Centro de Investigación en Matemáticas A. C.

Espacio L^1 de medidas vectoriales con densidad, definidas en δ-anillos, y representación de su espacio dual

TESIS

que para obtener el grado de:

Doctor en Ciencias con orientación en

Matemáticas Básicas

PRESENTA:

Celia Avalos Ramos

Director de tesis:

Dr. Fernando Galaz Fontes

Septiembre 2014 Guanajuato, Gto.

Centro de Investigación en Matemáticas A. C.

Espacio L^1 de medidas vectoriales con densidad, definidas en δ-anillos, y representación de su espacio dual

Integrantes del Jurado:

Dra. Berta Gamboa de Buen (CIMAT), Presidente

Dra. Maite Fernández Unzueta (CIMAT), Secretario

Dr. José Manuel Calabuig Rodríguez (Universidad Politécnica de Valencia), Vocal

Dr. Enrique Alfonso Sánchez Pérez (Universidad Politécnica de Valencia), Vocal

Dr. Fernando Galaz Fontes (CIMAT), Vocal y director de tesis

Vo. Bo. Dr. Fernando Galaz Fontes

a mi abuelo Gregorio

Índice general

Agradecimientos

Primeramente agradezco a Dios por la oportunidad de vivir esta etapa de mi vida y por su presencia constante.

A mi director de tesis, el Dr. Fernando Galaz Fontes, por su trabajo, apoyo, paciencia y comprensión durante todo este tiempo, muchísimas gracias.

A mi esposo, Omar Vladimir, por creer en mi y por su compañia en cada momento, sobretodo en los momentos más dificiles. A mis hijos, Axel Elías y Jedrek Saúl, ellos llenan mi vida de emociones y mantienen mi mente en este mundo.

A mis papás, José Avalos y Armida Ramos, por todo su apoyo, sin él concluir este trabajo habría sido casi imposible. A mis hermanos y cuñados, Itziar, Armi y Hugo, Damian y Silvia e Ivan, por estar invariablemente dispuestos a ayudar. A mis tíos por estar siempre al pendiente, en especial a mi tía Fabi, gracias.

A mis sinodales Dra. Berta Gamboa de Buen, Dra. Maite Fernández Unzueta, Dr. José Manuel Calabuig Rodríguez y Dr. Enrique Alfonso Sánchez Pérez por darse el tiempo de revisar este trabajo y por todas sus recomendaciones y sugerencias.

Finalmente gracias a CIMAT por las facilidades que me brindo (a través de tantas personas) para llegar a la meta y a CONACyT por los recursos económicos otorgados, estos fueron fundamentales durante el proceso.

Introducción

Una vez que la teoría de integración de Lebesgue fue establecida al inicio del siglo pasado varios autores la generalizaron en distintas direcciones. Entre ellas encontramos la que considera funciones que toman valores en espacios de Banach en lugar de funciones escalares, desarrollada principalmente en la década de los 30's. Así es como surgen por ejemplo la integral de Bochner, la integral de Dunford y la integral de Pettis, que podemos encontrar en [16, Chap. ii], [25, Chap. 11] y [37].

Sin embargo, no es sino hasta la década de los 50's que R. G. Bartle, N. Dunford y J. Schwartz introducen el concepto de integración de una función escalar respecto de una medida definida en una σ-álgebra y que toma valores en un espacio de Banach X [4], a la cual llamaremos medida vectorial clásica y en adelante la denotaremos por ν. Más adelante, en la decada de los 70's D. R. Lewis [26] e I. Kluvánek [23], continúan el estudio de estas funciones integrables. Surgen así, el espacio $L^1(\nu)$ de funciones integrables respecto de la medida vectorial ν y el espacio $L^1_w(\nu)$ de las funciones escalarmente ν-integrables, que son retículos de Banach con respecto al orden puntal ν-c.t.p. Además, ya que cada medida vectorial definida en una σ-álgebra tiene una medida de Rybakov [16, Chap. IX] que, entre otras características, es una medida positiva, finita y con los mismos conjuntos nulos que ν, estos espacios resultan ser espacios funcionales de Banach. A partir de entonces y hasta la actualidad los espacios $L^1(\nu)$ y $L^1_w(\nu)$ han sido estudiados a profundidad por diversos autores entre ellos G. P. Curbera [10], [11], G. F. Stefansson [37] y S. Okada, W. J. Ricker y E. Sánchez-Pérez [34].

La teoría de integración respecto de una medida vectorial ν definida en un δ-anillo, que extiende la teoría de integración respecto a medidas vectoriales clásicas, empieza a ser tratada desde 1972 por D. R. Lewis en [27] y más tarde, en 1989, se desarrolla por P. R. Masani y H. Niemi en [31] y [32]. En estos trabajos, como en el caso clásico, se definen y estudian los espacios $L^1_w(\nu)$ y $L^1(\nu)$. En [14] O. Delgado analiza algunas diferencias entre estos espacios con los relativos a medidas vectoriales en σ-álgebras y también estudia cómo afectan ciertas propiedades de ν en el espacio $L^1(\nu)$. Por otra parte E. Jiménez Fernández, M. A. Juan y E. A. Sánchez-Pérez proporcionan una descripción del espacio dual de $L^1(\nu)$ en [21]. Asimismo, J. M. Calabuig, O. Delgado, M. A. Juan y E. A. Sánchez-Pérez estudian propiedades reticulares de los espacios $L^1_w(\nu)$ y $L^1(\nu)$, por ejemplo la orden densidad de $L^1(\nu)$ en $L^1_w(\nu)$, la propiedad de Fatou y la propiedad σ-Fatou en $L^1_w(\nu)$ [9].

En este trabajo consideraremos medidas vectoriales definidas en un δ-anillo $\mathcal{R}$ de subconjuntos de un conjunto Ω; a partir de $\mathcal{R}$ se define la σ-álgebra $\mathcal{R}^{loc}$. Esta contiene a $\mathcal{R}$ y sirve de punto de partida. Así trabajaremos con funciones escalares, reales o complejas, definidas en Ω y que son medibles respecto de $\mathcal{R}^{loc}$. Para construir los espacios de funciones integrables las identificaremos cuando sean iguales ν-c.t.p. Dada una medida vectorial $\nu : \mathcal{R} \to X$ se definen, en $\mathcal{R}^{loc}$, su variación $|\nu|$ y su semivariación $\|\nu\|$, funciones que son de gran importancia.

Iniciamos, en el capítulo 1, haciendo un rápido recorrido sobre la teoría que utilizaremos a lo largo del trabajo. Así, mencionaremos los principales conceptos y enunciaremos los resultados fundamentales acerca de retículos de Banach y de espacios funcionales de Banach. También recapitularemos parte de la teoría conocida sobre medidas vectoriales ν definidas en δ-anillos. Veremos que $|\nu|$ es una medida de control local para ν, esto es, que la medida positiva $|\nu|$ tiene los mismos conjuntos nulos que ν. Asimismo enunciaremos resultados importantes concernientes a los espacios de funciones integrables correspondientes.

Como hemos mencionado, gran parte de la teoría de integración respecto a medidas vectoriales clásicas ha sido extendida al caso de medidas vectoriales sobre δ-anillos. Nuestro estudio considera ciertas propiedades que no habían sido analizadas y podemos dividirlo en tres partes, las cuales describimos a continuación.

Sea ν una medida vectorial definida en $\mathcal{R}$ y $f \in L^1(\nu)$. En [27], D. R. Lewis introdujo la medida $\tilde{\nu}_f$ definida en la σ-álgebra $\mathcal{R}^{loc}$ como

$$\tilde{\nu}_f(A) = \int_A f d\nu, \ \forall \ A \in \mathcal{R}^{loc}.$$

De esta manera, a cada función ν-integrable f se le asocia una medida vectorial con densidad f definida en una σ-álgebra. En el capítulo 2 retomaremos esta idea pero ahora consideraremos aquellas funciones que son integrables en los elementos de $\mathcal{R}$, a estas funciones las llamaremos *localmente ν-integrables*, concepto similar al que estudian P. R. Masani y H. Niemi con medidas escalares. De la misma forma que en el caso de una función ν-integrable, a una función localmente ν-integrable le asociaremos una medida vectorial ν_f con densidad f definida en el mismo δ-anillo $\mathcal{R}$. Analizaremos algunas propiedades reticulares de los espacios de funciones integrables respecto de ν_f; veremos que cada uno de los espacios $L^1(\nu_f)$ y $L^1(\nu_f)$ se pueden identificar (mediante una isometría lineal reticular) con una banda de los espacios $L^1_w(\nu)$ y $L^1(\nu)$ respectivamente (proposición 2.2.3). Ya que los espacios $L^1(\nu_f)$ y $L^1(\nu_f)$ se pueden ver como subespacios de $L^1_w(\nu)$

y $L^1(\nu)$, estudiaremos algunas propiedades que estos últimos heredan a los mencionados inicialmente. Como consecuencia de este análisis obtenemos una caracterización de las funciones ν-integrables en términos del δ-anillo $\mathcal{R}$ (proposición 2.3.1), la cual utilizaremos en algunas demostraciones posteriores.

Ya que toda función ν-integrable es localmente ν-integrable, para cada función $f \in L^1(\nu)$ tenemos dos medidas vectoriales: la medida $\tilde{\nu}_f$ definida en $\mathcal{R}^{loc}$ y la medida ν_f definida en $\mathcal{R}$ que es además la restricción de la primera. Con el propósito de estudiar la conexión entre los espacios de funciones integrables que estas medidas generan, aparece la necesidad de examinar el comportamiento de dos medidas vectoriales $\widehat{\nu}$ y ν tales que ν es la restricción a $\mathcal{R}$ de la medida vectorial $\widehat{\nu}$ definida en un δ-anillo $\widehat{\mathcal{R}}$ que contenga al δ-anillo $\mathcal{R}$ que además tenga la particularidad de que $\widehat{\mathcal{R}}^{loc} = \mathcal{R}^{loc}$. Veremos que si ambas medidas tienen los mismo conjuntos de medida cero, entonces sus espacios de funciones integrables son iguales como conjuntos y tienen normas equivalentes (proposición 2.4.2). Después concluiremos que los espacios $L^1(\nu_f)$ y $L^1(\widehat{\nu}_f)$ son el mismo espacio, considerados como espacios de Banach.

Ahora consideremos un espacio de medida (Ω, Σ, μ) y una función vectorial $F : \Omega \to X$ integrable en el sentido de Pettis o de Bochner. Resulta entonces que su integral define una medida vectorial $\nu_F : \Sigma \to X$ como

$$\nu_F(A) := \int_A F d\mu, \ \forall \ A \in \Sigma,$$

donde la integral es la integral de Pettis o la integral de Bochner, según sea el caso. En [37], G. F. Stefansson estudió los espacios de funciones integrables que estas medidas generan y su relación con los espacios de funciones Dunford, Pettis o Bochner integrables. En el capítulo 5 trabajaremos de nuevo con medidas con densidad pero ahora como lo hace G. F. Stefansson. Empezaremos haciendo un breve repaso de la teoría de integración de Dunford, Pettis y Bochner conocida para aplicarla en nuestro contexto. Como en el caso de funciones escalares, diremos que la función vectorial F es *localmente Pettis integrable* si es Pettis integrable en cada elemento de $\mathcal{R}$; similarmente se define que la función F sea *localmente Bochner integrable*. Naturalmente a estas funciones les asociaremos medidas vectoriales con densidad F, definidas en δ-anillos, y construiremos sus espacios de funciones integrables. Conseguiremos así dar una descripción de cuándo una función vectorial localmente integrable es integrable en el sentido de Dunford, de Pettis y de Bochner en términos de su medida asociada ν_F (corolarios 5.1.12 y 5.2.9).

Como segunda parte de este trabajo, en el cápitulo 3 estableceremos para δ-anillos varios resultados bien conocidos sobre espacios de funciones integrables respecto a medidas vectoriales clásicas. Tendremos en mente especialmente la presentación que hacen S. Okada, W. J. Ricker y E. Sánchez-Pérez en [34, Chap. 3]. D. R. Lewis estableció que $L^1(|\nu|) \subset L^1(\nu)$ y proporcionó una condición bajo la cual una función ν-integrable es integrable respecto de la variación de ν. Veremos que las condiciones para que la igualdad se cumpla, consideradas en [34, Chap. 3], siguen siendo válidas en nuestro caso. Por otra parte, S. Okada, W. J. Ricker y L. Rodríguez-Piazza establecieron en [33] que si ν es una medida vectorial definida en una σ-álgebra y el operador integral I_ν es compacto, necesariamente su variación $|\nu|$ es acotada y se cumple que $L^1(\nu) = L^1(|\nu|)$. En el caso de medidas definidas en un δ-anillo puede suceder que ν tenga variación no acotada aún cuando el operado I_ν sea compacto (ejemplo 3.3.5). Sin embargo, aún sin imponer condiciones sobre la variación de ν, establecemos que si I_ν es compacto, se obtiene la igualdad $L^1(\nu) = L^1(|\nu|)$ (teorema 3.3.6). Asimismo probaremos que si $L^1(\nu)$ es reflexivo y de dimensión infinita, entonces el operador integral no es compacto (corolario 3.3.7).

Por otra parte, O. Delgado estableció que si ν es una medida vectorial σ-finita el espacio $L^1(\nu)$ es reticularmente isométrico a un espacio L^1 de una medida vectorial definida un una σ-álgebra [14]; razón por la cual la propiedad de ser σ-finita es relevante. Así, buscamos condiciones para que ν tenga esta propiedad y encontramos que si $\|\nu\|$ es acotada y el espacio X es separable, entonces ν es un medida vectorial σ-finita (proposición 3.4.1).

Si ν está definida en una σ-álgebra y μ es una medida de Rybakov, entonces el espacio $L^1(\nu)$ es un μ-espacio funcional de Banach σ-orden continuo. Así su espacio dual $L^1(\nu)^*$ se puede representar como su espacio asociado. En la tercera parte de este trabajo buscamos una representación análoga en el caso de una medida vectorial definida en un δ-anillo. Con este objetivo se analiza la teoría conocida del espacio asociado al considerar un espacio funcional de Banach respecto a una medida μ definida en una σ-álgebra, sin más restricciones que ser positiva.

Así, en el capítulo 4, consideraremos un espacio de medida positiva (Ω, Σ, μ) y un μ-espacio funcional de Banach E. De forma análoga al caso en que μ es σ-finita, establecemos que si E es saturado, entonces su espacio asociado $E^\times$ siempre tiene la propiedad σ-Fatou. Además proporcionamos una condición bajo la cuál $E^\times$ tiene la propiedad de Fatou y, como consecuencia, se obtiene que en el caso σ-finito el espacio asociado $E^\times$ siempre tiene la propiedad de Fatou (proposición 4.1.7). Sin embargo, observaremos que, a diferencia del caso en que μ es σ-finita, la propiedad de saturación no garantiza que el espacio asociado $E^\times$ sea saturado, lo cual es necesario para poder considerar el espacio doble asociado $E^{\times\times}$. Esto nos lleva a a buscar una clase de medidas adecuadas para que lo anterior sea posible. Encontramos que éstas son las medidas positivas definidas en δ-anillos que son *localmente σ-finitas*, concepto introducido por J. K. Brooks y N. Dinculeanu en [6]. Así pues estableceremos que si λ es localmente σ-finita y E es un $|\lambda|$-espacio funcional de Banach saturado, entonces su espacio asociado también es saturado (teorema 4.2.9). En este nuevo contexto, se establecen algunos resultados importantes similares a los conocidos en el caso σ-finito, por ejemplo si E tiene la propiedad de Fatou, entonces $E = E^{\times\times}$ (teorema 4.2.10).

De manera similar al caso σ-finito, definiremos un operador $R : E^\times \to E^*$ que a cada función $g \in E^\times$ le asigna el funcional φ_g definido por

$$\varphi_g(f) := \int_\Omega gf d\mu, \ \forall \ f \in E.$$

Ya que el espacio E^* es un retículo de Banach, probaremos que este operador es una isometría reticular. Así podremos identificar el espacio $E^\times$ con un subespacio de E^*.

Ahora, si ν está definida en un δ-anillo y λ es cualquier medida de control local para ν, sabemos que $L^1(\nu)$ es un espacio funcional de Banach respecto de $|\lambda|$. De acuerdo a lo que acabamos de describir, estamos interesados en las medidas de control local para ν que sean localmente σ-finitas, a las cuales llamaremos *medidas de Brooks-Dinculeanu para* ν. Gratamente, resulta que cualquier medida vectorial definida en $\mathcal{R}$ posee una medida de este tipo, lo que fue establecido muy recientemente en [21].

Al considerar una medida λ de Brooks-Dinculeanu para ν obtenemos que, para $1 \leq p < \infty$, los espacios $L^p(\nu)$ y $L^p_w(\nu)$ son $|\lambda|$-espacios funcionales de Banach saturados cuyos espacios asociados también son saturados. Tiene sentido entonces averiguar si ciertas propiedades que se tienen con medidas vectoriales definidas en σ-álgebras se siguen cumpliendo. Veremos que para $1 \leq p < \infty$ la igualdad $L^p_w(\nu) = L^p(\nu)^{\times\times}$ sigue siendo válida (proposición 4.3.6). Como consecuencia de este resultado obtendremos que si $L^p_w(\nu) \subset L^1(\lambda)$, entonces $L^p_w(\nu)$ tiene la propiedad de Fatou (corolario 4.3.8). Por otra parte, si E es un $|\lambda|$-espacio funcional de Banach que contiene a las funciones simples con soporte en $\mathcal{R}$ y ν es una medida $\mathcal{R}$-descomponible, concepto con el cual se trabaja en [9], establecemos que el espacio $E^\times$ tiene la propiedad de Fatou (proposición 4.3.13).

Tenemos especial interés en dar condiciones para que la igualdad $L^1(\nu)^* = L^1(\nu)^\times$ se cumpla. Encontramos que si el espacio $L^1(\nu)^\times$ tiene la propiedad de Fatou, entonces se puede identificar con un ideal en el espacio $L^1(\nu)^*$. Además en el caso en que ν es una medida vectorial $\mathcal{R}$-descomponible (teorema 4.4.1) o cuando el espacio $L^1(\nu)$ es reflexivo (proposición 4.4.4) se satisface la igualdad. Puesto que todo retículo de Banach σ-orden continuo es reticularmente isométrico a un espacio $L^1(\nu)$ donde ν es $\mathcal{R}$-descomponible [22], veremos que si E es un retículo de Banach σ-orden continuo, entonces su espacio dual E^* se puede identificar (mediante una isometría reticular) con el espacio asociado de un espacio $L^1(\nu)$, donde ν es una medida vectorial $\mathcal{R}$-descomponible (corolario 4.4.2).

Capítulo 1

Preliminares

En este capítulo presentamos la notación, los conceptos y resultados sobre retículos de Banach, espacios funcionales de Banach, medidas vectoriales definidas en δ-anillos e integración respecto de estas medidas, que necesitaremos para nuestra exposición.

1.1. Retículos de Banach

Todos los espacios vectoriales que consideraremos en este trabajo serán sobre $\mathbb{K}$, donde $\mathbb{K} = \mathbb{C}$, el campo formado por los números complejos, o $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, el campo de los números reales.

Sea X un espacio normado. Dados $r > 0$ y $x \in X$, la bola abierta en X con centro en x y radio r es $V_r(x) := \{y \in X : \|x - y\|_X < r\}$ y la bola cerrada en X con centro en x y radio r es $B_r(x) := \{y \in X : \|x - y\|_X \leq r\}$. A la bola cerrada de radio 1 y centro en 0 la denotaremos por B_X. Asimismo, indicaremos por X^* al espacio dual de X. Para representar el apareamiento dual usaremos la notación $\langle \cdot, \cdot \rangle$, esto es,

$$\langle x, x^* \rangle := x^*(x), \forall \ x \in X \text{ y } \ x^* \in X^*.$$

Sea Y otro espacio normado. Para expresar que X y Y son iguales como espacios normados, es decir, $X = Y$ como conjuntos y además sus normas son iguales, usaremos la notación $X \equiv Y$.

Definición 1.1.1 Un *retículo vectorial real* X es un espacio vectorial sobre $\mathbb{R}$ con un orden parcial $\leq$ que además satisface:

i) si $f, g, h \in X$ y $f \leq g$, entonces $f + h \leq g + h$,

ii) si $f, g \in X$, $f \leq g$ y $\alpha \geq 0$, entonces $\alpha f \leq \alpha g$,

iii) si $f, g \in X$, entonces existen el supremo y el ínfimo de f y g con respecto al orden, los cuales se denotarán por $\sup\{f, g\}$ e $\inf\{f, g\}$, respectivamente.

A un subespacio vectorial de X que es cerrado bajo el supremo y el ínfimo con el orden heredado por X le llamaremos *subretículo vectorial*.

Sea $A \subset X$. Denotamos por A^+ al subconjunto de X que consta de los $f \in A$ tales que $f \geq 0$. Dado $f \in X$, definimos la *parte positiva* de f como $f^+ := \sup\{f, 0\}$, la *parte negativa* de f como $f^- := \sup\{-f, 0\}$ y el *módulo* de f como $|f| := \sup\{f, -f\}$. Notemos que $f^+, f^-, |f| \in X^+$. Además $f = f^+ - f^-$, $|f| = f^+ + f^-$ y se cumple la desigualdad del triángulo, esto es, $|f + g| \leq |f| + |g|$.

Para indicar que una sucesión $\{f_n\} \subset X$ es tal que $f_{n+1} \leq f_n$, $\forall\ n \in \mathbb{N}$, usaremos la notación $f_n \downarrow$. Si además existe $\inf\limits_n f_n = f \in X$ entonces escribiremos $f_n \downarrow f$.

Similarmente, a una sucesión $\{f_n\} \subset X$ tal que $f_n \leq f_{n+1}$, $\forall\ n \in \mathbb{N}$, la denotaremos por $f_n \uparrow$ y si además existe $\sup\limits_n f_n = f \in X$, usaremos la notación $f_n \uparrow f$.

Sea J un conjunto dirigido. Entonces una red $\{f_\tau\}_{\tau \in J} \subset X$ es un *sistema dirigido crecientemente* si dados τ_1 y τ_2 en J, existe $\tau_3 \in J$ tal que $f_{\tau_1} \leq f_{\tau_3}$ y $f_{\tau_2} \leq f_{\tau_3}$. Denotaremos un sistema de este tipo como $f_\tau \uparrow$. Además si existe $f = \sup\limits_\tau f_\tau \in X$ escribiremos $f_\tau \uparrow f$.

Análogamente un *sistema dirigido decrecientemente* es una red $\{f_\tau\}_{\tau \in J} \subset X$ que cumple que si $\tau_1, \tau_2 \in J$, entonces existe $\tau_3 \in J$ tal que $f_{\tau_3} \leq f_{\tau_1}$ y $f_{\tau_3} \leq f_{\tau_2}$. Lo denotaremos como $f_\tau \downarrow$, y cuando existe $f = \inf\limits_\tau f_\tau \in X$ usaremos la notación $f_\tau \downarrow f$.

Sea X un retículo vectorial real. Se define la *complejificación de* X como el espacio

$$X_{\mathbb{C}} := X + iX = \{f + ig : f, g \in X,\ i := \sqrt{-1}\},$$

con las operaciones dadas por

$$(f_1 + ig_1) + (f_2 + ig_2) := (f_1 + f_2) + i(g_1 + g_2),\ \ f_j, g_j \in X,\ \ j = 1, 2,$$
$$(a + ib)(f + ig) := (af - bg) + i(ag + bf),\ \ a, b \in \mathbb{R},\ \ f, g \in X.$$

Diremos que X es *complejificable* si $\forall\ f, g \in X$ existe $\sup\limits_{0 \leq \theta < 2\pi} |(\cos\theta)f + (\operatorname{sen}\theta)g| \in X$. Entonces la función módulo en X se puede extender a $X_{\mathbb{C}}$ de la siguiente manera:

$$|h| := \sup\{|(\cos\theta)f + (\operatorname{sen}\theta)g| : 0 \leq \theta < 2\pi\},\ \forall\ h := f + ig \in X_{\mathbb{C}}. \tag{1.1.1}$$

Un *retículo vectorial complejo* es un espacio vectorial de la forma $Z := X_{\mathbb{C}}$, donde X es un retículo vectorial real complejificable. En Z se considera el módulo definido en

(1.1.1) y el orden dado por $f \leq g$ en Z, si $f, g \in X$ y $f \leq g$ [24, 1.1.7]. En este caso llamamos a X la *parte real de* Z y usaremos la notación $X = Z_{\mathbb{R}}$. Notemos que $Z^+ = X^+$.

Sea X un retículo vectorial (real o complejo).

a) Un elemento $e \in X^+$ es una *unidad débil*, si $\inf\{e, f\} = 0$ implica que $f = 0$.

b) Un *ideal* Y de X es un subretículo vectorial de X con la propiedad de que si $f \in X$ y $|f| \leq |g|$ para algún $g \in Y$, entonces $f \in Y$.

Definición 1.1.2 Un *retículo normado real* Y es un espacio normado sobre $\mathbb{R}$ que es un retículo vectorial y cuya norma $\|\cdot\|_Y$ es *reticular*, esto es,

$$\text{si } f, g \in Y \text{ cumplen que } |f| \leq |g|, \text{ entonces } \|f\|_Y \leq \|g\|_Y. \tag{1.1.2}$$

Si además el espacio es completo, diremos que Y es un *retículo de Banach real.*

Observemos que en un retículo normado X, el subconjunto X^+ es cerrado [36, Prop. 5.2 ii)].

Un retículo normado real Y tiene la *propiedad de Fatou* si para cada sistema dirigido crecientemente $\{f_\tau\} \subset Y^+$ tal que $\sup_\tau \|f_\tau\|_Y < \infty$, existe $f = \sup_\tau f_\tau \in Y$ y $\|f\|_Y = \sup_n \|f_n\|_Y$.

Similarmente, decimos que Y tiene la *propiedad σ-Fatou*, si dada $\{f_n\} \subset Y^+$ tal que $f_n \uparrow$ y $\sup_n \|f_n\|_Y < \infty$, entonces existe $f = \sup_n f_n \in Y$ y $\|f\|_Y = \sup_n \|f_n\|_Y$.

Sea X un retículo normado real complejificable. Entonces $Z := X_{\mathbb{C}}$ es un retículo vectorial complejo. En Z se define la norma $\|\cdot\|_Z$ como

$$\|h\|_Z = \|\,|h|\,\|_X, \ \forall\, h \in Z.$$

Así Z es un espacio normado reticular, es decir, se cumple (1.1.2) con $Y = Z$. Definimos entonces un *retículo normado complejo* Z como la complejificación de un retículo normado real complejificable X, con la norma $\|\cdot\|_Z$.

Supongamos ahora que X es un retículo de Banach real, entonces X es complejificable [39, Ch. 14; Thm. 91.2]. Luego, su complejificación Z con la norma $\|\cdot\|_Z$ es un retículo normado completo [36, p. 137]. En este caso llamamos a Z *retículo de Banach complejo.* En adelante diremos simplemente retículo de Banach (normado) para referirnos a un retículo de Banach (normado), ya sea real o complejo.

Sea X un retículo normado.

- X es *σ-orden continuo*, si para cualquier sucesión $\{f_n\} \subset X$ tal que $f_n \downarrow 0$ se sigue que $\|f_n\|_X \downarrow 0$. Denotaremos por X_a la parte σ-orden continua de X, es decir el ideal más grande de X que es σ-orden continuo.
- X tiene la propiedad de Fatou o la propiedad σ-Fatou, si $X_{\mathbb{R}}$ la tiene.

Definición 1.1.3 Sean X y Y retículos de Banach y $T : X \to Y$ un operador lineal.

a) T es un *homomorfismo reticular*, si $T(X_{\mathbb{R}}) \subset Y_{\mathbb{R}}$ y $T(\sup\{f,g\}) = \sup\{Tf, Tg\}$, $\forall\ f, g \in X_{\mathbb{R}}$.

b) T es *positivo*, si $T(f) \in Y^+$, $\forall\ f \in X^+$.

Notemos que en el caso en que X y Y son retículos de Banach reales, la primera condición en la definición de homomorfismo reticular es redundante. Además, que se cumpla

$$|Tg| = T|g|,\ \forall\ g \in X, \tag{1.1.3}$$

es equivalente a la segunda condición [36, Ch. II Prop. 2.5].

El siguiente resultado es fundamental en la teoría de operadores entre retículos de Banach [1, Lemma 3.22, Cor. 3.23].

Teorema 1.1.4 Sean X y Y retículos de Banach y $T : X \to Y$ un operador lineal. Si T es positivo, entonces:

i) $T(X_{\mathbb{R}}) \subset Y_{\mathbb{R}}$.

ii) T es continuo.

iii) T preserva el orden, es decir, $f \leq g$ en X implica que $Tf \leq Tg$ en Y.

iv) Se cumple

$$|Tf| \leq T|f|,\ \forall\ f \in X. \tag{1.1.4}$$

Si $T : X \to Y$ es un homomorfismo reticular inyectivo y $R(T)$ es cerrado, diremos que T es un *isomorfismo reticular* y que los espacios X y $R(T)$ son *reticularmente isomorfos*. En este caso, del teorema anterior obtenemos que T y $T^{-1} : R(T) \to X$ son continuos.

Diremos que $T : X \to Y$ es una *isometría reticular*, si T es un homomorfismo reticular que además es una isometría. Luego, X y $T(X)$ son espacios *reticularmente isométricos*.

Sea X un retículo de Banach real. Puesto que $\mathbb{R}$ también es un retículo de Banach resulta que $\varphi \in X^*$ es positivo si $\varphi(f) \geq 0$, $\forall\ f \in X^+$. Así X^*, el espacio dual de X, está naturalmente ordenado de la siguiente manera:

$$\varphi \leq \psi, \text{ si } \varphi(f) \leq \psi(f),\ \forall\ f \in X^+,\ \varphi, \psi \in X^*. \tag{1.1.5}$$

De esta manera X^*, con su norma usual, es un retículo de Banach, donde el supremo y el ínfimo están determinados unívocamente a partir de las condiciones

$$\begin{aligned} \sup\{\varphi, \psi\}(f) &:= \sup\{\varphi(g) + \psi(h) : f = g + h, g \geq 0,\ h \geq 0\}, \\ \text{ínf}\{\varphi, \psi\}(f) &:= \text{ínf}\{\varphi(g) + \psi(h) : f = g + h, g \geq 0,\ h \geq 0\} \end{aligned} \tag{1.1.6}$$

para todo $\varphi, \psi \in X^*$ y $f \in X^+$ [36, Chap II, Props. 4.2, 5.5].

Ya que X^* es un retículo de Banach real consideremos su complejificación $(X^*)_{\mathbb{C}}$. Dado $\varphi \in X^*$, sea $\widetilde{\varphi} : X_{\mathbb{C}} \to \mathbb{C}$ su extensión canónica, esto es, $\widetilde{\varphi}(x + iy) = \varphi(x) + i\varphi(y)$. Resulta que la correspondencia $\varphi \mapsto \widetilde{\varphi}$ es una isometría reticular. Esto permite identificar X^* con $\widetilde{X^*} \subset (X^*)_{\mathbb{C}}$. Por otra parte si $\Phi : X_{\mathbb{C}} \to \mathbb{C}$ es un funcional lineal acotado, entonces Φ es de la forma $\Phi = \widetilde{\varphi} + i\widetilde{\psi}$, donde $\widetilde{\varphi}$ y $\widetilde{\psi}$ son las extensiones canónicas de funcionales lineales $\varphi, \psi \in X$. Así $\Phi \in (X^*)_{\mathbb{C}}$ si, y sólo si, $\varphi, \psi \in X^*$. Luego, $(X^*)_{\mathbb{C}} = X^* + iX^*$ es un retículo de Banach [36, § 11], [39, p. 207]. Además resulta que

$$|\Phi|(f) = \sup_{|g| \leq f} |\Phi(g)|,\ \forall\ f \in X^+. \tag{1.1.7}$$

1.2. μ-espacios funcionales de Banach

Dado un espacio medible (Ω, Σ) denotaremos por $L^0(\Sigma)$ al espacio de funciones $f : \Omega \to \mathbb{K}$ que son Σ-medibles. Si además contamos con una medida positiva μ definida en Σ, indicaremos por $\mathcal{N}_0(\mu)$ a la colección de subconjuntos *μ-nulos*, es decir, los conjuntos $A \in \Sigma$ tales que $\mu(A) = 0$. Decimos que una propiedad P se cumple *μ-c.t.p.*, si P se cumple en el complemento de un conjunto en $\mathcal{N}_0(\mu)$. Denotamos por $L^0(\mu)$ al espacio de clases de equivalencia de funciones en $L^0(\Sigma)$, donde dos funciones son identificadas cuando son iguales μ-c.t.p.

Observemos que, cuando $\mathbb{K} = \mathbb{C}$, el espacio $L^0(\mu)$ es la complejificación del espacio vectorial real

$$L^0(\mu)_{\mathbb{R}} := \{f \in L^0(\mu) : f \text{ toma valores reales } \ \mu\text{-c.t.p.}\}.$$

Consideraremos en $L^0(\mu)_{\mathbb{R}}$ el orden puntual definido μ-c.t.p. Luego, $L^0(\mu)$ es un retículo vectorial complejo. Sea $f \in L^0(\mu)$. Así $\text{Re}f, \text{Im}f \in L^0(\mu)_{\mathbb{R}}$ y $f = \text{Re}f + i\text{Im}f$.

Notemos que

$$|f| := \sup_{0\leq\theta<2\pi} |(\cos\theta)\mathrm{Re}f + (\mathrm{sen}\ \theta)\mathrm{Im}f| = \sqrt{(\mathrm{Re}f)^2 + (\mathrm{Im}f)^2}.$$

Observemos también que f es unidad débil si, y sólo si, $f > 0$ μ-c.t.p.

Definición 1.2.1 Sea (Ω, Σ, μ) un espacio de medida. Un espacio de Banach $X \subset L^0(\mu)$ es un *espacio funcional de Banach* respecto de μ (μ-e.f.B.), si X es un ideal de $L^0(\mu)$ y su norma es reticular.

Observación 1.2.2 Es pertinente observar que en la literatura aparecen otras definiciones con el nombre de μ-e.f.B., por ejemplo en [28, Def. 1.b.17] y en [5, Def. I.1.3]; véase también [15, p. 2]. La definición con la que trabajaremos no impone condiciones sobre la medida μ.

Consideremos un espacio normado $X \subset L^0(\mu)$ que es un ideal de $L^0(\mu)$ y cuya norma es reticular. Si X tiene la propiedad σ-Fatou, entonces X es completo [38, Ch. 15 §65 Thm. 1]. Luego, X es un μ-e.f.B. con la propiedad σ -Fatou.

Sea X un μ-e.f.B. complejo, . Notemos que $X_{\mathbb{R}} = X \cap L^0(\mu)_{\mathbb{R}}$, con el orden puntual definido μ-c.t.p., es un retículo de Banach y $X = X_{\mathbb{R}} + iX_{\mathbb{R}}$. Por lo tanto X es la complejificación de $X_{\mathbb{R}}$. Además, $f \in X$ si, y sólo si, $\mathrm{Re}f, \mathrm{Im}f \in X$ si, y sólo si, $(\mathrm{Re}f)^+, (\mathrm{Re}f)^-, (\mathrm{Im}f)^+, (\mathrm{Im}f)^- \in X^+$. Luego f es una combinación lineal de funciones en X^+.

De la propiedad reticular de la norma se obtiene el siguiente resultado.

Lema 1.2.3 Sean X un μ-e.f.B. y $g \in L^\infty(\mu)$. Entonces $fg \in X$, $\forall\ f \in X$ y

$$\|fg\|_X \leq \|f\|_X \|g\|_\infty. \tag{1.2.1}$$

Luego, el operador lineal $M_g : X \to X$, dado por $M_g(f) = fg$, es continuo y satisface $\|M_g\| \leq \|g\|_\infty$. En particular, dado $A \in \Sigma$, $\chi_A \in L^\infty(\mu)$. Se sigue que el operador lineal $M_A := M_{\chi_A} : X \to X$, es continuo y satisface $\|M_A\| \leq 1$.

