CENTRO DE INVESTIGACIÓN EN
MATEMÁTICAS, A.C.

CIMAT

APLICACIONES DE LA TEORÍA DE RENOVACIÓN AL ESTUDIO DE LAS COLAS DE DISTRIBUCIÓN DE FUNCIONALES EXPONENCIALES

T E S I S

QUE PARA OBTENER EL GRADO DE:

M A E S T R O E N C I E N C I A S

C O N E S P E C I A L I D A D E N

P R O B A B I L I D A D Y E S T A D Í S T I C A

P R E S E N T A:

I R B I N G J O N Á S A R I S T A C A R R E R A

DIRECTOR DE TESIS:
Dr. Víctor Manuel Rivero Mercado

2014

Hoja de Datos del Jurado

I. **Datos del alumno**

Arista
Carrera
Irbing Jonás.
Centro de Investigación en Matemáticas, A.C.
Maestría en Ciencias con especialidad en Probabilidad y Estadística.

II. **Datos del presidente**

Dr.
Juan Carlos
Pardo
Millán.

III. **Datos del secretario**

Dr.
Víctor Manuel
Pérez Abreu
Carrión.

IV. **Datos del vocal (asesor)**

Dr.
Víctor Manuel
Rivero
Mercado.

V. **Datos del trabajo escrito**

Aplicaciones de la teoría de renovación al estudio de las colas de distribución de funcionales exponenciales.
99 págs.
2014

A mis padres

Agradecimientos

A mis padres, porque me han apoyado en todas y cada una de las decisiones que he tomado. Al final, esto siempre ha sido por ellos y para ellos.

A mis hermanos y a mi novia, con quienes puedo hablar de todo y olvidarme un instante de las matemáticas.

A mi asesor, el Dr. Víctor M. Rivero, quien en todo momento se interesó en hacer de este trabajo algo bueno y siempre tuvo tiempo para resolver mis dudas. Al Dr. Juan Carlos Pardo y al Dr. Víctor Pérez Abreu, quienes desde que llegué a Guanajuato se interesaron en mis inquietudes acerca de lo que quería hacer y estudiar.

Al Consejo Nacional de Ciencia y Tecnología, por la beca que durante dos años me dio la posibilidad de terminar esta maestría.

Finalmente, a mis compañeros del posgrado y en general a toda la comunidad de CIMAT, porque no imaginé que en un lugar tan pequeño como Guanajuato conocería a extraordinarias personas.

Índice general

Introducción

Un proceso de Lévy es un proceso estocástico $\xi = \{\xi_t : t \geq 0\}$, que tiene trayectorias continuas por la derecha con límites por la izquierda y en donde los incrementos

$$\xi_{t_1}, \xi_{t_2} - \xi_{t_1}, \ldots, \xi_{t_n} - \xi_{t_{n-1}}, \quad 0 \leq t_1 \leq t_2 \leq \ldots \leq t_n,$$

son estacionarios e independientes. Por sí sola, la definición anterior no muestra qué tan variada es la clase de los procesos de Lévy, sin embargo, su estrecha relación con las distribuciones infinitamente divisibles da una buena impresión de la enorme variedad de procesos que realmente la forman.

El desarrollo de nuevas técnicas para el estudio de estos procesos durante la última década, ha originado un renovado interés en varios de sus aspectos y propiedades, así como en sus aplicaciones, especialmente en matemáticas financieras con la modelación de fluctuaciones de mercado, y en física matemática. De particular utilidad para estos propósitos ha sido el estudio de algunos sus funcionales asociados, tales como el supremo en algún intervalo, el ínfimo, tiempos de primera pasada sobre un nivel fijo, etc.

Este trabajo tiene como objeto de estudio a los funcionales exponenciales de procesos de Lévy, llamados así ya que tienen la forma

$$I_t := \int_0^t e^{\xi_s}\, ds, \ t \in [0, \infty], \tag{1}$$

con $\xi = \{\xi_s : s \geq 0\}$ un proceso de Lévy. Originalmente, el estudio de estos funcionales fue motivado durante la década de los 90's, cuando la valuación de opciones asiáticas era un problema emergente y los esfuerzos se enfocaban principalmente en encontrar identidades distribucionales explícitas en el caso particular de un movimiento browniano lineal (ver [Yor01]). Actualmente su estudio se ha diversificado y los funcionales exponenciales aparecen de manera natural en varios ámbitos de la teoría de procesos estocásticos, por ejemplo, en los procesos de ramificación, procesos del tipo Ornstein-Uhlenbeck, o en el estudio de procesos de Markov autosimilares, donde I_∞ es el primer tiempo de llegada a cero para un proceso de Markov autosimilar positivo.

