Centro de Investigación en Matemáticas, A.C.

# Métodos de Clasificación en Geometría Algebraica

Tesis que para obtener el título de

Maestro en Ciencias con Especialidad en Matemáticas Básicas

presenta

Víctor Nopal Coello

bajo la dirección de

Dra. Gloria Leticia Brambila Paz

*A mis padres y hermanos.*

# Agradecimientos

A mis padres y hermanos que siempre me han apoyado y que siempre han estado conmigo en los momentos difíciles.

A mi asesora, Dra. Gloria Leticia Brambila Paz por la dedicación, confianza y paciencia en el trabajo de tesis.

A mis compañeros y amigos del posgrado por los momentos compartidos y por el apoyo incondicional que ofrecen cuando pueden, especialmente a mis amigos Osbaldo M. G. y Hugo T. L. quienes me apoyaron mucho para realizar este trabajo de tesis.

A CIMAT por la oportunidad que me dio para poder continuar con mi formación y por el apoyo económico que me sirvió para terminar el trabajo de tesis.

A CONACYT por el apoyo financiero que ofreció para mis estudios de maestría.

# Índice general

# Introducción

El concepto de espacio moduli surge cuando se estudian problemas donde se busca clasificar objetos geométrico-algebraicos, módulo una relación de equivalencia. Muchas veces estos problemas de clasificación son muy complicados y es cuando se opta por fijar algunos invariantes. Por ejemplo cuando se busca clasificar haces vectoriales sobre una curva algebraica $X$, módulo isomorfismos, es necesario fijar los invariantes rango y grado de los haces.

Un espacio moduli, informalmente es una variedad o esquema $M$, que parametriza los objetos geométrico-algebraicos que se quieren clasificar, es decir, cada punto de $M$ representa una clase de equivalencia en los objetos. En el ejemplo de haces vectoriales, un espacio moduli para este problema sería un esquema $M$, donde cada punto de $M$ representa una clase de equivalencia de haces vectoriales. En general un espacio moduli es una solución geométrica a un problema de clasificación.

El estudio de espacios moduli es relativamente reciente, comienza a principios del siglo pasado y sin embargo ya hay muchos avances enfocados a resolver problemas moduli. En este trabajo además de explicar lo que es un espacio moduli mostraremos dos métodos que son herramientas importantes para resolver algunos problemas moduli, estos son Teoría de invariantes geométricos (GIT por sus siglas en inglés) y Teoría de Stacks.

En el capítulo 1 explicaremos el concepto de espacio moduli, mostraremos ejemplos importantes de espacios moduli. Explicaremos también dos fenómenos que aparecen en problemas de clasificación, que son el "fenómeno del salto" y "automorfismos no triviales", por los cuales no existe un espacio moduli para tales problemas.

En el capítulo 2 estudiaremos el método que desarrolla David Mumford para resolver un problema de clasificación, este método es la teoría de invariantes geométricos. La idea general de ésta teoría es quitar los objetos que no permiten tener un espacio moduli y trabajar solo con los objetos que nos permitirán construir un espacio moduli. Explicaremos en el capítulo 2 como hacer esto.

Finalmente en el capítulo 3, estudiaremos el método de la teoría de stacks para resolver un problema de clasificación. La idea general en la teoría de stacks es trabajar el problema de clasificación en una categoría más grande que la de esquemas, con la finalidad de no tener el problema que causa el fenómeno de los automorfismos no triviales.

Para entender mejor estos dos métodos en los tres capítulos estudiaremos el problema particular de haces vectoriales y aplicaremos ambos métodos en este ejemplo.

Capítulo 1

# Espacio moduli

En este capítulo describiremos lo que es un problema moduli y daremos algunos ejemplos los cuales se estudiarán a lo largo de la tesis. Para explicar la teoría de moduli es necesario conocer un poco de teoría de variedades y esquemas. En este trabajo supondremos que ya se conoce esa teoría y no daremos detalles acerca de resultados en variedades o esquemas, sin embargo esa teoría se puede consultar en [8].

## 1.1. Problema Moduli

Un problema moduli es un problema de clasificación, y se puede describir por cuatro cosas, estas son:

1. Un conjunto de **Objetos** geométrico-algebraicos que son los que se busca clasificar. A este conjunto de objetos lo denotaremos por $A$.

2. Una **Relación de equivalencia** $\sim$ en los objetos de $A$.

3. **Familia:** Una familia $F$ de objetos de $A$ parametrizadas por un esquema $S$, va a ser una colección de objetos $F_s \in A$, donde ésta colección tendrá una estructura que corresponde a la estructura de $S$. Si $S$ consiste de un solo punto, las familias parametrizadas por $S$ consisten de un solo objeto de $A$. La familia $F$ como conjunto es $F = \{F_s\}_{s\in S}$.

4. **Relación de equivalencia en familias:** La relación de equivalencia entre familias, $\approx$, debe cumplir las siguientes propiedades.

   **P1)** Si $F$ y $F'$ son dos familias equivalentes parametrizadas por $S$, entonces al restringirnos a un punto $s \in S$ tenemos la relación de equivalencia en objetos, es decir $F_s \sim F'_s$ para toda $s \in S$. En otra palabras la relación de equivalencia en familias extiende la relación de equivalencia en objetos.

   **P2)** Para cualquier morfismo $\phi : S' \to S$ y cualquier familia $F$ parametrizada por $S$, existe una familia, llamada *familia inducida* $\phi^*F$ parametrizada por $S'$, que cumple las siguientes propiedades

1) $(\phi \circ \psi)^* F = \psi^* \phi^* F$.
2) $Id^* F = F$.
3) Si $F \approx F'$ entonces $\phi^* F \approx \phi^* F'$.

Denotaremos un problema moduli por $P = (A, \sim, F, \cong)$, enfatizando que consta de las cuatro cosas anteriores.

La solución a un problema moduli consiste en darle estructura de variedad (o esquema o stack algebraico) a $A/\sim$, de tal forma que esta estructura "refleje" de alguna manera la estructura de los objetos de $A$.

Los cuatro puntos son necesarios para describir un problema moduli, ya que al cambiar alguno, el problema moduli cambia y por lo tanto la solución también. En seguida pondremos varios ejemplos de problemas moduli, cada uno de ellos se analizará de manera detallada mas adelante.

**1.1 Ejemplo. Grassmanniano** Fijemos $V$ un espacio vectorial sobre un campo $\mathbb{K}$ de dimensión $n$ y $m$ un entero positivo con $m < n$. El problema moduli que se plantea es el siguiente.

1. **Objetos:** Subespacios vectoriales de $V$, de dimensión $m$.

2. **Relación de equivalencia:** Dos objetos van a ser equivalentes si son el mismo subespacio vectorial.

3. **Familia** Una familia parametrizada por un esquema $T$, es una sucesión exacta

$$0 \longrightarrow K \longrightarrow \mathscr{O}_T^n \longrightarrow Q \longrightarrow 0 \tag{1.1}$$

donde $\mathscr{O}_T^n$ es el haz trivial de rango $n$, $K$ y $Q$ son gavillas localmente libres sobre $T$ de rangos $m$ y $n - m$ respectivamente.

4. **Relación de equivalencia en familias** Dos familias parametrizadas por $T$ van a ser equivalentes si el siguiente diagrama es conmutativo

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & K \arrow[r] \arrow[d] & \mathscr{O}_T^n \arrow[r] \arrow[d, equal] & Q \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\ 0 \arrow[r] & K' \arrow[r] & \mathscr{O}_T^n \arrow[r] & Q' \arrow[r] & 0 \end{tikzcd}$$

donde las aplicaciones verticales son isomorfismos.

Una generalización del ejemplo anterior es el ejemplo del **Quot-scheme** que describiremos enseguida.

**1.2 Ejemplo. Quot-scheme**. Sea $X$ un esquema proyectivo, $\mathscr{E}$ una gavilla coherente en $X$ y $P \in \mathbb{Q}[z]$ un polinomio. El problema moduli se describe por lo siguiente:

1. **Objetos:** Cocientes coherentes de $\mathscr{E}$ con polinomio de Hilbert $P$.

2. **Relación de equivalencia:** Isomorfismos entre cocientes.

3. **Familia** Una familia parametrizada por un esquema $T$ es una pareja $(\mathscr{F}, q)$ donde

   *a*) $\mathscr{F}$ es una gavilla coherente sobre $X \times T$, plana sobre $T$ con polinomio de Hilbert $P$,

   *b*) $q : \mathscr{E}_T \longrightarrow \mathscr{F}$ es un morfismo sobreyectivo de gavillas y $\mathscr{E}_T$ es el pull-back de $\mathscr{E}$ bajo la proyección $X \times T \longrightarrow X$.

4. **Relación de equivalencia en familias** Dos familias $(\mathscr{F}, q)$, $(\mathscr{F}', q')$ parametrizadas por $T$ son equivalentes si existe un isomorfismo $f : \mathscr{F} \longrightarrow \mathscr{F}'$ tal que el siguiente diagrama conmuta

$$\begin{tikzcd} \mathscr{E}_T \arrow[r, "q"] \arrow[d, equal] & \mathscr{F} \arrow[r] \arrow[d, "f"] & 0 \\ \mathscr{E}_T \arrow[r, "q'"] & \mathscr{F}' \arrow[r] & 0 \end{tikzcd}$$

**1.3 Ejemplo. Hipersuperficies 1)**. Una hipersuperficie $H$ en $\mathbb{P}^n$ de grado $d$ es una variedad proyectiva definida por los ceros de un polinomio, $f \neq 0$, de grado $d$. En este caso denotaremos $H = V(f)$. El polinomio $f$ que genera una hipersuperficie es único salvo múltiplos escalares. Si denotamos por $\mathscr{V} := \mathbb{C}[x_0, \ldots, x_n]$, entonces a la hipersuperficie $H$ le corresponde el elemento $[f] \in \mathbb{P}(\mathscr{V})$. En este problema moduli los objetos geométrico-algebraicos son hipersuperficies de grado fijo $d$. Así el problema moduli se describe como sigue:

1. **Objetos:** Hipersuperficies de grado $d$, $H = V(f)$, en $\mathbb{P}^n$.

2. **Relación de equivalencia:** Dada por la acción de $PGL(n+1)$ en $\mathbb{P}^n$. Es decir, dos hipersuperficies $H_1$ y $H_2$ son equivalentes si existen $g \in PGL(n+1)$, y $f_1, f_2 \in \mathscr{V}$ tales que $H_i = V(f_i)$ para $i = 1,2$ y $f_1(x_0, \ldots, x_n) = f(g(x_0, \ldots, x_n))$.

3. **Familia:** Una familia parametrizada por un esquema $S$ consiste de una pareja $(L, a)$, donde $L$ es un haz lineal sobre $S$ y $a$ es un conjunto indexado de secciones de $L$,

$$a = \{a_{i_0,\ldots,i_n} \mid i_j \in \mathbb{N} \cup \{0\}, i_0 + \cdots + i_n = d\}.$$

   Así para cada punto $s \in S$ tenemos la hipersuperficie $H = V(f)$ donde

$$f = \sum_{a_{i_0,\ldots,i_n} \in a} a_{i_0,\ldots,i_n}(s) x_0^{i_0} \cdots x_n^{i_n}.$$

4. **Relación de equivalencia en familias:** Dos familias parametrizadas por $S$, $(L, a)$ y $(L', a')$ son equivalentes si existen $g \in GL(n+1)$ y un isomorfismo $h : L \to L'$ tales que la imagen de $a$ bajo $h$ es $ga'$.

**1.4 Ejemplo. Hipersuperficies 2)**. Este ejemplo es el mismo que el anterior, solo cambiando los puntos 2 y 4. En este caso tendremos que la relación de equivalencia entre objetos va a ser la igualdad, es decir dos hipersuperficies de grado $d$ son equivalentes si y sólo si son iguales.

Las familias se definen como en el ejemplo anterior y la relación de equivalencia entre familias está definida como sigue. Dos familias $(L,a)$, $(L',a')$ parametrizadas por un esquema $S$ son equivalentes si existe un isomorfismo $h : L \to L'$ que manda $a$ en $a'$.

Usando los dos ejemplos anteriores veremos que si cambiamos la relación de equivalencia tanto el problema moduli como la solución, si es que existe, también cambian. Más aún estos ejemplos nos mostrarán como al cambiar la relación de equivalencia entre objetos un problema moduli relativamente sencillo se vuelve en uno muy complicado.

Por otro lado la definición de familia también puede cambiar y básicamente depende del problema que estemos atacando.

**1.5 Ejemplo. Haces vectoriales.** Sea $X$ una curva. Los objetos geométrico-algebraicos en este problema son haces vectoriales sobre $X$ de grado y rango fijos, $d$ y $r$ respectivamente (ver [11]). Así el problema queda descrito como sigue:

1. **Objetos:** Haces vectoriales sobre $X$ de grado $d$ y rango $r$.
2. **Relación de equivalencia:** Isomorfismo de haces vectoriales.
3. **Familia:** Una familia de haces vectoriales parametrizada por $S$ es un haz vectorial $E$ sobre $X \times S$ tal que para toda $s \in S$ el haz vectorial $E_s := E|_{X\times\{s\}}$ es de rango $r$ y grado $d$.
4. **Relación de equivalencia en familias:** Isomorfismo de haces vectoriales.

Este trabajo estará enfocado principalmente en estudiar el problema moduli de haces vectoriales, y para poder atacar este problema necesitamos saber el concepto de espacio moduli y saber que significa resolver un problema moduli.

## 1.2. Concepto de espacio moduli

Sea $\mathbf{P} = (A, \sim, F, \cong)$ un problema moduli. En esta sección describiremos que significa resolver un problema moduli y en el caso de que un problema moduli tenga solución, a esa solución le llamaremos espacio moduli. Para describir la solución a un problema moduli es necesario utilizar teoría de categorías.

Denotemos por *Sch* la categoría de esquemas y por *Set* la categoría de conjuntos. Consideremos el *funtor de familias*

$$\mathscr{F} : Sch^{op} \longrightarrow Set$$
$$S \mapsto \mathscr{F}(S)$$
$$(S \xrightarrow{f} T) \mapsto f^* : \mathscr{F}(T) \to \mathscr{F}(S)$$

donde

$$\mathscr{F}(S) := \{\text{Clases de equivalencia de familias } F, \text{ de objetos de } A, \text{ parametrizadas por S}\},$$

y si $F$ es una familia parametrizada por $T$, $f^*(F)$ es la familia inducida.

A un funtor de este tipo le llamaremos *funtor moduli* asociado al problema moduli **P**.

Notemos que si $S$ es una variedad que consta de un solo punto, es decir $S = \{pt\}$, entonces

$$\mathscr{F}(pt) = \{\text{Clases de equivalencia de familias } F \text{ parametrizadas por pt}\} = A/\sim$$

ya que las familias parametrizadas por un punto constan de un objeto de $A$ y la relación de equivalencia de familias en este caso coincide con la de objetos.

Supongamos que existe un esquema $M$ tal que $M = A/\sim$, es decir cada punto $m \in M$ se identifica con una clase en $A/\sim$. Sea $F = \{F_s\}_{s\in S}$ una familia parametrizada por un esquema $S$, entonces hay una aplicación de $S$ a $M$ de manera natural

$$\begin{aligned} \nu_F : &S \longrightarrow M \\ &s \mapsto [F_s] \end{aligned}$$

Uno de los problemas que surgen al tratar de resolver un problema moduli es que la aplicación $\nu_F$ puede no ser un morfismo de esquemas (ver sección 1.4).

Si $\nu_F$ es morfismo, es natural preguntarse si

1. dadas dos familias no equivalentes $F_1$ y $F_2$ parametrizadas por $S$, ¿los morfismos asociados $\nu_{F_1}$ y $\nu_{F_2}$ serán diferentes?

2. dado un morfismo $\phi : S \to M$, ¿existe una familia $F$ parametrizada por $S$ tal que $\nu_F = \phi$?

Antes de dar respuesta a estas preguntas definiremos un concepto que es esencial para el desarrollo de esta teoría.

**1.6 Definición.** Sea $T$ un esquema. El **funtor de puntos de** $T$ es el funtor contravariante definido por

$$\begin{aligned} h_T : Sch^{op} &\longrightarrow Set \\ S &\mapsto h_T(S) := Hom(S,T) \end{aligned}$$

Si $\alpha : S' \to S$ es un morfismo de esquemas entonces $h_T(S) \to h_T(S')$ está definido por la composición con $\alpha$.

Notemos que un esquema $T$ está completamente determinado por su funtor de puntos $h_T$.

Igual que antes, supongamos que $A/\sim$ tiene estructura de variedad (o esquema) $M$ y $\mathscr{F}$ es el funtor moduli asociado. Consideremos la transformación natural $\Phi : \mathscr{F} \longrightarrow h_M$ tal que para cada esquema $S$ tenemos la función de conjuntos

$$\begin{aligned} \Phi_S : \mathscr{F}(S) &\longrightarrow h_M(S) \\ F &\mapsto \nu_F \end{aligned}$$

Así las preguntas anteriores se reducen a analizar si

1. ¿$\Phi_S$ es inyectiva?

2. ¿$\Phi_S$ es sobreyectiva?

En el caso donde ambas respuestas sean afirmativas para todo esquema $S$, entonces diremos que el funtor moduli es representable. En seguida daremos la definición formal.

**1.7 Definición.** El funtor moduli $\mathscr{F}$ es **representable** si existe $M \in Obj(Sch)$, tal que para cualquier $S \in Obj(Sch)$, $\Phi_S$ es una biyección entre los conjuntos $\mathscr{F}(S)$ y $h_M(S)$. En este caso diremos que $\mathscr{F}$ está representado por $(M,\Phi)$ y que $M$ es el **espacio moduli fino** para el problema moduli asociado a $\mathscr{F}$.

Resolver un problema moduli significa probar que el funtor moduli asociado es representable y encontrar la pareja $(M,\Phi)$ que lo representa. Diremos entonces que la solución a tal problema moduli es el espacio moduli fino $M$.

**1.8 Observación.** Supongamos que $(M,\Phi)$ representa el funtor $\mathscr{F}$.

1. Sea $S = \{pt\}$ una variedad que consiste de un solo punto, entonces $h_M(pt) = M$ y $\mathscr{F}(pt) = A/\sim$. Como $\Phi_{pt}$ es biyección entonces $M = A/\sim$, es decir cada punto de $M$ es una clase de equivalencia de objetos de $A$.

2. Si $S = M$, como en $h_M(M)$ siempre tenemos el morfismo $Id_M$ y $\Phi_M$ es biyección, entonces existe una familia $U$ parametrizada por $M$ tal que $\nu_U = Id_M$.

A la familia $U$ se le conoce como la **familia universal** y el nombre se debe a lo siguiente. Sean $S$ un esquema y $\varphi : S \to M$ un morfismo de esquemas. Por la propiedad P2) de familias tenemos la familia inducida $\varphi^*U$ parametrizada por $S$.

Como $\Phi_S$ es biyección entonces, si $F$ es una familia parametrizada por $S$ tal que $\nu_F = \varphi$ entonces $F \cong \varphi^*U$.

En otras palabras, con la familia $U$ podemos recuperar todas las familias parametrizadas por $S$. Además si hay dos familias $F_1$ y $F_2$ parametrizadas por $S$, que tengan asociado el mismo morfismo $\phi : S \to M$, entonces $F_1 \cong F_2 \cong \phi^*U$. Por lo tanto tenemos la definición alternativa de espacio moduli.

**1.9 Definición.** Un espacio **moduli fino** es una pareja $(M,U)$ donde $M$ es un esquema y $U$ es una familia parametrizada por $M$, tal que

- $A/\sim = M$.

- Para todo esquema $S$ y toda familia $F$ parametrizada por $S$, existe un único morfismo de esquemas $\varphi : S \to M$ tal que $F \cong \varphi^*U$.

Desafortunadamente hay muchos problemas moduli donde no existe un espacio moduli fino. En esos casos se considera una definición un poco más débil. Esta definición consiste en pedir una propiedad universal para $\Phi$.

**1.10 Definición.** Un **espacio moduli grueso** para un problema moduli es un esquema $M$ junto con una transformación natural

$$\Phi : \mathscr{F} \longrightarrow h_M$$

tal que

1. $\Phi(pt)$ es biyectivo.

2. Para cualquier variedad $N$ y cualquier transformación natural $\Psi : \mathscr{F} \longrightarrow h_N$ existe una única trasformación natural

   $$\Omega : h_M \longrightarrow h_N$$

   tal que $\Psi = \Omega \circ \Phi$. Es decir, el siguiente diagrama conmuta

   $$\begin{tikzcd} \mathscr{F} \arrow[r, "\Psi"] \arrow[d, "\Phi"'] & h_N \\ h_M \arrow[ur, "\Omega"'] & \end{tikzcd}$$

Notemos que la primera condición implica que $M = A/\sim$. Para terminar esta sección enunciaremos un resultado que establece cuando un espacio moduli grueso es espacio moduli fino.

**1.11 Teorema.** *Un espacio moduli grueso* $(M, \Phi)$ *es fino si y sólo si*

1. *Existe una familia* $U$ *parametrizada por* $M$ *tal que, para todo* $m \in M$, $U_m$ *está en la clase de equivalencia* $[\Phi(pt)^{-1}(m)]$

2. *Para cualesquiera familias* $F_1$, $F_2$ *parametrizadas por una variedad* $S$,

   $$\nu_{F_1} = \nu_{F_2} \iff F_1 \cong F_2$$

## 1.3. Dos espacios moduli importantes

En esta sección daremos el esbozo de la construcción de dos espacios moduli que son importantes en la teoría de moduli, ya que se utilizan para poder construir otros espacios moduli. Estos espacios son el *Grassmanniano* y el *Quot-scheme* cuyos problemas moduli están descritos en los ejemplos (1.1) y (1.2) respectivamente.