El siguiente es un resultado importante en la teoría de espacios funcionales de Banach (Véanse [39, Thm. 100.6], [15, p. 46], [32, Lemma 3.13]).

Proposición 1.2.4 Sean X un μ-e.f.B., $\{f_n\} \subset X$ una sucesión y $f \in X$. Si $f_n \to f$ en X, entonces existe una subsucesión $\{f_{n_k}\}$ de $\{f_n\}$ tal que $f_{n_k} \to f$ μ-c.t.p.

1.3. Medidas definidas en un δ-anillo

1.3.1. Medidas escalares

Parte de la teoría presentada en esta sección fue desarrollada por N. Dinculeanu en [17] y otra parte por P. R. Masani y H. Niemi en [31].

Definición 1.3.1 Sea Ω un conjunto. Una colección $\mathcal{R}$ de subconjuntos de Ω es un *δ-anillo*, si $\mathcal{R}$ es un anillo y $\mathcal{R}$ es "cerrado" bajo intersecciones numerables.

En adelante y durante todo el presente trabajo $\mathcal{R}$ será un δ-anillo de subconjuntos de un conjunto no-vacío Ω. A continuación definiremos una σ-álgebra en Ω que contiene a $\mathcal{R}$ y que nos servirá de punto de partida.

Proposición 1.3.2 La colección

$$\mathcal{R}^{loc} := \{A \subset \Omega : A \cap B \in \mathcal{R},\ \forall\ B \in \mathcal{R}\}$$

es una σ-álgebra de subconjuntos de Ω y $\mathcal{R} \subset \mathcal{R}^{loc}$.

Dado $A \in \mathcal{R}^{loc}$, usaremos la notación

$$\mathcal{R}_A := \{B \in \mathcal{R} : B \subset A\}.$$

Si $A \in \mathcal{R}$, notemos que $\mathcal{R}_A$ es una σ-álgebra en A.

Observación 1.3.3 Las siguientes propiedades son equivalentes:

i) $\mathcal{R}$ es una σ-álgebra en Ω.

ii) $\mathcal{R} = \mathcal{R}^{loc}$.

ii) $\Omega \in \mathcal{R}$.

Definición 1.3.4 Una *medida escalar (σ-aditiva) en* $\mathcal{R}$ es una función $\lambda : \mathcal{R} \to \mathbb{K}$ tal que si $\{B_n\} \subset \mathcal{R}$, donde $B_n \cap B_m = \emptyset$ cuando $m \neq n$ y $\bigcup_{n=1}^{\infty} B_n \in \mathcal{R}$, entonces

$$\sum_{n=1}^{\infty} \lambda(B_n) = \lambda\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} B_n\right). \tag{1.3.1}$$

Observemos que la restricción $\lambda_B := \lambda|_{\mathcal{R}_B} : \mathcal{R}_B \to \mathbb{K}$ es una medida escalar, $\forall\, B \in \mathcal{R}$.

A una medida definida en un δ-anillo $\mathcal{R}$ le asociaremos una medida positiva definida en la σ-álgebra $\mathcal{R}^{loc}$, la cual nos permitirá utilizar la teoría de integración respecto de medidas positivas.

Notación. Dado $A \in \mathcal{R}^{loc}$, denotaremos por π_A a la colección de familias $\{B_j\}_{j=1}^n \subset \mathcal{R}_A$ tal que $B_i \cap B_j = \emptyset,\ i \neq j, \quad n \in \mathbb{N}$.

Definición 1.3.5 Sea $\lambda : \mathcal{R} \to \mathbb{K}$ una medida. A la función $|\lambda| : \mathcal{R}^{loc} \to [0, \infty]$ definida por

$$|\lambda|(A) := \sup \left\{ \sum_{j=1}^{n} |\lambda(A_j)| : \{A_j\} \in \pi_A \right\}.$$

se le llama *variación de* λ.

Proposición 1.3.6 Sea $\lambda : \mathcal{R} \to \mathbb{K}$ una medida.

i) La variación de λ es la menor medida positiva $|\lambda| : \mathcal{R}^{loc} \to [0, \infty]$ tal que

$$|\lambda(B)| \leq |\lambda|(B) = |\lambda_B|(B) < \infty \ \forall\, B \in \mathcal{R}.$$

ii) Si $A \in \mathcal{R}^{loc}$, entonces $|\lambda|(A) = \sup\limits_{B \in \mathcal{R}_A} |\lambda|(B)$. Luego existe una sucesión creciente $\{B_n\} \subset \mathcal{R}_A$ tal que $|\lambda|(A) = \lim\limits_{n \to \infty} |\lambda|(B_n)$.

iii) Sea $A \in \mathcal{R}^{loc}$. Si $|\lambda|(A) < \infty$, entonces $A = \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} B_n \cup N$ donde $\{B_n\} \subset \mathcal{R}$ y $N \in \mathcal{N}_0(|\lambda|)$.

Definición 1.3.7 Una función $f \in L^0(\mathcal{R}^{loc})$ es *integrable con respecto de* λ si,

$$|f|_{1,\lambda} := \int_{\Omega} |f| d|\lambda| < \infty. \tag{1.3.2}$$

Al espacio de las clases de equivalencia que se obtienen al identificar dos funciones integrables con respecto de λ, que son iguales $|\lambda|$-c.t.p., lo denotaremos por $L^1(\lambda)$.

Observación 1.3.8 Sea $\Omega_{\mathcal{R}} = \bigcup_{B\in\mathcal{R}} B$. Fijemos $B \in \mathcal{R}$. Dado que $B \subset \Omega_{\mathcal{R}}$ resulta que $\Omega_{\mathcal{R}} \cap B = B \in \mathcal{R}$. Luego $\Omega_{\mathcal{R}} \in \mathcal{R}^{loc}$. Además $(\Omega \setminus \Omega_{\mathcal{R}}) \cap B = \emptyset$, $\forall\ B \in \mathcal{R}$. De la definición de la variación de λ se sigue que $\Omega \setminus \Omega_{\mathcal{R}} \in \mathcal{N}_0(|\lambda|)$. Luego, para propósitos de integración, los subconjuntos que interesan son los de $\Omega_{\mathcal{R}}$. Por lo tanto, de ser necesario, podemos suponer que $\Omega = \bigcup_{B\in\mathcal{R}} B$.

A las funciones simples en $L^0(\mathcal{R}^{loc})$ con soporte en $\mathcal{R}$ las llamaremos *funciones $\mathcal{R}$-simples* y al conjunto de estas funciones lo denotaremos por $S(\mathcal{R})$. Notemos que $S(\mathcal{R})$ es un espacio vectorial.

Teorema 1.3.9 El espacio $L^1(\lambda)$ con la norma $|\cdot|_{1,\lambda}$ es un $|\lambda|$-e.f.B., donde $S(\mathcal{R}) \subset L^1(\lambda)$ es un conjunto denso. Además $L^1(\lambda)$ es σ orden-continuo y tiene la propiedad σ-Fatou.

Sea $s \in S(\mathcal{R})$. Si $s = \sum_{j=1}^{n} \chi_{B_j} x_j$, donde $x_j \in \mathbb{K}$, $\quad B_j \in \mathcal{R}$, $j = 1, \ldots, n$, entonces

$$\int_\Omega s d\lambda = \sum_{j=1}^{n} \lambda(B_j) x_j.$$

Proposición 1.3.10 El operador integral define un funcional lineal acotado en $S(\mathcal{R}) \subset L^1(\lambda)$, de norma menor o igual a 1.

La densidad de $S(\mathcal{R})$ en $L^1(\lambda)$ y la continuidad del operador integral en $S(\mathcal{R})$ permiten definir

$$\int_\Omega f d\lambda := \lim_{n\to\infty} \int_\Omega s_n d\lambda, \tag{1.3.3}$$

donde $\{s_n\}$ es una sucesión de funciones $\mathcal{R}$-simples tal que $s_n \to f$ en $L^1(\lambda)$.

El siguiente resultado es el teorema de la convergencia dominada para la integral respecto de λ.

Teorema 1.3.11 Sean $\{f_n\} \subset L^0(\mathcal{R}^{loc})$, $g \in L^1(\lambda)$ y $f \in L^0(\mathcal{R}^{loc})$ tales que $f_n \to f$ y $|f_n| \le |g|$ $|\lambda|$-c.t.p., $\forall\ n \in \mathbb{N}$. Entonces $f \in L^1(\lambda)$, $f_n \to f$ en $L^1(\lambda)$ y

$$\int_\Omega f d\lambda = \lim_{n\to\infty} \int_\Omega f_n d\lambda. \tag{1.3.4}$$

Los resultados que vienen a continuación juegan un papel básico en la teoría. P. R. Masani y H. Niemi los prueban en [31, Lemma 2.30, Thm. 2.32].

Proposición 1.3.12 Si $f \in L^0(\mathcal{R}^{loc})$, entonces

$$\int_A |f| d|\lambda| = \sup_{B \in \mathcal{R}_A} \int_B |f| d|\lambda|, \ \forall\ A \in \mathcal{R}^{loc}. \tag{1.3.5}$$

Luego, $f \in L^1(\lambda)$ si, y sólo si, $\sup_{B \in \mathcal{R}} \int_B |f| d|\lambda| < \infty$.

La definición que viene a continuación fue considerada por P. R. Masani y H. Niemi en [31, Def. 2.14 c)].

Definición 1.3.13 Una función $f \in L^0(\mathcal{R}^{loc})$ es *localmente λ-integrable* si $f\chi_B$ es integrable respecto de $|\lambda|$, $\forall\ B \in \mathcal{R}$.

Denotaremos por $L^1_{loc}(\lambda)$ al espacio de las clases de equivalencia que se obtienen al identificar dos funciones localmente λ-integrables, que son iguales $|\lambda|$-c.t.p.

Teorema 1.3.14 Sea $f \in L^1_{loc}(\lambda)$. La función $\lambda_f : \mathcal{R} \to \mathbb{K}$ definida por

$$\lambda_f(B) := \int_B f d\lambda = \int_\Omega f\chi_B d\lambda, \forall\ B \in \mathcal{R},$$

es una medida escalar tal que

$$|\lambda_f|(A) = \int_A |f| d|\lambda|, \ \forall\ A \in \mathcal{R}^{loc}. \tag{1.3.6}$$

Diremos que una función $\lambda : \mathcal{R} \to [0, \infty]$ es una *medida positiva en* $\mathcal{R}$ si cumple con la igualdad (1.3.1) para cualquier colección disjunta $\{B_n\}$ de elementos en $\mathcal{R}$ cuya unión permanece en $\mathcal{R}$. De la misma forma que en el caso de una medida escalar se define $|\lambda| : \mathcal{R}^{loc} \to [0, \infty]$, la variación de λ. Ya que $|\lambda|$ es una medida positiva definida en una σ-álgebra, se construye el espacio $L^1(|\lambda|)$. Procediendo similarmente se obtienen los siguientes resultados.

Proposición 1.3.15 Si $f \in L^0(\mathcal{R}^{loc})$, entonces

$$\int_A |f| d|\lambda| = \sup_{B \in \mathcal{R}_A} \int_B |f| d|\lambda|, \ \forall\ A \in \mathcal{R}^{loc}. \tag{1.3.7}$$

Luego, $f \in L^1(|\lambda|)$ si, y sólo si, $\sup_{B \in \mathcal{R}} \int_B |f| d|\lambda| < \infty$.

Teorema 1.3.16 Sea $f \in L^1_{loc}(\lambda)$. La función $\lambda_f : \mathcal{R} \to \mathbb{K}$ definida por

$$\lambda_f(B) := \int_B f d|\lambda| = \int_\Omega f\chi_B d|\lambda|, \forall\ B \in \mathcal{R},$$

es una medida escalar tal que

$$|\lambda_f|(A) = \int_A |f| d|\lambda|,\ \forall\ A \in \mathcal{R}^{loc}. \tag{1.3.8}$$

1.3.2. Medidas vectoriales

En esta sección presentamos la teoría básica respecto a medidas vectoriales definidas en δ-anillos. Esta es análoga a la que se conoce para medidas vectoriales definidas en σ-álgebras, a las que, en ocasiones, llamaremos medidas vectoriales clásicas. Como en la sección anterior, la mayoría de estos resultados fueron desarrollados por N. Dinculeanu en [17] y por P. R. Masani y H. Niemi en [31] y [32].

Definición 1.3.17 Sea X un espacio de Banach. Una función $\nu : \mathcal{R} \to X$ es una *medida vectorial* si para cualquier sucesión de conjuntos $\{B_n\} \subset \mathcal{R}$ tal que $B_n \cap B_m = \emptyset$ y $\bigcup_{n=1}^{\infty} B_n \in \mathcal{R}$ se cumple

$$\sum_{n=1}^{\infty} \nu(B_n) = \nu(\bigcup_{n=1}^{\infty} B_n).$$

En el siguiente lema vemos un par de caracterizaciones de las medidas vectoriales que resultan ser muy útiles. En el caso de medidas vectoriales definidas en σ-álgebras son bien conocidas.

Lema 1.3.18 Sea $\nu : \mathcal{R} \to X$ una función aditiva. Son equivalentes:

i) La función ν es una medida vectorial.

ii) Si $\{B_n\} \subset \mathcal{R}$ es una sucesión creciente de conjuntos tal que $\bigcup_{n=1}^{\infty} B_n \in \mathcal{R}$, entonces
$$\lim_{n\to\infty} \nu(B_n) = \nu(\bigcup_{n=1}^{\infty} B_n).$$

iii) Si $\{B_n\} \subset \mathcal{R}$ es una sucesión decreciente de conjuntos, entonces
$$\lim_{n\to\infty} \nu(B_n) = \nu(\bigcap_{n=1}^{\infty} B_n).$$

Definición 1.3.19 Sea $\nu : \mathcal{R} \to X$ una medida vectorial.

a) La *variación* de ν es la función $|\nu| : \mathcal{R}^{loc} \to [0, \infty]$ definida por

$$|\nu|(A) := \sup \left\{ \sum_j \|\nu(A_j)\|_X : \{A_j\} \in \pi_A \right\}.$$

b) La *semivariación* de ν es la función $\|\nu\| : \mathcal{R}^{loc} \to [0, \infty]$ definida por

$$\|\nu\|(A) := \sup\{|\langle \nu, x^* \rangle|(A) : x^* \in B_{X^*}\},$$

donde $|\langle \nu, x^* \rangle|$ es la variación de la medida $\langle \nu, x^* \rangle : \mathcal{R} \to \mathbb{K}$, definida por

$$\langle \nu, x^* \rangle(B) = \langle \nu(B), x^* \rangle, \ \forall \ B \in \mathcal{R}.$$

c) La *cuasivariación* de ν es la función $|||\nu||| : \mathcal{R}^{loc} \to [0, \infty]$ definida por

$$|||\nu|||(A) := \sup\{\|\nu(B)\|_X : B \in \mathcal{R}_A\}.$$

Proposición 1.3.20 Sea $\nu : \mathcal{R} \to X$ una medida vectorial.

i) La variación de ν es la menor medida positiva $|\nu| : \mathcal{R}^{loc} \to [0, \infty]$ tal que

$$\|\nu(B)\|_X \leq |\nu|(B), \ \forall \ B \in \mathcal{R}. \tag{1.3.9}$$

ii) Se cumple $|\nu|(A) = \sup_{B \in \mathcal{R}_A} |\nu|(B)$, $\forall \ A \in \mathcal{R}^{loc}$. Luego existe una sucesión creciente $\{B_n\} \subset \mathcal{R}_A$ tal que $|\nu|(A) = \lim_{n\to\infty} |\nu|(B_n)$.

iii) Sea $A \in \mathcal{R}^{loc}$. Si $|\nu|(A) < \infty$, entonces $A = \bigcup_{n=1}^{\infty} B_n \cup N$, donde $\{B_n\} \subset \mathcal{R}$ y $N \in \mathcal{N}_0(|\nu|)$.

Proposición 1.3.21 ([32, Lemma 3.4 c)]) Si $A \in \mathcal{R}^{loc}$, entonces

$$\|\nu\|(A) = \sup \left\{ \left\| \sum_{j=1}^{n} a_j \nu(B_j) \right\|_X : \{a_j\}_1^n \subset B_{\mathbb{K}}, \ \ \{B_j\}_1^n \in \pi_A \right\}. \tag{1.3.10}$$

Proposición 1.3.22 ([32, Lemma 3.4, Cor. 3.5]) Se cumple que:

i) La semivariación de ν es una función monótona-creciente, σ-subaditiva y finita en $\mathcal{R}$.

ii) Para cada $A \in \mathcal{R}^{loc}$, $|||\nu|||(A) \leq \|\nu\|(A) \leq 4|||\nu|||(A)$ en el caso complejo y en el caso real $|||\nu|||(A) \leq \|\nu\|(A) \leq 2|||\nu|||(A)$.

Observación 1.3.23 Notemos que, de ii) en la proposición anterior, se sigue que ν es acotada si, y sólo si, $\|\nu\|(\Omega) < \infty$. Además

$$\|\nu(B)\|_X \leq \|\nu\|(B), \ \forall \ B \in \mathcal{R}.$$

Notación. Usaremos la notación $A_n \uparrow A$ para referirnos a una sucesión creciente de conjuntos $\{A_n\}$ tal que $\bigcup\limits_n A_n = A$. Asimismo, utilizaremos $A_n \downarrow A$ para indicar una sucesión decreciente de conjuntos $\{A_n\}$ tal que $\bigcap\limits_n A_n = A$.

Proposición 1.3.24 ([32, Lemma 3.4, Cor. 3.5]) Sea $A \in \mathcal{R}^{loc}$. Entonces:

i) $\|\nu\|(A) \leq |\nu|(A)$.

ii) $\|\nu\|(A) = \sup\limits_{B \in \mathcal{R}_A} \|\nu\|(B)$. Luego existe una sucesión creciente $\{B_n\} \subset \mathcal{R}_A$ tal que $\|\nu\|(A) = \lim\limits_{n \to \infty} \|\nu\|(B_n)$.

Definición 1.3.25 Un conjunto $A \in \mathcal{R}^{loc}$ es *ν-nulo* si $\|\nu\|(A) = 0$. A la colección de conjuntos ν-nulos lo denotaremos por $\mathcal{N}_0(\nu)$.

De la σ-subaditividad y la monotonía de la semivariación se sigue el siguiente resultado.

Lema 1.3.26 Sea ν una medida vectorial definida en $\mathcal{R}$.

i) Si $\{A_n\} \subset \mathcal{N}_0(\nu)$, entonces $\bigcup\limits_n A_n \in \mathcal{N}_0(\nu)$.

ii) Si $A \in \mathcal{N}_0(\nu)$ y $C \in (\mathcal{R}^{loc})_A$, entonces $C \in \mathcal{N}_0(\nu)$.

Proposición 1.3.27 Sea $A \in \mathcal{R}^{loc}$. Son equivalentes:

i) A es ν-nulo.

ii) A es $|\nu|$-nulo.

iii) $\nu(B) = 0$, $\forall\ B \in \mathcal{R}_A$.

Diremos que una medida positiva $\lambda : \mathcal{R} \to [0, \infty]$ es una *medida de control local* para ν, si $\mathcal{N}_0(|\lambda|) = \mathcal{N}_0(\nu)$ [14, p. 437].

Así, por la proposición anterior, $|\nu|$ es una medida de control local para ν.

Finalmente definimos $L^0(\nu)$ como el espacio de clases de equivalencia que se obtiene al identificar dos funciones $\mathcal{R}^{loc}$-medibles, que son iguales ν-c.t.p. Así, $L^0(\nu) = L^0(|\lambda|)$, siendo λ cualquier medida de control local para ν.

1.4. Integración respecto a medidas vectoriales definidas en δ-anillos

1.4.1. Funciones escalarmente integrables

En esta sección recordaremos el concepto de integrabilidad débil respecto de una medida vectorial $\nu : \mathcal{R} \to X$, donde $\mathcal{R}$ es un δ-anillo de subconjuntos de Ω y X es un espacio de Banach.

Definición 1.4.1 Una función $f \in L^0(\mathcal{R}^{loc})$ es *escalarmente integrable respecto de ν*, si para cada $x^* \in X^*$ se cumple que $f \in L^1(\langle \nu, x^* \rangle)$. Denotaremos por $L^1_w(\nu)$ al espacio de clases de equivalencia que se obtiene al identificar dos funciones escalarmente integrables, que son iguales ν-c.t.p.

En $L^1_w(\nu)$ definimos la función

$$\|f\|_\nu := \sup \left\{ \int_\Omega |f|\ d|\langle \nu, x^* \rangle| : x^* \in B_{X^*} \right\}, \tag{1.4.1}$$

la cual resulta ser una norma.

Teorema 1.4.2 ([32, Lemma 3.13], [22, p. 19]) El espacio $L^1_w(\nu)$, con la norma $\|\cdot\|_\nu$, es un $|\nu|$-espacio funcional de Banach que posee la propiedad σ-Fatou.

Como lo hemos mencionado en el teorema anterior $L^1_w(\nu)$ es un $|\nu|$-e.f.B. Sin embargo, $|\nu|$ puede no ser una buena medida de control local para ν, como se discutirá en el cápitulo 4. Por otra parte, recordemos que en el caso de medidas vectoriales definidas en σ-álgebras siempre existe una *medida de Rybakov* μ, esto es, existe $x_0^* \in B_{X^*}$ tal que la medida finita positiva $\mu := |\langle \nu, x_0^* \rangle| : \mathcal{R} \to [0, \infty)$ cumple que $\mathcal{N}_0(\nu) = \mathcal{N}_0(\mu)$ [16, Ch. IX, Thm. 2.2].

1.4.2. Funciones ν-integrables

En esta sección recordaremos cuándo una función es integrable respecto a una medida vectorial en un δ-anillo, así como los resultados fundamentales relacionados con el espacio que forman estas funciones. La gran mayoría de estos fueron desarrollados por D.R. Lewis en [27] y por P. R. Masani y H. Niemi en [32].

Definición 1.4.3 Una función $f \in L^1_w(\nu)$ es *ν-integrable*, si para cada $A \in \mathcal{R}^{loc}$ existe un vector $x_A \in X$, tal que

$$\langle x_A, x^* \rangle = \int_A f d\langle \nu, x^* \rangle, \ \forall \ x^* \in X^*. \tag{1.4.2}$$

Al vector x_A, que es único y está bien definido, lo denotaremos por $\int_A f d\nu$ y al subconjunto de $L^1_w(\nu)$ formado por las funciones integrables respecto de ν por $L^1(\nu)$.

Notemos que $\displaystyle\int_\Omega f\chi_A \ d\langle \nu, x^* \rangle = \int_A f \ d\langle \nu, x^* \rangle = \langle \int_A f \ d\nu, x^* \rangle$. Luego $f\chi_A \in L^1(\nu)$ y

$$\int_\Omega f\chi_A \ d\nu = \int_A f \ d\nu.$$

Teorema 1.4.4 ([32, Thm. 4.5]) $L^1(\nu)$ es un subespacio cerrado de $L^1_w(\nu)$ y el operador integral $I_\nu : L^1(\nu) \to X$ definido por

$$I_\nu(f) = \int_\Omega f \ d\nu$$

es lineal y acotado con norma menor o igual a 1.

Proposición 1.4.5 Sea $\varphi = \sum_{j=1}^n a_j \chi_{A_j} \in S(\mathcal{R})$. Entonces $\varphi \in L^1(\nu)$ y

$$\int_A \varphi \ d\nu = \sum_{j=1}^n a_j \nu(A_j \cap A), \ \forall A \in \mathcal{R}^{loc}.$$

Teorema 1.4.6 ([27, Thm. 3.5]) $S(\mathcal{R}) \subset L^1(\nu)$ es denso.

Teorema 1.4.7 ([27, Thm. 5.1]) Si X no contiene una copia de c_0, entonces $L^1(\nu) = L^1_w(\nu)$.

Teorema 1.4.8 ([27, Thm. 3.3] Convergencia dominada) Sean $f, f_n \in L^0(\mathcal{R}^{loc})$, $\forall\ n \in \mathbb{N}$, tales que $f_n \to f$ ν-c.t.p. y $g \in L^1(\nu)$ tal que $|f_n| \leq |g|$, $\forall\ n \in \mathbb{N}$. Entonces $f \in L^1(\nu)$ y

$$\int_A f d\nu = \lim_{n\to\infty} \int_A f_n d\nu,\ \forall A \in \mathcal{R}^{loc}.$$

Lema 1.4.9 ([32, Thm. 4.9]) Sea $f \in L^1(\nu)$. Entonces existen conjuntos $N \in \mathcal{R}^{loc}$ y $B_n \in \mathcal{R}$, $\forall\ n \in \mathbb{N}$, tales que:

i) $B_n \subset B_{n+1}$ y $N \cap B_n = \emptyset$, $\forall\ n \in \mathbb{N}$.

ii) $N \in \mathcal{N}_0(\nu)$.

iii) $\mathrm{sop} f = N \cup \bigcup_{n=1}^{\infty} B_n$.

Teorema 1.4.10 El espacio $L^1(\nu)$ es un $|\nu|$-e.f.B. σ orden-continuo.

Observación 1.4.11 Sean $f \in L^1(\nu)$ y $\{\varphi_n\} \subset S(\mathcal{R}^{loc})$ tal que $0 \leq \varphi_n \uparrow |f|$. Del lema 1.4.9 resulta que $\mathrm{sop} f = N \cup R$, donde $R = \bigcup_{n=1}^{\infty} B_n$, $B_n \in \mathcal{R}$, $B_n \subset B_{n+1}$, $\forall n \in \mathbb{N}$, $N \cap R = \emptyset$ y $N \in \mathcal{N}_0(\nu)$. Definamos

$$s_n = \varphi_n \chi_{B_n}$$

Así $0 \leq s_n \leq s_{n+1}$ y $s_n \uparrow |f|\chi_R$. Como $|f| = |f|\chi_R$ ν-c.t.p. y $L^1(\nu)$ es σ-orden continuo, resulta que $s_n \to |f|$. Puesto que s_n es $\mathcal{R}$-simple, $\forall\ n \in \mathbb{N}$, concluimos lo siguiente:

Dada $f \in L^1(\nu)$ existe una sucesión $\{s_n\} \subset S(\mathcal{R})$ tal que

$$0 \leq s_n \uparrow |f|\ \nu\text{-c.t.p.},\ s_n \to |f| \text{ en } L^1(\nu).$$

Lema 1.4.12 ([32, Lemma 4.16]) Sean $\nu : \mathcal{R} \to X$ una medida vectorial, Z un espacio de Banach y $T : X \to Z$ un operador lineal continuo.

i) La función $T \circ \nu : \mathcal{R} \to Z$ es una medida vectorial tal que $\mathcal{N}_0(\nu) \subset \mathcal{N}_0(T \circ \nu)$. Además si $f \in L^1(\nu)$ entonces f es $T \circ \nu$-integrable y

$$\int_A f d(T \circ \nu) = T\left(\int_A f d\nu\right), \ \forall\ A \in \mathcal{R}^{loc}.$$

ii) Si T es inyectivo, entonces $\mathcal{N}_0(\nu) = \mathcal{N}_0(T \circ \nu)$. Luego $L^1(\nu) \subset L^1(T \circ \nu)$.

Teorema 1.4.13 ([14, Prop. 2.3]) Una función $f \in L^0(\mathcal{R}^{loc})$ es integrable respecto de ν si, y sólo si, existe una sucesión $\{s_n\} \in S(\mathcal{R})$ que cumple:

i) $\{s_n\}$ converge a f ν-c.t.p.

ii) $\left\{\int_A s_n d\nu\right\}$ converge en X, $\forall\ A \in \mathcal{R}^{loc}$.

Teorema 1.4.14 ([27, Thm. 3.2],[27, Thm. 4.2]) Sea $f \in L^1(\nu)$. La función $\tilde{\nu}_f : \mathcal{R}^{loc} \to X$ definida por

$$\tilde{\nu}_f(A) := \int_A f \ d\nu \tag{1.4.3}$$

es una medida vectorial, a la cual llamaremos *medida vectorial asociada a f*. Además,

$$\|\tilde{\nu}_f\|(A) = \|f\chi_A\|_\nu \text{ y } |\tilde{\nu}_f|(A) = \int_A |f| d|\nu|, \ \forall A \in \mathcal{R}^{loc}.$$

Se sigue que $L^1(|\nu|) \subset L^1(\nu)$. Más aún, una función $f \in L^1(\nu)$ es $|\nu|$-integrable si, y sólo si, la medida $\tilde{\nu}_f$ tiene variación finita, en cuyo caso

$$\|f\|_\nu = \|\tilde{\nu}_f\|(\Omega) \leq |\tilde{\nu}_f|(\Omega) = \|f\|_{|\nu|} < \infty. \tag{1.4.4}$$

Las siguientes son dos propiedades importantes que puede tener una medida vectorial ν definida en un δ anillo.

Definición 1.4.15 Sea $\nu : \mathcal{R} \to X$ una medida vectorial.

a) La medida ν es *σ-finita*, si existen una sucesión $\{B_n\} \subset \mathcal{R}$ y un conjunto $N \in \mathcal{N}_0(\nu)$ tales que $\Omega = \displaystyle\bigcup_{n=1}^{\infty} B_n \cup N$.

b) La medida ν es *fuertemente aditiva*, si para cada colección disjunta $\{B_n\} \subset \mathcal{R}$ se cumple que $\lim_{n\to\infty} \nu(B_n) = 0$.

Observemos que si $\mathcal{R}$ es una σ-álgebra, entonces ν es fuertemente aditiva. Además toda medida vectorial definida en un δ-anillo que es fuertemente aditiva es σ-finita [6, Lemma 1.1].

Teorema 1.4.16 ([14, Cor. 3.2]) Sea $\nu \to X$ una medida vectorial. Entonces ν es fuertemente aditiva si, y sólo si, $\chi_\Omega \in L^1(\nu)$.

Teorema 1.4.17 ([14, Prop. 3.4, Thm. 3.5]) Sea $\nu \to X$ una medida vectorial σ-finita. Entonces:

i) Existe una unidad débil $g \in L^1(\nu)$.

ii) Si $g \in L^1(\nu)$ es una unidad débil, entonces $L^1(\nu)$ es reticularmente isométrico a $L^1(\tilde{\nu}_g)$, donde $\tilde{\nu}_g : \mathcal{R}^{loc} \to X$ es la medida vectorial asociada a g.

Capítulo 2

Medidas vectoriales con densidad escalar f

Sean $\mathcal{R}$ un δ-anillo de subconjuntos de Ω y X un espacio de Banach. Consideremos una medida vectorial $\nu : \mathcal{R} \to X$. En el teorema 1.4.14 hemos visto que a cada función f en $L^1(\nu)$ le podemos asociar una medida vectorial $\tilde{\nu}_f$. En este capítulo extenderemos este resultado a una clase de funciones más general, que es el de las funciones localmente ν-integrables. Así, dada una función localmente ν-integrable f, definiremos en $\mathcal{R}$ la medida vectorial ν_f y analizaremos sus propiedades.

Asimismo describiremos los espacios de funciones escalarmente integrables e integrables respecto de esta medida; veremos que cada uno de ellos se puede identificar con un subespacio de $L^1_w(\nu)$ y $L^1(\nu)$ respectivamente; además estudiaremos algunas de sus propiedades reticulares. Como consecuencia de esta descripción obtendremos una caracterización de las funciones en $L^1(\nu)$ que resulta ser muy útil.

Por otra parte consideraremos otro δ anillo en el que $\mathcal{R}$ este contenido y una medida vectorial definida en él de tal forma que ν sea su restricción a $\mathcal{R}$; estudiaremos el comportamiento de los espacios de funciones integrables respecto de estas dos medidas. Ya que toda función ν-integrable es localmente ν-integrable, el desarrollo anterior nos ayudará a analizar la relación que guardan los espacios $L^1(\tilde{\nu}_f)$ y $L^1(\nu_f)$ en el caso en que f es una función ν-integrable.

2.1. La medida ν_f

Consideremos un δ-anillo $\mathcal{R}$ de subconjuntos de Ω, un espacio de Banach X, una medida vectorial $\nu : \mathcal{R} \to X$ y el espacio de funciones ν-integrables $L^1(\nu)$. Como se ha mencionado extenderemos el teorema 1.4.14 al considerar una clase de funciones más general. Así pues iniciemos definiendo a las funciones localmente ν-integrables.

Definición 2.1.1 Una función $f : \Omega \to \mathbb{K}$ es *localmente ν-integrable* si $\forall\ B \in \mathcal{R}$, $f\chi_B \in L^1(\nu)$.

Denotamos por $L^1_{loc}(\nu)$ al conjunto que consta de las (clases de equivalencia de) funciones localmente ν-integrables.

Dado $V \subset \mathbb{K}$, resulta que $f^{-1}(V) \cap B = (f|_B)^{-1}(V)$, $\forall\ B \in \mathcal{R}$. Luego f es $\mathcal{R}^{loc}$-medible si, y sólo si, $f|_B$ es $\mathcal{R}_B$-medible, $\forall\ B \in \mathcal{R}$. Por otra parte $f|_B = (f\chi_B)|_B$, $\forall$ $B \in \mathcal{R}$. Así

$$f \text{ es } \mathcal{R}^{loc}\text{-medible si, y sólo si, } f\chi_B \text{ es } \mathcal{R}^{loc}-\textit{medible}, \forall\ B \in \mathcal{R}. \tag{2.1.1}$$

Notemos que si $f \in L^1_{loc}(\nu)$, entonces $f\chi_B \in L^0(\mathcal{R}^{loc})$, $\forall\ B \in \mathcal{R}$. Por lo anterior $f \in L^0(\mathcal{R}^{loc})$. Se sigue que $L^1_{loc}(\nu)$ es un ideal de $L^0(\nu)$. Además $L^1(\nu) \subset L^1_{loc}(\nu)$.

Antes de presentar un ejemplo donde se muestra que la contención anterior puede ser propia, hagamos la siguiente observación.

Observación 2.1.2 Sean Σ una σ-álgebra y $\mathcal{R} \subset \Sigma$ un δ-anillo tales que $A \cap B \in \mathcal{R}$, $\forall\ A \in \Sigma$ y $B \in \mathcal{R}$. Entonces $\Sigma \subset \mathcal{R}^{loc}$. Supongamos que $\Omega = \displaystyle\bigcup_{n=1}^{\infty} B_n$, donde $B_n \in \mathcal{R}$, $\forall\ n \in \mathbb{N}$. Tomemos $A \in \mathcal{R}^{loc}$. Así $A = \displaystyle\bigcup_{n=1}^{\infty} A \cap B_n$. Ya que $A \cap B_n \in \mathcal{R} \subset \Sigma$, $\forall\ n \in \mathbb{N}$, resulta que A es un elemento de Σ. Se sigue entonces que, en este caso, $\mathcal{R}^{loc} = \Sigma$.

Ejemplo 2.1.3 Sean $\Omega = (0, 1)$, Σ la σ-álgebra de Lebesgue en Ω y $\mu : \Sigma \to \mathbb{R}$ la medida de Lebesgue. Entonces la colección definida por

$$\mathcal{R} := \{A \in \Sigma : \exists\ a, b \in (0, 1) \text{ tales que } A \subset [a, b]\}$$

es un δ-anillo en Ω. Puesto que $\Omega = \displaystyle\bigcup_{n=2}^{\infty} [\tfrac{1}{n}, 1 - \tfrac{1}{n}]$, de la observación anterior se sigue que $\mathcal{R}^{loc} = \Sigma$.

Consideremos la función $\nu : \mathcal{R} \to \mathbb{R}$ definida como la restricción de μ a $\mathcal{R}$. Entonces ν es una medida vectorial. Además de la proposición 1.3.6 i) se sigue que $|\nu| \leq \mu$. Ahora, para cada $A \in \Sigma$,

$$\mu(A) = \lim_{n\to\infty} \mu(A \cap [\tfrac{1}{n}, 1 - \tfrac{1}{n}]) = \lim_{n\to\infty} \nu(A \cap [\tfrac{1}{n}, 1 - \tfrac{1}{n}]) \leq \lim_{n\to\infty} |\nu|(A \cap [\tfrac{1}{n}, 1 - \tfrac{1}{n}]) = |\nu|(A)$$

Por lo tanto $|\nu| = \mu$. Ya que ν es una medida escalar, se sigue que $L^1(\nu) = L^1(\mu)$.