Particularmente, en algunas áreas como la teoría de extremos, un problema interesante es conocer la probabilidad con la que un fenómeno aleatorio toma valores relativamente grandes, es por ello que en el caso de los funcionales exponenciales, el estudio del comportamiento asintótico de la cola de distribución

$$\mathbb{P}\left(\int_0^\infty e^{\xi_s}\, ds > t\right), \quad t \to \infty, \tag{2}$$

resulta de gran interés e importancia. Sin embargo, obtener expresiones analíticas explícitas para la cola (2) es bastante difícil, por lo que en muchos casos tener aproximaciones para su comportamiento en infinito, así como estimaciones para el error cometido en tales aproximaciones, resulta necesario.

Por la descomposición de Lévy-Itô (teorema 1.8), es posible darse una idea de la gran diversidad de trayectorias $t \mapsto \xi_t$ que pueden tener diferentes procesos de Lévy y ya que el funcional $\int_0^\infty e^{\xi_s} ds$ se define con base en toda la trayectoria del proceso, es natural pensar en la dificultad que involucra obtener expresiones explícitas o resultados generales que determinen el comportamiento de la cola de distribución (2). Por lo anterior, existen estimaciones cuando se consideran casos especiales de procesos de Lévy, por ejemplo, procesos que satisfacen la condición de Cramér ([Mej02], [Riv05]); procesos que en el tiempo uno, ξ_1, satisfacen una condición de sub exponencialidad ([MZ06]); o cuando el proceso ξ es hipergeométrico ([KP13]).

Cuando el proceso de Lévy satisface la condición de Cramér (definición 1.27), Méjane [Mej02] y Rivero [Riv05] demostraron que si el proceso de Lévy ξ es no aritmético, tiene índice de Cramér θ y $\mathbb{E}[\xi_1^+ e^{\theta \xi_1}]$ es finito, entonces, esta cola decrece al menos como una función potencia de orden θ, es decir

$$\mathbb{P}\left(\int_0^\infty e^{\xi_s}\, ds > t\right) \sim Ct^{-\theta}, \ t \to \infty, \tag{3}$$

con C una constante estrictamente positiva (proposición 3.2). Este trabajo de tesis pretende dar un panorama del problema de estimar la cola de distribución (2) cuando se satisface la condición de Cramér, haciendo las siguientes dos contribuciones:

I. Se desarrolla en el capítulo 3 una demostración alternativa del resultado de Méjane y Rivero, que difiere de la original en el siguiente aspecto: la demostración original es una aplicación directa de los resultados de Kesten [Kes73] y Goldie [Gol91] para ecuaciones afines aleatorias (la cual se explica en la sección 4.1), en contraparte, la demostración que se presenta en la sección 3.2 no apela a estos resultados. La idea principal en la demostración es ocupar la identidad

$$\int_t^\infty k(y)dy = \int_{\mathbb{R}} k(te^{-y}) U_\xi(dy), \quad \text{c.s.}, \tag{4}$$

donde k es la densidad del funcional I y U_ξ es la medida potencial del proceso de un proceso de Lévy ξ que deriva a menos infinito (proposición 3.1), para escribir a la transformación integral

$$t^{\theta-1} \int \mathbb{P}\left(\int_0^\infty e^{\xi_s}\, ds > t\right) dt$$

en forma de convolución con una medida de renovación. Esto permite, a su vez, utilizar en la transformación integral anterior, algunos resultados de la teoría de renovación de manera más clara y directa que en los argumentos originales de Kesten y Goldie. Cabe resaltar que la identidad 4 es una generalización de la proposición 2.3 de [PRvS13].

II. En el resultado original, Méjane y Rivero proporcionan una estimación de la cola de distribución derecha de I_∞ pero *no* se hace una análisis del error cometido en la aproximación (3). El objetivo del capítulo 4 es estudiar este problema. Primero, ya que el teorema 3.2 de [Gol91] proporciona estimaciones que pueden ser directamente utilizadas para cuantificar este error, se enuncia una primera estimación de este error enunciada en la sección 4.1; luego, en la sección 4.2 se establece una segunda estimación utilizando otro resultado establecido por D. Buraczewski, E. Damek y T. Przebinda en su artículo aún no publicado *On the rate of convergence in the Kesten renewal theorem* (2014) que también estudia la velocidad de convergencia de la cola de distribución derecha para soluciones de ecuaciones afines aleatorias. Finalmente, en la sección 4.3 y usando las expresiones que se obtuvieron en la demostración principal del capítulo 3, se establece una última estimación vía la descomposición de Stone para medidas de renovación y algunos lemas de la teoría tauberiana.