### 1.3.1. El espacio moduli Grassmanniano

Comenzaremos analizando el problema moduli del grassmanniano, Ejemplo (1.1). El funtor moduli asociado a este problema moduli es $Grass_{m,\mathbb{K}^n} : Sch \longrightarrow Set$, definido como

$$Grass_{m,\mathbb{K}^n}(T) = \{\text{Clases de equivalencia de suceciones exactas descritas en (1.1)}\}$$

con $Grass_{m,\mathbb{K}^n}(f) = f^*$.

**1.12 Teorema.** *El funtor $Grass_{m,\mathbb{K}^n}$ es representable.*

Antes de demostrar el teorema definiremos algunos morfismos que utilizaremos para la demostración.

Recordemos que un elemento $A \in \mathbb{A}^{mn}$, la podemos pensar como una matriz de tamaño $m \times n$. Si $A = (a_1, \ldots, a_{mn}) \in \mathbb{A}^{mn}$ entonces este elemento se puede pensar como la matriz

$$\begin{pmatrix} a_1 & a_2 & \cdots & a_n \\ a_{n+1} & a_{n+2} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n(m-1)+1} & a_{n(m-1)+2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

Sea $J = \{j_1, j_2, \ldots, j_m\} \subset \{1,2,\ldots,n\}$ tal que $j_1 < j_2 < \cdots < j_m$. Notemos que hay en total $\binom{n}{m}$ maneras de escoger $J$, así que podemos etiquetarlas como $J_1, \ldots, J_{\binom{n}{m}}$.

Construimos la matriz $A_i$ a partir de $A$ y de $J_i$, quitándole a $A$ las columnas que no estén indexadas por $J_i$. Como $J_i$ tiene $m$ elementos entonces $A_i$ es una matriz cuadrada de tamaño $m \times m$. Sea $d_i := det(A_i)$, y definimos el morfismo

$$f : \mathbb{A}^{mn} \longrightarrow \mathbb{A}^{\binom{n}{m}}$$
$$A \mapsto (d_1, d_2, \ldots, d_{\binom{n}{m}})$$

**Ejemplo.** Para $n = 4$ y $m = 2$, sean

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 6 & 4 \\ 3 & -1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

$J_1 = \{1,2\}, J_2 = \{1,3\}, J_3 = \{1,4\}, J_4 = \{2,3\}, J_5 = \{2,4\}, J_6 = \{3,4\}$, así

$$A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}, A_2 = \begin{pmatrix} 1 & 6 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}, A_3 = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}$$

$$A_4 = \begin{pmatrix} 2 & 6 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, A_5 = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}, A_6 = \begin{pmatrix} 6 & 4 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

por lo tanto $f(A) = (-7, -18, -13, 6, 2, -6) \in \mathbb{A}^{\binom{4}{2}} = \mathbb{A}^6$.

Usando el morfismo $f$, definimos $\mathscr{U} := \{A \in \mathbb{A}^{mn} | f(A) \neq 0\}$. Notemos que si $A \in \mathscr{U}$ entonces $A_i$ tiene determinante distinto de cero para alguna $i$, por lo tanto las filas de $A$ generan un subespacio vectorial $V_A \subset \mathbb{K}^n$ de dimensión $m$, en el ejemplo anterior las filas de $A$ generan un subespacio de $\mathbb{R}^4$ de dimensión 2.

Por otro lado si tenemos un subespacio vectorial de dimensión $m$, $V \subset \mathbb{K}^n$, al tomar una base $\{v_1, \ldots, v_m\}$ de $V$, obtenemos la matriz

$$A = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_m \end{pmatrix}$$

y en este caso $A \in \mathscr{U}$. Observemos que si tomamos una base distinta de $V$ y determinamos la matriz $B$ con esa base, entonces existe $\lambda \in \mathbb{K} - \{0\}$ tal que $f(A) = \lambda f(B)$. Análogamente si $f(A) = \lambda f(B)$, para $A, B \in \mathscr{U}$ y $\lambda \in \mathbb{K} - \{0\}$, entonces los subespacios vectoriales generados por las filas de $A$ y $B$ respectivamente, son el mismo subespacio vectorial.

Por lo tanto a cada subespacio vectorial de dimensión $m$ le podemos asociar un único punto en $\mathbb{A}^{\binom{n}{m}}$ salvo múltiplos escalares.

Usando el morfismo $f$ definimos el morfismo

$$\begin{aligned} \phi : \mathscr{U} &\longrightarrow \mathbb{P}^{\binom{n}{m}-1} \\ A &\mapsto (d_1 : d_2 : \cdots : d_{\binom{n}{m}}) \end{aligned}$$

y definimos también $G(m, \mathbb{K}^n) := \phi(\mathscr{U})$.

Por las observaciones anteriores, el conjunto $G(m, \mathbb{K}^n)$ está en biyección con el conjunto de todos los subespacios $V \subset \mathbb{K}^n$ de dimensión $m$. Esto es $G(m, \mathbb{K}^n) = A/\sim$.

Sea $\mu : GL(m) \times \mathscr{U} \longrightarrow \mathscr{U}$ el morfismo dado por la multiplicación por la derecha, es decir $\mu(B, A) = BA$, entonces el siguiente diagrama conmuta

$$\begin{tikzcd} GL(m) \times \mathscr{U} \arrow[r, "\mu"] \arrow[d, "\pi_2"] & \mathscr{U} \arrow[d, "\phi"] \\ \mathscr{U} \arrow[r, "\phi"] & \mathbb{P}^{\binom{n}{m}-1} \end{tikzcd}$$

y eso se sigue directamente de las observaciones previas.

Para $J_i$ fijo definimos los conjuntos

$$Z_{J_i} := \{A \in \mathscr{U} | A_i = I_m\} \qquad P_{J_i} := \{(d_1 : \cdots : d_{\binom{n}{m}}) \in \mathbb{P}^{\binom{n}{m}-1} | d_i \neq 0\}$$

donde $I_m$ es la matriz identidad de tamaño $m \times m$. Se verifica directamente la siguiente proposición.

**1.13 Proposición.**

1. *$\mu : GL(m) \times Z_{J_i} \longrightarrow \phi^{-1}(P_{J_i})$ es un isomorfismo.*
2. *$\phi|_{Z_{J_i}} : Z_{J_i} \longrightarrow G(m, n) \cap P_{J_i}$ es un isomorfismo.*

Con esto ya podemos demostrar el Teorema (1.12). Probaremos que $G(m, \mathbb{K}^n)$ (junto con una transformación natural) representa al funtor moduli.

*Demostración.* Primero definiremos la transformación natural entre el funtor moduli y el funtor de puntos de $G(m, \mathbb{K}^n)$

$$\Phi : Grass_{m, \mathbb{K}^n} \longrightarrow h_{G(m, \mathbb{K}^n)}.$$

Sea $F : 0 \longrightarrow K \longrightarrow \mathscr{O}_T^n \longrightarrow Q \longrightarrow 0$ una familia parametrizada por un esquema $T$. Sea $\{T = \cup Spec(\mathscr{A}_i)\}$ una cubierta afín que de una trivialización de $K$.

Para cada afín $\mathscr{A}_i$ tenemos la aplicación

$$K|_{Spec(\mathscr{A}_i)} \cong \mathscr{O}^m_{Spec(\mathscr{A}_i)} \longrightarrow \mathscr{O}^n_{Spec(\mathscr{A}_i)}$$

que está dada por una matriz de orden $m \times n$ para cada $x \in Spec(\mathscr{A}_i)$. Por lo tanto tenemos un morfismo $\varphi_i : Spec(\mathscr{A}_i) \longrightarrow \mathbb{A}^{mn}$. El hecho de que $Q$ es localmente libre implica que $\varphi_i(Spec(\mathscr{A}_i)) \subset \mathscr{U}$ así que podemos componer con $\phi$.

Así para cada $\mathscr{A}_i$, tenemos el morfismo $\phi \circ \varphi_i : Spec(\mathscr{A}_i) \longrightarrow G(m, \mathbb{K}^n)$ que coincide en las intersecciones, y como $K$ es gavilla entonces existe un morfismo $\varphi : T \longrightarrow G(m, \mathbb{K}^n)$ tal que $\varphi|_{Spec(A_i)} = \phi \circ \varphi_i$. Notemos que $\varphi$ no depende de la trivialización ni del representante de la clase de equivalencia de la familia. Entonces definimos

$$\Phi_T(F) = \varphi.$$

Hasta ahora hemos definido a $\Phi$ solo a nivel de objetos, sin embargo no es difícil probar que en efecto es una transformación natural.

Para probar que $\Phi_T$ es biyectiva, construiremos una gavilla localmente libre sobre $G(m, \mathbb{K}^n)$. Ésta gavilla determina la familia universal.

Para dar los cociclos que definen la gavilla, utilizaremos el morfismo $\mu : GL(m) \times \mathscr{U} \longrightarrow \mathscr{U}$ y los isomorfismos de la Proposición (1.13).

Consideremos la cubierta abierta de $G(m, \mathbb{K}^n)$ dada por los abiertos $W_{J_i} := G(m, \mathbb{K}^n) \cap P_{J_i} \cong Z_{J_i}$. De la Proposición (1.13) y de la definición de $W_{J_i}$ tenemos que $GL(m) \times W_{J_i}$ es isomorfo a $\phi^{-1}(P_{J_i})$. Notemos que $W_{J_i} \cap W_{J_k}$ es isomorfo a un abierto $V_{J_i} \subset Z_{J_i}$ y a su vez es isomorfo a un abierto $V_{J_k} \subset Z_{J_k}$. Por lo tanto tenemos el siguiente isomorfismo

$$\rho_{ik} : GL(m) \times V_{J_i} \longrightarrow GL(m) \times V_{J_k}.$$

El isomorfismo $\rho_{ik}$ se describe de la siguiente forma: tomemos $g \in GL(m)$ y $A \in V_{J_i}$, entonces el $J_i$-ésimo menor de $A$ es la identidad. Más aún como $V_{J_i}$ es isomorfo a $V_{J_k}$ entonces el $J_k$-ésimo menor de $A$ es invertible. Supongamos que $g_k$ es la matriz inversa del $J_k$-ésimo menor de $A$, así $g_k A \in V_{J_k}$. Entonces definimos

$$\begin{aligned} \rho_{ik} : GL(m) \times V_{J_i} &\longrightarrow GL(m) \times V_{J_k} \\ (g, A) &\mapsto (g g_k^{-1}, g_k A) \end{aligned}$$

es directo verificar que está bien definida y que es un isomorfismo. Notemos que $gA \in W_{J_i} \cap W_{J_k}$, además si $B \in W_{J_i} \cap W_{J_k}$, existen únicos $g_i, g_k \in GL(m), B_i \in V_{J_i}$ y $B_k \in V_{J_k}$ tales que $g_i B_i = B = g_k B_k$. Usando el isomorfismo anterior y esta observación construimos el morfismo

$$\begin{aligned} \delta_{ik} : W_{J_i} \cap W_{J_k} &\longrightarrow GL(m) \\ B &\mapsto g_i g_k^{-1} \end{aligned}$$

Los morfismos $\{\delta_{ik}\}$ cumplen las condiciones de cociclo. En efecto

1. $\delta_{ii}(A) = Id_d$, para toda $A \in W_{J_i}$.

2. Si $A \in W_{J_i} \cap W_{J_k} \cap W_{J_l}$, entonces existen únicos $g_i, g_k, g_l \in GL(m)$, $A_i \in V_{J_i}$, $A_k \in V_{J_k}$ y $A_l \in V_{J_l}$ tales que $A = g_i A_i = g_k A_k = g_l A_l$. Así

$$(\delta_{ik}\delta_{kl})(A) = \delta_{ik}(A)\delta_{kl}(A) = (g_i g_k^{-1})(g_k g_l^{-1}) = g_i g_l^{-1} = \delta_{il}(A).$$

Por lo tanto los morfismos $\{\delta_{ik}\}$ definen una gavilla localmente libre $\mathscr{K}$ de rango $m$ sobre $G(m, \mathbb{K}^n)$.

Los encajes $Z_{J_i} \hookrightarrow \mathbb{A}^{mn}$ dan aplicaciones $\mathscr{O}^m_{W_{J_i}} \longrightarrow \mathscr{O}^n_{W_{J_i}}$ los cuales pegan vía las funciones de transición $\delta_{ik}$, así obtenemos un morfismo inyectivo $\mathscr{K} \hookrightarrow \mathscr{O}^n_{G(m,\mathbb{K}^n)}$. El cokernel $\mathscr{Q}$ está determinado salvo isomorfismo. Finalmente, la familia universal en este problema es

$$U : 0 \longrightarrow \mathscr{K} \longrightarrow \mathscr{O}^n_T \longrightarrow \mathscr{Q} \longrightarrow 0.$$

Tomando pull-backs obtenemos la biyección de $\Phi$ como se quería □

**1.14 Ejemplo. Espacio proyectivo**. Un caso particular del ejemplo anterior, es la clasificación de rectas que pasan por el origen en $\mathbb{C}^n$, es decir subespacios de dimensión 1. De la construcción del grassmanniano se verifica de forma directa que $G(1, \mathbb{C}^n) = \mathbb{P}^{n-1}$, así que el espacio moduli de este problema es $\mathbb{P}^{n-1}$.

**1.15 Ejemplo. Hipersuperficies 2**. Regresemos al ejemplo de hipersuperficies de grado $d$ en $\mathbb{P}^n$ donde la relación de equivalencia entre objetos está dada por la igualdad (ver Ejemplo (1.4)). Recordemos que una hipersuperficie de grado $d$ es el conjunto algebraico generado por $f$, $V(f) \subset \mathbb{P}^n$, donde $f \in \mathbb{C}[x_0, \ldots, x_n]$ es homogéneo de grado $d$.

Notemos que $V(f) = V(\alpha f)$ para toda $\alpha \in \mathbb{C}$, más aún si $V(f) = V(g)$ entonces existe $\alpha \in \mathbb{C}^*$ tal que $f = \alpha g$.

Una hipersuperficie puede ser representada por un polinomio de la forma

$$f(x_0, \ldots, x_n) = \sum a_{i_0 \cdots i_n} x_0^{i_0} \cdots x_n^{i_n}$$

donde $i_0 + \cdots + i_n = d$ y no todos los $a_{i_0 \cdots i_n}$ son cero. Por otro lado, dado un polinomio $f$ le podemos asociar un punto, diferente del origen, en $\mathbb{C}^{\binom{n+d}{d}}$ donde las coordenadas serán los coeficientes de $f$. Notemos que dos polinomios estás asociados al mismo punto en $\mathbb{C}^{\binom{n+d}{d}}$ si y sólo si son iguales.

Por lo anterior, a una hipersuperficie se le asocia un punto en $\mathbb{C}^{\binom{n+d}{d}} - \{0\}$. Si hay dos puntos $a, b \in \mathbb{C}^{\binom{n+d}{d}}$ que tienen asociada la misma hipersuperficie entonces existe $\alpha \in \mathbb{C}^*$ tal que $a = \alpha b$. Por lo tanto hay una biyección entre hipersuperficies de grado $d$ en $\mathbb{P}^n$ y rectas en $\mathbb{C}^{\binom{n+d}{d}}$. Entonces clasificar hipersuperficies de grado $d$ en $\mathbb{P}^n$ es equivalente a clasificar rectas en $\mathbb{C}^{\binom{n+d}{d}}$.

Por lo que el espacio moduli para este problema moduli es $\mathbb{P}^{\binom{n+d}{d}-1}$.

## 1.3.2. El espacio moduli Quot-scheme

Ahora estudiaremos el problema moduli "Quot-scheme" que está descrito en el ejemplo (1.2). Solo daremos un esbozo de la prueba de la existencia del espacio moduli, sin embargo la prueba detallada y otras generalizaciones pueden encontrarse en [3] y [9]

El funtor moduli asociado al problema moduli (1.2) es el funtor

$$Quot_{\mathscr{E}/P} : (Sch/S)^{op} \longrightarrow Set,$$

donde para cada esquema $T$

$$Quot_{\mathscr{E}/P}(T) = \{(\mathscr{F},q)|(\mathscr{F},q) \text{ es una pareja como se describe en el ejemplo (1.2)}\}/\cong$$

y si $f : W \longrightarrow T$ entonces $Quot_{\mathscr{E}/P}(f) = f^*$ está definido por el pull-back.

**1.16 Teorema.** *El funtor $Quot_{\mathscr{E}/P}$ es representable.*

*Demostración.* Probaremos el teorema para el caso particular $X = \mathbb{P}^n$ y $\mathscr{E} = \mathscr{O}^d_{\mathbb{P}^m}(l)$ para algunos enteros $d,n$ y $l$.

Primero probaremos que hay una transformación natural del funtor $Quot_{\mathscr{E}/P}$ al funtor moduli de un grassmanniano.

Sea $T$ un esquema y $(\mathscr{F},q) \in Quot_{\mathscr{E}/P}(T)$ una familia de cocientes coherentes parametrizada por $T$. Consideremos la sucesión exacta

$$0 \longrightarrow K \longrightarrow \mathscr{E}_T \xrightarrow{q} \mathscr{F} \longrightarrow 0$$

donde $K = ker(q)$. Como $\mathscr{F}$ es una familia acotada, entonces existe $m \in \mathbb{N}$ tal que $\mathscr{F}_t$ es $m$-regular, para toda $t \in T$, análogamente $\mathscr{E}_t$ y $K_t$ son $m$-regulares para toda $t \in T$.

Consideremos la proyección $f : X \times T \longrightarrow T$, podemos escoger $m$ tal que $R^q f_*(F(m)) = 0$ para toda $q > 0$. Aplicando el funtor $f_*(. \otimes \mathscr{O}(m))$ tenemos una sucesión exacta de gavillas localmente libres

$$0 \longrightarrow f_*(K(m)) \longrightarrow \mathscr{O}_T \otimes H^0(\mathscr{E}(m)) \longrightarrow f_*(\mathscr{F}(m)) \longrightarrow 0$$

por ser planas sobre $T$, y además las demás imágenes directas se anulan por como se escoge $m$.

Notemos el rango de $f_*(\mathscr{F}(m))$ está determinado por $m$, $n$, $d$ y $P$, este rango lo denotaremos por $P_m$. Con esto tenemos que la sucesión exacta anterior es de hecho un elemento en $Grass_{P_m,H^0(\mathscr{E}(m))}(T)$, por lo que tenemos una transformación natural

$$\alpha : Quot_{\mathscr{E}/P} \longrightarrow G_{P_m,H^0(\mathscr{E}(m))}$$

tal que para cada esquema $T$, $\alpha(T)(\mathscr{F},q) = F$ donde

$$F : 0 \longrightarrow f_*(K(m)) \longrightarrow \mathscr{O}_T \otimes H^0(\mathscr{E}(m)) \longrightarrow f_*(\mathscr{F}(m)) \longrightarrow 0.$$

Esta transformación natural es inyectiva pues $(\mathscr{F},q)$ puede ser recuperada a partir de $F$, [ver [3]].

Usando *estratificación plana* se demuestra que $Quot_{\mathscr{E}/P}$ es representado por un subesquema localmente cerrado $Quot(P,\mathscr{E}) \subset G(P_m,H^0(\mathscr{E}(m)))$ (ver [3]).

Como el grassmanniano $G(P_m,H^0(\mathscr{E}(m)))$ es encajado como un subesquema cerrado de $\mathbb{P}^N$ para alguna $N \in \mathbb{N}$ entonces

$$Quot(P,\mathscr{E}) \subset \mathbb{P}^N.$$

Por el *criterio de valuación para la propiedad* se prueba que $Quot(P,\mathscr{E}) \subset \mathbb{P}^N$ es proyectivo (ver [3]), que es lo que se quería demostrar. □

Hasta aquí hemos visto como resolver algunos problemas moduli y la forma de resolverlos ha sido de manera directa, probando que el funtor moduli es representable, sin embargo en muchos problemas moduli hay fenómenos, tanto en familias como en objetos, que nos impiden tener un espacio moduli fino o incluso un espacio moduli grueso. En particular hay dos fenómenos que resaltaremos en este trabajo, estos son el fenómeno del salto, que se da un familias, y el de automorfismos no triviales en objetos.

## 1.4. Problemas para la existencia de espacios moduli

### 1.4.1. Fenómeno del salto

El fenómeno del salto sucede cuando tenemos una familia $F$ parametrizada por un esquema $T$ conexo, donde la familia cumple con lo siguiente: existe $s \in T$ tal que $F|_t \sim F|_r$ para todo $r,t \in T-\{s\}$ y $F|_s \nsim F|_t$ si $t \neq s$.

El siguiente teorema describe por qué el fenómeno del salto impide tener un espacio moduli.

