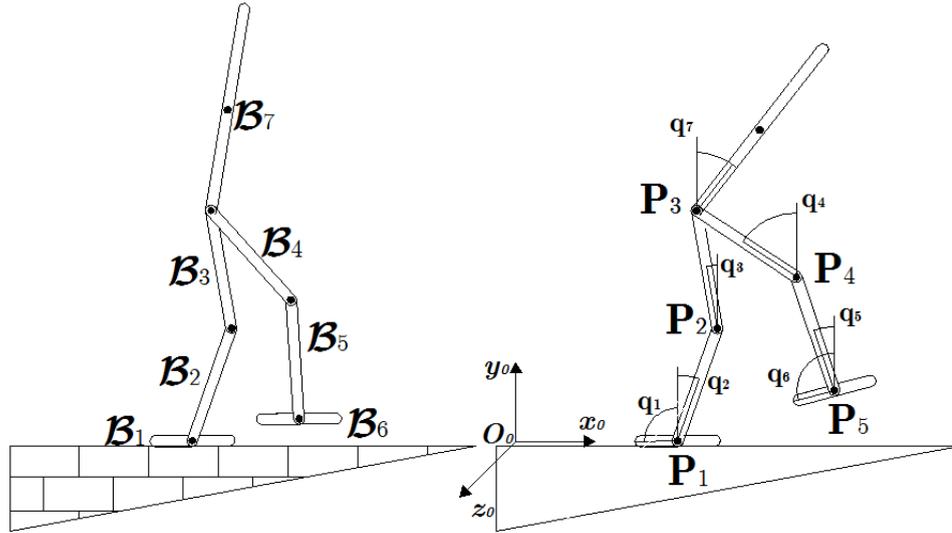


FIGURA 2.2: Diagrama esquemático de un bípido plano de 7 vínculos en la fase de soporte simple. A la izquierda se muestra la etiqueta de cada vínculo. A la derecha se aprecia la etiqueta de las articulaciones así como el marco fijo $O_0 - x_0y_0z_0$.

En la literatura (e.g. [28] y [32]) se encuentra la descripción de diferentes métodos para realizar el estudio cinemático de diversas estructuras robóticas. Dos ejemplos son el método de Transformaciones Homogéneas y el método de Denavit-Hartenberg. En el caso del bípido plano, puede resultar más directo e intuitivo obtener las posiciones \mathbf{P}_i y \mathbf{Q}_i de forma recursiva (Transformaciones Homogéneas). Si se toma como referencia el diagrama esquemático de la Fig. (2.2) las posiciones cartesianas de las articulaciones se representan por

$$\mathbf{P}_i = \begin{cases} \mathbf{O}_0 + [p_x \ p_y]^T & \text{si } i = 1, \\ \mathbf{P}_{i-1} + \mathbf{R}_i \begin{bmatrix} 0 & 2l_i \end{bmatrix}^T & \text{si } i = 2, 3, \\ \mathbf{P}_{i-1} + \mathbf{R}_i \begin{bmatrix} 0 & -2l_i \end{bmatrix}^T & \text{si } i = 4, 5. \end{cases} \quad (2.3)$$

donde $\mathbf{O}_0 = [0 \ 0 \ 0]^T$ es el origen del marco fijo. Los valores p_x y p_y representan las coordenadas cartesianas del tobillo de soporte. Los términos l_i representan la longitud media de cada vínculo \mathcal{B}_i para $i = 1, \dots, 7$. El término \mathbf{R}_i es una matriz de rotación de

(3×3) dada por

$$\mathbf{R}_i = \begin{bmatrix} \cos(q_i) & -\text{sen}(q_i) & 0 \\ \text{sen}(q_i) & \cos(q_i) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

De forma similar a la obtención de las coordenadas cartesianas de las articulaciones, es posible definir las coordenadas cartesianas de los centros de masa de cada vínculo de forma recursiva. Siguiendo el diagrama esquemático, las coordenadas cartesianas de los centros de masa para cada vínculo se expresan como

$$\mathbf{Q}_i = \begin{cases} \mathbf{P}_i & \text{si } i = 1, \\ \frac{1}{2} (\mathbf{P}_{i-1} + \mathbf{P}_i) & \text{si } i = 2, \dots, 5, \\ \mathbf{P}_{i-1} & \text{si } i = 6, \\ \mathbf{P}_3 + \mathbf{R}_i \begin{bmatrix} 0 & l_i \end{bmatrix}^T & \text{si } i = 7. \end{cases} \quad (2.4)$$

Observación 2.8. La matriz de rotación \mathbf{R}_i representa una rotación respecto a un eje que es paralelo a \mathbf{z}_0 del marco fijo y que interseca a cada \mathbf{P}_i para $i = 1, \dots, 7$, respectivamente.

Observación 2.9. Tomando en cuenta la hipótesis **HC2**, el ángulo del pie de soporte tiene un valor fijo $q_1 = \frac{\pi}{2}$ durante la fase de soporte simple.

Observación 2.10. Cada centro de masa de los vínculos coincide con el centro geométrico, siendo consistentes con la hipótesis **HR1**.

Al suponer que hay un actuador independiente en cada articulación (hipótesis **HR4**), entonces sobre cada articulación se ejercerá una fuerza rotatoria externa o *torque* que es denotada por τ_i para $i = 1, \dots, 5$. Se cuenta con un torque adicional representado por τ_3^* ejercido en la cadera, debido a que se consideran uniones independientes entre \mathcal{B}_3 , \mathcal{B}_4 y \mathcal{B}_7 , es decir, hay una articulación para la unión entre \mathcal{B}_3 y \mathcal{B}_7 y otra para la unión entre \mathcal{B}_4 y \mathcal{B}_7 . En la Fig. (2.3) se muestra la identificación de los torques definidos.

Cuando el bípido se encuentra en la fase de soporte simple, en el pie de soporte se ejerce una distribución de fuerza que es causada por la reacción del suelo sobre el pie. En la **Sección 2.4** se detalla como ésta distribución de fuerza puede ser sustituida por una fuerza resultante actuando en el centro de presión.

2.3.2. Dinámica Lagrangiana

En este apartado se describe la obtención de un sistema de ecuaciones diferenciales ordinarias que modelan las ecuaciones de movimiento del bípido cuando éste se encuentra en

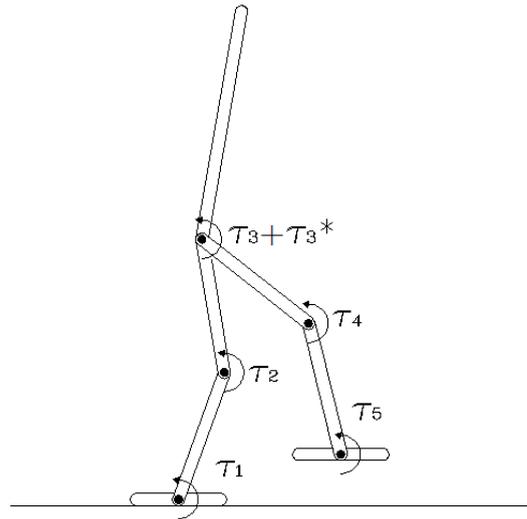


FIGURA 2.3: Definición de los torques ejercidos por los actuadores sobre las articulaciones del robot.

la fase de soporte simple. La obtención del modelo es realizada a través de las ecuaciones de Euler-Lagrange. El formalismo Lagrangiano en mecánica está basado en la observación de que existen principios variacionales detrás de las leyes fundamentales para el balance de fuerzas (segunda Ley de Newton). Se presenta una expresión matricial de las ecuaciones de Euler-Lagrange que permite obtener un cambio de variable que facilita el diseño de controladores para el modelo formulado en esta sección. En el **Apéndice A** se describen algunos resultados que describen la relación entre las ecuaciones de Euler-Lagrange y las ecuaciones de movimiento de algunos sistemas mecánicos, incluidos los sistemas de cuerpos rígidos.

Definición 2.11 (Configuración). Dado un sistema mecánico conformado por n_B vínculos \mathcal{B}_i , la *configuración* del sistema es la especificación de las coordenadas cartesianas de cada punto material de \mathcal{B}_i para $i = 1, \dots, n_B$, respecto a algún marco de referencia.

Definición 2.12 (Coordenadas generalizadas). Un vector \mathbf{q} es un vector de *coordenadas generalizadas* si se puede representar cada configuración de un sistema mecánico usando la menor cantidad de variables posible.

Proposición 2.13. *Un vector de coordenadas generalizadas para el robot bípodo está dado por*

$$\mathbf{q} := (q_2, \dots, q_7). \quad (2.5)$$

Demostración. Supóngase que el bípodo tiene alguna configuración arbitraria $(q_1, \dots, q_7) \in \mathbb{R}^7$. Sea $\mathbf{p} \in \mathbb{R}^3$ la posición de algún punto arbitrario en el bípodo. Por demostrar que \mathbf{p}

puede escribirse sólo en términos de $(q_2, \dots, q_7) =: \mathbf{q}$. Por la construcción de la cadena cinemática, el caso crítico ocurre cuando $\mathbf{p} \in \mathcal{B}_6$ pues es el vínculo con más vínculos intermedios en la cadena cinemática formada entre \mathcal{B}_1 y \mathcal{B}_6 (recuérdese que en \mathcal{B}_1 está el marco fijo $O_0 - x_0y_0z_0$). Entonces \mathbf{p} puede ser escrito como $\mathbf{p} = \mathbf{P}_5 + \delta \begin{bmatrix} -\sin(q_6) & \cos(q_6) \end{bmatrix}^T$ para algún $\delta \in \mathbb{R}$. Dado que \mathbf{P}_5 está escrito en términos de q_2, \dots, q_5 (Ec. (2.3)), entonces las coordenadas q_2, \dots, q_6 son suficientes para representar a \mathbf{p} . Si ahora se supone que $\mathbf{p} \in \mathcal{B}_7$, se tiene que existe $\delta \in \mathbb{R}$ tal que $\mathbf{p} = \mathbf{P}_3 + \delta \begin{bmatrix} -\sin(q_7) & \cos(q_7) \end{bmatrix}^T$. Puesto que \mathbf{P}_3 depende de q_2, q_3 entonces las coordenadas q_2, q_3 y q_7 son suficientes para representar a \mathbf{p} . Tomando en cuenta ambos casos se concluye que las coordenadas (q_2, \dots, q_7) son suficientes para representar la posición de cualesquier punto material del bípodo. \square

Definición 2.14 (Energía potencial). Considerar un sistema de $n_{\mathcal{B}}$ vínculos de masa m_i con centros de masa en \mathbf{Q}_i que es sometido a la acción de un campo gravitatorio. Supóngase que tanto las coordenadas cartesianas de los centro de masa como del campo se expresan respecto a algún marco fijo. Entonces la *energía potencial* se define como la cantidad escalar

$$\mathcal{P} := - \sum_{i=1}^{n_{\mathcal{B}}} m_i \mathbf{g}^T \mathbf{Q}_i, \quad (2.6)$$

donde $\mathbf{g} = (0, -g_y, 0)$ y g_y es la constante gravitatoria. Adicionalmente, supóngase que los vínculos tienen velocidades angulares $\boldsymbol{\omega}_i$. Entonces la *energía cinética* del sistema es la cantidad escalar

$$\mathcal{K} = \mathcal{K}_T + \mathcal{K}_R \quad (2.7)$$

donde $\mathcal{K}_T := \sum_{i=1}^{n_{\mathcal{B}}} \left(\frac{1}{2} m_i \dot{\mathbf{Q}}_i^T \dot{\mathbf{Q}}_i \right)$ representa la energía cinética de traslación y $\mathcal{K}_R = \sum_{i=1}^{n_{\mathcal{B}}} \left(\frac{1}{2} \boldsymbol{\omega}_i^T \mathbf{R}_i \mathbf{J}_i \mathbf{R}_i^T \boldsymbol{\omega}_i \right)$ es la energía cinética de rotación. El término \mathbf{J}_i es el momento de inercia de cada vínculo expresado respecto a un marco fijo en cada \mathbf{Q}_i y \mathbf{R}_i es una matriz de rotación que expresa a \mathbf{J}_i en términos del marco fijo.

Proposición 2.15. Para un robot bípodo que cumple las hipótesis **HR1-HR4** la expresión \mathcal{K}_R adopta la forma simplificada

$$\mathcal{K}_R = \sum_{i=2}^7 \frac{1}{2} j_i^z \dot{q}_i^2, \quad (2.8)$$

donde $j_i^z = \frac{1}{12} m_i (2l_i)^2$ es el momento de inercia del vínculo \mathcal{B}_i respecto al eje de giro.

Demostración. El vínculo \mathcal{B}_i es simétrico respecto a un eje longitudinal que pasa por su centro de masa \mathbf{Q}_i , entonces existe un sistema de referencia principal (**Observación 2.7**)

que permite diagonalizar el tensor de inercia \mathbf{J}_i . Supóngase que \mathbf{J}_i , expresado respecto al sistema de referencia principal está dado por

$$\mathbf{J}_i = \begin{bmatrix} j_i^x & 0 & 0 \\ 0 & j_i^y & 0 \\ 0 & 0 & j_i^z \end{bmatrix}.$$

Entonces, dado que el movimiento del bípido se restringe al plano $x_0 - y_0$ (ver Fig. (2.2)) se tiene que $\boldsymbol{\omega}_i := \dot{\mathbf{q}} = (0, 0, \dot{q}_i)$. Además \mathbf{R}_i es una rotación en el plano $x_0 - y_0$ que puede escribirse como

$$\mathbf{R}_i = \begin{bmatrix} \cos(q_i) & -\text{sen}(q_i) & 0 \\ \text{sen}(q_i) & \cos(q_i) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

esto implica que $\boldsymbol{\omega}_i^T \mathbf{R}_i \mathbf{J}_i \mathbf{R}_i^T \boldsymbol{\omega}_i = j_i^z \dot{q}_i^2$, por lo tanto

$$\mathcal{K}_R = \sum_{i=2}^7 \frac{1}{2} j_i^z \dot{q}_i^2.$$

□

Observación 2.16. En general la energía cinética y la energía potencial son dependientes de las coordenadas generalizadas y de su derivada temporal.

Definición 2.17 (Fuerza generalizada). Dado un sistema mecánico con un vector de coordenadas generalizadas $\mathbf{q} = (q_1, \dots, q_m)$, se define la *fuerza generalizada* asociada a la k -ésima coordenada generalizada como²

$$\mu_k := \sum_{i \in \mathcal{I}} \mathbf{F}_i \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial q_k} + \sum_{j \in \mathcal{J}} \boldsymbol{\tau}_j \frac{\partial \dot{q}_j}{\partial \dot{q}_k}$$

donde \mathbf{F}_i son fuerzas externas actuando de manera puntual en \mathbf{r}_i y $\boldsymbol{\tau}_j$ son torques.

Proposición 2.18. Para el bípido, supóngase que adicionalmente a los torques de los actuadores, una fuerza externa $\mathbf{F}(t)$ es aplicada en \mathbf{Q}_7 . Entonces el vector de fuerzas generalizadas $\boldsymbol{\mu}$ está dado por:

$$\boldsymbol{\mu} = \mathbf{A}\boldsymbol{\tau} + \mathbf{J}_{\mathbf{Q}_7}^T(\mathbf{q})\mathbf{F}(t), \quad (2.9)$$

²Los términos \mathcal{I} y \mathcal{J} son conjuntos de índices no necesariamente iguales.

donde $\boldsymbol{\tau} := (\tau_1, \tau_2, \tau_3, \tau_3^*, \tau_4, \tau_5)$ y $\mathbf{A} \in \text{Mat}_{6 \times 6}(\mathbb{R})$ invertible dada por

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}, \quad (2.10)$$

$\mathbf{J}_{\mathbf{Q}_7}(\mathbf{q}) = \frac{\partial \mathbf{Q}_7}{\partial \mathbf{q}}$ y \mathbf{q} es el vector de coordenadas generalizadas dado por la Ec. (2.5).

Demostración. El término $\mathbf{A}\boldsymbol{\tau}$ representa la suma de torques τ_j para cada \mathcal{B}_i producidos por los actuadores en cada articulación, donde el cambio de signo se debe a la 3a Ley de Newton (acción y reacción). El segundo término representa el efecto de la fuerza $\mathbf{F}(t)$ aplicada en $\mathbf{Q}_7(\mathbf{q})$. Dado que \mathbf{Q}_7 está expresado en términos de un vector de coordenadas generalizadas \mathbf{q} , a través de la definición de fuerza generalizada es posible establecer el efecto de $\mathbf{F}(t)$ sobre las coordenadas generalizadas \mathbf{q} como $\mathbf{J}_{\mathbf{Q}_7}^T \mathbf{F}(t)$, donde $\mathbf{J}_{\mathbf{Q}_7} = \frac{\partial \mathbf{Q}_7}{\partial \mathbf{q}}$. \square

Definición 2.19 (Energía potencial no-conservativa). Sean $\boldsymbol{\mu}$ el vector de fuerzas generalizadas que incluye fuerzas externas y \mathbf{q} un vector de coordenadas generalizadas de un sistema mecánico. Entonces se define la *energía potencial no-conservativa* mediante la expresión

$$\mathcal{V}_{nc} = -\boldsymbol{\mu}^T \mathbf{q}. \quad (2.11)$$

Definición 2.20 (Lagrangiano no-conservativo). Sean \mathcal{P} , \mathcal{K} y \mathcal{V}_{nc} la energía potencial, cinética y potencial no conservativa respecto a un marco fijo de un sistema de cuerpos rígidos. Entonces el *lagrangiano no conservativo* está definido mediante la expresión escalar

$$\mathcal{L}_{nc} = (\mathcal{K} - \mathcal{P}) - \mathcal{V}_{nc} =: \mathcal{L} - \mathcal{V}_{nc}. \quad (2.12)$$

Proposición 2.21. La evolución de \mathbf{q} para el bípido en su fase de soporte simple está sujeta a las ecuaciones de Euler-Lagrange

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\mathbf{q}}^i} \right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \mathbf{q}^i} = \boldsymbol{\mu}_i \quad \text{para } i = 1, \dots, 6, \quad (2.13)$$

donde las expresiones $\boldsymbol{\mu}$ y \mathcal{L} están dadas por la Ecs. (2.9) y (2.12) respectivamente.

Demostración. La prueba se sigue directamente de la **Proposición A.15** que se encuentra en el **Apéndice A**. \square

Proposición 2.22. *Las ecuaciones de Euler-Lagrange para el bípido pueden expresarse en forma matricial como*

$$\mathbf{B}(\mathbf{q}) \ddot{\mathbf{q}} + \mathbf{C}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) \dot{\mathbf{q}} + \mathbf{G}(\mathbf{q}) = \boldsymbol{\mu} \quad (2.14)$$

donde $\mathbf{B}(\mathbf{q})$ es una matriz simétrica definida positiva de tamaño 6×6 . Los vectores \mathbf{C} y \mathbf{G} contienen los efectos centrífugales, Coriolis y gravitacionales presentes en el bípido y están dadas por

$$\mathbf{C}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) = \dot{\mathbf{B}}(\mathbf{q})\dot{\mathbf{q}} - \frac{1}{2} \left(\frac{\partial}{\partial \mathbf{q}} (\dot{\mathbf{q}}^T \mathbf{B}(\mathbf{q}) \dot{\mathbf{q}}) \right)^T, \\ \mathbf{G}(\mathbf{q}) = \frac{\partial U(\mathbf{q})}{\partial \mathbf{q}}^T.$$

Demostración. La prueba se sigue directamente de la **Proposición A.16** que se encuentra en el **Apéndice A**. \square

Observación 2.23. Si se considera la hipótesis **HR3** de la **Sección 2.2** concerniente a la simetría de las piernas del bípido, entonces debe satisfacerse que $l_1 = l_6$, $l_2 = l_5$, $l_3 = l_4$, además $m_1 = m_6$, $m_2 = m_5$ y $m_3 = m_4$. Bajo estas condiciones, las matrices $\mathbf{B}(\mathbf{q})$ y $\mathbf{G}(\mathbf{q})$ para el bípido están dadas por

$$\mathbf{B}(\mathbf{q}) = \begin{bmatrix} \mathbf{B}_{1,1} & \mathbf{B}_{1,2} \\ \mathbf{B}_{2,1} & \mathbf{B}_{2,2} \end{bmatrix}, \\ \mathbf{G}(\mathbf{q}) = \begin{bmatrix} -gl_5 (4m_4 + 3m_5 + 2(m_6 + m_7)) \text{sen}(q_2(t)) \\ -gl_4 (3m_4 + 2(m_5 + m_6 + m_7)) \text{sen}(q_3(t)) \\ gl_4 (m_4 + 2(m_5 + m_6)) \text{sen}(q_4(t)) \\ gl_5 (m_5 + 2m_6) \text{sen}(q_5(t)) \\ 0 \\ -gl_7 m_7 \text{sen}(q_7(t)) \end{bmatrix},$$

donde

$$\mathbf{B}_{1,1} = \begin{bmatrix} \frac{4}{3}l_5^2 (6m_4 + 4m_5 + 3(m_6 + m_7)) & 2l_4l_5 (3m_4 + 2(m_5 + m_6 + m_7)) \cos(q_2(t) - q_3(t)) & -2l_4l_5 (m_4 + 2(m_5 + m_6)) \cos(q_2(t) - q_4(t)) \\ 2l_4l_5 (3m_4 + 2(m_5 + m_6 + m_7)) \cos(q_2(t) - q_3(t)) & \frac{4}{3}l_4^2 (4m_4 + 3(m_5 + m_6 + m_7)) & -2l_4^2 (m_4 + 2(m_5 + m_6)) \cos(q_3(t) - q_4(t)) \\ -2l_4l_5 (m_4 + 2(m_5 + m_6)) \cos(q_2(t) - q_4(t)) & -2l_4^2 (m_4 + 2(m_5 + m_6)) \cos(q_3(t) - q_4(t)) & \frac{4}{3}l_4^2 (m_4 + 3(m_5 + m_6)) \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{B}_{1,2} = \begin{bmatrix} -2l_5^2 (m_5 + 2m_6) \cos(q_2(t) - q_5(t)) & 0 & 2l_5l_7m_7 \cos(q_2(t) - q_7(t)) \\ -2l_4l_5 (m_5 + 2m_6) \cos(q_3(t) - q_5(t)) & 0 & 2l_4l_7m_7 \cos(q_3(t) - q_7(t)) \\ 2l_4l_5 (m_5 + 2m_6) \cos(q_4(t) - q_5(t)) & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{B}_{2,1} = \begin{bmatrix} -2l_5^2(m_5 + 2m_6) \cos(q_2(t) - q_5(t)) & -2l_4l_5(m_5 + 2m_6) \cos(q_3(t) - q_5(t)) & 2l_4l_5(m_5 + 2m_6) \cos(q_4(t) - q_5(t)) \\ 0 & 0 & 0 \\ 2l_5l_7m_7 \cos(q_2(t) - q_7(t)) & 2l_4l_7m_7 \cos(q_3(t) - q_7(t)) & 0 \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{B}_{2,2} = \begin{bmatrix} \frac{4}{3}l_5^2(m_5 + 3m_6) & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{3}l_6^2m_6 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{3}l_7^2(m_6 + 3m_7) \end{bmatrix}.$$

Definición 2.24 (Matriz de inercia). La matriz $\mathbf{B}(\mathbf{q})$ de la Ec. (2.14) se conoce como *matriz de inercia*.

Proposición 2.25. Sean $\mathbf{x} := (\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})$ y $\mathbf{u} := \mathbf{A}\boldsymbol{\tau}$, entonces el modelo del bípido de la Ec. (2.14) puede ser expresado por un sistema de ecuaciones diferenciales de primer orden dado por

$$\frac{d}{dt}\mathbf{x} = \begin{bmatrix} \dot{\mathbf{q}} \\ \mathbf{B}^{-1}(\mathbf{q})(\boldsymbol{\mu} - \mathbf{C}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})\dot{\mathbf{q}} - \mathbf{G}(\mathbf{q})) \end{bmatrix} =: \mathbf{f}(\mathbf{x}) + \mathbf{g}(\mathbf{x})(\mathbf{u} + \boldsymbol{\omega}(t)), \quad (2.15)$$

donde

$$\mathbf{f}(\mathbf{x}) := \begin{bmatrix} \dot{\mathbf{q}} \\ -\mathbf{B}^{-1}(\mathbf{q})(\mathbf{C}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})\dot{\mathbf{q}} + \mathbf{G}(\mathbf{q})) \end{bmatrix}, \quad (2.16)$$

$$\mathbf{g}(\mathbf{x}) := \begin{bmatrix} \mathbf{0}_{6 \times 6} \\ -\mathbf{B}^{-1}(\mathbf{q}) \end{bmatrix}. \quad (2.17)$$

y $\boldsymbol{\omega}(t) := \mathbf{J}_{\mathbf{Q}_7}^T(\mathbf{q})\mathbf{F}(t)$. Este último término es considerado como una perturbación del sistema.

Observación 2.26. Los términos \mathbf{f} y \mathbf{g} de (2.15) son al menos continuamente diferenciables en \mathbb{R}^{12} .

Observación 2.27. El término \mathbf{u} de la **Proposición 2.25** representa la entrada de control del sistema. Es indiferente diseñar controladores en términos de \mathbf{u} o $\boldsymbol{\tau}$ pues la matriz \mathbf{A} que relaciona ambos términos es invertible.

Observación 2.28. Se considera el espacio de estados \mathcal{X} del sistema de la Ec. (2.15) a un subconjunto de

$$\{\mathbf{x} \in \mathbf{R}^{12} \mid \mathbf{q} \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]^6, \|\dot{\mathbf{q}}\| \leq M\}.$$

Sin embargo, no todo punto $\mathbf{x} \in \mathcal{X}$ implica una configuración admisible del robot (i.e. que cada punto material esté sobre la superficie de caminata). Debido a que en la siguiente

sección se introduce un modelo de colisión con el suelo, se supone por simplicidad que es suficiente tomar condiciones iniciales que impliquen una configuración *razonable* para el robot. En la **Sección 3.3** del siguiente capítulo se define con precisión el espacio de estados para el modelo continuo de la Ec. (2.15).

Observación 2.29. Los grados de libertad del bípedo en la fase de soporte simple (tomando en cuenta la hipótesis **HC2**) está determinado por el tamaño del vector de coordenadas generalizadas, por lo que tiene 6 grados de libertad. Al contar con el efecto de 6 entradas independientes entonces el sistema se dice que es *completamente actuado*.

Observación 2.30. Por convención, todos los parámetros que representen magnitudes físicas (e.g. longitudes, masas o fuerzas), se apegan al Sistema Internacional de Unidades.

2.3.3. Modelo de Colisión

En este apartado se presenta el estudio de la colisión causada por contacto del pie de balanceo con el suelo. Para la obtención del modelo de colisión se hacen algunas consideraciones estándar ([10]), las cuales son listadas a continuación:

- HI1)** La colisión resulta del contacto del pie de balanceo con el suelo.
- HI2)** La colisión se lleva a cabo en un periodo de tiempo infinitesimal.
- HI3)** El pie de balanceo hace contacto con el suelo de forma exactamente paralela al suelo.
- HI4)** Al momento de la colisión, el pie de soporte se levanta sin interacción con el suelo.
- HI5)** Las fuerzas externas durante el impacto pueden ser representadas por impulsos.
- HI6)** Los actuadores no pueden generar impulsos.
- HI7)** Debido a las fuerzas impulsivas puede existir un cambio discontinuo en la velocidad del robot, pero no puede haber un cambio discontinuo en la configuración.

Ya que se supone un pie no trivial (o no puntual), el contacto plano del pie de balanceo con el suelo implica la aplicación de una distribución de fuerza del último sobre el primero. Sin embargo, siguiendo las ideas de [35] es posible considerar una sola fuerza resultante y un torque externo, ambos actuando sobre el tobillo del pie de balanceo.

Proposición 2.31 ([28]). *Sea $\mathbf{P}_\theta(\mathbf{q})$ el ángulo del pie de balanceo respecto al marco fijo $O_0 - x_0y_0z_0$ (ver Fig. 2.2). Entonces se pueden incorporar los efectos de las fuerzas externas directamente al modelo de la Ec. (2.14) mediante la expresión*

$$\mathbf{B}(\mathbf{q})\ddot{\mathbf{q}} + \mathbf{C}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})\dot{\mathbf{q}} + \mathbf{G}(\mathbf{q}) = \boldsymbol{\mu} + \mathbf{J}_{P_5}^T \delta \mathbf{F}_{ext} + \mathbf{J}_{P_\theta}^T \delta \boldsymbol{\tau}_{ext} \quad (2.18)$$

donde $\mathbf{J}_{P_5} := \frac{\partial \mathbf{P}_5(\mathbf{q})}{\partial \mathbf{q}}$ es una matriz de (2×6) , $\mathbf{J}_{P_\theta} := \frac{\partial \mathbf{P}_\theta(\mathbf{q})}{\partial \mathbf{q}}$ es un vector de \mathbb{R}^6 , mientras que $\delta \mathbf{F}_{ext}$ y $\delta \boldsymbol{\tau}_{ext}$ son funciones vectoriales de \mathbb{R}^2 y \mathbb{R} que denotan la fuerza resultante y el torque aplicados al tobillo en el aire al momento del contacto con el suelo (en forma de deltas de Dirac).

Observación 2.32. En la expresión de la Ec. (2.18) no se incluye el efecto de la reacción del suelo sobre el pie de soporte, pues en este apartado solamente se consideran fuerzas externas con características impulsivas. Las implicaciones de la reacción en el pie de soporte son estudiadas en la **Sección 2.4**.

Proposición 2.33 ([35]). *Tomando en cuenta la hipótesis **HI2**, si se integra la Ec. (2.18) con respecto al tiempo durante un periodo infinitesimal, se obtiene*

$$\mathbf{B}(\mathbf{q}^+) (\dot{\mathbf{q}}^+ - \dot{\mathbf{q}}^-) = \mathbf{J}_{P_5}^T \mathbf{F}^{ext} + \mathbf{J}_{P_\theta}^T \boldsymbol{\tau}^{ext} \quad (2.19)$$

donde $\mathbf{F}^{ext} := \int_{t^-}^{t^+} \delta \mathbf{F}_{ext}(\tau) d\tau$ y $\boldsymbol{\tau}^{ext} := \int_{t^-}^{t^+} \delta \boldsymbol{\tau}_{ext}(\tau) d\tau$ denotan la integración de las fuerzas impulsivas durante el periodo del impacto, mientras que $\dot{\mathbf{q}}^\pm := \dot{\mathbf{q}}(t^\pm)$, siendo t^- y t^+ los instantes previo y posterior al impacto, que por hipótesis satisfacen $t^+ - t^- \rightarrow 0$.

Observación 2.34. Por la hipótesis **HI7**, la configuración del bípodo no cambia durante la colisión, por lo que $\mathbf{q}^+ := \mathbf{q}(t^-) = \mathbf{q}(t^+)$.

Lo que se pretende determinar a partir de la Ec. (2.19) es el cambio en $\dot{\mathbf{q}}$ después del impacto, sin embargo los términos \mathbf{F}^{ext} y $\boldsymbol{\tau}^{ext}$ también son incógnitas pero a partir de las hipótesis planteadas es posible formular ecuaciones adicionales para determinar $\dot{\mathbf{q}}^+$.

Proposición 2.35. *En el instante posterior al impacto t^+ se satisface*

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{P}}_5(t^+) &:= \mathbf{J}_{P_5} \dot{\mathbf{q}}^+ = \mathbf{0}, \\ \dot{\mathbf{P}}_\theta(t^+) &:= \mathbf{J}_{P_\theta} \dot{\mathbf{q}}^+ = 0. \end{aligned} \quad (2.20)$$

Demostración. En el instante t^+ , el pie de balanceo se convierte en el pie de soporte, luego la hipótesis **HC2** (**Sección 2.2**) implica que la velocidad de traslación y rotación del pie de soporte es nula, por lo tanto $\dot{\mathbf{P}}_5(t^+) = \mathbf{0}$ y $\dot{\mathbf{P}}_\theta(t^+) = 0$ \square

Con las ecuaciones (2.18) y (2.20) es posible plantear un sistema lineal para la solución de las incógnitas $\dot{\mathbf{q}}^+$, \mathbf{F}^{ext} y $\boldsymbol{\tau}^{ext}$ que puede adoptar la siguiente expresión matricial

$$\boldsymbol{\Pi} \begin{bmatrix} \dot{\mathbf{q}}^+ \\ \mathbf{F}^{ext} \\ \boldsymbol{\tau}^{ext} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{B}(\mathbf{q}^+) \dot{\mathbf{q}}^- \\ \mathbf{0}_{3 \times 6} \end{bmatrix}, \quad (2.21)$$

donde

$$\mathbf{\Pi} := \begin{bmatrix} \mathbf{B}(\mathbf{q}^+) & -\mathbf{J}_{P_5}^T & -\mathbf{J}_{P_\theta}^T \\ \mathbf{J}_{P_5} & \mathbf{0}_{2 \times 2} & \mathbf{0}_{2 \times 1} \\ \mathbf{J}_{P_\theta} & \mathbf{0}_{1 \times 2} & \mathbf{0}_{1 \times 1} \end{bmatrix}.$$

Proposición 2.36. *Supóngase que $l_i > 0$ y que $|q_i| < \frac{\pi}{2}$ para $i = 2, \dots, 5$. Supóngase además que existen índices $i, j \in \{2, \dots, 5\}$ tales que $q_i \neq q_j$. Entonces las matrices \mathbf{J}_{P_5} y \mathbf{J}_{P_θ} dadas respectivamente por*

$$\mathbf{J}_{P_5} = \begin{bmatrix} -2l_2 \cos(q_2) & -2l_3 \cos(q_3) & 2l_4 \cos(q_4) & 2l_5 \cos(q_5) & 0 & 0 \\ -2l_2 \sin(q_2) & -2l_3 \sin(q_3) & 2l_4 \sin(q_4) & 2l_5 \sin(q_5) & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{J}_{P_\theta} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix},$$

tienen rango completo.

Demostración. Es claro que \mathbf{J}_{P_θ} es de rango completo. Para ver que \mathbf{J}_{P_5} tiene rango completo es suficiente mostrar que dos de sus columnas son linealmente independientes. Supóngase que $q_i \neq q_j$, entonces las columnas de \mathbf{J}_{P_5} dadas por

$$\begin{bmatrix} \pm 2l_i \cos(q_i) \\ \pm 2l_i \sin(q_i) \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} \pm 2l_j \cos(q_j) \\ \pm 2l_j \sin(q_j) \end{bmatrix}$$

son linealmente independientes. A partir de estas columnas se define la matriz

$$\mathbf{J} := \begin{bmatrix} \pm 2l_i \cos(q_i) & \pm 2l_j \cos(q_j) \\ \pm 2l_i \sin(q_i) & \pm 2l_j \sin(q_j) \end{bmatrix}.$$

Luego, $\det(\mathbf{J}) = \pm 4l_i l_j \sin(q_i - q_j)$. Dado que $q_i \neq q_j$, $|q_i - q_j| \leq |q_i| + |q_j| < \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2} = \pi$ y $l_k > 0$ para cada $k = 2, \dots, 7$. Entonces se satisface que $\det(\mathbf{J}) \neq 0$, por lo que dos columnas de \mathbf{J}_{P_5} son linealmente independientes. Dado que \mathbf{J}_{P_5} tiene dos renglones se concluye que es de rango completo. \square

Observación 2.37. Por simplicidad, en el resto de este capítulo se supone que \mathbf{J}_{P_5} es de rango completo aún y cuando no se establezcan de forma explícita las condiciones sobre las coordenadas q_i de la proposición anterior.

Afirmación 2.38. *Para la definiciones de \mathbf{J}_{P_5} y \mathbf{J}_{P_θ} , en la **Proposición 2.36** se satisface*

$$\mathbf{J}_{P_5} \mathbf{B}^{-1}(\mathbf{q}) \mathbf{J}_{P_\theta}^T = \mathbf{0} \in \text{Mat}_{2 \times 1}(\mathbb{R})$$

Observación 2.39. De la afirmación anterior es claro que

$$\mathbf{J}_{P_\theta} \mathbf{B}^{-1}(\mathbf{q}) \mathbf{J}_{P_5}^T = (\mathbf{J}_{P_5} \mathbf{B}^{-1}(\mathbf{q}) \mathbf{J}_{P_\theta}^T)^T = \mathbf{0} \in \text{Mat}_{1 \times 2}(\mathbb{R}).$$

A continuación se aplica este resultado.