La estructura de la tesis es como sigue. En el capítulo 1 se introducen los conceptos de proceso de Lévy y sus funcionales exponenciales asociados, así como aquellas propiedades básicas que son necesarias para continuar con el trabajo de los tres capítulos restantes. Además, se describen varios ejemplos del tipo de procesos de Lévy que se consideran en este trabajo, como por ejemplo los procesos espectralmente negativos, los estables temperados generalizados y los procesos hipergeométricos. Cabe señalar que a diferencia de las dos primeras secciones del capítulo, en donde los lemas y proposiciones pueden encontrarse en literatura estándar como [Kyp06] o [Sat99], la mayoría de los lemas en el resto del capítulo son resultado del trabajo de investigación personal y búsqueda realizado durante la elaboración de la tesis.

El capítulo 2 está dividido en dos partes, la primera abarca de la sección 2.1 a la 2.3.2 y el objetivo ahí es presentar sin demostración algunos resultados de la teoría de renovación en el caso real para caminatas aleatorias. Los teoremas de Blackwell y clave de renovación se enuncian para el caso de distribuciones que no necesariamente tienen soporte en el conjunto $[0,\infty)$ y se introduce la descomposición de Stone para medidas de renovación asociadas a distribuciones “spread-out”, esto último es de gran utilidad en el capítulo 4. Nuevamente, es difícil encontrar en los textos básicos de la materia, la presentación del material anterior con la generalidad necesaria para su aplicación en los capítulos 3 y 4, es por esto que se procedió a una búsqueda bibliográfica exhaustiva de estos resultados, concluyendo ésta con el descubrimiento de una excelente referencia que desarrolla todos los resultados anteriores y muchos más, en el caso más general posible. Se trata del libro aún no publicado *Renewal, recurrence and regeneration* por G. Alsmeyer (ver [Als]).

En la segunda parte del capítulo 2, se introduce el concepto de medida potencial de un proceso de Lévy y se construye el puente entre la teoría de renovación desarrollada en la primera parte del capítulo y los dos capítulos finales.

El capítulo 3 contiene la demostración alternativa que se explicó en el inciso I arriba. Además, en la primera sección se generaliza la proposición 2.3 de [PRvS13], esta proposición afirma que la densidad del funcional exponencial I_∞ satisface cierta ecuación integral en términos de la medida potencial del proceso de Lévy ξ, donde ξ es el negativo de un subordinador. Aquí se presenta el resultado análogo pero generalizado a procesos de Lévy ξ que derivan a menos infinito, es decir, que satisfacen la condición $\lim_{t\to\infty}\xi_t = -\infty$ (proposición 3.2). También se describen algunas consecuencias de esta generalización.

El capítulo 4 tiene como finalidad desarrollar lo comentado en el inciso II. Específicamente, contiene todos los avances y resultados que se obtuvieron al respecto de la velocidad de convergencia en la aproximación (3). Si bien los resultados presentados se consideran interesantes, aún se requiere trabajo de investigación para refinarlos, lo cual se hará posteriormente a la tesis como parte de un proyecto de investigación. Lo anterior con la finalidad de redactar un artículo con los resultados obtenidos.

Finalmente, existe un único apéndice de carácter técnico y que se usa exclusivamente como referencia. Al final de cada capítulo se incluyeron algunas notas que enriquecen en diversos aspectos la información presentada en esta introducción y en los capítulos, por ejemplo, se compara el material encontrado en las distintas referencias bibliográficas y se orienta hacia una lectura más profunda sobre algunos aspectos presentados.

CAPÍTULO 1

Procesos de Lévy y funcionales exponenciales

Este capítulo está destinado principalmente a desarrollar aquellas propiedades de los procesos de Lévy que se utilizan en los capítulos 3 y 4, además, en la última sección se introduce uno de los conceptos principales de este trabajo que son los funcionales exponenciales de procesos de Lévy.