**1.17 Teorema.** *Suponga que en un problema moduli se presenta el fenómeno del salto, entonces no existe espacio moduli grueso para este problema moduli.*

*Demostración.* Sea $F$ una familia parametrizada por $T$ donde se presenta el fenómeno del salto. Si consideramos la aplicación asociada $\nu_F$ tenemos que $\nu_F(T)$ consiste de dos puntos diferentes, $\nu_F(s)$ y $\nu_F(t)$ para $t \neq s$. Esto implica que la imagen de un conexo es disconexo, por lo que $\nu_F$ no puede ser morfismo. Entonces para cualquier esquema $M$ no puede existir una transformación natural

$$\Phi : \mathscr{F} \longrightarrow h_M$$

ya que $\Phi_T(F) \notin h_M(T)$. Por lo tanto no existe espacio moduli grueso. □

### 1.4.2. Automorfismos no triviales

En esta subsección explicaremos por qué cuando en un problema moduli existen objetos con automorfismos no triviales no puedes existir espacio moduli fino.

En un problema moduli en general, $P = (A,\sim,F,\cong)$, diremos que un objeto $a \in A$ tiene automorfismos no triviales si la clase de equivalencia $[a]$ contiene más de un elemento.

**1.18 Teorema.** *Suponga que en un problema moduli existe un objeto que tiene automorfismos no triviales, entonces no puede existir un espacio moduli fino para tal problema moduli*

*Demostración.* Sean $X$ un objeto con automorfismos no triviales y $T$ un esquema. Consideremos la familia $F$ parametrizada por $T$ tal que $F_t = X$ para toda $t \in T$. Ahora sea $s \in T$ un punto, construimos la familia $G$ parametrizada por $T$ de tal forma que $G_t = X$ para toda $t \neq s$, y tal que $G_s$

es isomorfismo a $X$, con $G_s \neq X$. Con esta construcción tenemos que las familias $F$ y $G$ no son equivalentes, sin embargo las aplicaciones $V_F$ y $V_G$ son la misma ya que $G_s$ es isomorfo a $X$, por lo tanto $[F_t] = [G_t]$ para toda $t \in T$. Esto implica que si $\Phi : \mathscr{F} \longrightarrow h_M$ es una transformación natural, entonces $\Phi(T)$ no es una biyección, y por lo tanto no existe espacio moduli fino. □

# 1.5. Espacios moduli y haces vectoriales

## 1.5.1. Problemas en haces vectoriales

En esta sección veremos que en el problema moduli particular de haces vectoriales se presentan ambos fenómenos; el fenómeno del salto y el de automorfismos no triviales en objetos.

En haces vectoriales puede pasar que hay automorfismos no triviales y por lo tanto no exista un espacio moduli fino. Además de los dos fenómenos previos se presenta el siguiente fenómeno.

Sea $E$ un haz vectorial sobre $X \times S$, $p_2 : X \times S \longrightarrow S$ el morfismo proyección y $L$ un haz lineal sobre $S$. Consideremos los haces vectoriales $E$ y $E \otimes p_2^*L$. En general estos haces vectoriales no son isomorfos, sin embargo como $p_2^*L|_s$ es trivial para toda $s \in S$, entonces

$$E|_{X\times s} \cong E \otimes p_2^*L|_{X\times s}$$

por lo que las aplicaciones $\nu_E$ y $\nu_{E\otimes p_2^*L}$ son iguales. Por lo tanto no existe espacio moduli fino.

El fenómeno del salto también se presenta en familias de haces vectoriales y enseguida mostraremos un ejemplo donde se presenta tal fenómeno.

**1.19 Ejemplo.** Sea $\mathscr{C}$ una superficie de Riemann compacta de genero $g = 1$, $L$ un haz lineal sobre $\mathscr{C}$ de grado $d_L = 1$. Por el teorema de Riemann-Roch tenemos

$$h^0(\mathscr{C}, L^{-1}) - h^1(\mathscr{C}, L^{-1}) = deg(L^{-1}) + 1 - g = -d_L = -1$$

como $L^{-1}$ tiene grado negativo entonces $h^0(\mathscr{C}, L^{-1}) = 0$, así $h^1(\mathscr{C}, L^{-1}) = 1$ por lo cual $H^1(\mathscr{C}, L^{-1})$ es un espacio vectorial de dimensión 1.

Sea $T = H^1(\mathscr{C}, L^{-1})$, notemos que $T^* = H^0(T, \mathscr{O})$. Usando la fórmula de Künnet tenemos que

$$I_T \in Hom(T,T) = T^* \otimes T = H^0(T, \mathscr{O}) \otimes H^1(\mathscr{C}, L^{-1}) \subset H^1(T \times \mathscr{C}, \pi^*L^{-1}) = Ext^1(\pi^*L, \mathscr{O})$$

donde $\pi : T \times \mathscr{C} \longrightarrow \mathscr{C}$ es la proyección.

Entonces la identidad $Id_T$ corresponde a una extensión

$$0 \longrightarrow \mathscr{O} \longrightarrow E \longrightarrow \pi^*L \longrightarrow 0$$

De esto tenemos que $E$ es una familia de haces vectoriales sobre $\mathscr{C}$ parametrizada por $T$.

Veamos que para $t \in T$ tenemos la extensión

$$0 \longrightarrow \mathscr{O} \longrightarrow E_t \longrightarrow L \longrightarrow 0$$

en $Ext^1(L,\mathscr{O})$. Si $t_1,t_2 \in T$ distintos de cero son tales que $t_1 \neq t_2$ entonces las extensiones correspondientes

$$\delta_{t_1} : 0 \longrightarrow \mathscr{O} \longrightarrow E_{t_1} \longrightarrow L \longrightarrow 0$$
$$\delta_{t_2} : 0 \longrightarrow \mathscr{O} \longrightarrow E_{t_2} \longrightarrow L \longrightarrow 0$$

son isomorfas ya que en este caso las extensiones son múltiplos escalares (ver [6]). Pero para $0 \in T$, $E_t \ncong E_0 = \mathscr{O} \oplus L$ pues la sucesión

$$0 \longrightarrow \mathscr{O} \longrightarrow E_t \longrightarrow L \longrightarrow 0$$

no escinde para $t \neq 0$.

### 1.5.2. Haces lineales

En esta subsección estudiaremos el problema de clasificación de haces lineales sobre una curvas algebraica no singular $\mathscr{C}$, sobre $\mathbb{C}$ de género $g$. Para estudiar este caso utilizaremos la teoría de cohomología de gavillas (ver apéndice. Para detalles ver [5]).

Sea $L$ un haz lineal sobre $\mathscr{C}$ y $U = \{U_i\}_{i\in I}$ una cubierta de $\mathscr{C}$ tal que sea una trivialización de $L$, es decir, que existan isomorfismos $\phi_i : L|_{U_i} \longrightarrow \mathscr{O}_{U_i}$, donde $\mathscr{O}_{U_i}$ es el grupo de funciones holomorfas. Definamos $f_{ij} = \phi_i^{-1}\phi_j$ en las intersecciones $U_i \cap U_j$. Los isomorfismos $\{f_{ij}\}$ cumplen las condiciones de cociclo, es decir, en las intersecciones triples $U_i \cap U_j \cap U_k$

$$f_{ij} = f_{jk} \circ f_{ik}.$$

De esto tenemos que los isomorfismos $\{f_{ij}\}$ nos dan un elemento en $H^1(U,\mathscr{O}^*)$. Así que al haz lineal $L$ le corresponde un elemento en $H^1(U,\mathscr{O}^*)$. Tomando límite directo sobre los refinamientos de la cubierta $U$, tenemos que el haz lineal $L$ le corresponde un elemento en $H^1(\mathscr{C},\mathscr{O}^*)$. De hecho hay una correspondencia biyectiva entre el conjunto de clases de isomorfismos de haces lineales sobre $\mathscr{C}$ y los elementos de $H^1(\mathscr{C},\mathscr{O}^*)$ (ver [5]).

Entonces para estudiar los haces lineales es suficiente estudiar el grupo de cohomología $H^1(\mathscr{C},\mathscr{O}^*)$. Comencemos con la sucesión exacta de gavillas sobre $\mathscr{C}$

$$0 \longrightarrow \mathbb{Z} \longrightarrow \mathscr{O} \xrightarrow{exp} \mathscr{O}^* \longrightarrow 0$$

donde $exp(f) = 2i\pi f$. De esta sucesión exacta corta tenemos una sucesión exacta larga en grupos de cohomología

$$\cdots \longrightarrow H^1(\mathscr{C},\mathbb{Z}) \longrightarrow H^1(\mathscr{C},\mathscr{O}) \longrightarrow H^1(\mathscr{C},\mathscr{O}^*) \xrightarrow{\delta} H^2(\mathscr{C},\mathbb{Z}) \longrightarrow H^2(\mathscr{C},\mathscr{O}) \longrightarrow H^2(\mathscr{C},\mathscr{O}^*) \longrightarrow \cdots$$

Como $\mathscr{C}$ es una curva entonces $H^2(\mathscr{C},\mathscr{O}) = 0$ (ver teorema 8, [5]), por lo tanto tenemos la sucesión exacta

$$\cdots \longrightarrow H^1(\mathscr{C},\mathbb{Z}) \longrightarrow H^1(\mathscr{C},\mathscr{O}) \longrightarrow H^1(\mathscr{C},\mathscr{O}^*) \xrightarrow{\delta} H^2(\mathscr{C},\mathbb{Z}) \longrightarrow 0$$

más aún, tenemos sucesión exacta corta

$$0 \longrightarrow H^1(\mathscr{C},\mathscr{O})/H^1(\mathscr{C},\mathbb{Z}) \longrightarrow H^1(\mathscr{C},\mathscr{O}^*) \xrightarrow{\delta} H^2(\mathscr{C},\mathbb{Z}) \longrightarrow 0$$

El cociente $H^1(\mathscr{C},\mathscr{O})/H^1(\mathscr{C},\mathbb{Z})$ tiene estructura de variedad que se denota por $Pic^0(\mathscr{C})$. A esta variedad se le conoce como la variedad de Picard de $\mathscr{C}$. Como $H^2(\mathscr{C},\mathbb{Z}) = \mathbb{Z}$ (ver [5]), entonces de la sucesión exacta anterior tenemos que el grupo de haces lineales $H^1(\mathscr{C},\mathscr{O}^*)$ tiene una estructura natural

$$H^1(\mathscr{C},\mathscr{O}^*) \cong \mathbb{Z} \oplus H^1(\mathscr{C},\mathscr{O})/H^1(\mathscr{C},\mathbb{Z}) = \mathbb{Z} \oplus Pic^0(\mathscr{C}).$$

Con esto tenemos la clasificación de haces lineales.

**1.20 Observación.** Consideremos el morfismo $\delta : H^1(\mathscr{C},\mathscr{O}^*) \longrightarrow \mathbb{Z}$ que está dado en la sucesión de grupos de cohomología.

- Del morfismo $\delta$, tenemos que dado un haz lineal $L \in H^1(\mathscr{C},\mathscr{O}^*)$, $d_L := \delta(L) \in \mathbb{Z}$. Al entero $d_L$ se le conoce como el grado del haz lineal $L$.
- Dado un haz vectorial $E$ de rango $r$, el $detE := \bigwedge^r E$ es un haz lineal, entonces $d_E := \delta(detE)$ es un entero. Este entero es el grado de $E$.

### 1.5.3. $\mu$-estabilidad

Cuando consideramos haces vectoriales de rango mayor a 1 entonces la clasificación ya no es sencilla. Para poder clasificar haces vectoriales de rango $r > 1$ es necesario introducir el concepto de $\mu$-estabilidad y en este caso solo clasificaremos los haces vectoriales que sean $\mu$-semiestables.

**1.21 Definición.** Un haz vectorial $F$ sobre $\mathscr{C}$ es **$\mu$-(semi)estable** si para todo subhaz propio $G$

$$\mu(G) < \mu(F) \qquad (\leq)$$

donde $\mu(F) = \text{deg F/rk F}$. Un haz vectorial es $\mu$-inestable si no es $\mu$-semiestable.

**1.22 Observación.**

- Una consecuencia directa de la definición de $\mu$-estabilidad es que todo haz lineal es $\mu$-estable.
- Sea $E$ un haz vectorial $\mu$-semiestable de rango $r$ y grado $d$. Si $(r,d) = 1$ entonces $E$ es $\mu$-estable.

  En efecto, supongamos que existe un subhaz propio $F \subset E$ de rango $r_F$ y grado $d_F$ tal que $\mu(F) = \mu(E)$, entonces

  $$\frac{d_F}{r_F} = \frac{d}{r} \Longrightarrow (d_F)(r) = (d)(r_F).$$

  Por hipótesis $(r,d) = 1$ por lo tanto $r \mid r_F$, pero esto es contradicción pues como $F$ es subhaz $r_F < r$.

- Si tenemos una sucesión exacta corta

$$0 \longrightarrow E_1 \longrightarrow E \longrightarrow E_2 \longrightarrow 0$$

entonces $\mu(E_1) \leq \mu(E) \iff \mu(E) \leq \mu(E_2)$.

Prueba. Supongamos que $E$ es un haz vectorial de rango $r$ y grado $d$. Sean $r_i$ y $d_i$ el rango y el grado de $E_i$. Entonces $r_1 + r_2 = r$ y $d_1 + d_2 = d$, por lo tanto

$$\begin{aligned}\mu(E_1) \leq \mu(E) &\iff \frac{d_1}{r_1} \leq \frac{d}{r} \iff \frac{d_1}{r_1} \leq \frac{d_1+d_2}{r_1+r_2} \\ &\iff d_1r_1 + d_1r_2 \leq d_1r_1 + d_2r_1 \iff d_1r_2 \leq d_2r_1 \\ &\iff d_2r_2 + d_1r_2 \leq d_2r_2 + d_2r_1 \iff r_2(d) \leq d_2(r) \\ &\iff \frac{d}{r} \leq \frac{d_2}{r_2} \iff \mu(E) \leq \mu(E_2).\end{aligned}$$

El resultado también es cierto para las otras desigualdades $(<, >, \geq)$.

- Si $E$ es un haz vectorial $\mu$-semiestable de rango $r$ y grado $d$, y $L$ un haz lineal de grado $d_L$, entonces $E \otimes L$ es $\mu$-semiestable.

Prueba. Recordemos primero que $deg(E \otimes L) = rd_L + d$, por lo tanto $\mu(E \otimes L) = d_L + \mu(E)$. Actuaremos por contradicción, supongamos que existe $F \subset E \otimes L$ tal que $\mu(F) > \mu(E \otimes L)$. Sean $r_F$ y $d_F$ el rango y grado de $F$, entonces

$$\frac{d_F}{r_F} > d_L + \mu(E)$$

Por otro lado, tenemos que $F \otimes L^{-1}$ es subhaz de $E$, y como $E$ es semiestable $\mu(F \otimes L^{-1}) \leq \mu(E)$, es decir

$$\frac{d_F}{r_F} - d_L \leq \mu(E)$$

pero esto contradice la desigualdad $\mu(F) > \mu(E \otimes L)$. Por lo tanto $E \otimes L$ es semiestable.

El resultado también es cierto para cuando $E$ es $\mu$-estable.

- Si $E$ es $\mu$-estable, entonces $E^{-1}$ también es $\mu$-estable.

Prueba. Actuaremos por contradicción. Supongamos que $E^{-1}$ no es $\mu$-estable, entonces existe $F \subset E^{-1}$ un subhaz tal que $\mu(F) \geq \mu(E^{-1})$. Consideremos la sucesión exacta

$$0 \longrightarrow F \longrightarrow E^{-1} \longrightarrow G \longrightarrow 0$$

donde $G$ es el cokernel del morfismos inclusión $F \hookrightarrow E^{-1}$. Como $\mu(F) \geq \mu(E^{-1})$ entonces $\mu(E^{-1}) \geq \mu(G)$. De la sucesión exacta anterior, al dualizar tenemos la siguiente sucesión exacta

$$0 \longrightarrow G^{-1} \longrightarrow E \longrightarrow F^{-1} \longrightarrow 0$$

donde $G^{-1} \subset E$ es un subhaz. Como $\mu(E^{-1}) \geq \mu(G)$ entonces $\mu(G^{-1}) \geq \mu(E)$, pero esto contradice la $\mu$-estabilidad de $E$. Por lo tanto $E^{-1}$ es $\mu$-estable.

Lo mismo se cumple para $\mu$-semiestable.

**1.23 Definición.** Sea $E$ un haz vectorial sobre $\mathscr{C}$, diremos que $E$ es descomponible si se puede expresar como suma directa de dos haces vectoriales $E = F \oplus G$, con $F \neq 0$ y $G \neq 0$. Diremos que $E$ es indescomponible si no es descomponible.

**1.24 Proposición.** *Sea $E$ un haz vectorial de rango $r > 1$ y grado $d$. Si $E$ es descomponible entonces no es $\mu$-estable.*

*Demostración.* Sea $E$ un haz vectorial sobre $\mathscr{C}$ descomponible, es decir, existen haces vectoriales $E_1$ y $E_2$ no cero, tales que $E = E_1 \oplus E_2$. Sean $r_i$, $d_i$ el rango y grado de $E_i$, entonces tenemos las siguientes relaciones

$$d_1 + d_2 = d \qquad\qquad r_1 + r_2 = r.$$

Notemos que tanto $E_1$ como $E_2$ son subhaces de $E$ y si $\mu(E_1) > \mu(E)$ entonces $E$ es $\mu$-inestable. Supongamos entonces que $\mu(E_1) \leq \mu(E)$ así

$$\begin{aligned} \frac{d_1}{r_1} \leq \frac{d}{r} &\iff rd_1 \leq r_1 d \iff (r_1 + r_2)d_1 \leq r_1(d_1 + d_2) \\ &\iff r_2 d_1 \leq r_1 d_2 \iff r_2 d_1 + d_2 r_2 \leq r_1 d_2 + d_2 r_2 \\ &\iff r_2(d_1 + d_2) \leq d_2(r_1 + r_2) \iff r_2 d \leq d_2 r \\ &\iff \frac{d}{r} \leq \frac{d_2}{r_2} \iff \mu(E) \leq \mu(E_2) \end{aligned}$$

por lo que $E$ no puede ser $\mu$-estable. □

Con la definición de $\mu$-estabilidad y las observaciones anteriores, ya podemos estudiar el problema moduli de haces vectoriales de rango $r > 1$.

### 1.5.4. Haces vectoriales sobre una curva algebraica de género 0

Ahora trataremos el problema moduli de clasificación de haces vectoriales sobre una curva algebraica de género $g = 0$, de hecho en este caso $\mathscr{C} = \mathbb{P}^1$. Comenzaremos enunciando y demostrando el teorema importante de esta subsección.

**1.25 Teorema. Grothendieck**. *Todo haz vectorial sobre $\mathbb{P}^1$ de rango $r$ y grado $d$ tiene una descomposición como $\mathscr{O}(a_1) \oplus \cdots \oplus \mathscr{O}(a_r)$, donde $\mathscr{O}(a_i)$ es un haz lineal de grado $a_i$, $a_1 \geq a_2 \geq \cdots \geq a_r$ y $a_1 + \cdots + a_r = d$. La descomposición es única.*

*Demostración.* La prueba será por inducción sobre el rango. El caso $r = 1$ es el corolario II 6.17 del libro [8]. Supongamos que el resultado es cierto para haces vectoriales de rango $r - 1$. Sea $E$ un haz vectorial sobre $\mathbb{P}^1$ de rango $r$, entonces existen haces vectoriales $E', E''$ de rangos 1 y $r - 1$ respectivamente y una sucesión exacta

$$0 \longrightarrow E' \longrightarrow E \longrightarrow E'' \longrightarrow 0$$

De hecho podemos escoger $E'$ como un subhaz lineal de $E$ de grado máximo.

Por hipótesis de inducción $E' = \mathscr{O}(a_1)$ y $E'' = \mathscr{O}(a_2) \oplus \cdots \oplus \mathscr{O}(a_r)$. Tenemos entonces la sucesión exacta corta

$$0 \longrightarrow \mathscr{O}(a_1) \longrightarrow E \longrightarrow \mathscr{O}(a_2) \oplus \cdots \oplus \mathscr{O}(a_r) \longrightarrow 0$$

Por lo que $E$ corresponde a un elemento en $Ext^1(E'', E') = H^1(\mathbb{P}^1, (E'')^{-1} \otimes E')$ (ver [8]), luego

$$\begin{aligned} Ext^1(E'', E') &= H^1(\mathbb{P}^1, (\mathscr{O}(a_2) \oplus \cdots \oplus \mathscr{O}(a_r))^{-1} \otimes \mathscr{O}(a_1)) \\ &= \bigoplus_{i=2}^{r} H^1(\mathbb{P}^1, \mathscr{O}(a_1 - a_i)) \end{aligned}$$

Ahora probaremos que $H^1(\mathbb{P}^1, \mathscr{O}(a_1 - a_i)) = 0$ para toda $i = 2, \ldots, r$. Del Teorema de dualidad de Serre (III 7, [8]) tenemos que, como el haz canónico $\omega_{\mathbb{P}^1}$ tiene grado $-2$ entonces

$$h^1(\mathbb{P}^1, \mathscr{O}(a_1 - a_i)) = h^0(\mathbb{P}^1, \mathscr{O}(a_i - a_1 - 2)).$$

Éste último es cero si y sólo si $a_i - a_1 - 2 < 0$.