Lema 2.40. *Sea $\mathbf{A} \in \text{Mat}_{m \times n}(\mathbb{R})$ con $m < n$ tal que $\text{rango}(\mathbf{A}) = m$. Si $\mathbf{B} \in \text{Mat}_{n \times n}(\mathbb{R})$ es una matriz simétrica definida positiva, entonces el producto $\mathbf{A}\mathbf{B}\mathbf{A}^T$ es una matriz simétrica definida positiva.*

Demostración. Supóngase que \mathbf{A}, \mathbf{B} son dos matrices que satisfacen las hipótesis enunciadas. La transpuesta del producto $\mathbf{A}\mathbf{B}\mathbf{A}^T$ está dada por

$$(\mathbf{A}\mathbf{B}\mathbf{A}^T)^T = (\mathbf{A}^T)^T \mathbf{B}^T \mathbf{A}^T = \mathbf{A}\mathbf{B}\mathbf{A}^T,$$

lo que implica que $\mathbf{A}\mathbf{B}\mathbf{A}^T$ es simétrica. Ahora, sea $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \setminus \{\mathbf{0}\}$, por demostrar que $\mathbf{x}^T \mathbf{A}\mathbf{B}\mathbf{A}^T \mathbf{x} > 0$. Sea $\mathbf{y} := \mathbf{A}^T \mathbf{x}$. Dado que $\mathbf{x} \neq \mathbf{0}$ y $\dim(\text{Ker}(\mathbf{A}^T)) = m - \text{rango}(\mathbf{A}) = 0$, entonces $\mathbf{y} \neq \mathbf{0}$. Luego, debido a que \mathbf{B} es definida positiva entonces $\mathbf{y}^T \mathbf{B} \mathbf{y} > 0$ (**Lema 2.40**), implicando que $(\mathbf{x}^T \mathbf{A}) \mathbf{B} (\mathbf{A}^T \mathbf{x}) > 0$ para cada $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \setminus \{\mathbf{0}\}$, por lo tanto $\mathbf{A}\mathbf{B}\mathbf{A}^T$ es una matriz definida positiva. \square

Lema 2.41. *La matriz $\mathbf{\Pi}$ es invertible.*

Demostración. Sea $(\dot{\mathbf{q}}, \mathbf{F}^{ext}, \boldsymbol{\tau}^{ext}) \in \text{Ker}(\mathbf{\Pi})$, entonces, $\dot{\mathbf{q}} = \mathbf{B}^{-1}(\mathbf{q}^+) \mathbf{J}_{P_5}^T \mathbf{F}^{ext} + \mathbf{B}^{-1}(\mathbf{q}^+) \mathbf{J}_{P_\theta}^T \boldsymbol{\tau}^{ext}$, $\mathbf{J}_{P_5} \dot{\mathbf{q}} = \mathbf{0}$ y $\mathbf{J}_{P_\theta} \dot{\mathbf{q}} = 0$. Esto implica que

$$\mathbf{J}_{P_5} \mathbf{B}^{-1}(\mathbf{q}^+) \mathbf{J}_{P_5}^T \mathbf{F}^{ext} + \mathbf{J}_{P_5} \mathbf{B}^{-1}(\mathbf{q}^+) \mathbf{J}_{P_\theta}^T \boldsymbol{\tau}^{ext} = \mathbf{0},$$

y

$$\mathbf{J}_{P_\theta} \mathbf{B}^{-1}(\mathbf{q}^+) \mathbf{J}_{P_5}^T \mathbf{F}^{ext} + \mathbf{J}_{P_\theta} \mathbf{B}^{-1}(\mathbf{q}^+) \mathbf{J}_{P_\theta}^T \boldsymbol{\tau}^{ext} = \mathbf{0}.$$

Sin embargo, $\mathbf{J}_{P_5} \mathbf{B}^{-1}(\mathbf{q}^+) \mathbf{J}_{P_\theta}^T = \mathbf{0} \in \text{Mat}_{2 \times 1}(\mathbb{R})$ (**Afirmación 2.38**) y $(\mathbf{J}_{P_\theta} \mathbf{B}^{-1}(\mathbf{q}^+) \mathbf{J}_{P_5}^T)^T = \mathbf{0} \in \text{Mat}_{1 \times 2}(\mathbb{R})$ (*Observación 2.39*) lo que simplifica las expresiones anteriores a

$$\mathbf{J}_{P_5} \mathbf{B}^{-1}(\mathbf{q}^+) \mathbf{J}_{P_5}^T \mathbf{F}^{ext} = \mathbf{0},$$

$$\mathbf{J}_{P_\theta} \mathbf{B}^{-1}(\mathbf{q}^+) \mathbf{J}_{P_\theta}^T \boldsymbol{\tau}^{ext} = \mathbf{0}.$$

Luego, debido a que $\mathbf{B}(\mathbf{q}^+)$ es definida positiva y \mathbf{J}_{P_5} ; junto con \mathbf{J}_{P_θ} ; son de rango completo, se tiene que $\mathbf{J}_{P_5} \mathbf{B}^{-1}(\mathbf{q}^+) \mathbf{J}_{P_5}^T$ y $\mathbf{J}_{P_\theta} \mathbf{B}^{-1}(\mathbf{q}^+) \mathbf{J}_{P_\theta}^T$ son definidas positivas con lo que $\mathbf{F}^{ext} = \mathbf{0}_{2 \times 1}$ y $\boldsymbol{\tau}^{ext} = \mathbf{0}$. Esto a su vez implica que $\dot{\mathbf{q}} = \mathbf{0}_{6 \times 1}$, por tanto $\{\mathbf{0}_{9 \times 1}\} = \text{Ker}(\mathbf{\Pi})$. \square

Proposición 2.42. *El sistema lineal de la Ec. (2.21) tiene solución única.*

Demostración. El resultado es directo considerando el **Lema 2.41**. \square

La solución del sistema de la Ec. (2.21) da una expresión para $\dot{\mathbf{q}}^+$ en términos de $\dot{\mathbf{q}}^-$. Este resultado, junto con el hecho de que $\mathbf{q}^+ = \mathbf{q}^-$, permiten determinar la condición de “re-inicio” del sistema continuo de la Ec. (2.15).

Proposición 2.43. *La solución del sistema lineal (2.21) está dada por*

$$\begin{aligned}\mathbf{F}^{ext} &= -\mathbf{M}_1^{-1} \mathbf{J}_{P_5} \dot{\mathbf{q}}^-, \\ \boldsymbol{\tau}^{ext} &= -\mathbf{M}_2^{-1} \mathbf{J}_{P_\theta} \dot{\mathbf{q}}^-, \\ \dot{\mathbf{q}}^+ &= (-\mathbf{B}^{-1}(\mathbf{q}^+) \mathbf{J}_{P_5}^T \mathbf{M}_1^{-1} \mathbf{J}_{P_5} - \mathbf{B}^{-1}(\mathbf{q}^+) \mathbf{J}_{P_\theta}^T \mathbf{M}_2^{-1} \mathbf{J}_{P_\theta} + \mathbf{I}_{6 \times 6}) \dot{\mathbf{q}}^- =: \boldsymbol{\Delta}_2 \dot{\mathbf{q}}^-, \quad (2.22)\end{aligned}$$

donde $\mathbf{M}_1 := \mathbf{J}_{P_5} \mathbf{B}^{-1}(\mathbf{q}^+) \mathbf{J}_{P_5}^T$ y $\mathbf{M}_2 := \mathbf{J}_{P_\theta} \mathbf{B}^{-1}(\mathbf{q}^+) \mathbf{J}_{P_\theta}^T$.

Antes de probar la Proposición anterior, se prueba que las matrices \mathbf{M}_1 y \mathbf{M}_2 son efectivamente invertibles.

Proposición 2.44. *Las matrices \mathbf{M}_1 y \mathbf{M}_2 , definidas en la Proposición 2.43 son invertibles.*

Demostración. La prueba se sigue directamente del hecho de que $\mathbf{B}(\mathbf{q})$ es una matriz simétrica definida positiva para cada $\mathbf{q} \in \mathbb{R}^6$ así como de la Proposición 2.36 y del **Lema 2.40**. \square

Se presenta ahora la prueba de la Proposición 2.43.

Demostración. Por simplicidad considérese $\mathbf{q} := \mathbf{q}^+$. Si se despeja $\dot{\mathbf{q}}^+$ de la Ec. (2.19) se tiene que

$$\dot{\mathbf{q}}^+ = \mathbf{B}^{-1}(\mathbf{q})(\mathbf{J}_{P_5}^T \mathbf{F}^{ext} + \mathbf{J}_{P_\theta}^T \boldsymbol{\tau}^{ext}) + \dot{\mathbf{q}}^-. \quad (2.23)$$

Pre-multiplicando la expresión anterior por \mathbf{J}_{P_5} y por \mathbf{J}_{P_θ} se obtiene que

$$\begin{aligned}\mathbf{J}_{P_5} \dot{\mathbf{q}}^+ &= \mathbf{J}_{P_5} \mathbf{B}^{-1}(\mathbf{q})(\mathbf{J}_{P_5}^T \mathbf{F}^{ext} + \mathbf{J}_{P_\theta}^T \boldsymbol{\tau}^{ext}) + \mathbf{J}_{P_5} \dot{\mathbf{q}}^-, \\ \mathbf{J}_{P_\theta} \dot{\mathbf{q}}^+ &= \mathbf{J}_{P_\theta} \mathbf{B}^{-1}(\mathbf{q})(\mathbf{J}_{P_5}^T \mathbf{F}^{ext} + \mathbf{J}_{P_\theta}^T \boldsymbol{\tau}^{ext}) + \mathbf{J}_{P_\theta} \dot{\mathbf{q}}^-, \end{aligned}$$

respectivamente. A través de la Ec. (2.20), de la **Afirmación 2.38** y la **Observación 2.39**, estas últimas dos expresiones se reducen a

$$\begin{aligned} 0 &= \mathbf{J}_{P_5} \mathbf{B}^{-1}(\mathbf{q}) \left(\mathbf{J}_{P_5}^T \mathbf{F}^{ext} \right) + \mathbf{J}_{P_5} \dot{\mathbf{q}}^- = \mathbf{M}_1 \mathbf{F}^{ext} + \mathbf{J}_{P_5} \dot{\mathbf{q}}^-, \\ 0 &= \mathbf{J}_{P_\theta} \mathbf{B}^{-1}(\mathbf{q}) \left(\mathbf{J}_{P_\theta}^T \boldsymbol{\tau}^{ext} \right) + \mathbf{J}_{P_\theta} \dot{\mathbf{q}}^- = \mathbf{M}_2 \boldsymbol{\tau}^{ext} + \mathbf{J}_{P_\theta} \dot{\mathbf{q}}^-, \end{aligned}$$

lo que implica que

$$\begin{aligned} \mathbf{F}^{ext} &= -\mathbf{M}_1^{-1} \mathbf{J}_{P_5} \dot{\mathbf{q}}^- \\ \boldsymbol{\tau}^{ext} &= -\mathbf{M}_2^{-1} \mathbf{J}_{P_\theta} \dot{\mathbf{q}}^-. \end{aligned}$$

Sustituyendo estas expresiones en (2.23) se obtiene

$$\dot{\mathbf{q}}^+ = \left(-\mathbf{B}^{-1}(\mathbf{q}) \mathbf{J}_{P_5}^T \mathbf{M}_1^{-1} \mathbf{J}_{P_5} - \mathbf{B}^{-1}(\mathbf{q}) \mathbf{J}_{P_\theta}^T \mathbf{M}_2^{-1} \mathbf{J}_{P_\theta} + \mathbf{I}_{6 \times 6} \right) \dot{\mathbf{q}}^- = \boldsymbol{\Delta}_2 \dot{\mathbf{q}}^-$$

□

Proposición 2.45. Sea $\mathbf{x}^- := (\mathbf{q}^-, \dot{\mathbf{q}}^-)$ el estado del bípido en el instante anterior al impacto. Denótese por $\mathbf{P} \in M_{5 \times 5}(\mathbb{R})$ una matriz que actúa sobre \mathbf{q} y $\dot{\mathbf{q}}$ y que satisface $\mathbf{P}\mathbf{P} = \mathbf{I}_{5 \times 5}$. Entonces el estado del bípido en el instante posterior al impacto, definido por $\mathbf{x}^+ := (\mathbf{q}^+, \dot{\mathbf{q}}^+)$, queda escrito en términos de $\mathbf{x}^- := (\mathbf{q}^-, \dot{\mathbf{q}}^-)$ a través de la Ec. (2.22) como

$$\mathbf{x}^+ = \begin{bmatrix} [\mathbf{P} \mathbf{0}_{5 \times 1}] \mathbf{q}^- \\ [\mathbf{P} \mathbf{0}_{5 \times 4}] \boldsymbol{\Delta}_2 \dot{\mathbf{q}}^- \end{bmatrix} =: \boldsymbol{\Delta}(\mathbf{x}^-). \quad (2.24)$$

Observación 2.46. La aplicación de \mathbf{P} sobre \mathbf{q} y $\dot{\mathbf{q}}$ representa la transformación de la pierna de balanceo en la pierna de soporte y viceversa en el instante posterior al impacto. Sin embargo, por la simetría del bípido (hipótesis **HR3**) se satisface que $\mathbf{P}\mathbf{P} = \mathbf{I}_{5 \times 5}$. Además tiene tamaño (5×5) pues sólo actúa en las variables q_2, \dots, q_6 , pues la variable de posición y velocidad del torso es la misma independientemente de la disposición de las piernas.

Observación 2.47. No se dará la expresión explícita de $\boldsymbol{\Delta}$ pues su cálculo es directo. Sin embargo el Teorema de la Función Implícita implica que ésta función es tan suave como las entradas de $\boldsymbol{\Pi}$ en la Ec. (2.21), con lo que se puede concluir que es analítica en \mathbf{x}^- .

2.3.4. Modelo Híbrido

En esta sección se describe una forma de representar el modelo completo del bípido tomando en cuenta la parte continua representada por la Ec. (2.15) así como la parte

discreta dada por la Ec. (2.24). Por la naturaleza de la aplicación Δ , el sistema híbrido puede ser descrito mediante un sistema con efectos impulsivos [36]. En seguida se presentan algunos conceptos básicos presentes en [35] para el estudio de sistemas con efectos impulsivos.

2.3.4.1. Preliminares de Sistemas con Efectos Impulsivos

Definición 2.48 (Sistema híbrido). Un *sistema invariante en el tiempo con efectos impulsivos* (sistema híbrido) consiste de tres elementos: una ecuación diferencial ordinaria invariante en el tiempo que se denota por $\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{f}(\mathbf{x})$, definida en algún espacio de estados \mathcal{X} ; una hiper-superficie \mathcal{S} en la cual las soluciones de la ecuación diferencial tienen una transición discreta que es modelada como un *re-inicio* instantáneo de la ecuación diferencial; y una regla $\Delta : \mathcal{S} \rightarrow \mathcal{X}$ que especifica la nueva condición inicial como una función del punto en el cual la solución “impacta” a \mathcal{S} . Dicho sistema se puede representar mediante

$$\Sigma : \begin{cases} \dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{f}(\mathbf{x}(t)) & \text{si } \mathbf{x}^-(t) \notin \mathcal{S} \\ \mathbf{x}^+(t) = \Delta(\mathbf{x}^-(t)) & \text{si } \mathbf{x}^-(t) \in \mathcal{S}, \end{cases} \quad (2.25)$$

donde \mathcal{S} es la *superficie de impacto* y Δ es el *aplicación de impacto*.

A continuación es desarrollada una definición formal de la solución φ del sistema Σ de la Ec. (2.25) en términos de la solución φ^f de la ecuación diferencial ordinaria asociada

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x}). \quad (2.26)$$

Lo anterior es debido a que se conocen diversas propiedades sobre la solución φ cuando \mathbf{f} es continua o continuamente diferenciable.

Se lista ahora un conjunto de hipótesis para el sistema de la Ec. (2.25):

SH1) $\mathcal{X} \subset \mathbb{R}^n$ abierto y simplemente conexo.

SH2) $\mathbf{f} : \mathcal{X} \rightarrow T\mathcal{X}$ es continua y la solución de $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x})$ para alguna condición inicial dada es única y tiene dependencia continua respecto a condiciones iniciales.

SH3) \mathcal{S} es un conjunto no vacío y existe una función diferenciable $H : \mathcal{X} \rightarrow \mathbb{R}$ tal que

$$\mathcal{S} := \{\mathbf{x} \in \mathcal{X} | H(\mathbf{x}) = 0\}, \quad (2.27)$$

, además para cada $s \in \mathcal{S}$, $\frac{\partial H}{\partial \mathbf{x}}(s) \neq \mathbf{0}$,

SH4) $\Delta : \mathcal{S} \rightarrow \mathcal{X}$ es continua.

SH5) $\overline{\Delta(\mathcal{S})} \cap \mathcal{S} = \emptyset$, donde $\overline{\Delta(\mathcal{S})}$ denota la clausura de $\Delta(\mathcal{S})$.

Observación 2.49. La continuidad del campo vectorial descrito en **SH2** implica que para algún $\mathbf{x}_0 \in \mathcal{X}$ existe una solución del sistema (2.26) sobre un intervalo suficientemente pequeño de tiempo [5]. Ya que la solución puede no ser única ni tener dependencia continua respecto a condiciones iniciales, dichas condiciones se especifican en la segunda parte de la hipótesis **SH2**. La hipótesis **SH4** garantiza que el resultado del impacto varía de forma continua respecto a donde ocurre en \mathcal{S} . La hipótesis **SH5** asegura que el resultado del impacto no lleva inmediatamente a otro evento de impacto ya que cada punto en $\Delta(\mathcal{S})$ está a una distancia positiva de \mathcal{S} .

Definición 2.50 (Solución de un sistema híbrido). Una función $\varphi : [t_0, t_f[\rightarrow \mathcal{X}$, $t_f \in \mathbb{R} \cup \infty$, $t_f > t_0$, es *solución* del sistema de la Ec. (2.25) si:

- $\varphi(t)$ es continua por la derecha en $[t_0, t_f[$,
- los límites izquierdo y derecho existen para cada $t \in]t_0, t_f[$ y éstos se denotan como $\varphi^-(t) := \lim_{\tau \nearrow t} \varphi(\tau)$ y $\varphi^+(t) := \lim_{\tau \searrow t} \varphi(\tau)$ respectivamente; y
- existe un conjunto cerrado y discreto $\mathcal{T} \subset [t_0, t_f[$ llamado *tiempos de impacto*, tal que satisface:
 - para cada $t \notin \mathcal{T}$, $\varphi(t)$ es diferenciable, $\varphi'(t) = \mathbf{f}(\varphi(t))$, y $\varphi(t) \notin \mathcal{S}$ y
 - para $t \in \mathcal{T}$, $\varphi^-(t) \in \mathcal{S}$ y $\varphi^+(t) = \Delta(\varphi^-(t))$.

La diferencia entre continuidad por la izquierda o por la derecha se muestra en la Fig. (2.4).

Observación 2.51. La condición de que el conjunto de tiempos de impacto sea cerrado y discreto implica que no existe “castaño” (o “chattering”) respecto a un punto de impacto, lo que simplifica la construcción de soluciones. Más adelante se presenta un ejemplo de un sistema híbrido donde la construcción de la solución ilustra las dificultades cuando se presenta el efecto de “castaño”.

Definición 2.52 (Solución periódica). Una solución $\varphi : [t_0, \infty[\rightarrow \mathcal{X}$ del sistema (2.25) es *periódica* si existe $T > 0$ finito tal que $\varphi(t + T) = \varphi(t)$ para todo $t \in [t_0, \infty[$.

Definición 2.53 (Órbita periódica). Un conjunto $\mathcal{O} \subset \mathcal{X}$ es una *órbita periódica* de (2.25) si $\mathcal{O} = \{\varphi(t) | t \geq t_0\}$ para alguna solución periódica $\varphi(t)$. Una órbita es *no-trivial* si contiene más de un punto.

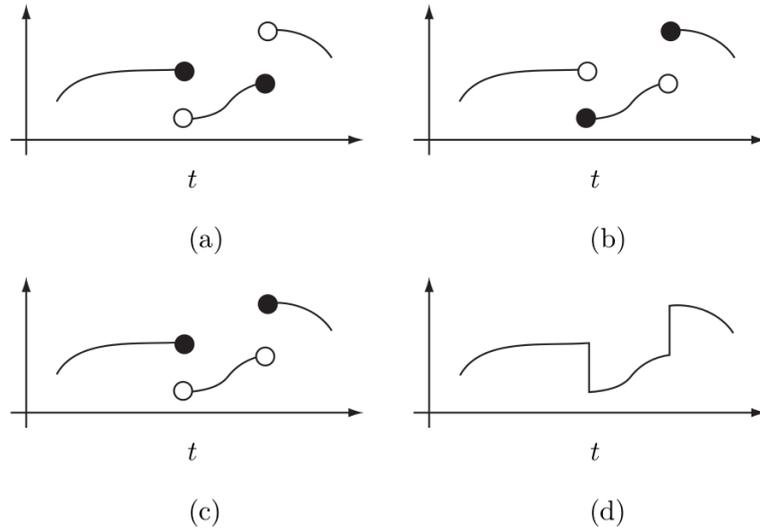


FIGURA 2.4: Continuidad izquierda y derecha. En (a), la función es continua por la izquierda, en (b), la función es continua por la derecha y en (c) la función no es continua por la izquierda ni por la derecha. La gráfica en (d) no corresponde a la gráfica de una función por que toma múltiples valores en los saltos. A pesar de ello, algunas gráficas de simulación que aparecen en los capítulos siguientes se mostrarán como en (d), sin embargo debe entenderse que la solución está siendo tomada como en (b) [35].

Definición 2.54 (Estabilidad de órbitas periódicas). Una órbita periódica \mathcal{O} es *estable en el sentido de Liapunov* si para cada $\epsilon > 0$, existe una vecindad abierta \mathcal{V} de \mathcal{O} tal que para cada $\mathbf{p} \in \mathcal{V}$, existe una solución $\varphi : [t_0, \infty[\rightarrow \mathcal{X}$ del sistema (2.25) tal que $\varphi(t_0) = \mathbf{p}$, $d(\varphi(t), \mathcal{O}) < \epsilon$ para todo $t \geq t_0$.

Definición 2.55 (Órbita atractiva). Una órbita \mathcal{O} es *atractiva* si existe una vecindad abierta \mathcal{V} de \mathcal{O} tal que para cada $\mathbf{p} \in \mathcal{V}$, existe una solución $\varphi : [t_0, \infty[\rightarrow \mathcal{X}$ de (2.25) que satisface $\varphi(t_0) = \mathbf{p}$ y $\lim_{t \rightarrow \infty} d(\varphi(t), \mathcal{O}) = 0$

Definición 2.56 (Órbita asintóticamente estable). Una órbita \mathcal{O} es *asintóticamente estable en el sentido de Liapunov* si es atractiva y estable de forma simultánea.

Ejemplo 2.1. Modelo de una pelota que rebota. Supóngase que una pelota se deja caer al suelo desde alguna altura inicial, entonces la pelota comienza a rebotar con el suelo disipando su energía en cada rebote. Si se denota por $h(t)$ la altura de la pelota y se define un vector de estados $\mathbf{x} := (h(t), \dot{h}(t))$, entonces un modelo simplificado del fenómeno anterior está dado por el modelo híbrido siguiente

$$\Sigma : \begin{cases} \dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{f}(\mathbf{x}(t)) & \text{si } \mathbf{x}^-(t) \notin \mathcal{S}, \\ \mathbf{x}^+(t) = \Delta(\mathbf{x}^-(t)) & \text{si } \mathbf{x}^-(t) \in \mathcal{S}, \end{cases}$$

donde

$$\mathbf{f}(\mathbf{x}) = \begin{bmatrix} \dot{h}(t) \\ -g \end{bmatrix},$$

$$\mathcal{S} = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^2 : h(t) = 0\},$$

$$\Delta(\mathbf{x}) = \begin{bmatrix} h(t) \\ -\epsilon \dot{h}(t) \end{bmatrix}.$$

La constante $g = 9.81$ representa la aceleración de la gravedad y $\epsilon \in]0, 1[$ representa una magnitud física conocida como coeficiente de restitución. La parte continua del modelo híbrido describe el movimiento de la pelota cuando está en el aire. La superficie de impacto \mathcal{S} representa al suelo pues $\mathbf{x} \in \mathcal{S}$ si y sólo si la pelota está en contacto con el suelo. De la definición de la aplicación de impacto Δ puede observarse que durante la colisión la pelota se mantiene en contacto con el suelo, sin embargo presenta una fase discontinua en su velocidad. Veamos ahora que las soluciones del sistema anterior convergen al origen en tiempo finito. Supóngase que $\mathbf{x}(t_0) = (c_1, c_2)$, entonces el flujo de la parte continua $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x})$ está dado por

$$\varphi^f(t, \mathbf{x}(t_0)) = \begin{bmatrix} -\frac{1}{2}g(t - t_0)^2 + c_1(t - t_0) + c_2 \\ -g(t - t_0) + c_1 \end{bmatrix}.$$

Si se toma la condición inicial $\mathbf{x}(0) = (h_0, 0)$ en el sistema híbrido, entonces la pelota realiza su primer colisión con el suelo en $t_1 = \frac{\sqrt{2gh_0}}{g}$ con una velocidad de pre-impacto $v_1^- = -\sqrt{2gh_0}$. Si Δ es aplicado sobre $(0, v_1^-)$ se obtiene el estado posterior a la primera colisión como $\mathbf{x}^+ = (0, \epsilon\sqrt{2gh_0})$. Si se usa este valor como nueva condición inicial en el flujo φ^f , se obtiene que el instante del segundo impacto es $t_2 := t_1 + 2\epsilon\frac{\sqrt{2gh_0}}{g}$. Por inducción es posible obtener que la duración de la fase de caída libre entre el k y el $k + 1$ -ésimo impacto es

$$dt_k = 2\epsilon^{k-1} \frac{\sqrt{2gh_0}}{g} \quad (k = 1, 2, 3, \dots). \quad (2.28)$$

Además, la velocidad de la bola después del k -ésimo rebote es de $v_k^+ = \epsilon^k \sqrt{2gh_0}$, lo que permite establecer que $\lim_{k \rightarrow \infty} v_k^+ = 0$. Lo anterior implica que la bola deja de rebotar después de infinitos rebotes, sin embargo a partir de (2.28), estos rebotes se realizan en un tiempo finito \mathcal{T}_∞ dado en ([6]) por

$$\mathcal{T}_\infty := \sum_{k=0}^{\infty} dt_k = t_1 + t_2 \sum_{k=1}^{\infty} \epsilon^{k-1} = \frac{1 + \epsilon\sqrt{2gh_0}}{1 - \epsilon} \frac{1}{g} < +\infty.$$

Por lo anterior se concluye que las soluciones del modelo híbrido convergen en tiempo finito a $(0, 0)$.

2.3.4.2. Modelo del Bípido como un Sistema Híbrido

Proposición 2.57. *La solución $\mathbf{x}(t)$ del modelo del bípido descrito por las Ecs. (2.15) y (2.24), corresponde con la solución del sistema con efectos impulsivos*

$$\Sigma : \begin{cases} \dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{f}(\mathbf{x}) + \mathbf{g}(\mathbf{x})(\mathbf{u} + \boldsymbol{\omega}(t)) & \text{si } \mathbf{x}^-(t) \notin \mathcal{S} \\ \mathbf{x}^+(t) = \boldsymbol{\Delta}(\mathbf{x}^-(t)) & \text{si } \mathbf{x}^-(t) \in \mathcal{S}. \end{cases} \quad (2.29)$$

donde $\mathbf{x}^-(t) := \lim_{\tau \nearrow t} \mathbf{x}(\tau)$ y $\mathbf{x}^+(t) := \lim_{\tau \searrow t} \mathbf{x}(\tau)$ son los límites izquierdo y derecho de la solución $\mathbf{x}(t)$ respectivamente, $\boldsymbol{\Delta}$ está dado por la Ec. (2.24), la hiper-superficie \mathcal{S} está dada por

$$\mathcal{S} = \{\mathbf{x} \in \mathcal{X} \mid H(\mathbf{x}) := \mathbf{P}_5^y(\mathbf{x}) = 0\}, \quad (2.30)$$

donde $\mathbf{P}_5^{(y)}$ es la altura del pie de balanceo.

En términos coloquiales, las trayectorias solución del modelo híbrido están especificadas por la dinámica de soporte simple hasta el impacto, que ocurre cuando el estado alcanza al conjunto \mathcal{S} . Esto último representa (físicamente) la colisión entre el pie de balanceo con la superficie de caminata.

Observación 2.58. Para evitar que el estado \mathbf{x} tome dos valores al “momento” del impacto, el evento de colisión puede ser descrito en términos de los valores de estado en los instantes “previo” y “posterior” al impacto, que son representados por los límites $\mathbf{x}^-(t)$ y $\mathbf{x}^+(t)$ respectivamente.

Observación 2.59. La verificación de las hipótesis **SH1**, **SH2**, **SH5** para el sistema (2.29) se hace una vez que sea diseñada la variable de control \mathbf{u} . Sin embargo, dado de $H(\mathbf{x}) := \mathbf{P}_5^y = p^y + 2\cos(q_2)l_2 + 2\cos(q_3)l_3 - 2\cos(q_4)l_4 - 2\cos(q_5)l_5$, es claro que la hipótesis **SH3** es satisfecha. Por otro lado, debido a que $\boldsymbol{\Delta}$ es analítica (*Observación 2.47*), por lo que la hipótesis **SH4** también es satisfecha.

Observación 2.60. En el sistema (2.29) realmente se presentan dos modelos híbridos diferentes, uno correspondiente al sistema $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x}) + \mathbf{g}(\mathbf{x})(\mathbf{u} + \boldsymbol{\omega}(t))$ con la aplicación $\boldsymbol{\Delta}$ de la **Proposición 2.45** y la hiper-superficie \mathcal{S} de la Ec. (2.30). El otro sistema es esencialmente el mismo, pero para una variable de estado $\mathbf{x}_2 := \mathbf{P}_M \mathbf{x}$, siendo \mathbf{P}_M una matriz de permutación de tamaño (12×12) tal que $\mathbf{P}_M \mathbf{P}_M = \mathbf{I}_{12 \times 12}$, de tal forma que los elementos del segundo sistema híbrido están dados por el sistema de ecuaciones diferenciales $\dot{\mathbf{x}}_2 = \mathbf{P}_M(\mathbf{f}(\mathbf{x}_2) + \mathbf{g}(\mathbf{x}_2)(\mathbf{u}_2 + \boldsymbol{\omega}(t)))$, una aplicación $\boldsymbol{\Delta}_2(\mathbf{x}_2) := \mathbf{P}_M \boldsymbol{\Delta}(\mathbf{x}_2)$ y una hiper-superficie $\mathcal{S}_2 = \{\mathbf{x}_2 \in \mathbb{R}^{12} : H_2(\mathbf{x}_2) = 0\}$ con una función $\mathbf{H}_2 : \mathbb{R}^{12} \rightarrow \mathbb{R}$ definida por $\mathbf{x}_2 \mapsto \mathbf{P}_5^y(\mathbf{x}_2)$. Lo anterior modela la transición de pierna de balanceo a pierna de soporte y viceversa. Dado que el modelo completo del bípido debe contemplar

ambas fases, en el **Capítulo 4** se dan algunos conceptos básicos para comprender las soluciones de este tipo de sistemas, que es esencialmente un sistema híbrido pero con dos fases.

2.4. Restricciones Dinámicas

En esta sección se estudia la existencia del centro de presión para el bípodo. Además se propone una restricción dinámica para el modelo (2.15) en términos del centro de presión.

Proposición 2.61. *Los vínculos que conforman el bípodo tienen superficie no-trivial.*

Proposición 2.62. *Sea $\mathbf{S}_{B_1} = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 : x_1 \in [-l_1, l_1], x_2 = x_3 = 0\}$ la superficie de contacto del pie de soporte con el suelo. Entonces la distribución de fuerza que el suelo ejerce sobre el pie puede ser escrita como*

$$\mathbf{R}_S := \int_{-l_1}^{l_1} \boldsymbol{\rho}_S(t, (x, 0, 0)) dx, \quad (2.31)$$

donde $\boldsymbol{\rho}_S : \mathbb{R}^+ \times \mathbf{S}_{B_1} \rightarrow \mathbb{R}^3$ es la distribución de fuerza en el tiempo $t \in \mathbb{R}^+$ que ejerce el suelo sobre \mathbf{S}_{B_1} .

Se estudia ahora el efecto rotatorio que la fuerza resultante tiene sobre el tobillo de soporte.

Proposición 2.63. *El momento resultante que ejerce $\boldsymbol{\rho}_S$ sobre el tobillo de soporte con coordenada cartesiana \mathbf{P}_1 puede expresarse por*

$$\mathbf{M}_S := \int_{\mathbf{S}_{B_0}} (\mathbf{p} - \mathbf{P}_1) \times \boldsymbol{\rho}_S(t, \mathbf{p}) dS, \quad (2.32)$$

donde \mathbf{S}_{B_0} es la superficie de contacto entre el pie de soporte y el suelo.

Definición 2.64 (Centro de presión [34]). Sea \mathcal{B} un cuerpo rígido en \mathbb{R}^3 con superficie $S_{\mathcal{B}}$, se denota por $\mathbf{o} \in \mathbb{R}^3$ un punto de \mathcal{B} y $\boldsymbol{\rho} : \mathbb{R}^+ \times S_{\mathcal{B}} \rightarrow \mathbb{R}^3$ dada por $(t, \mathbf{p}) \mapsto \boldsymbol{\rho}(t, \mathbf{p})$ una distribución de fuerza que actúa sobre cada punto \mathbf{p} de $S_{\mathcal{B}}$ en el tiempo t . Si existe un punto $\mathbf{CoP} \in \mathbb{R}^+ \times S_{\mathcal{B}}$ tal que:

$$(\mathbf{CoP} - \mathbf{o}) \times \int_{S_{\mathcal{B}}} \boldsymbol{\rho}(t, \mathbf{p}) dS = \int_{S_{\mathcal{B}}} (\mathbf{p} - \mathbf{o}) \times \boldsymbol{\rho}(t, \mathbf{p}) dS$$

entonces \mathbf{CoP} es el *centro de presión* de $\boldsymbol{\rho}$.

Observación 2.65. El término $\int_{S_{\mathcal{B}}} (\mathbf{p} - \mathbf{o}) \times \boldsymbol{\rho}(t, \mathbf{p}) dS$ es el momento resultante de la fuerza $\boldsymbol{\rho}$ respecto al punto \mathbf{o} y $\int_{S_{\mathcal{B}}} \boldsymbol{\rho}(t, \mathbf{p}) dS$ es la fuerza total resultante que ejerce $\boldsymbol{\rho}$ en $S_{\mathcal{B}}$.

Proposición 2.66. *Para la superficie de contacto del pie de soporte $S_{\mathcal{B}_1}$ y la distribución de fuerza $\boldsymbol{\rho}_S$, el centro de presión existe y sólo su componente x es no nula.*

Demostración. Sea $\boldsymbol{\nu} := (\nu_1, \nu_2, 0) \in \mathcal{B}_1$ y supóngase que \mathbf{R}_S en (2.31) y que \mathbf{M}_S en (2.32) están definidas por componentes como $t \mapsto (M^{(x)}, M^{(y)}, M^{(z)})$ y $t \mapsto (r^{(x)}, r^{(y)}, 0)$ respectivamente. Entonces

$$(\boldsymbol{\nu} - \mathbf{P}_1) \times \mathbf{R}_S = \mathbf{M}_S$$

si y sólo si $(0, 0, \nu_1 r^{(y)} - \nu_2 r^{(x)}) = (M^{(x)}, M^{(y)}, M^{(z)})$. Ésto implica que $M^{(x)} = M^{(y)} = 0$. Dado que el contacto siempre se realiza a nivel del suelo, entonces $\nu_2 \equiv 0$ y como la reacción vertical que ejerce el suelo es una fuerza de empuje, entonces $r^{(y)} > 0$. Si se define el vector

$$\boldsymbol{\nu} := \left(\frac{M^{(z)}}{r^{(y)}}, 0, 0 \right),$$

bajo la restricción $\frac{M^{(z)}}{r^{(y)}} \in [-l_1, l_1]$, se concluye que $\boldsymbol{\nu}$ es el centro de presión. \square

Proposición 2.67. *La sumatoria de fuerzas para el bípodo satisface la siguiente expresión*

$$\sum_{i=1}^7 \mathbf{w}_i + \mathbf{R}_S = \frac{d}{dt} \sum_{i=1}^7 \mathbf{L}_i \quad (2.33)$$

donde \mathbf{w}_i y \mathbf{L}_i son los pesos y las cantidades de movimiento lineal para cada \mathcal{B}_i respectivamente.

Proposición 2.68. *La sumatoria de momentos respecto a \mathbf{P}_1 satisface la igualdad*

$$-\tau_1 + \mathbf{CoP}^x \mathbf{R}_S^y = 0 \quad (2.34)$$

donde τ_1 es el torque del tobillo de soporte y $\mathbf{R}_S^y > 0$ es la componente vertical de la reacción del suelo sobre el bípodo.

Proposición 2.69. *Una ecuación explícita para el centro de presión del bípodo está dada por*

$$\mathbf{CoP}^x = \frac{\tau_1}{\mathbf{R}_S^y}, \quad (2.35)$$

siendo este valor físicamente admisible si y sólo si $\mathbf{CoP}^x \in [-l_1, l_1]$.

Observación 2.70. La restricción $\mathbf{CoP}^x \in [-l_1, l_1]$ se impone directamente sobre las entradas de control y sobre la dinámica del sistema. Además, el modelo continuo (2.15) es válido sólo si la restricción anterior se satisface, ya que para su construcción se toma en cuenta la hipótesis **HC2** que indica que el pie de soporte se mantiene en contacto plano con el suelo. Lo anterior implica que el tipo de caminata que puede describir el bípedo corresponde a una caminata cuasi-estáticamente estable.

Observación 2.71. Otros estudios (e.g. [11]), han considerado la inclusión de restricciones producidas por hipótesis de fricción, sin embargo en este trabajo de tesis se descartan estas restricciones al suponer coeficientes de fricción suficientemente grandes entre el suelo y el pie de soporte.

Capítulo 3

Control de un Robot Bípedo

En este capítulo se presenta el estudio de dos metodologías que permiten el diseño de las variables de control \mathbf{u} del modelo con efectos impulsivos

$$\Sigma : \begin{cases} \dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{f}(\mathbf{x}) + \mathbf{g}(\mathbf{x}) (\mathbf{u} + \boldsymbol{\omega}(t)) & \text{si } \mathbf{x}^-(t) \notin \mathcal{S}, \\ \mathbf{x}^+(t) = \boldsymbol{\Delta}(\mathbf{x}^-(t)) & \text{si } \mathbf{x}^-(t) \in \mathcal{S}, \end{cases} \quad (3.1)$$

que es descrito en la **Sección 2.3.4**, de tal forma que el sistema tenga un comportamiento especificado o deseado.

En particular, se estudiar la estabilización local del modelo del bípedo en su fase de soporte simple el cual es descrito por la parte continua del sistema (3.1) dada por

$$\frac{d}{dt}\mathbf{x} = \mathbf{f}(\mathbf{x}) + \mathbf{g}(\mathbf{x}) (\mathbf{u} + \boldsymbol{\omega}(t)). \quad (3.2)$$

Posteriormente se presenta el diseño de las variables de control de tal forma que se produzca una solución estable del sistema (3.1), que físicamente corresponda con una locomoción estable consistente con las hipótesis **HC1**, ..., **HC6** presentes en la **Sección 2.2**.

3.1. Preliminares de Teoría de Control

A continuación se presentan algunos conceptos importantes en el área de la Teoría de control que pueden ser consultados por ejemplo en [31] y [27].

Observación 3.1. En la definición siguiente se usa la notación \mathcal{U}^I para representar el conjunto $\{\omega | \omega : I \rightarrow \mathcal{U}\}$.