1.1. Propiedades básicas de los procesos de Lévy

Definición 1.1. *Un proceso estocástico* $\xi = \{\xi_t : t \geq 0\}$ *definido en un espacio de probabilidad* $(\Omega, \mathscr{F}, \mathbb{P})$ *es un* **proceso de Lévy** *con valores en* $\mathbb{R}$*, si posee las siguientes propiedades:*

I. *Las trayectorias de* ξ *son càdlàg (continuas por la derecha con límites por la izquierda) c.s., es decir*

$$\mathbb{P}(\{\omega \in \Omega : t \mapsto \xi_t(\omega) \text{ es càdlàg }\}) = 1.$$

II. *Para cualesquiera* $0 \leq s \leq t$, $\xi_t - \xi_s$ *es igual en distribución a* ξ_{t-s}.

III. *Para cualesquiera* $0 \leq s \leq t$, $\xi_t - \xi_s$ *es independiente de* $\{\xi_u : u \leq s\}$.

Una primera consecuencia de la definición es que si ξ es un proceso de Lévy necesariamente se cumple $\xi_0 = 0$ c.s. pues la propiedad II con $s = t$ afirma que $\xi_t - \xi_t \stackrel{D}{=} \xi_0$, por lo tanto $\xi_0 \stackrel{D}{=} 0$ y entonces $\xi_0 = 0$, c.s.

Por otro lado, es importante mencionar que en algunas ocasiones, para facilitar la notación es conveniente pensar que la medida de probabilidad $\mathbb{P}$ de la definición 1.1 es de hecho la distribución del proceso ξ, formalmente esto quiere decir que se considera a Ω como el espacio canónico $\mathbf{D} = D([0,\infty), \mathbb{R})$ de las funciones càdlàg con dominio $[0,\infty)$

y codominio $\mathbb{R}$, las funciones $\xi_t(\omega) = \omega(t)$ para todo $\omega \in \mathbf{D}$, $t \geq 0$, son las funciones coordenadas y $\mathscr{F}_{\mathbf{D}}$ es la mínima σ-álgebra en $\mathbf{D}$ que hace a todas las funciones $\{\xi_t : t \geq 0\}$ medibles, $\mathbb{P}$ es entonces una medida en $(\mathbf{D}, \mathscr{F}_{\mathbf{D}})$ que hace al proceso de coordenadas $\xi = \{\xi_t : t \geq 0\}$ un proceso de Lévy.

Como una consecuencia del teorema de extensión de Kolmogorov, es conocido que la distribución de cualquier proceso estocástico está caracterizada por su familia de distribuciones finito dimensionales. Una característica interesante de los procesos de Lévy es que se puede decir incluso más: la distribución queda totalmente caracterizada por su familia de distribuciones *uno* dimensionales.

Lema 1.2. *Si ξ y ξ' son dos procesos de Lévy, entonces $\xi \stackrel{D}{=} \xi'$ si y solo si $\xi_t \stackrel{D}{=} \xi'_t$, $\forall t \geq 0$.*

Demostración. La implicación de ida es consecuencia de lo comentado antes de lema, por ello, basta demostrar que si $\xi_t \stackrel{D}{=} \xi'_t$, $\forall t \geq 0$, entonces $\xi \stackrel{D}{=} \xi'$. La propiedad de incrementos estacionarios implica que $\forall t, s \geq 0$, $\xi_{s+t} - \xi_s \stackrel{D}{=} \xi_t \stackrel{D}{=} \xi'_t \stackrel{D}{=} \xi'_{s+t} - \xi'_s$, por lo tanto, de la propiedad de incrementos independientes se obtiene que para cualesquiera $0 \leq t_0 < \ldots < t_n \in \mathbb{R}$

$$(\xi_{t_0}, \xi_{t_1} - \xi_{t_0}, \ldots, \xi_{t_n} - \xi_{t_{n-1}}) \stackrel{D}{=} (\xi'_{t_0}, \xi'_{t_1} - \xi'_{t_0}, \ldots, \xi'_{t_n} - \xi'_{t_{n-1}}). \tag{1.1}$$

Ahora bien, ya que los vectores aleatorios $(\xi_{t_0}, \xi_{t_1}, \ldots, \xi_{t_n})$ y $(\xi'_{t_0}, \xi'_{t_1}, \ldots, \xi'_{t_n})$ se pueden escribir como

$$\begin{aligned}
(\xi_{t_0}, \xi_{t_1}, \ldots, \xi_{t_n}) &= f\left((\xi_{t_0}, \xi_{t_1} - \xi_{t_0}, \ldots, \xi_{t_n} - \xi_{t_{n-1}})\right) \text{ y} \\
(\xi'_{t_0}, \xi'_{t_1}, \ldots, \xi'_{t_n}) &= f((\xi'_{t_0}, \xi'_{t_1} - \xi'_{t_0}, \ldots, \xi'_{t_n} - \xi'_{t_{n-1}})),
\end{aligned}$$

con $f(x_1, x_2, \ldots, x_n) = (x_1, x_1 + x_2, \ldots, \sum_{i=1}^n x_i)$ una función medible, entonces, de (1.1) es posible concluír que

$$(\xi_{t_0}, \xi_{t_1}, \ldots, \xi_{t_n}) \stackrel{D}{=} (\xi'_{t_0}, \xi'_{t_1}, \ldots, \xi'_{t_n}).$$

Por lo tanto, los procesos ξ y ξ' tienen las mismas distribuciones finito-dimensionales, luego, $\xi \stackrel{D}{=} \xi'$.