Por otro lado, de la última sucesión exacta tenemos

$$0 \longrightarrow \mathscr{O}(-1) \longrightarrow E(-1 - a_1) \longrightarrow \bigoplus_{i=2}^{r} \mathscr{O}(a_i - a_1 - 1) \longrightarrow 0$$

como $E'$ es de grado máximo entonces $h^0(\mathbb{P}^1, E(-1-a_1)) = 0$, luego del hecho que $h^1(\mathscr{O}(-1)) = 0$ obtenemos que

$$\bigoplus_{i=2}^{r} h^0(\mathbb{P}^1, \mathscr{O}(a_i - a_1 - 1)) = 0$$

por lo que para cada $i$, $h^0(\mathbb{P}^1, \mathscr{O}(a_i - a_1 - 1)) = 0$, esto implica que $a_i - a_1 - 2 < a_i - a_1 - 1 < 0$, así que $h^0(\mathbb{P}^1, \mathscr{O}(a_i - a_1 - 2)) = 0$ y en consecuencia $H^1(\mathbb{P}^1, \mathscr{O}(a_1 - a_i)) = 0$ para toda $i = 1, \ldots, r$.

Por lo tanto $Ext^1(E'', E') = 0$, así que la sucesión exacta escinde, es decir

$$E = \mathscr{O}(a_1) \oplus \cdots \oplus \mathscr{O}(a_r)$$

como se quería. □

**1.26 Observación.**

- Sea $E = \bigoplus_{i=1}^{r} \mathscr{O}(a_i)$ un haz vectorial sobre $\mathbb{P}^1$ de rango $r$ y grado $d$. Supongamos sin pérdida de generalidad que $a_1 \geq \cdots \geq a_r$.

  Si existe $i \in \{1, ..., r\}$ tal que $a_i > a_{i+1}$ entonces $E$ es $\mu$-inestable.

  En efecto, como $a_i > a_{i+1}$ entonces $a_1 > a_r$. Para el subhaz $\mathscr{O}(a_1) \subset E$ tenemos que

$$\mu(\mathscr{O}(a_1)) = a_1 = \frac{ra_1}{r} > \frac{a_1 + \cdots + a_r}{r} = \frac{d}{r} = \mu(E)$$

por lo tanto $E$ es $\mu$-inestable. Esto significa que para que $E$ sea $\mu$-semiestable debe ser de la forma

$$E = \bigoplus_{i=1}^{r} \mathscr{O}(a)$$

con $ra = d$.

- Si $r > 1$ entonces no existen haces vectoriales $\mu$-estables.

  En efecto, si $E = \bigoplus_{i=1}^{r} \mathscr{O}(a)$ es un haz $\mu$-semiestable entonces para el subhaz $F = \bigoplus_{i=1}^{s} \mathscr{O}(a) \subset E$, con $s < r$, tenemos que

  $$\mu(F) = \frac{sa}{s} = a = \frac{ra}{r} = \mu(E).$$

  Por lo tanto $E$ no es $\mu$-estable.

De esto tenemos que el espacio moduli de haces vectoriales $\mu$-semiestables de rango $r$ y grado $d$ sobre $\mathbb{P}^1$ es no vacío si $r \mid d$ y es vacío si $r \nmid d$.

### 1.5.5. Haces vectoriales sobre una curva elíptica

Ahora estudiaremos el caso en que la curva $\mathscr{C}$ es de género 1, en este caso a la curva se le llamará curva elíptica. Los detalles de este análisis se pueden consultar en [2]. Sólo estudiaremos los haces vectoriales que sean indescomponibles ya que los descomponibles son inestables.

Empezaremos la sección dando algunos resultados importantes acerca de la clasificación de haces vectoriales sobre una curva elíptica, algunas demostraciones no las escribiremos pero se pueden consultar en [2] y [19].

**1.27 Proposición.** *Para cada entero r positivo, existe un haz vectorial sobre $\mathscr{C}$ indescomponible $E_{r,0}$ , único salvo isomorfismo, de rango r y grado* 0 *con secciones. Más aún*

1. *$E_{r,0}$ tiene solo una sección,*
2. *$E_{r,0} \cong E_{r,0}^{-1}$, donde $E_{r,0}^{-1}$ es el dual de $E_{r,0}$,*
3. *existe una sucesión exacta*

   $$0 \longrightarrow \mathscr{O} \longrightarrow E_{r,0} \longrightarrow E_{r-1,0} \longrightarrow 0,$$

4. *si L es un haz lineal y $L \longrightarrow E_{r,0}$ es un morfismo no cero, entonces o bien $deg(L) < 0$ o bien $deg(L) = 0$ y $L \cong \mathscr{O}$.*

**1.28 Proposición.** *Sea E un haz vectorial indescomponible de rango r y grado cero. Entonces E es isomorfo a $E_{r,0} \otimes L$, para un haz lineal L único salvo isomorfismo, de grado cero.*

Estas dos proposiciones estableces que cualquier haz vectorial indescomponible de rango $r$ y grado cero está completamente determinado por los haces $E_{r,0}$ y haces lineales. Para grado no cero tenemos los siguientes resultados.

Denotemos por $M_{\mathscr{C}}(r,d)$ el conjunto de clases de isomorfismos de haces vectoriales sobre $\mathscr{C}$, indescomponibles de grado $d$ y rango $r$.

**1.29 Proposición.** *Sea $L$ un haz lineal fijo de grado $1$, entonces el morfismo $E \mapsto E \otimes L^k$ da un isomorfismo*

$$M_{\mathscr{C}}(r,d) \longrightarrow M_{\mathscr{C}}(r,d+kr)$$

*Además si $d > 0$, entonces existe un isomorfismo*

$$\begin{aligned} M_{\mathscr{C}}(r,d) &\longrightarrow M_{\mathscr{C}}(r+d,d) \\ E'' &\mapsto E \end{aligned}$$

*donde $E$ está únicamente determinado, salvo isomorfismo, por la extensión*

$$0 \longrightarrow \mathscr{O}^d \longrightarrow E \longrightarrow E'' \longrightarrow 0.$$

El siguiente teorema uno de los más importantes de esta sección ya que da una estructura a $M_{\mathscr{C}}(r,d)$.

**1.30 Teorema.** *Sean $r,d$ enteros, $r > 0$ y $h = (r,d)$, entonces $M_{\mathscr{C}}(r,d) \cong M_{\mathscr{C}}(h,0)$. En el caso particular donde $r$ y $d$ son coprimos $M_{\mathscr{C}}(r,d)$ es isomorfo al jacobiano de $\mathscr{C}$.*

Este teorema da la clasificaciones de haces vectoriales sobre una curva elíptica, más aún establece que el espacio moduli es no vacío si y solo si $r$ y $d$ son coprimos.

# Capítulo 2

# Teoría de Invariantes Geométricos

En este capítulo explicaremos de manera breve y sin mucho detalle en que consiste la teoría de invariantes geométricos (GIT por sus siglas en inglés) y como utilizar esta teoría para atacar un problema moduli. Esta teoría fue desarrollada por David Muimford en la década de los sesentas del siglo pasado y fue gracias a esta teoría que le otorgan la medalla fields en el año de 1974.

Los detalles de esta teoría así como las demostraciones de algunos teoremas se pueden encontrar principalmente en [13], [12] y [3].

Comenzaremos explicando que entendemos por cocientes y algunos tipos de cocientes, luego mencionaremos cual es la relación entre los cocientes y los problemas moduli. Enseguida mencionaremos resultados importantes de los cocientes en los casos afín y proyectivo. Explicaremos un criterio para poder construir "cocientes buenos" y finalmente aplicaremos los resultados al ejemplo de haces vectoriales.

La teoría de invariantes geométricos se puede estudiar en la categoría de esquemas, sin embargo por simplicidad la estudiaremos a nivel de variedades definido sobre $\mathbb{C}$. Los resultados que daremos también son ciertos para campos algebraicamente cerrados de cualquier característica.

## 2.1. Cocientes

El problema que se plantea en la teoría de invariantes geométricos se puede expresar, en términos generales como sigue: considere

- $X$ una variedad,
- $X \times G \longrightarrow X$ una acción de un grupo $G$ en $X$.

Al conjunto de órbitas bajo esta acción lo denotaremos por $X/G$ y este conjunto es un cociente. El problema de esta teoría es estudiar propiedades de $X/G$. Enseguida explicaremos este cociente, pero antes daremos algunas definiciones.

**2.1 Definición.**

1. Un **grupo algebraico** es un grupo $G$ junto con una estructura de variedad algebraica en $G$ tal que las aplicaciones

$$\begin{array}{lcl} G \times G \to G & \qquad\qquad & G \to G \\ (g,g') \to gg' & & g \to g^{-1} \end{array}$$

son morfismos de variedades. Un **morfismo de grupos algebraicos** es un morfismo que es homomorfismo de grupos y morfismo de variedades algebraicas.

2. Una **acción de un grupo algebraico** $G$ en una variedad $X$ es un morfismo

$$\sigma : G \times X \to X$$

tal que, para cualesquiera $g, g' \in G$, $x \in X$

$$\sigma(g,(\sigma(g',x))) = \sigma(gg',x) \quad \text{y} \quad \sigma(e,x) = x$$

donde $e \in G$ es el elemento identidad del grupo, (por convención pondremos $gx$ en vez de poner $\sigma(g,x)$).

3. Para un punto $x \in X$, el **estabilizador** $G_x$ de $x$ es el subgrupo cerrado

$$G_x = \{g \in G \mid gx = x\}$$

de $G$, y la **órbita** $O(x)$ de $x$ el subconjunto

$$O(x) = \{gx \mid g \in G\} \subset X$$

Si todas las órbitas son subconjuntos cerrados de $X$, decimos que la acción de $G$ es cerrada.

4. Un subconjunto $W \subset X$ se dice **invariante** bajo $G$ si $gW = W$ para toda $g \in G$.
Dada una acción de $G$ en dos variedades $X$, $Y$, decimos que un morfismo $\phi : X \to Y$ es un G-morfismo si

$$\phi(gx) = g\phi(x)$$

para todo $g \in G$, $x \in X$.

Para entender un poco más las definiciones consideremos el siguiente ejemplo.

**2.2 Ejemplo.** Sea $X = \mathbb{C}^2$ y $G = \mathbb{C}^*$, es evidente que $X$ es una variedad y $G$ un grupo algebraico. Sea la acción de $G$ en $X$ dada por el morfismo

$$\begin{aligned} G \times X &\longrightarrow X \\ (t,(x,y)) &\mapsto (tx, t^{-1}y) \end{aligned}$$

En este ejemplo las órbitas están descritas por

1. $O(0,0) = (0,0)$

2. $O(a,0) = \{(ta,0)|t \in G\}$, para $a \neq 0$

3. $O(0,a) = \{(0,t^{-1}a)|t \in G\}$, para $a \neq 0$

4. $O(a,b) = \{(ta,t^{-1}b)|t \in G\}$, para $a,b \neq 0$.

El cociente $X/G = \mathbb{C}^2/\mathbb{C}^*$ es simplemente el conjunto de órbitas descritas antes. Notemos que $O(a,0)$ y $O(0,a)$ no son órbitas cerradas pues la órbita $O(0,0)$ está en la cerradura de ambos.

En la práctica las órbitas que están en la cerradura de otras órbitas de mayor dimensión, como en este caso $O(0,0)$, son las órbitas que nos darán problemas para construir un cociente "adecuado".

El problema realmente es ver si tal cociente tiene alguna estructura algebraica ya sea de variedad o de esquema. Para estudiar la estructura algebraica consideremos la siguiente observación.

**2.3 Observación.** Si existe un morfismo de grupos algebraicos $G \xrightarrow{\varphi} GL(n)$ entonces tenemos una acción de $G$ en $\mathbb{C}^n$. En este caso diremos que la acción de $G$ en $\mathbb{C}^n$ es **lineal** y el morfismo $\varphi$ es una **representación racional**.

Veamos también que si $G$ es un grupo algebraico actuando en una variedad $X$, esta acción induce una acción en el álgebra de funciones $A(X)$ de la siguiente manera

$$A(X) \times G \longrightarrow A(X)$$
$$(f,g) \mapsto f^g$$

donde $f^g(x) := f(gx)$. Diremos que $f \in A(X)$ es **invariante por la acción** o **G-invariante** si $f^g = f$ para toda $g \in G$ y denotaremos

$$A(X)^G := \{f \in A(X)|f \text{ es G-invariante }\}.$$

Es importante que la acción de $G$ en el álgebra de funciones $A(X)$ tenga propiedades que nos ayuden a trabajar con los cocientes, por eso daremos la siguiente definición.

**2.4 Definición.** Sea $G$ un grupo algebraico y $R$ una $\mathbb{C}$-álgebra. Una **acción racional** de $G$ en $R$ es una acción

$$R \times G \longrightarrow R$$
$$(f,g) \mapsto f^g$$

con las siguientes propiedades

1. $f^{gg'} = (f^g)^{g'}$ y $f^e = f$ para toda $f \in R$, $g,g' \in G$,

2. para toda $g \in G$ la aplicación $f \mapsto f^g$ es un automorfismo de $\mathbb{C}$-álgebras de $R$,

3. cada elemento de $R$ está contenida en un subespacio de dimensión finita el cual es invariante bajo $G$, y en el cual $G$ actúa por una representación racional.

Esta definición es importante ya que en varios resultados es necesario que la acción actúe racionalmente.

Ahora veremos tres tipos de cocientes que son importantes por las propiedades categóricas y geométricas que tienen. En todas las definiciones consideremos $G$ un grupo algebraico actuando racionalmente en una variedad $X$.

**2.5 Definición.** Un **cociente categórico** de $X$ por $G$ es una pareja $(Y,\phi)$, donde $Y$ es una variedad y $\phi : X \to Y$ es un morfismo tal que

1. $\phi$ es constante en órbitas de la acción,
2. para cualquier variedad $Z$ y morfismo $\psi : X \to Z$ el cual sea constante en órbitas, existe un único morfismo $\chi : Y \to Z$ tal que $\chi \circ \phi = \psi$.

Además si $\phi^{-1}(y)$ consiste de una única órbita para cualquier $y \in Y$, diremos que $(Y,\phi)$ es **espacio de órbitas**.

Este cociente tiene buenas propiedades categóricas, sin embargo no necesariamente tiene buenas propiedades geométricas. Definiremos un cociente que además de tener buenas propiedades categóricas también tiene buenas propiedades geométricas.

**2.6 Definición.** Un **cociente bueno** de $X$ por $G$ es una pareja $(Y,\phi)$, donde $Y$ es una variedad y $\phi : X \to Y$ es un morfismo tal que

(i) $\phi$ es constante en órbitas,

(ii) $\phi$ es sobreyectiva,

(iii) Si $U$ es un abierto de $Y$, entonces

$$\begin{aligned} \phi^* : A(U) &\longrightarrow A(\phi^{-1}(U))^G \\ f &\mapsto f \circ \phi \end{aligned}$$

es un isomorfismo de $\mathbb{C}$-álgebras,

(iv) si $W \subset X$ es un cerrado invariante, entonces $\phi(W)$ es cerrado,

(v) si $W_1$, $W_2$ son subconjuntos de $X$ cerrados disjuntos invariantes, entonces

$$\phi(W_1) \cap \phi(W_2) = \emptyset$$

**2.7 Ejemplo.** Consideremos el grupo $G = \mathbb{C}$, con la suma, actuando en $\mathbb{C}^2$ de la siguiente forma

$$\begin{aligned} \mathbb{C}^2 \times G &\longrightarrow \mathbb{C}^2 \\ ((x,y),g) &\mapsto (x, y+gx) \end{aligned}$$

El cociente categórico de $\mathbb{C}^2$ por $G$ es de hecho $(\mathbb{C}, \phi)$ donde

$$\begin{aligned} \phi : \mathbb{C}^2 &\longrightarrow \mathbb{C} \\ (x,y) &\mapsto x \end{aligned}$$

Notemos que los puntos invariantes de la acción son los de la forma $(0,y)$ para $y \in \mathbb{C}$, esto implica que $(\mathbb{C}, \phi)$ no es cociente bueno ya que los puntos G-invariantes son cerrados disjuntos y sus imágenes son el mismo punto $(0,0)$, por lo tanto no se cumple la condición $(v)$.

**2.8 Ejemplo. Espacio proyectivo** Sea $X = \mathbb{C}^{n+1} - \{0\}$ y $G = \mathbb{C}^*$, el grupo de los números complejos con el producto. Consideremos la acción

$$\begin{aligned} X \times G &\longrightarrow X \\ (x,g) &\mapsto gx \end{aligned}$$

En este caso las órbitas son rectas que pasan por el origen, pero sin el origen, es decir, la orbita de $x \in X$ consiste de todos los múltiplos escalares, no cero, de $x$.

En este caso $\mathbb{P}^n$ es cociente bueno y también cociente categórico.

El siguiente cociente es el que va a ser el más importante y el que nos ayudará a construir espacios moduli.

**2.9 Definición.** Un **cociente geométrico** de $X$ por $G$ es una pareja $(Y, \phi)$ que es cociente bueno y también es espacio de órbitas.

Un hecho importante es que una $\mathbb{C}$-álgebra tiene la forma de un álgebra de funciones, $A(Z)$ para alguna variedad afín $Z$, si y sólo si ésta es finitamente generada y no tiene elementos nilpotentes [14]. Es de nuestro interés saber cuando $A(X)^G$ es isomorfo a $A(Z)$ para alguna variedad $Z$, ya que en el caso de tener el isomorfismo $A(X)^G \cong A(Z)$, $Z$ será el candidato a ser un cociente categórico.

Entonces la pregunta es ¿cuándo $A(X)^G$ es finitamente generado? Nagata prueba que no siempre $A(X)^G$ es finitamente generado y más aún, dice que bajo ciertas condiciones sobre el grupo, $A(X)^G$ es finitamente generado. En seguida mencionaremos las condiciones sobre el grupo y el teorema de Nagata.

**2.10 Definición.** Un grupo algebraico lineal $G$ es geométricamente reductivo (linealmente reductivo) si, para toda acción lineal de $G$ en $\mathbb{C}^n$ y cada punto invariante $v \in \mathbb{C}^n$, $v \neq 0$, existe un polinomio homogéneo invariante $f$ de grado positivo (grado 1) tal que $f(v) \neq 0$.

**2.11 Teorema. Nagata, [13]** *Sea G un grupo geométricamente reductivo actuando racionalmente en una $\mathbb{C}$-algebra finitamente generada R. Entonces $R^G$ es finitamente generado.*

A razón de este teorema, en los cocientes que tratemos a lo largo del trabajo pediremos que el grupo que esté actuando sea geométricamente reductivo.

Para el caso cuando $X$ es una variedad afín el siguiente teorema asegura la existencia de un cociente bueno.

**2.12 Teorema.** *Si G es un grupo geométricamente reductivo actuando en una variedad afín X. Entonces existe un cociente bueno $(Y, \phi)$ de X por G.*

La demostración se puede consultar en [13].

Si $X$ es una variedad proyectiva el teorema anterior es falso. La manera de tratar el caso cuando $X$ es una variedad proyectiva es cubriendo $X$ por abiertos afines, G-invariantes. Los candidatos obvios para ser estos abiertos son los de la forma $X_f = \{x \in X | f(x) \neq 0\}$ con $f \in A(X)^G$ homogéneo. Por el teorema anterior para cada abierto $X_f$ existe un cociente bueno, luego usando [Proposición 3.10, [13]] existe un cociente bueno para

$$\bigcup_{f \in A(X)^G} X_f.$$

Sin embargo puede pasar que estos abiertos no cubran a $X$ y esta es la motivación de la siguiente definición.

**2.13 Definición.** Sea $X$ una variedad proyectiva en $\mathbb{P}^n$, $G$ un grupo reductivo actuando linealmente en $X$. Sea $x \in X$, $x$ es

1. **semiestable** si $x \in X_f$ para alguna $f \in A(X)^G$ homogéneo. Es decir, si existe un polinomio homogéneo invariante $f$ de grado mayor o igual a 1, tal que $f(x) \neq 0$;

2. **estable** si es semiestable, $dim(O(x)) = dim(G)$ y la acción de $G$ en $X_f$ es cerrada;

3. **inestable** si no es semiestable.

En la definición de estable, la condición de que $G$ sea una acción cerrada y que $dim(O(x)) = dim(G)$ es para poder construir un cociente geométrico. Al conjunto de puntos semiestables lo denotaremos por $X^{SS}$, a los estables lo denotaremos por $X^S$. Es directo verificar que $X^{SS} \subset X$ es abierto, por ser unión de abiertos, más aún por [Lema 3.7, [13]] tenemos que $X^S \subset X$ es también abierto. En seguida enunciaremos el teorema importante de la teoría de invariantes geométricos.

**2.14 Teorema. Mumford** *Sea $X$ una variedad proyectiva en $\mathbb{P}^n$, entonces para cualquier acción lineal de un grupo reductivo $G$ en $X$,*

1. *existe un cociente bueno $(Y, \pi)$ de $X^{SS}$ por $G$, además $Y$ es variedad proyectiva;*

2. *existe un abierto $Y^S$ de $Y$ tal que $\pi^{-1}(Y^S) = X^S$ y $(Y^S, \pi)$ es cociente geométrico de $X^S$ por $G$.*

## 2.2. Cocientes y Espacios Moduli

La importancia de la teoría de invariante geométricos en este contexto recae en la relación que se tiene entre los cocientes y la construcción de espacios moduli, en esta sección mencionaremos algunos resultados que nos indican en que consiste esta relación. Para detalles y ejemplos concretos se puede consultar [13].

Dado un problema moduli $P = (A, \sim, F, \cong)$, diremos que una familia $F$, parametrizada por un esquema $X$, tiene la **propiedad** $B$ si para cualquier objeto $a \in A$, existe $x_a \in X$ tal que $F|_{x_a} \sim a$.