Sea $f : \Omega \to \mathbb{R}$, dada por $f(x) = \frac{1}{x}$, $\forall\ x \in \Omega$. Así, $f \in L^1_{loc}(\nu)$, sin embargo $f \notin L^1(\nu)$.

Teorema 2.1.4 Sea $f \in L^1_{loc}(\nu)$. La función $\nu_f : \mathcal{R} \to X$ definida por

$$\nu_f(B) := \int_B f d\nu$$

es una medida vectorial. Además, para cada $A \in \mathcal{R}^{loc}$,

$$\|\nu_f\|(A) = \sup_{x^* \in B_{X^*}} \int_A |f| d|\langle \nu, x^* \rangle| \quad \text{y} \quad |\nu_f|(A) = \int_A |f| d|\nu|. \tag{2.1.2}$$

Demostración. Sea $\{B_n\} \subset \mathcal{R}$ una colección subconjuntos tal que $B_n \subset B_{n+1}$, $\forall\, n \in \mathbb{N}$ y $B = \bigcup_{n=1}^{\infty} B_n \in \mathcal{R}$. Entonces $f\chi_B, f\chi_{B_n} \in L^1(\nu)$, $\forall\, n \in \mathbb{N}$, $f\chi_{B_n} \to f\chi_B$ y $|f\chi_{B_n}| \leq |f\chi_B|$, $\forall\, n \in \mathbb{N}$. Del teorema de convergencia dominada en $L^1(\nu)$ obtenemos

$$\nu_f(B) = \int_B f d\nu = \lim_{n\to\infty} \int_{B_n} f d\nu = \lim_{n\to\infty} \nu_f(B_n).$$

Del lema 1.3.18 se sigue que ν_f es una medida vectorial.

Fijemos $x^* \in B_{X^*}$. Notemos que, para $B \in \mathcal{R}$, se cumple

$$\langle \nu_f, x^* \rangle(B) = \langle \int_B f d\nu, x^* \rangle = \int_B f d\langle \nu, x^* \rangle = \langle \nu, x^* \rangle_f(B).$$

Del teorema 1.3.14,

$$|\langle \nu_f, x^* \rangle|(A) = |\langle \nu, x^* \rangle_f|(A) = \int_A |f| d|\langle \nu, x^* \rangle|, \ \forall\ A \in \mathcal{R}^{loc}. \tag{2.1.3}$$

De aquí se obtiene la igualdad para la semivariación de ν_f.

Ahora fijemos $B \in \mathcal{R}$. Entonces $f\chi_B \in L^1(\nu)$, y de (1.4.14) resulta que

$$|\nu_{f\chi_B}|(B) = \int_B |f| d|\nu|.$$

Por otro lado notemos que $|\nu_f|(B) = |\nu_{f\chi_B}|(B)$. Así, de la proposición 1.3.20 ii) y la proposición 1.3.12, se sigue

$$|\nu_f|(A) = \sup_{B \in \mathcal{R}_A} \int_B |f| d|\nu| = \int_A |f| d|\nu|. \ \blacksquare$$

Sea $A \in \mathcal{R}^{loc}$. De (2.1.2) resulta que $\|\nu_f\|(A) < \infty$ si, y sólo si, $f\chi_A \in L^1_w(\nu)$. En este caso $\|f\chi_A\|_\nu = \|\nu_f\|(A)$. Además si $N \in \mathcal{N}_0(\nu)$, entonces $f\chi_N = 0 \in L^1(\nu)$. Así, $\|\nu_f\|(N) = 0$. Por lo tanto

$$\mathcal{N}_0(\nu) \subset \mathcal{N}_0(\nu_f). \tag{2.1.4}$$

Ejemplo 2.1.5 Sean Ω, $\mathcal{R}$ y ν como en el ejemplo 2.1.3. Hemos visto que la función dada por $f(x) = \frac{1}{x}$, $\forall\, x \in \Omega$ es una función localmente ν-integrable. Consideremos su medida vectorial asociada $\nu_f : \mathcal{R} \to \mathbb{R}$. Veamos que $\chi_\Omega \notin L^1(\nu_f)$. Luego, por el teorema 1.4.16 obtendremos que ν_f no es fuertemente aditiva. Procedamos por contradicción. Así supongamos que $\chi_\Omega \in L^1(\nu_f)$. Definamos $B_n = [\frac{1}{n}, 1 - \frac{1}{n}]$, para $n = 3, 4, \ldots$. Observemos que $\chi_{B_n} \uparrow \chi_\Omega$, entonces por el teorema de la convergencia dominada y la definición de ν_f

$$\int_\Omega \chi_\Omega d\nu_f = \lim_{n\to\infty} \int_\Omega \chi_{B_n} d\nu_f = \lim_{n\to\infty} \int_{\frac{1}{n}}^{1-\frac{1}{n}} \frac{1}{x} dx = \infty.$$

Lo que es una contradicción.

Si $f \in L^1_{loc}(\nu)$, el ejemplo anterior muestra que, aún cuando ν sea fuertemente aditiva, la medida vectorial ν_f puede no serlo. Sin embargo de (2.1.4) se obtiene el siguiente resultado.

Proposición 2.1.6 Sea $f \in L^1_{loc}(\nu)$. Si ν es σ-finita, entonces ν_f también lo es.

2.2. El espacio $L^1(\nu_f)$

Lo que haremos ahora será describir y estudiar el espacio de funciones integrables respecto de la medida ν_f, donde f es una función localmente ν-integrable.

Notemos que si $N \in \mathcal{N}_0(\nu_f)$, entonces $f\chi_N = 0$, ν-c.t.p. Sean $g, h \in L^0(\mathcal{R}^{loc})$ tales que $g = h$ ν_f-c.t.p. y $N \in \mathcal{N}_0(\nu_f)$ tal que $g\chi_{N^c} = h\chi_{N^c}$. Se sigue que $fg\chi_{N^c} = fh\chi_{N^c}$ y $fg\chi_N = fh\chi_N = 0$ ν-c.t.p. Por lo tanto $fg = fh$, ν-c.t.p. Luego, el operador $M_f : L^0(\nu_f) \to L^0(\nu)$, dado por

$$M_f(g) := fg, \ \forall\, g \in L^0(\nu_f), \tag{2.2.1}$$

esta bien definido y claramente es lineal.

Teorema 2.2.1 Sean $f \in L^1_{loc}(\nu)$ y $g \in L^0(\nu_f)$. Entonces:

i) La función g es escalarmente ν_f-integrable si, y sólo si, $fg \in L^1_w(\nu)$. Además la restricción $M_f : L^1_w(\nu_f) \to L^1_w(\nu)$ del operador definido en (2.2.1) es una isometría lineal.

ii) La función g es ν_f-integrable si, y sólo si, $fg \in L^1(\nu)$. Además $M_f : L^1(\nu_f) \to L^1(\nu)$ es una isometría lineal tal que $I_{\nu_f} = I_\nu \circ M_f$.

Demostración. i) Primero observemos lo siguiente: si $\{g_n\} \subset L^0(\mathcal{R}^{loc})$ y $g \in L^0(\mathcal{R}^{loc})$ son tales que $g_n \to g$, ν_f-c.t.p. y $N \in \mathcal{N}_0(\nu_f)$ tal que $g_n\chi_{N^c} \to g\chi_{N^c}$. Se sigue que $fg_n\chi_{N^c} \to fg\chi_{N^c}$ y $fg_n\chi_N = fg\chi_N = 0$, ν-c.t.p. $\forall\ n \in \mathbb{N}$. Luego, $fg_n \to fg$ ν-c.t.p. Similarmente si $g_n \to g$, $|\langle \nu_f, x^*\rangle|$-c.t.p., entonces $fg_n \to fg$ $|\langle \nu, x^*\rangle|$-c.t.p., para cada $x^* \in X$.

Consideremos $s = \displaystyle\sum_{j=1}^{n} a_j\chi_{A_j} \in S(\mathcal{R}^{loc})$, por (2.1.3), para cada $x^* \in X^*$,

$$\int_\Omega |fs|d|\langle \nu, x^*\rangle| = \sum_{j=1}^{n} |a_j| \int_{A_j} |f|d|\langle \nu, x^*\rangle| = \int_\Omega |s|d|\langle \nu_f, x^*\rangle|.$$

Así $s \in L^1_w(\nu_f)$ si, y sólo si, $fs \in L^1_w(\nu)$. Ahora sea $g \in L^0(\nu_f)$. Tomemos $\{s_n\} \subset S(\mathcal{R}^{loc})$ tal que $0 \leq s_n \uparrow |g|$. Por el teorema de la convergencia monótona y lo anterior, para $x^* \in X$,

$$\int_\Omega |fg|d|\langle \nu, x^*\rangle| = \lim_{n\to\infty} \int_\Omega |fs_n|d|\langle \nu, x^*\rangle| = \lim_{n\to\infty} \int_\Omega |s_n|d|\langle \nu_f, x^*\rangle| = \int_\Omega |g|d|\langle \nu_f, x^*\rangle|.$$

Se sigue que $g \in L^1_w(\nu_f)$ si, y sólo si, $fg \in L^1_w(\nu)$ y

$$\|g\|_{\nu_f} = \lim_{n\to\infty} \|s_n\|_{\nu_f} = \lim_{n\to\infty} \|fs_n\|_\nu = \|fg\|_\nu, \tag{2.2.2}$$

Lo cual indica que M_f es una isometría lineal.

ii) Supongamos que $g \in L^1(\nu_f)$. Si $s = \displaystyle\sum_{j=1}^{n} b_j\chi_{B_j} \in S(\mathcal{R})$, claramente $fs \in L^1(\nu)$ y

$$\int_A s d\nu_f = \sum_{j=1}^{n} b_j \nu_f(A \cap B_j) = \sum_{j=1}^{n} b_j \int_A f\chi_{B_j} d\nu = \int_A fs d\nu,\ \forall\ A \in \mathcal{R}^{loc}. \tag{2.2.3}$$

Ahora sea $\{s_n\} \subset S(\mathcal{R})$ tal que $s_n \to g$ en $L^1(\nu_f)$ y ν_f-c.t.p. De la observación hecha al inicio, $fs_n \to fg$ ν-c.t.p. Por otra parte ya que $s_n \in L^1_w(\nu_f)$, $\forall\ n \in \mathbb{N}$, de (2.2.2) obtenemos que $\{fs_n\}$ es una sucesión de Cauchy en $L^1(\nu)$. Tomemos $h \in L^1(\nu)$ tal que $fs_n \to h$ en $L^1(\nu)$ y $\{s_{n_k}\}$ subsucesión de $\{s_n\}$ tal que $fs_{n_k} \to h$ ν-c.t.p. Así $h = fg$ ν-c.t.p., se sigue que $fg \in L^1(\nu)$ y $fs_n \to fg$ en $L^1(\nu)$.

Ahora supongamos que $fg \in L^1(\nu)$. Observemos que $f|g| \in L^1(\nu)$. Consideremos $\{B_n\} \subset \mathcal{R}$ tal que $\text{sop} fg = \displaystyle\bigcup_{n=1}^{\infty} B_n$, ν-c.t.p. Tomemos $\{\varphi_n\} \subset S(\mathcal{R}^{loc})$ tal que $0 \leq \varphi_n \uparrow |g|$

y definamos $s_n := \varphi_n \chi_{B_n}$. Así, $fs_n \to f|g|$, ν-c.t.p. Del teorema de la convergencia dominada y de (2.2.3), para cada $A \in \mathcal{R}^{loc}$,

$$\int_A |g| f d\nu = \lim_{n\to\infty} \int_A s_n f d\nu = \lim_{n\to\infty} \int_A s_n d\nu_f \in X.$$

Por el teorema 1.4.13 concluimos que $|g| \in L^1(\nu_f)$, luego $g \in L^1(\nu_f)$.

Puesto que las normas de $L^1_w(\nu_f)$ y $L^1_w(\nu)$ son las mismas que de $L^1(\nu_f)$ y $L^1(\nu)$ respectivamente, resulta que la restricción de M_f a $L^1(\nu_f)$ sigue siendo una isometría lineal. Además si $\{s_n\} \subset S(\mathcal{R})$ es tal que $s_n \to g$, ν_f-c.t.p., de (2.2.3) se sigue

$$I_\nu \circ M_f(g) = \int_A fg d\nu = \lim_{n\to\infty} \int_A f s_n d\nu = \int_A g d\nu_f = I_{\nu_f}(g). \blacksquare$$

Corolario 2.2.2 Sean $f, h \in L^1_{loc}(\nu)$. Si $|f| = |h|$ ν-c.t.p., entonces

i) $L^1_w(\nu_f) \equiv L^1_w(\nu_h)$ y $M_f(L^1_w(\nu_f)) = M_h(L^1_w(\nu_f))$

ii) $L^1(\nu_f) \equiv L^1(\nu_h)$ y $M_f(L^1(\nu_f)) = M_h(L^1(\nu_f))$.

Demostración. Sea $g \in L^0(\mathcal{R}^{loc})$. Dado que $|f| = |h|$ ν-c.t.p., entonces $|gf| = |gh|$ ν-c.t.p. Lo que implica que $gf \in L^1_w(\nu)$ si, y sólo si, $gh \in L^1_w(\nu)$ y $gf \in L^1(\nu)$ si, y sólo si, $gh \in L^1(\nu)$. Del teorema anterior se sigue que $L^1_w(\nu_f) \equiv L^1_w(\nu_h)$ y $L^1(\nu_f) \equiv L^1(\nu_h)$.

Para establecer las últimas igualdades probaremos sólo una contención, para las demás se procede análogamente. Así tomemos $\tilde{f}, \tilde{h} \in L^0(\nu)$ tales que $|\tilde{f}| = |\tilde{h}| = 1$, $f = |f|\tilde{f}$ y $|h| = h\tilde{h}$. Por la reticularidad de $L^1(\nu_f)$, $\tilde{f}g, \tilde{h}\tilde{f}g \in L^1(\nu_f)$, $\forall\ g \in L^1(\nu_f)$. Luego,

$$fg = |f|\tilde{f}g = h\tilde{h}\tilde{f}g,\ \forall\ g \in L^1(\nu_f).$$

Esto nos indica que $M_f(L^1(\nu_f)) \subset M_h(L^1(\nu_f))$. $\blacksquare$

Ya que M_f es una isometría lineal, obtenemos que $M_f(L^1(\nu_f))$ y $M_f(L^1_w(\nu_f))$ son subespacios de Banach de $L^1(\nu)$ y $L^1_w(\nu)$, respectivamente. A continuación estudiamos algunas propiedades reticulares de estos subespacios y de M_f.

Recordemos que un ideal Y de un retículo de Banach Z, es una *banda*, si para cualquier conjunto $D \subset Y_\mathbb{R}$ tal que existe $g = \sup D \in Z_\mathbb{R}$, entonces $g \in Y_\mathbb{R}$.

Proposición 2.2.3 Si $f \in L^1_{loc}(\nu)$, entonces

i) La isometría $M_{|f|} : L^1_w(\nu_f) \to L^1_w(\nu)$ es reticular y $M_f(L^1_w(\nu_f)) \subset L^1_w(\nu)$ es una banda. Luego, $M_f(L^1_w(\nu_f))$ es un $|\nu|$-e.f.B. con la norma $\|\cdot\|_\nu$.

ii) La isometría $M_{|f|} : L^1(\nu_f) \to L^1(\nu)$ es reticular y $M_f(L^1(\nu_f)) \subset L^1(\nu)$ es una banda. Luego, $M_f(L^1(\nu_f))$ es un $|\nu|$-e.f.B. con la norma $\|\cdot\|_\nu$.

Demostración. i) Tomemos $g, h \in (L^1_w(\nu_f))_{\mathbb{R}}$. Puesto que $|f| \geq 0$, se obtiene que $\sup\{|f|g, |f|h\} = |f| \sup\{g, h\}$, así $M_{|f|}$ es un homomorfismo reticular. Del teorema 2.2.1 se sigue que $M_{|f|}$ es una isometría reticular. Así $M_{|f|}(L^1_w(\nu_f))$ es un retículo de Banach. Por el corolario anterior $M_f(L^1_w(\nu_f))$ es un retículo de Banach.

Sean $g \in L^1_w(\nu_f)$ y $h \in L^0(\nu)$ tales que $|h| \leq |fg|$, ν-c.t.p. Definamos $\hat{g} := \frac{h}{f}\chi_{\text{sop}h}$, entonces $|\hat{g}| \leq |g|$. Así $\hat{g} \in L^1_w(\nu_f)$ y $h = \hat{g}f \in M_f(L^1_w(\nu_f))$. Por lo tanto $M_f(L^1_w(\nu_f))$ es un ideal de $L^0(\nu)$. De aquí se sigue que $M_f(L^1_w(\nu_f))$ es un $|\nu|$-e.f.B.

Finalmente probemos que $M_f(L^1_w(\nu_f))$ es una banda. Sea $D \subset M_f(L^1_w(\nu_f))_{\mathbb{R}}$ tal que $\widehat{h} = \sup D \in L^1_w(\nu)_{\mathbb{R}}$. Definamos $\widehat{g} := \dfrac{\widehat{h}}{|f|}\chi_{\text{sop}f} \in L^0(\nu)$. Así $|f|\widehat{g} = \widehat{h}\chi_{\text{sop}f} \in L^1_w(\nu)_{\mathbb{R}}$. Del teorema 2.2.1 obtenemos que $\widehat{g} \in L^1_w(\nu_f)$. Por otro lado como cada $h \in D$ se expresa como $h = |f|g$ para alguna $g \in L^1_w(\nu_f)_{\mathbb{R}}$ resulta que sop$h \subset$ sop$f$. Luego, $h \leq |f|\widehat{g} \leq \widehat{h}$, $\forall\, h \in D$. Entonces $\widehat{h} = |f|\widehat{g} \in M_{|f|}(L^1_w(\nu_f))_{\mathbb{R}}$. Por el corolario anterior $\widehat{h} \in M_f(L^1_w(\nu_f))_{\mathbb{R}}$.

ii) Se prueba analogamente. ■

A continuación estableceremos que la propiedad de Fatou es una propiedad que $L^1_w(\nu)$ transmite al espacio $L^1_w(\nu_f)$.

Proposición 2.2.4 Si $L^1_w(\nu)$ tiene la propiedad de Fatou, entonces $L^1_w(\nu_f)$ tiene la propiedad de Fatou, $\forall\, f \in L^1_{loc}(\nu)$.

Demostración. Supongamos que $L^1_w(\nu)$ tiene la propiedad de Fatou y que $f \neq 0$. Notemos que $\Omega \backslash \text{sop}f \in \mathcal{N}_0(\nu_f)$. Sea $\{g_\tau\} \subset L^1_w(\nu_f)$ tal que $0 \leq g_\tau \uparrow$ y $\sup\limits_\tau \|g_\tau\|_{\nu_f} < \infty$. Entonces $g_\tau|f| \in M_f(L^1_w(\nu_f)) \subset L^1_w(\nu)$, $\forall\, \tau$, $0 \leq g_\tau|f| \uparrow$ y $\sup\limits_\tau \|g_\tau f\|_\nu < \infty$. Puesto que $L^1_w(\nu)$ tiene la propiedad de Fatou, existe $h \in L^1_w(\nu)$ tal que $h = \sup_\tau g_\tau|f|$ y $\|h\|_\nu = \sup\limits_\tau \|g_\tau f\|_\nu$. Ya que $M_f(L^1_w(\nu_f))$ es una banda, entonces $h \in M_f(L^1_w(\nu_f))$. Así existe $g \in L^1_w(\nu_f)$ tal que $h = |f|g$. Además como $g_\tau|f| \leq h$, se sigue que $g_\tau \leq g$ ν_f-c.t.p. $\forall\, \tau$. Supongamos que existe $g' \in L^1_w(\nu_f)$ tal que $g_\tau \leq g'$ ν_f-c.t.p. $\forall\, \tau$. Entonces $h \leq g'|f|$. Luego $g \leq g'$ ν_f-c.t.p. Por lo tanto $g = \sup\limits_\tau g_\tau$. Finalmente $\|g\|_{\nu_f} = \|h\|_\nu = \sup\limits_\tau \|g_\tau f\|_\nu = \sup\limits_\tau \|g_\tau\|_{\nu_f}$. ■

Por el teorema 2.2.1, el espacio $L^1(\nu_f)$ es isométricamente isomorfo a un subespacio cerrado de $L^1(\nu)$. Así $L^1(\nu_f)$ tiene todas aquellas propiedades que $L^1(\nu)$ hereda a sus subespacios cerrados. Una de estás propiedades es la de ser débilmente secuencialmente completo. Recordemos que un espacio de Banach X es *débilmente secuencialmente completo* si para cada sucesión $\{x_n\} \subset X$ tal que la sucesión $\{\varphi(x_n)\} \subset \mathbb{K}$ es de Cauchy, $\forall\ \varphi \in X^*$, entonces existe $x \in X$ tal que para cada $\varphi \in X^*$, $\{\varphi(x_n)\}$ converge a $\varphi(x)$.

Por otra parte, el operador I_{ν_f} es la composición del operador I_ν con un operador acotado. Luego, las propiedades de I_{ν_f} están directamente relacionadas con las propiedades de I_ν. A continuación señalamos algunos casos de lo mencionado.

Corolario 2.2.5 Sea $f \in L^1_{loc}(\nu)$.

i) Si $L^1(\nu)$ es reflexivo, entonces $L^1(\nu_f)$ es reflexivo.

ii) Si $L^1(\nu)$ es separable, entonces $L^1(\nu_f)$ es separable.

iii) Si $L^1(\nu)$ es débilmente secuencialmente completo, entonces $L^1(\nu_f)$ también lo es.

iv) Si I_ν es un operador compacto, entonces I_{ν_f} es un operador compacto.

Proposición 2.2.6 Sea $f \in L^1_{loc}(\nu)$. Son equivalentes:

i) $f \neq 0$ ν-c.t.p.

ii) $\mathcal{N}_0(\nu) = \mathcal{N}_0(\nu_f)$.

iii) La isometría lineal $M_f : L^1_w(\nu_f) \to L^1_w(\nu)$ es sobreyectiva.

iv) La isometría lineal $M_f : L^1(\nu_f) \to L^1(\nu)$ es sobreyectiva.

Demostración. i) $\Rightarrow$ ii) Como hemos observado, se cumple $\mathcal{N}_0(\nu) \subset \mathcal{N}_0(\nu_f)$. Resta verificar que $\mathcal{N}_0(\nu_f) \subset \mathcal{N}_0(\nu)$. Sea $A \in \mathcal{N}_0(\nu_f)$. Entonces del teorema 1.4.14 $\|f\chi_A\|_\nu = 0$, luego $f\chi_A = 0$ ν-c.t.p. Dado que $f \neq 0$ ν-c.t.p. se sigue que $A \in \mathcal{N}_0(\nu)$.

ii) $\Rightarrow$ i) Estableceremos la contrapositiva. Así, supongamos que existe $A \in \mathcal{R}^{loc}$ tal que $A \notin \mathcal{N}_0(\nu)$ y $f\chi_A = 0$. Entonces $f\chi_A \in L^1_w(\nu)$ y $\|\nu_f\|(A) = \|f\chi_A\|_\nu = 0$. Luego $\mathcal{N}_0(\nu) \neq \mathcal{N}_0(\nu_f)$.

i) $\Rightarrow$ iii) Sea $h \in L^1_w(\nu)$, entonces $\dfrac{h}{f} \in L^0(\mathcal{R}^{loc})$. Por lo que ya se probó $\mathcal{N}_0(\nu) = \mathcal{N}_0(\nu_f)$, se sigue que $\dfrac{h}{f} \in L^0(\nu) = L^0(\nu_f)$. Además $\dfrac{h}{f}f = h \in L^1_w(\nu)$. Por el teorema 2.2.1 i) esto implica que $\dfrac{h}{f} \in L^1_w(\nu_f)$ y $M_f\left(\dfrac{h}{f}\right) = h$. Por lo tanto M_f es sobreyectiva.

iii) $\Rightarrow$ iv) Sea $h \in L^1(\nu)$. Ya que $h \in L^1_w(\nu)$ y $M_f : L^1_w(\nu_f) \to L^1_w(\nu)$ es sobreyectiva, tomemos $g \in L^1_w(\nu_f)$ tal que $fg = h$. Entonces por el teorema 2.2.1 ii) $g \in L^1(\nu_f)$. Luego, se obtiene la conclusión.

iv) $\Rightarrow$ ii) Puesto que siempre se cumple $\mathcal{N}_0(\nu) \subset \mathcal{N}_0(\nu_f)$ resta verificar la otra contención. Supongamos que existe $A \in \mathcal{N}_0(\nu_f)$ tal que $A \notin \mathcal{N}_0(\nu)$. Tomemos $B \in \mathcal{R}_A$ tal que $\|\nu\|(B) > 0$. Como $\chi_B \in L^1(\nu) \subset L^1_w(\nu)$ y M_f es sobreyectiva existe $g \in L^1(\nu_f) \subset L^1_w(\nu_f)$ tal que $fg = \chi_B$. Así $f(x) \neq 0$ para casi toda $x \in B$. Por otro lado, como $B \in \mathcal{N}_0(\nu_f)$ resulta que $f\chi_B = 0$, ν-c.t.p. Lo que es una contradicción. ■

Ejemplo 2.2.7 Sea $A \in \mathcal{R}^{loc}$. Entonces $\chi_A \in L^1_{loc}(\nu)$ y

$$\nu_{\chi_A}(B) = \nu(A \cap B), \ \forall \ B \in \mathcal{R}.$$

Además $L^1(\nu_{\chi_A}) = \{g \in L^0(\nu) : g\chi_A \in L^1(\nu)\}$. Notemos que es posible que $\chi_A \notin L^1(\nu)$, en este caso $L^1(\nu) \subsetneq L^1_{loc}(\nu)$.

2.3. Caracterizaciones en términos de $\mathcal{R}$

Las definiciones de los espacios de funciones escalarmente integrables y ν-integrables están dadas en términos de la σ-álgebra $\mathcal{R}^{loc}$. En esta sección veremos cómo se pueden expresar considerando sólo el δ-anillo $\mathcal{R}$.

Proposición 2.3.1 Sea $f : \Omega \to \mathbb{K}$. Entonces:

i) $f \in L^1_w(\nu)$ si, y sólo si, para cada $B \in \mathcal{R}$, $f\chi_B \in L^1_w(\nu)$ y $\sup_{B\in\mathcal{R}} \|f\chi_B\|_\nu < \infty$. En este caso $\|f\|_\nu = \sup_{B\in\mathcal{R}} \|f\chi_B\|_\nu$.

ii) $f \in L^1(\nu)$ si, y sólo si, $f \in L^1_{loc}(\nu)$ y su medida vectorial asociada $\nu_f : \mathcal{R} \to X$ es fuertemente aditiva.

Demostración. i) Supongamos primero que $f \in L^1_w(\nu)$. Puesto que $L^1_w(\nu)$ es un retículo de Banach resulta que $f\chi_B \in L^1_w(\nu)$ y $\|f\chi_B\|_\nu \leq \|f\|_\nu$, $\forall \ B \in \mathcal{R}$. Luego,

$$\sup_{B\in\mathcal{R}} \|f\chi_B\|_\nu \leq \|f\|_\nu < \infty.$$

Ahora supongamos que $f\chi_B \in L^1_w(\nu)$, $\forall \ B \in \mathcal{R}$ y que $M := \sup_{B\in\mathcal{R}} \|f\chi_B\|_\nu < \infty$. Notemos primero que, por (2.1.1), $f \in L^0(\mathcal{R}^{loc})$. Sea $x^* \in B_{X^*}$, entonces

$$\sup_{B\in\mathcal{R}} \int_B |f| d|\langle x^*, \nu\rangle| \leq M.$$

Por la proposición 1.3.12, $f \in L^1(|\langle x^*, \nu\rangle|)$, $\forall\, x^* \in B_{X^*}$. Luego $f \in L^1_w(\nu)$ y $\|f\|_\nu \leq M$.

ii) Supongamos que $f \in L^1(\nu)$. Así $f \in L^1_{loc}(\nu)$, además ν_f es la restricción a $\mathcal{R}$ de la medida vectorial $\tilde{\nu}_f : \mathcal{R}^{loc} \to X$, definida en (1.4.3) por lo que ν_f es fuertemente aditiva.

Ahora supongamos que $f \in L^1_{loc}(\nu)$ y ν_f es fuertemente aditiva. Del teorema 1.4.16 obtenemos que $\chi_\Omega \in L^1(\nu_f)$. Por el teorema 2.2.1, $f = f\chi_\Omega \in L^1(\nu)$. ■

2.4. Comportamiento respecto de otro δ-anillo

Dada una función $f \in L^1_{loc}(\nu)$, hemos estudiado la medida ν_f y el espacio $L^1(\nu_f)$. Si ahora suponemos que $f \in L^1(\nu)$, entonces por el teorema 1.4.14, a f se le asocia también la medida $\tilde{\nu}_f$ que está definida en $\mathcal{R}^{loc}$. Estamos interesados en analizar la relación entre el espacio $L^1(\nu_f)$ y el espacio $L^1(\tilde{\nu}_f)$. Con este objetivo veamos un caso más general.

Supongamos que existen otro δ-anillo $\widehat{\mathcal{R}}$ en Ω tal que $\mathcal{R} \subset \widehat{\mathcal{R}}$ y $\mathcal{R}^{loc} = \widehat{\mathcal{R}}^{loc}$ y otra medida vectorial $\widehat{\nu} : \widehat{\mathcal{R}} \to X$ tal que ν es la restricción de $\widehat{\nu}$ a $\mathcal{R}$, esto es $\nu(B) = \widehat{\nu}(B)$, $\forall\, B \in \mathcal{R}$. Teniendo presente la proposición 1.3.20 i) resulta que $|\nu| \leq |\widehat{\nu}|$. Luego,

$$\mathcal{N}_0(\widehat{\nu}) \subset \mathcal{N}_0(\nu).$$

Similarmente

$$|\langle \nu, x^*\rangle| \leq |\langle \widehat{\nu}, x^*\rangle|, \;\forall\, x^* \in X^*.$$

El siguiente ejemplo nos muestra que es posible que $\mathcal{N}_0(\widehat{\nu}) \subsetneq \mathcal{N}_0(\nu)$.

Ejemplo 2.4.1 Sean $\Omega = \mathbb{N}_0 := \mathbb{N} \cup \{0\}$, $\widehat{\mathcal{R}} = 2^\Omega$. Definimos $\widehat{\nu} : \widehat{\mathcal{R}} \to \mathbb{R}$ como

$$\widehat{\nu}(A) := \sum_{n \in A} \frac{1}{2^n},$$

Entonces $\widehat{\nu}$ es una medida positiva tal que $\mathcal{N}_0(\widehat{\nu}) = \{\emptyset\}$. Consideremos $\mathcal{R} := 2^{\mathbb{N}}$. Así $\mathcal{R}$ es un δ-anillo en Ω tal que $\mathcal{R} \subset \widehat{\mathcal{R}}$ y $\mathcal{R}^{loc} = \widehat{\mathcal{R}}^{loc} = \widehat{\mathcal{R}}$. Definamos $\nu : \mathcal{R} \to \mathbb{R}$ como $\nu(B) := \widehat{\nu}(B)$. Resulta que $\mathcal{N}_0(\nu) = \{\emptyset, \{0\}\}$. Luego, $\mathcal{N}_0(\widehat{\nu}) \subsetneq \mathcal{N}_0(\nu)$.

Supongamos que $\mathcal{N}_0(\widehat{\nu}) \subsetneq \mathcal{N}_0(\nu)$. Tomemos $A \in \mathcal{R}^{loc}$ tal que $A \in \mathcal{N}_0(\nu)$ y $A \notin \mathcal{N}_0(\widehat{\nu})$. Entonces $\chi_A = 0$, ν-c.t.p. sin embargo $\chi_A \neq 0$, $\widehat{\nu}$-c.t.p. Luego, $L^0(\nu) \neq L^0(\widehat{\nu})$.

Proposición 2.4.2 Si $\mathcal{N}_0(\widehat{\nu}) = \mathcal{N}_0(\nu)$, entonces $L^1(\widehat{\nu}) = L^1(\nu)$ con normas equivalentes y, para cada $A \in \mathcal{R}^{loc}$

$$\int_A f d\widehat{\nu} = \int_A f d\nu, \ \forall \ f \in L^1(\widehat{\nu}). \tag{2.4.1}$$

Demostración. Primero observemos que, como $\mathcal{N}_0(\widehat{\nu}) = \mathcal{N}_0(\nu)$ entonces los espacios $L^1_w(\nu)$, $L^1_w(\widehat{\nu})$, $L^1(\nu)$ y $L^1(\widehat{\nu})$ son subespacios de $L^0(\nu)$. Fijemos $A \in \mathcal{R}^{loc}$ y $x^* \in X^*$. Ya que $|\langle \nu, x^* \rangle| \leq |\langle \widehat{\nu}, x^* \rangle|$ resulta que

$$\int_A |f| d|\langle \nu, x^* \rangle| \leq \int_A |f| d|\langle \widehat{\nu}, x^* \rangle|, \ \forall \ f \in L^0(\mathcal{R}^{loc}),$$

esto nos indica que $\|f\|_\nu \leq \|f\|_{\widehat{\nu}}$, $\forall \ f \in L^0(\mathcal{R}^{loc})$. Luego, $L^1_w(\widehat{\nu}) \subset L^1_w(\nu)$.

Consideremos ahora $f \in L^1(\widehat{\nu})$ y $B \in \mathcal{R}$, entonces

$$\left\langle \int_B f d\widehat{\nu}, x^* \right\rangle = \int_B f d\langle \widehat{\nu}, x^* \rangle = \int_\Omega f \chi_B d\langle \nu, x^* \rangle.$$

Por lo tanto $f\chi_B \in L^1(\nu)$ con $\int_B f d\nu = \int_B f d\widehat{\nu}$. Luego, $f \in L^1_{loc}(\nu)$ y

$$\nu_f(B) := \int_B f d\nu = \int_B f d\widehat{\nu} = \widehat{\nu}_f(B), \ \forall \ B \in \mathcal{R}.$$

Puesto que $f \in L^1(\widehat{\nu})$, resulta que $\widehat{\nu}_f$ es una medida vectorial fuertemente aditiva. Luego, ν_f es fuertemente aditiva. Por el lema 2.3.1, $f \in L^1(\nu)$.

Notemos que para cada $s = \sum_{j=1}^n b_j \chi_{B_j} \in S(\mathcal{R}) \subset S(\widehat{\mathcal{R}})$ y cada $A \in \mathcal{R}^{loc}$,

$$\int_A s d\widehat{\nu} = \sum_{j=1}^n b_j \widehat{\nu}(A \cap B_j) = \sum_{j=1}^n b_j \nu(A \cap B_j) = \int_A s d\nu. \tag{2.4.2}$$

Ahora consideremos $f \in L^1(\nu)$ y tomemos $\{s_n\} \subset S(\mathcal{R})^+$ tal que $s_n \to |f|$ en $L^1(\nu)$ y $s_n \uparrow |f|$ ν-c.t.p. Así, $s_n \uparrow |f|$ $\widehat{\nu}$-c.t.p. Por (2.4.2), $\left\{ \int_A s_n d\widehat{\nu} \right\}$ converge en X. Ya que $S(\mathcal{R}) \subset S(\widehat{\mathcal{R}})$, del teorema 1.4.13 obtenemos que $|f| \in L^1(\widehat{\nu})$. Luego $f \in L^1(\widehat{\nu})$.

La equivalencia de las normas es consecuencia de que tanto $L^1(\nu)$ como $L^1(\widehat{\nu})$ son retículos de Banach y la inclusión de uno en el otro es un operador positivo.