$\square$

Naturalmente, el lema anterior permite afirmar que la distribución del proceso ξ puede ser caracterizada por toda la familia de funciones características de las variables aleatorias $\{\xi_t : t \geq 0\}$, es decir, por la familia de funciones $\{\mathbb{E}[e^{i(\cdot)\xi_t}] : t \geq 0\}$. Como se verá a continuación, esta familia de funciones, a su vez, se puede expresar en términos únicamente de la función característica de ξ_1 y, por lo tanto, será posible afirmar finalmente que la distribución del proceso ξ queda totalmente determinada por la distribución de la variable aleatoria ξ_1. La siguiente definición y el lema posterior son de particular utilidad para este propósito.

Definición 1.3. *La variable aleatoria X es* **infinitamente divisible** *si para cada $n \geq 1$ existe una sucesión de variables aleatorias i.i.d. $X_{1,n},\ldots,X_{n,n}$ tales que*

$$X \overset{D}{=} X_{1,n} + \ldots + X_{n,n}.$$

Lema 1.4. *Si ξ es un proceso de Lévy, la variable aleatoria ξ_t es infinitamente divisible, para cada $t \geq 0$.*

Demostración. Sea $t \geq 0$ y $n \geq 1$, de la igualdad

$$\xi_t = \xi_{t/n} + (\xi_{2t/n} - \xi_{t/n}) + \ldots + (\xi_t - \xi_{(n-1)t/n}), \tag{1.2}$$

y de la propiedad de incrementos independientes y estacionarios se obtiene el resultado. □

Para variables aleatorias infinitamente divisibles, es posible expresar a sus funciones características por medio de la celebrada **fórmula de Lévy-Khinchine** (ver [Sat99, sección 2.8]). El lema 1.4 permite entonces utilizar esta fórmula para describir explícitamente la forma de la función característica de ξ_t, para $t \geq 0$, como se enuncia a continuación.

Teorema 1.5. *Para cada $t \geq 0$*

$$\mathbb{E}[e^{i\lambda\xi_t}] = \exp\left\{ia_t\lambda - \frac{1}{2}\sigma_t^2\lambda^2 + \int_{\mathbb{R}} (e^{i\lambda x} - 1 - i\lambda x\mathbf{1}_{\{|x|<1\}})\,\Pi_t(dx)\right\},\ \lambda \in \mathbb{R}, \tag{1.3}$$

donde $a_t \in \mathbb{R}$, $\sigma_t \geq 0$ y Π_t es una medida en $\mathbb{R}$ que satisface

$$\Pi_t(\{0\}) = 0 \quad y \quad \int_{\mathbb{R}} (1 \wedge x^2)\,\Pi_t(dx) < \infty.$$

La condición de finitud de la integral $\int_{\mathbb{R}}(1 \wedge x^2)\,\Pi_t(dx)$ en el teorema anterior, asegura que la integral en (1.3) es absolutamente convergente (lema 1.12). Para cada $t \geq 0$, a la función

$$\Psi_t(\lambda) = -ia_t\lambda + \frac{1}{2}\sigma_t^2\lambda^2 + \int_{\mathbb{R}} (1 - e^{i\lambda x} + i\lambda x\mathbf{1}_{\{|x|<1\}})\,\Pi_t(dx)$$

se le conoce como el exponente característico de ξ_t y por (1.3), es la única función que satisface $\Psi_t(0) = 0$ y

$$\mathbb{E}\left[e^{i\lambda\xi_t}\right] = e^{-\Psi_t(\lambda)},\ \ \lambda \in \mathbb{R}.$$