Definición 3.2. Un *sistema de control* $\Sigma = (\mathcal{T}, \mathcal{X}, \mathcal{U}, \varphi)$ consiste en:

- Un conjunto de tiempo \mathcal{T} .
- Un *espacio de estados* \mathcal{X} de Σ .
- Un conjunto no vacío \mathcal{U} llamado *espacio de la entrada* de Σ .
- Una función $\varphi : \mathcal{D}_\varphi \rightarrow \mathcal{X}$ llamada *función de transición* de Σ definida en un subconjunto \mathcal{D}_φ de

$$\{(\tau, \sigma, x, u) \mid \sigma, \tau \in \mathcal{T}, \sigma \leq \tau, x \in \mathcal{X}, u \in \mathcal{U}^{[\sigma, \tau[}\},$$

tal que las siguientes propiedades se satisfacen:

- **no-trivialidad:** Para cada estado $x \in \mathcal{X}$, existe al menos un par $\sigma < \tau$ en \mathcal{T} y algún $u \in \mathcal{U}^{[\sigma, \tau[}$ tal que u es **admisibles** para x , es decir, que $(\tau, \sigma, x, u) \in \mathcal{D}_\varphi$;
- **restricción:** Si $u \in \mathcal{U}^{[\sigma, \mu[}$ es admisible para x , entonces por cada $\tau \in [\sigma, \mu[$ la restricción $u_1 := u|_{[\sigma, \tau[}$ de u al intervalo $[\sigma, \tau[$ es también admisible para x y la restricción $u_2 := u|_{[\tau, \mu[}$ es admisible para $\varphi(\tau, \sigma, x, u_1)$;
- **semigrupo:** Si σ, τ, μ son cualesquiera tres elementos de \mathcal{T} tales que $\sigma < \tau < \mu$, si $u_1 \in \mathcal{U}^{[\sigma, \tau[}$ y $u_2 \in \mathcal{U}^{[\tau, \mu[}$, y si x es un estado tal que

$$\begin{aligned} \varphi(\tau, \sigma, x, u_1) &= x_1 \\ & y \\ \varphi(\mu, \tau, x, u_2) &= x_2 \end{aligned}$$

entonces $u = u_2 \circ u_1$ es también admisible para x y $\varphi(\mu, \sigma, x, u) = x_2$;

- **identidad:** Para cada $\sigma \in \mathcal{T}$ y cada $x \in \mathcal{X}$, la sucesión vacía $\diamond \in \mathcal{U}^{[\sigma, \sigma[}$ es admisible para x y $\varphi(\sigma, \sigma, x, \diamond) = x$.

Definición 3.3. Los elementos de \mathcal{X} son llamados *estados*, los elementos de \mathcal{U} son *valores de control* o *valores de entrada*. Las funciones $u \in \mathcal{U}^{[\sigma, \tau[}$ son llamados *controles* o *entradas* y se denota por $|u| = \tau - \sigma$ la *extensión* o *tamaño* de u . Si u es admisible para x entonces se dice que (x, u) forma un *par admisible*.

Definición 3.4. Dado un sistema Σ y un estado $x \in \mathcal{X}$, la función $u \in \mathcal{U}^{[\sigma, \infty[}$ es *admisible* para x si cada restricción $u|_{[\sigma, \tau[}$ es admisible para x , para cada $\tau > \sigma$.

Definición 3.5. Una *trayectoria* Γ para un sistema Σ en el intervalo $I \subset \mathcal{T}$ consiste en un par de funciones (ξ, u) , $\xi \in \mathcal{X}^I$, $u \in \mathcal{U}^I$ tal que:

$$\xi(\tau) = \varphi(\tau, \sigma, \xi(\sigma), u|_{[\sigma, \tau[}),$$

se satisface para cada par $\sigma, \tau \in I$, con $\sigma < \tau$.

Definición 3.6. Un *camino* de un sistema Σ en un intervalo $I \subset \mathcal{T}$ es una función $\xi : I \rightarrow \mathcal{X}$ para la cual existe algún $u \in \mathcal{U}^I$ tal que (ξ, u) es una trayectoria en I para Σ . Si ξ es un camino e I tiene la forma $[\sigma, \tau[$ o $[\sigma, \tau]$ (σ finito), entonces $\xi(\sigma)$ es el *estado inicial* del camino. Si I tiene forma la $] \sigma, \tau]$ o $[\sigma, \tau]$ (σ finito) entonces $\xi(\tau)$ es el *estado terminal* del camino.

Para las siguientes definiciones, suponer que $\Sigma = (\mathcal{T}, \mathcal{X}, \mathcal{U}, \varphi)$ es un sistema arbitrario.

Definición 3.7. Un *evento* es un par $(x, t) \in \mathcal{X} \times \mathcal{T}$.

- Un evento (z, τ) puede ser *alcanzado desde* el evento (x, σ) si y sólo si existe un camino de Σ en $[\sigma, \tau]$ cuyo estado inicial y final es x y z respectivamente. Es decir, si existe una $u \in \mathcal{U}^{[\sigma, \tau]}$ tal que:

$$\varphi(\tau, \sigma, x, u) = z.$$

También es posible decir que (x, σ) *puede ser controlado* hacia (z, τ) .

- Si $x, z \in \mathcal{X}$, $T \in \mathcal{T}$, y si existe $\sigma, \tau \in \mathcal{T}$ con $\tau - \sigma = T$ tal que (z, τ) puede ser alcanzado desde (x, σ) , entonces z *puede ser alcanzado desde* x en un tiempo T . Se dice equivalentemente que x puede ser controlado hacia z en un tiempo T .
- z *puede ser alcanzado desde* x (o x puede ser controlado hacia z) si ésto pasa para al menos una $T \in \mathcal{T}$.

Definición 3.8. Sean $y, z \in \mathcal{X}$ y $\mathcal{V} \subset \mathcal{X}$ un conjunto arbitrario de \mathcal{X} tal que $y, z \in \mathcal{V}$. Entonces, z *puede ser asintóticamente controlado hacia* y **sin dejar** \mathcal{V} si existe algún control $\nu \in \mathcal{U}^{[0, \infty]}$ admisible para z tal que:

- Para el camino $\zeta := \psi(z, \nu)$,

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \zeta(t) = y$$

- $\zeta(t) \in \mathcal{V}$ para toda $t \geq 0$.

Cuando $\mathcal{V} = \mathcal{X}$ se dice que z puede ser controlada asintóticamente a y .

Observación 3.9. Se usa la notación $(x, \sigma) \rightsquigarrow (z, \tau)$ para indicar que el evento (z, τ) puede ser alcanzado desde (x, σ) . La desigualdad $\sigma \leq \tau$ está implícita en esta notación. En el caso de estados, se escribe $x \rightsquigarrow_T z$ si x puede ser controlado hacia z en un tiempo $T \in \mathcal{T}$, y se escribe de forma simple $x \rightsquigarrow z$ para indicar que x puede ser controlado hacia z .

Definición 3.10. Un sistema Σ es *controlable en el intervalo* $[\sigma, \tau]$ si para cada $x, z \in \mathcal{X}$ se cumple que $(x, \sigma) \rightsquigarrow (z, \tau)$. Es *controlable al tiempo* T si para cada $x, z \in \mathcal{X}$ se cumple que $x \rightsquigarrow_T z$. Se dice solamente *controlable* si $x \rightsquigarrow z$ para toda x, z .

3.1.1. Resultados de Control Lineal

Teorema 3.11. ([31] pág. 88) *Suponer que Σ es un sistema n -dimensional lineal invariante en el tiempo, denotado por*

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{B}\mathbf{u}, \quad (3.3)$$

donde $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ y $\mathbf{B} \in \mathbb{R}^{n \times m}$. Entonces Σ es controlable si y sólo si

$$\text{rango}([\mathbf{B}, \mathbf{A}\mathbf{B}, \mathbf{A}^2\mathbf{B}, \dots, \mathbf{A}^{n-1}\mathbf{B}]) = n. \quad (3.4)$$

Definición 3.12. La matriz $[\mathbf{B}, \mathbf{A}\mathbf{B}, \mathbf{A}^2\mathbf{B}, \dots, \mathbf{A}^{n-1}\mathbf{B}]$ del Teorema anterior es conocida como *matriz de controlabilidad*.

Teorema 3.13. ([27] págs. 235-236) *Supóngase que Σ es un sistema invariante en el tiempo de clase \mathcal{C}^1 denotado por*

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x}, \mathbf{u}), \quad (3.5)$$

con dominios $\mathcal{X} \subset \mathbb{R}^n$ y $\mathcal{U} \subset \mathbb{R}^m$ abiertos. Suponer además que $(\mathbf{x}^0, \mathbf{u}^0) \equiv (0, 0)$ es un punto de equilibrio de \mathbf{f} y que la linealización de Σ puede expresarse como en la Ec. (3.3), con

$$\mathbf{A} := \left[\frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \mathbf{x}} \right]_{\mathbf{x}, \mathbf{u}=0},$$

$$\mathbf{B} := \left[\frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \mathbf{u}} \right]_{\mathbf{x}, \mathbf{u}=0}.$$

Si la linealización anterior de Σ es completamente controlable, entonces existe una matriz $\mathbf{K} \in \mathbb{R}^{n \times m}$ tal que $\text{Re}(\lambda) < 0$ para cada $\lambda \in \text{spec}(\mathbf{A} + \mathbf{B}\mathbf{K})$. Además, el control lineal

$$\mathbf{u} = \mathbf{K}\mathbf{x}$$

hace que el equilibrio $(\mathbf{x}^0, \mathbf{u}^0)$ del sistema Σ en retroalimentación dado por

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x}, \mathbf{K}\mathbf{x}),$$

sea localmente asintóticamente estable.

3.1.1.1. Control Óptimo: Diseño de un Regulador Cuadrático Lineal

En el apartado anterior se exponen algunas propiedades de controlabilidad junto con la posibilidad de diseñar las entradas de algún sistema de control de tal forma que éste tenga un comportamiento específico o deseado, como por ejemplo pasar de un estado a otro. Sin embargo, a menudo se está interesado no solamente en realizar una transición entre estados, sino que se busca hacerlo de la “mejor” manera posible. En general, un problema de control óptimo consiste en la minimización de alguna función

$$\mathcal{F}(\mathbf{x}, \mathbf{u})$$

de trayectorias, llamada *función costo* o *índice de desempeño*. El índice de desempeño puede incorporar costos energéticos, o el tiempo que se requiere para que el control realice algún objetivo deseado. Además la optimización puede ser sujeta a diversas restricciones, por ejemplo, la magnitud máxima permitida en la variable de control. Desde luego, las variables \mathbf{x} y \mathbf{u} deben relacionarse por medio de la ecuación del sistema, que en el caso de sistemas continuos, puede estar dada por

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x}, \mathbf{u}).$$

Los resultados que se presentan a continuación están basados en optimización mediante *programación dinámica*. En programación dinámica, el rol central lo desempeña la *función valor* o *función de Bellman* que es denotada por $V(t, x)$ y que proporciona para cada estado \mathbf{x} en cualquier tiempo t , el menor costo posible de entre todas las posibles trayectorias entre dos eventos (ver **Definición 3.5**). En tiempo continuo, se trabaja con una ecuación diferencial parcial respecto al tiempo para $V(t, x)$, llamada la ecuación de *Hamilton-Jacobi-Bellman* (HJB). En general es complicado encontrar una solución para esta ecuación, sin embargo, para sistemas lineales con un costo cuadrático, el índice de desempeño es cuadrático en \mathbf{x} por lo que la ecuación (HJB) se reduce a una ecuación diferencial ordinaria (conocida como *ecuación diferencial matricial de Riccati*) la cual puede resolverse numéricamente de forma relativamente fácil.

En este apartado se presenta una forma de encontrar una matriz $\mathbf{K} \in \mathbb{R}^{m \times n}$ como la mencionada en **Teorema 3.13**, de tal forma que el equilibrio $(\mathbf{x}, \mathbf{u}) \equiv (\mathbf{0}, \mathbf{0})$ del sistema (3.5) en retroalimentación sea localmente asintóticamente estable.

A continuación se presentan una serie de conceptos que son necesarios para enunciar el Teorema principal de esta sección.

Definición 3.14. Un subconjunto $S \subset \mathbb{R}^n$ se dice que tiene *medida cero* si para cada $\epsilon > 0$ existe un conjunto numerable de bolas B_1, B_2, \dots de volumen ϵ_i tal que

$$\sum_{i=1}^{\infty} \epsilon_i < \epsilon,$$

y

$$S \subset \bigcup_{i=1}^{\infty} B_i.$$

Definición 3.15. Dos funciones $f, g : O \rightarrow T$ de algún $O \subset \mathbb{R}^n$ a algún otro conjunto T se dicen *iguales casi en todo punto (c.t.p.)* si el conjunto

$$\{x \in O \mid f(x) \neq g(x)\}$$

tiene medida cero.

Observación 3.16. En general, una propiedad se dice cumplirse *casi en todo punto* siempre que ésta se cumpla salvo en un conjunto de medida cero.

Definición 3.17. Sea \mathcal{U} un espacio métrico y sea $\{f_i\}_{i=1}^{\infty}$ una sucesión de funciones de $O \subset \mathbb{R}^n$ hacia \mathcal{U} . Entonces se dice que $\{f_i\}$ *converge a $f : O \rightarrow \mathcal{U}$ casi en todo punto*, denotado por

$$f_i \rightarrow f \text{ (c.t.p.)}$$

si el conjunto

$$\{x \in O \mid f_i(x) \not\rightarrow f(x)\}$$

tiene medida cero.

Definición 3.18. Sean \mathcal{I} un intervalo en \mathbb{R} y \mathcal{U} un espacio métrico.

- Una función *constante a trozos* $g : \mathcal{I} \rightarrow \mathcal{U}$ es aquella que es constante en cada elemento I_j de una partición finita de \mathcal{I} en sub-intervalos.
- Una función $f : O \rightarrow \mathcal{U}$ es una *función medible* si existe alguna sucesión de funciones constantes a trozos $\{f_i\}_{i=1}^{\infty}$ tal que $f_i \rightarrow f$ (c.t.p.).
- Una función $\omega : \mathcal{I} \rightarrow \mathcal{U}$ es *esencialmente acotada (e.a.)* si es medible y existe un conjunto compacto $K \subset \mathcal{U}$ tal que

$$\omega(t) \in K \text{ para casi toda } t \in \mathcal{I}$$

Considérese el caso de sistemas lineales

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}(t)\mathbf{x} + \mathbf{B}(t)\mathbf{u}(t) \quad (3.6)$$

donde se supone que \mathbf{A} y \mathbf{B} son esencialmente acotadas (e.a.) y \mathbf{R} , \mathbf{Q} , \mathbf{S} denotan matrices de funciones tales que:

- \mathbf{R} es una matriz de funciones e.a., simétrica de tamaño $m \times m$, \mathbf{Q} es una matriz de funciones e.a., simétrica de tamaño $n \times n$ y \mathbf{S} es una matriz constante simétrica de tamaño $n \times n$.
- Para cada t , \mathbf{R} es definida positiva.
- Para cada t , \mathbf{Q} es semi-definida positiva; y
- \mathbf{S} es semi-definida positiva.

Para cada par de números reales $\sigma \leq \tau$, cada estado $\mathbf{x}_0 \in \mathbb{R}^n$, y cada entrada esencialmente acotada $\mathbf{u} : [\sigma, \tau] \rightarrow \mathbb{R}^m$, se define el funcional

$$\mathcal{J}(\tau, \sigma, \mathbf{x}, \mathbf{u}) := \int_{\sigma}^{\tau} (\mathbf{u}(s)^T \mathbf{R}(s) \mathbf{u}(s) + \mathbf{x}(s)^T \mathbf{Q}(s) \mathbf{x}(s)) ds + \mathbf{x}(\tau)^T \mathbf{S} \mathbf{x}(\tau), \quad (3.7)$$

donde $\mathbf{x}(t) = \varphi(t, \sigma, \mathbf{x}_0, \mathbf{u})$ para toda $t \in [\sigma, \tau]$ (ver **Definiciones 3.2 y 3.5**). El problema que se desea estudiar es el siguiente:

Para cada par de tiempos $\sigma < \tau$ y un estado inicial \mathbf{x}_0 , hallar un control \mathbf{u} que minimice $\mathcal{J}(\tau, \sigma, \mathbf{x}, \mathbf{u})$.

Cualquier control \mathbf{u} que cumple esta propiedad se dice que es *óptimo* para $\mathbf{x}_0 \in \mathbb{R}^n$ en el intervalo $[\sigma, \tau]$. Supóngase que se fijan los valores $\sigma < \tau$. La función de Bellman del problema de optimización se denota por

$$V(t, \mathbf{x}) := \inf \{ \mathcal{J}(\tau, \sigma, \mathbf{x}, \mathbf{u}) : \mathbf{u} : [\sigma, \tau] \rightarrow \mathbb{R}^m \text{ e.a.} \} \quad (3.8)$$

para cada $t \in [\sigma, \tau]$ y $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$. Si existe un control \mathbf{u} que minimice a $\mathcal{J}(\tau, \sigma, \mathbf{x}, \mathbf{u})$, entonces $V(t, \mathbf{x}) = \mathcal{J}(\tau, \sigma, \mathbf{x}, \mathbf{u})$. Sea $\mathbf{F} : [\sigma, \tau] \rightarrow \mathbb{R}^{m \times n}$ (e.a.). Para cada $t_0 \in [\sigma, \tau]$ y cada $\mathbf{x}_0 \in \mathbb{R}^n$, considérese ahora el sistema

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{x}} &= [\mathbf{A}(t) + \mathbf{B}(t)\mathbf{F}(t)]\mathbf{x}, \\ \mathbf{x}(t_0) &= \mathbf{x}_0, \end{aligned}$$

que se obtiene al asignar $\mathbf{u}(t) = \mathbf{F}(t)\mathbf{x}(t)$ en el sistema de la Ec. (3.6), con una condición inicial \mathbf{x}_0 en el tiempo t_0 . El control $\mathbf{u}(t) = \mathbf{F}(t)\mathbf{x}(t)$ es llamado *control \mathbf{F} en lazo cerrado que inicia en (t_0, \mathbf{x}_0)* .

Teorema 3.19 ([31] pág. 364). Sean $\sigma, \tau \in \mathbb{R}$ tal que $\sigma < \tau$. Entonces existe una matriz de funciones $\mathbf{P}(t)$, simétrica, de tamaño $n \times n$ absolutamente continua, definida para $t \in [\sigma, \tau]$, la cual satisface la **Ecuación Diferencial Matricial de Riccati** en $[\sigma, \tau]$:

$$\begin{aligned}\dot{\mathbf{P}} &= \mathbf{PBR}^{-1}\mathbf{B}^T\mathbf{P} - \mathbf{PA} - \mathbf{A}^T\mathbf{P} - \mathbf{Q}, \\ \mathbf{P}(\tau) &= \mathbf{S}.\end{aligned}$$

Sea

$$\mathbf{F}(t) := -\mathbf{R}(t)^{-1}\mathbf{B}(t)^T\mathbf{P}(t), \quad (3.9)$$

entonces el control \mathbf{F} en lazo cerrado que inicia en (σ, \mathbf{x}_0) es el único control óptimo para \mathbf{x}_0 en el intervalo $[\sigma, \tau]$. Además,

$$V(t, \mathbf{x}) = \mathbf{x}^T\mathbf{P}(t)\mathbf{x}$$

para toda $t \in [\sigma, \tau]$ y $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$.

3.1.2. Resultados de Control No Lineal

Definición 3.20. Considérese un sistema de control no lineal de la forma

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x}) + \mathbf{g}(\mathbf{x})\mathbf{u} \quad (3.10)$$

donde $\mathbf{f} : \mathcal{X} \rightarrow \mathbb{R}^n$ y $\mathbf{g} : \mathcal{X} \rightarrow \mathbb{R}^{n \times p}$ son continuamente diferenciables. Este sistema es *linealizable* si existe un difeomorfismo $\mathbf{T} : \mathcal{X} \rightarrow \mathbb{R}^n$ tal que $\mathbf{T}(\mathcal{X})$ contiene al origen y el cambio de variable $\mathbf{z} = \mathbf{T}(\mathbf{x})$ transforma el sistema (3.10) en la forma

$$\dot{\mathbf{z}} = \mathbf{Az} + \mathbf{B}\gamma(\mathbf{x})[\mathbf{u} - \alpha(\mathbf{x})] \quad (3.11)$$

con (\mathbf{A}, \mathbf{B}) controlable y $\gamma(\mathbf{x})$ no singular para cada $\mathbf{x} \in \mathcal{X}$

Definición 3.21. Una *salida* del sistema (3.10) es una variable \mathbf{y} dada por

$$\mathbf{y} = \mathbf{h}(\mathbf{x}) \quad (3.12)$$

donde $\mathbf{h} : \mathcal{X} \rightarrow \mathbb{R}^p$.

Observación 3.22. La variable de salida es de particular interés en el estudio del sistema (3.10), ésto ya que a partir de ella es posible hacer construcciones de diferentes difeomorfismos \mathbf{T} que permitan linealizar el sistema.

Ejemplo 3.1. *Considérese el sistema de control no lineal dado por*

$$\dot{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} 0 \\ x_1 + x_2^2 \\ x_1 - x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} e^{x_2} \\ e^{x_2} \\ 0 \end{bmatrix} \mathbf{u} =: \mathbf{f}(\mathbf{x}) + \mathbf{g}(\mathbf{x})\mathbf{u}.$$

Es claro que los campos vectoriales \mathbf{f} y \mathbf{g} son continuamente diferenciables en $\mathcal{X} = \mathbb{R}^3$. Ahora, la función $\mathbf{T} : \mathcal{X} \rightarrow \mathbb{R}^3$ dada por

$$\mathbf{T}(\mathbf{x}) = \begin{bmatrix} x_3 \\ x_1 - x_2 \\ -x_1 - x_2^2 \end{bmatrix},$$

define un difeomorfismo local para cada $\mathbf{x} \in \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathcal{X} : x_2 \neq -\frac{1}{2}\}$ pues $\det(\frac{\partial \mathbf{T}(\mathbf{x})}{\partial \mathbf{x}}) = 0$ si y sólo si $x_2 = -\frac{1}{2}$. Además la imagen de \mathbf{T} contiene al origen pues $\mathbf{T}(\mathbf{0}) = \mathbf{0} \in \mathbb{R}^3$. Si se define el cambio de variable $\mathbf{z} := \mathbf{T}(\mathbf{x})$, entonces

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{z}} &= \frac{\partial \mathbf{T}(\mathbf{x})}{\partial \mathbf{x}} \dot{\mathbf{x}} = \frac{\partial \mathbf{T}(\mathbf{x})}{\partial \mathbf{x}} (\mathbf{f}(\mathbf{x}) + \mathbf{g}(\mathbf{x})\mathbf{u}), \\ &= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ -1 & -2x_2 & 0 \end{bmatrix} \left(\begin{bmatrix} 0 \\ x_1 + x_2^2 \\ x_1 - x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} e^{x_2} \\ e^{x_2} \\ 0 \end{bmatrix} \mathbf{u} \right), \\ &= \begin{bmatrix} x_1 - x_2 \\ -x_1 - x_2^2 \\ u(-e^{x_2})(2x_2 + 1) - 2x_2(x_1 + x_2^2) \end{bmatrix}, \\ &= \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \mathbf{z} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \mathbf{v}, \end{aligned}$$

donde \mathbf{v} es una variable de control auxiliar dada por

$$\begin{aligned} \mathbf{v} &= (-e^{x_2})(2x_2 + 1) \left(\mathbf{u} - \frac{2x_2(x_1 + x_2^2)}{(-e^{x_2})(2x_2 + 1)} \right), \\ &=: \boldsymbol{\gamma}(\mathbf{x})[\mathbf{u} - \boldsymbol{\alpha}(\mathbf{x})]. \end{aligned}$$

Notar que el término $\gamma(\mathbf{x})$ es no singular para cada $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3$. Por último la matriz de controlabilidad del sistema linealizado dada por

$$\begin{bmatrix} \mathbf{B} & \mathbf{AB} & \mathbf{A}^2\mathbf{B} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

tiene claramente rango 3, por lo que el sistema lineal es completamente controlable, concluyendo así que el sistema es efectivamente linealizable.

Definición 3.23 ([4] pág. 679). Considerar el sistema

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x}) \tag{3.13}$$

donde $\mathbf{f} : \mathcal{X} \rightarrow \mathbb{R}^n$ es continua en una vecindad abierta \mathcal{X} del origen y $\mathbf{f}(\mathbf{0}) = \mathbf{0}$. Entonces el origen se dice que es un punto de equilibrio *estable en tiempo finito* de (3.13) si existe una vecindad abierta $\mathcal{N} \subset \mathcal{X}$ del origen y una función $T : \mathcal{N} \setminus \{\mathbf{0}\} \rightarrow]0, \infty[$, llamada *tiempo de asentamiento*, tal que las siguientes propiedades se satisfacen.

- **Convergencia en tiempo finito:** Para cada $\mathbf{x} \in \mathcal{N} \setminus \{\mathbf{0}\}$, la solución $\varphi_t(\mathbf{x})$ está definida para $t \in [0, T(\mathbf{x})[$, $\varphi_t(\mathbf{x}) \in \mathcal{N} \setminus \{\mathbf{0}\}$ para cada $t \in [0, T(\mathbf{x})[$ y $\lim_{t \rightarrow T(\mathbf{x})} \varphi_t(\mathbf{x}) = \mathbf{0}$.
- **Estabilidad de Liapunov:** Para cada conjunto abierto \mathcal{U}_ϵ con $\mathbf{0} \in \mathcal{U}_\epsilon \subset \mathcal{N}$, existe un conjunto abierto \mathcal{U}_δ tal que $\mathbf{0} \in \mathcal{U}_\delta \subset \mathcal{N}$ y para cada $\mathbf{x} \in \mathcal{U}_\delta \setminus \{\mathbf{0}\}$, $\varphi_t(\mathbf{x}) \in \mathcal{U}_\epsilon \setminus \{\mathbf{0}\}$ para cada $t \in [0, T(\mathbf{x})[$.

El origen se dice que es un punto de equilibrio *globalmente estable en tiempo finito* si $\mathcal{X} = \mathcal{N} = \mathbb{R}^n$.

3.1.2.1. Esquema Twisting para Estabilización Robusta en Tiempo Finito

En este apartado se presenta una clase de control en retroalimentación conocido como *doble integrador* que permite la estabilización en tiempo finito del sistema, representado por

$$\frac{d}{dt} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y \\ u \end{bmatrix}. \tag{3.14}$$

Para la estabilización global del doble integrador (3.14), se propone la siguiente asignación para la variable de control

$$u = -k_1|y|^\alpha \text{sign}(y) - k_2|x|^{\frac{\alpha}{2-\alpha}} \text{sign}(x) \quad (3.15)$$

con parámetros $k_2 > k_1 > 0$ y $\alpha \in]0, 1[$,

Para analizar las propiedades de **robustez** de (3.15) considérese el sistema (3.14) con una perturbación de la siguiente forma

$$\frac{d}{dt} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y \\ u + w \end{bmatrix} \quad (3.16)$$

donde la perturbación externa $w := w(t) := w(x, y, t)$ es una función integrable a lo largo de cualesquier trayectoria $(x(t), y(t))$. Además w satisface la condición de crecimiento

$$|w(t)| \leq k_0|y|^\alpha, \quad (3.17)$$

para algún $\alpha \in]0, 1[$, una cota superior $k_0 < k_1$, para cada $x, y \in \mathbb{R}$ y $t \geq t_0$.

Teorema 3.24 (Tma. 1 de [22]). *Dado $\alpha \in]0, 1[$ y $k_1, k_2 > 0$, el origen del sistema de control formado por (3.15) y (3.16) es un punto de equilibrio globalmente asintóticamente estable para cualquier perturbación w que cumpla la condición de crecimiento (3.17) para un $k_0 < k_1$ arbitrario .*

Ahora supóngase que la perturbación w es continua a trozos y es uniformemente acotada, es decir

$$\sup_{t \geq t_0} |w(t)| \leq M \quad (3.18)$$

cumpliéndose

$$0 < M < k_2 < k_1 - M. \quad (3.19)$$

Entonces se tiene el siguiente resultado.

Teorema 3.25 (Tma 4.2 de [21]). *Dado $\alpha = 0$, el origen del sistema de control formado por (3.15) y (3.16) es un punto de equilibrio globalmente asintóticamente estable en tiempo finito, para cualquier perturbación w que cumpla (3.18) y (3.19).*

3.1.2.2. Sintonización del Algoritmo Twisting

En este apartado se describen un conjunto de reglas que permiten que la ley de control en la Ec. (3.15) para $\alpha \equiv 0$, haga que el sistema (3.16) tenga un tiempo de asentamiento al origen deseado. Estas reglas pueden encontrarse junto con los detalles sobre su construcción en [24] así como su versión simplificada en [25].

Lema 3.26 ([25]). *Supóngase que la perturbación w satisface las Ecs. (3.18) y (3.19). Sea $r_0 := \sup\|(x_0, y_0)\| < \infty$ la cota superior de la norma euclidiana de las condiciones iniciales del sistema (3.16) denotadas por $(x_0, y_0) := (x(t_0), y(t_0))$. Si las constantes k_1, k_2 satisfacen*

$$k_1 > \text{máx}\left\{M, \frac{2\delta}{t_s\sqrt{1-\eta^2} + M}\right\}, \quad (3.20)$$

$$k_2 > \text{máx}\left\{\sqrt{\frac{R}{2}}, \frac{k_1 - M}{\eta}, k_1 + M, \rho\sqrt{\frac{R}{2(1-\rho)}}, \rho, \beta k_1\right\}, \quad (3.21)$$

con

$$\delta > \frac{r_0(\beta + 1)}{\beta - 1}, \quad t_s = \varepsilon_t t_d, \quad (3.22)$$

donde t_d es una cota superior pre-especificada para el tiempo de asentamiento, $\beta > 1$ es un parámetro de ajuste, $\eta \in]0, \frac{1}{\beta}[$, $R = \frac{r_0^2}{2}$ y $\varepsilon_t, \rho \in]0, 1[$. Entonces el tiempo de asentamiento t_a al origen satisface

$$\frac{\delta(\sqrt{1-\eta^2} + 1)}{(k_1 - M)\sqrt{1-\eta^2}} \leq t_a \leq t_d. \quad (3.23)$$

3.1.2.3. Sintonización de un Control Lineal

Considérese un sistema lineal conformado por dos dobles integradores desacoplados, cada uno dado por

$$\frac{d}{dt} \begin{bmatrix} z_i \\ \dot{z}_i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ k_{2,i} & k_{1,i} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z_i \\ \dot{z}_i \end{bmatrix} =: \mathbf{A}_i \begin{bmatrix} z_i \\ \dot{z}_i \end{bmatrix}, \quad i = 1, 2. \quad (3.24)$$

Supóngase que se desea encontrar los valores de $k_{1,i}, k_{2,i}$ de tal forma que la función escalar $h(z_1, z_2) = z_2 + z_1$ se anule en un tiempo finito y que el origen del sistema completo (que contempla los dos dobles integradores) sea asintóticamente estable. La idea intuitiva para lograr lo anterior es la siguiente. Para lograr el resultado deseado de

estabilidad, se pueden estudiar los eigenvalores de \mathbf{A}_i que están dados por

$$\text{Spec}(\mathbf{A}_i) = \left\{ \frac{1}{2}(k_{1,i} \pm \sqrt{k_{1,i}^2 + 4k_{2,i}}) \right\}.$$

Si se asigna $k_{1,2}^2 + 4k_{2,2} > 0$ y $k_{1,2} < 0$ entonces el origen del doble integrador para $i = 2$ es un punto de equilibrio exponencialmente estable. Además cualitativamente representa un nodo estable, lo que significa que la solución para $z_2(t)$ se aproxima al origen de forma exponencial y sin presentar oscilaciones. Por otro lado, si se asigna $k_{1,1}^2 + 4k_{2,1} < 0$ y $k_{1,1} < 0$, entonces el origen del doble integrador para $i = 1$ es un punto de equilibrio exponencialmente estable. A diferencia del otro subsistema, éste presenta oscilaciones alrededor del origen, es decir cualitativamente el origen representa un foco estable. Ahora supóngase que $\|(z_2(t_0), \dot{z}_2(t_0))\| < \|(z_1(t_0), \dot{z}_1(t_0))\|$ y que en particular se cumple que $|z_2(t_0)| < |z_1(t_0)|$. Si además se asigna $k_{1,1} \ll k_{1,2}$, entonces la convergencia al origen de $z_2(t)$ es más rápida que la de $z_1(t)$ y ésto, junto con el hecho de que $z_1(t)$ oscila alrededor del cero, permite estimar la existencia de un tiempo $0 < t^* < \infty$ tal que $h(t^*) = 0$.

3.2. Estabilización a Puntos de Equilibrio

En esta sección se desarrolla la aplicación de un Regulador Cuadrático Lineal para la estabilización local del origen del sistema (2.15) que representa la dinámica del robot en su fase de soporte simple y que es presentando en la **Sección 2.3.2** del capítulo anterior.

Teorema 3.27 ([33] pág. 251). *Sea $\mathbf{A} \in \text{Mat}_{n \times n}(\mathbb{R})$ con eigenvalores $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ y denótese por $\text{Tr}(\mathbf{A})$ su traza, entonces*

$$\text{Tr}(\mathbf{A}) = \sum_{i=1}^n \lambda_i.$$

Además $\det(\mathbf{A}) = \prod_{i=1}^n \lambda_i$.

Lema 3.28 ([29] pág. 3). *Sean $\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{C}, \mathbf{D} \in \text{Mat}_{n \times n}(\mathbb{R})$ y supóngase que \mathbf{C} y \mathbf{D} conmutan, entonces*

$$\det \begin{bmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{B} \\ \mathbf{C} & \mathbf{D} \end{bmatrix} = \det(\mathbf{AD} - \mathbf{BC})$$

Proposición 3.29. *Para el sistema (2.15), supóngase que $l_i, m_i > 0$ para $i = 1, \dots, 7$, $\mathbf{u} \equiv \mathbf{0}$ y $\boldsymbol{\omega}(t) \equiv \mathbf{0}$. Si además se satisface que $l_2 = l_5$, $l_3 = l_4$, $m_2 = m_5$, $m_3 = m_4$ junto con las desigualdades $m_6 \leq m_5 \leq m_4 \leq m_7$ y $l_6 \leq l_5 \leq l_4 \leq l_7$. Entonces el origen del sistema (2.15) es un punto de equilibrio inestable.*

Demostración. Tomando $\mathbf{u} \equiv \mathbf{0}$ y $\boldsymbol{\omega}(t) \equiv \mathbf{0}$ el sistema se reduce a

$$\frac{d}{dt}\mathbf{x} = \begin{bmatrix} \dot{\mathbf{q}} \\ \mathbf{B}^{-1}(\mathbf{q})(-\mathbf{C}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})\dot{\mathbf{q}} - \mathbf{G}(\mathbf{q})) \end{bmatrix} =: \mathbf{f}(\mathbf{x}). \quad (3.25)$$

Para ver que $\mathbf{f}(\mathbf{0}) = \mathbf{0} \in \mathbb{R}^{12}$ (recuérdese que $\mathbf{x} := (\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})$) es suficiente ver que $\mathbf{G}(\mathbf{0}) = \mathbf{0} \in \mathbb{R}^6$. Bajo las hipótesis planteadas, $\mathbf{G}(\mathbf{q})$ se reduce a

$$\mathbf{G}(\mathbf{q}) = \begin{bmatrix} -gl_5(4m_4 + 3m_5 + 2(m_6 + m_7)) \sin(q_2(t)) \\ -gl_4(3m_4 + 2(m_5 + m_6 + m_7)) \sin(q_3(t)) \\ gl_4(m_4 + 2(m_5 + m_6)) \sin(q_4(t)) \\ gl_5(m_5 + 2m_6) \sin(q_5(t)) \\ 0 \\ -gl_7m_7 \sin(q_7(t)) \end{bmatrix},$$

entonces es evidente que $\mathbf{G}(\mathbf{0}) = \mathbf{0} \in \mathbb{R}^6$, por lo que $\mathbf{x} = \mathbf{0} \in \mathbb{R}^{12}$ es en efecto un punto de equilibrio del sistema.