Resta verificar que se cumple (2.4.1). Consideremos $A \in \mathcal{R}^{loc}$ y $f \in L^1(\widehat{\nu})$. Como $L^1(\widehat{\nu}) = L^1(\nu)$, tomemos $\{s_n\} \subset S(\mathcal{R})$ tal que $s_n \to f$ en $L^1(\nu)$, de la equivalencia de las normas se sigue que $s_n \to f$ en $L^1(\widehat{\nu})$. Ahora de la continuidad de los operadores I_ν e $I_{\widehat{\nu}}$ y de (2.4.2), obtenemos

$$\int_A f d\widehat{\nu} = \lim_{n\to\infty} \int_A s_n d\widehat{\nu} = \lim_{n\to\infty} \int_A s_n d\nu = \int_A f d\nu. \blacksquare$$

Corolario 2.4.3 Si $\mathcal{N}_0(\langle \widehat{\nu}, x^* \rangle) = \mathcal{N}_0(\langle \nu, x^* \rangle)$, $\forall\ x^* \in X^*$, entonces $L^1(\widehat{\nu}) = L^1(\nu)$ y $L^1_w(\widehat{\nu}) = L^1_w(\nu)$ con normas equivalentes. En particular, si $|\langle \nu, x^* \rangle| = |\langle \widehat{\nu}, x^* \rangle|$, $\forall\ x^* \in X^*$, entonces $L^1(\widehat{\nu}) \equiv L^1(\nu)$ y $L^1_w(\widehat{\nu}) \equiv L^1_w(\nu)$.

Demostración. Supongamos que $\mathcal{N}_0(\langle \widehat{\nu}, x^* \rangle) = \mathcal{N}_0(\langle \nu, x^* \rangle)$, $\forall\ x^* \in X^*$. Esto implica que $\mathcal{N}_0(\widehat{\nu}) = \mathcal{N}_0(\nu)$, por la proposición anterior $L^1(\widehat{\nu}) = L^1(\nu)$.

Ahora notemos que $\langle \nu, x^* \rangle$ es la restricción a $\mathcal{R}$ de $\langle \widehat{\nu}, x^* \rangle$. Luego, aplicando la proposición anterior a cada una de las medidas $\langle \nu, x^* \rangle$, resulta que $L^1(\langle \widehat{\nu}, x^* \rangle) = L^1(\langle \nu, x^* \rangle)$, $\forall\ x^* \in X^*$. Así

$$L^1_w(\widehat{\nu}) = \bigcap_{x^* \in X^*} L^1(\langle \widehat{\nu}, x^* \rangle) = \bigcap_{x^* \in X^*} L^1(\langle \nu, x^* \rangle) = L^1_w(\nu).$$

Para la última afirmación resta verificar la igualdad de las normas $\|\cdot\|_{\widehat{\nu}}$ y $\|\cdot\|_\nu$, lo que se sigue de la hipótesis. $\blacksquare$

Corolario 2.4.4 Sean Σ una σ-álgebra en Ω y $\widehat{\nu} : \Sigma \to X$ una medida vectorial. Supongamos que $\mathcal{R} \subset \Sigma$ es un δ-anillo tal que $\mathcal{R}^{loc} = \Sigma$ y sea $\nu : \mathcal{R} \to X$ la restricción a $\mathcal{R}$ de $\widehat{\nu}$. Entonces:

i) Si $\mathcal{N}_0(\widehat{\nu}) = \mathcal{N}_0(\nu)$, entonces $L^1(\widehat{\nu}) = L^1(\nu)$.

ii) Si $\mathcal{N}_0(\langle \widehat{\nu}, x^* \rangle) = \mathcal{N}_0(\langle \nu, x^* \rangle)$, $\forall\ x^* \in X^*$, entonces $L^1(\widehat{\nu}) = L^1(\nu)$ y $L^1_w(\widehat{\nu}) = L^1_w(\nu)$.

Ejemplo 2.4.5 Sabemos que $\chi_B \in L^1(\nu)$, $\forall\ B \in \mathcal{R}$. Sin embargo la colección de los conjuntos $A \in \mathcal{R}^{loc}$ tales que $\chi_A \in L^1(\nu)$ puede ser más grande. En [32, Def. 5.1], P.R. Masani y H. Niemi denotan esta colección por

$$\overline{\mathcal{R}} := \{A \in \mathcal{R}^{loc} : \chi_A \in L^1(\nu)\}$$

y prueban que es un δ-anillo. Asimismo definen la medida vectorial $\overline{\nu} : \overline{\mathcal{R}} \to X$

$$\overline{\nu}(A) := \int_\Omega \chi_A d\nu,\ \forall\ A \in \overline{\mathcal{R}}. \tag{2.4.3}$$

Entonces esta medida es una extensión de la medida original $\nu : \mathcal{R} \to X$ y $\mathcal{R}^{loc} = \overline{\mathcal{R}}^{loc}$ [32, Lemma 5.3]. La cuestión natural es determinar que los espacios de funciones integrables respecto de estas dos medidas son iguales y así lo establecen en [32, Thm. 5.8]. También prueban que $|\langle \overline{\nu}, x^* \rangle| = |\langle \nu, x^* \rangle|$, $\forall\ x^* \in X^*$. El resultado antes mencionado también se puede obtener directamente del corolario 2.4.3 y la proposición 2.4.2:

Corolario 2.4.6 Sean $\overline{\mathcal{R}} := \{A \in \mathcal{R}^{loc} : \chi_A \in L^1(\nu)\}$ y $\overline{\nu} : \overline{\mathcal{R}} \to X$ la medida vectorial definida en (2.4.3). Entonces $L^1_w(\overline{\nu}) \equiv L^1_w(\nu)$ y $L^1(\overline{\nu}) \equiv L^1(\nu)$.

A continuación proporcionamos condiciones para que se cumpla la igualdad de las colecciones de los subconjuntos nulos. Antes observemos lo siguiente.

Observación 2.4.7 Sea $B \in \mathcal{R}$. Ya que $\widehat{\mathcal{R}} \subset \mathcal{R}^{loc}$, resulta que $A \cap B \in \mathcal{R}$, $\forall\ A \in \widehat{\mathcal{R}}$. Luego, $A = A \cap B \in \mathcal{R}_B$, $\forall\ A \in \widehat{\mathcal{R}}_B$. Por lo tanto $\widehat{\mathcal{R}}_B = \mathcal{R}_B$, $\forall\ B \in \mathcal{R}$.

Lema 2.4.8 Sean $\mathcal{R} \subset \widehat{\mathcal{R}}$ un δ-anillo en Ω tal que $\mathcal{R}^{loc} = \widehat{\mathcal{R}}^{loc}$ y $\widehat{\nu} : \widehat{\mathcal{R}} \to X$ tal que ν es la restricción de $\widehat{\nu}$ a $\mathcal{R}$.

i) $\mathcal{N}_0(\widehat{\nu}) = \mathcal{N}_0(\nu)$ si, y sólo si, para cada $A \in \mathcal{R}^{loc} \setminus \mathcal{N}_0(\widehat{\nu})$ existe $B \in \mathcal{R}_A$ tal que $B \notin \mathcal{N}_0(\widehat{\nu})$.

ii) Si existen $\{B_n\} \subset \mathcal{R}$ y $N \in \mathcal{N}_0(\widehat{\nu})$ tales que $\Omega = \bigcup_{n=1}^{\infty} B_n \cup N$, entonces para cada $x^* \in X^*$, $|\langle \nu, x^* \rangle| = |\langle \widehat{\nu}, x^* \rangle|$, además $|\nu| = |\widehat{\nu}|$. Luego $\mathcal{N}_0(\widehat{\nu}) = \mathcal{N}_0(\nu)$.

Demostración. i) Supongamos que $\mathcal{N}_0(\widehat{\nu}) = \mathcal{N}_0(\nu)$. Tomemos $A \in \mathcal{R}^{loc} \setminus \mathcal{N}_0(\widehat{\mathcal{R}})$. Así $\|\nu\|(A) \neq 0$. Luego, existe $B \in \mathcal{R}_A$ tal que $\widehat{\nu}(B) = \nu(B) \neq 0$.

Para establecer la segunda implicación resta verificar que se cumple $\mathcal{N}_0(\nu) \subset \mathcal{N}_0(\widehat{\nu})$. Para esto probaremos que $\mathcal{R}^{loc} \setminus \mathcal{N}_0(\widehat{\nu}) \subset \mathcal{R}^{loc} \setminus \mathcal{N}_0(\nu)$. Sean $A \in \mathcal{R}^{loc} \setminus \mathcal{N}_0(\widehat{\nu})$ y $B \in \mathcal{R}_A$ tal que $B \notin \mathcal{N}_0(\widehat{\nu})$. Entonces $\widehat{\nu}(C) \neq 0$ para algún $C \in \widehat{\mathcal{R}}_B = \mathcal{R}_B$. Pero $\nu(C) = \widehat{\nu}(C)$, así $A \notin \mathcal{N}_0(\nu)$.

ii) De la definición de la variación y de que $\widehat{\mathcal{R}}_B = \mathcal{R}_B$ se sigue que si $B \in \mathcal{R}$, entonces $|\widehat{\nu}|(B) = |\nu|(B)$.

Sean $\{B_n\} \subset \mathcal{R}$ y $N \in \mathcal{N}_0(\widehat{\nu})$ tales que $\Omega = \bigcup_{n=1}^{\infty} B_n \cup N$ y tomemos $A \in \mathcal{R}^{loc}$. Así, $A \cap B_n \in \mathcal{R}$, $\forall\ n \in \mathbb{N}$ y $A \cap N \in \mathcal{N}_0(\widehat{\nu}) \subset \mathcal{N}_0(\nu)$. Luego,

$$|\widehat{\nu}|(A) = \sum_{n=1}^{\infty} |\widehat{\nu}|(A \cap B_n) = \sum_{n=1}^{\infty} |\nu|(A \cap B_n) = |\nu|(A).$$

Por lo tanto $|\widehat{\nu}| = |\nu|$. Similarmente se prueba que $|\langle \nu, x^* \rangle| = |\langle \widehat{\nu}, x^* \rangle|$, $\forall\ x^* \in X^*$. ■

Observación 2.4.9 Bajo el contexto en el que estamos trabajando, J. M. Calabuig, O. Delgado y E. A. Sánchez Pérez consideraron en [8] la siguiente condición sobre la medida $\widehat{\nu}$. Sea $x^* \in X^*$.

$$\text{Si } C \in \widehat{\mathcal{R}} \text{ es tal que } \sup_{B \in \mathcal{R}_C} |\langle \widehat{\nu}, x^* \rangle(B)| = 0, \text{ entonces } \langle \widehat{\nu}, x^* \rangle(C) = 0. \tag{2.4.4}$$

Ahora veamos que esta condición es equivalente a que $\mathcal{N}_0(|\langle \widehat{\nu}, x^* \rangle|) = \mathcal{N}_0(|\langle \nu, x^* \rangle|)$. Sea $x^* \in X^*$. Supongamos que $\mathcal{N}_0(|\langle \widehat{\nu}, x^* \rangle|) = \mathcal{N}_0(|\langle \nu, x^* \rangle|)$. Tomemos $C \in \widehat{\mathcal{R}}$ tal que $\sup_{B \in \mathcal{R}_C} |\langle \widehat{\nu}, x^* \rangle(B)| = 0$. Puesto que ν es la restricción de $\widehat{\nu}$ a $\mathcal{R}$, obtenemos que

$$\sup_{B \in \mathcal{R}_A} |\langle \nu, x^* \rangle(B)| = \sup_{B \in \mathcal{R}_C} |\langle \widehat{\nu}, x^* \rangle(B)| = 0.$$

Lo que implica que $\langle \nu, x^* \rangle(B) = 0$, $\forall\ B \in \mathcal{R}_C$. Así $C \in \mathcal{N}_0(|\langle \nu, x^* \rangle|) = \mathcal{N}_0(|\langle \widehat{\nu}, x^* \rangle|)$. Por lo tanto $\langle \widehat{\nu}, x^* \rangle(C) = 0$.

Supongamos que se cumple (2.4.4). Probaremos que $\mathcal{N}_0(|\langle \nu, x^* \rangle|) \subset \mathcal{N}_0(|\langle \widehat{\nu}, x^* \rangle|)$. Luego, como la otra contención se tiene siempre habremos establecido la igualdad. Consideremos primero $C \in \mathcal{N}_0(|\langle \nu, x^* \rangle|)$ tal que $C \in \widehat{\mathcal{R}}$. Entonces $\langle \nu, x^* \rangle(B) = 0$, $\forall\ B \in \mathcal{R}_C$. Así,

$$\sup_{B \in \mathcal{R}_C} |\langle \widehat{\nu}, x^* \rangle(B)| = \sup_{B \in \mathcal{R}_C} |\langle \nu, x^* \rangle(B)| = 0.$$

De la hipótesis se sigue que $\langle \widehat{\nu}, x^* \rangle(C) = 0$. Como lo anterior se cumple para cualquier $C \in \widehat{\mathcal{R}}$ tal que $|\langle \nu, x^* \rangle|(C) = 0$ y $|\langle \nu, x^* \rangle|(D) = 0, \forall D \in \widehat{\mathcal{R}}_C$, resulta que $C \in \mathcal{N}_0(|\langle \widehat{\nu}, x^* \rangle|)$.

Ahora sea $A \in \mathcal{N}_0(|\langle \nu, x^* \rangle|)$. Entonces para cada $C \in \widehat{\mathcal{R}}_A$ se cumple $C \in \mathcal{N}_0(|\langle \nu, x^* \rangle|)$. De lo que ya se probó obtenemos que $C \in \mathcal{N}_0(|\langle \widehat{\nu}, x^* \rangle|)$. Luego,

$$|\langle \widehat{\nu}, x^* \rangle|(A) = \sup_{C \in \widehat{\mathcal{R}}} |\langle \widehat{\nu}, x^* \rangle|(C) = 0$$

.

En [8, Lemma 2] se establece que si la condición 2.4.4 se cumple para cada $x^* \in X^*$, entonces $L^1(\widehat{\nu}) \subset L^1(\nu)$. Ya que $\mathcal{N}_0(|\langle \widehat{\nu}, x^* \rangle|) = \mathcal{N}_0(|\langle \nu, x^* \rangle|)$, $\forall\ x^* \in X^*$ implica que $\mathcal{N}_0(\widehat{\nu}) = \mathcal{N}_0(\nu)$, este resultado se obtiene también como consecuencia de la proposición 2.4.2.

Además en [8, Lemma 3] se prueba que bajo ciertas condiciones $L^1(\widehat{\nu}) \equiv L^1(\nu)$. Bajo estas condiciones esta igualdad también se puede obtener aplicando el lema 2.4.8 iii) y la proposición 2.4.2.

2.5. Caso en que f es ν-integrable

Dada una función $f \in L^1(\nu)$ le podemos asociar las medidas vectoriales

$$\nu_f : \mathcal{R} \to X \text{ y } \tilde{\nu}_f : \mathcal{R}^{loc} \to X.$$

En esta sección estableceremos que la variación, la semivariación y la cuasivariación de ν_f y $\tilde{\nu}_f$ son iguales; también haremos unas útiles caracterizaciones de las mismas. Finalmente comprobaremos que sus respectivos espacios de funciones integrables y escalarmente integrables son iguales.

Hemos visto que dada una función $f \in L^1_{loc}(\nu)$ es posible que la medida ν_f no sea fuertemenete aditiva. Sin embargo, por la proposición 2.3.1 ii), resulta que ν_f es fuertemente aditiva siempre que $f \in L^1(\nu)$. Luego, si $f \in L^1(\nu)$, entonces ν_f es σ-finita.

Consideremos $f \in L^1(\nu)$. De los teoremas 1.4.14 y 2.1.4 resulta

$$\|\nu_f\|(A) = \|\tilde{\nu}_f\|(A), \ \forall \ A \in \mathcal{R}^{loc}.$$

Luego, de las proposiciones 1.3.21 y 1.3.24 se sigue que

$$\begin{aligned} \|\tilde{\nu}_f\|(A) &= \sup\left\{ \left\| \sum_{j=1}^{n} a_j \nu_f(A_j) \right\|_X : \{a_j\}_1^n \subset B_{\mathbb{K}}, \ \ \{A_j\} \in \pi_A \right\} \\ &= \sup\{\|\nu_f\|(B) : B \in \mathcal{R}_A\}. \end{aligned}$$

El siguiente resultado se sigue directamente de los teoremas 1.4.14 y 2.1.4.

Lema 2.5.1 Sea $f \in L^1(\nu)$. Entonces

$$|\tilde{\nu}_f|(A) = |\nu_f|(A) = \int_A |f| d|\nu| = \sup_{B \in \mathcal{R}_A} \int_B |f| d|\nu|, \ \forall \ A \in \mathcal{R}^{loc}.$$

Lema 2.5.2 Sea $f \in L^1(\nu)$. Entonces

$$|||\tilde{\nu}_f|||(A) = |||\nu_f|||(A) = \sup\{|||\nu_f|||(B) : B \in \mathcal{R}_A\}, \ \forall \ A \in \mathcal{R}^{loc}.$$

Demostración. Sea $A \in \mathcal{R}^{loc}$. Por definición

$$|||\tilde{\nu}_f|||(A) := \sup\{\|\nu_f(C)\|_X : C \in (\mathcal{R}^{loc})_A\}.$$

Puesto que $\mathcal{R}_A \subset \mathcal{R}_A^{loc}$, se sigue $|||\nu_f|||(A) \leq |||\tilde{\nu}_f|||(A)$. Ahora definamos

$$a := \sup_{B \in \mathcal{R}_A} |||\nu_f|||(B).$$

Como la cuasivariación es creciente se sigue que $a \leq |||\nu_f|||(A)$.

Estableceremos que $|||\tilde{\nu}_f|||(A) \leq |||\nu_f|||(A) \leq a$.

Consideremos $C \in (\mathcal{R}^{loc})_A$. Dado que $f \in L^1(\nu)$, por el lema 1.4.9 existen $N \in \mathcal{N}_0(\nu)$ y una sucesión creciente de conjuntos $\{B_n\} \subset \mathcal{R}$ tales que sop$f = N \cup \bigcup_{n=1}^{\infty} B_n$. Luego $f\chi_{B_n} \to f$ ν-c.t.p. Además $|f\chi_{B_n}| \in L^1(\nu)$, $\forall\ n \in \mathbb{N}$. Por el teorema de la convergencia dominada se cumple que

$$\tilde{\nu}_f(C) = \int_C f d\nu = \lim_{n\to\infty} \int_C f\chi_{B_n} d\nu = \lim_{n\to\infty} \tilde{\nu}_f(C \cap B_n).$$

Dado que $C \cap B_n \in \mathcal{R}$, $\forall\ n \in \mathbb{N}$, se sigue entonces que

$$\|\tilde{\nu}_f(C)\|_X = \lim_{n\to\infty} \|\nu_f(C \cap B_n)\|_X \leq |||\nu_f|||(A). \tag{2.5.1}$$

Al tomar el supremo sobre $C \in (\mathcal{R}^{loc})_A$ resulta que $|||\tilde{\nu}_f|||(A) \leq |||\nu_f|||(A)$.

Fijemos ahora $B \in \mathcal{R}_A$. De la igualdad en (2.5.1) y la definición de la cuasivariación y de a resulta que

$$\|\nu_f(B)\|_X = \lim_{n\to\infty} \|\nu_f(B \cap B_n)\|_X \leq a.$$

Tomando el supremo sobre $B \in \mathcal{R}_A$ obtenemos que $|||\nu_f|||(A) \leq a$. ■

Notemos que si $f \in L^1(\nu)$, entonces para cada $A \in \mathcal{R}^{loc}$ y cada $x^* \in X^*$

$$|\langle \nu_f, x^* \rangle|(A) = \int_A |f| d|\langle \nu, x^* \rangle| = |\langle \tilde{\nu}_f, x^* \rangle|(A). \tag{2.5.2}$$

Luego, de la proposición 2.4.2 y el corolario 2.4.3 se obtiene el siguiente resultado

Corolario 2.5.3 Si $f \in L^1(\nu)$, entonces $L_w^1(\tilde{\nu}_f) \equiv L_w^1(\nu_f)$ y $L^1(\tilde{\nu}_f) \equiv L^1(\nu_f)$.

Capítulo 3

Generalización de otros resultados

En este capítulo estableceremos para δ-anillos, resultados que son bien conocidos para medidas vectoriales definidas en σ-álgebras [34, Section 3.1]. En la mayoría de los casos las pruebas se hacen de manera análoga, aún así las incluimos para que el trabajo sea autocontenido. Asimismo analizaremos algunos ejemplos que ilustran el desarrollo.

3.1. Una norma equivalente en $L^1(\nu)$

Sea $\nu : \mathcal{R} \to X$ una medida vectorial definida en un δ-anillo y con valores en un espacio de Banach. Consideremos $f \in L^1(\nu)$. Resulta que, como pasa ya en medidas definidas en σ-álgebras [34, p. 112], con la cuasivariación de ν_f obtenemos una norma equivalente en $L^1(\nu)$. Esto es, definimos la función $|||\cdot||| : L^1(\nu) \to [0, \infty)$ como

$$|||f|||_\nu := |||\nu_f|||(\Omega) = \sup_{B \in \mathcal{R}} \left\| \int_B f d\nu \right\|_X . \tag{3.1.1}$$

Por el lema 2.5.2 resulta que $|||\nu_f||| = |||\tilde{\nu}_f|||$. Ya que la medida vectorial $\tilde{\nu}_f$ está definida en la σ-álgebra $\mathcal{R}^{loc}$ se sigue que su cuasivariación es finita. Luego, la función $|||\cdot|||_\nu$ está bien definida.

Proposición 3.1.1 La función $|||\cdot|||_\nu$ define una norma equivalente a $\|\cdot\|_\nu$ en $L^1(\nu)$.

Demostración. Sea $f \in L^1(\nu)$. Basta probar que $|||f|||_\nu = 0$ implica que $f = 0$, pues las demás propiedades se siguen de la linealidad del operador integral y las propiedades de la norma en X.

Observemos que $|||f|||_\nu = |||\nu_f|||(\Omega)$. De la desigualdad ii) en la proposición 1.3.22 resulta que, en el caso complejo

$$|||f|||_\nu \leq \|f\|_\nu \leq 4|||f|||_\nu, \tag{3.1.2}$$

y en el caso real

$$|||f|||_\nu \leq \|f\|_\nu \leq 2|||f|||_\nu. \tag{3.1.3}$$

Supongamos que $|||f|||_\nu = 0$. De lo anterior resulta $\|f\|_\nu = 0$ y también se sigue la equivalencia de las normas. ■

Aunque la norma $|||\cdot|||_\nu$ es equivalente a la norma $\|\cdot\|_\nu$, es posible que $|||\cdot|||_\nu$ no sea reticular [34, Ex. 3.10]. El siguiente resultado, análogo al correspondiente cuando se trabaja con medidas vectoriales clásicas, nos proporciona condiciones para que la norma $|||\cdot|||_\nu$ sea reticular. Antes es preciso hacer notar que como $\|\nu_f\|(\Omega) = \|\tilde{\nu}_f\|(\Omega) = \|f\|_\nu$, de la proposición 1.3.21 se sigue

$$\|f\|_\nu = \sup\left\{\left\|\int_\Omega sf d\nu\right\|_X : s \in S(\mathcal{R}),\ \|s\|_\infty \leq 1\right\},\ \forall\ f \in L^1(\nu), \tag{3.1.4}$$

igualdad similar a la que se considera en [8, p. 90].

Proposición 3.1.2

i) La norma $|||\cdot|||_\nu$ es reticular si, y sólo si, $|||f|||_\nu = \|f\|_\nu$, $\forall\ f \in L^1(\nu)$.

ii) Si $\left\|\int_\Omega f d\nu\right\|_X = \|f\|_\nu$, $\forall\ f \in L^1(\nu)$, entonces la norma $|||\cdot|||_\nu$ es reticular.

Demostración. i) Supongamos que $|||\cdot|||_\nu$ es reticular. Fijemos $f \in L^1(\nu)$ y tomemos $s \in S(\mathcal{R})$ tal que $\sup|s(\omega)| \leq 1$. Como $|sf| \leq |f|$, de la hipótesis se sigue

$$\left\|\int_\Omega sf d\nu\right\|_X \leq |||sf|||_\nu \leq |||f|||_\nu.$$

De lo anterior y (3.1.4) obtenemos que $\|f\|_\nu \leq |||f|||_\nu$. La otra desigualdad se sigue de (3.1.2) o (3.1.3) en la proposición 3.1.1. La implicación contraria es clara.

ii) Sea $f \in L^1(\nu)$. Supongamos que $\left\|\int_\Omega f d\nu\right\|_X = \|f\|_\nu$. Entonces de la definición de $|||\cdot|||_\nu$ y la proposición 3.1.1 se cumple que

$$\|f\|_\nu = \left\|\int_\Omega f d\nu\right\|_X \leq |||f|||_\nu \leq \|f\|_\nu$$

Así $|||f|||_\nu = \|f\|_\nu$, $\forall\ f \in L^1(\nu)$. De i) se sigue el resultado. ■

Hemos visto que el operador integral es lineal y continuo con norma menor o igual a 1. Enseguida estableceremos que, como en el caso de medidas vectoriales clásicas [34, p. 152], cuando $L^1(\nu) \neq \{0\}$ de hecho tiene norma igual a 1.

Proposición 3.1.3 Si $\nu : \mathcal{R} \to X$ es una medida vectorial tal que $\nu \neq 0$, entonces $\|I_\nu\| = 1$.

Demostración. Sea $f \in L^1(\nu)$. De (3.1.4) y (1.2.3) obtenemos

$$\begin{aligned} \|f\|_\nu &= \sup\{\|I_\nu(sf)\|_X : \ s \in S(\mathcal{R}), \ \|s\|_\infty \leq 1\} \\ &\leq \|I_\nu\| \sup\{\|f\|_\nu \|s\|_\infty : \ s \in S(\mathcal{R}), \ \|s\|_\infty \leq 1\} \leq \|I_\nu\| \|f\|_\nu. \end{aligned}$$

Se sigue la conclusión. ■

3.2. Medidas vectoriales positivas

En la teoría de integración de medidas vectoriales clásicas encontramos resultados interesantes si a la medida vectorial se le agrega la propiedad de ser positiva. En esta sección veremos cómo estos resultados permanecen al considerar medidas vectoriales definidas en δ-anillos.

Definición 3.2.1 Sea X un retículo de Banach. Una medida vectorial $\nu : \mathcal{R} \to X$ es *positiva* si $\nu(A) \geq 0$, $\forall\ A \in \mathcal{R}$.

Enseguida estudiamos un ejemplo de una medida vectorial positiva que nos será útil más adelante.

Ejemplo 3.2.2 Dada una medida vectorial $\nu : \mathcal{R} \to X$, definimos $[\nu] : \mathcal{R} \to L^1(\nu)$ como

$$[\nu](A) := \chi_A. \tag{3.2.1}$$

De la σ orden-continuidad de $L^1(\nu)$ se sigue que $[\nu]$ es una medida vectorial; claramente es positiva. Ya que $\nu(B) = 0$ si, y sólo si, $\chi_B = 0$, $\forall\ B \in \mathcal{R}$, resulta $\mathcal{N}_0(\nu) = \mathcal{N}_0([\nu])$. Si $s \in S(\mathcal{R})$, entonces $s \in L^1([\nu])$ y $\int_\Omega s d[\nu] = s$. Ahora sea $f \in L^1([\nu])$. Entonces existe $\{s_n\} \subset S(\mathcal{R})$ tal que $s_n \to f$ $[\nu]$-c.t.p. y $\int_\Omega s_n d[\nu] \to \int_\Omega f d[\nu]$. Dado que $\int_\Omega s_n d[\nu] = s_n$, $\forall\ n \in \mathbb{N}$, obtenemos que $s_n \to \int_\Omega f d[\nu]$ en $L^1(\nu)$. Luego existe $\{s_{n_k}\}$ subsucesión de $\{s_n\}$ tal que $s_{n_k} \to \int_\Omega f d[\nu]$ ν-c.t.p. Por lo tanto $\int_\Omega f d[\nu] = f$. De esto, concluimos que

$$|||f|||_{[\nu]} = \sup_{B \in \mathcal{R}} \left\{ \left\| \int_B f d[\nu] \right\|_\nu \right\} = \sup_{B \in \mathcal{R}} \|f\chi_B\|_\nu = \|f\|_\nu.$$

Se sigue entonces que $|||\cdot|||_{[\nu]}$ es una norma reticular. De la proposición 3.1.2, obtenemos que

$$\|f\|_{[\nu]} = |||f|||_{[\nu]} = \|f\|_\nu, \ \forall\ f \in L^1([\nu]).$$

Ya que $S(\mathcal{R})$ es denso tanto en $L^1(\nu)$ como en $L^1([\nu])$, resulta que $L^1(\nu) \equiv L^1([\nu])$. ■

Aún en el caso de σ-álgebras, la semivariación puede no ser σ-aditiva, como lo han hecho notar S. Okada, W. J. Ricker y E. Sánchez-Pérez. De igual manera que en medidas vectoriales definidas en σ-álgebras [34, p. 104], veamos que

$$\|\nu\| \text{ es } \sigma\text{-aditiva si, y sólo si, } \|\nu\| = |\nu|.$$

De las proposiciones 1.3.20 y 1.3.24 *i)* se sigue que si $\|\nu\|$ es σ-aditiva entonces $\|\nu\| = |\nu|$ en $\mathcal{R}^{loc}$. Reciprocamente, es claro que si $\|\nu\| = |\nu|$ en $\mathcal{R}^{loc}$, entonces $\|\nu\|$ es σ-aditiva. En este caso tenemos que $|\nu|(A) < \infty$, $\forall\ A \in \mathcal{R}$.

Recordemos que un retículo de Banach X es un *espacio L^1-abstracto* si

$$\|x+y\|_X = \|x\|_X + \|y\|_X, \quad \forall\ x, y \in X^+.$$

Un ejemplo de espacio L^1-abstracto es cualquier espacio $L^1(\mu)$, donde μ es una medida positiva.

En el siguiente ejemplo veremos que si una medida vectorial positiva toma valores en un espacio L^1-abstracto, entonces resulta que $\|\nu\| = |\nu|$ en $\mathcal{R}^{loc}$, [34, Ex. 3.1].

Ejemplo 3.2.3 Sean X un espacio L^1-abstracto y $\nu : \mathcal{R} \to X$ una medida vectorial positiva. Consideremos $A \in \mathcal{R}^{loc}$ y $\{A_j\}_1^n \in \pi_A$, entonces

$$\sum_{j=1}^n \|\nu(A_j)\|_X = \left\|\sum_{j=1}^n \nu(A_j)\right\|_X = \left\|\nu\left(\bigcup_{j=1}^n A_j\right)\right\|_X \leq \|\nu\|(A).$$

Tomando el supremo sobre π_A obtenemos que $|\nu|(A) \leq \|\nu\|(A)$. Dado que siempre se cumple la otra desigualdad, resulta que

$$|\nu| = \|\nu\|.$$

Por lo tanto en este caso $\|\nu\|$ es σ-aditiva.

Veamos que además

$$|\nu|(B) = \|\nu(B)\|_X = \|\nu\|(B) < \infty, \quad \forall\ B \in \mathcal{R}. \tag{3.2.2}$$

Para establecer la igualdad anterior consideremos $B \in \mathcal{R}$ y $\{B_j\}_1^n \in \pi_B$, así

$$\left\| \sum_{j=1}^{n} \nu(B_j) \right\|_X = \left\| \nu \left(\bigcup_{j=1}^{n} B_j \right) \right\|_X \leq \|\nu(B)\|_X.$$

Luego $|\nu|(B) \leq \|\nu(B)\|_X \leq \|\nu\|(B) = |\nu|(B)$.

La observación y el lema siguientes son la generalización de los resultados conocidos para medidas vectoriales positivas definidas en una σ-álgebra [34, Lemma 3.13; p. 152]. Aún cuando se mencionan en [22, p. 7] consideramos apropiado presentar las demostraciones.

Observación 3.2.4 Supongamos que X es un retículo de Banach. Es claro que si el operador integral I_ν es positivo, entonces la medida ν es positiva. Ahora si ν es positiva, se sigue que $I_\nu(s) \in X^+$, $\forall\, s \in S(\mathcal{R})^+$. Consideremos $f \in L^1(\nu)^+$. Por la observación 1.4.11, existe $s_n \in S(\mathcal{R})^+$ tal que $s_n \uparrow f$, ν-c.t.p. Del teorema de la convergencia dominada obtenemos que $I_\nu(f) = \lim_{n\to\infty} I_\nu(s_n)$. Luego $I_\nu(f) \in X^+$. Lo que nos indica que I_ν es un operador positivo. Así, por la desigualdad (1.1.4)

$$\left| \int_\Omega f d\nu \right| \leq \int_\Omega |f| d\nu, \ \forall\, f \in L^1(\nu).$$

Lema 3.2.5 Supongamos que X es un retículo de Banach. Si $\nu : \mathcal{R} \to X$ es una medida vectorial positiva, entonces

$$\|f\|_\nu = \left\| \int_\Omega |f| d\nu \right\|_X, \ \forall\, f \in L^1(\nu).$$

Demostración. Sea $f \in L^1(\nu)$. Puesto que ν es una medida vectorial positiva y $|f| \geq 0$, se sigue que $\tilde{\nu}_{|f|} : \mathcal{R}^{loc} \to X$ es una medida vectorial positiva. Del teorema 2.2.1 y el caso correspondiente para σ-álgebras, resulta que

$$\|fg\|_\nu = \|g\|_{\tilde{\nu}_{|f|}} = \left\| \int_\Omega |g| d\tilde{\nu}_{|f|} \right\|_X = \left\| \int_\Omega |fg| d\nu \right\|_X, \ \forall\, g \in L^1(\nu_{|f|}).$$

Como $\chi_\Omega \in L^1(\tilde{\nu}_{|f|})$, de lo anterior se sigue la igualdad. ■

3.3. Funciones $|\nu|$-integrables

En esta sección veremos que unas relaciones bien conocidas entre los espacios $L^1(\nu)$ y $L^1(|\nu|)$ para medidas vectoriales definidas en σ-álgebras [34, sección 3.1], se conservan al considerar δ-anillos. Asimismo estudiaremos algunos ejemplos donde ciertos resultados válidos para medidas vectoriales clásicas dejan de cumplirse cuando pasamos medidas vectoriales en δ-anillos.

Como hemos mencionado en el teorema 1.4.14, D. R. Lewis probó que para cada función ν-integrable f, la variación de la medida $\tilde{\nu}_f$ esta dada como la integral de $|f|$ respecto de $|\nu|$. De lo cual se sigue que $L^1(|\nu|) \subseteq L^1(\nu)$. Enseguida veremos algunos casos en los que se cumple la igualdad.

Proposición 3.3.1 Sean X un espacio L^1-abstracto y $\nu : \mathcal{R} \to X$ una medida vectorial positiva. Entonces:

i) $L^1(|\nu|) \equiv L^1(\nu)$. Además

$$\left\| \int_\Omega |f| d\nu \right\|_X = \int_\Omega |f| d|\nu|.$$

ii) Existe $x_0^* \in (X^*)^+$ tal que

$$\|\nu(B)\|_X = \|\nu\|(B) = |\nu|(B) = \langle \nu, x_0^* \rangle (B), \quad B \in \mathcal{R}.$$

Luego, las medidas $|\nu|$ y $\langle \nu, x_0^* \rangle$ coinciden en $\mathcal{R}$ y como consecuencia

$$L^1(\nu) \equiv L^1(|\nu|) \equiv L^1(\langle \nu, x_0^* \rangle).$$

Demostración. i) Sea $f \in L^1(\nu)$. Consideremos primero el caso en que $f \in L^1(\nu)^+$. Entonces $\tilde{\nu}_f : \mathcal{R}^{loc} \to X$ es una medida vectorial positiva definida en una σ-álgebra. Por lo tanto la semivariación de $\tilde{\nu}_f$ es finita. Dado que X es un espacio L^1-abstracto, del ejemplo 3.2.3 se sigue que $|\tilde{\nu}_f|(\Omega) < \infty$. Por el teorema 1.4.14 resulta que $f \in L^1(|\nu|)$. Así $f \in L^1(|\nu|)$, $\forall\ f \in L^1(\nu)$.