El exponente característico Ψ_1 de ξ_1 tiene un papel fundamental. Al utilizar (1.2) dos veces, se tiene que para cualesquiera $m,n \in \mathbb{N}$

$$e^{-m\Psi_1(\lambda)} = (\mathbb{E}[e^{i\lambda\xi_1}])^m = \mathbb{E}[e^{i\lambda\xi_m}] = (\mathbb{E}[e^{i\lambda\xi_{m/n}}])^n = e^{-n\Psi_{m/n}(\lambda)},$$

y por lo tanto, $\Psi_{m/n} = (m/n)\Psi_1$. Entonces, para cualquier número racional $t \geq 0$, se cumple la relación

$$\Psi_t = t\Psi_1. \tag{1.4}$$

Si ahora $t > 0$ es un número irracional, es posible tomar una sucesión decreciente de números racionales $\{t_n : n \geq 1\}$ tal que t_n tiende a t por arriba, cuando n tiende a infinito; así, para cada λ real, se tiene (por la continuidad por la derecha c.s. de ξ) que $e^{i\lambda\xi_{t_n}}$ converge c.s. a $e^{i\lambda\xi_t}$ y, como las variables $\sin(\lambda\xi_{t_n})$ y $\cos(\lambda\xi_{t_n})$ están acotadas por 1 c.s., el teorema de convergencia dominada asegura que $\mathbb{E}[e^{i\lambda\xi_{t_n}}]$ converge a $\mathbb{E}[e^{i\lambda\xi_t}]$, cuando n tiende a infinito. Ya que (1.4) se cumple para racionales, lo anterior implica que $e^{-t_n\Psi_1(\lambda)}$ converge a $e^{-\Psi_t(\lambda)}$ y por la continuidad de la función exponencial, $e^{-t_n\Psi_1(\lambda)}$ también converge a $e^{-t\Psi_1(\lambda)}$, luego, por unicidad de los límites, $e^{-t\Psi_1(\lambda)} = e^{-\Psi_t(\lambda)}$. Se concluye finalmente que la relación (1.4) es válida para cualquier número irracional $t \geq 0$.

En conclusión, si ξ es un proceso de Lévy se cumple que para todo $t \geq 0$

$$\mathbb{E}[e^{i\lambda\xi_t}] = e^{-t\Psi(\lambda)}, \ \forall\lambda \in \mathbb{R},$$

donde $\Psi := \Psi_1$ es el exponente característico de la variable aleatoria ξ_1. Todo lo anterior se resume en la siguiente definición.

Definición 1.6. *A la función con valores complejos $\Psi := \Psi_1$ se le conoce como el* **exponente característico** *del proceso de Lévy ξ. Ψ satisface*

$$\mathbb{E}[e^{i\lambda\xi_t}] = e^{-t\Psi(\lambda)}, \ \forall t \geq 0, \ \lambda \in \mathbb{R},$$

donde

$$\Psi(\lambda) = -ia\lambda + \frac{1}{2}\sigma^2\lambda^2 + \int_{\mathbb{R}}(1 - e^{i\lambda x} + i\lambda x\mathbf{1}_{\{|x|<1\}})\Pi(dx), \tag{1.5}$$

con $a \in \mathbb{R}$, $\sigma \geq 0$ y Π una medida en $\mathbb{R}$ que cumple

$$\Pi(\{0\}) = 0 \quad y \quad \int_{\mathbb{R}}(1 \wedge x^2)\Pi(dx) < \infty.$$

La terna (a, σ, Π) es única[1], el número real a recibe el nombre de coeficiente lineal, σ es el coeficiente gaussiano y Π es la medida de Lévy del proceso.

Observación 1.7. *Salvo que se mencione lo contrario, de ahora en adelante el símbolo ξ denota un proceso de Lévy a valores reales $\xi = \{\xi_t : t \geq 0\}$, con exponente característico dado por (1.5) y ξ_t denota su posición al tiempo $t \geq 0$.*

Por todo lo anterior, es claro que a cada proceso de Lévy ξ es posible asociarle una distribución infinitamente divisible (la distribución de la v.a. ξ_1). La afirmación recíproca también es válida, es decir, dada una distribución infinitamente divisible, es posible construir un proceso de Lévy ξ tal que ξ_1 tiene esa distribución; este último resultado es consecuencia de otro más general conocido como la **descomposición de Lévy-Itô** y se enuncia a continuación.

[1] Es única dada la función de truncación $c(x) = \mathbf{1}_{\{|x|<1\}}$ que aparece dentro de la integral en (1.5), no hay nada especial en esta función, una alternativa es usar $c(x) = \frac{1}{1+x^2}$ ya que lo importante es asegurar la integrabilidad de $1 - e^{i\lambda x} + i\lambda c(x)$ bajo Π.