La linealización del sistema (3.25) alrededor del origen está dada por

$$\frac{d}{dt}\mathbf{x} = \begin{bmatrix} \mathbf{0}_{6 \times 6} & \mathbf{I}_{6 \times 6} \\ \mathbf{A}_{2,1} & \mathbf{A}_{2,2} \end{bmatrix} \mathbf{x} =: \mathbf{A}_0 \mathbf{x}, \quad (3.26)$$

donde

$$\begin{aligned} \mathbf{A}_{2,1} &:= -\frac{\partial}{\partial \mathbf{q}} (\mathbf{B}(\mathbf{q})^{-1}(\mathbf{C}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})\dot{\mathbf{q}} + \mathbf{G}(\mathbf{q}))) \Big|_{(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})=(\mathbf{0}, \mathbf{0})}, \\ \mathbf{A}_{2,2} &:= -\frac{\partial}{\partial \dot{\mathbf{q}}} (\mathbf{B}(\mathbf{q})^{-1}(\mathbf{C}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})\dot{\mathbf{q}} + \mathbf{G}(\mathbf{q}))) \Big|_{(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})=(\mathbf{0}, \mathbf{0})}. \end{aligned}$$

Luego, de la definición de los términos $\mathbf{C}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})\dot{\mathbf{q}}$ y $\mathbf{G}(\mathbf{q})$ (**Proposición 2.22**) dados por

$$\begin{aligned} \mathbf{C}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) &= \dot{\mathbf{B}}(\mathbf{q})\dot{\mathbf{q}} - \frac{1}{2} \left(\frac{\partial}{\partial \mathbf{q}} (\dot{\mathbf{q}}^T \mathbf{B}(\mathbf{q}) \dot{\mathbf{q}}) \right)^T, \\ \mathbf{G}(\mathbf{q}) &= \frac{\partial U(\mathbf{q})}{\partial \mathbf{q}}^T, \end{aligned}$$

las expresiones anteriores resultan en

$$\begin{aligned} \mathbf{A}_{2,1} &= -\mathbf{B}^{-1}(\mathbf{q}) \frac{\partial \mathbf{G}(\mathbf{q})}{\partial \mathbf{q}} \Big|_{(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})=(\mathbf{0}, \mathbf{0})} \\ \mathbf{A}_{2,2} &= \mathbf{0} \in \text{Mat}_{6 \times 6}(\mathbb{R}). \end{aligned}$$

Ahora se muestra que existe $\lambda \in \text{Spec}(\mathbf{A}_0)$ tal que $\text{Re}(\lambda) > 0$, para ello se analiza la ecuación característica $\det(\mathbf{A}_0 - \lambda \mathbf{I}_{12 \times 12})$. De acuerdo a las expresiones de $\mathbf{A}_{2,1}$ y $\mathbf{A}_{2,2}$

se satisface que

$$\begin{aligned} \det(\mathbf{A}_0 - \lambda \mathbf{I}_{12 \times 12}) &= 0 \\ &\Leftrightarrow \\ \det \begin{bmatrix} -\lambda \mathbf{I}_{6 \times 6} & \mathbf{I}_{6 \times 6} \\ \mathbf{A}_{2,1} & -\lambda \mathbf{I}_{6 \times 6} \end{bmatrix} &= 0. \end{aligned}$$

Claramente las matrices $\mathbf{A}_{2,1}$ y $-\lambda \mathbf{I}_{6 \times 6}$ conmutan, entonces por el **Lema 3.28** se tiene que

$$\det(\mathbf{A}_0 - \lambda \mathbf{I}_{12 \times 12}) = \det(\lambda^2 \mathbf{I}_{6 \times 6} - \mathbf{A}_{2,1}),$$

esto implica que si $\hat{\lambda} \in \text{Spec}(\mathbf{A}_{2,1})$, entonces $\sqrt{\hat{\lambda}} \in \text{Spec}(\mathbf{A}_0)$. Se estudia ahora la existencia de $\hat{\lambda} \in \text{Spec}(\mathbf{A}_{2,1})$ tal que $\text{Re}(\hat{\lambda}) > 0$. Para ello considérese la traza de $\mathbf{A}_{2,1}$ dada por

$$\text{Tr}(\mathbf{A}_{2,1}) = \frac{1}{\det(\mathbf{B}(\mathbf{0}))} \frac{16}{243} gl_4^3 l_5^3 l_6^2 l_7 m_6 (c_1 + c_2 + c_3),$$

donde

$$\begin{aligned} c_1 &= l_5 l_7 (30m_4^3 (m_5 + 3m_6) (m_6 + 3m_7) + 18m_5 m_7 (m_5 m_6^2 + (m_5 + m_6) (m_5 + 4m_6) m_7) \\ &\quad + m_4^2 (29m_5^2 (m_6 + 3m_7) + 54m_6 m_7 (3m_6 + 5m_7) + 6m_5 (20m_6^2 + 69m_6 m_7 + 15m_7^2)) \\ &\quad + m_4 (72m_6^2 m_7^2 + 192m_5 m_6 m_7 (m_6 + 2m_7) + m_5^2 (18m_6^2 + 101m_6 m_7 + 96m_7^2))) \\ c_2 &= l_4 l_5 m_7 (m_4 (24m_4^2 (m_5 + 3m_6) + 24m_5^2 (m_5 + 4m_6) + 7m_4 m_5 (7m_5 + 24m_6)) \\ &\quad + 12 (m_4 + m_5) (4m_4 (m_5 + 3m_6) + 3m_5 (m_5 + 4m_6)) m_7) \\ c_3 &= l_4 l_7 (2m_4^3 (11m_5 + 36m_6) (m_6 + 3m_7) + 9m_5 m_6 m_7 (-m_5^2 + 8m_6 m_7 + 2m_5 (m_6 + m_7)) \\ &\quad + 6m_4 (12m_6^2 m_7^2 - m_5^3 (m_6 + 3m_7) + 4m_5 m_6 m_7 (8m_6 + 7m_7) + 2m_5^2 (m_6^2 + 6m_6 m_7 + 3m_7^2)) \\ &\quad + m_4^2 (17m_5^2 (m_6 + 3m_7) + 18m_6 m_7 (9m_6 + 7m_7) + m_5 (96m_6^2 + 338m_6 m_7 + 42m_7^2))). \end{aligned}$$

Es claro que $c_1, c_2 > 0$, sin embargo con las hipótesis $l_i, m_i > 0$, es sencillo verificar que también $c_3 > 0$. Por otro lado dado que $\det(\mathbf{B}(\mathbf{0})) > 0$ (pues $\mathbf{B}(\mathbf{q})$ es simétrica definida positiva para cada $\mathbf{q} \in \mathbb{R}^6$), entonces $\text{Tr}(\mathbf{A}_{2,1}) > 0$. A través del **Teorema 3.27** se establece que existe $\hat{\lambda} \in \text{Spec}(\mathbf{A}_{2,1})$ tal que $\text{Re}(\hat{\lambda}) > 0$. Considérense los siguientes casos: si $\hat{\lambda}$ es real entonces $\sqrt{\hat{\lambda}} > 0$, por otro lado, si $\hat{\lambda} \in \mathbb{C}$ entonces $\hat{\lambda} = a + i b$, por lo que $\sqrt{\hat{\lambda}} \in \text{Spec}(\mathbf{A}_{2,1})$ puede escribirse como $\sqrt{\hat{\lambda}} = \alpha + i \beta$, donde $\alpha = \sqrt{\frac{a + \sqrt{a^2 + b^2}}{2}}$ y $\beta = \text{sign}(b) \sqrt{\frac{-a + \sqrt{a^2 + b^2}}{2}}$, por lo que $\text{Re}(\sqrt{\hat{\lambda}}) = \alpha > 0$. Por lo anterior se concluye que $\exists \lambda \in \text{Spec}(\mathbf{A}_{2,1})$ tal que $\text{Re}(\lambda) > 0$, por tanto el origen del sistema (2.15) es un punto de equilibrio inestable. \square

Observación 3.30. El sistema (3.25) representa la dinámica del bípido sin considerar el efecto de los actuadores, es decir que se encuentra en su dinámica natural donde no se manipula de forma externa. El equilibrio $\mathbf{x} = \mathbf{0}$ representa mecánicamente la posición erguida y estática del bípido.

Proposición 3.31. *Supóngase que $l_i, m_i > 0$ para $i = 1, \dots, 7$ y $\boldsymbol{\omega}(t) \equiv \mathbf{0}$. Entonces la linealización del sistema (2.15) alrededor del origen $(\mathbf{x}, \mathbf{u}) \equiv (\mathbf{0}, \mathbf{0}) \in \mathbb{R}^{12}$ dada por*

$$\frac{d}{dt}\mathbf{x} = \mathbf{A}_0\mathbf{x} + \mathbf{g}(\mathbf{0})\mathbf{u} =: \mathbf{A}_0\mathbf{x} + \mathbf{B}_0\mathbf{u}, \quad (3.27)$$

es completamente controlable.

Demostración. Recuérdese de la **Proposición 2.25** que

$$\mathbf{g}(\mathbf{x}) := \begin{bmatrix} \mathbf{0}_{6 \times 6} \\ -\mathbf{B}^{-1}(\mathbf{q}) \end{bmatrix}.$$

Ahora, considérese la matriz

$$\mathbf{K}_0 := [\mathbf{B}_0, \mathbf{A}_0\mathbf{B}_0, \mathbf{A}_0^2\mathbf{B}_0, \dots, \mathbf{A}_0^{n-1}\mathbf{B}_0].$$

Para ver que \mathbf{K}_0 tiene rango 12 (tamaño de \mathbf{A}_0), se toman en cuenta sus primeras 12 columnas, dadas por

$$[\mathbf{B}_0 \ \mathbf{A}_0\mathbf{B}_0] = \begin{bmatrix} \mathbf{0}_{6 \times 6} & -\mathbf{B}^{-1}(\mathbf{0}) \\ -\mathbf{B}^{-1}(\mathbf{0}) & \mathbf{0}_{6 \times 6} \end{bmatrix}.$$

Debido a que $\text{rango}(\mathbf{B}(\mathbf{0})) = 6$ pues $\mathbf{B}(\mathbf{q})$ es simétrica definida positiva para cada $\mathbf{q} \in \mathbb{R}^6$, entonces es claro que las primeras 12 columnas de \mathbf{K}_0 son linealmente independientes. Por otro lado \mathbf{K}_0 tiene 12 renglones implicando que $\text{rango}(\mathbf{K}_0) = 12$. Por el **Teorema 3.11** se concluye el sistema $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}_0\mathbf{x} + \mathbf{B}_0\mathbf{u}$ es completamente controlable. \square

Proposición 3.32. *Existe una ley de control óptima \mathbf{u} que vuelve el origen $(\mathbf{x}, \mathbf{u}) \equiv (\mathbf{0}, \mathbf{0})$ del sistema (2.15) es un punto de equilibrio localmente asintóticamente estable.*

Demostración. Dado que la linealización del sistema es completamente controlable (**Proposición 3.31**), entonces por el **Teorema 3.13**, existe una asignación para la variable de control \mathbf{u} de la forma $\mathbf{u} = -\mathbf{K}\mathbf{x}$, tal que el origen que originalmente es inestable (**Proposición 3.29**), se transforme en un punto de equilibrio localmente asintóticamente estable. Por último, por el **Teorema 3.19**, dicha ley de control puede elegirse de forma óptima, en el sentido de que minimice el funcional de la Ec. (3.7). \square

3.3. Control de Locomoción

En esta sección se presenta el diseño de la variable de control \mathbf{u} que al ser retroalimentada en el sistema (2.15) produzca una caminata estable para el bípido. En su nivel más elemental consiste en mantener el torso semi-erecto y lograr el avance de la pierna de balanceo (pasar de atrás de la pierna de soporte a el frente de la misma) mientras prepara el contacto con el suelo, en concordancia con las **Hipótesis HC4, HC5 y HC6** de la **Sección 2.2** del capítulo anterior.

Proposición 3.33. *Supóngase que $m_i, l_i > 0$ para $i = 1, \dots, 7$. Sea $\mathbf{h} : \mathbb{R}^6 \rightarrow \mathbb{R}^6$ una salida del sistema (2.15) definida como*

$$\mathbf{y} := \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \\ y_5 \\ y_6 \end{bmatrix} := \begin{bmatrix} \mathbf{P}_5^x - (p^x + s) \\ \mathbf{P}_5^y - \gamma(\mathbf{P}_5^x) \\ \mathbf{P}_3^x - (p^x + \mu s) \\ q_3 \\ q_6 \\ q_7 \end{bmatrix} =: \mathbf{h}(\mathbf{q}), \quad (3.28)$$

donde \mathbf{q} es el vector de coordenadas generalizadas del bípido (ver Ec. (2.5)), \mathbf{P}_3 y \mathbf{P}_5 son las coordenadas cartesianas del pie de balanceo y de la cadera del bípido, respectivamente (ver **Sección 2.3.1**). El vector $(p^x, p^y, 0) \in \mathbb{R}^3$ representa las coordenadas cartesianas del pie de soporte, s es una constante tal que $0 < s < 2l_2$, la función $\gamma : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ está dada por

$$\gamma(u) := -\frac{d^2}{s^2}(u - p^x)^2 + d,$$

donde d es una constante tal que $0 < d < 2l_2$ y $\mu \equiv \frac{1}{2}$. Entonces $\mathbf{T} : \mathbb{R}^{12} \rightarrow \mathbb{R}^{12}$ definida por

$$(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) \mapsto \left(\mathbf{h}(\mathbf{q}), \frac{\partial \mathbf{h}(\mathbf{q})}{\partial \mathbf{q}} \dot{\mathbf{q}} \right) \quad (3.29)$$

expresa un difeomorfismo local para cada \mathbf{x} en el conjunto

$$\mathcal{X} := \{(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) \in \mathbb{R}^{12} \mid |q_i| < \frac{\pi}{2}, q_5 - q_4 < 0, \|\dot{\mathbf{q}}\| \leq M\}. \quad (3.30)$$

Demostración. Sea $\mathbf{x} := (\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})$. Entonces la matriz jacobiana de \mathbf{T} respecto a \mathbf{x} está dado por la siguiente matriz por bloques

$$\mathbf{J}_T := \frac{\partial \mathbf{T}(\mathbf{x})}{\partial \mathbf{x}} = \begin{bmatrix} \frac{\partial \mathbf{h}(\mathbf{q})}{\partial \mathbf{q}} & \mathbf{0}_{6 \times 6} \\ \frac{\partial^2 \mathbf{h}(\mathbf{q})}{\partial \mathbf{q}^2} \dot{\mathbf{q}} & \frac{\partial \mathbf{h}(\mathbf{q})}{\partial \mathbf{q}} \end{bmatrix}.$$

Luego

$$\det(\mathbf{J}_T) = \left(\det\left(\frac{\partial \mathbf{h}(\mathbf{q})}{\partial \mathbf{q}}\right) \right)^2 = (8l_2l_4l_5 \cos q_2 \sin(q_4 - q_5))^2, \quad (3.31)$$

lo que implica que \mathbf{J}_T es no singular para cada $\mathbf{x} \in \mathcal{X}$. Además \mathbf{h} es al menos dos veces continuamente diferenciable, lo que implica que \mathbf{T} es continuamente diferenciable, por lo tanto, $\mathbf{T} : \mathcal{X} \rightarrow \mathbb{R}^{12}$ define un difeomorfismo local para cada $\mathbf{x} \in \mathcal{X}$. \square

Observación 3.34. El parámetro $0 < s < 2l_2$ permite ajustar el máximo desplazamiento horizontal del pie de balanceo en cada paso. Con la función γ se busca que el desplazamiento vertical del pie de balanceo siga una parábola, esto para evitar que el pie de balanceo realice contacto con el suelo antes de que el bípedo logre alcanzar una configuración adecuada para dar el paso. La constante $0 < d < 2l_2$ es un parámetro que determina la altura máxima del pie de balanceo al dar el paso. Con $\mu \equiv \frac{1}{2}$ se puede ajustar la configuración que adopta el bípedo cuando el pie de balanceo hace contacto con el suelo, de tal forma que exista simetría al dar el paso. En esta tesis los parámetros anteriores se eligen de tal forma que se logre una caminata conforme a las hipótesis planteadas en la **Sección 2.2**. Sin embargo, dicha elección puede no proporcionar una caminata natural (con respecto a una persona) o energéticamente eficiente.

Observación 3.35. El espacio de estados restringido \mathcal{X} de la Ec. (3.30) es claramente abierto y conexo, por lo que se satisface la hipótesis **SH1** (**Sección 2.3.4**) del sistema híbrido.

Observación 3.36. **Si las soluciones del sistema para el bípedo se mantienen en 3.30, entonces el bípedo no puede extender por completo la pierna de balanceo.**

Observación 3.37. Notar que conforme $\mathbf{h}(\mathbf{q}) \rightarrow \mathbf{0} \in \mathbb{R}^6$, el bípedo adopta una configuración adecuada para dar un paso, por lo que el objetivo de control es hacer que la salida $\mathbf{y} = \mathbf{h}(\mathbf{q})$ tenga convergencia al origen.

Observación 3.38. Para los resultados presentes en el resto de este capítulo, se conserva el uso de la variable de estado \mathbf{x} definida en términos del vector de coordenadas generalizadas como $\mathbf{x} := (\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})$.

Observación 3.39. Bajo las hipótesis de simetría de las piernas del bípedo, la matriz jacobiana $\frac{\partial \mathbf{h}(\mathbf{q})}{\partial \mathbf{q}}$ está dada por

$$\frac{\partial \mathbf{h}(\mathbf{q})}{\partial \mathbf{q}} = \begin{bmatrix} -2l_5 \cos(q_2) & -2l_4 \cos(q_3) & 2l_4 \cos(q_4) & 2l_5 \cos(q_5) & 0 & 0 \\ j_{2,1} & j_{2,2} & j_{2,3} & j_{2,4} & 0 & 0 \\ -2l_5 \cos(q_2) & -2l_4 \cos(q_3) & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

donde

$$\begin{aligned} j_{2,1} &= 2l_5 \left(\frac{4d \cos(q_2) (l_4 (\sin(q_3) - \sin(q_4)) + l_5 (\sin(q_2) - \sin(q_5)))}{s^2} - \sin(q_2) \right), \\ j_{2,2} &= 2l_4 \left(\frac{4d \cos(q_3) (l_4 (\sin(q_3) - \sin(q_4)) + l_5 (\sin(q_2) - \sin(q_5)))}{s^2} - \sin(q_3) \right), \\ j_{2,3} &= 2l_4 \left(\frac{4d \cos(q_4) (l_4 (\sin(q_4) - \sin(q_3)) + l_5 (\sin(q_5) - \sin(q_2)))}{s^2} + \sin(q_4) \right), \\ j_{2,4} &= 2l_5 \left(\frac{4d \cos(q_5) (l_4 (\sin(q_4) - \sin(q_3)) + l_5 (\sin(q_5) - \sin(q_2)))}{s^2} + \sin(q_5) \right). \end{aligned}$$

Proposición 3.40. *Existe $\mathbf{x} \in \mathcal{X}$ tal que $\mathbf{T}(\mathbf{x}) = \mathbf{0} \in \mathbb{R}^{12}$.*

Demostración. Sea $\mathbf{x}^* := (\mathbf{q}^*, \dot{\mathbf{q}}^*)$, con $\mathbf{q}^* := (q_2^*, 0, -q_2^*, 0, 0, 0)$, donde q_2^* satisfice

$$-2l_2 \sin(q_2^*) = \frac{1}{2}s,$$

cuya solución existe y satisfice $-\frac{\pi}{6} < q_2 < 0$ para cada $0 < s < 2l_2$ y $\dot{\mathbf{q}}^* = \mathbf{0} \in \mathbb{R}^6$. Entonces $\mathbf{x}^* \in \mathcal{X}$ y se cumple que $\mathbf{T}(\mathbf{x}^*) = \mathbf{0} \in \mathbb{R}^{12}$ pues

$$\begin{aligned} y_1(\mathbf{q}^*) &= -2l_2 \sin(q_2(t)) - 2l_3 \sin(q_3(t)) + 2l_4 \sin(q_4(t)) + 2l_5 \sin(q_5(t)) - s \\ &= -2l_2 \sin(q_2^*) - 2l_3 \sin(0) + 2l_4 \sin(-q_2^*) + 2l_5 \sin(0) - s, \\ &= -4l_2 \sin(q_2^*) - s = s - s = 0. \end{aligned}$$

Por la definición de \mathbf{y} , si $y_1 = 0$ entonces $\mathbf{P}_5^{(x)} = p^x + s$, por lo que la segunda componente de la salida evaluada en \mathbf{q}^* está dada por

$$\begin{aligned} y_2(\mathbf{q}^*) &= 2l_2 \cos(q_2) + 2l_3 \cos(q_3) - 2l_4 \cos(q_4) - 2l_5 \cos(q_5) + p^y, \\ &= \mathbf{P}_5^{(y)}(\mathbf{q}^*) - \gamma(\mathbf{P}_5^{(x)}(\mathbf{q}^*)), \\ &= 2l_2 \cos(q_2^*) + 2l_3 \cos(0) - 2l_4 \cos(-q_2^*) - 2l_5 \cos(0) + p^y = 0. \end{aligned}$$

La tercer componente de la salida está dada por

$$\begin{aligned} y_3(\mathbf{q}^*) &= -2l_2 \operatorname{sen}(q_2) - 2l_3 \operatorname{sen}(q_3) + \mu(-s), \\ &= -2l_2 \operatorname{sen}(q_2^*) - 2l_3 \operatorname{sen}(0) + \mu(-s), \\ &= \frac{1}{2}s - \frac{1}{2}s = 0. \end{aligned}$$

La verificación de $y_4 = y_5 = y_6 = 0$ es trivial. Por lo anterior se concluye que $\mathbf{T}(\mathbf{q}^*, \dot{\mathbf{q}}^*) = \left(\mathbf{h}(\mathbf{q}^*), \frac{\partial \mathbf{h}(\mathbf{q}^*)}{\partial \dot{\mathbf{q}}} \dot{\mathbf{q}}^* \right) = \mathbf{0} \in \mathbb{R}^{12}$. \square

Proposición 3.41. *El sistema (2.15) es linealizable en \mathcal{X} bajo el difeomorfismo $\mathbf{T} : \mathcal{X} \rightarrow \mathbb{R}^{12}$ definido en la Ec. (3.29). Además el sistema linealizado para la variable $\mathbf{z} := \mathbf{T}(\mathbf{x})$ adopta la siguiente expresión*

$$\dot{\mathbf{z}} = \mathbf{A}_z \mathbf{z} + \mathbf{B}_z (\mathbf{v} + \mathbf{w}(t)), \quad (3.32)$$

donde \mathbf{A}_z y \mathbf{B}_z son matrices por bloques dadas por

$$\begin{aligned} \mathbf{A}_z &= \begin{bmatrix} \mathbf{0}_{6 \times 6} & \mathbf{I}_{6 \times 6} \\ \mathbf{0}_{6 \times 6} & \mathbf{0}_{6 \times 6} \end{bmatrix}, \\ \mathbf{B}_z &= \begin{bmatrix} \mathbf{0}_{6 \times 6} \\ \mathbf{I}_{6 \times 6} \end{bmatrix}, \end{aligned}$$

la perturbación $\mathbf{w}(t)$ está dada por

$$\mathbf{w}(t) = \frac{\partial \mathbf{T}(\mathbf{x})}{\partial \mathbf{x}} \mathbf{g}(\mathbf{x}) \boldsymbol{\omega}(t), \quad (3.33)$$

y \mathbf{v} es una variable de control auxiliar obtenida a través de la asignación para \mathbf{u} siguiente

$$\mathbf{u} := \boldsymbol{\beta}^{-1}(\mathbf{x}) \mathbf{v} + \boldsymbol{\alpha}(\mathbf{x}), \quad (3.34)$$

donde $\boldsymbol{\beta}(\mathbf{x}) = \frac{\partial \mathbf{h}(\mathbf{q})}{\partial \dot{\mathbf{q}}} \mathbf{B}^{-1}(\mathbf{q})$ y $\boldsymbol{\alpha}(\mathbf{x}) = \mathbf{C}(\mathbf{x}) + \mathbf{G}(\mathbf{q}) - \mathbf{B}(\mathbf{q}) \frac{\partial \mathbf{h}(\mathbf{q})}{\partial \dot{\mathbf{q}}}^{-1} \frac{\partial^2 \mathbf{h}(\mathbf{q})}{\partial \mathbf{q}^2} (\dot{\mathbf{q}}, \dot{\mathbf{q}})$, siendo $\mathbf{B}, \mathbf{C}, \mathbf{G}$ las matrices del sistema (2.15) y \mathbf{h} expresada por la Ec. (3.28).

Demostración. Claramente el sistema (2.15) tiene la forma del sistema de la Ec. (3.10). Por la **Proposición 3.33** y **3.40** se tiene que \mathbf{T} satisface las hipótesis de la **Definición 3.20**. Mediante la regla de la cadena se obtiene que

$$\dot{\mathbf{z}} = \frac{\partial \mathbf{T}(\mathbf{x})}{\partial \mathbf{x}} \dot{\mathbf{x}} = \frac{\partial \mathbf{T}(\mathbf{x})}{\partial \mathbf{x}} \left(\begin{bmatrix} \dot{\mathbf{q}} \\ -\mathbf{B}^{-1}(\mathbf{q}) (\mathbf{C}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) \dot{\mathbf{q}} + \mathbf{G}(\mathbf{q})) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{0}_{6 \times 6} \\ -\mathbf{B}^{-1}(\mathbf{q}) \end{bmatrix} (\mathbf{u} + \boldsymbol{\omega}(t)) \right),$$

por lo que si $\mathbf{u} = \beta^{-1}(\mathbf{x})\mathbf{v} + \alpha(\mathbf{x})$, con $\beta(\mathbf{x})$ y $\alpha(\mathbf{x})$ como en el enunciado y $\mathbf{w}(t) := \frac{\partial \mathbf{T}(\mathbf{x})}{\partial \mathbf{x}} \mathbf{g}(\mathbf{x}) \boldsymbol{\omega}(t)$, entonces el sistema anterior adopta la expresión

$$\dot{\mathbf{z}} = \mathbf{A}_z \mathbf{z} + \mathbf{B}_z (\mathbf{v} + \mathbf{w}(t)).$$

El término $\beta(\mathbf{x})$ es no singular ya que $\frac{\partial \mathbf{h}(\mathbf{q})}{\partial \mathbf{q}}$ es invertible para cada $\mathbf{x} \in \mathcal{X}$ (ver Ec. (3.31)) y $\mathbf{B}(\mathbf{q})$ es definida positiva, por lo que el producto $\frac{\partial \mathbf{h}(\mathbf{q})}{\partial \mathbf{q}} \mathbf{B}^{-1}(\mathbf{q})$ es invertible y su inversa está dada por

$$\beta^{-1}(\mathbf{x}) = \mathbf{B}(\mathbf{q}) \frac{\partial \mathbf{h}(\mathbf{q})}{\partial \mathbf{q}}^{-1}.$$

Por último, considérese la matriz de controlabilidad

$$\mathbf{K}_z = \begin{bmatrix} \mathbf{B}_z & \mathbf{A}_z \mathbf{B}_z & \mathbf{A}_z^2 \mathbf{B}_z & \dots & \mathbf{A}_z^{11} \mathbf{B}_z \end{bmatrix}.$$

Puesto que $\mathbf{A}_z^k \equiv \mathbf{0}_{12 \times 12}$ para $k \geq 2$, entonces

$$\mathbf{K}_z = \begin{bmatrix} \mathbf{B}_z & \mathbf{A}_z \mathbf{B}_z & \mathbf{0}_{12 \times 6} & \dots & \mathbf{0}_{12 \times 6} \end{bmatrix}.$$

Luego $\mathbf{A}_z \mathbf{B}_z = \begin{bmatrix} \mathbf{I}_{6 \times 6} \\ \mathbf{0}_{6 \times 6} \end{bmatrix}$ y $\mathbf{B}_z = \begin{bmatrix} \mathbf{0}_{6 \times 6} \\ \mathbf{I}_{6 \times 6} \end{bmatrix}$, lo que implica que $\text{rango}(\mathbf{K}_z) = 12$, por lo que por el **Teorema 3.11** se concluye que el sistema linealizado es controlable. \square

Observación 3.42. Aún y cuando la asignación para \mathbf{u} linealiza el sistema (2.15), el término $\mathbf{w}(t)$ que puede ser no lineal (dependiendo de $\boldsymbol{\omega}(t)$), no es anulado con la asignación anterior para \mathbf{u} . Ésto es porque se desea mantener cierto grado de incertidumbre en la perturbación que afecta al sistema. En la **Sección 3.4** se estudia el efecto de esta perturbación en el comportamiento del sistema.

Observación 3.43. El sistema de la Ec. (3.32) consiste en 6 dobles integradores desacoplados como los de la Ec. (3.14).

A continuación se presentan diferentes resultados para lograr que el origen del sistema (3.32) sea estable. Primeramente se presenta un control lineal que permite estabilidad exponencial. Posteriormente se presenta la aplicación de los esquemas de control *twisting* descritos en la **Sección 3.1.2.1**.

Proposición 3.44. *Supóngase que $\boldsymbol{\omega}(t) \equiv \mathbf{0}$. Entonces el origen del sistema de la Ec. (3.32) es un punto de equilibrio globalmente exponencialmente estable bajo la asignación de la variable \mathbf{v} dada por*

$$\mathbf{v} = -\mathbf{K}_1 \dot{\mathbf{y}} - \mathbf{K}_2 \mathbf{y}, \tag{3.35}$$

donde las matrices \mathbf{K}_j para $j = 1, 2$ son matrices diagonales dadas por:

$$\mathbf{K}_j = \text{diag}(k_{j,i}), \quad k_{ji} > 0 \quad i = 1, \dots, 6.$$

Demostración. Considérese de forma separada a los dobles integradores que conforman al sistema y que están dados por

$$\frac{d}{dt} \begin{bmatrix} z_i \\ \dot{z}_i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -k_{2,i} & -k_{1,i} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z_i \\ \dot{z}_i \end{bmatrix} =: \mathbf{A}_i \begin{bmatrix} z_i \\ \dot{z}_i \end{bmatrix}, \quad i = 1, \dots, 6.$$

Los eigenvalores de \mathbf{A}_i que están dados por

$$\text{Spec}(\mathbf{A}_i) = \left\{ \frac{1}{2}(-k_{1,i} \pm \sqrt{k_{1,i}^2 - 4k_{2,i}}) \right\}.$$

Por lo que es claro que si $k_{ji} > 0$ para $i = 1, \dots, 6$ y para $j = 1, 2$, entonces $\text{Re}(\lambda) < 0$ para cada $\lambda \in \text{Spec}(\mathbf{A}_i)$, lo que implica que el origen de cada doble integrador es un punto de equilibrio exponencialmente estable. Por lo anterior se concluye que el origen del sistema completo es un punto de equilibrio exponencialmente estable. \square

Proposición 3.45. *Supóngase que $\omega(t) \equiv \mathbf{0}$. Entonces el origen del sistema de la Ec. (3.32) es un punto de equilibrio globalmente asintóticamente estable en tiempo finito bajo la asignación de la variable \mathbf{v} dada por*¹

$$\mathbf{v} = -\mathbf{K}_1 |\dot{\mathbf{y}}|^\alpha \text{sign}(\dot{\mathbf{y}}) - \mathbf{K}_2 |\mathbf{y}|^{\frac{\alpha}{2-\alpha}} \text{sign}(\mathbf{y}), \quad (3.36)$$

donde $0 \leq \alpha < 1$ y las matrices \mathbf{K}_j para $j = 1, 2$ son matrices diagonales dadas por:

$$\mathbf{K}_j = \text{diag}(k_{j,i}), \quad k_{ji} > 0 \quad i = 1, \dots, 6.$$

Por otra parte, el tiempo de asentamiento está dado por

$$t_a = \max\{t_1, \dots, t_6\},$$

donde t_1, \dots, t_6 son los tiempos de asentamiento al origen de los dobles integradores

$$\frac{d}{dt} \begin{bmatrix} z_i \\ \dot{z}_i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dot{z}_i \\ \mathbf{v}^{(i)} \end{bmatrix} \quad i = 1, \dots, 6.$$

Demostración. Tomando en cuenta la *Observación 3.43*, si $\alpha = 0$ la demostración se sigue directamente del **Teorema 3.25**, mientras que si $\alpha \in]0, 1[$ el resultado se cumple a partir del **Teorema 3.24**. Ambos casos son aplicados de forma individual para cada

¹Si $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$, entonces se considera que $\text{sign}(\mathbf{x}) = (\text{sign}(x_1), \dots, \text{sign}(x_n))$.

subsistema doble integrador. Además al suponer $\boldsymbol{\omega}(t) \equiv \mathbf{0}$ entonces $w = 0$ en la Ec. (3.14). \square

Observación 3.46. Aún y cuando la variable de control auxiliar dada en la Ec. (3.36) transforme el origen del sistema de la Ec. (3.32) en un punto de equilibrio globalmente asintóticamente estable, es preciso restringir las condiciones iniciales del sistema a la imagen $\mathbf{T}(\mathcal{X})$, ya que \mathcal{X} es el dominio de validez de la linealización del sistema (2.15) a través del difeomorfismo \mathbf{T} .

Observación 3.47. Bajo la suposición $\boldsymbol{\omega}(t) \equiv \mathbf{0}$ y la ley de control (3.36) se tiene que para el caso $\alpha = 0$, la variable de control auxiliar \mathbf{v} es continua a trozos (pierde continuidad en los ejes $z_i(t) = 0$ y $\dot{z}_i(t) = 0$), mientras que para el caso $0 < \alpha < 1$, \mathbf{v} es continua. Debido a la asignación de la variable de control \mathbf{u} según la Ec. (3.34) y por las propiedades de los campos vectoriales \mathbf{f} y \mathbf{g} se tiene que el sistema (3.2) es continuo a trozos cuando $\alpha = 0$ y continuo cuando $0 < \alpha < 1$. Para el caso del control lineal (**Proposición 3.44**), el sistema (3.2) es continuamente diferenciable en \mathcal{X} .

Observación 3.48. Para la variable de control lineal \mathbf{v} de la Ec.(3.35) se tiene que el sistema en retroalimentación (3.32) es un sistema lineal. Esto implica que el sistema (3.2) tiene dependencia continua de condiciones iniciales.

Proposición 3.49. *Para la parte continua del sistema híbrido (3.1) supóngase que $\boldsymbol{\omega}(t) \equiv \mathbf{0}$ y que las variables de control \mathbf{u} y \mathbf{v} se definen a partir de las Ecs. (3.34) y (3.36) respectivamente. Entonces para cada $\mathbf{x}_0 \in \mathcal{X}$ existe $0 < t^* < \infty$ tal que la solución $\boldsymbol{\varphi}_t^f(\mathbf{x}_0)$ de (3.2) satisface $\boldsymbol{\varphi}_{t^*}^f(\mathbf{x}_0) \in \mathcal{S}$.*

Demostración. Supóngase que \mathbf{u} y \mathbf{v} se definen según el enunciado. Denótese por $\boldsymbol{\varphi}^f$ y $\boldsymbol{\varphi}$ los flujos de los sistemas (3.2) y (3.32) respectivamente. Sea $\mathbf{x}_0 \in \mathcal{S}$ y sean $t_1, t_2 < \infty$ los tiempos de asentamiento de los dobles integradores

$$\frac{d}{dt} \begin{bmatrix} z_i \\ \dot{z}_i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dot{z}_i \\ \mathbf{v}^{(i)} \end{bmatrix} \quad i = 1, 2.$$

Si se define $t^* := \max\{t_1, t_2\}$, entonces $\boldsymbol{\varphi}_{t^*}(\mathbf{T}(\mathbf{x}_0))^i = 0$ para $i = 1, 2$. Dado que $\mathbf{z} := \mathbf{T}(\mathbf{x}) = \left(\mathbf{h}(\mathbf{q}), \frac{\partial \mathbf{h}(\mathbf{q})}{\partial \mathbf{q}} \dot{\mathbf{q}} \right)$, entonces de acuerdo a la definición de \mathbf{h} (Ec. (3.28)) se tiene que si $z_1 = z_2 = 0$ entonces $\mathbf{P}_5^x(\mathbf{T}^{-1}(\boldsymbol{\varphi}_{t^*}(\mathbf{T}(\mathbf{x}_0)))) = p^x + s$ y $\mathbf{P}_5^y(\mathbf{T}^{-1}(\boldsymbol{\varphi}_{t^*}(\mathbf{T}(\mathbf{x}_0)))) = \gamma(\mathbf{P}_5^x(\mathbf{T}^{-1}(\boldsymbol{\varphi}_{t^*}(\mathbf{T}(\mathbf{x}_0)))) = \gamma(p^x + s) = 0$. Luego, dado que $H(\mathbf{x}) = \mathbf{P}_5^y(\mathbf{q})$, entonces $H(\mathbf{T}^{-1}(\boldsymbol{\varphi}_{t^*}(\mathbf{T}(\mathbf{x}_0)))) = 0$, por lo tanto $\boldsymbol{\varphi}_{t^*}^f(\mathbf{x}_0) \in \mathcal{S}$. \square

Observación 3.50. Supóngase que $t_5 > t^*$ donde t^* está dada en la demostración de la proposición anterior. Entonces $\boldsymbol{\varphi}_{t^*}(\mathbf{x}_0) \in \mathcal{S}$ para algún $\mathbf{x}_0 \in \mathcal{X}$. Sin embargo no hay certeza de que $z_5(t^*) = q_6(t^*) = 0$, esto implica que el bípido no tiene una configuración

adecuada para dar el paso según la hipótesis **HI3** de la **Sección 2.3.3**. Con esto, es evidente que no es suficiente hacer que el origen del sistema (3.32) sea asintóticamente estable para lograr que el bípido describa una caminata estable consistente con las hipótesis planteadas en el capítulo anterior.

De acuerdo a la observación anterior se debe tener en cuenta una *sintonización* de las entradas de las matrices $\mathbf{K}_1, \mathbf{K}_2$ de tal forma que los subsistemas

$$\frac{d}{dt} \begin{bmatrix} z_i \\ \dot{z}_i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dot{z}_i \\ \mathbf{v}^{(i)} \end{bmatrix} \quad i = 1, \dots, 6.$$

tengan tiempos de asentamiento que permitan al bípido adoptar una configuración adecuada al momento del evento de colisión con el suelo. En particular se busca que el pie de balanceo sea completamente paralelo al suelo al momento de la colisión (hipótesis **HI3** de la **Sección 2.3.3**). Para lograr lo anterior se usa el **Lema 3.26** presente en la **Sección 3.1.2.2**.

Proposición 3.51. Sean r_1, \dots, r_6 las cotas superiores de la norma euclidiana de las condiciones iniciales $(z_i(t_0), \dot{z}_i(t_0))$ de cada doble integrador

$$\frac{d}{dt} \begin{bmatrix} z_i \\ \dot{z}_i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dot{z}_i \\ \mathbf{v}^{(i)} \end{bmatrix} \quad i = 1, \dots, 6,$$

con tiempos de asentamiento al origen denotados por $t_a^{(i)}$, para $i = 1, \dots, 6$. Supóngase que la variable de control auxiliar \mathbf{v} está dada según la Ec. (3.36) con la asignación $\alpha = 0$. Entonces existen constantes $k_{j,i} > 0$ tales que

$$t_d^{(i)} \leq t_a^{(1)} \quad \text{para } i = 2, \dots, 6, \quad (3.37)$$

donde $t_d^{(i)}$ es una cota superior de cada $t_a^{(i)}$.

Demostración. Sean $\beta > 1$, $\eta \in]0, 1[$ y $\varepsilon_t, \rho \in]0, 1[$ constantes fijas para cada uno de los dobles integradores. Sean además $R_i = \frac{r_i^2}{2}$ y $\delta_i := 2 \frac{r_i(\beta+1)}{\beta-1}$ para $i = 1, \dots, 6$. Al suponer que no hay perturbaciones, entonces $M_i = 0$ para $i = 1, \dots, 6$. Si se toman valores $r_1 > 0$ y $t_0 < t_d^{(1)} < \infty$ y además se supone que $k_{j,1}$ satisface las condiciones (3.20) y (3.22) del **Lema 3.26** para $j = 1, 2$, entonces a partir de la asignación para δ_1 dada se tiene a partir de (3.22) que

$$c_1 \frac{r_1}{k_{1,1}} \leq t_a^{(1)} \leq t_d^{(1)},$$

donde $c_1 = 2 \frac{(\sqrt{1-\eta^2}+1)(\beta+1)}{\sqrt{1-\eta^2}(\beta-1)}$. Luego si se elige $t_d^i \leq c_1 \frac{r_1}{k_{1,1}}$ siempre es posible hallar constantes $k_{j,i}$ para $j = 1, 2$ e $i = 2, \dots, 6$ que cumplan las condiciones (3.20) y (3.22). Por lo tanto

$$c_1 \frac{r_i}{k_{j,i}} \leq t_a^{(i)} \leq t_d^{(i)} \leq t_a^{(1)} \quad \text{para } i = 2, \dots, 6 \text{ y } j = 1, 2.$$

□

Observación 3.52. La proposición anterior permite sintonizar las ganancias $k_{j,i}$ de las matrices \mathbf{K}_j para la variable \mathbf{v} definida por la Ec. (3.36) en el caso $\alpha = 0$, de tal forma que el bípido adopte alguna configuración deseada antes del evento de colisión. El caso $\alpha = 0$ es de particular interés debido a que como se presenta en la siguiente sección, permite estabilización robusta al origen frente a perturbaciones uniformemente acotadas. Específicamente se busca que éste adopte una configuración pre-impacto dada por \mathbf{q}^* (ver **Proposición 3.40**). Aún y cuando el problema de sintonizar los parámetros de control para el caso $0 < \alpha < 1$ sea un problema abierto, intuitivamente es posible lograr (al menos para un caso en particular numérico) diferentes tasas de convergencia al origen de los dobles integradores, esto, a través de una elección de las constantes $k_{1,i}, k_{2,i}$ para $i = 2, \dots, 6$ suficientemente grandes, mientras que para $k_{1,1}, k_{2,1}$ se puede hacer una elección suficientemente pequeña. Estas ideas se toman en cuenta para realizar una sintonización manual cuyos resultados numéricos se presentan en la **Sección 3.5** que permitan un cruce transversal del flujo φ del sistema (3.2) por la hiper-superficie \mathcal{S} en tiempo finito. Lo anterior también se realiza para el control lineal (**Proposición 3.44**) siguiendo las ideas presentadas en la **Sección 3.1.2.3**.