Básicamente la relación entre cocientes y espacios moduli se puede pensar de la siguiente manera: dado un problema moduli primero buscaremos una familia $F$, parametrizada por una variedad o esquema $X$, que tenga la propiedad $B$. Lo siguiente es tratar de encontrar un grupo $G$ que actué en $X$ de tal manera que para $s,t \in X$, $F|_s \sim F|_t$ si y sólo si existe $g \in G$ tal que $s = gt$, y finalmente considerar el cociente $X/G$. No es claro que siempre podamos encontrar tal grupo $G$, por eso daremos la siguiente definición.

**2.15 Definición.** Dado un problema moduli y una familia $F$, parametrizada por una variedad $X$, con la propiedad $B$. Si existe un grupo $G$ que actué en $X$ de tal manera que para $s,t \in X$, $F|_s \sim F|_t$ si y sólo si existe $g \in G$ tal que $s = gt$, entonces a la acción de $G$ en $X$ le llamaremos una **acción moduli**.

En este capítulo nos enfocaremos solo en problemas moduli en los que la relación de equivalencia $\sim$ esté dada por una acción moduli.

Recordemos que en la teoría de espacios moduli, cuando se tenía un espacio moduli fino también obteníamos una familia universal. En el primer capítulo vimos que no siempre se puede tener una familia universal. Sin embargo, podemos pedir una condición más débil, esta condición es básicamente pedir que la familia sea universal de manera local, enseguida daremos la definición concreta.

**2.16 Definición.** Para cualquier problema moduli, una familia $F$ parametrizada por una variedad $X$ se dice que tiene la **propiedad universal local** si para cualquier familia $F'$ parametrizada por $X'$ y cualquier punto $x \in X'$, existe una vecindad $U$ de $x$ tal que $F' |_U$ es equivalente a la familia inducida de $F$ por algún morfismo $U \to X$.

Decimos que una variedad $X$ tiene la propiedad universal local si existe una familia parametrizada por $X$ con esta propiedad.

El siguiente teorema es el resultado principal de esta sección y nos da la relación entre cocientes y espacios moduli. El teorema se utiliza cuando se trabaja un problema moduli con la teoría de invariantes geométricos.

**2.17 Teorema.** *Suponga que, para un problema moduli dado, existe una familia $F$ parametrizada por una variedad $X$ con la propiedad universal local y una acción moduli de un grupo $G$ en $X$; entonces*

1. *cualquier espacio moduli grueso es un cociente categórico de $X$ por $G$,*
2. *un cociente categórico de $X$ por $G$ es un espacio moduli grueso si y sólo si es un espacio de órbitas.*

## 2.3. Un criterio numérico

La Proposición (2.17) junto con el Teorema (2.14) dan solución a un problema moduli, una parte importante es saber como encontrar los puntos estables y semiestables. En esta sección daremos un criterio numérico, el criterio de Hilbert-Mumford, para encontrar puntos estables y semiestables y con esto teóricamente está resuelto un problema moduli por GIT.

**2.18 Definición.** Un subgrupo a un parámetro (S1P) de $G$ es un homomorfismo no trivial de grupos algebraicos $\lambda : \mathbb{C}^* \to G$.

**2.19 Observación.** Si $\lambda$ es un S1P de $G$ y $G$ actúa linealmente en una variedad proyectiva $X \subset \mathbb{P}^n$, entonces $\lambda$ induce una acción lineal de $\mathbb{C}^*$ en $\mathbb{C}^{n+1}$ y esta acción es diagonalizable, es decir existe $\{v_0, \ldots, v_n\}$ base de $\mathbb{C}^{n+1}$ tal que $\lambda(t)v_i = t^{r_i}v_i$, donde $r_i \in \mathbb{Z}$. La demostración de esta última afirmación puede consultarse en [16].

Con la base de la diagonalización $\{v_0, \ldots, v_n\}$, si $\widehat{x} \in \mathbb{C}^{n+1}$ es un punto sobre la linea $x \in X$ entonces $\widehat{x} = \sum_{i=0}^{n} a_i v_i$ para algunas constantes $a_0, ..., a_n$, así $\lambda(t)\widehat{x} = \sum_{i=0}^{n} t^{r_i} a_i v_i$. Tomando esto en cuenta tenemos la siguiente definición.

**2.20 Definición.** Sea $X \subset \mathbb{P}^n$ una variedad proyectiva y $G$ un grupo reductivo actuando en $X$. Sea $x \in X$ y $\lambda$ un S1P de G, definimos

$$\mu(x, \lambda) := min\{r_i | a_i \neq 0\}$$

Utilizando la definición anterior tenemos el criterio numérico de Hilbert-Mumford

**2.21 Teorema. Criterio de Hilbert-Mumford** *Sea G un grupo reductivo actuando linealmente en una variedad proyectiva X, entonces $x \in X$ es*

1. *semiestable $\iff$ para cada S1P de G, $\lambda$, se tiene $\mu(x, \lambda) \leq 0$;*

2. *estable $\iff$ para cada S1P de G, $\lambda$, se tiene $\mu(x, \lambda) < 0$;*

3. *inestable $\iff$ para algún S1P de G, $\lambda$, se tiene que $\mu(x, \lambda) > 0$.*

## 2.4. GIT en haces vectoriales

En esta sección construiremos el espacio moduli de haces vectoriales de grado $d$ y rango $r$ sobre una curva proyectiva $X$. Trabajaremos el caso particular donde $X$ es una curva proyectiva no-singular, irreducible de género $g$.

En el capítulo 1 ya trabajamos el caso $g = 0$ y $g = 1$, entonces solo falta ver los caso $g \geq 2$. También vimos que un problema para la existencia de espacio moduli fino es la existencia de automorfismos no triviales, entonces cambiaremos el problema moduli para que este fenómeno no se presente.

**Problema moduli.**

1. **Objetos:** Haces vectoriales sobre $X$ de grado $d$ y rango $r$.

2. **Relación de equivalencia:** Isomorfismo de haces vectoriales.

3. **Familia:** Una familia de haces vectoriales parametrizada por $S$ es un haz vectorial $E$ sobre $X \times S$ tal que para toda $s \in S$ el haz vectorial $E_s := E|_{X \times \{s\}}$ es de rango $r$ y grado $d$.

4. **Relación de equivalencia en familias:** Dos familias $F$ y $G$ parametrizadas por $S$ son equivalentes si existe un haz lineal $L$ sobre $S$ tal que $F \otimes p_2^* L \cong G$, donde $p_2 : X \times S \longrightarrow S$ es la función proyección. En este caso diremos que $F$ y $G$ son isomorfos salvo un haz lineal.

Recordemos que existe una equivalencia entre haces vectoriales y gavillas localmente libres. La manera de construir el espacio moduli de haces vectoriales es, en términos generales, considerando el espacio moduli de cocientes coherentes (*Quot*-scheme). Luego ver el subconjunto del *Quot*-scheme que consiste de las gavillas coherentes localmente libres, este último subconjunto será el candidato a ser espacio moduli de haces vectoriales.

Empezaremos encontrando una familia de haces vectoriales con la propiedad universal local, para esto utilizaremos la definición de $\mu$*-estabilidad* que se enunció en el capítulo 1.

Si consideramos haces vectoriales de rango $r \geq 2$ entonces el conjunto de clases de equivalencia de haces vectoriales de rango $r$ y grado $d$ no es acotado . Sin embargo el conjunto de haces vectoriales $\mu$-semiestables de rango $r$ y grado $d$ es acotado (ver [11]).

El siguiente lema es importante pues los haces vectoriales que cumplen las hipótesis son los que nos ayudarán a construir el espacio moduli.

**2.22 Lema.** *Sea $F$ un haz vectorial $\mu$-semiestable sobre $X$ de rango $r$ y grado $d$, suponga que $d > r(2g-2)$. Entonces*

1. $H^1(X,F) = 0$*;*

2. *$F$ es generado por sus secciones.*

*Demostración.* Prueba de 1). Recordemos primero que, como $F$ es $\mu$-semiestable entonces $F^{-1}$ también lo es. Luego, como el haz canónico $\omega_X$ es lineal entonces $\omega_X \otimes F^{-1}$ es $\mu$-semiestable.

De la dualidad de Serre tenemos el isomorfismo $H^1(X,F) \cong H^0(X, \omega_X \otimes F^{-1})$ y además

$$\mu(\omega_X \otimes F^{-1}) = (2g-2)r - d$$

el cual es menor que cero por hipótesis.

Entonces $\omega_X \otimes F^{-1}$ es $\mu$-semiestable de grado negativo, por lo tanto

$$H^1(X,F) \cong H^0(X, \omega_X \otimes F^{-1}) = 0.$$

Ahora probaremos 2). Necesitamos demostrar que el morfismo canónico

$$H^0(X,F) \otimes \mathscr{O}_X \xrightarrow{\varphi} F$$

es sobreyectivo.

Sea $p \in X$ un punto. Consideremos la sucesión exacta de gavillas sobre $X$

$$0 \longrightarrow \mathscr{O}(-p) \longrightarrow \mathscr{O} \longrightarrow \mathscr{O}_p \longrightarrow 0$$

donde $\mathscr{O}(-p)$ es la gavilla de funciones holomorfas que se anulan en $p$ y $\mathscr{O}_p$ es la gavilla skyscraper con soporte en $p$. Multiplicando por $F$ obtenemos la sucesión exacta

$$0 \longrightarrow F(-p) \longrightarrow F \longrightarrow F_p \longrightarrow 0$$

y de esta sucesión exacta corta tenemos la sucesión exacta larga en grupos de cohomología

$$0 \longrightarrow H^0(X,F(-p)) \longrightarrow H^0(X,F) \longrightarrow H^0(X,F_p) \longrightarrow H^1(X,F(-p)) \longrightarrow \cdots$$

Para probar que $\varphi$ es sobreyectivo basta probar que el morfismo $H^0(X,F) \longrightarrow H^0(X,F_p) = F_p$ es sobreyectivo.

Para probar que éste último morfismo es sobreyectivo probaremos que $H^1(X,F(-p)) = 0$.

Notemos que

- como $\mathscr{O}(-p)$ es lineal y $F$ es $\mu$-semiestable, entonces $F(-p)$ es $\mu$-semiestable, y por lo tanto $F(-p)^{-1}$ también lo es,
- de la dualidad de Serre tenemos que $H^1(X,F(-p)) \cong H^0(X,\omega_X \otimes F(-p)^{-1})$,
- el haz vectorial $\omega_X \otimes F(-p)^{-1}$ es $\mu$-semiestable de grado

$$deg(\omega_X \otimes F(-p)^{-1}) = -d + r(2g-2) < 0$$

por lo tanto $\omega_X \otimes F(-p)^{-1}$ es un haz vectorial $\mu$-semiestable de grado negativo. Lo que implica que

$$H^1(X,F(-p)) \cong H^0(X,\omega_X \otimes F(-p)^{-1}) = 0$$

□

Note que si $F$ satisface los dos puntos del lema anterior entonces $h^0(X,F) = d + r(1-g)$.

Construiremos el espacio moduli de haces vectoriales de grado $d$ y rango $r$, suponiendo que $d > r(2g-1)$, luego diremos como construirlo en el caso general.

En (1.16) se demostró que para cualquier gavilla coherente $E$ sobre $X$, existe el espacio moduli de cocientes coherentes con polinomio de Hilbert $P$. Tomemos el caso particular $E = H \otimes \mathscr{O}_X$, donde $H$ es un espacio vectorial de dimensión $P = d + r(1-g)$. Sea $(Q,U)$ el espacio moduli fino del problema moduli correspondiente a $Quot_{E/P}$.

Sea $R \subset Q$ el subconjunto de puntos $q \in Q$ tales que

1. $U_q$ es localmente libre;
2. la aplicación canónica $H^0(X,H \otimes \mathscr{O}_X) \longrightarrow H^0(X,U_q)$ es un isomorfismo.

Veamos que el grupo $GL(P)$ actúa en $R$. Un elemento $A \in GL(P)$ determina un automorfismo $\phi_A$ de $H \otimes \mathscr{O}_X$. Sea $q \in R$ y $U_q$ la gavilla coherente que parametriza $q$. Tenemos entonces el siguiente morfismo sobreyectivo

$$H \otimes \mathscr{O}_X \xrightarrow{f} U_q \longrightarrow 0,$$

al considerar el automorfismo $\phi_A$ tenemos el morfismo

$$H \otimes \mathscr{O}_X \xrightarrow{f \circ \phi_A} U_q \longrightarrow 0,$$

y este cociente está representado por otro punto en $R$, digamos $q' \in R$. Con esto tenemos la acción

$$\begin{gathered} GL(p) \times R \longrightarrow R \\ (A, q) \mapsto q' \end{gathered}$$

De hecho $GL(p)$ actúa también en la gavilla $U$, mandando $U_q$ a $U_{q'}$. Notemos que si $A$ es un múltiplo escalar de la identidad, con el escalar distinto de cero, los cocientes

$$E \xrightarrow{f} U_q \longrightarrow 0 \qquad \text{y} \qquad E \xrightarrow{f \circ \phi_A} U_q \longrightarrow 0$$

son iguales, así que $q = q'$. Por lo tanto la acción de $GL(p)$ en $R$ desciende a la acción $PGL(p)$ en $R$. Sin embargo esto no sucede en $U$ pues aunque $U_q = U_{q'}$ cuando $A = \lambda Id_p$, con $\lambda \neq 0$, la acción no actúa trivialmente a menos que $\lambda = 1$.

**2.23 Teorema.**

1. *$R$ es un subconjunto abierto, $PGL(p)$-invariante, de $Q$; y $U|_{R\times X}$ es localmente libre, por lo que corresponde a un haz vectorial $F$ sobre $R \times X$.*

2. *Si pensamos a $F$ como una familia de haces vectoriales sobre $X$ parametrizada por $R$, entonces esta familia tiene la propiedad universal local para familias de haces vectoriales de rango $r$ y grado $d$ los cuales satisfacen el lema* (2.22).

3. *La acción de $PGL(p)$ en $R$ es una acción moduli.*

Notemos que en la familia $F$ no tenemos la restricción de que los haces vectoriales $F_q$ sean $\mu$-semiestables, de hecho se puede probar que $F_q$ es $\mu$-(semi)estable si y sólo si $q \in R$ es (semi)estable bajo la acción de $PGL(p)$ (ver [13] y [11]).

Denotemos por $R^{SS}$ y $R^S$ a los subconjuntos de $R$ que constan de los puntos estables y semiestables respectivamente bajo la acción de $PGL(p)$.

Por la proposición (2.17) tenemos que existe un espacio moduli grueso $M'(r,d)$ para los haces vectoriales estables.

**2.24 Teorema.** *Existe un espacio moduli grueso $M'(r,d)$ para haces vectoriales estables de rango $r$ y grado $d$ sobre cualquier curva proyectiva irreducible no-singular $X$. Mas aún $M'(r,d)$ tiene una compactificación natural a una variedad proyectiva $M(r,d)$.*

*Demostración.* Denotemos por $\mathscr{H}_{r,d} : Sch \longrightarrow Set$ el funtor moduli asociado al problema moduli de haces vectoriales de rango $r$ y grado $d$. Si $d > r(2g-1)$ el espacio moduli grueso existe por el análisis previo. Sea $d$ arbitrario, tomemos $m$ suficientemente grande tal que $d + rm > r(2g-1)$ entonces existe espacio moduli grueso para el funtor moduli $\mathscr{H}_{r,d+rm} : Sch \longrightarrow Set$, además la aplicación $E \longrightarrow E(m)$ define un isomorfismo entre los funtores $\mathscr{H}_{r,d}$ y $\mathscr{H}_{r,d+rm}$, por lo que también existe un espacio moduli para el funtor $\mathscr{H}_{r,d}$. Más aún estos dos espacios moduli son naturalmente isomorfos por lo que la compactificación natural de $M'(r,d+rm)$ determina una de $M'(r,d)$. $\square$

**2.25 Observación.** De las observaciones (1.26) tenemos que si $r$ y $d$ son coprimos entonces todos los haces vectoriales semiestables son estables, así que en este caso $M'(r,d) = M(r,d)$ es una variedad proyectiva no-singular.

Aunque ya sabemos como construir el espacio moduli grueso de haces vectoriales, lo que se espera es poder encontrar un espacio moduli fino. El problema que nos impedía encontrar un espacio moduli fino es la existencia de automorfismos no triviales en los objetos. En el caso particular de tener dos familias de haces vectoriales $E$ y $F$ parametrizados por $S$ tales que para cada $s \in S$ los haces vectoriales $E_s$ y $F_s$ son estables y además $E_s \cong F_s$, se tiene que $E \sim F$, (ver [13]).

Se sigue del teorema (1.11) el siguiente corolario.

**2.26 Corolario.** *Si existe un haz vectorial $V$ sobre $M'(r,d) \times X$ tal que para toda $s \in M'(r,d)$, $V_s$ es estable y es isomorfo a $U_s$, entonces $M'(r,d)$ es espacio moduli fino para los haces vectoriales estables de rango $r$ y grado $d$ sobre $X$.*

Es natural tratar de construir a $V$ como un cociente de $U|_{R^S}$ (la gavilla $U$ es la que se describe en el Teorema (2.23)), sin embargo el principal problema es que la acción de $GL(p)$ en $U$ no desciende a la acción de $PGL(p)$.

Si $(r,d) = 1$, existe una familia $U' \sim U$ tal que la acción de $PGL(p)$ sobre $R^S \times X$ se levanta a una acción en $U'$, esto se puede ver en [13], de esto tenemos el siguiente resultado.

**2.27 Teorema.** *Si $(r,d) = 1$ entonces $M'(r,d)$ es espacio moduli fino para haces vectoriales sobre $X$ de rango $r$ y grado $d$. Además si $(r,d) \neq 1$ entonces no existe espacio moduli fino para tales haces.*

Capítulo 3

# Teoría de Stacks

En el capítulo 1 se vio que no siempre existen los espacios moduli finos. Una de las razones es porque existen objetos con automorfismos no triviales. Con estos objetos se pueden construir familias no equivalentes que correspondan al mismo morfismo, por lo cual no puede haber una biyección como se pide en la definición de espacio moduli fino (ver (1.7)).

Usando teoría de stack se puede encontrar el análogo a un espacio moduli fino al que llamaremos **moduli stack**.

Sea $P = (A, \sim, F, \cong)$ un problema moduli. La idea principal en la teoría de stacks es que ahora buscaremos un "espacio algebraico" $M$ tal que a cada punto $m \in M$ no le corresponda la clase $[a] \in A$, sino que le corresponda el conjunto $C_m := \{b \in A | a \sim b\}$.

Así en vez de estudiar la aplicación

$$m \mapsto [a]$$

ahora estudiaremos la aplicación

$$m \mapsto C_m.$$

Para entender mejor la idea detrás de la teoría de stacks empezaremos definiendo de manera abstracta lo que es un stack y daremos ejemplos, luego definiremos un stack algebraico el cual nos interesará pues tendrá propiedades geométricas. Finalmente ejemplificaremos los conceptos en el problema moduli de haces vectoriales.

## 3.1. Preliminares

En esta sección enunciaremos los conceptos necesarios para estudiar la teoría de stacks. En términos generales un stack puede pensarse como una gavilla, pero en un contexto más general. Lo primero que definiremos es una topología sobre una categoría (ver [15]).

**3.1 Definición.** Sea $\mathscr{C}$ una categoría tal que todos los productos fibrados existen. Una **topología de Grothendieck** sobre $\mathscr{C}$ está dada por una correspondencia $\tau$ la cual asigna a cada objeto $U$ de $\mathscr{C}$ una colección $\tau(U)$ que consiste de conjuntos de morfismos $\{U_i \xrightarrow{f_i} U\}_{i \in I}$ tales que

1. Si $U' \longrightarrow U$ es un isomorfismo, entonces $\{U' \longrightarrow U\}$ está en $\tau(U)$.

2. Si el conjunto $\{U_i \xrightarrow{f_i} U\}_{i\in I}$ está en $\tau(U)$, y si para cada $i \in I$ se tiene un conjunto $\{U_{ij} \xrightarrow{f_{ij}} U_i\}_{j\in J}$ en $\tau(U_i)$, entonces el conjunto $\{U_{ij} \xrightarrow{f_i\circ f_{ij}} U\}_{i\in I, j\in J}$ está en $\tau(U)$.

3. Si el conjunto $\{U_i \xrightarrow{f_i} U\}_{i\in I}$ está en $\tau(U)$, y si $V \longrightarrow U$ es un morfismo, entonces el conjunto $\{V \times_U U_i \longrightarrow V\}_{i\in I}$ está en $\tau(V)$.

A los conjuntos $\tau(U)$ les llamaremos cubiertas de $U$ en la $\tau$-topología. Un **sitio** es una pareja $(\mathscr{C}, \tau)$ donde $\mathscr{C}$ es una categoría y $\tau$ es una topología de Grothendieck sobre $\mathscr{C}$. A un sitio lo denotaremos por $\mathscr{C}_\tau$.

Aunque la definición es para cualquier categoría con productos fibrados, estudiaremos principalmente en la categoría de $S$-esquemas.

En la categoría de esquemas los morfismos $\{U_i \xrightarrow{f_i} U\}$ pueden tener varias propiedades, como ser étale, suave, fppf, un encaje cerrado, etc. Cada una de estas propiedades nos definen topologías diferentes.