Ahora notemos que $\tilde{\nu}_{|f|}$ es una medida vectorial positiva. Del teorema 1.4.14 y el ejemplo 3.2.3 resulta que

$$\|f\|_\nu = \|\tilde{\nu}_{|f|}\|(\Omega) = |\tilde{\nu}_{|f|}|(\Omega) = \|f\|_{|\nu|}.$$

Finalmente del lema 3.2.5 y lo anterior

$$\left\| \int_\Omega |f| d\nu \right\|_X = \|f\|_\nu = \|f\|_{|\nu|} = \int_\Omega |f| d|\nu|.$$

ii) Dado que X es un espacio L^1-abstracto, entonces es orden isométrico al espacio $L^1(\eta)$ para alguna medida escalar $\eta : \mathcal{S} \to [0, \infty]$, definida en un espacio medible $(\Lambda, \mathcal{S})$. Podemos suponer entonces que $X = L^1(\eta)$, con su norma usual $\|\cdot\|_\eta$.

Sea $B \in \mathcal{R}$. Entonces

$$\|\nu(B)\|_\eta = \int_\Lambda \nu(B) d\eta = \langle \nu(B), \chi_\Lambda \rangle = \langle \nu, \chi_\Lambda \rangle(B).$$

Considerando $x_0^* = \chi_\Lambda \in X^*$, se obtiene el resultado.

De (3.2.2) se sigue que, para $B \in \mathcal{R}$

$$\|\nu(B)\|_X = \|\nu\|(B) = |\nu|(B) = \langle \nu, x_0^* \rangle(B).$$

De la última igualdad se sigue que $|\nu|$ y $\langle \nu, x_0^* \rangle$ coinciden en $\mathcal{R}$. Luego, para cada $A \in \mathcal{R}^{loc}$, $|\nu|(A) = |\langle \nu, x_0^* \rangle|(A)$. De lo anterior y de i) se obtiene la conclusión. ■

Proposición 3.3.2 El espacio $L^1(\nu)$ es reticularmente isomorfo a un espacio L^1-abstracto si, y sólo si, $L^1(|\nu|) = L^1(\nu)$. En este caso $L^1(\nu) = L^1_w(\nu)$.

Demostración. Supongamos primero que $L^1(\nu)$ es reticularmente isomorfo a un espacio L^1 abstracto Z. Sea $T : L^1(\nu) \to Z$ el isomorfismo reticular. Consideremos $f \in L^1(\nu)^+$ y $A \in \mathcal{R}^{loc}$. Notemos que $f\chi_A \in L^1(\nu)^+$ y $T(f\chi_A) \in Z^+$. En $\mathcal{R}^{loc}$ definimos la función η_f como $\eta_f(A) := T(f\chi_A)$. Por lo tanto η_f es una medida vectorial positiva. Del ejemplo 3.2.3 se sigue que $|\eta_f|(\Omega) < \infty$. Dado que T es un isomorfismo resulta que

$$\begin{aligned} \|\tilde{\nu}_f(A)\|_X &= \left\| \int_\Omega f\chi_A d\nu \right\|_X \leq \|f\chi_A\|_\nu \\ &\leq \|T^{-1}\| \|T(f\chi_A)\|_Z = \|T^{-1}\| \|\eta_f(A)\|_Z \leq \|T^{-1}\| |\eta_f|(A). \end{aligned}$$

De la proposición 1.3.20 obtenemos que $|\tilde{\nu}_f|(A) \leq \|T^{-1}\| |\eta_f|(A)$, $\forall\ A \in \mathcal{R}^{loc}$. Luego $|\tilde{\nu}_f|(\Omega) < \infty$. Por el teorema 1.4.14 concluimos que $f \in L^1(|\nu|)$. Resulta entonces que $L^1(\nu)^+ \subset L^1(|\nu|)$, luego $L^1(\nu) \subset L^1(|\nu|)$. Siempre se cumple la otra contención, por lo tanto $L^1(\nu) = L^1(|\nu|)$.

Dado que $L^1(|\nu|)$ es un espacio L^1 abstracto se cumple la segunda implicación.

Ya que $L^1(|\nu|)$ es σ-orden continuo y tiene la propiedad σ-Fatou, resulta que $L^1(\nu)$ también. Luego, $L^1(\nu) = L^1_w(\nu)$ [9, Prop. 5.4]. ■

Proposición 3.3.3 El espacio $L^1(\nu)$ es un espacio L^1-abstracto si, y sólo si, $L^1(|\nu|) \equiv L^1(\nu)$.

Demostración. Supongamos que $L^1(\nu)$ es un espacio L^1 abstracto. De la proposición anterior resulta que $L^1(\nu) = L^1(|\nu|)$. Resta verificar la igualdad de las normas. Consideremos la medida $[\nu] : \mathcal{R} \to L^1(\nu)$ introducida en el ejemplo 3.2.2; de éste y el ejemplo 3.2.3 se sigue que $\|\chi_B\|_\nu = \|\chi_B\|_{[\nu]} = |[\nu]|(B)$. Por otro lado $\|\nu(B)\|_X \leq \|\nu\|(B) = \|\chi_B\|_\nu$, por la proposición 1.3.20 resulta que $|\nu|(B) \leq \|\chi_B\|_\nu$. Por lo tanto $\|\chi_B\|_{|\nu|} = |\nu|(B) = \|\chi_B\|_\nu$, $\forall\ B \in \mathcal{R}$. Ya que $L^1(\nu)$ es un espacio L^1-abstracto, de lo anterior se sigue que

$$\|s\|_{|\nu|} = \|s\|_\nu, \ \forall\ s \in S(\mathcal{R}). \tag{3.3.1}$$

Puesto que $S(\mathcal{R})$ es denso tanto en $L^1(\nu)$ como en $L^1(|\nu|)$, de (3.3.1) se obtiene la conclusión. ■

Consideremos nuevamente una función $f \in L^1_{loc}(\nu)$ y su medida vectorial asociada ν_f. Es natural preguntarse si los espacios $L^1(|\nu_f|)$ y $L^1(\nu_f)$ son iguales en caso de que $L^1(\nu)$ y $L^1(|\nu|)$ lo sean. Así surge el siguiente resultado.

Corolario 3.3.4 Si $L^1(\nu) = L^1(|\nu|)$, entonces $L^1(\nu_f) = L^1(|\nu_f|)$, $\forall\ f \in L^1_{loc}(\nu)$.

Demostración. Ya que $L^1(|\nu_f|) \subset L^1(\nu_f)$, sólo probaremos la otra contención. Sea $s \in S(\mathcal{R})$, de (2.1.2) se sigue que

$$\int_A s d|\nu_f| = \int_A |f| s d|\nu|, \ \forall\ A \in \mathcal{R}^{loc}. \tag{3.3.2}$$

Ahora tomemos $g \in L^1(\nu_f)$ y una sucesión $\{s_n\} \in S(\mathcal{R})$ tal que $0 \leq s_n \uparrow |g|$, ν_f-c.t.p. Por el teorema 2.2.1 ii) $fg \in L^1(\nu)$; además $|f|s_n \uparrow |fg|$, ν-c.t.p. Por el teorema de la convergencia monótona y (3.3.2),

$$\int_\Omega |g| d|\nu_f| = \lim_{n\to\infty} \int_\Omega s_n d|\nu_f| = \lim_{n\to\infty} \int_\Omega |f| s_n d|\nu| = \int_\Omega |fg| d|\nu|.$$

De lo anterior y la hipótesis se sigue la conclusión. ■

A diferencia de los operadores integrales asociados a medidas vectoriales definidas en σ-álgebras, para los operadores integrales respecto a medidas definidas en δ-anillos no es necesaria la condición de que la variación sea finita para que el operador integral sea compacto [33, Thm. 1], como lo podemos ver en el siguiente ejemplo.

Ejemplo 3.3.5 Consideremos el espacio de medida (Ω, Σ, μ) donde $\Omega = \mathbb{N}$, $\Sigma = 2^\Omega$ y μ la medida de contar. Sea $\mathcal{R} := \{B \subset \mathbb{N} : \mu(B) < \infty\}$ y $\nu : \mathcal{R} \to \mathbb{R}$ definida por

$$\nu(A) := \mu(A), \ \forall\ A \in \mathcal{R}.$$

Entonces $\mathcal{R}^{loc} = \Sigma$ y $L^1(\nu) = l^1$. Notemos que $|\nu(B)| = \mu(B)$, $\forall\ B \in \mathcal{R}$. Lo que implica que $|||\nu|||(\Omega) = \infty$, luego $|\nu|(\Omega) = \infty$. Por otra parte $I_\nu : l^1 \to \mathbb{R}$ es un operador compacto pues es de rango finito.

Sin embargo, aún sin imponer condiciones a la variación de ν, se sigue cumpliendo el siguiente resultado.

Teorema 3.3.6 Sea $\nu : \mathcal{R} \to X$ una medida vectorial. Si $I_\nu : L^1(\nu) \to X$ es un operador compacto, entonces $L^1(\nu) = L^1(|\nu|)$.

Demostración. Ya que siempre se cumple que $L^1(|\nu|) \subset L^1(\nu)$, resta probar la otra contención. Sea $f \in L^1(\nu)$. Consideremos la medida vectorial asociada $\nu_f : \mathcal{R} \to X$. Por el teorema 2.2.1 sabemos que $I_{\nu_f} = I_\nu \circ M_f$, donde el operador $M_f : L^1(\nu_f) \to L^1(\nu)$, definido por $M_f(g) = fg$, es continuo. Como I_ν es compacto resulta que I_{ν_f} es compacto. Del lema 2.5.1 $|\nu_f| = |\tilde{\nu}_f|$. Ya que $\tilde{\nu}_f$ está definida en una σ-álgebra, esto implica que su variación es finita [33, Thm. 4]. Teniendo presente el teorema 1.4.14, concluimos que $f \in L^1(|\nu|)$. ■

Corolario 3.3.7 Sea $\nu : \mathcal{R} \to X$ una medida vectorial. Si el espacio $L^1(\nu)$ es reflexivo y $\dim L^1(\nu) = \infty$, entonces el operador integral I_ν no es compacto.

Demostración. Ya que $L^1(|\nu|)$ es reflexivo sólo si su dimensión es finita [18, Ch. IV Ex. 13.2], de la hipótesis se sigue que $L^1(\nu) \neq L^1(|\nu|)$. Así, del teorema anterior obtenemos que I_ν no es compacto. ■

De la teoría de operadores sabemos que si un operador lineal es compacto, entonces es completamente continuo. Cuando ν está definida en una σ-álgebra, en [34, p. 153] se prueba que I_ν completamente continuo implica que el rango $\mathbf{R}(\nu)$ de ν es relativamente compacto. En el siguiente ejemplo vemos que esto no necesariamente ocurre cuando ν está definida en un δ-anillo.

Ejemplo 3.3.8 Sean $\mathcal{R}$ y $\nu : \mathcal{R} \to \mathbb{R}$ como en el ejemplo 3.3.5. Hemos visto que $|||\nu|||(\Omega) = \infty$, esto implica que $\mathbf{R}(\nu) \subset \mathbb{R}$ es un conjunto no-acotado. Por lo tanto $\mathbf{R}(\nu)$ no es relativamente compacto. No obstante I_ν es compacto.

3.4. Medida ν σ-finita

Hemos mencionado que una propiedad importante que puede tener una medida vectorial $\nu : \mathcal{R} \to X$ es la de ser σ-finita. En esta sección analizaremos esta propiedad.

Considerando las proposiciones 1.3.20 iii) y 1.3.27 resulta que si $|\nu|$ es σ-finita, en particular si $|\nu|(\Omega) < \infty$, entonces la medida ν es σ-finita. Sin embargo, que la semivariación de una medida vectorial ν sea acotada no garantiza que ν sea σ-finita [14, Ex. 2.2].

Es conocido que si X no contiene una copia de c_0 y $\|\nu\|$ es acotada, entonces ν es fuertemente aditiva y, en consecuencia ν es σ-finita [15, p. 36]. Por otra parte aún cuando $c_0 \subset X$, si ν es acotada y X es separable, se obtiene la misma conclusión, como se establece a continuación.

Proposición 3.4.1 Sea $\nu : \mathcal{R} \to X$ una medida vectorial. Si $\|\nu\|(\Omega) < \infty$ y X es separable, entonces ν es σ-finita.

Demostración. Dado que X es separable, de acuerdo a [3, Chap. VIII, Thm. 4] tomemos $\{x_n^*\} \subset B_{X^*}$ tal que para cada $x^* \in B_{X^*}$ existe $\{x_{n_j}^*\} \subset \{x_n^*\}$ que satisface

$$\langle x, x^* \rangle = \lim_{j \to \infty} \langle x, x_{n_j}^* \rangle, \ \forall \ x \in X.$$

Por otra parte como $\|\nu\|(\Omega) < \infty$, entonces $|\langle \nu, x_n^* \rangle|(\Omega) < \infty$, $\forall \ n \in \mathbb{N}$. Teniendo presente la proposición 1.3.20 iii), para cada $n \in \mathbb{N}$, escojamos $\{A_{n,k}\} \subset \mathcal{R}$ y $N_n \in \mathcal{N}_0(|\langle \nu, x_n^* \rangle|)$ tales que $\Omega = \bigcup_{k=1}^{\infty} A_{n,k} \cup N_n$. Luego $\Omega = \bigcup_{n=1}^{\infty} \bigcup_{k=1}^{\infty} A_{n,k} \cup N$, donde $N := \bigcap_{n=1}^{\infty} N_n$.

Para establecer la conclusión resta probar que $N \in \mathcal{N}_0(\nu)$. Tomemos $x^* \in B_{X^*}$, $\{x_{n_j}^*\} \subset \{x_n^*\}$ tal que $x_{n_j}^* \to x^*$ y $B \in \mathcal{R}_N$. Puesto que

$$\langle \nu, x^* \rangle(B) = \lim_{j \to \infty} \langle \nu, x_{n_j}^* \rangle(B),$$

y $\langle \nu, x_{n_j}^* \rangle(B) = 0$, $\forall \ j \in \mathbb{N}$, resulta que $\langle \nu, x^* \rangle(B) = 0$. Se sigue que $N \in \mathcal{N}_0(\langle \nu, x^* \rangle)$, $\forall \ x^* \in B_{X^*}$. Luego $\|\nu\|(N) = 0$. ■

Proposición 3.4.2 Sea $\nu : \mathcal{R} \to X$ una medida vectorial. Si $L^1(\nu) = L^1(|\nu|)$, entonces ν es σ-finita si, y sólo si, su variación lo es.

Demostración. Supongamos primero que ν es una medida vectorial σ-finita y tomemos $\{B_n\} \subset \mathcal{R}$ y $N \in \mathcal{N}_0(\nu)$ tales que $\Omega = \bigcup_{n=1}^{\infty} B_n \cup N$. Así $\chi_{B_n} \in S(\mathcal{R}) \subset L^1(\nu) = L^1(|\nu|)$. Lo que implica que $|\nu|(B_n) < \infty$, $\forall\, n \in \mathbb{N}$. Por el lema 1.3.27 $\mathcal{N}_0(|\nu|) = \mathcal{N}_0(\nu)$. Entonces $|\nu|(N) = 0$. Por lo tanto $|\nu|$ es una medida σ-finita.

Como hemos observado la otra implicación siempre se cumple.■

El siguiente ejemplo muestra que no es suficiente con que se cumpla la igualdad $L^1(\nu) = L^1(|\nu|)$ para garantizar que la medida vectorial ν sea σ-finita.

Ejemplo 3.4.3 Sean Γ un conjunto no-numerable y $\mu : 2^\Gamma \to [0, \infty]$ la medida de contar. Consideremos el δ-anillo $\mathcal{R} := \{B \subset \Gamma : \mu(B) < \infty\}$ y el espacio de Banach $X := l^1(\Gamma)$. Definamos $\nu : \mathcal{R} \to X$ como $\nu(A) = \chi_A$, $\forall\, A \in \mathcal{R}$. Es claro que $\mathcal{R}^{loc} = 2^\Gamma$, $\mathcal{N}_0(\nu) = \{\emptyset\}$ y $\mu \leq |\nu|$. Además como $\|\nu(B)\|_{l^1(\Gamma)} = \mu(B)$, $\forall\, B \in \mathcal{R}$, la proposición 1.3.20 i) nos indica que $|\nu| = \mu$. Se sigue entonces $L^1(|\nu|) = l^1(\Gamma) = L^1(\nu)$ [14, Ex. 2.2]. Sin embargo ν no es σ-finita.

Recordemos que un espacio de Banach X es *débil compactamente generado* si existe $K \subset X$ débilmente compacto tal que el espacio generado por K es denso en X.

Al considerar una medida vectorial clásica G. P. Curbera probó que el espacio $L^1(\nu)$ es un espacio débil compactamente generado [11, Thm. 2] . En el siguiente ejemplo veremos que esto puede dejar de ser válido cuando se considera un medida vectorial definida en un δ-anillo.

Ejemplo 3.4.4 Consideremos de nuevo las hipótesis del ejemplo 3.4.3. Hemos visto que $L^1(\nu) = l^1(\Gamma)$. Ahora mostraremos que $l^1(\Gamma)$ no es débil compactamente generado.

Puesto que Γ es no-numerable, resulta que $l^1(\Gamma)$ no es separable. Ahora consideremos un subconjunto $K \subset l^1(\Gamma)$ débilmente compacto. Dado que en $l^1(\Gamma)$ la convergencia débil y la convergencia en norma son equivalentes [13, Cor. II.2.2], se sigue que K es compacto. Luego, K es separable. Por lo tanto K no puede ser total. Dado que K es arbitrario, concluimos que $L^1(\nu) = l^1(\Gamma)$ no es débil compactamente generado.

Por otra parte se cumple lo siguiente.

Proposición 3.4.5 Si ν es una medida vectorial σ-finita, entonces $L^1(\nu)$ es un espacio débil compactamente generado.

Demostración. Supongamos que ν es σ-finita. Por el teorema 1.4.17, $L^1(\nu)$ es reticularmente isométrico a $L^1(\nu_g)$, donde ν_g es una medida vectorial definida en una σ-álgebra. Puesto que $L^1(\nu_g)$ es débil compactamente generado se sigue que $L^1(\nu)$ es débil compactamente generado. ■

Capítulo 4

Espacio asociado y representación del espacio $L^1(\nu)^*$

Estamos interesados en dar una descripción del espacio dual de $L^1(\nu)$. Con este fin iniciamos este capítulo presentando la teoría de espacio asociado respecto de una medida σ-finita pero ahora considerando una medida sin más requisitos que ser positiva. Veremos que en este caso el espacio asociado puede ser trivial; por lo que se considerará una medida positiva λ ahora definida en un δ-anillo y con la propiedad de ser localmente σ-finita. Veremos que en este nuevo contexto se resuelve este problema y la teoría conocida se puede generalizar un poco más. Para terminar, dada una medida vectorial definida en un δ-anillo mostraremos que siempre existe una medida de control local que es localmente σ-finita a la que llamaremos *medida de Brooks-Dinculeanu*. Estableceremos que bajo ciertas condiciones, el espacio $L^1(\nu)^*$ se puede representar como el espacio asociado de $L^1(\nu)$, considerado como un espacio funcional de Banach respecto de una medida de Brooks-Dinculeanu.

4.1. Espacio Asociado

Sea (Ω, Σ, μ) un espacio de medida positiva y consideremos un μ-e.f.B. E. La teoría del espacio asociado a E es bien conocida y se desarrolla usualmente para el caso en que μ es una medida σ-finita, véase por ejemplo [38, Ch. 15] y [5, Ch. 1]. En esta sección empezaremos a mostrar que esta teoría sigue siendo de interés cuando la medida no es σ-finita. Aún cuando varias pruebas son análogas presentamos algunas de ellas para que el trabajo quede autocontenido.

Naturalmente, definimos el *espacio asociado* de un μ-e.f.B. E como

$$E^\times := \{g \in L^0(\mu) : gf \in L^1(\mu),\ \forall\ f \in E\}.$$

Claramente $E^\times$ es un espacio vectorial. En $E^\times$ consideremos la función

$$\|g\|_{E^\times} := \sup\left\{\int_\Omega |gf|d\mu : f \in B_E\right\}, \tag{4.1.1}$$

la cual resulta ser finita y una seminorma.

A continuación enunciamos una desigualdad fundamental.

Proposición 4.1.1 (Desigualdad de Hölder) Sea E un μ-e.f.B. Si $f \in E$ y $g \in E^\times$, entonces

$$\int_\Omega |gf|d\mu \leq \|g\|_{E^\times}\|f\|_E.$$

Fijemos $g \in E^\times$. Entonces $\varphi_g : E \to \mathbb{K}$ definida como

$$\varphi_g(f) = \int_\Omega gfd\mu, \tag{4.1.2}$$

es un funcional lineal. Veremos que es acotado y calcularemos su norma.

Lema 4.1.2 Sea E un μ-e.f.B. Si $g \in E^\times$, entonces $\|\varphi_g\| = \|g\|_{E^\times}$.

Demostración. Consideremos $g \in E^\times$. Si $g = 0$, μ-c.t.p. se tiene el resultado. Supongamos que $g \neq 0$, μ-c.t.p. Así tomemos $A := \{x \in \Omega : g(x) \neq 0\} \in \mathcal{R}^{loc}$. Ya que

$$\left|\int_\Omega gfd\mu\right| \leq \int_\Omega |gf|d\mu \leq \|g\|_{E^\times}\|f\|_E,\ \forall\ f \in E,$$

resulta que $\|\varphi_g\| \leq \|g\|_{E^\times}$. Para establecer la desigualdad que nos falta fijemos $f \in B_E$ y definamos $h := \frac{|gf|}{g}\chi_A$. Entonces $h \in L^0(\mu)$ y $h \in B_E$. Así,

$$\int_\Omega |gf|d\mu = \int_\Omega ghd\mu \leq \|\varphi_g\|.$$

Concluimos que $\|g\|_{E^\times} \leq \|\varphi_g\|$. ■

Para estudiar cuándo $\|\cdot\|_{E^\times}$ es una norma es necesario recordar la siguiente definición [38, p. 454].

Definición 4.1.3 Un μ-e.f.B. E es *saturado* si, para cada $A \in \Sigma$ con medida positiva existe $B \in \Sigma_A$ tal que $\mu(B) > 0$ y $\chi_B \in E$.

Recordemos que si X es un retículo de Banach, un ideal Y de X es *orden denso* si para toda $f \in X^+$ existe un sistema dirigido crecientemente $\{f_\tau\} \subset Y^+$ tal que $f_\tau \uparrow f$.

Lema 4.1.4 Sea E un μ-e.f.B. Son equivalentes:

i) El espacio E es saturado.

ii) El espacio E es orden denso en $L^0(\mu)$.

iii) La función $\|\cdot\|_{E^\times}$ definida en (4.1.1) es una norma.

Demostración. i)$\Leftrightarrow$ ii) Puesto que E es un retículo de Banach resulta que E es arquimediano.Así, bastará establecer que E es saturado si, y sólo si, para cada $f \in L^0(\mu)$ distinta de cero existe $g \in E$ tal que $0 < |g| \leq |f|$ [29, Thm. 22.3 vi)]. Supongamos entonces que E es saturado. Sea $0 \neq f \in L^0(\mu)$. Definamos

$$A_n = \{x \in \Omega : \frac{1}{n} \leq |f(x)|\}, \forall\, n \in \mathbb{N}.$$

Fijemos $N \in \mathbb{N}$ tal que $\mu(A_N) > 0$. Ya que E es saturado existe $B \subset A_N$ tal que $\mu(B) > 0$ y $\chi_B \in E$. Luego, $g := \frac{1}{N}\chi_B \in E$ y $0 < |g| \leq |f|$.

Finalmente supongamos que para cada $f \in L^0(\mu)$ distinta de cero existe $g \in E$ tal que $0 < |g| \leq |f|$. Sea $A \in \Sigma$ tal que $\mu(A) > 0$. Entonces $0 \neq \chi_A \in L^0(\mu)$. Así existe $g \in E$ tal que $0 < |g| \leq \chi_A$. Como $0 \neq g \in L^0(\mu)$ podemos tomar $\varphi \in S(\Sigma)$ tal que $0 < \varphi \leq |g|$. Por la reticularidad en E, obtenemos que $\varphi \in E$. Además existe $B \in \Sigma$ tal que $B \subset \mathrm{sop}\varphi$, $\mu(B) > 0$ y $\chi_B \in E$.

i)$\Leftrightarrow$ iii) Supongamos primero que E es saturado. Ya que $\|\cdot\|_{E^\times}$ es una seminorma, de acuerdo al lema 4.1.2 para establecer que es una norma resta probar que $\varphi_g \neq 0$, cuando $g \neq 0$. Así consideremos $0 \neq g \in E^\times$. Entonces existe $A \in \Sigma$ tal que $\mu(A) > 0$ y $g\chi_A \neq 0$ μ-c.t.p. Puesto que E es saturado, existe $B \in \Sigma_A$ tal que $\mu(B) > 0$ y $\chi_B \in E$. Luego, como $g\chi_B \neq 0$, $h := \dfrac{|g|}{g}\chi_B \in E$. Se sigue entonces que $\varphi_g(h) = \int_\Omega |g|\chi_B d\mu > 0$. Lo que indica que $\varphi_g \neq 0$.

Para probar la otra implicación estableceremos la contrapositiva. Supongamos que E no es saturado y tomemos $A \in \Sigma$ tal que $\mu(A) > 0$ y $\chi_B \notin E$, $\forall\, B \in \Sigma_A$ con $\mu(B) > 0$. Sea $f \in E$ y, para cada $n \in \mathbb{N}$, definamos

$$A_n = \{x \in A : \frac{1}{n} \leq |f(x)|\}.$$

Fijemos $n \in \mathbb{N}$. Entonces $\frac{1}{n}\chi_{A_n} \leq |f|$. Así, $\chi_{A_n} \in E$ y obtenemos que $\mu(A_n) = 0$. Luego, $f = 0$ μ-c.t.p en A, esto es, $f\chi_A = 0$, μ-c.t.p. Ya que f es arbitraria, resulta que $\chi_A \in E^\times$ y $\|\chi_A\|_{E^\times} = 0$. Puesto que $\mu(A) > 0$ concluimos que $\|\cdot\|_{E^\times}$ no es una norma. ■

Proposición 4.1.5 Sea E un μ-e.f.B. Si E es saturado, entonces $E^\times$ es un μ-e.f.B. con la propiedad σ-Fatou.

Demostración. Supongamos E es saturado. De la proposición 4.1.4 obtenemos que $\|\cdot\|_{E^\times}$ es una norma. Una vez que probemos que $E^\times$ tiene la propiedad σ-Fatou, se seguirá que es completo.

Consideremos una sucesión creciente $\{g_n\} \subset (E^\times)^+$ tal que $\sup\limits_n \|g_n\|_{E^\times} < \infty$ y $g := \sup_n g_n$. Ahora fijemos $f \in E$, así $g_n f \in L^1(\mu)$, $g_n|f| \leq g_{n+1}|f|$, $\forall\ n \in \mathbb{N}$ y $g|f| = \sup\limits_n (g_n|f|)$. De la desigualdad de Hölder y la hipótesis se sigue que

$$\int_\Omega |g_n f| d\mu \leq \|g_n\|_{E^\times} \|f\|_E \leq (\sup_n \|g_n\|_{E^\times}) \|f\|_E.$$

Ya que $L^1(\mu)$ tiene la propiedad σ-Fatou, resulta que $gf \in L^1(\mu)$ y

$$\int_\Omega |gf| d\mu = \sup_n \int_\Omega |g_n f| d\mu \leq (\sup_n \|g_n\|_{E^\times}) \|f\|_E.$$

Resta probar que $g < \infty$ μ-c.t.p. Sea $A := g^{-1}(\infty) \in \Sigma$ y supongamos que $\mu(A) > 0$. Puesto que E es saturado, tomemos $B \in \Sigma_A$ tal que $\chi_B \in E$ y $\mu(B) > 0$. Entonces $\int_\Omega |g\chi_B| d\mu = \infty$, lo cual es una contradicción.

Por lo tanto $g \in E^\times$ y $\|g\|_{E^\times} \leq \sup\limits_n \|g_n\|_{E^\times}$. De la propiedad reticular de la norma en $L^1(\mu)$ obtenemos que $\sup\limits_n \|g_n\|_{E^\times} \leq \|g\|_{E^\times}$. Por lo tanto $\|g\|_{E^\times} = \sup\limits_n \|g_n\|_{E^\times}$. Esto es, $E^\times$ tiene la propiedad σ-Fatou. ■

Sea E un μ-e.f.B. saturado. Consideremos el operador

$$R : E^\times \to E^* \text{ definido como } R(g) := \varphi_g. \tag{4.1.3}$$

Puesto que E es saturado, la proposición anterior señala que $E^\times$ es un μ-e.f.B. Así, por el lema 4.1.2 R es una isometría lineal, a la cual llamaremos *isometría canónica*. Analicemos si R también conserva la estructura reticular.

Fijemos $0 \neq g \in E^\times$. Tomemos $f \in E^+$. De (1.1.7), se sigue

$$|Rg|(f) = \sup\{|Rg(h)| : |h| \leq f\} = \sup\left\{\left|\int_\Omega ghd\mu\right| : |h| \leq f\right\} \leq \int_\Omega |g| f d\mu.$$

Por otra parte, procediendo como la prueba del lema 4.1.2, definimos $h := \dfrac{|gf|}{g}\chi_A$. Así $h \in L^0(\mu)$ y $|h| \leq f$. Luego,

$$R|g|(f) = \int_\Omega |gf| d\mu = \int_\Omega ghd\mu \leq |Rg|(f).$$

Por lo anterior y teniendo presente (1.1.5) obtenemos que $|Rg| = R|g|$, $\forall\, g \in E^\times$. En particular la igualdad anterior se cumple si $g \in (E^\times)_\mathbb{R}$. Ya que $R((E^\times)_\mathbb{R}) \subset (E^*)_\mathbb{R}$, de (1.1.3) concluimos que R es un homomorfismo reticular.

Por lo tanto podemos identificar $E^\times$ con un subespacio de E^* que es un retículo de Banach. Estamos interesados en investigar cuándo esta isometría es sobreyectiva, lo cual permite representar el espacio dual de E como el espacio asociado a E.

Como hemos visto, el espacio $E^\times$ siempre tiene la propiedad σ-Fatou. A continuación proporcionamos una condición suficiente bajo la cual $E^\times$ tiene la propiedad de Fatou.

Lema 4.1.6 Sea E un μ-e.f.B. saturado. Si $E^\times \subset L^1(\mu)$, entonces $E^\times$ tiene la propiedad de Fatou. En particular, si $\chi_\Omega \in E$, entonces $E^\times$ tiene la propiedad de Fatou.

Demostración. Sea $\{g_\tau\} \subset E^\times$ tal que $0 \le g_\tau \uparrow$ y $\sup\limits_\tau \|g_\tau\|_{E^\times} < \infty$. Así $\{g_\tau\} \subset L^1(\mu)^+$ es un sistema dirigido crecientemente tal que $\sup\limits_\tau \displaystyle\int_\Omega g_\tau d\mu < \infty$. Como $L^1(\mu)$ tiene la propiedad de Fatou $g := \sup\limits_\tau g_\tau \in L^1(\mu)$. Puesto que $L^1(\mu)$ es super Dedekind completo [39, Thm. 113.4], existe una sucesión $\{g_{\tau_n}\} \subset \{g_\tau\}$ tal que $g_{\tau_n} \uparrow g$ [29, Thm. 23.2.(iii)]. Ya que $E^\times$ tiene la propiedad σ-Fatou se sigue que $g \in E^\times$. Además por la reticularidad de la norma en $E^\times$, $\sup\limits_\tau \|g_\tau\|_{E^\times} \le \|g\|_{E^\times}$.

Ahora consideremos $f \in B_E$. Usando el teorema de la convergencia monótona y la desigualdad de Hölder obtenemos

$$\int_\Omega |gf| d\mu = \sup_n \int_\Omega |g_{\tau_n} f| d\mu \le \sup_n \|g_{\tau_n}\|_{E^\times} \|f\|_E \le \sup_n \|g_\tau\|_{E^\times}.$$

Luego, $\|g\|_{E^\times} \le \sup\limits_\tau \|g_\tau\|_{E^\times}$. Por lo tanto $E^\times$ tiene la propiedad de Fatou. ■

En seguida estableceremos que el espacio asociado de un e.f.B. saturado respecto de una medida σ-finita siempre tiene la propiedad de Fatou. Antes hagamos un pequeña discusión.

Sean E un μ-e.f.B. saturado y $A \in \Sigma$. Consideremos la σ-álgebra Σ_A de subconjuntos de A. Denotemos por μ_A a la restricción de μ a Σ_A. Resulta entonces que (A, Σ_A, μ_A) es un espacio de medida.

Dada $f \in L^0(\Sigma_A)$ definimos la función $f^\Omega : \Omega \to \mathbb{K}$ por $f^\Omega(x) = f(x)$, si $x \in A$ y $f^\Omega(x) = 0$ en otro caso. Entonces f^Ω es una función Σ-medible. A esta función la llamaremos la *extensión canónica* de f. Consideremos

$$E_A := \{f \in L^0(\mu_A) : f^\Omega \in E\}. \tag{4.1.4}$$

Claramente E_A es un espacio vectorial. Si $h \in E$, entonces $(h_A)^\Omega = h\chi_A \in E$, donde h_A es la restricción de h a A. Luego, $h_A \in E_A$.

Ahora definamos $\|\cdot\|_A : E_A \to [0,\infty)$ como

$$\|f\|_A := \|f^\Omega\|_E, \ \forall\ f \in E_A. \tag{4.1.5}$$

Puesto que E es un μ-e.f.B., se sigue que E_A es un μ_A-e.f.B. Notemos también que si $\mu(A) > 0$, entonces E_A es saturado. Por otro lado si $A = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$, donde $A_n \in \Sigma$ y $\mu(A_n) < \infty$, $\forall\ n \in \mathbb{N}$, resulta que μ_A es σ-finita. En este caso si $\mu(A) > 0$, obtenemos que $E_A^\times := (E_A)^\times$ es saturado [38, Ch.15 §71 Thm. 4]. Además $E_A^\times = (E^\times)_A$ y

$$\|g\|_{E_A^\times} = \sup\left\{\int_A |gf| d\mu_A : f \in B_{E_A}\right\} = \|g^\Omega\|_{E^\times}, \ \forall\ g \in E_A^\times. \tag{4.1.6}$$

Proposición 4.1.7 Sea E un μ-e.f.B. saturado. Si μ es σ-finita, entonces $E^\times$ tiene la propiedad de Fatou.

Demostración. Ya que si $\mu(\Omega) = 0$ la conclusión se sigue trivialmente, supondremos que $\mu(\Omega) > 0$. Puesto que μ es σ-finita, existen $\{\Omega_n\} \subset \Sigma$ y $N \in \mathcal{N}_0(\mu)$ tales que $\Omega_n \subset \Omega_{n+1}$, $0 \neq \chi_{\Omega_n} \in E$, $\forall\ n \in \mathbb{N}$ y $\Omega = \bigcup_{n=1}^{\infty} \Omega_n \cup N$ [38, Ch. 15 §67 Thm. 4].

Fijemos $n \in \mathbb{N}$. Tomemos $\Sigma_n := \Sigma_{\Omega_n}$ y $\mu_n : \Sigma_n \to [0,\infty)$ la restricción de μ. Entonces $(\Omega_n, \Sigma_n, \mu_n)$ es un espacio de medida finito. Luego el espacio $E_n := E_{\Omega_n}$ con la norma $\|\cdot\|_n := \|\cdot\|_{\Omega_n}$ es un μ_n-e.f.B. saturado tal que $\chi_{\Omega_n} \in E_n$. Del lema anterior se sigue que $E_n^\times$ tiene la propiedad de Fatou.