Observación 3.53. Por simplicidad se toma a $(\mathbf{q}_0, \dot{\mathbf{q}}_0) := \Delta(\mathbf{q}^*, \mathbf{0})$ como la condición inicial del sistema híbrido (3.1) donde Δ es la aplicación de impacto descrita en la **Sección 2.3.3** y \mathbf{q}^* está dada en la prueba de la **Proposición 3.40**. La configuración \mathbf{q}_0 representa la configuración del bípido en un instante posterior al impacto, realizado con una configuración \mathbf{q}^* . Ambas configuraciones son esencialmente la misma salvo por un re-ordenamiento de las variables q_i .

3.4. Estudio de Robustez

En esta sección se estudia el efecto de la perturbación $\omega(t)$ en el sistema linealizado (3.32). Dicha perturbación se ve reflejada en el término $\mathbf{w}^{(i)}(z_i, \dot{z}_i, t)$ de los subsistemas

doble integrador

$$\frac{d}{dt} \begin{bmatrix} z_i \\ \dot{z}_i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dot{z}_i \\ \mathbf{v}^{(i)} + \mathbf{w}^{(i)}(t) \end{bmatrix}, \quad (3.38)$$

para algún conjunto de índices $\mathcal{I} \subset \{1, \dots, 6\}$. El término $\mathbf{w}(t)$ está dado según las Ecs. (3.33) y (2.15) por

$$\begin{aligned} \mathbf{w}(t) &= \frac{\partial \mathbf{T}(\mathbf{x})}{\partial \mathbf{x}} \mathbf{g}(\mathbf{x}) \boldsymbol{\omega}(t), \\ &= \frac{\partial \mathbf{T}(\mathbf{x})}{\partial \mathbf{x}} \mathbf{g}(\mathbf{x}) \left(\frac{\partial \mathbf{Q}_7(\mathbf{q})}{\partial \mathbf{q}} \right)^T \mathbf{F}(t), \\ &= \begin{bmatrix} \frac{\partial \mathbf{h}(\mathbf{q})}{\partial \mathbf{q}} & \mathbf{0}_{6 \times 6} \\ \frac{\partial^2 \mathbf{h}(\mathbf{q})}{\partial \mathbf{q}^2} \dot{\mathbf{q}} & \frac{\partial \mathbf{h}(\mathbf{q})}{\partial \mathbf{q}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{0}_{6 \times 6} \\ -\mathbf{B}^{-1}(\mathbf{q}) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -2l_2 \cos(q_2) & -2l_2 \operatorname{sen}(q_2) \\ -2l_3 \cos(q_3) & -2l_3 \operatorname{sen}(q_3) \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ -l_7 \cos(q_7) & -l_7 \operatorname{sen}(q_7) \end{bmatrix} \mathbf{F}(t), \\ &= \begin{bmatrix} \mathbf{0}_{6 \times 6} \\ -\frac{\partial \mathbf{h}(\mathbf{q})}{\partial \mathbf{q}} \mathbf{B}^{-1}(\mathbf{q}) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -2l_2 \cos(q_2) & -2l_2 \operatorname{sen}(q_2) \\ -2l_3 \cos(q_3) & -2l_3 \operatorname{sen}(q_3) \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ -l_7 \cos(q_7) & -l_7 \operatorname{sen}(q_7) \end{bmatrix} \mathbf{F}(t). \end{aligned}$$

La variable de control auxiliar \mathbf{v} descrita por la Ec. (3.36) puede ser escrita por componentes como

$$\mathbf{v}^{(i)} = -k_{1,i} |\dot{z}_i|^\alpha \operatorname{sign}(\dot{z}_i) - k_{2,i} |z_i|^{\frac{\alpha}{2-\alpha}} \operatorname{sign}(z_i), \quad (3.39)$$

con $0 \leq \alpha < 1$ y $k_{ji} > 0$.

Supóngase que $\mathbf{F}(t) = \begin{bmatrix} F_x(t) & 0 \end{bmatrix}$, entonces la expresión anterior para $\mathbf{w}(t)$ se simplifica a

$$\mathbf{w}(t) = F_x(t) \begin{bmatrix} \mathbf{0}_{6 \times 6} \\ \frac{\partial \mathbf{h}(\mathbf{q})}{\partial \mathbf{q}} \mathbf{B}^{-1}(\mathbf{q}) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2l_2 \cos(q_2) \\ 2l_3 \cos(q_3) \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ l_7 \cos(q_7) \end{bmatrix}. \quad (3.40)$$

Físicamente la perturbación $\boldsymbol{\omega}(t) = (\frac{\partial \mathbf{Q}_7(\mathbf{q})}{\partial \mathbf{q}})^T \mathbf{F}(t)$, con $\mathbf{F}(t) = \begin{bmatrix} F_x(t) & 0 \end{bmatrix}$, representa un empujón horizontal sobre el bípodo aplicado sobre el centro de masa del torso.

Afirmación 3.54. *Existen escalares no negativos $a, b < +\infty$ tales que para cada $\mathbf{q} \in \mathbb{R}^6$, se cumple donde para $\|A\|_1 = \max_{1 \leq j \leq n} \sum_{i=1}^m |a_{ij}|$.*

$$\begin{aligned} \|\mathbf{B}^{-1}(\mathbf{q})\|_1 &\leq a \\ \left\| \frac{\partial \mathbf{h}(\mathbf{q})}{\partial \mathbf{q}} \right\|_1 &\leq b. \end{aligned}$$

Demostración. La prueba se sigue directamente del hecho de que las matrices $\mathbf{B}(\mathbf{q})$ y $\frac{\partial \mathbf{h}(\mathbf{q})}{\partial \mathbf{q}}$ tiene entradas acotadas como se aprecia en sus expresiones explícitas en las *Observaciones 2.23 y 3.39*. Puesto que $\mathbf{B}(\mathbf{q})$ es invertible (pues es definida positiva), entonces su inversa tiene entradas acotadas. \square

Proposición 3.55. *Supóngase que $|F_x(t)| \leq F_{max}$ para cada $t \geq t_0$ y que $l_i, m_i > 0$ para $i = 1, \dots, 7$. Entonces la perturbación $\mathbf{w}(t)$ del sistema (3.32) dada por la Ec. (3.40) es uniformemente acotada, es decir*

$$\sup_{t \geq t_0} \|\mathbf{w}(t)\|_1 \leq M \quad (3.41)$$

para algún $M > 0$.

Demostración. De acuerdo a la definición de $\mathbf{w}(t)$ de la Ec. (3.40) se tiene que

$$\begin{aligned} \|\mathbf{w}(t)\|_1 &\leq |F_x(t)| \left\| \frac{\partial \mathbf{h}(\mathbf{q})}{\partial \mathbf{q}} \right\|_1 \|\mathbf{B}^{-1}(\mathbf{q})\|_1 \left\| \begin{bmatrix} 2l_2 \cos(q_2) \\ 2l_3 \cos(q_3) \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ l_7 \cos(q_7) \end{bmatrix} \right\|_1 \\ &\leq 2(l_2 + l_3 + \frac{l_7}{2}) F_{max} \left(\left\| \frac{\partial \mathbf{h}(\mathbf{q})}{\partial \mathbf{q}} \right\|_1 \|\mathbf{B}^{-1}(\mathbf{q})\|_1 \right). \end{aligned}$$

Por la **Afirmación 3.54**, existen escalares no negativos $a, b < +\infty$ tales que $\|\mathbf{B}^{-1}(\mathbf{q})\|_1 \leq a$ y $\left\| \frac{\partial \mathbf{h}(\mathbf{q})}{\partial \mathbf{q}} \right\|_1 \leq b$, implicando que

$$\begin{aligned} \|\mathbf{w}(t)\|_1 &\leq 2(l_2 + l_3 + \frac{l_7}{2}) F_{max} \left(\left\| \frac{\partial \mathbf{h}(\mathbf{q})}{\partial \mathbf{q}} \right\|_1 \|\mathbf{B}^{-1}(\mathbf{q})\|_1 \right) \\ &\leq 2(l_2 + l_3 + \frac{l_7}{2}) F_{max} ab =: M, \end{aligned}$$

por tanto $\sup_{t \geq t_0} \|\mathbf{w}(t)\|_1 \leq M$. □

Proposición 3.56. *Supóngase que $\mathbf{w}(t)$ satisface (3.40). Si la variable de control \mathbf{v} se define por componentes según la Ec. (3.39) con la asignación $\alpha = 0$ y $0 < M < k_{2,i} < k_{1,i} - M$, con M dada en (3.41), entonces el origen de los subsistemas doble integrador de la Ec. (3.38) es globalmente asintóticamente estable en tiempo finito para cada $i = 1, \dots, 6$.*

Demostración. Debido a que $|\mathbf{w}^{(i)}(t)| \leq \|\mathbf{w}(t)\|_1 \leq M$, entonces la perturbación $\mathbf{w}^{(i)}(t)$ que actúa en el doble integrador

$$\frac{d}{dt} \begin{bmatrix} z_i \\ \dot{z}_i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dot{z}_i \\ \mathbf{v}^{(i)} + \mathbf{w}^{(i)}(t) \end{bmatrix},$$

es uniformemente acotada. Por otro lado, dado que $\alpha = 0$ y $0 < M < k_{2,i} < k_{1,i} - M$, entonces el **Teorema 3.25** implica que el origen del sistema es globalmente asintóticamente estable en tiempo finito. □

3.5. Resultados en Simulación Numérica

En este apartado se presentan resultados de simulación numérica del modelo del bípedo. Los resultados numéricos son obtenidos a través de un programa elaborado en Python² cuyos detalles están presentes en el **Apéndice B**. Para la simulación, se consideran los parámetros físicos que se presentan en el Cuadro (3.1), que como se observa corresponden a valores cercanos a las proporciones promedio de un humano adulto.

<i>vínculo</i>	longitud media l	masa m
$\mathcal{B}_1, \mathcal{B}_6$ (pies)	0.15 m	1 kg
$\mathcal{B}_2, \mathcal{B}_5$ (pantorrilla)	0.25 m	10 kg
$\mathcal{B}_3, \mathcal{B}_4$ (muslo)	0.25 m	10 kg
\mathcal{B}_7 (torso)	0.4 m	20 kg

CUADRO 3.1: Valores numéricos de los parámetros físicos del bípedo.

Estabilización local a puntos de equilibrio

En este apartado se presentan resultados numéricos correspondientes al desarrollo de la **Sección 3.2**, donde se estudia la estabilización local del origen del sistema $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x}) + \mathbf{g}(\mathbf{x})\mathbf{u}$ a través de un control lineal óptimo. Las matrices \mathbf{A}_0 y \mathbf{B}_0 del sistema linealizado en el origen dado por la Ec. (3.27) están dadas por

$$\mathbf{A}_0 = \begin{bmatrix} 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & 1.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 \\ 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & 1.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 \\ 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & 1.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 \\ 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & 1.0 & 0.0 & 0.0 \\ 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & 1.0 & 0.0 \\ 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & 1.0 \\ 196.777 & -208.471 & 39.853 & -8.856 & 0.0 & 1.692 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 \\ -252.57 & 354.363 & -126.253 & 28.056 & 0.0 & -5.36 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 \\ -83.69 & 218.838 & -217.891 & 87.66 & 0.0 & -5.502 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 \\ 27.897 & -72.946 & 131.49 & -88.08 & 0.0 & 1.834 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 \\ 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 \\ 66.619 & -174.2 & 103.165 & -22.925 & 0.0 & 27.807 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 \end{bmatrix},$$

²<https://www.python.org/>

y

$$\mathbf{B}_0 = \begin{bmatrix} 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 \\ 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 \\ 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 \\ 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 \\ 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 \\ 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 \\ -1.274 & 1.635 & 0.542 & -0.181 & 0.0 & -0.431 \\ 1.635 & -2.779 & -1.716 & 0.572 & 0.0 & 1.366 \\ 0.542 & -1.716 & -2.961 & 1.787 & 0.0 & 1.402 \\ -0.181 & 0.572 & 1.787 & -1.796 & 0.0 & -0.467 \\ 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & -4.8 & 0.0 \\ -0.431 & 1.366 & 1.402 & -0.467 & 0.0 & -7.086 \end{bmatrix}.$$

Para el diseño de la variable de control \mathbf{u} son usadas las siguientes matrices \mathbf{Q} y \mathbf{R}

$$\mathbf{Q} = 10\mathbf{I}_{12 \times 12}$$

$$\mathbf{R} = \frac{1}{10}\mathbf{I}_{6 \times 6}.$$

La solución de la ecuación de Riccati (**Teorema 3.19**) con estas matrices resulta en la siguiente matriz simétrica definida positiva usando Python

$$\mathbf{P} = \begin{bmatrix} 724.842 & 337.696 & -137.409 & -73.682 & 0.0 & 3.811 & 168.012 & 131.89 & -65.651 & -39.172 & 0.0 & 4.7 \\ 337.696 & 460.108 & -126.936 & -61.554 & 0.0 & 3.772 & 116.149 & 106.259 & -55.005 & -31.367 & 0.0 & 4.419 \\ -137.409 & -126.936 & 108.634 & 17.684 & 0.0 & -0.883 & -34.658 & -29.686 & 15.222 & 8.887 & 0.0 & -1.149 \\ -73.682 & -61.554 & 17.684 & 59.624 & 0.0 & -0.443 & -17.894 & -15.181 & 7.837 & 4.675 & 0.0 & -0.577 \\ 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & 10.206 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.208 & 0.0 \\ 3.811 & 3.772 & -0.883 & -0.443 & 0.0 & 11.027 & 1.223 & 1.095 & -0.411 & -0.239 & 0.0 & 0.277 \\ 168.012 & 116.149 & -34.658 & -17.894 & 0.0 & 1.223 & 45.89 & 38.111 & -19.765 & -11.917 & 0.0 & 1.398 \\ 131.89 & 106.259 & -29.686 & -15.181 & 0.0 & 1.095 & 38.111 & 32.756 & -17.328 & -10.452 & 0.0 & 1.227 \\ -65.651 & -55.005 & 15.222 & 7.837 & 0.0 & -0.411 & -19.765 & -17.328 & 10.281 & 6.58 & 0.0 & -0.52 \\ -39.172 & -31.367 & 8.887 & 4.675 & 0.0 & -0.239 & -11.917 & -10.452 & 6.58 & 4.912 & 0.0 & -0.302 \\ 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.208 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.213 & 0.0 \\ 4.7 & 4.419 & -1.149 & -0.577 & 0.0 & 0.277 & 1.398 & 1.227 & -0.52 & -0.302 & 0.0 & 0.212 \end{bmatrix},$$

por lo que la ley de control óptima \mathbf{u} está dada por

$$\mathbf{u} = -\mathbf{R}\mathbf{B}_0^T\mathbf{P}\mathbf{x} =: -\mathbf{K}_{opt}\mathbf{x}.$$

El valor numérico de \mathbf{K}_{opt} es

$$\mathbf{K}_{opt} = \begin{bmatrix} -288.928 & -2.605 & 27.479 & 16.227 & 0.0 & -0.664 & -53.021 & -30.198 & 14.517 & 8.997 & 0.0 & -0.927 \\ 48.384 & -229.1 & 32.267 & 13.704 & 0.0 & -0.967 & -18.722 & -32.855 & 12.505 & 6.666 & 0.0 & -1.157 \\ -43.067 & -63.905 & 13.598 & 6.953 & 0.0 & -0.389 & -13.435 & -12.061 & -3.872 & 3.473 & 0.0 & -0.504 \\ -40.789 & -42.331 & 10.601 & 4.276 & 0.0 & -0.285 & -10.64 & -9.184 & 4.573 & -7.456 & 0.0 & -0.373 \\ 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & -10.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & -10.206 & 0.0 \\ 6.644 & 12.835 & -2.732 & -1.31 & 0.0 & -14.591 & 2.201 & 2.009 & -1.191 & -0.677 & 0.0 & -10.146 \end{bmatrix}.$$

Con la asignación anterior de \mathbf{u} se tiene que los eigenvalores de $(\mathbf{A}_0 - \mathbf{B}_0\mathbf{K}_{opt})$ están dados por

$$Spec(\mathbf{A}_0 - \mathbf{B}_0\mathbf{K}_{opt}) = \begin{bmatrix} -87.1500043863337 \\ -46.1129111069793 \\ -23.088346932421 \\ -10.2302174127413 \\ -1.72365241570167 + 3.3847159707743i \\ -1.72365241570167 - 3.3847159707743i \\ -7.54327576309574 \\ -5.53796774923424 \\ -3.21645336845338 \\ -1.06738070511293 \\ -47.9895776767735 \\ -1.00021717889031 \end{bmatrix},$$

por lo que se concluye que el origen del sistema $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x}) + \mathbf{g}(\mathbf{x})\mathbf{u}$ es localmente asintóticamente estable.

En las Figs. (3.1) y (3.2) puede apreciarse la evolución temporal de las coordenadas generalizadas q_2, \dots, q_7 y de las velocidades generalizadas $\dot{q}_2, \dots, \dot{q}_7$ respectivamente, donde es clara la convergencia al origen.

En la Fig. (3.3) se presenta la evolución temporal del centro de presión (**CoP**) que es descrito en la **Sección 2.4** del capítulo anterior, donde se establece que para dar validez al modelo es necesario que $\mathbf{CoP}^{(x)} \in [-l_1, l_1]$. Es claro que esta restricción es satisfecha.

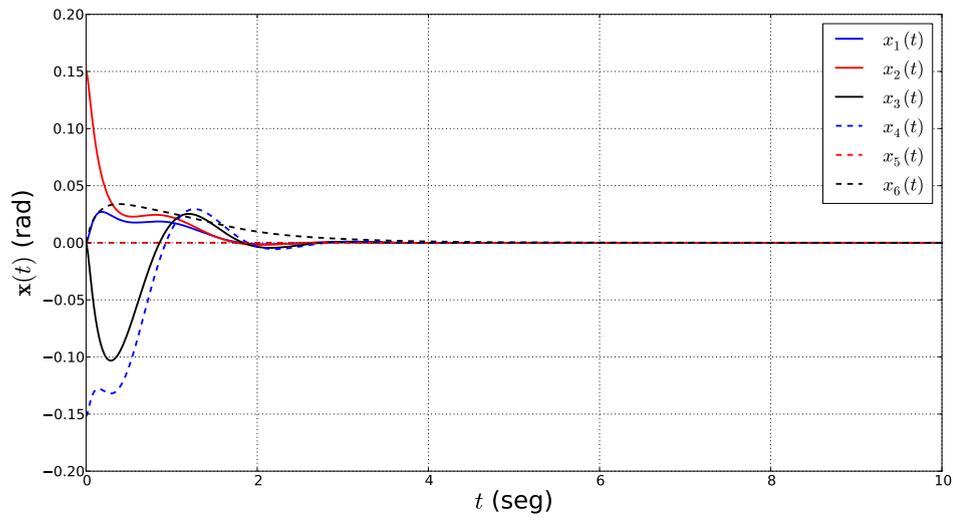


FIGURA 3.1: Evolución temporal de las coordenadas generalizadas q_2, \dots, q_7 del sistema usando un control lineal óptimo.

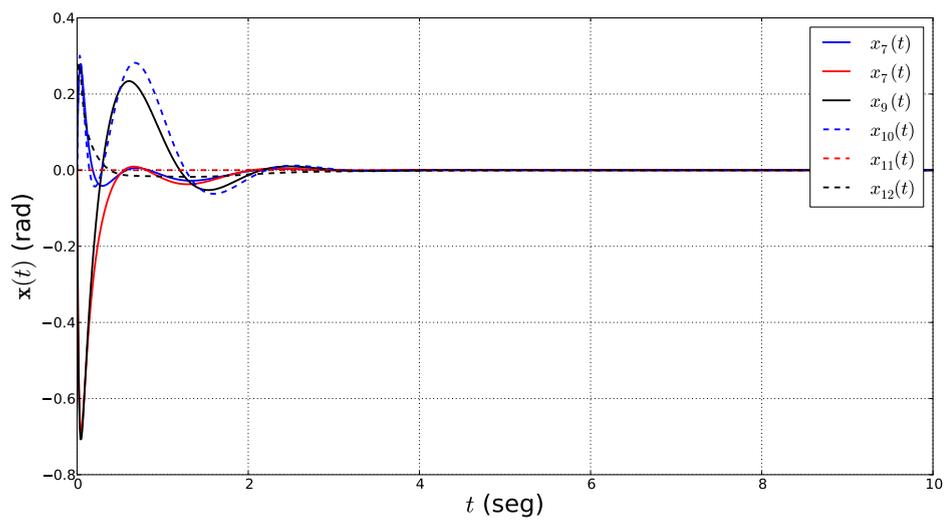


FIGURA 3.2: Evolución temporal de las velocidades generalizadas $\dot{q}_2, \dots, \dot{q}_7$ del sistema usando un control lineal óptimo.

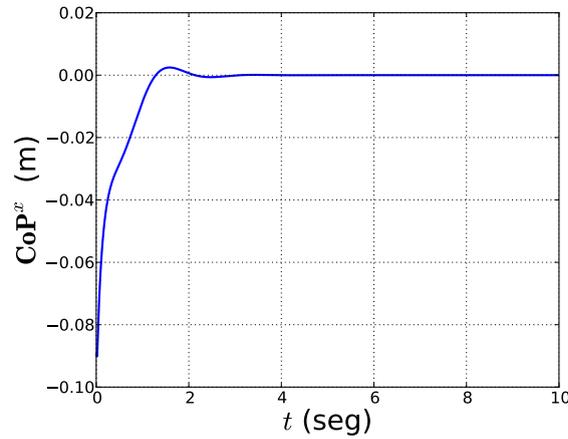


FIGURA 3.3: Evolución temporal del centro de presión del bípodo usando un control lineal óptimo. Obsérvese que \mathbf{CoP}^x se mantiene en el intervalo $[-0.15, 0.15]$.

Cabe destacar que los resultados presentados corresponden a la solución numérica del sistema no lineal $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x}) + \mathbf{g}(\mathbf{x})\mathbf{u}$ bajo la ley de control óptima lineal. Sin embargo, el **Teorema 3.13** indica que estos resultados son de naturaleza local. Se realizaron mas pruebas con diferentes condiciones iniciales (mas alejadas del origen) obteniendo resultados similares en cuanto a estabilidad, pero con violación para la restricción del centro de presión en algunos casos.

3.5.1. Control de Locomoción

En este apartado se presenta una solución numérica del sistema híbrido de la Ec. (3.1) bajo una asignación para la variable de control \mathbf{u} dada por la Ec. (3.34) y para una variable de control auxiliar \mathbf{v} definida a través de un esquema de control twisting dada por la Ec. (3.36). En particular, los resultados presentados corresponden al caso $0 < \alpha < 1$.

Para la simulación del sistema, se tienen en cuenta los parámetros de la caminata mostrados en el Cuadro (3.2) y cuyo significado físico es detallado en la *Observación 3.34*.

<i>símbolo</i>	valor
s (tamaño del paso)	0.15 m
d (altura maxima del paso)	0.03 m
μ (parametro de simetría)	0.5 (adimensional)

CUADRO 3.2: Valores numéricos de los parámetros para la caminata del bípodo.

3.5.1.1. Control Lineal

Los resultados siguientes representan la evolución temporal del sistema híbrido usando una ley de control lineal dada por la Ec. (3.35) y parámetros:

$$\mathbf{K}_1 = \text{diag}(1, 4, 4, 4, 4, 4),$$

$$\mathbf{K}_2 = \text{diag}\left(\frac{1}{2}d_1^2, \frac{1}{5}d_2^2, \frac{1}{5}d_3^2, \frac{1}{5}d_4^2, \frac{1}{5}d_5^2, \frac{1}{5}d_6^2\right),$$

donde d_i son los elementos de la diagonal principal de \mathbf{K}_1 . En la Fig. (3.4) se presenta la evolución temporal de la salida del sistema (3.28), en el desarrollo de diez pasos del bípido. Se puede observar que todas las componentes de la salida convergen al origen en cada paso. Sin embargo, al buscar un cruce en tiempo finito por las hiper-superficie \mathcal{S} , se toma en cuenta una sintonización de las constantes $k_{j,i}$ para cada doble integrador. Por la construcción del difeomorfismo linealizante (ver **Proposición 3.33**), se puede establecer la condición de cruce por la hiper-superficie \mathcal{S} en términos de las variables $z_i(t)$ como

$$H_z(\mathbf{z}) := \gamma(z_1 + s) + z_2 = 0.$$

Por lo que el objetivo de la sintonización es lograr que $H_z(\mathbf{z}) = 0$ en un tiempo finito. Siguiendo las ideas expuestas en la **Sección 3.1.2.3**, se propone una relación para las constantes $k_{j,i}$ dada por

$$k_{2,i} = \frac{1}{5}k_{1,i}^2, \quad \text{para } i = 2, \dots, 6.$$

$$k_{2,1} = \frac{1}{2}k_{1,1}^2,$$

$$k_{2,i} \gg k_{2,1} \quad \text{para } i = 2, \dots, 6.$$

Con lo anterior, se hace que la solución $z_1(t)$ tenga convergencia exponencial al origen pero con oscilaciones, mientras que $z_i(t)$ para $i = 2, \dots, 6$ tiene convergencia exponencial al origen sin oscilaciones. Los resultados numéricos validan la existencia de un tiempo finito para el cual $H_z(\mathbf{z}(t)) = 0$.

La configuración que adopta el bípido al dar el paso es aproximada a $\mathbf{q}^* = (q_2^*, 0, -q_2^*, 0, 0, 0)$ (ver **Proposición 3.40**), donde q_2^* satisface

$$-2l_2 \sin(q_2^*) = \frac{1}{2}s.$$

Por simplicidad se toma como condición inicial del sistema el vector $\mathbf{x}(t_0) = \Delta(\mathbf{q}^*, \mathbf{0})$ como se establece en la *Observación 3.53*.

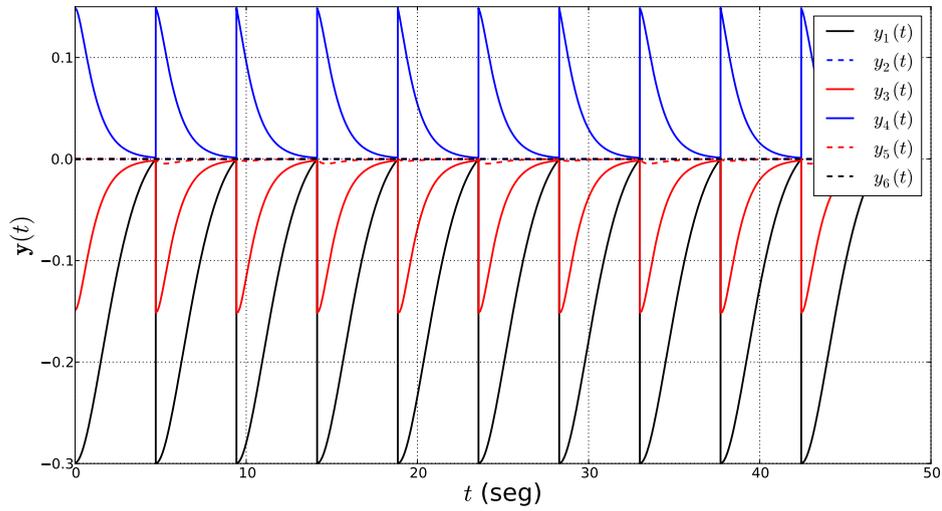


FIGURA 3.4: Evolución temporal de la salida del sistema usando un control lineal.

En la Fig. (3.5) se puede apreciar la evolución temporal del vector de estados $\mathbf{x} := (\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})$ para las componentes que representan la configuración del bípodo.

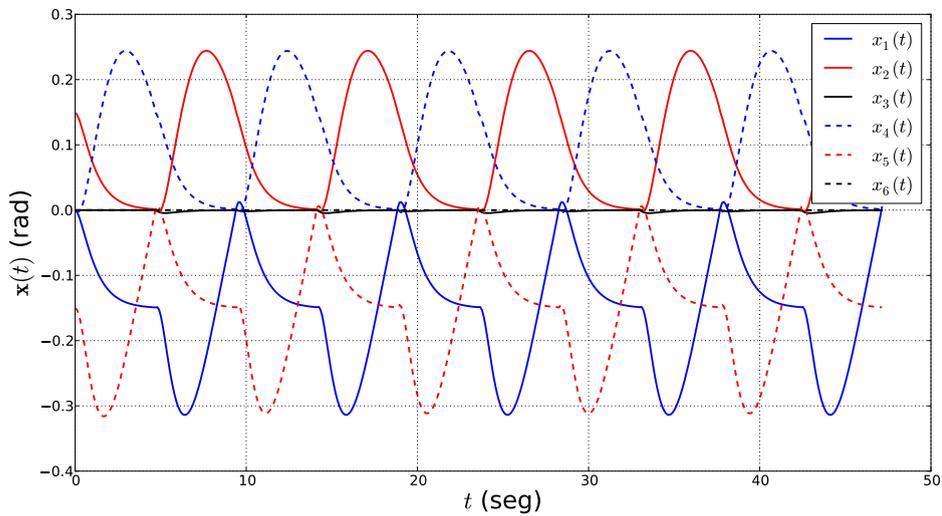


FIGURA 3.5: Evolución temporal del vector de estados del sistema para las componentes $x_1(t), \dots, x_6(t)$ usando un control lineal.

La Fig. (3.6) muestra las posiciones angulares contra las velocidades angulares para los vínculos \mathcal{B}_2 (pantorrilla) y \mathcal{B}_3 (femur). Es posible apreciar con claridad la fase discontinua en ambas órbitas, dicha discontinuidad ocurre en cada instante de colisión con el suelo.

En la Fig. (3.7) se presenta la evolución temporal del centro de presión (**CoP**) del bípodo. Se observa que la restricción $\mathbf{CoP}^{(x)} \in [-l_1, l_1]$ es satisfecha. Además es posible apreciar

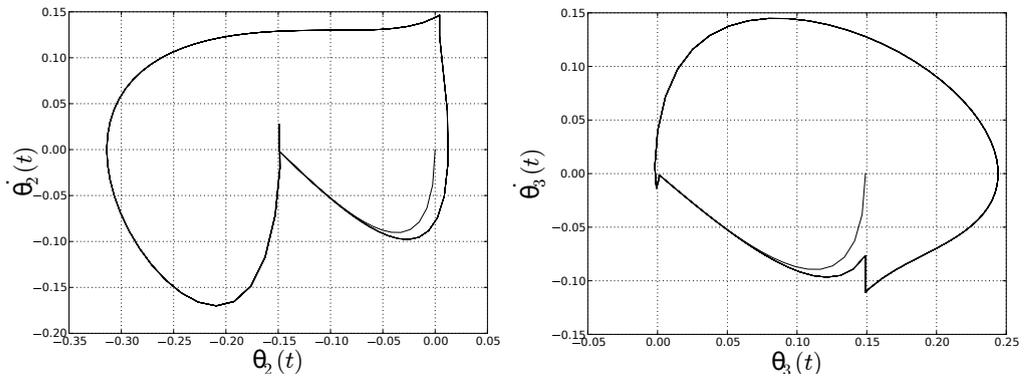


FIGURA 3.6: Evolución temporal de las posiciones angulares de los vínculos \mathcal{B}_2 y \mathcal{B}_3 usando un control lineal.

la evolución del desplazamiento de ambos pies del bípodo, alternando en sus fases de pie de balanceo y pie de soporte. Por lo anterior se concluye que el bípodo realiza una caminata cuasi-estáticamente estable (ver **Sección 2.1.1**).

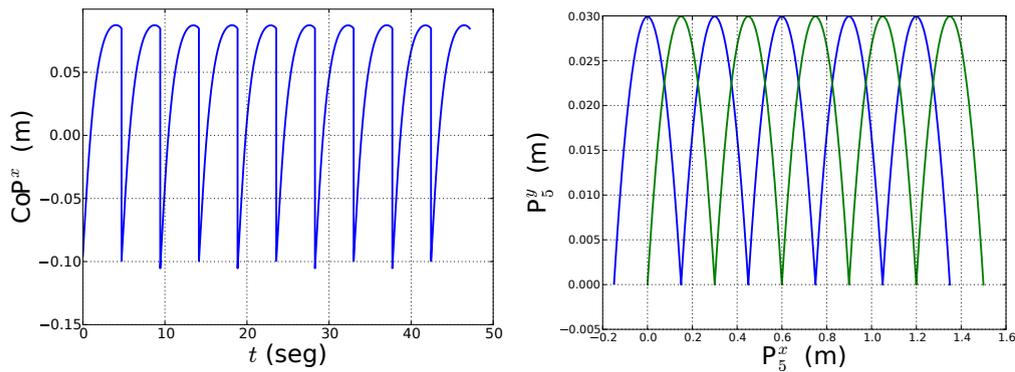


FIGURA 3.7: Evolución temporal del centro de presión y de la posición del pie de balanceo usando un control lineal.

3.5.1.2. Control Twist para el Caso $0 < \alpha < 1$

Los resultados siguientes representan la evolución temporal del sistema híbrido usando una ley de control twisting dada por la Ec. (3.36) y parámetros: $\alpha = 0.75$ y $\mathbf{K}_1 = \mathbf{K}_2 = \text{diag}(2, 2, 2, 9, 2, 20)$.

En la Fig. (3.8) se presenta la evolución temporal de la salida del sistema, de la Ec. (3.28), en el desarrollo de diez pasos del bípodo. Se puede observar que todas las componentes de la salida convergen a cero en tiempo finito para cada paso, implicando que el bípodo efectivamente adopta una configuración adecuada al dar el paso. De forma semejante

que en el control lineal, esta configuración (descrita en la **Proposición 3.40**) está dada por $\mathbf{q}^* = (q_2^*, 0, -q_2^*, 0, 0, 0)$, donde q_2^* satisface $-2l_2 \sin(q_2^*) = \frac{1}{2}s$.

Lo anterior se logra mediante una sintonización manual de las constantes $k_{i,j}$ del control twisting. Cabe mencionar que por simplicidad se toma como condición inicial del sistema el vector $\mathbf{x}(t_0) = \Delta(\mathbf{q}^*, \mathbf{0})$ como se establece en la *Observación 3.53*.

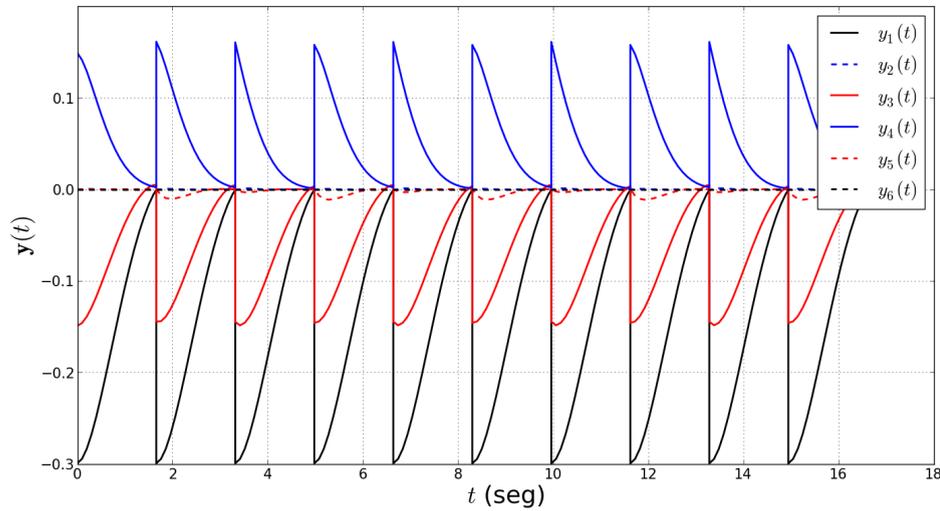


FIGURA 3.8: Evolución temporal de la salida del sistema usando un control twisting con $0 < \alpha < 1$.

En la Fig. (3.9) se puede apreciar la evolución temporal del vector de estados $\mathbf{x} := (\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})$ para las componentes que representan la configuración del bípodo.

La Fig. (3.10) muestra las posiciones angulares contra las velocidades angulares para los vínculos \mathcal{B}_2 y \mathcal{B}_3 que representan la pantorrilla y el muslo del bípodo respectivamente. Es posible apreciar con claridad la fase discontinua en ambas órbitas, dicha discontinuidad ocurre en cada instante de colisión con el suelo.

En la Fig. (3.11) se presenta la evolución temporal del centro de presión (**CoP**) del bípodo. Se observa que la restricción $\mathbf{CoP}^{(x)} \in [-l_1, l_1]$ es satisfecha. Además es posible apreciar la evolución del desplazamiento de ambos pies del bípodo, alternando en sus fases de pie de balanceo y pie de soporte. Por lo anterior se concluye que el bípodo realiza una caminata cuasi-estáticamente estable (ver **Sección 2.1.1**).