En este trabajo nos enfocaremos principalmente en las topologías étale y fppf (totalmente fiel, plano y localmente de presentación finita), es decir donde los morfismos $f_i$ son étale y fppf respectivamente.

**3.2 Definición.** Consideremos el sitio $(Sch/S)_\tau$, para alguna topología de Grothendieck. Un **S-espacio** *con respecto a la topología de Grothendieck* $\tau$ es una gavilla de conjuntos sobre $(Sch/S)_\tau$ (ver [15]).

**3.3 Definición.** Un **espacio algebraico** es un $S$-espacio $\mathfrak{S}$ sobre el sitio $(Sch/S)_{et}$ tal que

1. Para todo $U \in (Sch/S)$ existe $Y_U \in (Sch/S)$ tal que $h_U \times_{\mathfrak{S}\times\mathfrak{S}} \mathfrak{S} \cong h_{Y_U}$

$$\begin{tikzcd} h_U \times_{\mathfrak{S}\times\mathfrak{S}} \mathfrak{S} \arrow[r] \arrow[d] & \mathfrak{S} \arrow[d, "d"] \\ h_U \arrow[r] & \mathfrak{S}\times\mathfrak{S} \end{tikzcd}$$

donde $d : \mathfrak{S} \longrightarrow \mathfrak{S}\times\mathfrak{S}$ es el morfismo diagonal (morfismo de gavillas).

2. Existe un esquema $X$, llamado atlas, y un morfismo sobreyectivo y étale

$$a : h_X \longrightarrow \mathfrak{S}$$

Ver [15].

## 3.2. Stacks

En el conjunto $C_m = \{b \in A | b \sim a\}$, tenemos que todos los elementos son equivalentes. Esta idea se generaliza a un concepto al que llamaremos *grupoide*.

**3.4 Definición.** Un **grupoide** es una categoría donde todos los morfismos son isomorfismos.

**3.5 Ejemplo.** Sea $\Delta$ un conjunto. A $\Delta$ siempre se le puede dar una estructura de grupoide agregándole los isomorfismos $Id_\delta$ para cada $\delta \in \Delta$.

**3.6 Ejemplo.** El conjunto $C_m$ se puede ver como un grupoide donde los objetos son los $c_i \in C$ y los morfismos están dados por la relación de equivalencia. Notemos que los morfismos son isomorfismos pues si $c_1 \sim c_2$ entonces $c_2 \sim c_1$.

**3.7 Ejemplo. Grupoide de familias**. Sea $P = (A, \sim, F, \cong)$ es un problema moduli. Dado un esquema $S$, consideremos la categoría $\mathfrak{F}(S)$ que consiste de

1. Objetos: Familias $F$ parametrizadas por $S$.

2. Morfismos: Existe un morfismo entre dos familias $F$ y $G$ parametrizadas por $S$ si y sólo si $F \cong G$.

La categoría $\mathfrak{F}(S)$ es un grupoide. En este caso diremos que $\mathfrak{F}(S)$ es el grupoide de familias.

**3.8 Ejemplo. Cociente**. Si un grupo $G$ actúa en un conjunto $X$, entonces $X$ es un grupoide. Los objetos del grupoide son los elementos $x \in X$ y los morfismos están dadas por la acción de $G$. Es directo verificar que los morfismos son isomorfismos pues cada $g \in G$ tiene inversa.

**3.9 Ejemplo.** Sea $C$ una categoría, formemos la categoría $\widetilde{C}$ como $Obj(\widetilde{C}) = Obj(C)$ y $Mor(\widetilde{C}) = Iso(C)$. Es decir, considerar las mismos objetos de la categoría $C$ pero los morfismos serán solamente los isomorfismos en $C$. Se puede verificar que $\widetilde{C}$ en efecto es un grupoide. Un caso particular de este ejemplo es cuando consideramos a $C$ como la categoría de haces vectoriales de rango $r$ y grado $d$, sobre una curva $X$.

Los morfismos entre grupoides son simplemente funtores. Si consideramos al conjunto de grupoides junto con los morfismos de grupoides, este conjunto forma una 2-categoría. Denotaremos por $\mathfrak{G}pds$ a ésta 2-categoría.

Dado un problema moduli $P = (A, \sim, F, \cong)$ consideremos la aplicación

$$\mathfrak{F} : Sch^{op} \longrightarrow \mathfrak{G}pds$$

de la categoría de esquemas a la 2-categoría de grupoides, donde para cada esquema $B$, $\mathfrak{F}(B)$ es el grupoide de familias, (está aplicación es el análogo al funtor moduli). La aplicación $\mathfrak{F}$ es de hecho un pseudo-funtor. Para ver la definiciones formales de pseudo-funtores y 2-categorías se puede consultar [15].

A continuación daremos la definición de prestack, la cual será importante pues el pseudofuntor $\mathfrak{F} : Sch^{op} \longrightarrow \mathfrak{G}pds$, que está dado por un problema moduli, es un prestack.

**3.10 Definición.** Un **prestack**

$$\mathfrak{X} : Sch^{op} \longrightarrow \mathfrak{G}pds$$

consiste de lo siguiente

- para cada esquema $S$, un grupoide $\mathfrak{X}(S)$

- para cada morfismo $f : T \longrightarrow S$, un funtor $f^* : \mathfrak{X}(S) \longrightarrow \mathfrak{X}(T)$ y

- para cada par de morfismos $g : R \longrightarrow T$ y $f : T \longrightarrow S$, una transformación natural invertible $c_{f,g} : g^* f^* \longrightarrow (f \circ g)^*$, tal que cada isomorfismo $c_{f,g}$ satisface las siguientes dos condiciones de compatibilidad

  1. $c_{f,Id_T} = Id_{f^*}$ y $c_{Id_S,f} = Id_{f^*}$ para todo morfismo $f : T \longrightarrow S$.
  2. Para cualquier triada de morfismos componibles $f, g$ y $h$ el diagrama de isomorfismos de funtores

$$\begin{array}{ccc} h^*g^*f^* & \xrightarrow{c_{g,h}f^*} & (g\circ h)^*f^* \\ {\scriptstyle h^*c_{f,g}}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle c_{f,g\circ h}} \\ h^*(f\circ g)^* & \xrightarrow{c_{f\circ g,h}} & (f\circ g\circ h)^* \end{array}$$

  conmuta.

A continuación daremos algunos ejemplos de prestacks.

**3.11 Ejemplo. Pregavilla como prestack** Sea $\mathscr{F} : Sch^{op} \longrightarrow Set$ una pregavilla de conjuntos. Esta pregavilla es siempre un prestack ya que

- para cada esquema $S$, $\mathscr{F}(S)$ es un conjunto, y por el Ejemplo (3.5) es también un grupoide,
- para cada morfismos de esquemas $f : S \longrightarrow T$ tenemos el funtor entre grupoides $f^* : \mathscr{F}(T) \longrightarrow \mathscr{F}(S)$ que está bien definido porque $\mathscr{F}$ es pregavilla,
- dados dos morfismo de esquemas $f$ y $g$ en los cuales tenga sentido la composición $f \circ g$, la transformación natural $c_{f,g}$ está dada por isomorfismo canónico entre $g^* f^*$ y $(f \circ g)^*$ que tenemos porque $\mathscr{F}$ es pregavilla.

Como todo conjunto se puede ver como un grupoide y toda pregavilla se puede ver como un prestack, entonces los prestacks son generalización de las pregavilla, de la misma manera que los grupoides son generalización de los conjuntos.

**3.12 Ejemplo. Moduli prestack.** Sea $P = (A, \sim, F, \cong)$ un problema moduli. Definimos el **moduli prestack asociado a** $P$ como el prestack

$$\mathfrak{F} : Sch^{op} \longrightarrow \mathfrak{G}pds$$

tal que

- para cada esquema $S$, $\mathfrak{F}(S)$ es el grupoide de familias (ver Ejemplo (3.7)).
- para cada morfismo $f : T \longrightarrow S$, el funtor $f^* : \mathfrak{F}(S) \longrightarrow \mathfrak{F}(T)$ está definido por las familias inducidas.

**3.13 Ejemplo. Prestack de haces vectoriales**. Denotaremos por

$$\mathscr{B}un_{r,d} : Sch^{op} \longrightarrow \mathfrak{G}pds$$

al prestack de haces vectoriales sobre $X$ de rango $r$ y grado $d$. Este prestack consta de lo siguiente:

- para cada esquema $S$, $\mathscr{B}un_{r,d}(S)$ es el grupoide de familias (ver Ejemplo (3.7)) del problema moduli de haces vectoriales (ver Ejemplo (1.5)),
- para un morfismo $f : S \longrightarrow T$, el funtor $f^* : \mathscr{B}un_{r,d}(T) \longrightarrow \mathscr{B}un_{r,d}(S)$ está dado por el pullback,
- para cada par de morfismos $g : U \longrightarrow S$, $f : S \longrightarrow T$ la transformación natural invertible $c_{f,g}$ está dado por el isomorfismo canónico entre $g^* f^*$ y $(f \circ g)^*$.

De la misma manera se definen el prestack de haces vectoriales semiestables $\mathscr{B}un^{SS}_{r,d}$ y el prestack de haces vectoriales estables $\mathscr{B}un^{S}_{r,d}$

Siguiendo la analogía de pregavillas, un stack es el análogo de lo que es una gavilla, es decir un stack es un prestack más condiciones de pegado. En este caso las condiciones de pegado consiste en “pegar categorías”.

En la definición de stack es en donde utilizaremos las topologías de Grothendieck, generalmente ocuparemos la topología étale o la topología fppf. Tener un prestack sobre un sitio es lo que nos permitirá definir un stack, ya que necesitamos la noción de abierto y la topología de Grothendieck nos da esa noción.

Sea $\mathfrak{X} : Sch^{op}_{\tau} \longrightarrow \mathfrak{G}pds$ un prestack. En lo que sigue daremos las condiciones para el prestack $\mathfrak{X}$ sea un stack. Para simplificar la notación, denotaremos por $X|_i$ el pullback $f_i^* X$, donde $f_i : U_i \to U$ y $X$ es un objeto de $\mathfrak{X}(U)$. Denotaremos también por $X_i|_{ij}$ el pullback $f^*_{ij,i} X_i$ donde $f_{ij,i} : U_i \times_U U_j \to U_i$ y $X_i$ es un objeto de $\mathfrak{X}(U_i)$

**3.14 Definición.** Un prestack $\mathfrak{X} : Sch^{op}_{\tau} \longrightarrow \mathfrak{G}pds$ es un **stack** si para toda cubierta $\{U_i\}_{i \in I}$ de un esquema $U$ las siguientes condiciones se satisfacen:

1. (Pegado de objetos) Si $\{X_i\}_{i \in I}$ es una colección de objetos tal que $X_i \in \mathfrak{X}(U_i)$ para cada $i \in I$, y $\phi_{ij} : X_j|_{ij} \to X_i|_{ij}$ son morfismo tales que satisfacen las condiciones de cociclo
$$\phi_{ij}|_{ijk} \circ \phi_{jk}|_{ijk} = \phi_{ik}|_{ijk}$$
en el stack $\mathfrak{X}((U_i \times_U U_j) \times_{U_j} (U_k \times_U U_j))$. Entonces existe un objeto $X$ de $\mathfrak{X}(U)$ e isomorfismos $\phi_i : X|_i \to X_i$ en $\mathfrak{X}(U_i)$ tales que
$$\phi_{ij} \circ \phi_i|_{ij} = \phi_j|_{ij}$$
.

$$\begin{tikzcd}
 & \mathfrak{X}((U_i \times_U U_j) \times_{U_j} (U_k \times_U U_j)) & & \mathfrak{X}(U_k \times_U U_j) \arrow[ll] \\
\mathfrak{X}(U_i \times_U U_j) \arrow[ur] & & \mathfrak{X}(U_j) \arrow[ll] \arrow[ur] & \\
 & \mathfrak{X}(U_i \times_U U_k) \arrow[uu] & & \mathfrak{X}(U_k) \arrow[ll] \arrow[uu] \\
\mathfrak{X}(U_i) \arrow[uu] \arrow[ur] & & \mathfrak{X}(U) \arrow[ll] \arrow[uu] \arrow[ur] &
\end{tikzcd}$$

2. (Pegado de morfismos) Si $X$ y $Y$ son dos objetos en $\mathfrak{X}(U)$ y $\phi_i : X|_i \longrightarrow Y|_i$ son morfismos tales que $\phi_i|_{ij} = \phi_j|_{ij}$, entonces existe un único morfismo $\eta : X \longrightarrow Y$ tal que $\eta|_i = \phi_i$.

Ver apéndice para observar la similitud entre la definición de stack y la definición de gavilla.

**3.15 Ejemplo. Gavillas como stacks** Sea $\mathscr{F} : Sch_\tau^{op} \longrightarrow Sets$ una gavilla sobre el sitio $Sch_\tau$. En el Ejemplo (3.11) vimos que al ser $\mathscr{F}$ pregavilla entonces es un prestack.

Las condiciones para que $\mathscr{F}$ sea stack, se cumplen automáticamente por las condiciones de gavilla.

En conclusión toda gavilla es un stack.

**3.16 Ejemplo. Stack de haces vectoriales**. El prestack de haces vectoriales $\mathscr{B}un_{r,d}$ definido en (3.13) es de hecho un stack en las topología étale, Zariski, suave, fppf y fpqc. La prueba es muy técnica y se puede consultar en [10].

**3.17 Ejemplo. Stack cociente**. Sea $X$ un esquema y $G$ un esquema afín y suave sobre $\mathbb{C}$ (ver [8]) con estructura de grupo, actuando por la derecha en $X$. El prestack cociente

$$[X/G] : Sch^{op} \longrightarrow \mathfrak{G}pds$$

está definido de la siguiente manera:

- dado un esquema $U$ le asociamos el grupoide $[X/G](U)$ cuyos objetos son parejas $(E,\alpha)$ donde $E \xrightarrow{\pi} U$ es un $G$-haz principal y $\alpha : E \longrightarrow X$ es un morfismo $G$-equivariante. Los morfismos son isomorfismos de $G$-haces principales que conmutan con los morfismos $G$-equivariantes,
- si $f : U \longrightarrow U'$ es un morfismo de esquemas, el funtor $f^* : [X/G](U') \longrightarrow [X/G](U)$ está definido por los pullbacks de $G$-haces principales.

De hecho el prestack $[X/G]$ es un stack con la topología étale. La demostración es muy técnica y se puede consultar en [15].

**3.18 Ejemplo. Esquema como stack** Sea $X$ un esquema. En el capítulo 1 vimos que $X$ está determinado por su funtor de puntos

$$h_X : Sch^{op} \longrightarrow Set.$$

Si este funtor es una gavilla de conjuntos, sobre el sitio $Sch_\tau$ para una topología $\tau$, entonces por el Ejemplo (3.15) $h_X$ es también un stack. A este stack lo llamaremos **el stack asociado a** $X$ y lo denotaremos por $\underline{X}$.

El funtor $h_X$ es una gavilla para las topologías fpqc, Zariski, étale, suave y fppf, (ver [15]).

Ahora definiremos morfismo entre prestacks. Como un stack es un prestack entonces esta definición también describe los morfismos entre stacks.

**3.19 Definición.** Sean $\mathfrak{X}, \mathfrak{Y} : Sch \longrightarrow \mathfrak{G}pds$ dos prestacks. Un morfismo de prestacks $F : \mathfrak{X} \longrightarrow \mathfrak{Y}$ está dado por las siguientes condiciones:

1. para cada esquema $X$, se tiene un funtor $F_X : \mathfrak{X}(X) \longrightarrow \mathfrak{Y}(X)$,

2. para cada morfismo de esquemas $f : X \longrightarrow Y$, se tiene una transformación natural

$$F_f : \mathfrak{Y}(f) \circ F_Y \Rightarrow F_X \circ \mathfrak{X}(f)$$

dado por el diagrama

$$\begin{tikzcd}
\mathfrak{X}(Y) \arrow[r, "F_Y"] \arrow[d, "\mathfrak{X}(f)"'] \arrow[dr, bend left, ""] \arrow[dr, bend right, ""] \arrow[dr, phantom, "F_f"] & \mathfrak{Y}(Y) \arrow[d, "\mathfrak{Y}(f)"] \\
\mathfrak{X}(X) \arrow[r, "F_X"'] & \mathfrak{Y}(X)
\end{tikzcd}$$

satisfaciendo las siguientes condiciones de compatibilidad:

*a*) si $f = Id_X$, entonces $F_f = Id_{F(X)}$

*b*) si $f$ y $g$ son morfismos tales que tiene sentido la composición $g \circ f$, entonces $F_{g\circ f}$ está dado por la composición de los cuadros conmutativos dados por $F_f$ y $F_g$.

La siguiente definición será importante en el Lema de Yoneda que enunciaremos más adelante.

**3.20 Definición.** Sea $\mathfrak{X}$ un prestack. Definimos el prestack

$$Hom_{Prestack}(-,\mathfrak{X}) : Sch \longrightarrow \mathfrak{G}pds$$

de la siguiente manera: a cada esquema $S$, le asociamos el grupoide $Hom_{Prestack}(\underline{S},\mathfrak{X})$ que consiste de

- Objetos. Morfismos de prestacks $F : \underline{S} \longrightarrow \mathfrak{X}$.
- Morfismos. Un morfismos entre dos objetos $F, G : \underline{S} \longrightarrow \mathfrak{X}$ es una aplicación $\psi : F \longrightarrow G$ tal que para cada esquema $X$
$$\psi_X : F_X \longrightarrow G_X$$
es una transformación natural invertible entre los funtores $F_X, G_X : \underline{S}(X) \longrightarrow \mathfrak{X}(X)$.

Los morfismos de stacks serán muy importantes cuando se busquen propiedades geométricas en un stack. Esto se trabajará en la siguiente sección.

Recordemos que el moduli prestack es la aplicación análoga al funtor moduli en un problema moduli, entonces es natural preguntarse si un prestack es representable. El Lema de Yoneda establece que todo prestack es representable.

En seguida enunciaremos y demostraremos el Lema de Yoneda.

**3.21 Teorema. (Lema de Yoneda para prestacks)** *Sea $\mathfrak{X}$ un prestack. Entonces para cada esquema $S$ existe una equivalencia de categorías*

$$\Theta : Hom_{Prestacks}(\underline{S},\mathfrak{X}) \xrightarrow{\cong} \mathfrak{X}(S)$$

*donde $\underline{S}$ es el prestack asociado al esquema $S$.*

Antes de demostrar el teorema, recordemos que dado un problema moduli, el hecho de que el funtor moduli $\mathscr{F}$ sea representable significa que existe un esquema $M$ tal que para todo $S \in Sch$ hay una biyección entre los conjuntos $\mathfrak{F}(S)$ y $\underline{M}(S)$.

En el caso del prestack moduli $\mathfrak{F}$, como $\mathfrak{F}(S)$ es una categoría para cada esquema $S$, entonces la biyección entre conjuntos es sustituida por una equivalencia de categorías.

Notemos que el Lema de Yoneda establece que un prestack es representable por el mismo prestack. En seguida demostraremos el Lema de Yoneda.

*Demostración.* Empezaremos diciendo como está definida la aplicación $\Theta$. Sea $F \in Hom_{Prestacks}(\underline{S}, \mathfrak{X})$ entonces $\Theta(F)$ está definido como

$$\Theta(F) := F_S(Id_S)$$

donde $F_S : Hom(S,S) \longrightarrow \mathfrak{X}(S)$. Si $\psi : F \longrightarrow G$ es un morfismo en la categoría $Hom_{Prestacks}(\underline{S}, \mathfrak{X})$ entonces la aplicación está definida como $\Theta(\psi) = \psi_S(Id_S)$ donde $\psi_S(Id_S) : F_S(Id_S) \longrightarrow G_S(Id_S)$ en un morfismo en $\mathfrak{X}(S)$.

Para probar que $\Theta$ es en efecto una equivalencia de categorías, definiremos

$$\Xi : \mathfrak{X}(S) \longrightarrow Hom_{Prestacks}(\underline{S}, \mathfrak{X})$$

tal que $\Theta \circ \Xi(S) \cong Id_{\mathfrak{X}(S)}$ y $\Xi \circ \Theta(S) \cong Id_{Hom_{Prestacks}(\underline{S}, \mathfrak{X})}$.

Sea $\mathfrak{s} \in \mathfrak{X}(S)$, definimos $\Xi(\mathfrak{s}) := F_{\mathfrak{s}} \in Hom_{Prestacks}(\underline{S}, \mathfrak{X})$ tal que para cada esquema $U$ tenemos el funtor

$$\begin{aligned} F_{\mathfrak{s},U} : \underline{S}(U) &\longrightarrow \mathfrak{X}(U) \\ f &\mapsto f^* := \mathfrak{X}(f)(\mathfrak{s}) \end{aligned}$$

donde, por definición, $\mathfrak{X}(f) : \mathfrak{X}(S) \longrightarrow \mathfrak{X}(U)$.

Ahora si $\psi : \mathfrak{s} \longrightarrow \mathfrak{s}'$ es un morfismo en la categoría $\mathfrak{X}(S)$ definimos el morfismo $\eta_\psi : F_{\mathfrak{s}} \longrightarrow F_{\mathfrak{s}'}$ tal que para cada esquema $U$ tenemos el morfismo

$$\eta_{\psi,U} : F_{\mathfrak{s},U} \longrightarrow F_{\mathfrak{s}',U}$$

donde, si $f \in \underline{S}(U)$ entonces $\eta_{\psi,U}(f)$ es un isomorfismo entre $f^*\mathfrak{s}$ y $f^*\mathfrak{s}'$.