Ahora tomemos un sistema dirigido crecientemente $\{g_\tau\}_{\tau\in I} \subset E^\times$ tal que $g_\tau \geq 0$, $\forall\ \tau \in I$ y $\sup_\tau \|g_\tau\|_{E^\times} < \infty$. Denotemos por $g_{\tau,n}$ a la restricción de g_τ al conjunto Ω_n. Entonces $\{g_{\tau,n}\}_{\tau\in I} \subset E_n^\times$ es un sistema dirigido crecientemente que cumple que $\sup_\tau \|g_{\tau,n}\|_{E_n^\times} \leq \sup_\tau \|g_\tau\|_{E^\times} < \infty$. Por lo tanto existe $g_{(n)} \in E_n^\times$ tal que $g_{(n)} = \sup_\tau g_{\tau,n}$ y $\|g_{(n)}\|_{E_n^\times} = \sup_\tau \|g_{\tau,n}\|_{E_n^\times}$.

Sea $g_n := (g_{(n)})^\Omega$ la extensión canónica de $g_{(n)}$. Entonces $\{g_n\} \subset E^\times$ es una sucesión creciente. Por (4.1.6),

$$\sup_n \|g_n\|_{E^\times} = \sup_n \|g_{(n)}\|_{E_n^\times} \leq \sup_\tau \|g_\tau\|_{E^\times}. \tag{4.1.7}$$

De que $E^\times$ tiene la propiedad σ-Fatou y de (4.1.7), se sigue que

$$g := \sup_n g_n \in E^\times \quad \text{y} \quad \|g\|_{E^\times} \leq \sup_\tau \|g_\tau\|_{E^\times}. \tag{4.1.8}$$

Probemos ahora que $g = \sup_{\tau} g_{\tau}$. Fijemos $\tau \in I$. Ya que $g_{\tau}\chi_{\Omega_n} \leq g_n \leq g$ para cada $n \in \mathbb{N}$, obtenemos que $g_{\tau} \leq g$. Supongamos que $g' \in E^{\times}$ es tal que $g_{\tau} \leq g'$. Entonces $g_{\tau}\chi_{\Omega_n} \leq g'\chi_{\Omega_n}$, así $g_n \leq g'$, $\forall\ n \in \mathbb{N}$. Luego, $g \leq g'$ y obtenemos que $g = \sup_{\tau} g_{\tau}$. Finalmente de (4.1.8) y la reticularidad de la norma en E' se sigue el resultado. ■

Sea E un μ-e.f.B. saturado. Entonces $E^{\times}$ es un μ-e.f.B. y podemos considerar ahora el espacio asociado de $E^{\times}$, al cual llamaremos el *espacio doble asociado* de E y lo denotaremos por $E^{\times\times}$. Así

$$E^{\times\times} := (E^{\times})^{\times} = \{h \in L^0(\mu) : hg \in L^1(\mu)\ \forall\ g \in E^{\times}\}$$

y la función $\|\cdot\|_{E^{\times\times}} : E^{\times\times} \to [0,\infty)$ definida como

$$\|h\|_{E^{\times\times}} := \sup\left\{\int_{\Omega} |hg| d\mu : g \in B_{E^{\times}}\right\},$$

es una seminorma.

Corolario 4.1.8 Sea E un μ-e.f.B. saturado. Si $E^{\times}$ es saturado, entonces $E^{\times\times}$ es un μ-e.f.B. con la propiedad σ-Fatou. Además $E \subset E^{\times\times}$ y

$$\|f\|_{E^{\times\times}} \leq \|f\|_E \quad \forall\ f \in E. \tag{4.1.9}$$

Corolario 4.1.9 Sea E un μ-e.f.B. saturado. Si μ es σ-finita, entonces

i) el espacio $E^{\times\times}$ tiene la propiedad de Fatou;

ii) si además E tiene la propiedad σ-Fatou, entonces E tiene la propiedad de Fatou.

Demostración. Puesto que μ es σ-finita resulta que $E^{\times}$ es un μ-e.f.B. saturado [38, Ch.15 §71 Thm. 4]. Luego, de la proposición 4.1.7 obtenemos i).

Ahora como E tiene la propiedad σ-Fatou se sigue que $E \equiv E^{\times\times}$ [38, Ch. 15 §71 Thm. 1]. Así de i) se sigue ii). ■

Observación 4.1.10 Del corolario anterior resulta que cuando μ es σ-finita, las propiedades σ-Fatou y Fatou son equivalentes para un μ-e.f.B. saturado.

4.2. Medida definida en un δ-anillo

En esta sección continuaremos nuestro estudio del espacio asociado a un μ-e.f.B. saturado E. Ahora supongamos que $\Sigma = \mathcal{R}^{loc}$ y $\mu = |\lambda|$, donde $\lambda : \mathcal{R} \to [0, \infty]$ es una medida definida en un δ-anillo. Recordemos que $S(\mathcal{R}) \subset L^0(|\lambda|)$ denota el subespacio de funciones simples con soporte en $\mathcal{R}$ y $L^1_{loc}(\lambda)$ es el espacio de funciones localmente λ-integrables. Iniciamos estudiando algunos casos en que E y $E^\times$ son saturados.

Lema 4.2.1 Sea E un $|\lambda|$-e.f.B.

i) Si $S(\mathcal{R}) \subset E$, entonces E es saturado.

ii) Si E es saturado y $E \subset L^1_{loc}(\lambda)$, entonces $E^\times$ es un $|\lambda|$-e.f.B. saturado.

Demostración. Sea $A \in \mathcal{R}^{loc}$ tal que $|\lambda|(A) > 0$. Entonces existe $B \in \mathcal{R}_A$ tal que $\lambda(B) > 0$.

i) Ya que $B \in \mathcal{R}$, resulta que $\chi_B \in E$. Por lo tanto E es un λ-e.f.B. saturado.

ii) Tomemos $f \in E$. Por hipótesis $f \in L^1_{loc}(\lambda)$, así $f\chi_B \in L^1(\lambda)$. Luego, $\chi_B \in E^\times$. ■

Observación 4.2.2 Cuando $S(\mathcal{R}) \subset E$, el espacio E es un e.f.B. respecto de $(\Omega, \mathcal{R}, \lambda)$ en el sentido introducido por O. Delgado en [15, Def. 3.1]. Luego, de i) en el lema anterior, estos espacios siempre son saturados.

Sean $\nu : \mathcal{R} \to X$ una medida vectorial y $\lambda : \mathcal{R} \to [0, \infty]$ una medida de control local para ν. Dado $1 \le p < \infty$ se definen los espacios $L^p_w(\nu)$ y $L^p(\nu)$ como

$$L^p_w(\nu) := \{f \in L^0(\nu) : |f|^p \in L^1_w(\nu)\} \text{ y } L^p(\nu) := \{f \in L^0(\nu) : |f|^p \in L^1(\nu)\}.$$

A las funciones en $L^p_w(\nu)$ se les llama *escalarmente p-integrables* respecto de ν y a las funciones en $L^p(\nu)$ *p-integrables* respecto de ν.

Notemos que $L^p(\nu) \subset L^p_w(\nu)$. Además $L^p_w(\nu)$ y $L^p(\nu)$ son $|\lambda|$-e.f.B. con la norma

$$\|f\|_{p,\nu} := \|\,|f|^p\|_\nu^{\frac{1}{p}} = \sup_{x^* \in B_{X^*}} \left(\int_\Omega |f|^p d|\langle \nu, x^* \rangle| \right)^{\frac{1}{p}}, \ \forall\ f \in L^p_w(\nu).$$

Asimismo $S(\mathcal{R}) \subset L^p(\nu)$ es un subespacio denso, $L^p(\nu)$ es σ-orden continuo y $L^p_w(\nu)$ tiene la propiedad σ-Fatou [22, p. 37].

El siguiente resultado se obtiene de i) en el lema anterior y la proposición 4.1.7.

Proposición 4.2.3 Sea $1 \leq p < \infty$. Entonces el espacio $L^p(\nu)$ es saturado. Luego, $L^p(\nu)^\times$, con la norma $\| \cdot \|_{\nu^\times} := \| \cdot \|_{L^p(\nu)^\times}$, es un $|\lambda|$-e.f.B. con la propiedad σ-Fatou. Si además λ es σ-finita, entonces $L^p(\nu)^\times$ tiene la propiedad de Fatou.

Observación 4.2.4 Puesto que $L^1(\nu)$ siempre es saturado respecto de cualquier medida de control local para ν, del lema 4.1.4 se sigue que $L^1(\nu)$ es orden denso en $L^0(|\lambda|)$. Este resultado fue probado de manera distinta por J. M. Calabuig, O. Delgado, M. A. Juan y E. A. Sánchez-Pérez [9, 4.2].

Consideremos como medida de control local para ν a su variación $|\nu|$. Así $L^1(\nu)$ es un $|\nu|$-e.f.B. saturado, luego $L^1(\nu)^\times$ es un $|\nu|$-e.f.B. con la propiedad σ-Fatou. Sin embargo puede suceder que $L^1(\nu)^\times$ no sea saturado.

Por ejemplo, consideremos la σ-álgebra Σ que consta de los subconjuntos de $[0,1]$ que son Borel medibles y sea μ la medida de Lebesgue. Entonces la función $\nu : \Sigma \to L^2([0,1])$ definida por $\nu(A) := \chi_A$ es una medida vectorial tal que $L^1(\nu) \equiv L^2([0,1])$ y el rango de $|\nu|$ es $\{0, \infty\}$ [10, p. 57]. Por lo tanto $L^1(|\nu|) = \{0\}$. En este caso

$$L^1(\nu)^\times = \{g \in L^0(\mathcal{R}^{loc}) : gf = 0, \ \forall \ f \in L^1(\nu)\} = \{0\}.$$

Luego, $L^1(\nu)^\times$ no es saturado y el estudio de los espacios asociado y doble asociado de $L^1(\nu)$ no proporciona información de interés.

Como hemos visto, a diferencia del caso en que μ es σ-finita, aunque un μ-e.f.B. E sea saturado es posible que su espacio asociado no lo sea. Sin embargo, cuando el espacio con el cual estemos trabajando sea $L^1(\nu)$, respecto de una medida vectorial definida en un δ-anillo, en el teorema 4.2.9 veremos que para ciertas medidas de control no se presenta el problema anterior.

La siguiente definición fue introducida por J. K. Brooks y N. Dinculeanu en [6, p. 162].

Definición 4.2.5 Una medida $\lambda : \mathcal{R} \to [0, \infty]$ es *localmente σ-finita*, si para cada $B \in \mathcal{R}$, existe una colección $\{B_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subset \mathcal{R}$ que satisface que $B = \bigcup_{n=1}^{\infty} B_n$ y $\lambda(B_n) < \infty$, $\forall \ n \in \mathbb{N}$.

Observación 4.2.6 En [22, p. 13] se define un concepto distinto al anterior pero con el mismo nombre.

Ejemplo 4.2.7 Supongamos que $\mathcal{R} = \Sigma$ es una σ-álgebra. Si $\mu : \Sigma \to [0, \infty]$ es σ-finita, entonces μ es localmente σ-finita.

Ejemplo 4.2.8 Consideremos un conjunto no-vacío Γ. Sean $\mathcal{R} := \{B \subset \Gamma : B \text{ es finito}\}$ y $\lambda : \mathcal{R} \to [0, \infty]$ la medida de contar. Entonces $\mathcal{R}$ es un δ-anillo y λ es una medida localmente σ-finita. Además: Si Γ no es numerable, entonces λ no es σ-finita.

Sean $\lambda : \mathcal{R} \to [0, \infty]$ una medida localmente σ-finita y E un $|\lambda|$-e.f.B. Tomemos $A \in \mathcal{R}^{loc}$ y supongamos que

$$A := \bigcup_{n=1}^{\infty} B_n \cup N \text{ con } \{B_n\} \subset \mathcal{R},\ \lambda(B_n) < \infty,\ \forall\, n \in \mathbb{N} \text{ y } N \in \mathcal{N}_0(|\lambda|). \tag{4.2.1}$$

Consideremos el δ-anillo $\mathcal{R}_A$ de subconjuntos de A y su σ-álgebra asociada $(\mathcal{R}_A)^{loc}$. Denotemos por λ_A a la restricción de λ a $\mathcal{R}_A$. Así $(A, (\mathcal{R}_A)^{loc}, |\lambda_A|)$ es un espacio de medida σ-finito. Por lo tanto, si $|\lambda|(A) > 0$, resulta que el espacio E_A definido en (4.1.4), con la norma $\|\cdot\|_A$, es un $|\lambda_A|$-e.f.B. saturado. En este caso, como $|\lambda_A|$ es σ-finita, obtenemos que $E_A^\times$, con la norma $\|\cdot\|_{E_A^\times}$, es un $|\lambda_A|$-e.f.B. saturado.

Notemos que si $B \in \mathcal{R}$, entonces es de la forma (4.2.1). Además $\mathcal{R}_B = (\mathcal{R}_B)^{loc}$. Luego $(B, \mathcal{R}_B, \lambda_B)$ es un espacio de medida σ-finito.

Teorema 4.2.9 Sea E un $|\lambda|$-e.f.B. saturado. Si λ es localmente σ-finita, entonces $E^\times$ es un $|\lambda|$-e.f.B. saturado.

Demostración. Sean $A \in \mathcal{R}^{loc}$ tal que $|\lambda|(A) > 0$ y $B \in \mathcal{R}_A$ tal que $\lambda(B) > 0$. Hemos visto que el espacio E_B definido en (4.1.4) es un λ_B-e.f.B. saturado. Como $\lambda_B(B) > 0$ existe $C \in \mathcal{R}_B$ tal que $0 < \lambda_B(C) = \lambda(C)$ y $\chi_C \in E_B^\times$. Ahora sea $f \in E$. Entonces $f_B \in E_B$ y

$$\int_\Omega |f|\chi_C d|\lambda| = \int_B |f_B|\chi_C d|\lambda_B| < \infty.$$

Por lo tanto $\chi_C \in E^\times$. ■

En el caso en que μ es σ-finita es bien conocido que si E tiene la propiedad σ-Fatou, entonces $E \equiv E^{\times\times}$. Partiendo de este hecho, a continuación probaremos el resultado correspondiente en el contexto que se ha introducido.

Teorema 4.2.10 Sean λ una medida localmente σ-finita y E un $|\lambda|$-e.f.B. saturado. Si E tiene la propiedad de Fatou, entonces $E \equiv E^{\times\times}$.

Demostración. Del corolario 4.1.8 obtenemos que $E \subset E^{\times\times}$ y $\|f\|_{E^{\times\times}} \leq \|f\|_E, \forall\, f \in E$. Probaremos entonces la otra contención y la igualdad de las normas.

Sea $0 \leq f \in E^{\times\times}$. Fijemos $B \in \mathcal{R}$. Entonces λ_B es σ-finita y E_B es un λ_B-e.f.B. Además como E tiene la propiedad de Fatou resulta que E_B tiene la propiedad de Fatou (por lo tanto la propiedad σ-Fatou). De [38, Ch. 15 §71 Thm. 1] obtenemos $E_B \equiv E_B^{\times\times}$. Por lo tanto la restricción de f a B, $f_B \in E_B$ y $\|f_B\|_B = \|f_B\|_{E_B^{\times\times}}$. Observemos que $(f_B)^\Omega = f\chi_B$, así $f\chi_B \in E$ y $\|f\chi_B\|_E = \|f\chi_B\|_{E^{\times\times}}$.

Por otra parte, es sencillo verificar que un δ-anillo $\mathcal{R}$ es un conjunto dirigido con el orden dado de la siguiente manera

$$B \leq C \;\text{ si, }\; B \subset C,\ \forall B, C \in \mathcal{R}.$$

Consideremos la red $\{f\chi_B\}_{B\in\mathcal{R}} \subset E$. Sean $B, C \in \mathcal{R}$. Entonces $B \cup C \in \mathcal{R}$; además $f_B \leq f_{B\cup C}$ y $f_C \leq f_{B\cup C}$. Por lo tanto $\{f\chi_B\}_{B\in\mathcal{R}}$ es un sistema dirigido crecientemente y $\|f\chi_B\|_E = \|f\chi_B\|_{E^{\times\times}} \leq \|f\|_{E^{\times\times}}$, $\forall\, B \in \mathcal{R}$. Ya que E tiene la propiedad de Fatou, existe $h \in E \subset E^{\times\times}$ tal que $h = \sup\limits_{B\in\mathcal{R}} f\chi_B$ y

$$\|h\|_E = \sup_{B\in\mathcal{R}} \|f\chi_B\|_E = \sup_{B\in\mathcal{R}} \|f\chi_B\|_{E^{\times\times}} \leq \|f\|_{E^{\times\times}}. \tag{4.2.2}$$

Probaremos a continuación que $h = f$, $|\lambda|$-c.t.p. Puesto que $f\chi_B \leq f$, $\forall\, B \in \mathcal{R}$, resulta que $h \leq f$. Ahora supongamos que existe $A \in \mathcal{R}^{loc}$ tal que $h\chi_A < f\chi_A$ y $|\lambda|(A) > 0$ y tomemos $B \in \mathcal{R}_A$ de medida positiva tal que $h\chi_B < f\chi_B$. Lo cual es una contradicción. Por lo tanto $h = f$, $|\lambda|$-c.t.p. Luego, $f \in E$ y de (4.2.2) obtenemos la igualdad de las normas. ■

El siguiente resultado es bien conocido cuando μ es σ-finita. Demostraremos que sigue siendo válido considerando una medida localmente σ-finita.

Proposición 4.2.11 Sean E un $|\lambda|$-e.f.B. saturado y λ una medida localmente σ-finita. Si $h \in L^1(\lambda)$:

i) entonces dado $\varepsilon > 0$ existen $f \in E$ y $g \in E^\times$ tales que

$$h = fg \quad \text{y} \quad \|f\|_E \|g\|_{E^\times} \leq (1+\varepsilon) \int_\Omega |h| d|\lambda|.$$

ii) si además E tiene la propiedad σ-Fatou, entonces existen $f \in E$ y $g \in E^\times$ tales que

$$h = fg \quad \text{y} \quad \|f\|_E \|g\|_{E^\times} = \int_\Omega |h| d|\lambda|.$$

Demostración. Si $h = 0$, la cunclusión se obtiene trivialmente. Así supongamos que $h \neq 0$. Como $h \in L^1(\lambda)$, $A := \text{sop}h = \bigcup_{n=1}^{\infty} B_n \cup N$, donde $\{B_n\} \subset \mathcal{R}$ y $N \in \mathcal{N}_0(\lambda)$. Ya que λ es localmente σ-finita podemos suponer que $\lambda(B_n) < \infty$, $\forall\, n \in \mathbb{N}$. Ahora consideremos el $|\lambda_A|$-e.f.B. E_A. Entonces $h_A \in L^1(\lambda_A)$.

i) Dado $\varepsilon > 0$, por [20, Thm. 1, ii)], existen $\tilde{f} \in E_A$ y $\tilde{g} \in E_A^\times$ tales que

$$h_A = \tilde{f}\tilde{g} \ \text{ y } \ \|\tilde{f}\|_{E_A}\|\tilde{g}\|_{E_A^\times} \leq (1+\varepsilon)\int_A |h_A| d|\lambda_A|.$$

ii) Como E tiene la propiedad σ-Fatou se sigue que E_A también la tiene. De [20, Thm. 1 i)] obtenemos $\tilde{f} \in E_A$ y $\tilde{g} \in E_A^\times$ tales que

$$h_A = \tilde{f}\tilde{g} \ \text{ y } \ \|\tilde{f}\|_{E_A}\|\tilde{g}\|_{E_A^\times} = \int_A |h_A| d|\lambda_A|.$$

Ya que $h = h_A\chi_A$, $f := \tilde{f}^\Omega \in E$ y $g := \tilde{g}^\Omega \in E^\times$, se sigue el resultado. ■

4.3. Medida de Brooks-Dinculeanu

Veremos ahora que siempre existe una medida de control local $\lambda : \mathcal{R} \to [0,\infty]$ para $\nu : \mathcal{R} \to X$ que es localmente σ-finita. Así por la proposición 4.2.9 el espacio $L^1(\nu)^\times$ respecto de λ será saturado.

Definición 4.3.1 Una medida $\lambda : \mathcal{R} \to [0,\infty]$ es una medida de *Brooks-Dinculeanu* para ν, si es una medida de control local para ν que además es localmente σ-finita.

Ejemplo 4.3.2

1. Sea $\nu : \Sigma \to X$ una medida vectorial definida en una σ-álgebra. Si $\mu : \Sigma \to [0,\infty)$ es una medida de Rybakov, entonces μ es una medida de Brooks-Dinculeanu.

2. Sea $\nu : \mathcal{R} \to X$ una medida vectorial σ-finita. Entonces ν tiene una medida de control local acotada $\lambda : \mathcal{R} \to [0,\infty)$ [14, Thm. 3.3]. Luego, λ es una medida de Brooks-Dinculeanu.

3. Sea $\nu : \mathcal{R} \to X$ una medida vectorial. Supongamos que $I_\nu : L^1(\nu) \to X$ es un operador compacto. Tomemos $B \in \mathcal{R}$. Denotemos por ν_B la restricción de ν a la σ-álgebra $\mathcal{R}_B$. Notemos que $L^1(\nu_B) \equiv L^1(\nu)_B$. Entonces $I_{\nu_B} : L^1(\nu_B) \to X$ es un

operador compacto. Como ν_B está definida en una σ-álgebra, de [33, Thm. 4] se sigue que $|\nu|(B) = |\nu_B|(B) < \infty$. Por lo tanto, en este caso $|\nu|$, la variación de ν, es una medida de Brooks-Dinculeanu.

El siguiente resultado fue establecido por E. Jiménez Fernández, M. A. Juan y E. A. Sánchez-Pérez en [21, p. 3], dada su importancia para nuestro desarrollo, incluimos su prueba.

Teorema 4.3.3 Si $\nu : \mathcal{R} \to X$ es una medida vectorial, entonces ν tiene una medida de Brooks-Dinculeanu.

Demostración. Fijemos $B \in \mathcal{R}$. Entonces $\nu_B : \mathcal{R}_B \to X$ es una medida vectorial definida en una σ-álgebra. Por lo tanto existe una medida de Rybakov $\lambda_B : \mathcal{R}_B \to [0, \infty)$.

Ahora tomemos $B' \in \mathcal{R}$ tal que $B \subset B'$ y $\lambda_{B'} : \mathcal{R}_{B'} \to [0, \infty)$ una medida de Rybakov para $\nu_{B'}$. Así $\mathcal{R}_B \subset \mathcal{R}_{B'}$. Consideremos la restricción de $\lambda_{B'}$ a $\mathcal{R}_B$. Ya que $\mathcal{N}_0(\nu_B) = \mathcal{N}_0(\lambda_B)$ y $\mathcal{N}_0(\nu_{B'}) = \mathcal{N}_0(\lambda_{B'})$, resulta que $A \in \mathcal{N}_0(\lambda_B)$ si, y sólo si, $A \in \mathcal{N}_0(\nu)$ si, y sólo si, $A \in \mathcal{N}_0(\lambda_{B'})$, $\forall\ A \in \mathcal{R}_B$.

A partir de las condiciones que acabamos de establecer, en [6, Thm. 3.1] Brooks y Dinculeanu prueban la existencia una medida $\lambda : \mathcal{R} \to [0, \infty]$ localmente σ-finita tal que si $A \in \mathcal{R}$, entonces $\lambda(A) = 0$ si, y sólo si, $\lambda_B(A \cap B) = 0$, $\forall\ B \in \mathcal{R}$.

Consideremos la variación de λ, $|\lambda| : \mathcal{R}^{loc} \to [0, \infty]$. Tomemos $A \in \mathcal{R}^{loc}$. Ya que $\nu(A \cap B) = 0$ si, y sólo si, $\lambda_B(A \cap B) = 0$ si, y sólo si, $\lambda(A \cap B) = 0$, $\forall\ B \in \mathcal{R}$, resulta que $\mathcal{N}_0(\nu) = \mathcal{N}_0(|\lambda|)$, esto es, λ es una medida de control local para ν. ■

De ahora en adelante consideraremos siempre una medida de Brooks-Dinculeanu $\lambda : \mathcal{R} \to [0, \infty]$. Definamos entonces

$$\widehat{\mathcal{R}} := \{B \in \mathcal{R} : \lambda(B) < \infty\}.$$

Claramente $\widehat{\mathcal{R}}$ es un δ-anillo contenido en $\mathcal{R}$.

Lema 4.3.4 $\mathcal{R}^{loc} = \widehat{\mathcal{R}}^{loc}$.

Demostración. Sean $A \in \mathcal{R}^{loc}$ y $B \in \widehat{\mathcal{R}}$. Entonces $A \cap B \in \mathcal{R}$ y $\lambda(A \cap B) \leq \lambda(B) < \infty$. Luego, $A \in \widehat{\mathcal{R}}^{loc}$. Tomemos ahora $A \in \widehat{\mathcal{R}}^{loc}$ y $B \in \mathcal{R}$. Entonces $B = \displaystyle\bigcup_{n=1}^{\infty} B_n$, donde $\{B_n\} \subset \widehat{\mathcal{R}}$. Ya que $A \cap B_n \in \widehat{\mathcal{R}} \subset \mathcal{R}$, $\forall\ n \in \mathbb{N}$ y $\mathcal{R}^{loc}$ es una σ-algebra que contiene a $\mathcal{R}$, resulta que $A \cap B = \bigcup_{n=1}^{\infty} A \cap B_n \in \mathcal{R}^{loc}$. Por lo tanto $A \cap B = (A \cap B) \cap B \in \mathcal{R}$. Se sigue que $A \in \mathcal{R}^{loc}$. ■

Ahora probemos que

$$|\langle \nu, x^* \rangle| = |\langle \widehat{\nu}, x^* \rangle|, \ \forall \ x^* \in X^*, \tag{4.3.1}$$

donde $\widehat{\nu}$ es la restricción de ν a $\widehat{\mathcal{R}}$. Fijemos $x^* \in X^*$ y $A \in \mathcal{R}^{loc}$. Tomemos $B \in \mathcal{R}_A$. Puesto que λ es localmente σ-finita, existe una sucesión creciente, $\{B_n\} \subset \widehat{\mathcal{R}}$ tal que $B = \bigcup_{n=1}^{\infty} B_n$. Así,

$$\begin{aligned} |\langle \nu, x^* \rangle|(B) &= \sup_n |\langle \nu, x^* \rangle|(B_n) = \sup_n |\langle \widehat{\nu}, x^* \rangle|(B_n) \\ &\leq \sup_{C \in \widehat{\mathcal{R}}_A} |\langle \widehat{\nu}, x^* \rangle|(C) = |\langle \widehat{\nu}, x^* \rangle|(A). \end{aligned}$$

Se sigue que $|\langle \nu, x^* \rangle|(A) \leq |\langle \widehat{\nu}, x^* \rangle|(A)$. En la sección 2.4 vimos que la otra desigualdad siempre se cumple, con lo que establecemos (4.3.1).

Así de la proposición 2.4.2 y el corolario 2.4.3 obtenemos que $L^1(\nu) = L^1(\widehat{\nu})$ y $L^1_w(\nu) = L^1_w(\widehat{\nu})$. Luego, cuando sea conveniente podremos trabajar sobre el δ-anillo $\widehat{\mathcal{R}}$ en lugar de $\mathcal{R}$.

Hemos visto que si E es un μ-e.f.B, el rango de la isometría canónica $R : E^\times \to E^*$ es un subretículo de Banach. Enseguida estableceremos que si $L^1(\nu)^\times$ tiene la propiedad de Fatou, el rango de R es además un ideal.

Proposición 4.3.5 Si $L^1(\nu)^\times$ tiene la propiedad de Fatou, entonces $R(L^1(\nu)^\times)$ es un ideal de $L^1(\nu)^*$.

Demostración. Antes de iniciar la prueba cabe mencionar que la primera parte es como la demostración en el caso clásico. Sean $0 \leq \varphi \in L^1(\nu)^*$ y $0 \leq g \in L^1(\nu)^\times$ tales que $\varphi \leq \varphi_g$. Ya que $R(L^1(\nu)^\times)$ es un subretículo de Banach de $L^1(\nu)^*$, resta probar que $\varphi \in R(L^1(\nu)^\times)$. Definamos $m_\varphi : \mathcal{R} \to [0, \infty)$ como

$$m_\varphi(B) := \varphi(\chi_B), \ \forall \ B \in \mathcal{R}.$$

Ya que $L^1(\nu)$ es σ-orden continuo y φ es lineal, continua y positiva se sigue que m_φ es una medida positiva.

Fijemos $B \in \mathcal{R}$. Denotemos por m_{φ_B} a la restricción a $\mathcal{R}_B$ de la medida m_φ. Entonces m_{φ_B} es acotada. Por otra parte ya que λ es localmente σ-finita, su restricción a $\mathcal{R}_B$, λ_B es una medida positiva σ-finita.

Ahora si $A \in \mathcal{R}_B$ es tal que $\lambda_B(A) = |\lambda|(A) = 0$, entonces

$$0 \leq m_{\varphi_B}(A) \leq \int_A g d|\lambda| = 0.$$

Esto es $m_{\varphi_B}(A) = 0$. Por el teorema de Radon-Nikodym [35, p. 121] existe $h_B \in L^0(\mathcal{R}_B)$ tal que

$$\varphi(\chi_A) = m_{\varphi_B}(A) = \int_A h_B d\lambda_B = \int_A h_B d|\lambda|, \ \forall\ A \in \mathcal{R}_B.$$

Se sigue que

$$\varphi(s) = \int_A h_B s d|\lambda|, \ \forall\ s \in S(\mathcal{R}). \tag{4.3.2}$$

Consideremos ahora $0 \leq f \in L^1(\nu)_B$. Tomemos $\{s_n\} \subset S(\mathcal{R}_B)$ tal que $0 \leq s_n \uparrow f$, λ_B-c.t.p. De la continuidad de φ, de (4.3.2) y del teorema de la convergencia monótona obtenemos

$$\varphi(f) = \lim_{n\to\infty} \varphi(s_n) = \lim_{n\to\infty} \int_B h_B s_n d|\lambda| = \int_B h_B f d|\lambda|.$$

Luego,

$$\varphi(f) = \int_B h_B f d\lambda_B, \ \forall\ f \in L^1(\nu)_B. \tag{4.3.3}$$

Por lo tanto $h_B \in L^1(\nu)_B^\times$. Veamos que h_B es única. Supongamos que existe $\tilde{h}_B$ en $L^1(\nu)_B^\times$ tal que $\varphi(f) = \displaystyle\int_B \tilde{h}_B f d\lambda_B$, $\forall\ f \in L^1(\nu)_B$. Entonces $0 \leq \displaystyle\int_B (h_B - \tilde{h}_B) f d\lambda_B = 0$, $\forall\ f \in L^1(\nu)_B^+$. De la definición de $\|\cdot\|_{L^1(\nu)_B^\times}$ resulta que $\|h_B - \tilde{h}_B\|_{L^1(\nu)_B^\times} = 0$. Puesto que $L^1(\nu)$ es saturado se sigue que $h_B = \tilde{h}_B$, λ_B-c.t.p.

Denotemos por H_B a la extensión canónica de h_B. Entonces $H_B \in L^1(\nu)^\times$. Además como $\varphi \leq \varphi_g$ resulta que $\varphi_{H_B} \leq \varphi_g$. Así,

$$\|H_B\|_{\nu^\times} = \|\varphi_{H_B}\| \leq \|\varphi_g\| = \|g\|_{\nu^\times}.$$

Construimos entonces un sistema $\{H_B\}_{B\in\mathcal{R}} \subset L^1(\nu)^\times$ tal que $\sup\limits_{B\in\mathcal{R}} \|H_B\|_{\nu^\times} < \infty$. Veamos que este sistema es dirigido crecientemente.

Sean $B, C \in \mathcal{R}$ y $f \in L^1(\nu)^+$. Entonces $0 \leq \varphi(f\chi_{C\setminus B}) = \varphi(f\chi_{B\cup C}) - \varphi(f\chi_B)$, por lo tanto

$$\int_{B\cup C} (H_{B\cup C} - H_B) f d|\lambda| \geq 0.$$

Lo anterior indica que $H_B \leq H_{B\cup C}$. Similarmente $H_C \leq H_{B\cup C}$. Ya que $B \cup C \in \mathcal{R}$, concluimos que $\{H_B\}_{B\in\mathcal{R}}$ es un sistema dirigido crecientemente. Puesto que $L^1(\nu)^\times$ tiene la propiedad de Fatou, existe $h = \sup\limits_{B\in\mathcal{R}} H_B \in L^1(\nu)^\times$.

Sea $f \in L^1(\nu)^+$. Para probar que $\varphi(f) = \int_\Omega fhd|\lambda|$ estableceremos primero que $H_B = h\chi_B$, $\forall\ B \in \mathcal{R}$. Fijemos $B \in \mathcal{R}$. Es claro que $H_B \leq h\chi_B$. Ahora supongamos que $H_B < h\chi_B$, y tomemos $C \in \mathcal{R}_B$ de medida positiva tal que $H_B(t) < h\chi_B(t)$, $\forall\ t \in C$. Definamos $k = h\chi_{\Omega\setminus C} + H_B\chi_C$. Es claro que $k \in L^1(\nu)^\times$, además si $D \in \mathcal{R}$, entonces

$$H_D = H_D\chi_{\Omega\setminus C} + H_{D\cap C} \leq h\chi_{\Omega\setminus C} + H_B\chi_C = k,$$

así k es una cota superior de $\{H_B\}_{B\in\mathcal{R}}$, lo que contradice que $h = \sup\limits_{B\in\mathcal{R}} H_B$. Concluimos que $H_B = h\chi_B$.

Por la observación 1.4.11, sop$f = \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} B_n \cup N$ donde $\{B_n\} \subset \mathcal{R}$ y $N \in \mathcal{N}_0(\nu)$. Por lo tanto,

$$\begin{aligned} \varphi(f) &= \sum_{n=1}^{\infty} \varphi(f\chi_{B_n}) = \sum_{n=1}^{\infty} \int_\Omega fH_Bd|\lambda| \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \int_\Omega fh\chi_Bd|\lambda| = \int_\Omega \sum_{n=1}^{\infty} f\chi_Bhd|\lambda| = \int_\Omega fhd|\lambda|. \end{aligned}$$

Esto prueba que $\varphi = \varphi_h \in R(L^1(\nu)^\times)$. ■

G. P. Curbera y W. J. Ricker determinaron que $L^p(\nu)^{\times\times} \equiv L^p_w(\nu)$ cuando se considera una medida vectorial definida en una σ-álgebra y una medida de control de Rybakov [12, Prop. 2]. Veremos que esta igualdad permanece al pasar a una medida vectorial definida en un δ-anillo y trabajar con una medida de Brooks-Dinculeanu.

Proposición 4.3.6 Sea $1 \leq p < \infty$. Entonces $L^p(\nu)^{\times\times} \equiv L^p_w(\nu)$.