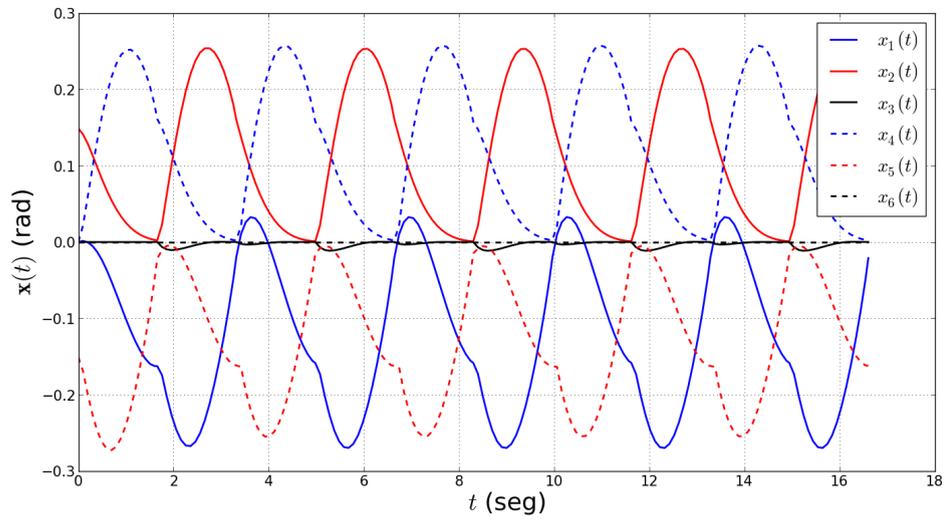


FIGURA 3.9: Evolución temporal del vector de estados del sistema para las componentes $x_1(t), \dots, x_6(t)$ usando un control twisting con $0 < \alpha < 1$.

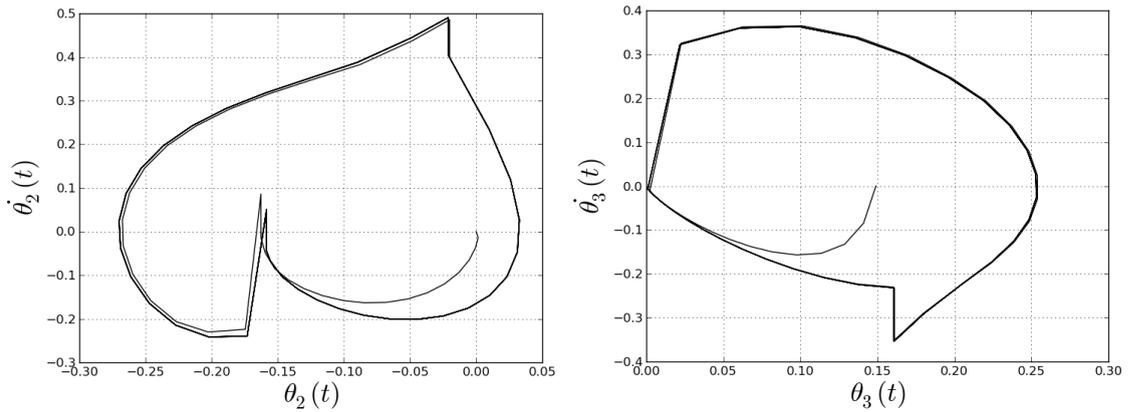


FIGURA 3.10: Evolución temporal de las posiciones angulares de los vínculos \mathcal{B}_2 y \mathcal{B}_3 usando un control twisting con $0 < \alpha < 1$.

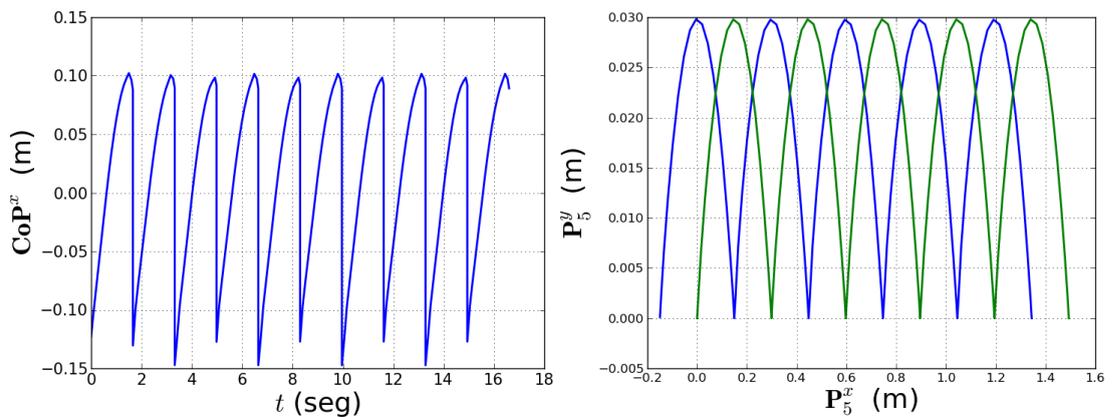


FIGURA 3.11: Evolución temporal del centro de presión y de la posición del pie de balanceo usando un control twisting con $0 < \alpha < 1$.

Capítulo 4

Análisis de Estabilidad

En este capítulo se presenta el estudio de la estabilidad del sistema híbrido que modela al bípedo, considerando los diferentes esquemas de control propuestos en el capítulo anterior. En la primer parte se da una breve introducción sobre aplicaciones de Poincaré en sistemas de ecuaciones diferenciales ordinarias. Posteriormente, se presentan diversos resultados que permiten la extensión de esta técnica a sistemas híbridos.

4.1. Aplicaciones de Poincaré en Sistemas de Ecuaciones Diferenciales

En este apartado se presentan algunos conceptos y resultados elementales para el estudio de la estabilidad en órbitas periódicas en sistemas de ecuaciones diferenciales ordinarias. La información presentada puede ser consultada en [5] y [15].

Definición 4.1. Sea $H : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ continuamente diferenciable. Entonces un *conjunto de nivel con energía c* es el conjunto

$$\mathcal{S}_c = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n : H(\mathbf{x}) = c\}.$$

Además el conjunto de nivel \mathcal{S}_c se dice *regular* si $\frac{\partial H(\mathbf{x})}{\partial \mathbf{x}} \neq \mathbf{0} \in \mathbb{R}^n$ para cada $\mathbf{x} \in \mathcal{S}_c$.

Proposición 4.2 ([5] pág. 50). *Si $H : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ es continuamente diferenciable, entonces cada uno de sus conjuntos de nivel regulares es una subvariedad $(n - 1)$ dimensional de \mathbb{R}^n .*

Observación 4.3. En la literatura (ver [15]), la subvariedad mencionada en la **Proposición 4.2** suele nombrarse como *subvariedad encajada de codimensión 1* de \mathbb{R}^n .

Definición 4.4. Sea ϕ_t el flujo de $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x})$, donde $\mathbf{f} : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$. Supóngase que $\mathcal{S} \subset \mathbb{R}^n$ es una subvariedad de dimensión $(n-1)$. Si $(\mathbf{p}, \mathbf{f}(\mathbf{p})) \notin T_{\mathbf{p}}\mathcal{S}$ entonces se dice que $(\mathbf{p}, \mathbf{f}(\mathbf{p}))$ es *transversal* a \mathcal{S} en \mathbf{p} . Además si $(\mathbf{p}, \mathbf{f}(\mathbf{p}))$ es transversal a \mathcal{S} para cada $\mathbf{p} \in \mathcal{S}$ entonces se dice que \mathcal{S} es una *sección* para el flujo ϕ_t .

Proposición 4.5. *Supóngase que $H : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ es continuamente diferenciable y que*

$$\mathcal{S} = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n : H(\mathbf{x}) = 0\}$$

es un conjunto de nivel regular de H . Denotemos por ϕ_t el flujo de $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x})$, donde $\mathbf{f} : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$. Si¹

$$L_{\mathbf{f}}H(\mathbf{p}) := \frac{\partial H(\mathbf{p})}{\partial \mathbf{x}} \cdot \mathbf{f}(\mathbf{p}) \neq 0,$$

para cada $\mathbf{p} \in \mathcal{S}$, entonces \mathcal{S} define una sección para el flujo ϕ_t .

Demostración. La prueba se sigue directamente del hecho de que $\frac{\partial H(\mathbf{p})}{\partial \mathbf{x}}$ es normal a \mathcal{S} para cada $\mathbf{p} \in \mathcal{S}$ y de que \mathbf{f} define el espacio tangente a ϕ_t . \square

4.2. Preliminares de Aplicaciones de Poincaré en Sistemas Híbridos

En este apartado se describen algunos resultados sobre el uso de aplicaciones de Poincaré para el estudio de la estabilidad en sistemas híbridos. La información que se presenta puede ser consultada en [35] y en [3]. Para los resultados siguientes se considera un sistema híbrido general de la forma

$$\Sigma : \begin{cases} \dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{f}(\mathbf{x}(t)) & \text{si } \mathbf{x}^-(t) \notin \mathcal{S}, \\ \mathbf{x}^+(t) = \Delta(\mathbf{x}^-(t)) & \text{si } \mathbf{x}^-(t) \in \mathcal{S}, \end{cases} \quad (4.1)$$

que es descrito en el **Capítulo II**.

Definición 4.6. Se llama *función de tiempo al impacto* a una función $T_I : \mathcal{X} \rightarrow \mathbb{R} \cup \{\infty\}$ dada por

$$T_I(\mathbf{x}_0) := \begin{cases} \inf\{t \geq 0 : \varphi^f(t, \mathbf{x}_0) \in \mathcal{S}\} & \text{si } \exists t \text{ tal que } \varphi^f(t, \mathbf{x}_0) \in \mathcal{S}, \\ \infty & \text{de otra forma.} \end{cases} \quad (4.2)$$

¹La notación $L_{\mathbf{f}}H(\mathbf{p})$ representa la derivada de Lie de H respecto a \mathbf{f} valuada en algún punto \mathbf{p} .

Lema 4.7. *Supóngase que para el sistema híbrido de la Ec. (4.1) las hipótesis **SH1**, **SH2** y **SH3** se satisfacen, entonces T_I es continua en los puntos \mathbf{x}_0 donde $0 < T_I(\mathbf{x}_0) < \infty$ y $L_f H(\varphi(T_I(\mathbf{x}_0), \mathbf{x}_0)) \neq 0$.*

Proposición 4.8. *Bajo las hipótesis **SH1**, **SH2** y **SH3**, el conjunto $\tilde{\mathcal{X}} \subset \mathcal{X}$ dado por*

$$\tilde{\mathcal{X}} = \{\mathbf{x} \in \mathcal{X} : 0 < T_I(\mathbf{x}) < \infty \text{ y } L_f H(\varphi(T_I(\mathbf{x}_0), \mathbf{x}_0)) \neq 0\} \quad (4.3)$$

es abierto.

Observación 4.9. Bajo la hipótesis de continuidad de Δ (hipótesis **SH4**), se tiene que $\tilde{\mathcal{S}} = \Delta^{-1}(\tilde{\mathcal{X}}) \subset \mathcal{S}$ es abierto.

Proposición 4.10. *Una aplicación de Poincaré, $\mathbf{P} : \tilde{\mathcal{S}} \rightarrow \mathcal{S}$ para el sistema híbrido está dada por*

$$\mathbf{P}(\mathbf{x}) := \varphi^f(T_I(\Delta(\mathbf{x})), \Delta(\mathbf{x})). \quad (4.4)$$

*Además, bajo las hipótesis **SH1-SH5** dicha aplicación está bien definida y es continua.*

Observación 4.11. En el caso del bípido, la aplicación de Poincaré representa la evolución del bípido desde un instante posterior a algún impacto con el suelo, a un instante previo al siguiente impacto, bajo la suposición de que el siguiente impacto ocurre. La interpretación geométrica de la aplicación de Poincaré en los sistemas híbridos puede apreciarse en la Fig. (4.1).

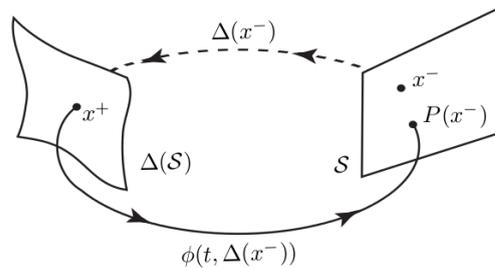


FIGURA 4.1: Interpretación geométrica de la aplicación de Poincaré $\mathbf{P} : \tilde{\mathcal{S}} \rightarrow \mathcal{S}$ en los sistemas híbridos. La sección de Poincaré es tomada directamente como la hiper-superficie \mathcal{S} . Existe una órbita periódica cuando $\mathbf{P}(\mathbf{x}^-) = \mathbf{x}^-$ [35].

Observación 4.12. Debido a las hipótesis de continuidad por la derecha para las soluciones del sistema híbrido de la Ec. (4.1) (ver **Sección 2.3.4.1**), para una órbita periódica que cumple $\mathbf{x}^- = \mathbf{P}(\mathbf{x}^-)$, el punto $\mathbf{x}^- \in \mathcal{S}$ no pertenece a la órbita.

Observación 4.13. Bajo las hipótesis **SH1-SH5**, si \mathcal{O} es una órbita periódica de (4.1) que es transversal a \mathcal{S} , entonces $\mathcal{O} \subset \tilde{\mathcal{X}}$. Por lo anterior, existe $\mathbf{x}_0 \in \tilde{\mathcal{S}}$ que genera a \mathcal{O} , en el sentido de que $\Delta(\mathbf{x}_0) \in \mathcal{O}$, en efecto $\mathbf{x}_0 = \bar{\mathcal{O}} \cap \tilde{\mathcal{S}}$, por lo que tiene sentido denotar a dicha órbita como $\mathcal{O}(\Delta(\mathbf{x}_0))$.

La aplicación de Poincaré da lugar a un sistema dinámico discreto en la sección de Poincaré \mathcal{S} , a través de la definición²

$$\mathbf{x}[k+1] = \mathbf{P}(\mathbf{x}[k]). \quad (4.5)$$

Cada iteración de la solución de este sistema corresponde al cruce de φ^- con \mathcal{S} . Un punto $\mathbf{x}^* \in \tilde{\mathcal{S}}$ se dice que es un *punto fijo* de \mathbf{P} si $\mathbf{P}(\mathbf{x}^*) = \mathbf{x}^*$. Lo anterior significa que puntos fijos de \mathbf{P} corresponden a puntos de equilibrio del sistema de la Ec. (4.5) y viceversa. Un punto fijo genera una órbita periódica del sistema (4.1) de la forma $\mathcal{O} = \mathcal{O}(\Delta(\mathbf{x}^*)) := \{\varphi(t, \Delta(\mathbf{x}^*)) : t_0 \leq t < T_I(\Delta(\mathbf{x}^*))\}$.

Teorema 4.14. *Supóngase que para el sistema híbrido (4.1) las hipótesis **SH1-SH5** son satisfechas, entonces se satisface que*

- a) *Si \mathcal{O} es una órbita periódica transversal a \mathcal{S} , entonces existe un punto $\mathbf{x}^* \in \tilde{\mathcal{S}}$ que genera a \mathcal{O} .*
- b) *$\mathbf{x}^* \in \tilde{\mathcal{S}}$ es un punto fijo de \mathbf{P} si y sólo si $\Delta(\mathbf{x}^*)$ genera una órbita periódica que es transversal a \mathcal{S} .*
- c) *$\mathbf{x}^* \in \tilde{\mathcal{S}}$ es un punto de equilibrio (asintóticamente) estable del sistema (4.5) si y sólo si la órbita $\mathcal{O}(\Delta(\mathbf{x}^*))$ es (asintóticamente) estable (ver **Sección 2.3.4**).*

4.3. Sistemas Híbridos con Dos Fases Continuas

En la **Sección 2.3.4** se presenta al modelo del bípido como un sistema híbrido, sin embargo en la **Observación 2.60** se menciona que dicho modelo consta de dos sistemas híbridos diferentes. En este apartado se da una definición formal de este tipo de sistemas así como de sus soluciones.

Sean \mathcal{X}_1 y \mathcal{X}_2 dos subconjuntos abiertos y convexos en \mathbb{R}^{n_1} y \mathbb{R}^{n_2} respectivamente, sobre los cuales se definen dos sistemas de ecuaciones diferenciales \mathcal{F}_1 y \mathcal{F}_2 . Sea $\mathcal{S}_1^2 \subset \mathcal{X}_1$ una hiper-superficie que determina la transición desde el espacio \mathcal{X}_1 hacia el espacio \mathcal{X}_2 mediante la función de transición \mathcal{T}_1^2 y de forma análoga para \mathcal{S}_2^1 con \mathcal{T}_2^1 . El modelo híbrido correspondiente puede ser expresado como

²Se usa la notación $\mathbf{x}[k]$ para representar la k -ésima iteración de la solución del sistema dinámico discreto.

$$\begin{aligned}
\Sigma_1 : & \begin{cases} \mathcal{F}_1 : \dot{\mathbf{x}}_1(t) = \mathbf{f}_1(\mathbf{x}_1(t)) & \text{si } \mathbf{x}_1^-(t) \notin \mathcal{S}_1^2 \\ \mathcal{T}_1^2 : \mathbf{x}_1^+(t) = \Delta_1^2(\mathbf{x}_1^-(t)) & \text{si } \mathbf{x}_1^-(t) \in \mathcal{S}_1^2 \\ \mathcal{S}_1^2 = \{\mathbf{x}_1 \in \mathcal{X}_1 : H_1^2(\mathbf{x}_1) = 0\} \end{cases} \\
\Sigma_2 : & \begin{cases} \mathcal{F}_2 : \dot{\mathbf{x}}_2(t) = \mathbf{f}_2(\mathbf{x}_2(t)) & \text{si } \mathbf{x}_2^-(t) \notin \mathcal{S}_2^1 \\ \mathcal{T}_2^1 : \mathbf{x}_2^+(t) = \Delta_2^1(\mathbf{x}_2^-(t)) & \text{si } \mathbf{x}_2^-(t) \in \mathcal{S}_2^1 \\ \mathcal{S}_2^1 = \{\mathbf{x}_2 \in \mathcal{X}_2 : H_2^1(\mathbf{x}_2) = 0\}. \end{cases}
\end{aligned} \tag{4.6}$$

Se supone que las hipótesis **SH1-SH5** se satisfacen para los sistemas Σ_1 y Σ_2 .

4.3.1. Algunas Definiciones Básicas

Definición 4.15 ([35]). Sea $\mathcal{X} := \mathcal{X}_1 \cup \mathcal{X}_2$. Una función $\varphi : [t_0, t_f[\rightarrow \mathcal{X}$, con $t_f \in \mathbb{R} \cup \{\infty\}$ y $t_f > t_0$, es una *solución* de (4.6) si existe un subconjunto discreto $\mathcal{T} \subset [t_0, t_f[$, dado por $\mathcal{T} = \{t_0 < t_1 < \dots < t_j < \dots\}$ (llamado conjunto de tiempos de transición) y una función $i : \mathcal{T} \rightarrow \{1, 2\}$ que especifica la fase del modelo, tal que para todo $j \geq 0$:

- a) $i(t_j) \neq i(t_{j+1})$.
- b) φ restringida a $[t_j, t_{j+1}[$ toma valores en $\mathcal{X}_{i(t_j)}$.
- c) φ restringida a $[t_j, t_{j+1}[$ es continua por la derecha.
- d) φ restringida a $]t_j, t_{j+1}[$ satisface la ecuación diferencial $\dot{\varphi}(t) = \mathbf{f}_{i(t_j)}(\varphi(t))$.
- e) y para toda $t \in]t_j, t_{j+1}[$, el límite por la izquierda $\varphi^+(\tau) := \lim_{\tau \nearrow t} \varphi(\tau)$ existe y es finito.
- f) y $t \in]t_j, t_{j+1}[$, $\varphi(t) \notin \mathcal{S}_{i(t_j)}^{i(t_{j+1})}$.
- g) Para todo $j \geq 1$ y $t_j < \infty$, $\varphi(t_j) = \Delta_{i(t_j)}^{i(t_{j+1})}(\varphi^-(t_j))$.

Observación 4.16. Las nociones de soluciones periódicas y órbitas periódicas son idénticas a las definiciones dadas en la **Sección 2.3.4** para un sistema híbrido de una sola fase. Los conceptos de órbitas periódicas estables también son análogos, pero es preciso definir una métrica apropiada en $\mathcal{X} = \mathcal{X}_1 \cup \mathcal{X}_2$. Definiendo $\text{dist} : \mathcal{X} \times \mathcal{X} \rightarrow \mathbb{R} \cup \{\infty\}$ como

$$\text{dist}(p_1, p_2) := \begin{cases} \|p_2 - p_1\| & \text{si } p_1, p_2 \in \mathcal{X}_1 \text{ ó } p_1, p_2 \in \mathcal{X}_2 \\ \infty & \text{de otra forma,} \end{cases} \tag{4.7}$$

es posible establecer la distancia entre algún punto $\mathbf{p}_1 \in \mathcal{X}$ y una órbita \mathcal{O} como

$$\text{dist}(\mathbf{p}_1, \mathcal{O}) := \inf_{\mathbf{p}_2 \in \mathcal{O}} \text{dist}(\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2). \quad (4.8)$$

Definición 4.17. Una órbita periódica del sistema (4.6) es *transversal* a cada sección \mathcal{S}_1^2 y \mathcal{S}_2^1 , si su clausura intersecta a \mathcal{S}_1^2 y \mathcal{S}_2^1 en exactamente un punto y para $\{\bar{\mathbf{x}}_1\} = \bar{\mathcal{O}} \cap \mathcal{S}_1^2$, $L_{f_1} H_1^2(\bar{\mathbf{x}}_1) \neq 0$ y de forma similar para $\bar{\mathbf{x}}_2$. En el caso del robot bípedo, una órbita periódica no trivial que es transversal a \mathcal{S}_1^2 y \mathcal{S}_2^1 es referida como *locomoción periódica*.

4.3.2. Existencia y Estabilidad de Órbitas Periódicas

En este apartado se presenta la construcción de una aplicación de Poincaré para un sistema híbrido de dos fases como el descrito en la sección anterior.

Definición 4.18. La función *tiempo al impacto para la fase dos*, $T_{I,2} : \mathcal{X}_2 \rightarrow \mathbb{R} \cup \{\infty\}$ está dada por

$$T_{I,2}(\mathbf{x}_0) := \begin{cases} \inf\{t \geq t_0 : \varphi_2(t, \mathbf{x}_0) \in \mathcal{S}_2^1\} & \text{si } \exists t \text{ tal que } \varphi_2(t, \mathbf{x}_0) \in \mathcal{S}_2^1 \\ \infty & \text{de otra forma,} \end{cases} \quad (4.9)$$

donde $\varphi_2(t, \mathbf{x}_0)$ es una curva solución del sistema de ecuaciones diferenciales \mathcal{F}_2 del sistema híbrido (4.6), que corresponde a $\varphi_2(t_0, \mathbf{x}_0) = \mathbf{x}_0$.

Observación 4.19. De forma análoga al **Lema 4.7**, es posible probar que la función de tiempos de impacto de la fase dos es continua en los puntos \mathbf{x}_0 donde $0 < T_{I,2}(\mathbf{x}_0) < \infty$ y la intersección con \mathcal{S}_2^1 sea transversal. Esto implica que $\tilde{\mathcal{X}}_2 = \{\mathbf{x}_2 \in \mathcal{X}_2 : 0 < T_{I,2}(\mathbf{x}_2) < \infty \text{ y } L_{f_2} H_2^1(\varphi_2(T_{I,2}(\mathbf{x}_2), \mathbf{x}_2)) \neq 0\}$ es abierto, entonces por la continuidad de Δ_1^2 se tiene que $\tilde{\mathcal{S}}_1^2 := (\Delta_1^2)^{-1}(\tilde{\mathcal{X}}_2)$ es un subconjunto abierto de \mathcal{S}_1^2 .

Proposición 4.20. La aplicación $\mathbf{P}_2 : \tilde{\mathcal{S}}_1^2 \rightarrow \mathcal{S}_2^1$ dada por

$$\mathbf{P}_2(\mathbf{x}_1) := \varphi_2(T_{I,2}(\Delta_1^2(\mathbf{x}_1)), \Delta_1^2(\mathbf{x}_1)) \quad (4.10)$$

está bien definida y es continua.

Definición 4.21. La función de la Ec. (4.10) es una *aplicación de Poincaré generalizada para la fase dos*.

De forma análoga es posible definir una aplicación de Poincaré generalizada para la fase uno, $\mathbf{P}_1 : \tilde{\mathcal{S}}_2^1 \rightarrow \tilde{\mathcal{S}}_1^2$, como

$$\mathbf{P}_1(\mathbf{x}_2) := \varphi_1(T_{I,1}(\Delta_2^1(\mathbf{x}_2)), \Delta_2^1(\mathbf{x}_2)), \quad (4.11)$$

donde $T_{I,1} : \mathcal{X}_2 \rightarrow \mathbb{R} \cup \{\infty\}$ está dada por

$$T_{I,1}(\mathbf{x}_0) := \begin{cases} \inf\{t \geq t_0 : \varphi_1(t, \mathbf{x}_0) \in \tilde{\mathcal{S}}_1^2\} & \text{si } \exists t \text{ tal que } \varphi_1(t, \mathbf{x}_0) \in \tilde{\mathcal{S}}_1^2 \\ \infty & \text{de otra forma,} \end{cases} \quad (4.12)$$

y

$$\tilde{\mathcal{S}}_2^1 = \{\mathbf{x}_2 \in \mathcal{S}_2^1 : 0 < T_{I,1}(\Delta_2^1(\mathbf{x}_2)) < \infty \text{ y } L_{f_1} H_1^2(\varphi_1(T_{I,1}(\Delta_2^1(\mathbf{x}_2)), \Delta_2^1(\mathbf{x}_2))) \neq 0\}. \quad (4.13)$$

Proposición 4.22. *Una aplicación de Poincaré, $\mathbf{P} : \tilde{\mathcal{S}}_2^1 \rightarrow \mathcal{S}_2^1$ para el sistema (4.6) está dada por*

$$\mathbf{P} := \mathbf{P}_2 \circ \mathbf{P}_1. \quad (4.14)$$

Teorema 4.23. *Sea \mathbf{P} una aplicación de Poincaré definida en (4.14) para el sistema (4.6). Entonces \mathbf{P} es también una aplicación de Poincaré para el sistema híbrido*

$$\Sigma : \begin{cases} \dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{f}_2(\mathbf{x}(t)) & \text{si } \mathbf{x}^-(t) \notin \mathcal{S} \\ \mathbf{x}^+(t) = \Delta(\mathbf{x}^-(t)) & \text{si } \mathbf{x}^-(t) \in \mathcal{S}, \end{cases} \quad (4.15)$$

donde $\mathcal{S} := \tilde{\mathcal{S}}_2^1$ y $\Delta := \Delta_1^2 \circ \mathbf{P}_1$.

Observación 4.24. La importancia del teorema anterior es que permite clasificar la existencia y estabilidad de órbitas periódicas en sistemas híbridos de dos fases que son representados por (4.6), a través de los resultados sobre estabilidad de órbitas periódicas en sistemas híbridos de una sola fase continua descritos en el apartado anterior.

4.4. Aplicación de Poincaré para el Modelo del Bípido

En esta sección se describe la construcción de una aplicación de Poincaré para el modelo del bípido. Esto se realiza para el sistema híbrido completo (**Sección 2.3.4.2**) bajo los esquemas de control lineal y control twisting con $0 < \alpha < 1$ presentes en la **Proposición 3.44** y en la **Proposición 3.45** del capítulo anterior. Los elementos del sistema (campos vectoriales, aplicaciones de impacto y superficies de impacto) que modelan al bípido se presentan en la *Observación 2.60* usando la notación de la Ec. (4.6).

Observación 4.25. Para el caso de control twisting, se omite el caso $\alpha = 0$, pues el campo vectorial del sistema en retroalimentación de la Ec. (3.2) es discontinuo (ver *Observación 3.47*). Lo anterior implica que la aplicación de Poincaré no necesariamente es continua,

lo que impide el uso del **Teorema 4.14** para encontrar órbitas periódicas del sistema híbrido.

Observación 4.26. En adelante, el modelo completo para el bípido (descrito en la **Sección 2.3.4.2**) será expresado y referenciado a través del sistema híbrido de dos fases continuas de la Ec. (4.6).

Para el modelo del bípido de la Ec. (4.6), supóngase que hay un $\mathbf{x}_2 \in \Delta_1^2(\mathcal{S}_1^2)$ tal que existe un $t_2 < \infty$ para el cual $\varphi_2(t_2, \mathbf{x}_2) \in \mathcal{S}_2^1$ de forma transversal. La plausibilidad de la hipótesis anterior se basa en las ideas de sintonización presentadas en la **Sección 3.1.2.3**. Dado que para el control lineal de la **Proposición 3.44** se tiene dependencia continua a condiciones iniciales, entonces se establece que existe una vecindad abierta $\tilde{\mathcal{X}}_2$ de \mathbf{x}_2 tal que para cada $\mathbf{p} \in \tilde{\mathcal{X}}_2$, existe $t_{\mathbf{p}} < \infty$ tal que $\varphi_2(t_{\mathbf{p}}, \mathbf{p}) \in \mathcal{S}_2^1$ de forma transversal. Luego, en la *Observación 2.59* de la **Sección 2.3.4.2** se establece que la aplicación Δ_1^2 es continua, esto implica que la preimagen $\tilde{\mathcal{S}}_1^2 := (\Delta_1^2)^{-1}(\tilde{\mathcal{X}}_2)$ es un subconjunto abierto de \mathcal{S}_1^2 . A partir de esto último se define una aplicación de Poincaré para una de las fases del sistema como en la Ec. (4.10), la cual está bien definida y continua.

Análogamente, supóngase que hay un $\mathbf{x}_1 \in \Delta_2^1(\mathcal{S}_2^1)$ tal que existe un $t_1 < \infty$ en el que $\varphi_1(t_1, \mathbf{x}_1) \in \tilde{\mathcal{S}}_1^2$ de forma transversal. Nuevamente, por dependencia continua a condiciones iniciales, se establece la existencia de una vecindad abierta $\tilde{\mathcal{X}}_1$ de \mathbf{x}_1 tal que para cada $\mathbf{p} \in \tilde{\mathcal{X}}_1$ existe $t_{\mathbf{p}} < \infty$ con el que $\varphi_1(t_{\mathbf{p}}, \mathbf{p}) \in \tilde{\mathcal{S}}_1^2$ de forma transversal. Por la continuidad de Δ_2^1 , se tiene que $\tilde{\mathcal{S}}_2^1 := (\Delta_2^1)^{-1}(\tilde{\mathcal{X}}_1)$ es un subconjunto abierto de \mathcal{S}_2^1 por lo que se define una aplicación de Poincaré como en la Ec. (4.11). Ahora se define una aplicación de Poincaré del sistema híbrido completo como en la Ec. (4.14). A través del **Teorema 4.23** y del **Teorema 4.14** es posible relacionar la existencia de órbitas periódicas del sistema (4.6) con puntos fijos del sistema dinámico discreto de la Ec. (4.5) para una aplicación de Poincaré como la que se ha descrito en este párrafo. De forma similar es posible definir una aplicación de Poincaré del modelo del bípido bajo un esquema de control twisting con $0 < \alpha < 1$.

4.4.1. Resultados de Simulación

En este apartado se presenta de forma numérica el estudio de la existencia y estabilidad de órbitas periódicas del sistema (4.6), usando las aplicaciones de Poincaré descritas en el párrafo anterior.

Para encontrar numéricamente un punto fijo se estudian las soluciones del sistema discreto (4.5). Se propone tomar 25 condiciones iniciales $\mathbf{x}(t_0) = (\mathbf{q}(t_0), \dot{\mathbf{q}}(t_0))$ que pertenezcan a la hiper-superficie $\tilde{\mathcal{S}}_2^1$. En particular se toman distintas velocidades iniciales $\dot{\mathbf{q}}(t_0)$, donde el valor de cada componente de $\dot{\mathbf{q}}(t_0)$ es tomado de forma aleatoria en el intervalo

$[-0.1, 0.1]$ usando una distribución de probabilidad uniforme. La configuración inicial $\mathbf{q}(t_0)$ del bípido se toma de forma única y corresponde a una configuración que implica el contacto con el suelo, por lo que $(\mathbf{q}(t_0), \dot{\mathbf{q}}(t_0)) \in \tilde{\mathcal{S}}_2^1$. Las iteraciones se detienen cuando se satisface

$$\|\mathbf{x}[k+1] - \mathbf{x}[k]\| \leq \epsilon, \quad (4.16)$$

para algún $k \in \mathbb{N}$, donde $\epsilon = 10^{-5}$ es un valor de tolerancia. La desigualdad (4.16) es un indicativo de que las soluciones \mathbf{x}_k del sistema cada vez se van acercando entre si. Para la evaluación de ambas simulaciones, se usan los parámetros numéricos para el bípido (longitudes, masa, etc.), la caminata (tamaño de paso, etc.) y los parámetros de control presentados en la **Sección 3.5.1**.

El Cuadro (4.1) presenta los resultados de la simulación del sistema discreto para el control lineal. En la primer columna se muestra la norma de la condición inicial $\mathbf{x}_0 := \mathbf{x}(t_0)$. En la segunda columna se presenta la norma³ de la k -ésima solución, que corresponde al valor de $k \in \mathbb{N}$ tal que (4.16) es satisfecha. La tercera y cuarta columna corresponden al número de iteraciones necesarias y la distancia que recorre el robot bípido en ese número de iteraciones. Puede observarse que las soluciones prácticamente convergen al mismo punto fijo.

Para los datos numéricos mostrados en el Cuadro (4.1), se pudo establecer que el punto

$$\mathbf{x}_l^* = \begin{bmatrix} -1.48947772e - 01 \\ 1.11494571e - 03 \\ 5.62463496e - 05 \\ 1.48906247e - 01 \\ 3.68795077e - 03 \\ 0.00000000e + 00 \\ -1.79045855e - 03 \\ -1.23233638e - 03 \\ -6.21170653e - 05 \\ -1.10226140e - 01 \\ 1.46062865e - 01 \\ 0.00000000e + 00 \end{bmatrix}$$

³Por cuestiones de presentación se usa la norma en lugar del vector, recuérdese que cada vector pertenece \mathbb{R}^{12} . Sin embargo, el programa elaborado en Python (ver **Apéndice B**), permite almacenar la información completa de los vectores.

$\ \mathbf{x}[0]\ $	$\ \mathbf{x}[k]\ $	k	Distancia (metros)
0.283118104587	0.279038131015	2	0.748214332793
0.279751717453	0.279038074594	2	0.748214216153
0.275131761683	0.279038074595	2	0.748214135443
0.286123792028	0.279038130954	2	0.748214019721
0.284632984312	0.279038130954	2	0.748213967984
0.281261780973	0.279038074591	2	0.748213996949
0.286928544677	0.279038131015	2	0.748213857145
0.27616941455	0.279038131015	2	0.748214520494
0.279743434316	0.279038074596	2	0.748214503755
0.282550525303	0.279038131015	2	0.748214083264
0.286869752838	0.279038131015	2	0.748214183499
0.275969977063	0.279038130954	2	0.748214161443
0.279553316914	0.279038074805	2	0.748214561194
0.282100726507	0.279038130955	2	0.748214195837
0.283337728657	0.279038131016	2	0.748214498973
0.273042307441	0.279038131015	2	0.748214186798
0.276851384911	0.279038130954	2	0.748214661831
0.278516083588	0.279038074595	2	0.748214389647
0.284732726493	0.279038131015	2	0.748214337653
0.288075957283	0.279038131016	2	0.748214387449
0.286701648708	0.279038131015	2	0.748214224024
0.28348726636	0.279038130955	2	0.748213874219
0.278575874646	0.2790380748	2	0.748214558726
0.281681754986	0.2790380748	2	0.74821455002
0.277711250731	0.279038074595	2	0.748214048967

CUADRO 4.1: Resultados de punto fijo para un control lineal.

es un punto fijo de la aplicación de Poincaré. De forma similar a los resultados del Cuadro (4.1), en el Cuadro (4.2) se presenta el resultado de la simulación del sistema discreto (4.5) cuando se usa el control twisting.

$\ \mathbf{x}[0]\ $	$\ \mathbf{x}[k]\ $	k	Distancia (metros)
0.283170645842	0.634920471718	3	0.896103221448
0.286667926399	0.634920470504	3	0.896101045139
0.27622031928	0.634920470584	3	0.896100490417
0.284911588739	0.63492537033	3	0.896102538412
0.277529528023	0.6349253653	3	0.896097503589
0.286688385329	0.634920469837	3	0.896100767909
0.281505291356	0.634925367044	3	0.896099302985
0.27675366971	0.634925369415	3	0.896097488256
0.271882794548	0.634925367138	3	0.896099545797
0.280974557305	0.634920469177	3	0.896099246651
0.286741178042	0.634920472324	3	0.896102236213
0.279190765659	0.634925364798	3	0.896096423918
0.285721585839	0.634925367344	3	0.896100172416
0.276499190329	0.634925369067	3	0.896101327842
0.282300404598	0.63492047065	3	0.896102992321
0.276655797198	0.634925365212	3	0.896097074153
0.279849800449	0.63492536833	3	0.896101341024
0.273995874586	0.634925367622	3	0.896100366124
0.277144407689	0.634920468734	3	0.896096972494
0.28783806502	0.634925367875	3	0.896100849675
0.278581505968	0.634925365328	3	0.896097304784
0.277063418526	0.634925370389	3	0.896100778699
0.282495923357	0.634925367777	3	0.896099740009
0.281551159121	0.634925368622	3	0.89610206153
0.27406374222	0.634925368668	3	0.896100422163

CUADRO 4.2: Resultados de punto fijo para un control twisting.

Para los resultados numéricos mostrados en el Cuadro (4.2) se pudo establecer que el punto

$$\mathbf{x}_{tw}^* = \begin{bmatrix} -2.17497282e - 02 \\ 1.62316923e - 01 \\ 4.34120688e - 05 \\ 4.12439086e - 03 \\ -1.63721868e - 01 \\ 0.00000000e + 00 \\ 4.78354043e - 01 \\ -3.46823079e - 01 \\ -5.28878888e - 04 \\ -1.41280189e - 02 \\ -1.34092459e - 02 \\ 0.00000000e + 00 \end{bmatrix}$$

es un punto fijo de la aplicación de Poincaré. A partir del **Teorema 4.14** (inciso b) se

puede concluir que para ambos esquemas de control se produce una órbita periódica del sistema (4.6).