Teorema 1.8 (Descomposición de Lévy-Itô). *Sean $a \in \mathbb{R}$, $\sigma \geq 0$ y Π una medida concentrada en $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ tal que*

$$\int_{\mathbb{R}} (1 \wedge x^2)\, \Pi(dx) < \infty.$$

Entonces existe un espacio de probabilidad $(\Omega, \mathscr{F}, \mathbb{P})$, sobre el cual están definidos tres procesos de Lévy independientes $\xi^{(1)}$, $\xi^{(2)}$ y $\xi^{(3)}$; donde $\xi^{(1)}$ es un movimiento browniano lineal

$$\xi_t^{(1)} := \sigma B_t + at, \;\; t \geq 0,$$

(ver (1.16)), $\xi^{(2)}$ es un procesos de Poisson compuesto

$$\xi_t^{(2)} := \sum_{i=1}^{N_t} X_i, \;\; t \geq 0,$$

(con $\{N_t : t \geq 0\}$ un proceso de Poisson de parámetro $\Pi(\mathbb{R} \setminus (-1,1))$ y $\{X_i : i \geq 1\}$ son v.a.i.i.d. con distribución común $\Pi(dx)/\Pi(\mathbb{R} \setminus (-1,1))$ concentrada en $\mathbb{R} \setminus (-1,1)$) y $\xi^{(3)}$ es una martingala cuadrado integrable con un número a lo más numerable c.s. de discontinuidades (de longitud menor a la unidad) sobre cada intervalo de tiempo finito.

Más aún, si se escribe $\xi := \xi^{(1)} + \xi^{(2)} + \xi^{(3)}$, entonces ξ es un proceso de Lévy en $(\Omega, \mathscr{F}, \mathbb{P})$ con exponente característico

$$\Psi(\lambda) = -ia\lambda + \frac{1}{2}\sigma^2 \lambda^2 + \int_{\mathbb{R}} (1 - e^{i\lambda x} + i\lambda x \mathbf{1}_{\{|x|<1\}})\, \Pi(dx),$$

para $\lambda \in \mathbb{R}$.

Demostración. La demostración es larga y escapa de los fines de este trabajo, sin embargo, ésta puede consultarse de manera detallada en [Sat99] o [Kyp06]. □

La descomposición de Lévy-Itô es de gran utilidad dentro de la teoría de los procesos de Lévy, por ejemplo, permite caracterizar ciertas propiedades trayectoriales del proceso a través de su terna característica asociada (a, σ, Π). En este trabajo resulta importante un tipo especial de procesos conocidos como subordinadores.

Observación 1.9. *Un* **subordinador** *es un proceso de Lévy con trayectorias crecientes casi seguramente. Por el teorema de descomposición de Lévy-Itô, ξ es un subordinador si y solo si su coeficiente gaussiano es cero ($\sigma = 0$), su medida de Lévy tiene soporte en $(0,\infty)$ (ó $\Pi((-\infty,0)) = 0$) y*

$$\int_{(0,\infty)} (1 \wedge x)\Pi(dx) < \infty, \quad \delta := a - \int_{(0,1)} x\Pi(dx) \geq 0.$$

El término δ es conocido como la deriva del subordinador.

Se enuncian a continuación algunas propiedades de la medida de Lévy Π, que serán útiles más adelante.

Lema 1.10. *$\Pi(A) < \infty$, para todo boreliano A tal que $0 \notin \overline{A}$, donde $\overline{A}$ denota la cerradura de A. En particular, $\Pi(\{|x| > a\}) < \infty$ para todo $a > 0$.*

Demostración. Ya que $0 \notin \overline{A}$ si y solo si $0 \in \mathrm{Int}(A)$, sea $\varepsilon > 0$ tal que $(-\varepsilon, \varepsilon) \subset \mathbb{R} \setminus A$. Si $\varepsilon \geq 1$ el resultado es inmediato pues

$$\Pi(A) \leq \Pi(\{|x| \geq \varepsilon\}) = \int_{\mathbb{R}} \mathbf{1}_{\{|x| \geq \varepsilon\}} \Pi(dx) \leq \int_{\mathbb{R}} (1 \wedge x^2) \Pi(dx) < \infty,$$

ahora, si $\varepsilon < 1$ se tiene $\varepsilon^2 \mathbf{1}_{\{|x| \geq \varepsilon\}} \leq 1 \wedge x^2$ para todo $x \in \mathbb{R}$, por lo tanto

$$\Pi(A) \leq \Pi(\{|x| \geq \varepsilon\}) \leq \frac{1}{\varepsilon^2} \int_{\mathbb{R}} (1 \wedge x^2) \Pi(dx) < \infty.$$

$\square$

Corolario 1.11. *Toda medida de Lévy es σ-finita.*

Demostración. Es consecuencia de que $\mathbb{R}$ se puede expresar como

$$\mathbb{R} = \{0\} \cup \left(\bigcup_{n=1}^{\infty} \left\{ |x| > \frac{1}{n} \right\} \right)$$

y la medida de Lévy Π satisface $\Pi(\{0\}) = 0$ y $\Pi(\{|x| > \frac{1}{n}\}) < \infty$, para todo $n \geq 1$.