Demostración. Estableceremos primero que $L^p_w(\nu) \subset L^p(\nu)^{\times\times}$ y $\|f\|_{p,\nu^{\times\times}} \leq \|f\|_{p,\nu}$, $\forall\ f \in L^p_w(\nu)$. Sean $\varphi \in S(\mathcal{R}^{loc})$ tal que $\varphi \in L^p_w(\nu)$ y $B \in \widehat{\mathcal{R}}$. Así $\varphi\chi_B \in S(\mathcal{R}) \subset L^p(\nu)$. Por la desigualdad de Hölder, para cada $g \in L^p(\nu)^\times$

$$\int_B |g\varphi|d|\lambda| \leq \|g\|_{p,\nu^\times}\|\varphi\chi_B\|_{p,\nu} \leq \|g\|_{p,\nu^\times}\|\varphi\|_{p,\nu}.$$

Teniendo presente la proposicion 1.3.15 resulta

$$\int_\Omega |g\varphi|d|\lambda| = \sup_{B\in\widehat{\mathcal{R}}} \int_B |g\varphi|d|\lambda| \leq \|g\|_{p,\nu^\times}\|\varphi\|_{p,\nu}.$$

Se sigue entonces que $\varphi \in L^p(\nu)^{\times\times}$ y

$$\|\varphi\|_{p,\nu^{\times\times}} \leq \|\varphi\|_{p,\nu}. \tag{4.3.4}$$

Consideremos ahora $f \in L^p_w(\nu)$ y tomemos $\{\varphi_n\} \subset S(\mathcal{R}^{loc})$ tal que $0 \leq \varphi_n \uparrow |f|$. Así, $\{\varphi_n\} \subset L^p_w(\nu)$. Por (4.3.4), $\|\varphi_n\|_{p,\nu^{\times\times}} \leq \|\varphi_n\|_{p,\nu} \leq \|f\|_{p,\nu}$, $\forall\, n \in \mathbb{N}$. Puesto que $L^p(\nu)^{\times\times}$ tiene la propiedad σ-Fatou resulta que $f \in L^p(\nu)^{\times\times}$ y $\|f\|_{p,\nu^{\times\times}} \leq \|f\|_{p,\nu}$.

Probemos ahora la otra contención y la otra desigualdad. Fijemos $B \in \mathcal{R}$ y denotemos por ν_B la restricción de ν a la σ-álgebra $\mathcal{R}_B$. Como $L^1(\nu_B) \equiv L^1(\nu)_B$, se sigue que $L^p(\nu_B) \equiv L^p(\nu)_B$. De [12, Prop. 2] obtenemos que $L^p(\nu_B)^{\times\times} \equiv L^p_w(\nu_B)$.

Sea $f \in L^p(\nu)^{\times\times}$ y denotemos por f_B a su restricción a B, entonces $f_B \in L^p_w(\nu_B)$ y $\|f_B\|_{p,\nu_B} = \|f_B\|_{p,\nu_B^{\times\times}} \leq \|f\|_{p,\nu^{\times\times}}$. Así, para cada $x^* \in B_{X^*}$

$$\int_B |f|^p d|\langle \nu, x^* \rangle| \leq \|f\|^p_{p,\nu^{\times\times}}.$$

De la proposición 2.3.1 i) obtenemos que $|f|^p \in L^1_w(\nu)$ y $\|\,|f|^p\|_\nu \leq \|f\|^p_{p,\nu^{\times\times}}$. Por lo tanto $f \in L^p_w(\nu)$ y $\|f\|_{p,\nu} \leq \|f\|_{p,\nu^{\times\times}}$. ■

Aunque el siguiente resultado es conocido y aparece en [9, p. 77], lo obtenemos como consecuencia de la proposición anterior y el corolario 4.1.9.

Corolario 4.3.7 Sea $1 \leq p < \infty$. Si $\nu : \mathcal{R} \to X$ es una medida vectorial σ-finita, entonces $L^p_w(\nu)$ tiene la propiedad de Fatou.

El siguiente corolario se sigue de la proposición anterior y el lema 4.1.6.

Corolario 4.3.8 Sean $\lambda : \mathcal{R} \to [0, \infty]$ una medida de Brooks-Dinculeanu para ν y $1 \leq p < \infty$. Si $L^p_w(\nu) \subset L^1(\lambda)$, entonces $L^p_w(\nu)$ tiene la propiedad de Fatou.

La prueba del siguiente resultado es análoga al caso σ-finito.

Lema 4.3.9 Sean E y F μ-e.f.B. tales que $E \subset F$ y existe $a > 0$ con $\|f\|_F \leq a\|f\|_E$, $\forall\, f \in E$. Entonces $F^\times \subset E^\times$ y

$$\|g\|_{E^\times} \leq a\|g\|_{F^\times}, \quad \forall\, g \in F^\times.$$

Corolario 4.3.10 Sea $1 \leq p < \infty$. Entonces $L^p(\nu)^\times \equiv L^p_w(\nu)^\times$.

Demostración. Por el lema anterior, $L^p_w(\nu)^\times \subset L^p(\nu)^\times$ y $\|g\|_{p,\nu^\times} \leq \|g\|_{L^p_w(\nu)^\times}$, $\forall\, g \in L^p_w(\nu)^\times$. Ahora sean $f \in L^p_w(\nu)$ y $g \in L^p(\nu)^\times$, teniendo presente la desigualdad de Hölder y la proposición anterior resulta que

$$\int_\Omega |gf|d|\lambda| \leq \|g\|_{p,\nu^\times}\|f\|_{p,\nu^{\times\times}} = \|g\|_{p,\nu^\times}\|f\|_{p,\nu}.$$

Por lo tanto $g \in L^p_w(\nu)^\times$ y $\|g\|_{L^p_w(\nu)^\times} \leq \|g\|_{p,\nu^\times}$. ■

Establecimos en la proposición 4.1.7 que el espacio asociado de un μ-e.f.B. tiene la propiedad de Fatou cuando μ es σ-finita. A continuación veremos que este resultado se sigue cumpliendo para ciertas medidas de Brooks-Dinculeanu. Para esto consideremos la siguiente propiedad de una medida vectorial, con la que trabajan J. M. Calabuig, O. Delgado, M. A. Juan y E. A. Sánchez Pérez en [9, p. 77].

Definición 4.3.11 Una medida vectorial $\nu : \mathcal{R} \to X$ es $\mathcal{R}$-*descomponible* si Ω se puede escribir como $\Omega = \bigcup_{\alpha\in\Delta} \Omega_\alpha \cup N$, donde $N \in \mathcal{N}_0(\nu)$ y $\{\Omega_\alpha\}_{\alpha\in\Delta} \subset \mathcal{R}$ es una colección disjunta que cumple:

a) si $A_\alpha \in \mathcal{R}_{\Omega_\alpha}$, $\forall\, \alpha \in \Delta$, entonces $\bigcup_{\alpha\in\Delta} A_\alpha \in \mathcal{R}^{loc}$, y

b) si $N_\alpha \in \mathcal{R}_{\Omega_\alpha}$ es $\langle \nu, x^*\rangle$-nulo, $\forall\, \alpha \in \Delta$, entonces $\bigcup_{\alpha\in\Delta} N_\alpha \in \mathcal{N}_0(\langle \nu, x^*\rangle)$, para cada $x^* \in X^*$.

Observación 4.3.12 Sean ν una medida vectorial $\mathcal{R}$-descomponible y $A \in \mathcal{R}^{loc}$. Si $A \cap \Omega_\alpha \in \mathcal{N}_0(\nu)$, $\forall\, \alpha \in \Delta$, entonces $A \cap \Omega_\alpha$ es $\langle \nu, x^*\rangle$-nulo, $\forall\, \alpha \in \Delta$ y $\forall\, x^* \in B_{X^*}$. De b) en la definición se sigue que A es ν-nulo.

Como se puede ver en [9, Lemma 4.6, p. 77] las medidas vectoriales σ-finitas y las medidas vectoriales discretas son ejemplos de medidas $\mathcal{R}$-descomponibles. Sin embargo existen medidas $\mathcal{R}$-descomponibles que no son σ-finitas ni discretas [9, p. 85].

Proposición 4.3.13 Sean $\nu : \mathcal{R} \to X$ una medida vectorial $\mathcal{R}$-descomponible, $\lambda : \mathcal{R} \to [0, \infty]$ una medida de Brooks-Dinculeanu para ν y E un $|\lambda|$-e.f.B. Si $S(\mathcal{R}) \subset E$, entonces $E^\times$ tiene la propiedad de Fatou.

Demostración. Puesto que ν es $\mathcal{R}$-descomponible, expresemos $\Omega = \bigcup\limits_{\alpha\in\Delta} \Omega_\alpha \cup N$, donde $N \in \mathcal{N}_0(\nu)$ y $\{\Omega_\alpha\}_{\alpha\in\Delta} \subset \mathcal{R}$ es una colección disjunta que cumple a) y b) en la definición 4.3.11. Además como λ es localmente σ-finita consideraremos que $\lambda(\Omega_\alpha) < \infty$, $\forall\ \alpha \in \Delta$. Notemos que por el lema 4.2.1, E es un $|\lambda|$-e.f.B. saturado.

Sea $I \subset \Delta$ un conjunto numerable y tomemos $\Omega_I := \bigcup\limits_{\alpha\in I} \Omega_\alpha$, $\mathcal{R}_I := \mathcal{R}_{\Omega_I}$ y λ_I la restricción de λ al δ-anillo $\mathcal{R}_I$. Entonces $(\Omega_I, (\mathcal{R}_I)^{loc}, |\lambda_I|)$ es un espacio de medida σ-finito y $E_I := E_{\Omega_I}$ un $|\lambda_I|$-e.f.B. Luego, por la proposición 4.1.7, $E_I^\times$ es un $|\lambda_I|$-e.f.B. con la propiedad de Fatou.

Ahora tomemos un sistema dirigido crecientemente $\{g_\tau\}_{\tau\in K} \subset E^\times$ tal que $g_\tau \geq 0$, $\forall\ \tau \in K$ y $M := \sup\limits_\tau \|g_\tau\|_{E^\times} < \infty$. Denotemos por $g_{\tau,I}$ a la restricción de g_τ al conjunto Ω_I. Luego $\{g_{\tau,I}\}_{\tau\in K} \subset E_I^\times$ es un sistema dirigido crecientemente, y de (4.1.6), $\sup\limits_\tau \|g_{\tau,I}\|_{E_I^\times} \leq M < \infty$. Como $E_I^\times$ tiene la propiedad de Fatou $g_I := \sup\limits_\tau g_{\tau,I} \in E_I^\times$ y

$$\|g_I\|_{E_I^\times} = \sup_\tau \|g_{\tau,I}\|_{E_I^\times} \leq M. \tag{4.3.5}$$

Así para cada $\alpha \in \Delta$ existe $g_{\{\alpha\}} \in E_{\{\alpha\}}^\times$ tal que $g_{\{\alpha\}} = \sup\limits_\tau g_{\tau,\{\alpha\}}$ y

$$\|g_{\{\alpha\}}\|_{E_{\{\alpha\}}^\times} = \sup_\tau \|g_{\tau,\{\alpha\}}\|_{E_{\{\alpha\}}^\times}.$$

Denotemos por g^α la extensión canónica de $g_{\{\alpha\}}$ y definamos $g := \sum\limits_{\alpha\in\Delta} g^\alpha$. Puesto que $\mathcal{N}_0(\nu) = \mathcal{N}_0(|\lambda|)$ y se cumple a) en la definición 4.3.11 resulta que $g \in L^0(|\lambda|)$.

Probemos ahora que $g = \sup\limits_\tau g_\tau$. Consideremos $\alpha \in \Delta$ y $\tau \in K$. Ya que $g_\tau \chi_{\Omega_\alpha} \leq g^\alpha \leq g$, se sigue que $g_\tau \leq g$. Supongamos que $g' \in L^0(|\lambda|)$ es tal que $g_\tau \leq g'$. Entonces $g_\tau \chi_{\Omega_\alpha} \leq g' \chi_{\Omega_\alpha}$. Luego, $g^\alpha \leq g'$. Por lo tanto $g \leq g'$ y $g = \sup\limits_\tau g_\tau$.

Finalmente estableceremos que $g \in E^\times$. Para esto fijemos $f \in B_E$ y tomemos un conjunto numerable $I \subset \Delta$. Notemos que la extensión canónica de $g_I = \sup\limits_\tau g_{\tau,I}$ está dada por $g^I = \sum\limits_{\alpha\in I} g^\alpha$ y $f_I \in B_{E_I}$, donde f_I es la restricción de f a Ω_I. Además $\int_\Omega |g^I f| d|\lambda| = \int_{\Omega_I} |g_I f_I| d|\lambda_I|$. Por el teorema de la convergencia monótona

$$\sum_{\alpha\in I} \int_\Omega |g^\alpha f| d|\lambda| = \int_\Omega |g^I f| d|\lambda| = \int_{\Omega_I} |g_I f_I| d|\lambda_I| \leq \|g_I\|_{E_I^\times}.$$

De esto y (4.3.5) obtenemos que $\sum_{\alpha\in I}\int_\Omega |g^\alpha f|d\lambda| \leq M$, para todo conjunto finito I de Δ. Luego, existe un conjunto numerable $J \subset \Delta$ tal que $\int_\Omega |g^\alpha f|d|\lambda| = 0$, $\forall\ \alpha \in \Delta \setminus J$. Se sigue que

$$\int_\Omega |gf|d|\lambda| = \sum_{\alpha\in J}\int_\Omega |g^\alpha f|d|\lambda| = \int_\Omega |g^J f|d|\lambda| \leq M. \tag{4.3.6}$$

Ya que f es arbitraria concluimos que $g \in E^\times$; además de la reticularidad de la norma en $E^\times$ y (4.3.6), obtenemos $\|g\|_{E^\times} = \sup_\tau \|g_\tau\|_{E^\times}$. ∎

4.4. Espacio dual de $L^1(\nu)$

Hemos visto que el operador R definido en (4.1.3) es una isometría reticular del espacio $L^1(\nu)^\times$ en el espacio dual de $L^1(\nu)$. En el caso en que ν es σ-finita, resulta que ν tiene una medida de control local acotada $\lambda : \mathcal{R} \to [0,\infty)$ [14, Thm. 3.3]. Luego, $L^1(\nu)^\times$ es un $|\lambda|$-e.f.B. saturado. Además, puesto que $L^1(\nu)$ es un $|\lambda|$-e.f.B. σ-orden continuo, R es suprayectiva [38, Ch. 15 §72 Thm. 5]. Así $L^1(\nu)^* = L^1(\nu)^\times$.

A continuación veremos otros casos en que la isometría R es suprayectiva.

Teorema 4.4.1 Sean $\nu : \mathcal{R} \to X$ una medida vectorial y $\lambda : \mathcal{R} \to [0.\infty]$ una medida de Brooks-Dinculeanu para ν. Si ν es $\mathcal{R}$-descomponible, entonces la isometría canónica $R : L^1(\nu)^\times \to L^1(\nu)^*$ es suprayectiva.

Demostración. Sea ν una medida $\mathcal{R}$-descomponible. Así $\Omega = \bigcup_{\alpha\in\Delta} \Omega_\alpha \cup N$, donde $N \in \mathcal{N}_0(\nu)$ y $\{\Omega_\alpha\}_{\alpha\in\Delta} \subset \mathcal{R}$ es una colección disjunta que cumple a) y b) en la definición anterior.

Fijemos $\alpha \in \Delta$. Tomemos $\mathcal{R}_\alpha := \mathcal{R}_{\Omega_\alpha}$, y denotemos por ν_α y λ_α a las restricciones a $\mathcal{R}_\alpha$ de ν y λ, respectivamente. Ya que $\Omega_\alpha \in \mathcal{R}$ resulta que $\mathcal{R}_\alpha$ es una σ-álgebra y λ_α es σ-finita. Obtenemos así el espacio $L^1(\nu_\alpha)$, que es un λ_α-e.f.B. σ-orden continuo. Por lo tanto $L^1(\nu_\alpha)^* = L^1(\nu_\alpha)^\times$ [38, Ch. 15 §72 Thm. 5].

Tomemos ahora $\varphi \in L^1(\nu)^*$. Entonces $\varphi_\alpha : L^1(\nu_\alpha) \to \mathbb{K}$ definida por $\varphi_\alpha(h) := \varphi(h\chi_{\Omega_\alpha})$, $\forall\ h \in L^1(\nu_\alpha)$ es un funcional lineal acotado. Luego, existe $g_{\varphi_\alpha} \in L^1(\nu_\alpha)^\times$ tal que

$$\varphi_\alpha(h) = \int_{\Omega_\alpha} g_{\varphi_\alpha} h d|\lambda_\alpha|,\ \forall\ h \in L^1(\nu_\alpha).$$

Sea g_α la extensión canónica de g_{φ_α}. Entonces $g_\alpha \in L^1(\nu)^\times$.

Ahora definamos $g := \sum_{\alpha\in\Delta} g_\alpha$. Puesto que $\{\Omega_\alpha\}_{\alpha\in\Delta}$ es una colección disjunta, resulta que g está bien definida. Verifiquemos que $g \in L^0(\mathcal{R}^{loc})$. Sea $C \subset \mathbb{K}$ abierto y $B \in \mathcal{R}$. Entonces

$$g^{-1}(C) \cap B = \bigcup_{\alpha\in\Delta} (g_\alpha^{-1}(C) \cap B),$$

como $g_\alpha^{-1}(C) \cap B \in \mathcal{R}_\alpha$ para cada $\alpha \in \Delta$, a) de la definición 4.3.11 implica que $g^{-1}(C) \cap B \in \mathcal{R}^{loc}$, así $g^{-1}(C) \cap B \in \mathcal{R}$. Por lo tanto $g^{-1}(C) \in \mathcal{R}^{loc}$.

Resta probar que $\varphi(f) = \int_\Omega gfd|\lambda|$, $\forall\ f \in L^1(\nu)$. Para esto hagamos antes la siguiente observación.

Consideremos $B \in \widehat{\mathcal{R}}$, entonces $I := \{\alpha \in \Delta : \lambda(B \cap \Omega_\alpha) > 0\}$ es un conjunto a lo más numerable. Definamos $Z := \bigcup_{\alpha\in\Delta\setminus I} B \cap \Omega_\alpha$ y $Z_\alpha := Z \cap \Omega_\alpha$. Así $Z_\alpha = \emptyset$, $\forall\ \alpha \in I$ y $Z_\alpha = B \cap \Omega_\alpha$, $\forall\ \alpha \in \Delta \setminus I$. Por lo tanto $Z_\alpha \in \mathcal{R}_\alpha$ para cada $\alpha \in \Delta$. Fijemos $x^* \in X^*$. Entonces $|\langle\nu, x^*\rangle|(Z_\alpha) = 0$, $\forall\ \alpha \in \Delta$. Por b) en la definición 4.3.11, resulta que Z es $|\langle\nu, x^*\rangle|$-nulo. Se sigue que $Z \in \mathcal{N}_0(\nu)$. Por lo tanto $B = \bigcup_{\alpha\in I}(B \cap \Omega_\alpha) \cup N_0$, donde $N_0 := Z \cup (B \cap N) \in \mathcal{N}_0(\nu)$.

Ahora fijemos $f \in L^1(\nu)$. Entonces $A := \text{sop} f = \bigcup_{n=1}^{\infty} B_n \cup N'$ donde $\{B_n\} \subset \widehat{\mathcal{R}}$ y $N' \in \mathcal{N}_0(\nu)$. Por la observación hecha antes podemos suponer que para cada B_n existe $\alpha_n \in \Delta$ tal que $B_n \in \mathcal{R}_{\alpha_n}$. Luego, $f = \sum_{n=1}^{\infty} f\chi_{\Omega_{\alpha_n}}$, λ-c.t.p. Puesto que $L^1(\nu)$ es σ-orden continuo resulta que la serie converge en $L^1(\nu)$. De la linealidad y la continuidad de φ se sigue

$$\begin{aligned} \varphi(f) &= \sum_{n=1}^{\infty} \varphi(f\chi_{\Omega_{\alpha_n}}) = \sum_{n=1}^{\infty} \varphi_{\alpha_n}(f_{\alpha_n}) \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \int_{\Omega_{\alpha_n}} g_{\alpha_n} fd|\lambda| = \int_\Omega \sum_{n=1}^{\infty} g_{\alpha_n} fd|\lambda| = \int_\Omega gfd|\lambda|. \ \blacksquare \end{aligned}$$

M. A. Juan probó que si E es un retículo de Banach real σ-orden continuo, entonces es reticularmente isométrico a un espacio de funciones integrables respecto de una medida vectorial $\nu : \mathcal{R} \to E$ que es $\mathcal{R}$-descomponible [22, Thm. 4.1.5]. Así del teorema anterior se obtiene el siguiente resultado.

Corolario 4.4.2 Si E es un retículo de Banach σ-orden continuo, entonces existen una medida vectorial $\mathcal{R}$-descomponible $\nu : \mathcal{R} \to E$ y una isometría reticular de $L^1(\nu)^\times$ sobre

E^*. Más precisamente si T es la isometría reticular de E sobre $L^1(\nu)$, $\lambda : \mathcal{R} \to [0, \infty]$ una medida de Brooks-Dinculeanu para ν y $\varphi \in E^*$, entonces existe $g \in L^1(\nu)^\times$ tal que

$$\varphi(f) = \int_\Omega (Tf) g d|\lambda|, \ \forall \ f \in E.$$

Demostración. Basta con verificar que se sigue cumpliendo el resultado antes mencionado en el caso complejo. Como E es un retículo de Banach σ-orden continuo, entonces $E_\mathbb{R}$ también es un retículo de Banach σ-orden continuo. Así existen una medida vectorial $\mathcal{R}$-descomponible $\tilde{\nu} : \mathcal{R} \to E_\mathbb{R}$ y una isometría reticular sobreyectiva $S : L^1(\nu) \to E_\mathbb{R}$. Definamos entonces $\nu : \mathcal{R} \to E$, como

$$\nu(B) = \tilde{\nu}(B), \ \forall \ B \in \mathcal{R}.$$

Se sigue que ν es una medida vectorial $\mathcal{R}$-descomponible y que $L^1(\nu)_\mathbb{R} = L^1(\tilde{\nu})$. Sea $T : L^1(\nu) \to E$ la extensión canónica de S, resulta que T es una isometría reticular suprayectiva [34, Lemma 3.8]. ■

Otro caso en el que se cumple que la isometría $R : L^1(\nu)^\times \to L^1(\nu)^*$ es suprayectiva es cuando $L^1(\nu)$ es reflexivo. Para establecer este resultado es necesario probar antes el siguiente lema.

Lema 4.4.3 Si $B \in \widehat{\mathcal{R}}$ y $x^* \in X^*$, entonces existe $g_{B,x^*} \in L^1(\nu)^\times$ tal que

$$\int_\Omega g_{B,x^*} f d|\lambda| = \int_B f d|\langle \nu, x^* \rangle|, \ \forall \ f \in L^1(\nu).$$

Además si $|\langle \nu, x^* \rangle|(B) > 0$, entonces $0 < \|g_{B,x^*}\|_{\nu^\times} \leq 1$.

Demostración. Sean $B \in \widehat{\mathcal{R}}$ y $x^* \in X^*$. Entonces $|\langle \nu, x^* \rangle|(B) < \infty$. Denotemos, respectivamente, por $|\langle \nu, x^* \rangle|_B$ y por $|\lambda|_B$ las restricciones de $|\langle \nu, x^* \rangle|$ y de $|\lambda|$ a la σ-álgebra $\mathcal{R}_B$.

Ya que $\mathcal{N}_0(\lambda_B) \subset \mathcal{N}_0(|\langle \nu, x^* \rangle|_B)$, por el teorema de Radon-Nikodym [35, p. 121] existe $k \in L^1(|\lambda|_B)$ tal que $d|\langle \nu, x^* \rangle|_B = kd|\lambda|_B$. Sea $f \in L^1(\nu)$, entonces la restricción de f a B, $f_B \in L^1(|\langle \nu, x^* \rangle|_B)$. Sea $g_{B,x^*} := k^B$ la extensión canónica de K. Luego,

$$\int_\Omega g_{B,x^*} f d|\lambda| = \int_B k f_B d|\lambda|_B = \int_B f_B d|\langle \nu, x^* \rangle|_B = \int_B f d|\langle \nu, x^* \rangle|. \tag{4.4.1}$$

Puesto que $f \in L^1(|\langle \nu, x^* \rangle|)$ se sigue que $g_{B,x^*} \in L^1(\nu)^\times$. Ahora

$$\int_\Omega |g_{B,x^*} f| d|\lambda| = \int_B |f_B| d|\langle \nu, x^* \rangle|_B \leq \int_\Omega |f| d|\langle \nu, x^* \rangle| \leq \|f\|_\nu.$$

Finalmente si $|\langle \nu, x^* \rangle|(B) > 0$, entonces $g_{B,x^*} \neq 0$. Luego, $0 < \|g_{B,x^*}\|_{\nu^\times} \leq 1$. ■

Proposición 4.4.4 Si el espacio $L^1(\nu)$ es reflexivo, entonces la isometría canónica $R : L^1(\nu)^\times \to L^1(\nu)^*$ es suprayectiva.

Demostración. Como $L^1(\nu)^\times$ es un espacio de Banach, entonces $R : L^1(\nu)^\times \to L^1(\nu)^*$ es una isometría reticular. Luego, $R(L^1(\nu)^\times)$ es un subespacio cerrado de $L^1(\nu)^*$. Para establecer que R es suprayectiva probaremos que $R(L^1(\nu)^\times)$ es denso. Ya que $L^1(\nu)$ es reflexivo bastará verificar que $R(L^1(\nu)^\times)$ separa puntos de $L^1(\nu)$.

Sea $0 \neq f \in L^1(\nu)$ y tomemos $B \in \widehat{\mathcal{R}}$ tal que $\lambda(B) > 0$ y $f\chi_B \neq 0$. Luego, existe $x^* \in B_{X^*}$ tal que $\displaystyle\int_B fd|\langle \nu, x^* \rangle| \neq 0$. Teniendo presente el lema anterior elijamos $g := g_{B,x^*} \in L^1(\nu)^\times$ tal que

$$\int_\Omega gfd|\lambda| = \int_B fd|\langle \nu, x^* \rangle|.$$

Por lo tanto $\varphi_g(f) = \displaystyle\int_\Omega gfd|\lambda| \neq 0$. ∎

Observación 4.4.5 E. Jiménez Fernández, M. A. Juan y E. A. Sánchez-Pérez establecieron una representación de $L^1(\nu)^*$ en [21, p. 4]. La proposición 4.4.1 y la proposición anterior muestran que el espacio $L^1(\nu)^*$ también se puede representar como el espacio asociado de $L^1(\nu)$ cuando ν es $\mathcal{R}$-descomponible y cuando $L^1(\nu)$ es reflexivo.

Capítulo 5

Medidas vectoriales con densidad vectorial F

Dada una medida vectorial ν, en el capitulo 2 hemos trabajado con medidas vectoriales con densidad f, donde f es una medida localmente ν-integrable. En el presente capítulo estudiaremos de nuevo medidas con densidad F, pero ahora se considerara una función vectorial F que será, según sea el caso, localmente Pettis integrable o localmente Bochner integrable. El objetivo es generalizar los resultados correspondientes al considerar funciones Pettis o Bochner integrables, establecidos por G. F. Stefansson en [37].

5.1. F Pettis integrable

5.1.1. Integral de Dunford y de Pettis

En esta sección recordaremos los conceptos y resultados básicos sobre μ-medibilidad e integración de Dunford y de Pettis de funciones vectoriales; en el caso en que se considera una medida finita estos resultados se pueden encontrar en [16, Chap. II] y [37]. Las pruebas son análogas cuando se considera una medida positiva arbitraria, aún así incluimos algunas de ellas para que el trabajo sea autocontenido.

Sean (Ω, Σ, μ) un espacio de medida positiva y X un espacio de Banach. Consideremos una función $F : \Omega \to X$ y denotemos por $\|F\|_X$ a la composición de F con la norma definida en X. Así $\|F\|_X$ es una función real. Asimismo, para cada $x^* \in X^*$, la función escalar $\langle F, x^* \rangle : \Omega \to \mathbb{K}$ está dada por

$$\langle F, x^* \rangle(t) := \langle F(t), x^* \rangle, \ \forall \ t \in \Omega.$$

Definición 5.1.1 Sea $S : \Omega \to X$ una función.

a) La función S es una *función simple*, si toma un número finito de valores y, para cada $x \in X$, $S^{-1}(x) \in \Sigma$. Al conjunto de estas funciones lo denotaremos por $S(\Sigma, X)$.

b) La función S es una *función escalonada*, si S es simple y además $\mu(\text{sop}S) < \infty$. Denotamos por $St(\mu, X)$ al conjunto de estas funciones.

Sea $S \in S(\Sigma, X)$. Si $\{x_1, x_2, \ldots, x_n\} \subset X$ es el conjunto de valores distintos que toma S y $A_j = S^{-1}(x_j)$, $j = 1, \ldots, n$, entonces S se puede representar como

$$S = \sum_{j=1}^{n} \chi_{A_j} x_j. \tag{5.1.1}$$

A esta representación la llamaremos la *representación canónica* de S.

Notemos que cuando $X = \mathbb{K}$ entonces $S(\Sigma, X) = S(\Sigma)$. Asimismo observemos que si μ es una medida finita, entonces $St(\mu, X) = S(\Sigma, X)$.

Definición 5.1.2 Sea $F : \Omega \to X$ una función.

a) La función F es *fuertemente μ-medible*, si existe una sucesión $\{S_n\} \subset St(\mu, X)$ tal que $S_n \to f$, μ-c.t.p.

b) La función F es *escalarmente μ-medible*, si para cada $x^* \in X^*$, la función $\langle F, x^* \rangle$ es fuertemente μ-medible.

Notemos que si $S \in St(\mu, X)$, entonces S es fuertemente μ-medible. Además si F es fuertemente μ-medible, entonces F es escalarmente μ-medible.

Al conjunto de funciones escalarmente μ-medibles lo denotaremos por $WL(\mu, X)$. Así $WL(\mu, X)$ es un espacio vectorial.

Lema 5.1.3 Sean $F : \Omega \to X$ una función y $g : \Omega \to \mathbb{K}$ una función medible.

i) Si F es fuertemente μ-medible, entonces gF es fuertemente μ-medible.

ii) Si F es escalarmente μ-medible, entonces gF es escalarmente μ-medible.

Demostración. i) Notemos primero que si $\varphi \in S(\Sigma)$ y $S \in St(\mu, X)$, se sigue que $\varphi S \in St(\mu, X)$. Supongamos que F es fuertemente μ-medible. Tomemos $\{\varphi_n\} \subset S(\Sigma)$ y $\{S_n\} \subset St(\mu, \Sigma)$ tales que $\varphi_n \to g$ y $S_n \to F$, μ-c.t.p. Entonces $\varphi_n S_n \in St(\mu, X)$, $\forall\, n \in \mathbb{N}$ y $\varphi_n S_n \to gF$, μ-c.t.p. Por lo tanto gF es fuertemente μ-medible.

ii) Si F es escalarmente μ-medible, entonces, para cada $x^* \in X^*$, la función $\langle F(\cdot), x^* \rangle$ es fuertemente μ-medible. Aplicando i) obtenemos que $\langle gF, x^* \rangle = g\langle F, x^* \rangle$ es fuertemente μ-medible, $\forall\ x^* \in X^*$. ■

Consideremos dos funciones escalarmente μ-medibles $F, G : \Omega \to X$. Diremos que $F = G$ *escalarmente* μ*-c.t.p.* si

$$\int_\Omega |\langle F - G, x^* \rangle| d\mu = 0,\ \forall\ x^* \in X^*.$$

Notemos que $F = G$ escalarmente μ-c.t.p. si, y sólo si, $\langle F, x^* \rangle = \langle G, x^* \rangle$, μ-c.t.p., para cada $x^* \in X^*$.

Denotamos por $WL^0(\mu, X)$ al conjunto de clases de equivalencia de las funciones escalarmente μ-medibles que se obtiene al identificar dos funciones cuando son iguales escalarmente μ-c.t.p.

Definición 5.1.4 Sea $F : \Omega \to X$ una función escalarmente μ-medible.

a) Diremos que F es *Dunford integrable* si $\langle F, x^* \rangle \in L^1(\mu)$, para cada $x^* \in X^*$.

b) Decimos que F es *Pettis integrable* si F es Dunford integrable y, para cada $A \in \Sigma$, existe $x_A \in X$ tal que

$$\int_A \langle F, x^* \rangle d\mu = \langle x_A, x^* \rangle,\ \forall\ x^* \in X^*.$$

El vector x_A es único y se le llama *la integral de Pettis de* F *sobre* A; lo denotaremos por $\mathbb{P}\!-\!\int_A F d\mu$.

Representaremos por $\mathbb{D}(\mu, X)$ al subconjunto de $WL^0(\mu, X)$ que consta de las funciones que son Dunford integrables. Asimismo denotamos por $\mathbb{P}(\mu, X)$ al subconjunto de $\mathbb{D}(\mu, X)$ formado por las funciones Pettis integrables.

Fijemos $F \in \mathbb{D}(\mu, X)$. Definamos $T : X^* \to L^1(\mu)$ como

$$T(x^*) := \langle F, x^* \rangle,\ \forall\ x^* \in X^*.$$

Claramente T es lineal. Usando el teorema de la gráfica cerrada [19, Tma. 4.2.2], veremos que es continua. Así, sean $\{x_n^*\} \subset X^*$ y $x^* \in X^*$ tales que $x_n^* \to x^*$. Supongamos que existe $g \in L^1(\mu)$ tal que $Tx_n^* \to g$ en $L^1(\mu)$. Teniendo presente la proposición 1.2.4 tomemos una subsucesión $\{x_{n_k}^*\} \subset \{x_n^*\}$ tal que $\langle F, x_{n_k}^* \rangle = Tx_{n_k}^* \to g$ μ-c.t.p.

Por otra parte $\langle F(t), x_n^*\rangle \to \langle F(t), x^*\rangle$, $\forall\ t \in \Omega$. Luego, $T(x^*) = \langle F(t), x^*\rangle = g$, μ-c.t.p. Por el teorema de la gráfica cerrada obtenemos que T es acotado. Por lo tanto

$$\int_\Omega |\langle F, x^*\rangle| d\mu = \|Tx^*\|_{L^1(\mu)} \leq \|T\|\, \|x^*\|_{X^*}.$$

Luego,

$$\sup_{x^* \in B_{X^*}} \int_\Omega |\langle F, x^*\rangle| d\mu < \infty.$$

Una vez establecida la desigualdad anterior la prueba del siguiente teorema es directa de la definición.

Teorema 5.1.5 El conjunto $\mathbb{D}(\mu, X)$ es un espacio vectorial y la función $\|\cdot\|_{\mathbb{D}} : \mathbb{D}(\mu, X) \to [0, \infty)$ definida como

$$\|F\|_{\mathbb{D}} = \sup_{x^* \in B_{X^*}} \int_\Omega |\langle F, x^*\rangle| d\mu,\ \forall\ F \in \mathbb{D}(\mu, X)$$

es una norma. Además $\mathbb{P}(\mu, X)$ es un subespacio de $\mathbb{D}(\mu, X)$. A la restricción de $\|\cdot\|_{\mathbb{D}}$ al subespacio $\mathbb{P}(\mu, X)$ la denotaremos por $\|\cdot\|_{\mathbb{P}}$.

Dada una función $F \in \mathbb{P}(\mu, X)$, definimos $\tilde{\nu}_F : \Sigma \to X$ por

$$\tilde{\nu}_F(A) := \mathbb{P}\text{–}\int_A F d\mu,\ \forall\ A \in \Sigma. \tag{5.1.2}$$

El siguiente resultado es bien conocido en el caso de una medida finita [16, Thm. II.3.5]. En general, se puede probar de manera semejante, a partir del teorema de Orlicz-Pettis [16, Cor. I.4.4].

Teorema 5.1.6 La función $\tilde{\nu}_F$ definida en (5.1.2) es una medida vectorial.

5.1.2. La medida ν_F

Consideremos ahora un δ-anillo $\mathcal{R}$ de subconjuntos de Ω y una medida positiva $\lambda : \mathcal{R} \to [0, \infty]$. Tomando $\Sigma = \mathcal{R}^{loc}$ el teorema anterior nos indica que si $F \in \mathbb{P}(|\lambda|, X)$, entonces $\tilde{\nu}_F$ es una medida vectorial. De forma similar al desarrollo en el capítulo 2, ahora extenderemos el resultado anterior al considerar funciones localmente Pettis integrables.

Definición 5.1.7 Una función escalarmente $|\lambda|$-medible $F : \Omega \to X$ es *localmente Pettis integrable*, si $\chi_B F \in \mathbb{P}(|\lambda|, X)$, para cada $B \in \mathcal{R}$.