Para verificar la estabilidad (de forma numérica) de los puntos fijos, es posible tomar condiciones iniciales cercanas a los puntos fijos encontrados, de tal forma que si para algún número de iteraciones, la aplicación de Poincaré converge nuevamente al punto fijo, entonces puede concluirse numéricamente que el punto fijo es estable. Nuevamente se procede a calcular las soluciones del sistema discreto (4.5), pero tomando condiciones iniciales en una vecindad pequeña de \mathbf{x}_l^* y \mathbf{x}_{tw}^* . Para ambos casos, se toma la misma configuración inicial para el bípido como la del punto fijo, es decir $\mathbf{q}(t_0) = (\mathbf{x}^{*(1)}, \dots, \mathbf{x}^{*(6)})$. La velocidad inicial es tomada como $\dot{\mathbf{q}}(t_0) = (\mathbf{x}^{*(7)}, \dots, \mathbf{x}^{*(12)}) + \boldsymbol{\eta}$, donde $\boldsymbol{\eta}$ es una perturbación que satisface que $0 < \|\boldsymbol{\eta}\| \ll 1$. Las componentes de la perturbación $\boldsymbol{\eta}$ se eligen de forma aleatoria dentro del intervalo $[-0.01, 0.01]$. El criterio de paro se establece a través de la siguiente desigualdad

$$\|\mathbf{x}[k+1] - \mathbf{x}^*\| \leq \epsilon, \quad (4.17)$$

siendo \mathbf{x}^* alguno de los puntos fijos encontrados. En el Cuadro (4.3) se presentan los resultados obtenidos para el control lineal. Es posible apreciar que para cada condición inicial, la distancia entre las soluciones eventualmente se hace pequeña. Lo anterior implica que existe numéricamente un punto fijo estable del sistema discreto (4.5). Entonces, por el **Teorema 4.14** se concluye que el control lineal produce una órbita periódica estable en el sistema (4.6).

Análogamente, el Cuadro (4.4) presenta los resultados de simulación para la implementación del control twisting. Puede distinguirse que la distancia entre las soluciones del sistema (4.5) y entre el punto fijo se hace muy pequeña conforme se avanza en las iteraciones. Al igual que para el control lineal, se puede concluir numéricamente que el control twisting produce una órbita periódica estable del sistema (4.6).

$\ \mathbf{x}[0] - \mathbf{x}_l^*\ $	$\ \mathbf{x}[k] - \mathbf{x}_l^*\ $	k	Distancia (metros)
0.0108070880831	7.63640717186e-06	1	0.449291037377
0.0103140570366	7.6414116907e-06	1	0.449290908837
0.0128782629754	7.62629963264e-06	1	0.449291351376
0.0148785062203	7.63786436189e-06	1	0.44929099367
0.0125430131302	7.61355434352e-06	1	0.449291659501
0.0147152810142	7.65356470443e-06	1	0.449290662884
0.0126935926762	7.62861019213e-06	1	0.44929111926
0.0123008045306	7.62201315909e-06	1	0.449291025528
0.015896463515	7.6244378261e-06	1	0.44929132198
0.0143720383821	7.61542586498e-06	1	0.449291552795
0.0133007067257	7.63036586333e-06	1	0.449291232494
0.0145888194652	7.62746463779e-06	1	0.449291242097
0.0148885852215	7.65330105934e-06	1	0.44929067266
0.0159928968341	7.62320976464e-06	1	0.449291021124
0.0189762772714	7.62726966881e-06	1	0.449291379858
0.0144707160466	7.6314024786e-06	1	0.449291151112
0.0147598271651	7.61152092901e-06	1	0.449291229909
0.0146003869182	7.63802056844e-06	1	0.449290999922
0.0130429202909	7.64627875906e-06	1	0.449290840144
0.0109522883325	7.60894863044e-06	1	0.449291422922
0.0155865093793	7.61924511634e-06	1	0.44929147412
0.011655422059	7.62534267318e-06	1	0.449291258655
0.0143772511766	7.622193705e-06	1	0.449291448976
0.0175983963633	7.60501154544e-06	1	0.449291634339
0.0155998566332	7.6132353547e-06	1	0.449291272601

CUADRO 4.3: Resultados de estabilidad de una órbita periódica para un control lineal.

$\ \mathbf{x}[0] - \mathbf{x}_{tw}^*\ $	$\ \mathbf{x}[k] - \mathbf{x}_{tw}^*\ $	k	Distancia (metros)
0.0170683837295	1.64479768262e-08	3	0.896110806317
0.00834794082536	1.82589127368e-08	3	0.896111536537
0.0159796031511	1.39449702853e-08	3	0.896109384402
0.0182583225119	2.9376070805e-08	3	0.896113231277
0.016608044759	2.71346933245e-08	3	0.896110600387
0.0108174716449	5.72156468136e-06	3	0.896110575561
0.0123882875146	2.9325750826e-08	3	0.896112630231
0.0115971393557	5.7000981025e-06	3	0.896112528647
0.0180362086956	5.72050301289e-06	3	0.896110110634
0.0134225179379	5.6980036861e-06	3	0.896111804329
0.00839831121103	5.70176162763e-06	3	0.896112495386
0.0136474303743	2.90833117196e-08	3	0.896113147028
0.0127720316287	2.92127434497e-08	3	0.896113444526
0.0123606057186	4.01969485783e-08	3	0.896109921216
0.0138795036894	2.85453797373e-08	3	0.896111477345
0.0136374134809	4.00151199447e-08	3	0.896110129452
0.0096917061992	5.72139297853e-06	3	0.89611022037
0.0124468556422	5.71666763892e-06	3	0.896112636796
0.0152266410606	2.92395935409e-08	3	0.896112785883
0.0124724253362	2.73087348328e-08	3	0.896110607379
0.0155865755155	5.71267395454e-06	3	0.896110895457
0.00971743588378	5.70201711886e-06	3	0.896112587808
0.0145292233257	2.88072462747e-08	3	0.896112276405
0.00934556734294	2.96547092776e-08	3	0.896112081621
0.0149976237884	3.90040972121e-08	3	0.896109646725

CUADRO 4.4: Resultados de estabilidad de una órbita periódica para un control twisting.

Capítulo 5

Conclusiones y Trabajo Futuro

En este trabajo de tesis se ha presentado un estudio de modelación y control de la caminata para un robot bípedo plano de 7 vínculos que conforman un torso y dos piernas incluidos los pies. Los resultados de este trabajo se pueden sintetizar como sigue:

- Mediante las ecuaciones de Euler-Lagrange se ha obtenido un modelo híbrido que incorpora las diferentes fases de locomoción del bípedo. Este modelo incluye el efecto del evento de colisión del pie de balanceo con el suelo. Adicionalmente, a través de expresiones que determinan el equilibrio estático del pie de soporte, se plantea una restricción para el Centro de Presión (**CoP**) que determina una región de validez del modelo propuesto.
- En el **Capítulo 3** se realiza el diseño de diversos controladores para el modelo. Primero se realiza un estudio cualitativo del sistema de ecuaciones diferenciales que determina la dinámica del bípedo en su fase de soporte simple, con lo que se concluye que el equilibrio que físicamente corresponde a una posición erguida y estática, es inestable. Luego se diseña una ley de control lineal (local) óptima que permite la estabilización de dicho punto de equilibrio. Con la finalidad de producir una caminata estable para el robot, se construye una función de salida que codifica diferentes características de la caminata del robot (e.g. posición del pie de balanceo y el torso). Esta salida permite la construcción de un difeomorfismo que linealiza el sistema híbrido original. El sistema linealizado es controlado mediante un esquema twisting, el cual garantiza la convergencia en tiempo finito al origen del sistema. Por construcción, esto implica la generación de un ciclo de caminata para el bípedo. El adecuado funcionamiento de los controladores se verifica mediante simulaciones numéricas. En este mismo capítulo se demuestra que para el modelo del bípedo, existe un control twisting discontinuo que es robusto frente a una clase de perturbación del tipo impulsiva que actúa en el torso del robot.

- En **Capítulo 4** a través del desarrollo de una aplicación de Poincaré para el sistema híbrido, se verifica de forma numérica la existencia y estabilidad de órbitas periódicas para un esquema de control lineal y un esquema de control twisting continuo.
- En el **Apéndice B** se presenta el código de Python que permite evaluar de forma numérica las soluciones del sistema híbrido que describe la caminata del bípedo. El programa permite obtener un modelo simbólico completo para todos los elementos del sistema. Adicionalmente, el programa permite la visualización de una animación del bípedo mientras desarrolla la caminata.

Cabe mencionar que parte de los resultados obtenidos en esta tesis han sido publicados en memorias de un congreso, con la referencia:

- Juan E. Machado, Héctor M. Becerra y Mónica Moreno, “Control de un robot bípedo de 7 vínculos usando un algoritmo twisting”, en Memorias del *Congreso Latinoamericano de Control Automático (CLCA '2014)*, páginas 892-898, Cancún, México, Octubre de 2014.

Además, el autor de esta tesis presentó una ponencia titulada “Modelación y control de un robot bípedo” en la sesión de ecuaciones diferenciales y aplicaciones del *XLVII Congreso Nacional de la Sociedad Matemática Mexicana*, celebrado en Durango en Octubre de 2014.

Para una extensión del trabajo elaborado en esta tesis, pueden considerarse los siguientes problemas:

- Incluir otras etapas presentes en la caminata bípeda. En esta tesis el bípedo desarrolla la caminata teniendo un contacto perfectamente plano entre los pies y el suelo. Sin embargo, con la finalidad de tener un desempeño más cercano a la caminata humana, tendrían que incorporarse al modelo los casos cuando el contacto no es necesariamente plano.
- Proponer diferentes difeomorfismos linealizantes (ver **Sección 3.3**) que permitan una mayor versatilidad en la configuración del bípedo. Como se menciona en *Observación 3.36*, mediante el difeomorfismo linealizante propuesto, se tiene la restricción de que el bípedo no puede extender por completo la pierna de balanceo, lo cual puede ser restrictivo en términos prácticos.
- Tal como se menciona en la **Observación 3.34**, los parámetros de la caminata (tamaño de paso máximo, altura de paso máxima, etc) propuestos en este documento pueden no proporcionar una caminata natural ni energéticamente eficiente.

Por lo tanto, otra opción de trabajo futuro es el estudio de los valores óptimos de dichos parámetros con la finalidad de satisfacer las características mencionadas. Una propuesta viable para realizar lo anterior es el uso de algoritmo evolutivos (ver [7]).

- Estudio de la robustez del sistema bajo perturbaciones del tipo no desvanecientes, las cuales pueden presentarse al considerar incertidumbre en algunos parámetros físicos del sistema.
- Demostración analítica de la existencia de órbitas periódicas que representen ciclos de caminata estables. Uno de los principales retos para lograr lo anterior es la complejidad del modelo, en particular de la aplicación de impacto (ver **Sección 2.3.3**).

Apéndice A

Ecuaciones de Euler-Lagrange

En este apéndice se describe la obtención de las ecuaciones de Euler-Lagrange usando algunos resultados de cálculo de variaciones. Para la representación de dichas ecuaciones se considera un enfoque lagrangiano, que esencialmente consiste en un sistema de ecuaciones diferenciales ordinarias de segundo orden.

La descripción que se presenta está basada en [28], [32], [1] y [23].

Definición A.1. Un funcional Φ es *diferenciable* si $\Phi(\gamma + h) - \Phi(\gamma) = F + R$, donde F depende de forma lineal respecto a h y $R(h, \gamma) = \mathcal{O}(h^2)$, en el sentido que, para $|h| < \epsilon$ y $|\frac{dh}{dt}| < \epsilon$, se cumple $|R| < C\epsilon^2$. La parte lineal del incremento, $F(h)$ es llamado el *diferencial*.

Ejemplo A.1. Sea $\gamma = \{(t, x) : x = x(t), t_0 \leq t \leq t_1\}$ una curva en el plano (t, x) , $\dot{x} = \frac{dx}{dt}$ y sea $L = L(a, b, c)$ una función diferenciable de tres variables. Se define un funcional Φ por

$$\Phi(\gamma) = \int_{t_0}^{t_1} L(x(t), \dot{x}(t), t) dt.$$

Si $L = \sqrt{1 + b^2}$, entonces Φ define la longitud del arco.

Teorema A.2. El funcional $\Phi(\gamma) = \int_{t_0}^{t_1} L(x(t), \dot{x}(t), t) dt$ es diferenciable. Además su derivada está dada por la formula

$$F(h) = \int_{t_0}^{t_1} \left[\frac{\partial L}{\partial x} - \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} \right] h dt + \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}} h \right) \Big|_{t_0}^{t_1}.$$

Demostración.

$$\begin{aligned}\Phi(\gamma + h) - \Phi(\gamma) &= \int_{t_0}^{t_1} \left[L(x + h, \dot{x} + \dot{h}, t) - L(x, \dot{x}, t) \right] dt, \\ &= \int_{t_0}^{t_1} \left[\frac{\partial L}{\partial x} h + \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} \dot{h} \right] dt + \mathcal{O}(h^2) = F(h) + R,\end{aligned}$$

donde

$$\begin{aligned}F(h) &= \int_{t_0}^{t_1} \left(\frac{\partial L}{\partial x} h + \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} \dot{h} \right) dt, \\ R &= \mathcal{O}(h^2).\end{aligned}$$

Integrando por partes, se obtiene que

$$\int_{t_0}^{t_1} \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} \dot{h} dt = - \int_{t_0}^{t_1} h \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}} \right) dt + \left(h \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} \right) \Big|_{t_0}^{t_1}.$$

□

Definición A.3. Un *extremo* de un funcional diferenciable $\Phi(\gamma)$ es una curva γ tal que $F(h) = 0$ para toda h .

Lema A.4. Si una función continua $f(t)$, con $t_0 \leq t \leq t_1$, satisface $\int_{t_0}^{t_1} f(t)h(t)dt = 0$ para cualquier función continua $h(t)$ con $h(t_0) = h(t_1) = 0$, entonces $f(t) \equiv 0$.

Demostración. Supóngase que $f(t^*) > 0$ para algún $t^* \in [t_0, t_1]$. Dado que f es continua, $f(t) > c$ en alguna vecindad abierta V de t^* con diámetro d . Sea $h(t)$ definida de tal forma que $h(t) = 0$ para $t \in [t_0, t_1] \setminus V$, $h(t) > 0$ para $t \in V$ y $h(t) = 1$ en el punto medio de V . Entonces, es claro que $\int_{t_0}^{t_1} f(t)h(t)dt \geq dc \geq 0$, lo que contradice la hipótesis $\int_{t_0}^{t_1} f(t)h(t)dt = 0$, por lo tanto $f(t) \equiv 0$ para cada $t \in [t_0, t_1]$. □

Teorema A.5. La curva $\gamma : x = x(t)$ es un extremo del funcional $\Phi(\gamma) = \int_{t_0}^{t_1} L(x, \dot{x}, t)dt$ en el espacio de curvas que pasan por los puntos $x(t_0) = x_0$ y $x(t_1) = x_1$, si y sólo si

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}} \right) - \frac{\partial L}{\partial x} = 0$$

a lo largo de la curva $x(t)$.

Demostración. Por el **Teorema A.2**

$$F(h) = \int_{t_0}^{t_1} \left[\frac{\partial L}{\partial x} - \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} \right] h dt + \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}} h \right) \Big|_{t_0}^{t_1}.$$

El término después de la integral es cero pues $h(t_0) = h(t_1) = 0$. Si γ es un extremo, entonces $F(h) = 0$ para cada h con $h(t_0) = h(t_1) = 0$. Por lo tanto

$$\int_{t_0}^{t_1} f(t)h(t)dt = 0,$$

donde

$$f(t) = \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}} \right) - \frac{\partial L}{\partial x},$$

para toda h . Por el **Lema A.4**, $f(t) \equiv 0$. De forma análoga, si $f(t) \equiv 0$, entonces es claro que $F(h) \equiv 0$. \square

Definición A.6. La ecuación

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}} \right) - \frac{\partial L}{\partial x} = 0$$

es llamada *ecuación de Euler-Lagrange* para el funcional

$$\Phi = \int_{t_0}^{t_1} L(x, \dot{x}, t)dt.$$

Teorema A.7. Sean $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$, $\gamma = \{(t, \mathbf{x}) : \mathbf{x} = \mathbf{x}(t), t_0 \leq t \leq t_1\}$ una curva en $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$, y $L : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ una función de $2n + 1$ variables. Entonces, la curva γ es un extremo del funcional $\Phi(\gamma) = \int_{t_0}^{t_1} L(\mathbf{x}, \dot{\mathbf{x}}, t)dt$ en el espacio de curvas que unen $(t_0, \mathbf{x}(t_0))$ con $(t_1, \mathbf{x}(t_1))$, si y sólo si la ecuación de Euler-Lagrange es satisfecha a lo largo de γ .

Demostración. La prueba se sigue directamente del **Teorema A.5**. \square

Observación A.8. La ecuación de Euler-Lagrange en el sistema anterior, es un sistema de n ecuaciones diferenciales ordinarias de segundo orden.

A continuación se relacionan las ecuaciones de movimiento de un sistema mecánico con las ecuaciones de Euler-Lagrange.

En general, el movimiento de un sistema mecánico satisface la ecuación de Newton que esta dada por:

$$\frac{d}{dt}(m_i \dot{r}_i) + \frac{\partial U}{\partial r_i} = 0, \quad (\text{A.1})$$

donde r_i son las coordenadas de la posición \mathbf{r} del sistema mecánico y U es una función escalar que representa la energía potencial del sistema.

Teorema A.9. *El movimiento del sistema mecánico de la ec. (A.1) coincide con los extremos del funcional*

$$\Phi(\gamma) = \int_{t_0}^{t_1} L dt,$$

donde $L = T - U$ es la diferencia entre la energía potencial y la energía cinética del sistema mecánico.

Demostración. Si se define $U := \mathbf{U}(\mathbf{r})$ y $T := \sum m_i \frac{v_i^2}{2}$, se tiene que $\frac{\partial L}{\partial \mathbf{r}_i} = \frac{\partial T}{\partial \mathbf{r}_i} = m_i \mathbf{v}_i$ y $\frac{\partial L}{\partial \mathbf{v}_i} = -\frac{\partial U}{\partial \mathbf{v}_i}$. \square

Corolario A.10. *Sea (q_1, \dots, q_n) cualquier punto del espacio de configuración de un sistema mecánico de n masas puntuales. Entonces la evolución temporal de \mathbf{q} respecto al tiempo está sujeta a las ecuaciones de Euler-Lagrange*

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\mathbf{q}}} \right) - \frac{\partial L}{\partial \mathbf{q}} = 0,$$

donde $L = T - U$.

Demostración. Por el teorema anterior, las ecuaciones de movimiento son un extremo del funcional $\Phi = \int L dt$. Dado que el punto elegido en el espacio de configuración no depende de algún vector de coordenadas generalizadas específico, se concluye que las ecuaciones de Euler-Lagrange son satisfechas para cualquier sistema de coordenadas. \square

Definición A.11. En mecánica se usa la siguiente terminología: $L(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, t) = T - U$ es la *función de Lagrange* o *lagrangiano*, q_i son las *coordenadas generalizadas*, \dot{q}_i son las *velocidades generalizadas*, $p_i := \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}$ son los *momento generalizados*, $\frac{\partial L}{\partial q_i}$ son las *fuerzas generalizadas*, $\int_{t_0}^{t_1} L(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, t)$ es la *acción* y $\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\mathbf{q}}} \right) - \frac{\partial L}{\partial \mathbf{q}}$ es la *ecuación de Lagrange*.

Ahora se presenta una versión de las ecuaciones de Euler-Lagrange que incorpora el efecto producido por fuerzas no conservativas que pueden estar presente en algún sistema mecánico.

Definición A.12. Sea m la masa de una partícula de masa puntual y denótese por \mathbf{r} su posición en el instante t . Si \mathbf{f} es una fuerza que actúa sobre \mathbf{r} , entonces el *trabajo* W realizado por \mathbf{f} se define mediante la expresión

$$W = \int_{t_0}^{t_1} \mathbf{f} \frac{d\mathbf{r}}{dt} dt.$$

Definición A.13. Una fuerza actuando sobre una partícula de masa puntual se dice *conservativa* si el trabajo realizado por dicha fuerza es independiente de la trayectoria de la partícula.

Ejemplo A.2. La fuerza gravitacional es una fuerza conservativa. Supóngase que una masa puntual de masa m es sometida a un campo gravitacional constante, entonces la fuerza gravitacional está dada por $\mathbf{f} = -m\mathbf{g}_0$, donde $\mathbf{g}_0 \in \mathbb{R}^3$ es la constante del campo gravitacional. Luego el trabajo realizado por la fuerza gravitacional está dado por $\int_{t_0}^{t_1} \mathbf{f}^T \frac{d\mathbf{r}(\mathbf{t})}{dt} dt = -m\mathbf{g}_0^T \int_{t_0}^{t_1} \frac{d\mathbf{r}(\mathbf{t})}{dt} dt = -m\mathbf{g}_0^T (\mathbf{r}(t_1) - \mathbf{r}(t_0))$, implicando que el trabajo realizado no depende de la trayectoria que tome la partícula.

En los sistemas de control es común la presencia de fuerzas no conservativas. En el caso del bípido, las fuerzas no conservativas son las fuerzas rotacionales ejercidas por los actuadores en las articulaciones del bípido (entradas de control). Para conocer el efecto de estas fuerzas es posible usar las ecuaciones de Euler-Lagrange, sin embargo, es necesario definir un lagrangiano no conservativo que incluya fuerzas no conservativas.

Considérese un sistema mecánico de n cuerpos rígidos \mathcal{B}_i de volumen V_i , con densidad ρ_i uniforme y de masa constante $m_i = \int_{V_{\mathcal{B}_i}} \rho_i dV$. Se denota por $O - xyz$ a un marco de referencia fijo a el centro de masa del sistema dado por $\mathbf{CoM} = \frac{\sum m_i \mathbf{r}_i}{\sum m_i}$, siendo \mathbf{r}_i los centros de masa de cada \mathcal{B}_i respecto a $O - xyz$. Entonces el movimiento del sistema satisface las ecuaciones de Newton-Euler ([28], [32] y [13]) dadas por

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^n \frac{d}{dt} (m_i \dot{\mathbf{r}}_i) + \sum_{i=1}^n \frac{\partial U_i}{\partial \mathbf{r}_i} &= \boldsymbol{\mu}_f, \\ \sum_{i=1}^n \frac{d}{dt} (\mathbf{J}_i \dot{\boldsymbol{\theta}}_i) &= \boldsymbol{\mu}_\tau, \end{aligned} \quad (\text{A.2})$$

donde $\boldsymbol{\theta}_i$ y \mathbf{J}_i son la orientación y el tensor de inercia de cada \mathcal{B}_i respecto a $O - xyz$. Los términos $\boldsymbol{\mu}_f$ y $\boldsymbol{\mu}_\tau$ representan la suma de fuerzas lineales y fuerzas de rotación respectivamente que actúan sobre el sistema y que son no conservativas. Las fuerzas conservativas se incluyen en el término $\frac{\partial U_i}{\partial \mathbf{r}_i}$.

Proposición A.14. El movimiento del sistema mecánico descrito por la ec. (A.2) coincide con los extremos del funcional

$$\Phi(\gamma) = \int_{t_0}^{t_1} L_{nc} dt,$$

donde $L_{nc} = (T - U) - \mathcal{V}_{nc}$ es un lagrangiano no conservativo.

Demostración. Sea $\mathbf{x} := (\mathbf{r}_1, \dots, \mathbf{r}_n, \boldsymbol{\theta}_1, \dots, \boldsymbol{\theta}_n) =: (\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2)$. Denótese por $U := \sum_{i=1}^n U(\mathbf{x}_1)_i$ y $T = \sum_{i=1}^n \frac{m_i \dot{\mathbf{r}}_i^T \dot{\mathbf{r}}_i}{2} + \frac{\mathbf{J}_i \dot{\boldsymbol{\theta}}_i^T \dot{\boldsymbol{\theta}}_i}{2}$ a la energía potencial y cinética, respectivamente, para todo el sistema mecánico. Si se define además una energía potencial no conservativa como $\mathcal{V}_{nc} = -\boldsymbol{\mu}_f^T \mathbf{x}_1 - \boldsymbol{\mu}_\tau^T \mathbf{x}_2$, entonces $\frac{\partial L_{nc}}{\partial \dot{\mathbf{x}}} = \frac{\partial T}{\partial \dot{\mathbf{x}}} = \left[\sum_{i=1}^n m_i \dot{\mathbf{r}}_i \quad \sum_{i=1}^n \mathbf{J}_i \dot{\boldsymbol{\theta}}_i \right]$, $\frac{\partial L_{nc}}{\partial \mathbf{x}} = \left[\frac{\partial U(\mathbf{x}_1)}{\partial \mathbf{x}_1} + \boldsymbol{\mu}_f \quad \boldsymbol{\mu}_\tau \right]$, por lo que un lagrangiano no conservativo puede ser escrito como $L_{nc} = (T - U) - \mathcal{V}_{nc}$. Esto implica que

$$\begin{aligned} \left[\sum_{i=1}^n \frac{d}{dt} (m_i \dot{\mathbf{r}}_i) + \sum_{i=1}^n \frac{\partial U_i}{\partial \dot{\mathbf{r}}_i} \quad \sum_{i=1}^n \frac{d}{dt} (\mathbf{J}_i \dot{\boldsymbol{\theta}}_i) \right] &= \left[\boldsymbol{\mu}_f \quad \boldsymbol{\mu}_\tau \right], \\ &\Leftrightarrow \\ \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L_{nc}}{\partial \dot{\mathbf{x}}} \right) - \frac{\partial L_{nc}}{\partial \mathbf{x}} &= 0, \end{aligned}$$

por lo tanto, por el **Teorema A.5** se concluye el resultado. \square

Proposición A.15. *Sea $(q_1, \dots, q_n) =: \mathbf{q}$ un punto del espacio de configuración de un sistema mecánico de n cuerpos rígidos, que incluye fuerzas no conservativas $\boldsymbol{\mu}$. Entonces la evolución temporal de \mathbf{q} respecto al tiempo está sujeta a la siguiente versión de las ecuaciones de Euler-Lagrange*

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\mathbf{q}}} \right) - \frac{\partial L}{\partial \mathbf{q}} = \boldsymbol{\mu}. \quad (\text{A.3})$$

donde $L = T - U$.

Demostración. Por la **Proposición A.14** las ecuaciones de movimiento son un extremo del funcional $\Phi(\gamma) = \int_{t_0}^{t_1} L_{nc} dt$. Ésto implica que si \mathbf{q} es el vector de coordenadas generalizadas, entonces por el **Corolario A.10** se tiene que

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L_{nc}}{\partial \dot{\mathbf{q}}} \right) - \frac{\partial L_{nc}}{\partial \mathbf{q}} = 0.$$

Luego, puesto que $L_{nc} := L - \mathcal{V}_{nc}$, la última ecuación adopta la expresión siguiente

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\mathbf{q}}} \right) - \frac{\partial L}{\partial \mathbf{q}} = \boldsymbol{\mu}.$$

\square

Proposición A.16. *Sea $(q_1, \dots, q_n) =: \mathbf{q}$ un vector de coordenadas generalizadas de un sistema de n cuerpos rígidos. Denótese por $\boldsymbol{\mu}$ a un vector de fuerzas generalizadas (que puede incluir fuerzas no conservativas). Supóngase que la energía cinética del sistema depende de forma cuadrática respecto a $\dot{\mathbf{q}}$ y que puede escribirse como $T = \frac{1}{2} \dot{\mathbf{q}}^T \mathbf{B}(\mathbf{q}) \dot{\mathbf{q}}$, donde $\mathbf{B}(\mathbf{q})$ es una matriz de $n \times n$ simétrica definida positiva. Supóngase además que*

la energía potencial $U = U(\mathbf{q})$ es independiente de $\dot{\mathbf{q}}$. Entonces las ecuaciones de Euler-Lagrange del sistema pueden escribir en forma matricial como (ver [32] y [28])

$$\mathbf{B}(\mathbf{q})\ddot{\mathbf{q}} + \mathbf{C}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})\dot{\mathbf{q}} + \mathbf{G}(\mathbf{q}) = \boldsymbol{\mu}. \quad (\text{A.4})$$

Demostración. Definiendo un lagrangiano no conservativo $L_{nc} = (T - U) - \mathcal{V}_{nc}$ y la energía potencial no conservativa como $\mathcal{V}_{nc} = -\boldsymbol{\mu}^T \mathbf{q}$, entonces por la proposición anterior se tiene que

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\mathbf{q}}} \right) - \frac{\partial L}{\partial \mathbf{q}} = \boldsymbol{\mu}, \quad (\text{A.5})$$

lo que implica que

$$\mathbf{B}(\mathbf{q})\ddot{\mathbf{q}} + \mathbf{C}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})\dot{\mathbf{q}} + \mathbf{G}(\mathbf{q}) = \boldsymbol{\mu},$$

donde

$$\mathbf{C}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) = \dot{\mathbf{B}}(\mathbf{q})\dot{\mathbf{q}} - \frac{1}{2} \left(\frac{\partial}{\partial \mathbf{q}} (\dot{\mathbf{q}}^T \mathbf{B}(\mathbf{q}) \dot{\mathbf{q}}) \right)^T \text{ y}$$

$$\mathbf{G}(\mathbf{q}) = \frac{\partial U(\mathbf{q})}{\partial \mathbf{q}}^T.$$

□

Apéndice B

Código de Python

En este apéndice se presenta el código de Python que fue usado para la obtención de los resultados numéricos presentes en la **Sección 3.5** y en la **Sección 4.4.1**. Otra plataforma de simulación que ha sido usada en la literatura es Matlab¹ por ejemplo en [35]. En el caso de esta tesis, se propuso la implementación de un código para realizar simulaciones pero que fuera en una plataforma de código abierto. Con la finalidad de explotar las propiedades de cálculo simbólico que ofrece el paquete Sympy², se optó por desarrollar el código en Python. Las ecuaciones de movimiento para el bípedo en su fase de soporte simple (ver **Sección 2.3.2**) son derivadas automáticamente al inicio de cada simulación. Con la finalidad de agilizar la obtención de resultados, para la solución del sistema de ecuaciones diferenciales ordinarias producido, se implementa el *método explícito del punto medio* [9]. Además se incluyen líneas de código que permiten identificar el cruce de las soluciones del sistema por las hiper-superficies del modelo híbrido. La salida de la simulación consiste en una serie de gráficas que presentan la evolución temporal de, por ejemplo, la salida del sistema (ver **Proposición 3.33**) y del vector de estados. Sin embargo, con la finalidad de tener una idea mas intuitiva del comportamiento del sistema, también se incluye como salida del programa una animación bidimensional del bípedo durante la caminata.

A continuación se presenta el código elaborado.

```
1 # -*- coding: utf-8 -*-
  """
3 @author: juan machado
  """
5 #:::::::::::::::::: PACKAGES::::::::::::::::::#
  import scipy as sc
7 from scipy import integrate
```

¹<http://www.mathworks.com/products/matlab/>

²<http://sympy.org/es/index.html>

```

from sympy.utilities.lambdify import lambdify
9 from sympy import*
from numpy import size , zeros , arange , shape , sum , asarray , linspace , dot , array ,
    sign
11 from numpy.linalg import matrix_power as POW
from scipy.interpolate import interp1d
13 import pylab as pl
from scipy.optimize import brentq
15 from numpy import sin as seno
from numpy import cos as coseno
17 import numpy as np
import sympy as sy
19 import matplotlib.animation as animation
#####
21
23
#::::::::::::SYMBOLIC VARIABLES::::::::::::#
25
L=symbols('L:7') #link's lengths
27 m=symbols('m:7') #link's masses
J=symbols('J:7') #moments of inertia
29 theta=symbols('theta:7') #link's configurations
t , px , py , g=symbols('t , px , py , g')
31 mu=symbols('mu:7')
x=symbols('x:16')
33
q=symbols('theta:7') #generalized variables
35 qp=symbols('omega:7')
qpp=symbols('alpha:7')
37
39
#::::::::::::work functions (for the script)::::::::::::#
41
def jacobian(f,p):
43     J=zeros((shape(f)[0] , size(p)) , Symbol)
     m=shape(f)[0]
45     n=size(p);
     for i in range(m):
47         for j in range(n):
             J[i , j]=diff(f[i] , p[j])
49     return Matrix(J)

51 def hessian(f,p):
     J=zeros((shape(f)[0] , size(p)) , Symbol)
53     m=shape(f)[0]
     n=size(p);

```

```

55     for i in range(m):
56         for j in range(n):
57             J[i,j]=diff(f[i],p[j],2)
58     return Matrix(J)
59
60 def Dt(f):
61     v1=zeros((size(qp),1),Symbol)
62     v2=zeros((size(qpp),1),Symbol)
63     for i in range(size(q)):
64         v1[i,0]=qp[i]
65         v2[i,0]=(qpp)[i]
66     D1=jacobian(f,q)*Matrix(v1)
67     D2=jacobian(f,qp)*Matrix(v2)
68     return D1+D2
69
70
71 def dt_exp(f):
72     rr=zeros(shape(f),Symbol)
73     for i in range(size(f)):
74         rr[i]=diff(f[i],t)
75     return Matrix(rr)
76
77
78 def odd(p):
79     return bool(p % 2)
80
81 def pair(p):
82     return bool(p % 2==0)
83
84 def efun(f,x,ite):
85     rr=[];
86     for i in range(ite):
87         rr+=[f(x[i])]
88     return rr
89
90
91
92
93 #::::::::::::joints position::::::::::::#;
94
95 def P(i):
96     P0=Matrix([px,py,0.])
97     #P0=L[0]*Matrix([-cos(q[0]),sin(q[0]),0.])+Matrix([px+L[0],py-L[0],0.])
98     P1=P0+2.*L[1]*Matrix([-sin(q[1]),cos(q[1]),0.])
99     P2=P1+2.*L[2]*Matrix([-sin(q[2]),cos(q[2]),0.])
100    P3=P2+2.*L[4]*Matrix([sin(q[4]),-cos(q[4]),0.])
101    P4=P3+2.*L[5]*Matrix([sin(q[5]),-cos(q[5]),0.])
102    return [P0,P1,P2,P3,P4][i]

```

```

103
105 #center of mass for each link#
def Q(i):
107     Q0=P(0);
108     Q1=0.5*(P(0)+P(1));
109     Q2=0.5*(P(1)+P(2));
110     Q3=P(2)+L[3]*Matrix([-sin(q[3]),cos(q[3]),0.])
111     Q4=0.5*(P(2)+P(3));
112     Q5=0.5*(P(3)+P(4));
113     Q6=P(4);
114     return [Q0,Q1,Q2,Q3,Q4,Q5,Q6][i]
115
def mc():
117     Q0=P(0);
118     Q1=0.5*(P(0)+P(1));
119     Q2=0.5*(P(1)+P(2));
120     Q3=P(2)+L[3]*Matrix([-sin(q[3]),cos(q[3]),0.])
121     Q4=0.5*(P(2)+P(3));
122     Q5=0.5*(P(3)+P(4));
123     Q6=P(4);
124     return Q0,Q1,Q2,Q3,Q4,Q5,Q6
125
#kinetic energy#
127 def kinetic_energy():
128     vel_ang=zeros(size(q),Symbol)
129     tensores_inercia=zeros(size(q),Symbol)
130     k=zeros(size(q),Symbol)
131     for i in range(size(q)):
132         vel_ang[i]=Matrix([0.,0.,qp[i]])
133         tensores_inercia[i]=Matrix([[0.,0.,0.],[0.,0.,0.],[0.,0.,J[i]]])
134         k[i]=0.5*m[i]*Dt(Q(i)).T*Dt(Q(i))+0.5*vel_ang[i].T*(
135         tensores_inercia[i]*vel_ang[i])
136     return sum(k)
137
#potential energy#
139 def potential_energy():
140
141     g=-9.81
142
143     u=zeros(size(q),Symbol)
144     for i in range(size(q)):
145         u[i]=-m[i]*g*Q(i)[1]
146     return Matrix([sum(u)])
147
def lagrangian():
149     return kinetic_energy()+potential_energy()

```

```

151 def euler_lagrange_equations():
    eq=zeros(size(q),Symbol)
153     for i in range(size(q)):
        eq[i]=Dt(Matrix([diff(lagrangian()[0],qp[i])]))[0]-diff(lagrangian
            ()[0],q[i])
155     return Matrix(eq)

157 X=symbols('x:14')
    q=symbols('x:7')
159 qp=symbols('x7:14')

161 #:::::::::::::::::INERTIA MATRIX: B(q) :::::::::::::::#
163 def B_matrix():
    B=jacobian(kinetic_energy(),qp)
165     B=jacobian(B.T,qp)
        BB=B
167     return Matrix(BB)

169 #::::::::::::::::: n(q,qp) MATRIX :::::::::::::::#
171 def n_matrix():
    nn=euler_lagrange_equations().T-B_matrix()*Matrix(qpp)
173     return Matrix(nn)

175 #::::::::::::::::: G(q) MATRIX :::::::::::::::#

177 def G_matrix():
    return jacobian(jacobian(potential_energy(),q).T,q)

179 #:::::::::::::::::VECTOR FIELD FOR F(x(t)) :::::::::::::::#
181 def F():
    f=zeros(2*size(q),Symbol)
183     v_2=-((B_matrix()**-1)*(n_matrix()))
        for i in range(0,size(q)):
185             f[i]=qp[i]
        for i in range(size(q),2*size(q)):
187             #f[i]=qpp[i-size(q)]
                f[i]=1.*v_2[i-size(q)]
189     f[0]=0.
        f[7]=0.
191     ff=Matrix(f)
        return ff

193 #:::::::::::::::::LINEARIZATION OF THE VECTOR FIELD F(X) around X=0:::::::::::::#
195

```

```

197 def A0():
    a0=zeros((2*size(q),2*size(q)))
199     for i in range(0,size(q)):
        for j in range(size(q),2*size(q)):
201             a0[i,j]=np.identity(7)[i,j-size(q)]

203     for i in range(size(q),2*size(q)):
        for j in range(0,size(q)):
205             a0[i,j]=-(B.num(zeros(size(X)))** -1)

207     return a0

209 def gamma(x):
211     return -(ymax/(xmax**2.))*(x-px)**2.+ymax

213 def h():
    h0=q[0]
215     h1=P(4)[0]
    h2=P(4)[1]-gamma(P(4)[0])
217     h3=P(2)[0]
    h4=q[2]
219     h5=q[3]
    h6=q[6]
221     return Matrix([h0,h1,h2,h3,h4,h5,h6])

223
225 def rho(T,s,a,b,vmax):
    # a=xin
    # b=xf
227     return a+vmax*(T-s)*(b-a)

229 #permutation matrix
231 def Pm(v):
    return dot(POW(per_matrix(),per),v)

233 def Pm_small(v):
    M=per_matrix_small()
235     return dot(POW(M,per),v)

237 #Desired trajectory for the OUTPUT
239 def Y_d():
    return Matrix([0.,px+xmax,0.,px+MU*xmax,0.,0.,0.]) #rpbust

241 def Y_d_p():
    r=dt_exp(Y_d())
243     #rr=lambdify(t,r)
    return Matrix(r)

```

```

245
247
def H_jacobian():
249     return jacobian(h(),q)

251 def m_matrix():
     return Dt(Dt(h()))-H_jacobian()*Matrix(qpp)
253
255
257 #:::::::::::::::::::: numerical solution :::::::::::::::::::::: #
#mass center for links
259 def num_mc(x, i):
     rr=lambdify([X],mc())
261     return rr(x)[i]

263 def B_num(x):
     #rr=lambdify([X],B_matrix())
265     return B_global(x)

267 def G_num(x):
     rr=lambdify([X],G_matrix())
269     return rr(x)

271 def n_num(x):
     #rr=lambdify([X],n_matrix())
273     return n_global(x)

275
277 def H_num(x):
     #x=dot(POW(per_matrix()),per),x)
279     x=Pm(x)
     x=asarray(x).T
281     rr=lambdify([X],h())
     return rr(x)-Y_d()
283
def H_jacobian_num(x):
285     #x=dot(POW(per_matrix()),per),x)
     rr=lambdify([X],H_jacobian())
287     return rr(x)

289 def difeo_T(x):
     z=zeros((size(2*q)))
291     y=H_num(Pm(x))
     yp=H_jacobian_num(x)*np.matrix(x[size(q):size(2*q)]).T

```

```

293     for i in range(0, size(q), 1):
294         z[i]=y[i]
295     for i in range(size(q), size(2*q), 1):
296         z[i]=yp[i-size(q)]
297     z[0]=0.
298     z[size(q)]=0.
299     return z
300
301
302
303 def m_matrix_num(u):
304     rr=lambdify([X], m_matrix())
305     return rr(u)
306
307 #Field of the differential equations system (controlled)
308 def F_close(x,T):
309     x=Pm(x)
310     rr=zeros(size(x), float)
311     FF=H_jacobian_num(x)**-1*(V_control(x)-m_matrix_num(x))+B_num(x)**-1*
external_perturbation_num(x) #exact linearization#
312     for i in range(size(q)):
313         rr[i]=x[i+size(q)]
314     for i in range(size(q), size(x)):
315         rr[i]=FF[i-size(q)]
316     rr[0]=0.
317     rr[7]=0.
318     return asarray(Pm(rr))
319
320
321 def symb_abs(X):
322     r=zeros(shape(X))
323     for k in range(max(shape(X))):
324         r[k]=sy.Abs(X[k])
325     return r
326
327
328
329 #::::::::::::::::::::::::::CONTROLLERS DESIGN ::::::::::::::::::::::::::::#
330
331
332
333 #twisting control parameters
334 k1=2.*np.diag(array([1., 1., 1., 1., 4.5, 1., 10.]))
335 k2=2.*np.diag(array([1., 1., 1., 1., 4.5, 1., 10.]))
336 alfa=.75
337
338 #linear control parameters
339 #k1=1.*np.diag(np.array([1., 1., 4., 4., 4., 4., 4.]))