Consideremos la composición

$$\mathfrak{X}(S) \xrightarrow{\Xi} Hom_{Prestacks}(\underline{S}, \mathfrak{X}) \xrightarrow{\Theta} \mathfrak{X}(S)$$

veamos que

$$(\Theta \circ \Xi)(\mathfrak{s}) = \Theta(F_{\mathfrak{s}}) = F_{\mathfrak{s},S}(Id_S) = Id_S^*(\mathfrak{s}) = \mathfrak{X}(Id_S)(\mathfrak{s}) = Id_{\mathfrak{X}(S)}(\mathfrak{s}) = (\mathfrak{s}).$$

Ahora sea $\psi : \mathfrak{s} \longrightarrow \mathfrak{s}'$ un morfismos en la categoría $\mathfrak{X}(S)$, entonces

$$(\Theta \circ \Xi)(\psi) = \Theta(\eta_\psi) = \eta_{\psi,S}(Id_S) = Id_S^*(\psi) = Id_{\mathfrak{X}(S)}(\psi) = \psi,$$

por lo tanto $\Theta \circ \Xi = Id_{\mathfrak{X}(S)}$.

Consideremos ahora la composición

$$Hom_{Prestacks}(\underline{S},\mathfrak{X}) \xrightarrow{\Theta} \mathfrak{X}(S) \xrightarrow{\Xi} Hom_{Prestacks}(\underline{S},\mathfrak{X})$$

Sea $G \in Hom_{Prestacks}(\underline{S},\mathfrak{X})$ entonces

$$(\Xi \circ \Theta)(G) = \Xi(G_S(Id_S)) = F_{G_S(Id_S)}.$$

Necesitamos demostrar que $G = F_{G_S(Id_S)}$. Sea $f : U \longrightarrow S$ un morfismo de esquemas y consideremos el diagrama conmutativo

$$\begin{tikzcd} \underline{S}(S) \arrow[r, "G_S"] \arrow[d, "\underline{S}(f)"'] & \mathfrak{X}(S) \arrow[d, "\mathfrak{X}(f)"] \\ \underline{S}(U) \arrow[r, "G_U"] & \mathfrak{X}(U) \end{tikzcd} \tag{3.1}$$

esto es $G_U \circ \underline{S}(f) = \mathfrak{X}(f) \circ G_S$. Tomando el morfismo $Id_S \in \underline{S}(S)$ tenemos que

$$(\mathfrak{X}(f) \circ G_S)(Id_S) = \mathfrak{X}(f)(G_S(Id_S)) = f^*G_S(Id_S) = F_{G_S(Id_S),U}(f)$$

por otro lado $\underline{S}(f)(Id_S) = f$. Por lo tanto

$$G_U(f) = F_{G_S(Id_S),U}(f)$$

para todo esquema $U$ y todo morfismo de esquemas $f$. Esto implica que $G = F_{G_S(Id_S)}$ como se quería.

Ahora, sea $\psi : H \longrightarrow G$ un morfismo en la categoría $Hom_{Prestacks}(\underline{S},\mathfrak{X})$ entonces

$$(\Xi \circ \Theta)(\psi) = \Xi(\psi_S(Id_S)) = \eta_{\psi_S(Id_S)}$$

solo basta ver que $\psi = \eta_{\psi_S(Id_S)}$.

Recordemos que $\psi_S(Id_S) : H_S(Id_S) \longrightarrow G_S(Id_S)$ es un morfismo en la categoría $\mathfrak{X}(S)$ por lo que $\eta_{\psi_S(Id_S)} : F_{H_S(Id_S)} \longrightarrow F_{G_S(Id_S)}$ es un morfismo en la categoría $Hom_{Prestacks}(\underline{S},\mathfrak{X})$. Sea $f : U \longrightarrow S$ un morfismo de esquemas, entonces

$$\eta_{\psi_S(Id_S),U}(f) : F_{H_S(Id_S),U}(f) \longrightarrow F_{G_S(Id_S),U}(f)$$

luego como $F_{H_S(Id_S),U}(f) = f^*H_S(Id_S)$ entonces

$$\eta_{\psi_S(Id_S),U}(f) = f^*\psi(Id_S).$$

Recordemos del diagrama (3.1) que $H_U(f) = f^*(H_S(Id_S))$ y $G_U(f) = f^*(G_S(Id_S))$ por lo que

$$\psi_U(f) : H_U(f) \longrightarrow G_U(f)$$

luego $\psi_U(f) = f^*(\psi_S(Id_S))$. De esto último tenemos que $\eta_{\psi_S(Id_S),U}(f) = \psi_U(f)$, y esto es para todo esquema $U$ y morfismo $f$. Por lo tanto $\eta_{\psi_S(Id_S)} = \psi$.

Con esto probamos que $\Xi \circ \Theta = Id_{Hom_{Prestacks}(\underline{S},\mathfrak{X})}$. Esto implica que $\Theta$ es una equivalencia de categorías como se quería. $\square$

**3.22 Observación.**

- El Teorema (3.21) implica que dado un problema moduli, siempre existe un moduli prestack fino.
- Aunque siempre existe un moduli prestack fino, esto no es suficiente ya que nos interesa conocer propiedades geométricas del moduli prestack y hasta ahora todo es a nivel categórico.

Para tener propiedades geométricas en los stacks nos tenemos que restringir a un tipo muy particular de stack el cual se le conoce stacks algebraicos. Un concepto importante y necesario para la definición de stack algebraico, es el concepto de producto fibrado en la categoría de stack. En seguida daremos la definición de producto fibrado de stacks y en la siguiente sección definiremos un stack algebraico.

**3.23 Definición.** Sean $\mathfrak{X}$, $\mathfrak{Y}$ y $\mathfrak{S}$ stacks y $F : \mathfrak{X} \longrightarrow \mathfrak{S}$, $G : \mathfrak{Y} \longrightarrow \mathfrak{S}$ morfismos de stacks. El **producto fibrado de stacks** $\mathfrak{X} \times_{\mathfrak{S}} \mathfrak{Y}$, es el stack que se define de la siguiente manera. Para cada esquema $U$ el grupoide $\mathfrak{X} \times_{\mathfrak{S}} \mathfrak{Y}(U)$ está definido por

- objetos: $(u, u', \phi)$ tales que $u \in \mathfrak{X}(U)$, $u' \in \mathfrak{Y}(U)$ y $\phi \in Hom_{\mathfrak{S}(U)}(F(u), G(u'))$
- morfismos: un morfismo de $(u, u', \phi)$ a $(v, v', \psi)$ es una pareja $(f, f')$ tales que $f : u \longrightarrow v$, $f' : u' \longrightarrow v'$ y $\psi \circ F(f) = G(f') \circ \phi$.

Note que, como $\phi$ es un morfismo en el grupoide $\mathfrak{S}(U)$, entonces es un isomorfismo.

Aunque solo definimos el grupoide $\mathfrak{X} \times_{\mathfrak{S}} \mathfrak{Y}(U)$, es directo verificar que en efecto $\mathfrak{X} \times_{\mathfrak{S}} \mathfrak{Y}$ es un stack y eso se debe esencialmente a que $\mathfrak{X}$, $\mathfrak{Y}$ y $\mathfrak{S}$ son stacks. La prueba se puede encontrar en [18].

## 3.3. Stacks algebraicos

Recordemos que en el capítulo 2 veíamos que el concepto de cociente categórico a pesar de tener buenas propiedades funtoriales no tenía necesariamente una buena geometría, lo mismo pasa con un stack, a pesar de tener buenas propiedades categóricas no necesariamente tiene una "buena geometría". Para estudiar la geometría es necesario restringirse a los stacks algebraicos. Un stack algebraico, es un stack con algunas propiedades más, las cuales nos darán la geometría que necesitamos.

Esencialmente existen dos tipos de stacks algebraicos dependiendo de si estamos trabajando con la topología fppf o con la topología étale.

Antes de definir un stack algebraico veremos que significa que un stack sea representable.

**3.24 Definición.** Un **stack $\mathfrak{X}$ es representable** por un esquema (respectivamente por un espacio algebraico) $\underline{X} \cong \mathfrak{X}$. Un **morfismo de stacks** $F : \mathfrak{X} \longrightarrow \mathfrak{Y}$ **es representable** por esquemas (respectivamente espacios algebraicos) si para cada esquema $Y$ y cada morfismo $Y \longrightarrow \mathfrak{Y}$ el stack producto fibrado $Y \times_{\mathfrak{Y}} \mathfrak{X}$ es representable por un esquema (respectivamente por un espacio algebraico).

**3.25 Observación.** Sean $\mathfrak{X}$ y $\mathfrak{Y}$ stacks, y sea $F : \mathfrak{X} \longrightarrow \mathfrak{Y}$ un morfismo representable por esquemas. Entonces para cada esquema $Y$ y morfismo de stacks $\underline{Y} \longrightarrow \mathfrak{Y}$, el morfismo $F_Y : \underline{Y} \times_{\mathfrak{Y}} \mathfrak{X} \longrightarrow \underline{Y}$ en el diagrama

$$\begin{tikzcd}
\underline{Y} \times_{\mathfrak{Y}} \mathfrak{X} \arrow[r] \arrow[d, "F_Y"] & \mathfrak{X} \arrow[d, "F"] \\
\underline{Y} \arrow[r] & \mathfrak{Y}
\end{tikzcd}$$

induce un morfismo de esquemas $\widetilde{F_Y} : S \longrightarrow Y$, donde $\underline{S} \cong \underline{Y} \times_{\mathfrak{Y}} \mathfrak{X}$. En este sentido el morfismo $F : \mathfrak{X} \longrightarrow \mathfrak{Y}$ es representable por esquemas si cada $F_Y$ "es un morfismo de esquemas".

Se tiene la misma observación en el caso de que $F : \mathfrak{X} \longrightarrow \mathfrak{Y}$ sea representable por espacios algebraicos.

La necesidad de introducir la definición de espacios algebraicos es porque muchas veces un stack no es representable por esquemas pero si lo es por espacios algebraicos. Además a un espacio algebraico se le puede dotar de geometría gracias al atlas. Note que un esquema $X$ es un espacio algebraico, el atlas es el mismo esquema $X$.

Las propiedades algebraicas de los morfismos de stacks se sigue de la siguiente definición.

**3.26 Definición.** Sea $(Sch/S)_{et}$ un sitio en la topología étale y sea **P** una propiedad de morfismos de esquemas el cual es estable bajo cambio de base (ver [15]). Un morfismos de stacks $F : \mathfrak{X} \longrightarrow \mathfrak{Y}$ representable por esquemas tiene la propiedad **P** si para cada morfismo $\underline{Y} \longrightarrow \mathfrak{Y}$, donde $Y \in (Sch/S)$, el morfismo de esquemas $\widetilde{F_Y}$ tiene la propiedad **P**.

$$\begin{tikzcd}
\underline{Y} \times_{\mathfrak{Y}} \mathfrak{X} \arrow[r] \arrow[d, "F_Y"] & \mathfrak{X} \arrow[d, "F"] \\
\underline{Y} \arrow[r] & \mathfrak{Y}
\end{tikzcd}$$

La misma definición sirve si cambiamos representabilidad por espacios algebraicos en vez de representabilidad por esquemas.

Las propiedades **P** pueden ser morfismos étale, sobreyectivo, plano, suave, localmente de presentación finita, localmente de tipo finito, casi-compacto, encaje abierto, encaje cerrado, afín, casi-afín, propio, no ramificado, separado, etc.

Utilizando las propiedades de morfismos de stacks tenemos las siguientes definiciones.

**3.27 Definición.** Un stack $\mathfrak{X} : (Sch/S)^{op}_{fppf} \longrightarrow \mathfrak{G}pds$ es un **stack de Artin** si

1. El morfismo diagonal $\Delta : \mathfrak{X} \longrightarrow \mathfrak{X} \times \mathfrak{X}$ es representable por *espacios algebraicos*.

2. El morfismo diagonal $\Delta$ es casi-compacto y separado.

3. Existe un esquema $X$ y un morfismo $\alpha : \underline{X} \longrightarrow \mathfrak{X}$ suave y sobreyectivo.

**3.28 Definición.** Un stack $\mathfrak{X} : (Sch/S)^{op}_{et} \longrightarrow \mathfrak{G}pds$ es un **stack Deligne-Mumford** si

1. El morfismo diagonal $\Delta : \mathfrak{X} \longrightarrow \mathfrak{X} \times \mathfrak{X}$ es representable por *esquemas*.

2. El morfismo diagonal $\Delta$ casi-compacto y separado.

3. Existe un esquema $X$ y un morfismo $\alpha : \underline{X} \longrightarrow \mathfrak{X}$ étale y sobreyectivo.

En ambos casos a la pareja $(X,\alpha)$ se le llama *un atlas de* $\mathfrak{X}$.

**3.29 Ejemplo.** El stack $[X/G]$ definido en el ejemplo (3.17) es un stack de Artin (ver [15]).

Para construir un atlas consideremos el $G$-haz trivial $\rho : X \times G \longrightarrow X$, este haz nos da un objeto $(\mathfrak{x},\beta) \in [X/G](X)$. Por el Lema de Yoneda (Teorema (3.21)) tenemos la equivalencia de categorías $[X/G](X) \cong Hom_{Prestack}(\underline{X},[X/G])$, por lo tanto al objeto $(\mathfrak{x},\beta)$ le corresponde un morfismo de prestacks $\mathfrak{x} : X \longrightarrow [X/G]$.

Sea $U$ un esquema, $u : \underline{U} \longrightarrow [X/G]$ un morfismo de stacks y consideremos el diagrama

$$\begin{tikzcd} \underline{U} \times_{[X/G]} X \arrow[r, "P_2"] \arrow[d, "P_1"] & X \arrow[d, "\mathfrak{x}"] \\ \underline{U} \arrow[r, "u"] & {[X/G]} \end{tikzcd}$$

Como $u \in Hom_{Prestack}(\underline{U},[X/G])$, por el Lema de Yoneda a $u$ le corresponde un $G$-haz principal $(E,\alpha) \in [X/G](U)$. Esto implica que $\underline{U} \times_{[X/G]} X \cong E$ y por lo tanto $\mathfrak{x}$ es representable.

Es más $\mathfrak{x}$ es sobreyectivo y suave puesto que $P_1$ es sobreyectivo y suave para cualquier morfismo $u$. Por lo tanto $(X,\mathfrak{x})$ es un atlas.

En el caso particular donde $X = \{pt\}$ (la acción $G$ es la acción trivial) el grupoide $[X/G](U)$ consiste de todos los $G$-haces principales sobre $U$. Al stack de Artin $[pt/G]$ se le conoce como el **stack clasificante** y se denota por $\mathscr{B}G$. Por el análisis anterior, en este caso el atlas es un punto.

Si en vez de tomar $G$ suave lo tomamos étale sobre $\mathbb{C}$, entonces el stack $[X/G]$ es un stack Deligne-Mumford (ver [4]).

## 3.4. El moduli stack de haces vectoriales

Ahora construiremos el moduli stack del problema moduli de haces vectoriales (Ejemplo (1.5)). Recordemos del capitulo 2 que existe un esquema $R$ que parametriza haces vectoriales de rango $r$ y grado $d$.

Recordemos también que el grupo $GL(p)$ actúa en $R$. Consideremos el stack $[R/GL(p)]$ el cual es un *stack de Artin* ya que el grupo $GL(p)$ es suave sobre $\mathbb{C}$. El atlas es $(R,\mathfrak{x})$, donde el morfismo $\mathfrak{x}$ está dado como en el Ejemplo (3.29).

**3.30 Observación.** Sea $pt$ un punto y $F$ un objeto en el grupoide $[R/GL(p)](pt)$. Entonces $F$ consiste de una pareja $(E,\alpha)$, donde $E$ es un $GL(p)$-haz principal sobre $pt$ y $\alpha : E \longrightarrow R$ es un morfismo $GL(p)$-equivariante

$$\begin{tikzcd} E \arrow[r, "\alpha"] \arrow[d] & R \\ pt & \end{tikzcd}$$

De hecho $E = GL(p)$, puesto que $E$ es un $GL(p)$-haz principal sobre un punto. Como $\alpha$ es $GL(p)$-equivariante, entonces $\alpha(g) = g\alpha(I_G)$ para toda $g \in GL(p)$, donde $I_G$ es la identidad en $GL(p)$.

Utilizando la misma notación del Teorema (2.23), al elemento $\alpha(I_G) \in R$ le corresponde el haz vectorial $U_{\alpha(I_G)}$. Por otro lado, en el capítulo 2 se vio que la acción de $GL(p)$ en $R$ es una acción moduli, por lo tanto los haces vectoriales $U_{\alpha(g)}$ y $U_{\alpha(I_G)}$ son isomorfos, para toda $g \in GL(p)$.

Si a cada elemento $g \in E$, le asociamos el haz vectorial $U_{\alpha(g)}$ entonces tenemos que al punto $pt$ le estamos asociando

$$C_{pt} := \{U_r | r \in R, U_r \cong U_{\alpha(I_G)}\}.$$

En otras palabras $[R/GL(p)](pt)$ es la colección de los grupoides $C_{pt}$ donde

$$C_{pt} = \{\text{Un haz vectorial } E \text{ junto con todos sus automorfismos}\}.$$

**3.31 Observación.** Notemos que el stack $[R/GL(p)]$ es solución al problema moduli del Ejemplo (1.5). El prestack moduli asociado a éste problema moduli es el prestack $\mathscr{B}un_{r,d}$ descrito en (3.13). Por lo tanto hay un isomorfismo de stacks $\mathscr{B}un_{r,d} \cong [R/GL(p)]$.

En seguida mostraremos algunas diferencias entre el moduli stack $\mathscr{B}un_{r,d}$ y el espacio moduli $M'(r,d)$ que se construye usando teoría de invariantes geométricos.

1. El stack $\mathscr{B}un_{r,d}$ parametriza todos los haces vectoriales, mientras que el espacio moduli $M'(r,d)$ parametriza solo los haces vectoriales estables.
2. Sea $S$ un esquema. Desde el punto de vista de espacio moduli, a $S$ le corresponde el conjunto

   $$\{\text{Familias } E \text{ parametrizadas por } S\}/\approx$$

   donde $F \approx E$, si son isomorfas salvo un haz lineal.

   Desde el punto de vista de moduli stack, a $S$ le corresponde el grupoide de familias $\mathscr{B}un_{r,d}(S)$ descrito en (3.13).
3. Si nos restringimos a los haces vectoriales estables. Cuando $(r,d) = 1$, el funtor moduli es representado por el esquema $M'(r,d)$, mientras que el stack moduli $\mathscr{B}un^S_{r,d}$ de haces vectoriales estables nunca es representado por un esquema.

**3.32 Observación.** Consideremos el stack cociente $[R^S/PGL(p)]$, donde la acción del grupo $PGL(p)$ en $R^S$ es como en el Teorema (2.23) (ver capítulo 2). En este caso el stack $[R^S/PGL(p)]$ es representable por el esquema $M'(r,d)$. Más aún, existe un diagrama de stacks algebraicos de la forma

$$\begin{tikzcd} {[R^S/GL(p)]} \arrow[r, "F"] \arrow[d, "\varphi"] & {[R^S/PGL(p)]} \arrow[d, "\phi"] \\ \mathscr{B}un^S_{r,d} \arrow[r, "G"] & M'(r,d) \end{tikzcd}$$

donde los morfismos $\varphi$ y $\phi$ son isomorfismos de stacks.

Similarmente para el caso de haces vectoriales semiestables (ver [15]).

Capítulo 4

# Conclusiones

En este capítulo daremos un resumen muy concreto del trabajo de tesis. El resumen lo haremos enfocados en el ejemplo de haces vectoriales.

Recordemos que en el problema moduli de haces vectoriales de rango $r$ y grado $d$ (Ejemplo (1.5)) la relación de equivalencia entre familias es isomorfismo de haces vectoriales. Esto provoca que haya familias, $F$ y $G$, tales que

- $F \ncong G$, pero
- $\nu_F = \nu_G$

por lo que no se puede tener un espacio moduli fino.

Para no tener este problema cambiamos la relación de equivalencia entre familias. Con la nueva relación de equivalencia diremos que dos familias $F$ y $G$ son equivalentes si son isomorfos salvo un haz lineal, es decir $F \cong G \otimes L$ para algún es un haz lineal $L$.

Por lo tanto el funtor moduli queda descrito como sigue:

$$\begin{aligned} \mathscr{F} : Sch^{op} &\longrightarrow Sets \\ S &\mapsto \mathscr{F}(S) \end{aligned}$$

donde $\mathscr{F}(S) = \{\text{Familias parametrizadas por } S\}/\cong$.

Y si $f : S \longrightarrow T$ es un morfismo de esquemas entonces $\mathscr{F}(f) = f^*$ está dado por el pullback.

La teoría de GIT establece que para este problema moduli podemos construir el espacio *moduli grueso* de haces vectoriales estables. Más aún si $(r,d) = 1$ se puede construir el espacio *moduli fino* de haces vectoriales estables.

Por otro lado si queremos clasificar todos los haces vectoriales, traducimos el problema moduli al lenguaje de stacks. En este caso el *moduli prestack* que está descrito como sigue:

$$\mathfrak{X} : Sch^{op} \longrightarrow Gpds$$
$$S \mapsto \mathfrak{X}(S)$$

donde $\mathfrak{X}(S)$ es el grupoide de familias, y si $f : S \longrightarrow T$ es un morfismo de esquemas entonces $\mathfrak{X}(f) = f^*$ está dado por el pullback.