Denotamos por $\mathbb{P}_{loc}(\lambda, X)$ a la colección de clases de equivalencia de funciones localmente Pettis integrables, que obtenemos cuando identificamos dos funciones si son iguales escalarmente $|\lambda|$-c.t.p. Observemos que $\mathbb{P}_{loc}(\lambda, X)$ es un espacio vectorial. Además se cumple

$$\mathbb{P}(|\lambda|, X) \subset \mathbb{P}_{loc}(\lambda, X).$$

Dada una función $F \in \mathbb{P}_{loc}(\lambda, X)$, además de extender el teorema 5.1.6, en el siguiente resultado proporcionamos una representación de la semivariación de la medida vectorial ν_F.

Corolario 5.1.8 Sea $F \in \mathbb{P}_{loc}(\lambda, X)$. Entonces la función $\nu_F : \mathcal{R} \to X$ definida como

$$\nu_F(B) := \mathbb{P}\text{–}\int_B F d|\lambda|, \tag{5.1.3}$$

es una medida vectorial tal que

$$\|\nu_F\|(A) = \sup_{x^* \in B_{X^*}} \int_A |\langle F, x^* \rangle| d|\lambda|, \ \forall\ A \in \mathcal{R}^{loc}. \tag{5.1.4}$$

Demostración. Probemos primero que ν_F es una medida vectorial. Sea $\{B_n\} \subset \mathcal{R}$ una colección disjunta tal que $B := \bigcup_{n=1}^{\infty} B_n \in \mathcal{R}$. Ya que $F\chi_B \in \mathbb{P}(|\lambda|, X)$, del teorema 5.1.6 se sigue

$$\begin{aligned} \nu_F(B) &= \mathbb{P} - \int_B F d|\lambda| = \mathbb{P} - \int_B F\chi_B d|\lambda| \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{P} - \int_{B_n} F\chi_B d|\lambda| = \sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{P} - \int_{B_n} F d|\lambda| = \sum_{n=1}^{\infty} \nu_F(B_n). \end{aligned}$$

Fijemos ahora $x^* \in X^*$. Entonces $\langle F, x^* \rangle \in L^1_{loc}(\lambda)$. Del teorema 1.3.16 se sigue que $|\lambda|_{\langle F, x^* \rangle} : \mathcal{R} \to \mathbb{K}$ es una medida escalar cuya variación está dada por

$$\big| |\lambda|_{\langle F, x^* \rangle} \big|(A) = \int_A |\langle F, x^* \rangle| d|\lambda|, \ \forall\ A \in \mathcal{R}^{loc}.$$

Por otro lado observemos que la medida escalar $\langle \nu_F, x^* \rangle : \mathcal{R} \to \mathbb{K}$ tiene la forma

$$\langle \nu_F, x^* \rangle(B) = \left\langle \mathbb{P} - \int_B F d|\lambda|, x^* \right\rangle = \int_B \langle F, x^* \rangle d|\lambda| = |\lambda|_{\langle F, x^* \rangle}(B), \ \forall\ B \in \mathcal{R}. \tag{5.1.5}$$

Por lo tanto

$$|\langle \nu_F, x^* \rangle|(A) = \int_A |\langle F, x^* \rangle| d|\lambda|. \tag{5.1.6}$$

De aquí obtenemos (5.1.4). ■

A partir de (5.1.4) observemos que si $A \in \mathcal{N}_0(|\lambda|)$, entonces $\|\nu_F\|(B) = 0$, $\forall\ B \in \mathcal{R}_A$. Así

$$\mathcal{N}_0(|\lambda|) \subset \mathcal{N}_0(\nu_F).$$

También de (5.1.4), notemos que

$$\|\nu_F\|(B) = \|\chi_B F\|_{\mathbb{P}}, \forall\ B \in \mathcal{R}.$$

Luego, de la definición de integrabilidad de Dunford se obtiene el siguiente resultado:

Corolario 5.1.9 Sea $F \in \mathbb{P}_{loc}(\lambda, X)$. Entonces $F \in \mathbb{D}(|\lambda|, X)$ si, y sólo si, ν_F es de semivariación acotada. En este caso,

$$\|\nu_F\|(A) = \|\chi_A F\|_{\mathbb{D}},\ \forall\ A \in \mathcal{R}^{loc}.$$

En particular si $F \in \mathbb{P}(|\lambda|, X)$, entonces $\|\nu_F\|(A) = \|\chi_A F\|_{\mathbb{P}}$, $\forall\ A \in \mathcal{R}^{loc}$.

5.1.3. El espacio $L^1(\nu_F)$

Dada $F \in WL(\mu, X)$, del lema 5.1.3 ii) obtenemos que $gF \in WL(\mu, X)$, $\forall\ g \in L^0(\mathcal{R}^{loc})$. Nos interesa estudiar el operador M_F, que a una función g le asigna la función gF, definido en varios espacios. Empezamos estableciendo que está bien definido cuando $M_F : L^0(\nu_F) \to WL^0(\mu, X)$.

Lema 5.1.10 Sean $F \in \mathbb{P}_{loc}(\lambda, X)$, $\{g_n\} \subset L^0(\mathcal{R}^{loc})$ y $g, h \in L^0(\mathcal{R}^{loc})$. Se cumple lo siguiente

i) Si $g = h$, ν_F-c.t.p., entonces $gF = hF$, escalarmente $|\lambda|$-c.t.p.

ii) Si $g_n \to g$, ν_F-c.t.p., entonces $\langle g_n F, x^* \rangle \to \langle gF, x^* \rangle$, $|\lambda|$-c.t.p., $\forall\ x^* \in X^*$.

Demostración. i) Notemos primero que si $N \in \mathcal{N}_0(\nu_F)$, de (5.1.4) se sigue que $\chi_N F = 0$, escalarmente $|\lambda|$-c.t.p. Elijamos $N \in \mathcal{N}_0(\nu_F)$ tal que $g(t) = h(t)$, $\forall\ t \in N^c$. Entonces $g\chi_{N^c} F = h\chi_{N^c} F$; además como $\chi_N F = 0$ escalarmente $|\lambda|$-c.t.p., se sigue que $g\chi_N F = h\chi_N F = 0$, escalarmente $|\lambda|$-c.t.p. Por lo tanto $gF = hF$, escalarmente $|\lambda|$-c.t.p.

ii) Supongamos ahora que $g_n(t) \to g(t)$, $\forall\ t \in N^c$, donde $N \in \mathcal{N}_0(\nu_F)$. Entonces $g_n\chi_{N^c}F \to g\chi_{N^c}F$ y $g_n\chi_N F = g\chi_N F = 0$, escalarmente $|\lambda|$-c.t.p. Luego, para cada $x^* \in X^*$,

$$\langle g_n\chi_{N^c}F, x^*\rangle \to \langle g\chi_{N^c}F, x^*\rangle \text{ y } \langle g_n\chi_N F, x^*\rangle = \langle g\chi_N F, x^*\rangle = 0,\ |\lambda|\text{-c.t.p.}$$

Concluimos que $\langle g_nF, x^*\rangle \to \langle gF, x^*\rangle$, $|\lambda|$-c.t.p., $\forall\ x^* \in X^*$. ■

El lema anterior nos indica que el operador $M_F : L^0(\nu_F) \to WL^0(\mu, X)$ dado por

$$M_F(g) := gF, \tag{5.1.7}$$

está bien definido. Además claramente este operador es lineal.

El resultado que viene a continuación fue establecido por G. F. Stefansson en el caso en que $F \in \mathbb{P}(\mu, X)$ y μ es una medida finita positiva definida en una σ-álgebra [37, Prop. 8 b)].

Proposición 5.1.11 Sean $F \in \mathbb{P}_{loc}(\lambda, X)$ y $g \in L^0(\mathcal{R}^{loc})$. Entonces:

i) $g \in L^1_w(\nu_F)$ si, y sólo si, $gF \in \mathbb{D}(|\lambda|, X)$. Además la restricción a $L^1_w(\nu_F)$ del operador M_F definido en (5.1.7) es una isometría lineal entre $L^1_w(\nu_F)$ y $\mathbb{D}(|\lambda|, X)$.

ii) $g \in L^1(\nu_F)$ si, y sólo si, $gF \in \mathbb{P}(|\lambda|, X)$. Además $M_F : L^1(\nu_F) \to \mathbb{P}(|\lambda|, X)$, la restricción del operador definido en (5.1.7), es una isometría lineal tal que $I_{\nu_F} = I_{\mathbb{P}} \circ M_F$.

Demostración. Fijemos $x^* \in X^*$. Sea $s = \displaystyle\sum_{j=1}^{n} a_j\chi_{A_j} \in S(\mathcal{R}^{loc})$. De (5.1.6) obtenemos

$$\begin{aligned} \int_\Omega |s|d|\langle \nu_F, x^*\rangle| &= \sum_{j=1}^{n}|a_j||\langle \nu_F, x^*\rangle|(A_j) = \sum_{j=1}^{n}|a_j|\int_{A_j}|\langle F, x^*\rangle|d|\lambda| \\ &= \int_\Omega \sum_{j=1}^{n}|a_j|\chi_{A_j}|\langle F, x^*\rangle|d|\lambda| = \int_\Omega |\langle sF, x^*\rangle|d|\lambda|. \end{aligned} \tag{5.1.8}$$

Por lo tanto $s \in L^1_w(\nu_F)$ si, y sólo si, $sF \in \mathbb{D}(|\lambda|, X)$.

Procediendo similarmente, de (5.1.5) se sigue que

$$\int_\Omega s d\langle \nu_F, x^*\rangle = \int_\Omega \langle sF, x^*\rangle d|\lambda|. \tag{5.1.9}$$

Ahora tomemos $g \in L^0(\nu_F)^+$ y $\{s_n\} \subset S(\mathcal{R}^{loc})$ tal que $0 \leq s_n \uparrow g$, ν_F-c.t.p. Del lema 5.1.10 obtenemos que $\langle s_n F, x^* \rangle \to \langle gF, x^* \rangle$, $|\lambda|$-c.t.p. Luego, $|\langle s_n F, x^* \rangle| \uparrow |\langle gF, x^* \rangle|$, $|\lambda|$-c.t.p. Por el teorema de la convergencia monótona y (5.1.8) resulta que

$$\int_\Omega |\langle gF, x^* \rangle| d|\lambda| = \lim_{n\to\infty} \int_\Omega |\langle s_n F, x^* \rangle| d|\lambda| = \lim_{n\to\infty} \int_\Omega s_n d|\langle \nu_F, x^* \rangle| = \int_\Omega |g| d|\langle \nu_F, x^* \rangle|. \tag{5.1.10}$$

Esto nos indica que $g \in L^1_w(\nu_F)$ si, y sólo si, $gF \in \mathbb{D}(|\lambda|, X)$.

Por el teorema de la convergencia dominada y (5.1.5)

$$\int_\Omega \langle gF, x^* \rangle d|\lambda| = \lim_{n\to\infty} \int_\Omega \langle s_n F, x^* \rangle d|\lambda| = \lim_{n\to\infty} \int_\Omega s_n d\langle \nu_F, x^* \rangle = \int_\Omega g d\langle \nu_F, x^* \rangle.$$

De aquí se sigue que $g \in L^1(\nu_F)$ si, y sólo si, $gF \in \mathbb{P}(|\lambda|, X)$ y

$$\int_\Omega g d\nu_F = \mathbb{P}\text{–}\int_\Omega gF d|\lambda|. \tag{5.1.11}$$

Como los conjuntos involucrados son espacios vectoriales y cada $g \in L^0(\nu_F)$ es combinación lineal de funciones no negativas, obtenemos la primera afirmación en i) y ii).

Finalmente sea $g \in L^1_w(\nu_F)$, ya que $|g| \geq 0$ obtenemos la igualdad (5.1.10) con una sucesión $\{s_n\} \subset S(\mathcal{R}^{loc})$ tal que $0 \leq s_n \uparrow |g|$, ν_F-c.t.p. Al tomar el supremo sobre $x^* \in B_{X^*}$ resulta que $\|g\|_{\nu_F} = \|gF\|_{\mathbb{D}}$. Esto es, la restrición de M_F al espacio $L^1_w(\nu_F)$ es una isometría. Ya que $L^1(\nu_F)$ y $\mathbb{P}(|\lambda|, X)$ son subespacios de $L^1_w(\nu_F)$ y $\mathbb{D}(|\lambda|, X)$, respectivamente, concluimos que M_F restringida a $L^1(\nu_F)$ tambien es una isometría. Además, de (5.1.11) se sigue que $I_{\nu_F} = I_{\mathbb{P}} \circ M_F$. ■

Corolario 5.1.12 Sea $F : \Omega \to X$ una función escalarmente μ-medible. Entonces $F \in \mathbb{P}(|\lambda|, X)$ si, y sólo si, $F \in \mathbb{P}_{loc}(\lambda, X)$ y ν_F es fuertemente aditiva.

Demostración. Sea $F \in \mathbb{P}(|\lambda|, X)$ y tomemos la medida $\tilde{\nu}_F : \mathcal{R}^{loc} \to X$ definida en (5.1.2). Puesto que $\mathcal{R}^{loc}$ es una σ-álgebra, resulta que $\tilde{\nu}_F$ es fuertemente aditiva. Como ν_F es la restricición de $\tilde{\nu}_F$ a $\mathcal{R}$, entonces sigue siendo fuertemente aditiva.

Supongamos ahora que $F \in \mathbb{P}_{loc}(\lambda, X)$ y que ν_F es fuertemente aditiva. De 1.4.16 se sigue que $\chi_\Omega \in L^1(\nu_F)$. Así, por el teorema anterior $F = \chi_\Omega F \in \mathbb{P}(|\lambda|, X)$. ■

Corolario 5.1.13 Sea $F \in \mathbb{P}_{loc}(\lambda, X)$. Si X no contiene una copia de c_0 y ν_F es acotada, entonces $F \in \mathbb{P}(|\lambda|, X)$.

Demostración. Puesto que X no contiene una copia de c_0 y ν_F es acotada resulta que ν_F es fuertemente aditiva [15, p. 36]. Así por el corolario anterior $F \in \mathbb{P}(|\lambda|, X)$. ■

5.2. F Bochner integrable

5.2.1. Integral de Bochner

En esta sección trabajaremos con funciones Bochner integrables; veremos además cómo estas funciones se relacionan con las funciones Pettis integrables. Haremos primero un repaso de los conceptos y resultados que necesitaremos (en [25, Chap. 11] se desarrolla la teoría para un espacio de medida positiva arbitrario y en [16, Chap. II] en el caso de una medida positiva finita).

Consideremos de nuevo un espacio de medida positiva (Ω, Σ, μ) y un espacio de Banach X. Dada $S \in St(\mu, X)$, consideremos su representación canónica $S = \sum_{j=1}^{n} \chi_{A_j} x_j$. Definimos entonces

$$\mathbb{B}\text{–}\int_{\Omega} S d\mu := \sum_{j=1}^{n} \mu(A_j) x_j \in X \tag{5.2.1}$$

donde $\infty \cdot 0_X = 0_X$.

Por otra parte, para $S \in S(\Sigma, X)$, definimos la función

$$\|S\|_1 := \int_{\Omega} \|S\|_X d\mu,$$

la cual resulta ser una seminorma en $St(\Sigma, X)$.

Definición 5.2.1 Una función $F : \Omega \to X$ es *Bochner integrable*, si existe una sucesión $\{S_n\} \subset St(\mu, X)$ que es de Cauchy bajo la seminorma $\|\cdot\|_1$ y $S_n \to F$, μ-c.t.p. En este caso definimos su integral de Bochner como

$$\mathbb{B}\text{–}\int_{\Omega} F d\mu := \lim_{n\to\infty} \mathbb{B} - \int_{\Omega} S_n d\mu.$$

A la colección de clases de equivalencia que se obtiene al identificar funciones Bochner integrables que son iguales μ-c.t.p., la denotamos por $\mathbb{B}(\mu, X)$.

Notemos que

1. $St(\Sigma, X) \subset \mathbb{B}(\mu, X)$.
2. Si $F \in \mathbb{B}(\mu, X)$ y $G = F$, μ-c.t.p., entonces $G \in \mathbb{B}(\mu, X)$.
3. Si $F \in \mathbb{B}(\mu, X)$, entonces F es fuertemente μ-medible.

Los siguientes resultados son básicos en la teoría de la integral de Bochner.

Teorema 5.2.2 Sea $F : \Omega \to X$ una función fuertemente μ-medible. Entonces $F \in \mathbb{B}(\mu, X)$ si, y sólo si, $\|F\|_X \in L^1(\mu)$. En este caso

$$\left\| \mathbb{B}\text{–}\int_\Omega F d\mu \right\|_X \leq \int_\Omega \|F\|_X d\mu. \tag{5.2.2}$$

Teorema 5.2.3 $\mathbb{B}(\mu, X)$ es un espacio de Banach con la norma dada por

$$\|F\|_1 := \int_\Omega \|F\|_X d\mu, \ \forall\ F \in L^1(\mu, X).$$

Además $\mathbb{B}(\mu, X) \subset \mathbb{P}(\mu, X)$, con $\|F\|_{\mathbb{P}} \leq \|F\|_1$ y

$$\mathbb{B}\text{–}\int_A F d|\lambda| = \mathbb{P}\text{–}\int_A F d|\lambda|, \ \forall\ F \in \mathbb{B}(\mu, X). \tag{5.2.3}$$

Teorema 5.2.4 (de convergencia dominada) Sean $F : \Omega \to X$ y $\{F_n\} \subset \mathbb{B}(\mu, X)$. Si $F_n \to F$, μ-c.t.p. y existe $g \in L^1(\mu)$ tal que $\|F_n\|_X \leq g$, μ-c.t.p., $\forall\ n \in \mathbb{N}$, entonces $F \in \mathbb{B}(\mu, X)$ y $\{F_n\}$ converge a F en la norma $\|\cdot\|_1$.

Corolario 5.2.5 Sea $F \in \mathbb{B}(\mu, X)$. La función $\tilde{\nu}_F : \Sigma \to X$ definida como

$$\tilde{\nu}_F(A) = \mathbb{B}\text{–}\int_A F d\mu, \ \forall\ A \in \Sigma. \tag{5.2.4}$$

es una medida vectorial de variación acotada y

$$|\nu_F|(A) = \int_A \|F\|_X d|\lambda|, \ \forall\ A \in \Sigma. \tag{5.2.5}$$

5.2.2. La medida ν_F

Sea $\mathcal{R}$ un δ-anillo de subconjuntos de Ω y $\lambda : \mathcal{R} \to [0, \infty]$ una medida positiva. Consideremos nuevamente $\Sigma = \mathcal{R}^{loc}$ y $\mu = |\lambda|$. A continuación estableceremos una versión análoga del resultado anterior bajo este contexto y considerando una función localmente Bochner integrable. Asimismo, como lo hicimos para las funciones localmente Pettis integrables, estudiaremos su espacio de funciones integrables correspondiente.

Definición 5.2.6 Una función $F : \Omega \to X$ es *localmente Bochner integrable*, si $\chi_B F \in \mathbb{B}(|\lambda|, X)$ para cada $B \in \mathcal{R}$.

Denotamos por $\mathbb{B}_{loc}(\lambda, X)$ a la colección de clases de equivalencia de funciones localmente Bochner integrables al ser identificadas $|\lambda|$-c.t.p. Igual que para $\mathbb{P}_{loc}(\lambda, X)$, resulta que $\mathbb{B}_{loc}(\lambda, X)$ es un espacio vectorial. Además se cumple

$$\mathbb{B}(|\lambda|, X) \subset \mathbb{B}_{loc}(\lambda, X) \subset \mathbb{P}_{loc}(\lambda, X).$$

Enseguida presentamos un ejemplo sencillo que nos muestra que las contenciones $\mathbb{P}(|\lambda|, X) \subset \mathbb{P}_{loc}(\lambda, X)$ y $\mathbb{B}(|\lambda|, X) \subset \mathbb{B}_{loc}(\lambda, X)$ pueden ser propias.

Ejemplo 5.2.7 Fijemos $f \in L^1_{loc}(\lambda)$ y $x \in X$. Definimos entonces $F : \Omega \to X$ como

$$F(t) := f(t)x. \tag{5.2.6}$$

Veamos que $\chi_B F \in \mathbb{B}(|\lambda|, X)$, $\forall\ B \in \mathcal{R}$. De (2.1.1) obtenemos que $f \in L^0(\mathcal{R}^{loc})$. Tomemos $\{s_n\} \subset S(\mathcal{R}^{loc})$ tal que $s_n \to f$ y $|s_n| \le |f|$, $\forall\ n \in \mathbb{N}$. Fijemos $B \in \mathcal{R}$. Para cada $n \in \mathbb{N}$ definamos $S_n : \Omega \to X$ como $S_n(t) := s_n(t)\chi_B x$. Ya que $f\chi_B \in L^1(|\lambda|)$, entonces $s_n\chi_B \in L^1(|\lambda|)$. Luego, $S_n \in St(|\lambda|, X)$; además $S_n(t) \to \chi_B F(t)$, $\forall\ t \in \Omega$. Por lo tanto $F\chi_B$ es fuertemente $|\lambda|$-medible. Observemos también que

$$\int_B \|F\|_X d|\lambda| = \int_B |f|\|x\|_X d|\lambda| = \left(\int_B |f| d|\lambda|\right) \|x\|_X. \tag{5.2.7}$$

Teniendo presente el teorema 5.2.2, esto nos indica que $F\chi_B \in \mathbb{B}(|\lambda|, X)$. De la arbitrariedad de $B \in \mathcal{R}$, resulta que $F \in \mathbb{B}_{loc}(\lambda, X) \subset \mathbb{P}_{loc}(\lambda, X)$.

Notemos que $F \in \mathbb{B}(|\lambda|, X)$ si, y sólo si, $f \in L^1(|\lambda|)$.

Proposición 5.2.8 Si $F \in \mathbb{B}_{loc}(\lambda, X)$, entonces su medida asociada ν_F está dada por

$$\nu_F(B) = \mathbb{B}\text{–}\int_B F d|\lambda|,\ \forall\ B \in \mathcal{R}.$$

Además la variación de ν_F satisface

$$|\nu_F|(A) = \int_A \|F\|_X d|\lambda|,\ \forall\ A \in \mathcal{R}^{loc}. \tag{5.2.8}$$

Demostración. De (5.2.3) se sigue la primera afirmación.

Ahora si $B \in \mathcal{R}$, notemos que

$$\nu_F(B \cap A) = \nu_{\chi_B F}(A),\ \forall\ A \in \mathcal{R}^{loc}.$$

Así, como $\chi_B F \in \mathbb{B}(|\lambda|, X)$, del corolario 5.2.5 se sigue que

$$|\nu_F|(B) = |\nu_{\chi_B F}|(B) = \int_B \|F\|_X d|\lambda|$$

. Luego, teniendo presente la proposición 1.3.15

$$|\nu_F|(A) = \sup_{B \in \mathcal{R}_A} |\nu_F|(B) = \sup_{B \in \mathcal{R}_A} \int_B \|F\|_X d|\lambda| = \int_A \|F\|_X d|\lambda|,\ \forall\ A \in \mathcal{R}^{loc}. \blacksquare$$

Del teorema 5.2.2 y de (5.2.8) obtenemos:

Corolario 5.2.9 Sea $F : \Omega \to X$ una función fuertemente $|\lambda|$-medible. Entonces $F \in \mathbb{B}(|\lambda|, X)$ si, y sólo si, $F \in \mathbb{B}_{loc}(\lambda, X)$ y ν_F es de variación acotada.

5.2.3. El espacio $L^1(\nu_F)$

Por el teorema 1.4.14 sabemos que $L^1(|\nu_F|) \subset L^1(\nu_F)$; así podemos restringir el operador M_F definido en (5.1.7) y el operador integral I_{ν_F} a este subespacio vectorial. El siguiente resultado nos proporciona la relación entre estos operadores cuando $F \in \mathbb{B}_{loc}(\lambda, X)$. Asimismo veremos que también en este caso el espacio $L^1(|\nu_F|)$ se puede identificar con un subespacio de $\mathbb{B}(|\lambda|, X)$.

Proposición 5.2.10 Sean $F \in \mathbb{B}_{loc}(\lambda, X)$ y $g \in L^0(|\nu_F|)$. Entonces $g \in L^1(|\nu_F|)$ si, y sólo si, $gF \in \mathbb{B}(|\lambda|, X)$. Además $M_F : L^1(|\nu_F|) \to \mathbb{B}(|\lambda|, X)$ es una isometría lineal tal que $I_{\nu_F}(g) = I_{\mathbb{B}} \circ M_F(g)$, $\forall\ g \in L^1(|\nu_F|)$.

Demostración. Hemos visto que M_F es un operador lineal, veremos que al restringirlo a $L^1(|\nu_F|)$ su imagen es un subconjunto de $\mathbb{B}(|\lambda|, X)$. Observemos primero que si $N \in \mathcal{N}_0(\nu_F)$, entonces $\chi_N F = 0$ $|\lambda|$-c.t.p. Procediendo análogamente al lema 5.1.10 obtenemos que

si $g = h$ ν_F-c.t.p., entonces $gF = hF$ $|\lambda|$-c.t.p.

Así la restricción de $M_F : L^1(|\nu_F|) \to \mathbb{B}(|\lambda|, X)$ está bien definida.

Por otra parte, puesto que las normas en $L^1(|\nu_F|)$ y en $\mathbb{B}(|\lambda|, X)$ son distintas a las normas de $L^1(\nu_F)$ y de $\mathbb{P}(|\lambda|, X)$ respectivamente, necesitamos establecer que bajo estas normas M_F es también una isometría.

Además para cada $s \in S(\mathcal{R}^{loc})$ con representación canónica $s = \sum_{j=1}^{n} a_j \chi_{A_j}$ se cumple

$$\begin{aligned}\int_\Omega |s| d|\nu_F| &= \int_\Omega \sum_{j=1}^{n} |a_j| |\nu_F|(A_j) = \sum_{j=1}^{n} |a_j| \int_{A_j} \|F\|_X d|\lambda| \\ &= \int_\Omega \sum_{j=1}^{n} |a_j| \chi_{A_j} \|F\|_X d|\lambda| = \int_\Omega \|sF\|_X d|\lambda|.\end{aligned}$$

Luego, $s \in L^1(|\nu_F|)$ si, y sólo si, $sF \in \mathbb{B}(|\lambda|, X)$. Consideremos ahora $g \in L^0(|\nu_F|)$. Tomemos $\{s_n\} \subset S(\mathcal{R}^{loc})$ tal que $0 \leq s_n \uparrow |g|$, ν_F-c.t.p. Entonces $\|s_n F\|_X \uparrow \|gF\|_X$, $|\lambda|$-c.t.p. Por lo que se ha probado y el teorema de la convergencia monótona

$$\int_\Omega \|gF\|_X d|\lambda| = \lim_{n\to\infty} \int_\Omega \|s_n F\|_X d|\lambda| = \lim_{n\to\infty} \int_\Omega |s_n| d|\nu_F| = \int_\Omega |g| d|\nu_F|.$$

Del corolario 5.2.5 obtenemos que $gF \in \mathbb{B}(|\lambda|, X)$ si, y sólo si $g \in L^1(|\nu_F|)$. Además $\|g\|_{|\nu_F|} = \|gF\|_1$.

La igualdad entre los operadores integrales se sigue de la proposición anterior y de la proposición 5.1.11. ■

Ejemplo 5.2.11 Retomemos el ejemplo 5.2.7. Hemos visto que la función F definida en (5.2.6) es localmente Bochner integrable; estudiemos entonces la medida ν_F y sus espacios de funciones integrables relacionados. Primero veamos que

$$\nu_F(B) = \mathbb{B}\text{–}\int_B F d|\lambda| = \left(\int_B f d|\lambda|\right) x, \ \forall\ B \in \mathcal{R}.$$

Ahora tomemos $A \in \mathcal{R}^{loc}$, de (5.1.4) y (5.2.8)

$$\begin{aligned}\|\nu_F\|(A) &= \sup_{x^* \in B_{X^*}} \int_A |\langle F, x^* \rangle| d|\lambda| = \sup_{x^* \in B_{X^*}} \int_A |f| |\langle x, x^* \rangle| d|\lambda| \\ &= \left(\int_A |f| d|\lambda|\right) \sup_{x^* \in B_{X^*}} |\langle x, x^* \rangle| = \left(\int_A |f| d|\lambda|\right) \|x\|_X \\ &= \int_A \|F\|_X d|\lambda| = |\nu_F|(A).\end{aligned}$$

Por lo tanto $\|\nu_F\| = |\nu_F|$.

Sea $g \in L^1(\nu_F)$, de la proposicíon 5.1.11

$$\int_\Omega g d\nu_F = \mathbb{P}\text{–}\int_\Omega gFd|\lambda| = \left(\int_\Omega gfd|\lambda|\right)x,$$

así $gf \in L^1(\lambda)$. Luego,

$$\int_\Omega \|gF\|_X d|\lambda| = \int_\Omega |gf|\|x\|_X d|\lambda| < \infty. \tag{5.2.9}$$

Además por el lema 5.1.3 i) gF es fuertemente $|\lambda|$-medible. Del teorema 5.2.2, se sigue que $gF \in \mathbb{B}(|\lambda|, X)$ y por la proposición 5.2.10, $g \in L^1(|\nu_F|)$. Concluimos que $L^1(|\nu_F|) = L^1(\nu_F)$. Ya que $L^1(|\nu_F|)$ es σ-orden continuo y tiene la propiedad σ-Fatou, resulta que $L^1(\nu_F)$ también. Luego, $L^1(|\nu_F|) = L^1(\nu_F) = L^1_w(\nu_F)$ [9, Prop. 5.4].

Fijemos $x_0 \in X$ tal que $\|x_0\|_X = 1$. De (5.2.9) resulta que la correspondencia que a cada $f \in L^1(|\lambda|)$ le asigna fx_0, es una isometría lineal entre $L^1(|\lambda|)$ y $\mathbb{B}(|\lambda|, X)$. Si ahora fijamos $f_0 \in B_{L^1(|\lambda|)}$, de nuevo por (5.2.9) se obtiene que la correspondencia $x \mapsto f_0 x$ entre X y $\mathbb{B}(|\lambda|, X)$ es también una isometría lineal. Concluimos entonces que $L^1(|\lambda|)$ y X se identifican con subespacios de $\mathbb{B}(|\lambda|, X)$.

Bibliografía

[1] Y. A. Abramovich and C. D. Aliprantis, *An Invitation to Operator Theory.* Providence, Graduate Studies in Math., Vol. 50, AMS, 2002.

[2] C. D. Aliprantis and O. Burkinshaw, *Positive Operators.* Dordrecht, Springer-Verlag, 2006.

[3] S. Banach, *Théorie des Opérations Linéaires*, Second edition. New York, Chelsea Publishing Company, 1978.

[4] R. G. Bartle, N. Dunford and J. Schwartz 'Weak compactness and vector measures', *Canad. J. Math.* **7**(1955), 289-395.

[5] C. Bennett and R. Sharpley, *Interpolation of operators.* Boston, Academic Press, 1988.

[6] J. K. Brooks and N. Dinculeanu, 'Strong additivity, absolute continuity and compactness in spaces of measures', *J. Math. Anal. Appl.* **45**(1974), 156-175.

[7] J. M. Calabuig, O. Delgado and E. A. Sánchez Pérez, 'Generalized perfect spaces'. *Indag. Mathem.* **19(3)**(2008), 359-378.

[8] J. M. Calabuig, O. Delgado and E. A. Sánchez Pérez, 'Factorizing operators on Banach function spaces through spaces of multiplication operators'. *J. Math. Anal. Appl.* **364**(2010), 88-103.

[9] J. M. Calabuig, O. Delgado, M. A. Juan and E. A. Sánchez-Pérez, 'On the Banach lattice structure of L^1_w of a vector measure on a δ-ring'. *Collect. Math.* **65**(2014), 67-85.

[10] G. P. Curbera, *The space of integrable functions with respect to a vector measure.* Ph. D Thesis, Univ. of Sevilla, 1992.

[11] G. P. Curbera, 'Operators into L^1 of a vector measure and applications to Banach lattices', *Math. Ann.* **293**(1992), 317-330.

[12] G. P. Curbera and W. J. Ricker, 'The Fatou property in p-convex Banach lattices'. *J. Math. Anal. Appl.* **328**(2007), 287-294.

[13] M. M. Day, *Normed Linear Spaces.* Berlin-Heidelberg-New York, Springer-Verlag , 1973.

[14] O. Delgado, 'L^1-spaces of vector measures defined on δ-rings'. *Arch. Math* **84**(2005), 432-443.

[15] O. Delgado, *Further Developments on L^1 of a Vector Measure.* Ph. D. Thesis, University of Sevilla, 2004.

[16] J. Diestel and J. J. Uhl Jr., *Vector Measures.* Providence, R.I. Amer. Math. Soc., 1977.

[17] N. Dinculeanu, *Vector measures.* Oxford, Pergamon Press, 1953.

[18] N. Dunford and J. T. Schwartz, *Linear Operators, Part I General Theory.* New York, Interscience Publishers, Inc., 1958.

[19] F. Galaz Fontes, *Elementos de Análisis Funcional.* México, CIMAT, 2006.

[20] T. A. Gillespie, 'Factorization in Banach function spaces', *Indag. Math.* **43**(1981), 287-300.

[21] E. Jiménez Fernández, M. A. Juan and E. A. Sánchez-Pérez, 'The Köthe dual of an Abstract Banach Lattice', *J. Funct. Spaces Appl.* (2013).

[22] M. A. Juan, *Vector measures on δ-rings and representations theorems of Banach lattices.* Ph. D. Thesis, Univ. Politec. of Valencia, 2011.

[23] I. Kluvánek and K. Knowles, *Vector measures and control systems.* Amsterdam, North Holland Math. Studies **20**, 1975.

[24] S. S. Kutateladze, *Vector lattices and Integral Operators.* Dordrecht-Boston-London, Kluwer Academic Publishers, 1996.

[25] S. Lang, *Real Analysis.* London-Amsterdam-Don Mills, Ontario-Sydney-Tokyo, Addison-Wesley, Reading Mass., 1983.

[26] D. R. Lewis, 'Integration with respect to vector measures'. *Pacific J. Math* **33**(1970), 157-165.

[27] D. R. Lewis, 'On integrability and summability in vector spaces'. *Illinois J. Math* **16**(1972), 294-207.

[28] J. Lindenstrauss and L. Tzafriri, *Classical Banach Spaces II.* Berlin-Heidelberg-New York, Springer-Verlag, 1979.

[29] W. A. J. Luxemburg and A. C. Zaanen, *Riesz Spaces I.* Amsterdam-London North-Holland Publishing Company, 1971.

[30] L. Maligranda and L. E. Persson, 'Generalized Duality of some Banach function Spaces', *J. Math. Anal. Appl.* **45**(1974), 156-175.

[31] P. R. Masani and H. Niemi, 'The integration theory of Banach space valued measures and the Tonelli-Fubini theorems. I. Scalar-valued measures on δ-rings'. *Adv. Math.* **73**(1989), 204-241.

[32] P. R. Masani and H. Niemi, 'The integration theory of Banach space valued measures and the Tonelli-Fubini theorems. II. Pettis integration'. *Adv. Math.* **75**(1989), 121-167.

[33] S. Okada, W. J. Ricker and L. Rodríguez-Piazza, 'Compactness of the integration operator associated with a vector measure'. *Studia Math.* **120 (2)**(2002), 133-149.

[34] S. Okada, W. J. Ricker and E. Sánchez-Pérez, *Optimal Domain and Integral Extension of Operators.* Basel-Boston-Berlin, Birkhauser, 2008.

[35] W. Rudin, *Real and Complex Analysis.* Boston, McGraw Hill, 1987.

[36] H. H. Schaefer, *Banach Lattices and Positive Operators.* Berlin-Heidelberg-New York, Springer-Verlag , 1974.

[37] G. F. Stefansson, 'L_1 of a vector measure'. *Le Matematiche* **XLVIII**(1993), 219-234.

[38] A. Zaanen, *Integration.* Amsterdam, North-Holland Publishing Company, 1967.

[39] A. Zaanen, *Riesz Spaces II* Amsterdam-New York-Oxford, North-Holland Publishing Company, 1983.