```

```

#k2=np.diag(np.array([1.,.5*k1[1,1]**2.,.2*k1[2,2]**2.,.2*k1[3,3]**2.,.2*k1
    [4,4]**2.,.2*k1[5,5]**2.,.2*k1[6,6]**2.]))
341 #
343 #OUTPUT DYNAMICS CONTROL
345 def V_control(x):
    #x=Pm(x)
347 z=Matrix(difeo_T(x)[0:size(q)].T;
    zp=Matrix(difeo_T(x)[size(q):size(2*q)].T)
349 #linear_control=Matrix(-dot(k1,array([zp]).T)-dot(k2,array([z]).T))
    #robust_control1=Matrix(-dot(k1,sign(zp))-dot(k2,sign(z)))
351 robust_control2=Matrix(-dot(k1,((symb_abs(zp)**alfa)*sign(zp)))-dot(k2
    ,(symb_abs(z)**(alfa/(2.-alfa)))*sign(z)))
    return robust_control2
353
# X-STATE-SPACE CONTROLLER
355 def mu_control(x):
    mm=zeros((size(q),1))
357 mm=B_num(x)*(H_jacobian_num(x)**-1)*(V_control(x)-m_matrix_num(x))+
    n_num(x)
    return mm
359
def mu_control_graf(x):
361 mm=B_num(x)*(H_jacobian_num(x)**-1)*(-V_control(x)-m_matrix_num(x))+
    n_num(x)
    return mm
363
365 #CONTROLLER IN TERMS OF TORQUE
A_tau=array([[0.,1., -1., 0., 0., 0., 0.], [0.,0., 1., -1., 0., 0., 0.],
    [0.,0., 0., 1., 1., 0., 0.], [0.,0., 0.,
367 0., -1., 1., 0.], [0.,0., 0., 0., 0., -1., 1.], [0.,0., 0., 0., 0., 0.,
    -1.],[0.,0.,0.,0.,0.,0.,0.]])
A_tau_inv=np.linalg.pinv(A_tau)
369
def tau_control(x):
371 return -dot(A_tau_inv,asarray(mu_control_graf(x))).T[0]
373
375
##### CENTER OF PRESSURE #####
377
#::::::::::::::::::::::::::FLOOR REACTION FORCE :::::::::::::: #
379 def reaccion_y():
381 lin=[]

```

```

383     for i in range(size(q)):
384         lin += [m[i] * (Dt(Dt(Q(i)))) [1]]
385     return sum(lin) + sum(m) * 9.81
386
387 def reaccion_y_num(x, qpp):
388     return RY(x, qpp)
389
390
391 def center_pressure(x):
392     ry = reaccion_y_num(Pm(x), F_close(x, 0.) [7:])
393     cop = tau_control(Pm(x)) [1] / ry
394     return cop
395
396
397 ##### EXTERNAL PERTURBATION DESIGN #####
398
399 def torso_jacobian():
400     return jacobian(Q(3) [0:2], q [0:7])
401
402
403 def external_perturbation():
404     return torso_jacobian().T * Matrix(array([[fex], [0.]]) )
405
406
407 def external_perturbation_num(u):
408     rr = lambdify([X], external_perturbation())
409     return rr(u)
410
411
412
413 #: ::::::::::: NUMERICAL METHOD DESIGN ::::::::::: #
414
415
416 def per_matrix():
417     permat = zeros((size(X), size(X)))
418     for i in range(size(X)):
419         for j in range(size(X)):
420             if i + j == 6:
421                 permat[i, j] = 1.
422             if i + j == 20:
423                 permat[i, j] = 1.
424     return permat
425
426
427 def per_matrix_small():
428     permat = zeros((size(q), size(q)))
429     for i in range(size(q)):
430         for j in range(size(q)):

```

```

431         if i+j==6:
                permat[i,j]=1.

433     return permat

435     #####IMPACT COMPUTATIONS #####
437     #WE CONSIDER ONLY X AND Y COORDINATES.
439
440     def support_foot(t):
441         return array([px,py])

442     def swing_foot_pos():
443         return P(4)

444     def swing_foot_pos_num(x):
445         x=Pm(x)
446         rr=lambdify([X], swing_foot_pos())
447         return rr(x)

448     def H_2.1(x):
449         global h21
450         rr=lambdify([X], swing_foot_pos())
451         x=dot(per_matrix(),x)
452         return rr(x)

453     def swing_foot_vel():
454         return Dt(swing_foot_pos())

455     def swing_foot_vel_num(x):
456         x=Pm(x)
457         rr=lambdify([X], swing_foot_vel())
458         return rr(x)

459
460     def ankle_jacobian_sym():
461         #obs: we discard the 'z' component for the foot position
462         return jacobian(P(4)[0:2],q[1:7])

463
464     def ankle_jacobian(x):
465         #x=Pm(x)
466         rr=lambdify([X], ankle_jacobian_sym())
467         return rr(x)

468
469     def swing_foot_jacobian():
470         jptheta=array([0.,0.,0.,0.,0.,1.])
471         return np.matrix(jptheta)

```

```

479 def impact_force_num(x):
    vel_ang=x[8:14]
481 force=-(ankle_jacobian(x)*B_num(x)[1:7,1:7]**-1*ankle_jacobian(x).T)
    **-1*ankle_jacobian(x)*vel_ang
    return force
483
485 def Delta(x):
    global q_minus, q_plus, qp_minus, qp_plus, qp_plus_ext, x_plus
487 x=array([x]).T
    q_minus=x[0:7]
489 qp_minus=x[7:14]
491 M_1=ankle_jacobian(Pm(x))*B_num(Pm(x))[1:7,1:7]**-1*ankle_jacobian(Pm(x)
    ).T
    M_2=swing_foot_jacobian()*B_num(Pm(x))[1:7,1:7]**-1*swing_foot_jacobian
    ().T
493 delta_2=(-B_num(Pm(x))[1:7,1:7]**-1*ankle_jacobian(Pm(x)).T*M_1**-1*
    ankle_jacobian(Pm(x))
        -B_num(Pm(x))[1:7,1:7]**-1*swing_foot_jacobian().T*M_2**-1*
    swing_foot_jacobian()
        +np.matrix(np.identity(6)))
495
497 #q_plus=Pm_small(q_minus)
    qp_plus=delta_2*(qp_minus[1:7])
499 qp_plus_ext=np.matrix(zeros((size(q))))*T
    for i in range(1,size(q),1):
501     qp_plus_ext[i,0]=qp_plus[i-1,0]
503
    #qp_plus_ext=Pm_small(qp_plus_ext)
505
    x_plus=np.matrix(zeros((2*size(q))))*T
    for i in range(0,size(q),1):
507     x_plus[i,0]=q_minus[i,0]
    for i in range(size(q),2*size(q),1):
509     x_plus[i,0]=qp_plus_ext[i-size(q),0]
511
    x_plus=array(x_plus.T)[0]
    x_plus[0]=0.
513 x_plus[size(q)]=0.
    return Pm(x_plus)
515
##### SOLUTION COMPUTATION FOR THE HYBRID MODEL
#####
517
# SYSTEM PARAMETERS DEFINITION#
519

```

```

#first , we delete some previous definitions of symbolic vars.
521 del(L,m,J,mu)

523 L=zeros ( size (q))
m=zeros ( size (q))
525 J=zeros ( size (q))
for i in range (size (q)) :
527     L [ i ]=0.25*(1.0)
L [3]=0.4*(1.0)
529 L [0]=L [6]=0.15*(1.0) ;

531 #
m [1]=m [2]=m [4]=m [5]=10.*(1.)
533 m [3]=20.*(1.0)
m [0]=m [6]=1.*(1.0)
535

537 #
for i in range (size (q)) :
539     J [ i ]=(1./12.)*( m [ i ]*(2*L [ i ]) **2.);

541

543

545 #WALKING PARAMETERS
#fex=60.
547 h_eps=0.001;
xmax=0.15; #MAXIMUM STEP SIZE FOR THE ROBOT
549 MU=.5; #DISPLACEMENT FACTOR FOR THE HIP
ymax=0.03; #MAXIMUM HEIGHT FOR THE FOOT IN EACH STEP
551 biped_steps=10 #STEPS_NUMBER_FOR_THE_BIPED#

553

555 #Simulation parameters
tin=0. #initial time
557 tf=2. #final time
dt=.1 #simulation_step_size
559 iterations=int ((tf-tin)/(dt));

561

563

#we define the event as the moment when the foot heigth reaches zero
565 def event(x):
return swing_foot_pos_num(x) [1,0]
567

```

```

569
571 #####
573
575 def H(x) :
577     return event(x)
579
581 def Hp(x) :
583     #x=Pm(x)
585     return swing_foot_vel_num(x)[1,0]
587
589 # ODE SOLVER (MIDPOINT METHOD)
591 def explicit_midpoint(f,x0,dom,hk) :
593     global time,sol3,fex
595     t0=dom[0]
597     tf=dom[-1]
599     tk=t0
601     xk=x0
603     iterations=(1./hk)*(tf-t0)
605     time=[]
607     time+=[t0]
609     sol=[]
611     sol+=[x0]
613     for k in range(int(iterations)) :
615         tk=tk+hk
617         if 7.<=tk<=7.1:
619             fex=0. #EXTERNAL PERTURBATION FORCE
621         else :
623             fex=0.
625         time+=[tk]
627         xk=xk+hk*f(xk+0.5*hk*f(xk,tk),tk+0.5*hk)
629         sol+=[xk]
631         if sy.det(Matrix(H.jacobian_num(Pm(xk))))==0. or H(xk)<-.01:
633             print 'singularidad'
635             break
637     time=np.array([time]).T
639     sol3=pl.asarray(sol)
641     return sol3
643
645 #ROOT FINDER
647 def root_finder(F,DF,dom,hk) :
649     global r1,r2,obj

```

```

t0=dom[0]
617 tf=dom[-1]
m=0.5*(t0+tf)
619 def obj(x):
    return pl.norm(F(x))
621 r1=sc.optimize.fminbound(obj,t0,m)
r2=sc.optimize.fminbound(obj,m,tf)
623 if np.min([obj(r1),obj(r2)])>hk*.1:
    r=np.inf
625 else:

    if DF(r1)<=0. or DF(r2)<=0.:
        r=[r1,r2][np.argmin([obj(r1),obj(r2)])]
629    else:
        r=np.inf
631 return r

633 # HYBRID SYSTEMS SOLVER
635 def event_solution(f,x0,dom,hk,H,Hp,delta,dt):
    global poly, root,xnew,sol_piecewise,xsol,raices,tiempo,t_global,X_aux,
    traj_H,traj_Hp,p,impactos

637

639 ##### (Biped's simulation parameters)
global stance,px,py,B_global,n_global,RY,per,salida,left_foot,
right_foot,torques,cop
641 #B_global=lambdify([X],B_matrix())
n_global=lambdify([X],n_matrix())
643 RY=lambdify([X,qpp],reaccion_y())
px=0.
645 py=0.
stance=[]
647 stance+=[[px,py]]
per=0
649 salida=[]
left_foot=[]
651 right_foot=[]
torques=[]
653 cop=[]
#salida+=[H_num(x0)]
655 #####

657 t_global=[]
sol_piecewise=[]
659 t0=dom[0]
raices=[]
661 impactos=[]

```

```

663 #while tfin<dom[-1]:
    for p in range(biped_steps):
665         xsol=[]
            tfin=t0+dt
667         xsol+=explicit_midpoint(f,x0,[t0,tfin],hk)
            xsol=np.asarray(xsol).T
669         full_sol=xsol;
            tiempo=time

671         def X_aux(t):
673             sal=[]
                for m in range(np.size(x0)):
675                     inter=sc.interpolate.interpld(time.T[0],full_sol[m].T[0],
kind='linear')
                    sal+=[inter(t)]
677                 return np.asarray(sal)

679         def traj_H(t):
681             return H(X_aux(t))

683         def traj_Hp(t):
685             return Hp(X_aux(t))

687         root=root_finder(traj_H,traaj_Hp,[time[0][0],time[-1][0]],hk)

689 #         if abs(root-time[0][0])<hk:
691 #             break
        if root==np.inf:
693             xsol=xsol.T[0]
                sol_pieewise+=[xsol]
                t_global+=[tiempo]
695                 t0=tiempo[-1][0]
                    x0=xsol.T[0][-1]
697                     salida+=[np.array(efun(H_num,xsol,shape(xsol)[0]))]
                        torques+=[np.array(efun(tau_control,xsol,shape(xsol)[0]))]
699                         cop+=[np.array([efun(center_pressure,xsol,shape(xsol)[0])])]
                            if odd(per):
701                                 left_foot+=[array(efun(support_foot,tiempo,size(tiempo))).T
]
                                    right_foot+=[np.array(efun(swing_foot_pos_num,xsol,shape(
xsol)[0])).T[0,:2]]
703                                 else:
                                    left_foot+=[np.array(efun(swing_foot_pos_num,xsol,shape(
xsol)[0])).T[0,:2]]

```

```

705         right_foot += [np. array (efun (support_foot , tiempo , size (tiempo)
)) .T]
       else :
707         #####
       raices += [root ]
709         for j in range (0 , np. size (tiempo)) :
           if tiempo [j] > root :
711                 root_index = j
                   break

713
       xsol .T [0] [root_index] = X_aux (root )
715       xsol = xsol .T [0] [0 : root_index + 1]
       tiempo [root_index] = root
717       tiempo = tiempo [0 : root_index + 1]
       sol_pieewise += [xsol ]
719       salida += [np. array (efun (H_num , xsol , shape (xsol) [0]))]
       torques += [np. array (efun (tau_control , xsol , shape (xsol) [0]))]
721       cop += [np. array ([efun (center_pressure , xsol , shape (xsol) [0])])]
       t_global += [tiempo ]

723
       t0 = tiempo [-1] [0]
725       impactos += [xsol [-1]]

727
       x0 = delta (Pm (xsol [-1]))

729
       #####
       if odd (per) :
731             left_foot += [np. array (efun (support_foot , tiempo , size (tiempo)
)) .T]
                   right_foot += [np. array (efun (swing_foot_pos_num , xsol , shape (
xsol) [0])) .T [0 , :2]]
733             else :
                   left_foot += [np. array (efun (swing_foot_pos_num , xsol , shape (
xsol) [0])) .T [0 , :2]]
735             right_foot += [np. array (efun (support_foot , tiempo , size (tiempo)
)) .T]

737
       px = swing_foot_pos_num (xsol [-1]) [0 , 0]
       py = swing_foot_pos_num (xsol [-1]) [1 , 0]

739
       stance += [[px , py]]

741
       per = per + 1
743       if p >= 4 and pair (p) and pl .norm (impactos [-1] - impactos [-3])
<= 10 . ** -5 . :
           break

745
       if pl .norm (impactos [-1] - f1) <= 10 . ** -5 . :

```

```

747         break

749     return 1.

751

753     ##### HERE, WE CALL THE SOLUTION FOR THE HYBRID SYSTEM
       #####
755     B_global=lambdify ([X], B_matrix())
757     f1=np.array ([100.,100.,100.,100.,100.,100.,100.,100.,100.,100.,100.,100.,
       ,100.,100.])
759
       #INITIAL CONDITIONS
761     X0=zeros ((2*size(q)))
       X0[1]=0.
763     #X0[3]=np.arcsin(np.divide(xmax,.25*L[1]))
       X0[2]=np.arcsin(xmax/(4.*L[1]))*.99
765     X0[3]=0.
       X0[4]=0.
767     X0[5]=-np.arcsin(xmax/(4.*L[1]))
       X0[6]=0.
769
       biped_solution=event_solution(F_close,X0,[0.,10.],dt,H,Hp,Delta,2.0)
771
773     ##### FIXED POINT COMPUTATIONS (uncomment)
       #####
775
       #f1=np.array ([100.,100.,100.,100.,100.,100.,100.,100.,100.,100.,100.,
777 #,100.,100.])
       ##
779     #in_cond=[]
       #fixed=[]
781     #steps_needed=[]
       #desp=[]
783     #for i in range(4):
       #     X0=array ([ 0.0000000e+00,  4.22968839e-03,  1.48962909e-01,
785 #                 -7.50957218e-05,  1.24090640e-03,  -1.49018342e-01,
       #                 0.00000000e+00,  0.00000000e+00,  1.46604221e-01,
787 #                 -1.10738368e-01,  8.29868680e-05,  -1.37170742e-03,
       #                 -1.71301894e-03,  0.00000000e+00])
789 #
       #     for j in arange(8,2*size(q),1):
791 #         X0[j]=X0[j]+pl.uniform(low=-.01,high=.01)
       #     per=0

```

```

793 #   in_cond+=[X0]
#   biped_solution=event_solution(F_close,Delta(X0),[0.,10.],dt,H,Hp,Delta
,2.0)
795 #   fixed+=[impactos[-1]]
#   desp+=[px]
797 #   steps_needed+=[per/2]
#   print i
799 #
#
801 #
#for i in range(size(desp)):
803 #   print pl.norm(in_cond[i]),pl.norm(fixed[i]),steps_needed[i], desp[i]

805 #data: fixed point found#
#np.savetxt('x0.txt', np.array(in_cond), delimiter = ',')
807 #np.savetxt('fixed.txt', np.array(fixed),delimiter = ',')
#np.savetxt('steps_number.txt', np.array([steps_needed]),delimiter = ',')
809 #np.savetxt('distancia.txt', np.array([desp]),delimiter = ',')

811
###STABILITY OF THE FIXED POINT#
813

815 #f1=impactos[-1]
#
817 #in_cond=[]
#fixed=[]
819 #steps_needed=[]
#desp=[]
821 #for i in range(4):
#   X0=zeros((size(2*q)))
823 #   for j in arange(0,size(q),1):
#       X0[j]=f1[j]
825 #
#   for j in arange(8,2*size(q),1):
827 #       X0[j]=f1[j]+pl.uniform(low=-.01,high=.01)
#   per=0
829 #   in_cond+=[X0]
#   biped_solution=event_solution(F_close,Delta(X0),[0.,10.],dt,H,Hp,Delta
,2.0)
831 #   fixed+=[impactos[-1]]
#   desp+=[px]
833 #   steps_needed+=[per/2]
#   print i
835 #
#for i in range(size(desp)):
837 #   print pl.norm(in_cond[i]-f1),pl.norm(fixed[i]-f1),steps_needed[i],
desp[i]

```

```

839 #data: stability of the fixed point found#
      #np.savetxt('x0_stab.txt', np.array(in_cond), delimiter = ',')
841 #np.savetxt('fixed_stab.txt', np.array(fixed), delimiter = ',')
      #np.savetxt('steps_number_stab.txt', np.array([steps_needed]), delimiter =
          ',')
843 #np.savetxt('distancia_stab.txt', np.array([desp]), delimiter = ',')
845
847
      ##### PIECEWISE SOLUTION #####
849 ups1=t_global[0]
      ups2=sol_piecewise[0]
851 ups3=salida[0]
      ups4=np.array(left_foot[0]).T
853 ups5=np.array(right_foot[0]).T
      ups6=np.array(torques)[0]
855 ups7=cop[0].T
      for i in np.arange(1,p+1):
857         ups1=np.vstack([ups1, t_global[i]])
            ups2=np.vstack([ups2, sol_piecewise[i]])
859         ups3=np.vstack([ups3, salida[i]])
            ups4=np.vstack([ups4, np.array(left_foot[i]).T])
861         ups5=np.vstack([ups5, np.array(right_foot[i]).T])
            ups6=np.vstack([ups6, np.array(torques)[i]])
863         ups7=np.vstack([ups7, cop[i].T])
865
867 time=ups1.T[0]
      state_vector=ups2.T
869 output_vector=ups3.T
      lfx= ups4.T[0] #left_foot_x#
871 lfy= ups4.T[1]  #left_foot_y#
      rfx=ups5.T[0]  #right_foot_x#
873 rfy=ups5.T[1]   #right_foot_y#
      torques_vector=ups6.T
875 center_of_pressure=ups7.T[0]
877
879 #####
881 #parametrization_repect_time
883 def tau_vector(t):
      sal=[]

```

```

885     for m in range(np.size(q)):
            inter=sc.interpolate.interpld(time ,torques_vector [m] ,kind='linear ')
887         sal+=[inter(t)]
            return np.asarray(sal)
889 #
def objective_function(t):
891     return np.dot(tau_vector(t),tau_vector(t))
893
def zmp(t):
895     inter=sc.interpolate.interpld(time ,center_of_pressure ,kind='linear ')
            return inter(t)
897
899 if np.max(abs(zmp(time)))>L[0]:
            print 'There is a violation for the CoP restriction '
901
903
905 ##print 'costo_metabolico= ', sc.integrate.quad(objective_function ,ups1.T
            [0,0],ups1.T[0,-1])
907
909 ##print 'costo_metabolico=', simpson_rule_quad(objective_function ,ups1.T
            [0,0],ups1.T[0,-1])
911 ##### SOLUTION CURVES #####
            wid=2;
913
915 pl.figure()
917 pl.grid()
            pl.plot(time ,state_vector [1] , 'b' ,label='$x_1(t)$' ,lw=wid)
            pl.plot(time ,state_vector [2] ,label='$x_2(t)$' ,color='r' ,lw=wid)
            pl.plot(time ,state_vector [3] ,label='$x_3(t)$' ,color='k' ,lw=wid)
919 pl.plot(time ,state_vector [4] , 'b--' ,label='$x_4(t)$' ,lw=wid)
            pl.plot(time ,state_vector [5] , 'r--' ,label='$x_5(t)$' ,lw=wid)
921 pl.plot(time ,state_vector [6] , 'k--' ,label='$x_6(t)$' ,lw=wid)
            pl.xlabel( '$t$ (seg)' ,fontsize=26)
923 pl.ylabel( '$\mathbf{x}(t)$ (rad)' ,fontsize=26)
            pl.tick_params(axis='both' , which='major' , labelsz=15)
925 pl.tick_params(axis='both' , which='minor' , labelsz=15)
            pl.legend(prop={'size':20})
927 pl.show()
929
pl.figure()

```

```

931 pl.grid()
    pl.plot(state_vector[1], state_vector[8], color='k')
933 pl.xlabel('$\\theta_2(t)$', fontsize=26)
    pl.ylabel('$\\dot{\\theta}_2(t)$', fontsize=26)
935 pl.show()

937 pl.figure()
    pl.grid()
939 pl.plot(state_vector[2], state_vector[9], color='k')
    pl.xlabel('$\\theta_3(t)$', fontsize=26)
941 pl.ylabel('$\\dot{\\theta}_3(t)$', fontsize=26)
    pl.show()

943
    pl.figure()
945 pl.grid()
    pl.plot(time, output_vector[1], 'k', label='$y_1(t)$', lw=wid)
947 pl.plot(time, output_vector[2], 'b—', label='$y_2(t)$', lw=wid)
    pl.plot(time, output_vector[3], 'r', label='$y_3(t)$', lw=wid)
949 pl.plot(time, output_vector[4], 'b', label='$y_4(t)$', lw=wid)
    pl.plot(time, output_vector[5], 'r—', label='$y_5(t)$', lw=wid)
951 pl.plot(time, output_vector[6], 'k—', label='$y_6(t)$', lw=wid)
    pl.xlabel('$t$ (seg)', fontsize=26)
953 pl.ylabel('$\\mathbf{y}(t)$', fontsize=26)
    pl.tick_params(axis='both', which='major', labelsize=15)
955 pl.tick_params(axis='both', which='minor', labelsize=15)
    pl.legend(prop={'size':20})
957 pl.show()

959 #
    pl.figure()
961 pl.grid()
    pl.plot(lfx, lfy, lw=wid)
963 pl.plot(rfx, rfy, lw=wid)
    pl.xlabel('$\\mathbf{P}_{-5}^x$ (m)', fontsize=26)
965 pl.ylabel('$\\mathbf{P}_{-5}^y$ (m)', fontsize=26)
    #pl.xlim(xmax=1.6)
967 pl.show()

969
    pl.figure()
971 pl.grid()
    pl.plot(time, torques_vector[1], color='b', lw=wid)
973 pl.xlabel('$t$ (seg)', fontsize=26)
    pl.ylabel('$\\tau_1(t)$ (Nm)', fontsize=26)
975 pl.tick_params(axis='both', which='major', labelsize=15)
    pl.tick_params(axis='both', which='minor', labelsize=15)
977 pl.show()

```

```

979 pl.figure()
981 pl.grid()
pl.plot(time, center_of_pressure, color='b', lw=wid, label='$\mathbf{CoP}^x(t)$')
983 pl.xlabel('$t$ (seg)', fontsize=26)
pl.ylabel('$\mathbf{CoP}^x$ (m)', fontsize=26)
985 #pl.legend()
pl.tick_params(axis='both', which='major', labelsize=15)
987 pl.tick_params(axis='both', which='minor', labelsize=15)
pl.show()
989
pl.figure()
991 pl.grid()
pl.plot(time, np.array(efun(objective_function, time, size(time))), color='b',
    lw=wid)
993 pl.xlabel('$t$ (seg)', fontsize=26)
pl.ylabel('Energy(t)', fontsize=26)
995 pl.tick_params(axis='both', which='major', labelsize=15)
pl.tick_params(axis='both', which='minor', labelsize=15)
997 pl.show()
#
999 #
#
1001 #
## ::::::::::::::::::::DESIGN OF THE ANIMATION:::::::::::::::::: #
1003 #
#
1005 #####
#####
1007 #####
#####
1009 #
#ankle 1#
1011 p0x = rfx
p0y = rfy
1013
#knee 1
1015 plx = -2*L[1]*seno(state_vector[1]) + p0x
ply = 2*L[1]*coseno(state_vector[1]) + p0y
1017
#hip
1019 p2x = -2*L[2]*seno(state_vector[2]) + plx
p2y = 2*L[2]*coseno(state_vector[2]) + ply
1021
#knee 2
1023 p3x = 2*L[4]*seno(state_vector[4]) + p2x
p3y = -2*L[4]*coseno(state_vector[4]) + p2y

```

```

1025
1026 #ankle 2
1027 p4x = 2*L[5]*seno(state_vector[5]) + p3x
1028 p4y = -2*L[5]*coseno(state_vector[5]) + p3y
1029
1030 #head (torso extension)
1031 p2px=p2x-2.*L[3]*seno(state_vector[3])
1032 p2py=p2y+2.*L[3]*coseno(state_vector[3])
1033
1034 fig = pl.figure()
1035
1036 ax = fig.add_subplot(111, autoscale_on=False, xlim=(-.33, 1.5), ylim=(-0.,
1037 2.2), frameon=False)
1038 #ax.grid()
1039 suelo=ax.plot(ups1, zeros(size(ups1)), lw=3,color='k')
1040 line, = ax.plot([], [], 'o-', markersize=10, lw=5,color='b')
1041 torso, = ax.plot([], [], 'o-', lw=5,color='b')
1042 foot1, = ax.plot([], [], 'b-', lw=5)
1043 foot2, = ax.plot([], [], 'b-', lw=5)
1044
1045 time_template = '$t$ = %.1fs'
1046 time_text = ax.text(0.05, 0.9, '', transform=ax.transAxes, fontsize=35)
1047
1048
1049 def init():
1050     line.set_data([], [])
1051     torso.set_data([], [])
1052     foot1.set_data([], [])
1053     foot2.set_data([], [])
1054     time_text.set_text('')
1055     return line, time_text
1056
1057 def animate(i):
1058     thisx = [ p0x[i], p1x[i], p2x[i], p3x[i], p4x[i]]
1059     thisy = [ p0y[i], p1y[i], p2y[i], p3y[i], p4y[i]]
1060     torsox=[p2x[i], p2px[i]]
1061     torsoy=[p2y[i], p2py[i]]
1062     foot1x=[p0x[i]-(L[0]*coseno(state_vector[0]))[i], p0x[i]+(L[0]*coseno(
1063 state_vector[0]))[i]]
1064     foot1y=[p0y[i]-(L[0]*seno(state_vector[0]))[i], p0y[i]+(L[0]*seno(
1065 state_vector[0]))[i]]
1066     foot2x=[p4x[i]-(L[0]*coseno(state_vector[6]))[i], p4x[i]+(L[0]*coseno(
1067 state_vector[6]))[i]]
1068     foot2y=[p4y[i]-(L[0]*seno(state_vector[6]))[i], p4y[i]+(L[0]*seno(

```

```
1069     line.set_data(thisx, thisy)
1070     torso.set_data(torsox, torsoy)
1071     foot1.set_data(foot1x, foot1y)
1072     foot2.set_data(foot2x, foot2y)
1073     time_text.set_text(time_template%(i*dt))
1074     return line, torso, foot1, foot2, time_text
1075
1076 from time import time as anim_time
1077 t0 = anim_time()
1078 animate(0)
1079 t1 = anim_time()
1080 velocidad_anim=1000;
1081 fin_anim=1;
1082 interval = velocidad_anim * dt - (t1 - t0)
1083
1084 ani = animation.FuncAnimation(fig, animate, arange(1, fin_anim*len(ups1)),
1085                               interval=len(ups1), blit=True, repeat=True, init_func=init)
1086
1087 #ANIMATION EXPORTATION
1088 #writer = animation.writers['ffmpeg'](fps=30)
1089 #ani.save('biped_walk.mp4', writer=writer)
1090
1091 pl.tick_params(axis='both', which='major', labelsize=30)
1092 pl.tick_params(axis='both', which='minor', labelsize=30)
1093 #pl.axis('off')
1094 ax.get_yaxis().set_visible(False)
1095
1096 pl.show()
```

codigo_python_tesis_correc.py

Bibliografía

- [1] V. I. Arnol'd. *Mathematical methods of classical mechanics*, volume 60. Springer, 1989.
- [2] H. M. Becerra, J. B. Hayet, and C. Sagues. A single visual-servo controller of mobile robots with super-twisting control. *Robotics and Auton. Syst.*, 62(11):1623–1635, 2013.
- [3] M. Bernardo, C. Budd, A. R. Champneys, and P. Kowalczyk. *Piecewise-smooth dynamical systems: theory and applications*, volume 163. Springer, 2008.
- [4] S. P. Bhat and D. S. Bernstein. Finite-time stability of continuous autonomous systems. *SIAM Journal on Control and Optimization*, 38(3):751–766, 2000.
- [5] C. C. Chicone. *Ordinary differential equations with applications*, volume 1. Springer, 1999.
- [6] E. Falcon, C. Laroche, S. Fauve, and C. Coste. Behavior of one inelastic ball bouncing repeatedly off the ground. *The European Physical Journal B-Condensed Matter and Complex Systems*, 3(1):45–57, 1998.
- [7] D. Gong, J. Yan, and G. Zuo. A review of gait optimization based on evolutionary computation. *Applied Computational Intelligence and Soft Computing*, 2010, 2010.
- [8] J. Grizzle, G. Abba, and F. Plestan. Asymptotically stable walking for biped robots: analysis via systems with impulse effects. *Automatic Control, IEEE Transactions on*, 46(1):51–64, Jan 2001.
- [9] M. Heath. *Scientific Computing: An Introductory Survey*. McGraw-Hill, 1998.
- [10] Y. Hürmüzlü and G. D. Moskowitz. The role of impact in the stability of bipedal locomotion. *Dynamics and Stability of Systems*, 1(3):217–234, 1986.
- [11] B. Kaddar, Y. Aoustin, and C. Chevallereau. Arms swing effects on a walking planar biped. In *ASME 2012 11th Biennial Conference on Engineering Systems Design and Analysis*, volume 3, pages 293–301. ASME, Nantes, France, 1st edition, 2012.

-
- [12] S. Kajita, H. Hirukawa, K. Harada, and K. Yokoi. *Introduction to humanoid robotics*. Springer, 2014.
- [13] L. Landau and E. Lifshitz. *Classical mechanics*. Pergamon Press, Oxford, 1960.
- [14] V. Lebastard, Y. Aoustin, and F. Plestan. Step-by-step sliding mode observer for control of a walking biped robot by using only actuated variables measurement. In *Intelligent Robots and Systems, 2005. (IROS 2005). 2005 IEEE/RSJ International Conference on*, pages 559–564, 2005.
- [15] J. M. Lee. *Introduction to Smooth Manifolds*, volume 2. Springer, 2013.
- [16] A. Levant and L. Fridman. Higher order sliding modes. In W. Perruquetti and J. Barbot, editors, *Sliding Mode Control in Engineering*, pages 53–101. Marcel Dekker, N.Y., USA, 2002.
- [17] W.-B. Lin and H.-K. Chiang. Super-twisting algorithm second-order sliding mode control for a synchronous reluctance motor speed drive. *Mathematical Problems in Eng.*, 2013, 2013.
- [18] J. E. Marsden and T. S. Ratiu. *Introduction to mechanics and symmetry: a basic exposition of classical mechanical systems*. 2nd edition.
- [19] B. Morris and J. Grizzle. A restricted poincaré map for determining exponentially stable periodic orbits in systems with impulse effects: Application to bipedal robots. In *Decision and Control, 2005 and 2005 European Control Conference. CDC-ECC '05. 44th IEEE Conference on*, pages 4199–4206, Dec 2005.
- [20] M. Nikkhah, H. Ashrafiuon, and F. Fahimi. Robust control of underactuated bipeds using sliding modes. *Robotica*, 25(3):367–374, 2007.
- [21] Y. Orlov. Finite time stability and robust control synthesis of uncertain switched systems. *SIAM Journal on Control and Optimization*, 43(4):1253–1271, 2004.
- [22] Y. Orlov, Y. Aoustin, and C. Chevallereau. Finite time stabilization of a perturbed double integrator-part I: Continuous sliding mode-based output feedback synthesis. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 56(3):614–618, 2011.
- [23] R. Ortega. *Passivity-based control of Euler-Lagrange systems: mechanical, electrical and electromechanical applications*. Springer, 1998.
- [24] H. B. Oza, Y. V. Orlov, and S. K. Spurgeon. Lyapunov-based settling time estimate and tuning for twisting controller. *IMA Journal of Mathematical Control and Information*, pages 471–490, 2012.

- [25] H. B. Oza, Y. V. Orlov, S. K. Spurgeon, Y. Aoustin, and C. Chevallereau. Finite time tracking of a fully actuated biped robot with pre-specified settling time: a second order sliding mode synthesis. In *Conference on Robotics and Automation (ICRA 2014)*, 2014.
- [26] F. Plestan, J. Grizzle, E. Westervelt, and G. Abba. Stable walking of a 7-dof biped robot. *Robotics and Automation, IEEE Transactions on*, 19(4):653–668, Aug 2003.
- [27] S. Sastry. *Nonlinear systems: analysis, stability, and control*, volume 10. Springer New York, 1999.
- [28] B. Siciliano, L. Sciavicco, and L. Villani. *Robotics: Modelling, Planning and Control*. Advanced Textbooks in Control and Signal Processing. Springer, 2009.
- [29] J. R. Silvester. Determinants of block matrices. *The Mathematical Gazette*, pages 460–467, 2000.
- [30] M. D. Sockol, D. A. Raichlen, and H. Pontzer. Chimpanzee locomotor energetics and the origin of human bipedalism. *Proceedings of the National Academy of Sciences*, 104(30):12265–12269, 2007.
- [31] E. D. Sontag. *Mathematical control theory: deterministic finite dimensional systems*, volume 6. Springer, 1998.
- [32] M. W. Spong, S. Hutchinson, and M. Vidyasagar. *Robot modeling and control*. John Wiley & Sons New York, 2006.
- [33] G. Strang. *Linear Algebra and Its Applications*, volume 1. Thompson, 3rd edition, 1988.
- [34] B. Vukobratović, M. Mirmir y Borovac. Zero-moment point-thirty five years of its life. *International Journal of Humanoid Robotics*, 1(1):157–173, 2004.
- [35] E. R. Westervelt, J. W. Grizzle, C. Chevallereau, J. H. Choi, and B. Morris. *Feedback control of dynamic bipedal robot locomotion*. CRC press Boca Raton, 2007.
- [36] H. Ye, A. N. Michel, and L. Hou. Stability theory for hybrid dynamical systems. *Automatic Control, IEEE Transactions on*, 43(4):461–474, 1998.