El lema de Yoneda establece que el moduli prestack es siempre representable, por lo que simepre podemos clasificar todos los haces vectoriales desde el punto de vista de stacks.

El moduli prestack de haces vectoriales es de hecho un stack de Artin, con atlas $R$ ($R$ es un subconjunto de un Quot-Scheme que se define en el capítulo 2).

Observemos que el moduli stack de haces vectoriales clasifica a todos los haces vectoriales de rango $r$ y grado $d$, mientras que el espacio moduli solo clasifica a los haces vectoriales estables.

Capítulo 5

# Apéndice. Resultados generales acerca de gavillas coherentes

En este capítulo enunciaremos varios resultados, a cerca de gavillas coherentes, que son necesarios para probar algunos teoremas que se enuncian en este trabajo. Las demostraciones de estos resultados se pueden consultar principalmente en [9], [3] y [11].

## 5.1. Gavillas

En esta sección daremos un muy breve resumen de la teoría de gavillas enfocándonos principalmente en cohomología, comenzaremos con la definición de pregavilla.

**5.1 Definición.** *Una pregavilla de grupos abelianos sobre un espacio topológico $X$ consiste de:*

1. *Una base $\{U_\alpha\}$ para los conjuntos abiertos de la topología de $X$,*
2. *un grupo abeliano $\mathscr{S}_\alpha$ asociado a cada conjunto abierto $U_\alpha$ de la base,*
3. *un homomorfismo $\rho_{\alpha\beta} : \mathscr{S}_\beta \longrightarrow \mathscr{S}_\alpha$ asociado a cada relación de inclusión $U_\alpha \subset U_\beta$, tales que $\rho_{\alpha\beta} \circ \rho_{\beta\gamma} = \rho_{\alpha\gamma}$ siempre que $U_\alpha \subset U_\beta \subset U_\gamma$.*

Notemos que a una pregavilla lo podemos ver como un funtor $\mathfrak{F} : Top_X \longrightarrow Gps$ donde la categoría $Top_X$ tiene como objetos abiertos $U_\alpha \subset X$, y los morfismos son las inclusiones; y la categoría $Gps$ tiene como objetos grupos abelianos y los morfismo son homomorfismos de grupos abelianos. Veamos que en este caso dado un objeto $U_\alpha \in Top_X$, $\mathfrak{F}(U_\alpha) := \mathscr{S}_\alpha$ es un grupo abeliano y las condiciones dos y tres de la definición de pregavilla se siguen directamente del hecho de que $\mathfrak{F}$ es un funtor.

**5.2 Observación.** Las pregavillas son más generales. Una pregavilla es un funtor contravariante entre dos categorías

$$\mathfrak{F} : \mathscr{C}_1^{op} \longrightarrow \mathscr{C}_2.$$

En el capítulo 3 utilizaremos las pregavillas de conjuntos sobre la categoría de esquemas

$$\mathfrak{F} : Sch^{op} \longrightarrow Set.$$

Para fines de cohomología nos enfocaremos en las pregavillas de conjuntos definidos como en la Definición (5.1).

Las pregavillas pueden ser de otras categorías como anillos, conjuntos, módulos, etc. Notemos que una pregavilla depende solo de los abiertos $U_\alpha$, los grupos $\mathscr{S}_\alpha$ y los morfismos $\rho_{\alpha\beta}$, así que podemos representar a una pregavilla como $\{U_\alpha, \mathscr{S}_\alpha, \rho_{\alpha\beta}\}$

**5.3 Definición.** *Sea $\mathfrak{F}$ una pregavilla de grupos abelianos $\{V_\alpha, \mathscr{S}_\alpha, \rho_{\alpha\beta}\}$ sobre un espacio topológico $X$. Diremos que $\mathfrak{F}$ es una* **gavilla** *de grupos abelianos sobre $X$, si para todo abierto $U \subset X$ y para toda cubierta $\{U_\alpha\}$ de $U$ se cumplen las condiciones siguientes*

1. *si $f$ y $g$ son elementos del grupo $\mathscr{S}_0 := \mathfrak{F}(U)$ tales que $\rho_{\alpha 0}(f) = \rho_{\alpha 0}(g)$ para todo $U_\alpha$, entonces $f = g$,*

2. *si $\{f_\alpha \in \mathscr{S}_\alpha\}$ son elementos tales que $\rho_{\gamma\alpha_1}(f_{\alpha_1}) = \rho_{\gamma\alpha_2}(f_{\alpha_2})$ siempre que $U_\gamma \subset U_{\alpha_1} \cap U_{\alpha_2}$ para cualquier elemento $U_\gamma$ de la base entonces existe un elemento $f \in \mathscr{S}_0$ tal que $f_\alpha = \rho_{\alpha 0}(f)$ para todo $U_\alpha$.*

Ahora definiremos los grupos de cohomología de una gavilla de grupos. Sea $\mathfrak{F}$ una gavilla de grupos sobre un espacio topológico $X$, sea $\mathfrak{U} = (U_i)_{i \in I}$ una cubierta abierta de $X$. Para $q \geq 0$ definimos la *q-ésima cocadena* de $\mathfrak{F}$ con respecto a $\mathfrak{U}$ como

$$C^q(\mathfrak{U}, \mathfrak{F}) := \prod_{(i_0,\dots,i_q) \in I^{q+1}} \mathfrak{F}(U_{i_0} \cap \cdots \cap U_{i_q})$$

Notemos que $C^q(\mathfrak{U}, \mathfrak{F})$ es grupo para toda $q$ por ser producto directo de grupos.

Definimos también el *operador cofrontera* $\delta : C^q(\mathfrak{U}, \mathfrak{F}) \longrightarrow C^{q+1}(\mathfrak{U}, \mathfrak{F})$ como sigue. Sea

$$F := (f_{(i_0,\dots,i_q)})_{(i_0,\dots,i_q) \in I^{q+1}} \in C^q(\mathfrak{U}, \mathfrak{F})$$

entonces cada $f_{(i_0,\dots,i_q)} \in \mathfrak{F}(U_{i_0} \cap \cdots \cap U_{i_q})$. Así definimos $\delta(F) = (F_{i_0,\dots,i_{q+1}})_{(i_0,\dots,i_{q+1}) \in I^{q+2}} \in C^{q+1}(\mathfrak{U}, \mathfrak{F})$ tal que

$$F_{i_0,\dots,i_{q+1}} = \sum_{k=0}^{q+1} (-1)^k \rho_k(f_{i_0,\dots,i_{k-1},i_{k+1},\dots,i_{q+1}})$$

donde

$$\rho_k : \mathfrak{F}(U_{i_0} \cap \cdots \cap U_{i_{k-1}} \cap U_{i_{k+1}} \cap \cdots \cap U_{i_{q+1}}) \longrightarrow \mathfrak{F}(U_{i_0} \cap \cdots \cap U_{i_{q+1}})$$

es el morfismo asociado a la inclusión

$$U_{i_0} \cap \cdots \cap U_{i_{q+1}} \subset U_{i_0} \cap \cdots \cap U_{i_{k-1}} \cap U_{i_{k+1}} \cap \cdots \cap U_{i_{q+1}}.$$

Se verifica directamente que $\delta\circ\delta=0$, es decir $\delta(C^{q-1}(\mathfrak{U},\mathfrak{F}))\subset ker(C^q(\mathfrak{U},\mathfrak{F})\xrightarrow{\delta}C^{q+1}(\mathfrak{U},\mathfrak{F}))$. Definimos

$$\begin{aligned}
Z^q(\mathfrak{U},\mathfrak{F}) &:= ker(C^q(\mathfrak{U},\mathfrak{F})\xrightarrow{\delta}C^{q+1}(\mathfrak{U},\mathfrak{F}))\\
B^q(\mathfrak{U},\mathfrak{F}) &:= \delta(C^{q-1}(\mathfrak{U},\mathfrak{F}))
\end{aligned}$$

Por lo anterior tenemos que $B^q(\mathfrak{U},\mathfrak{F})\subset Z^q(\mathfrak{U},\mathfrak{F})$. Con esto definimos los grupos de cohomología de $\mathfrak{U}$ con coeficientes en la gavilla como $\mathfrak{F}$

$$\begin{aligned}
H^0(\mathfrak{U},\mathfrak{F}) &:= Z^0(\mathfrak{U},\mathfrak{F})\\
H^q(\mathfrak{U},\mathfrak{F}) &:= Z^q(\mathfrak{U},\mathfrak{F})/B^q(\mathfrak{U},\mathfrak{F}) \qquad\qquad \text{para } q>0.
\end{aligned}$$

Notemos que los grupos de cohomología en principio dependen de la cubierta $\mathfrak{U}$, sin embargo aplicando limites directos sobre las cubiertas se definen los grupos de cohomología $H^q(X,\mathfrak{F})$ (ver [5]).

En seguida daremos algunos resultados acerca de grupos de cohomología, las demostraciones pueden consultarse en [5].

**5.4 Teorema.** *Si $X$ es un espacio topológico Hausdorff paracompacto, y si*

$$0\longrightarrow\mathscr{R}\xrightarrow{\phi}\mathscr{S}\xrightarrow{\psi}\mathscr{T}\longrightarrow 0$$

*es una sucesión exacta de gavillas de grupos abelianos sobre $X$, entonces existe una sucesión exacta de grupos de cohomología de la forma*

$$0\longrightarrow H^0(X,\mathscr{R})\xrightarrow{\phi^*}H^0(X,\mathscr{S})\xrightarrow{\psi^*}H^0(X,\mathscr{T})\xrightarrow{\delta^*}H^1(X,\mathscr{R})\xrightarrow{\phi^*}H^1(X,\mathscr{S})\xrightarrow{\psi^*}H^1(X,\mathscr{T})\xrightarrow{\delta^*}\cdots$$

**5.5 Teorema.** *Si $X$ en noetheriano de dimensión $n$, entonces para todo $q>n$ y toda gavilla de grupos abelianos $\mathfrak{F}$ sobre $X$ tenemos que $H^q(X,\mathfrak{F})=0$.*

Para la demostración de este teorema puede consultar [8]. Es de nuestro interés trabajar particularmente en gavillas coherentes, donde gavilla coherente la entenderemos como una gavilla $\mathfrak{F}$ sobre $X$ tal que para todo punto $x\in X$ existe una vecindad abierta $U$ de $x$, existen gavillas localmente libres sobre $U$, $\mathscr{L}_1$ y $\mathscr{L}_2$ y una sucesión exacta de gavillas

$$\mathscr{L}_1\longrightarrow\mathscr{L}_2\longrightarrow\mathfrak{F}|_U\longrightarrow 0.$$

Existe también una gavilla importante sobre $X$ la cual se le conoce como la gavilla canónica sobre $X$ y se denota por $\omega_X$ (ver[5]). Esta gavilla es importante por el siguiente teorema.

**5.6 Teorema.** *Sea $X$ una variedad proyectiva suave conexa de dimensión $n$, entonces para cualquier gavilla localmente libre $F$ sobre $X$ y para cualquier $q\leq n$, la aplicación*

$$\sigma: H^q(X,F^{-1}\otimes\omega_X)\longrightarrow H^{n-q}(X,F)^{-1}$$

*es un isomorfismo.*

Ahora daremos algunos resultados a cerca de imágenes directas. Las demostraciones de estos resultados se pueden consultar en [11].

Sea $f : Y \longrightarrow S$ un morfismo de variedades algebraicas y $F$ una gavilla coherente en $Y$. Consideremos la pregavilla $R^q(F)$ donde a cada abierto $U \subset S$ se le asocia el grupo $H^q(f^{-1}(U), F)$. La $q$-ésima imagen directa de $F$ bajo $f$, $R^q f_*(F)$, puede ser identificado con la gavilla asociada a la pregavilla $R^q(F)$. Si $q = 0$ solo pondremos $f_*(F)$ en vez de $R^0 f_*(F)$.

Una observación importante es que todas las imágenes directas $R^q f_*(F)$ son coherentes [Teorema 4.2.5,[11]].

**5.7 Teorema.** *Sea $f : Y \longrightarrow S$ un morfismo proyectivo y $F$ una gavilla coherente sobre $Y$, entonces existe un entero $v$ tal que para $m \geq v$ y $q > 0$ se tiene que $R^q f_*(F(m)) = 0$.*

Ahora supongamos $Y = S \times X$ donde $X$ es una curva proyectiva suave, $f : S \times X \longrightarrow S$ es la proyección y $F(s)$ es la gavilla sobre $X$ inducida por la inclusión $X \hookrightarrow S \times X$ dado por un punto $s \in S$.

**5.8 Teorema.** *Suponga que la gavilla $F$ es plana sobre $S$. Sea $s \in S$ un punto tal que $H^0(X, F(s)) = 0$, entonces la gavilla $R^1 f_*(F)$ es localmente libre en una vecindad de $s$. Más aún, si $H^1(X, F(s)) = 0$ entonces la imagen directa $f_*(F)$ es localmente libre en una vecindad de $s$.*

## 5.2. m-regularidad

Sea $X$ un esquema proyectivo sobre un campo $k$ y $\mathcal{O}(1)$ un haz lineal muy amplio.

**5.9 Definición.** Sea $m$ un entero, una gavilla coherente $F$ se dice que es m-regular, si

$$H^i(X, F(m-i)) = 0 \text{ para toda } i > 0.$$

**5.10 Teorema.** *Si $F$ es m-regular entonces lo siguiente se cumple*

1. *$F$ es $m'$-regular para cualquier entero $m' \geq m$.*
2. *$F(m)$ es globalmente generado.*
3. *Para todo $n \geq 0$ el homomorfismo natural $H^0(X, F(m)) \otimes H^0(X, \mathcal{O}(n)) \to H^0(X, F(m+n))$ son sobreyectivo.*

**5.11 Definición.** Una familia de clases de isomorfismos de gavillas coherentes en $X$ es acotada si existe un $k$-esquema $S$ de tipo finito y una $\mathcal{O}_{S\times X}$-gavilla $F$ tal que la familia dada esté contenida en el conjunto $\{F|_{spec(k(s))\times X} | s \in S \text{ es un punto cerrado}\}$

En seguida enunciaremos un resultado importante a cerca de familias acotadas, este resultado es importante cuando se quiere atacar un problema moduli.

**5.12 Proposición.** *Sea $\{F_i\}_{i\in I}$ una familia de gavillas coherentes, las siguientes propiedades son equivalentes*

1. *La familia es acotada.*

2. *El conjunto de polinomios de Hilbert* $\{P(F_i)\}_{i\in I}$ *es finito y existe un acotamiento uniforme, es decir existe* $\rho$ *tal que* $F_i$ *es* $\rho$*-regular para toda* $i \in I$.

3. *El conjunto de polinomios de Hilbert es finito y existe una gavilla coherente* $F$ *tal que para toda gavilla* $F_i$ *existe un homomorfismo sobreyectivo* $F \longrightarrow F_i$.

**5.13 Corolario.** *La familia de gavillas semiestables con polinomio de Hilbert fijo* $P$ *sobre una curva proyectiva es acotado.*

## 5.3. Familia de gavillas

Sea $f : X \longrightarrow S$ un morfismo de tipo finito de esquemas noetherianos. Si $g : T \longrightarrow S$ es un $S$-esquema denotaremos por $X_T$ al producto fibrado $T \times_S X$, por $g_X : X_T \longrightarrow X$ y $f_T : X_T \longrightarrow T$ la proyecciones naturales

$$\begin{tikzcd} X_T \arrow[r, "f_T"] \arrow[d, "g_X"'] & T \arrow[d, "g"] \\ X \arrow[r, "f"'] & S \end{tikzcd}$$

Para $s \in S$ denotamos por $X_s$ a la fibra $f^{-1}(s)$ y si $F$ es un $\mathscr{O}_X$-módulo coherente, denotamos por $F_T := g_X^* F$ y por $F_s := F|_{X_s}$. En el trabajo de espacios moduli pensaremos a $F$ como una familia de gavillas $F_s$, parametrizada por $S$.

**5.14 Definición.** Una familia plana de gavillas sobre las fibras de $f$ es un $\mathscr{O}_X$-módulo $F$ el cual es plano sobre $S$.

Es un hecho que si $F$ es plano sobre $S$, entonces $F_T$ es plano sobre $T$ para cualquier cambio de base $T \longrightarrow S$. Por otro lado, si

$$0 \longrightarrow F' \longrightarrow F \longrightarrow F'' \longrightarrow 0$$

es una sucesión exacta de gavillas coherentes y si $F''$ es plano sobre $S$ entonces $F'$ es plano sobre $S$ si y sólo si $F$ lo es. Si $X \cong S$ entonces $F$ es plano sobre $S$ si y sólo si $F$ es localmente libre.

**5.15 Proposición.** *Sea* $f : X \longrightarrow S$ *un morfismo proyectivo,* $\mathscr{O}_X(1)$ *un haz lineal tal que cada restricción* $\mathscr{O}_X(1)_s$ *es amplio, sea* $F$ *un* $\mathscr{O}_X$*-módulo coherente y supongamos que* $S$ *es un esquema reducido, entonces los siguientes enunciados son equivalentes*

1. $F$ *es plano sobre* $S$,

2. *Para* $m$ *suficientemente grande la gavilla* $f_*(F(m))$ *es localmente libre.*

3. *El polinomio de Hilbert* $P(F_s)$ *es localmente constante como una función de* $s \in S$.

**5.16 Teorema.** *Sea $f : X \longrightarrow S$ un morfismo proyectivo de esquemas noetherianos, sea $\mathscr{O}(1)$ una gavilla invertible sobre $X$ el cual es muy amplio relativo a $S$, y sea $F$ un $\mathscr{O}_X$-módulo. Entonces el conjunto $\mathscr{P} = \{P(F_s)|s \in S\}$ de polinomios de Hilbert de las fibras de $F$ es finito. Más aún hay una cantidad finita de subesquemas localmente cerrados $S_P \subset S$ indexados por los polinomios $P \in \mathscr{P}$, con las siguientes propiedades:*

1. *El morfismo natural $j : \sqcup_P S_P \longrightarrow S$ es una biyección.*
2. *Si $g : S' \longrightarrow S$ es un morfismo de esquemas noetherianos, entonces $g_X^* F$ es plano sobre $S'$ si y sólo si $g$ factoriza a través de $j$.*

Tal descomposición es llamada una "flattening stratification" de $S$ por $F$. Tal estratificación es única.

**5.17 Lema.** *Bajo las suposiciones del teorema anterior, existen finitos subesquemas localmente cerrados $S_i \subset S$, disjuntos a pares los cuales cubren a $S$ y tales que $F_{S_i}$ es plano sobre $S_i$.*

**5.18 Lema.** *Sea $F$ una familia plana de gavillas coherentes, parametrizada por $S$, entonces el conjunto*

$$\{s \in S | F_s \text{ es gavilla localmente libre}\}$$

*es un subconjunto abierto de $S$.*

# Bibliografía


[1] Altman, A. and Kleiman, S. (1980). Advances in Mathematics. *Compactifying the Picard Scheme*, Advances in Math. 35, 50-112

[2] Atiyah, M.F. (1957). Proc. London Math. Soc. *Vector bundles on an elliptic curve*, 7(3), 414-452.

[3] Fantechi, B., Göttsche, L., Illusie, L., Kleiman, S. L., Nitsure, N. and Vistoli, A. (2000) *Fundamental Algebra Geometry*, American Mathematical Society.

[4] Gómez, T. L. (1999). *Algebraic stacks*, Tata Institute of Fundamental Research, Homi Bhabha road, Mumbay 400 005.

[5] Gunning, R. C. (1966). *Lectures on Riemann surfaces*, United States of America: Mathematical notes Princeton University Press .

[6] Gunning, R. C. (1967). *Lectures on vector bundles over Riemann surfaces*, United States of America: Mathematical notes Princeton University Press.

[7] Harris, J. and Morrison, I. (1998). *Moduli of Curves*, Springer.

[8] Hartshorne, R. (1977). *Algabraic Geometry*, United States of America: Springer.

[9] Huybrechts, D. and Lehn, M. (1997). *The Geometry of Moduli Spaces of Sheaves*, United Kingdom: Vieweg.

[10] Laumon, G. and Moret-Bailly, L. (2000). *Champs algébriques*, Berlin: Springer.

[11] Le Potier, J. (1997). *Lectures on Vector Bundles*, United Kingdom.

[12] Mumford, D., Fogarty, J. and Kirwan, F. (1982) *Geometric Invariant Theory* (3a. ed.). Germany: Springer.

[13] Newstead, P. E. (1978). *Lectures on Introduction to Moduli Problems and Orbit Spaces*, Bombay: Tata Institute of fundamental Research.

[14] Newstead, P. E. (2002). *Vector bundles on algebraic curves*, Poland. Notas.

[15] Neumann, F. *Algebraic stack and moduli of vector bundles*, IMPA, Publicacoes Matematica, IMAP Research Monographs, Rio de Janeiro 2009, 143pp.

[16] Reynoso, C. (2013). *Introducción a la Teoría de Invariantes Geormétricos*, México.

[17] Richelson, S. (2008). *Classifying Varieties with Many Lines*, Harvard University Math Department.

[18] *Stacks Project*. Disponible en: stack.math.columbia.edu

[19] Teixidor I Bigas, M. *Vector Bundles on Curves*, Notas.