$\square$

Lema 1.12. *La integral en la expresión (1.5) es absolutamente convergente para toda $\lambda \in \mathbb{R}$.*

Demostración. Para $\lambda = 0$ la afirmación es inmediata, sea pues $\lambda \neq 0$. Si $z \in \mathbb{C}$, por el teorema de Taylor se tiene $e^z = 1 + z + O(|z|^2)$ cuando $|z| \to 0$, por lo que existe $0 < \varepsilon < |\lambda|$ tal que para todo $z \in \mathbb{C}$ con $|z| < \varepsilon$ se cumple $|1 - e^z + z| \leq C|z|^2$ para alguna $C > 0$; de esta manera es posible asegurar que para $|x| < \varepsilon/|\lambda| < 1$ se tiene $|1 - e^{i\lambda x} + i\lambda x \mathbf{1}_{\{|x|<1\}}| \leq C|\lambda|^2|x|^2$ y por lo tanto

$$\int_{\{|x|<\varepsilon/|\lambda|\}} |1 - e^{i\lambda x} + i\lambda x \mathbf{1}_{\{|x|<1\}}| \Pi(dx) \leq C|\lambda|^2 \int_{\{|x|<\varepsilon/|\lambda|\}} (1 \wedge |x|^2) \Pi(dx) < \infty.$$

Fuera del intervalo $\{|x| < \varepsilon/|\lambda|\}$ la función $1 - e^{i\lambda x} + i\lambda x \mathbf{1}_{\{|x|<1\}}$ es acotada y el lema 1.10 implica la integrabilidad con respecto a Π.

$\square$

Para finalizar esta primera sección, es importante describir algunas características de los procesos de Lévy, primero referentes a sus propiedades como procesos de Markov, y segundo, relacionadas al comportamiento asintótico de sus trayectorias.

Propiedad fuerte de Markov

Sea $\mathscr{F}$ una σ-álgebra de subconjuntos de un espacio Ω. Una familia $\{\mathscr{F}_t : t \geq 0\}$ de sub σ-álgebras de $\mathscr{F}$ es llamada una **filtración** si

$$\mathscr{F}_s \subseteq \mathscr{F}_t, \quad \text{siempre que} \quad s \leq t.$$

Si ξ es un proceso de Lévy en el espacio de probabilidad $(\Omega, \mathscr{F}, \mathbb{P})$, se dice que ξ es adaptado a la filtración $\{\mathscr{F}_t : t \geq 0\}$ si ξ_t es $\mathscr{F}_t$-medible, para cada $t \geq 0$. Considérese la filtración $\{\mathscr{F}_t^\xi : t \geq 0\}$ asociada al proceso ξ, es decir, para cada $t \geq 0$, $\mathscr{F}_t^\xi$ es la σ-álgebra $\mathbb{P}$-completa[2] generada por $\{\xi_s : s \leq t\}$; es claro que el proceso ξ es **adaptado** a esta filtración, la cual es usualmente llamada la filtración natural.

Ahora bien, una función $T : \Omega \to [0, \infty]$ se llama **tiempo de paro** con respecto a la filtración $\{\mathscr{F}_t : t \geq 0\}$ si T es $\mathscr{F}_\infty := \sigma(\mathscr{F}_t : t \in [0, \infty))$-medible y además

$$\{T \leq t\} \in \mathscr{F}_t, \quad \forall t \geq 0.$$

Si ξ es un proceso adaptado y T es un tiempo de paro (con respecto a la misma filtración) entonces, si se define a la función ξ_T en el evento $\{T < \infty\}$ por

$$\xi_T(\omega) := \xi_{T(\omega)}(\omega),$$

y también al conjunto

$$\mathscr{F}_T := \{A \in \mathscr{F} : A \cap \{T \leq t\} \in \mathscr{F}_t, \quad \forall t \geq 0\},$$

es posible demostrar que $\mathscr{F}_T$ es una σ-álgebra de $\mathscr{F}$ y, ya que un proceso de Lévy tiene trayectorias càdlàg, ξ_T definida en el conjunto $\{T < \infty\} \in \mathscr{F}_T$ es $\mathscr{F}_T$-medible.

Una aplicación fundamental de los conceptos anteriores es el siguiente theorema (ver [App09]).

Teorema 1.13. *Si ξ es un proceso de Lévy y T es un tiempo de paro, entonces, en $\{T < \infty\}$:*

I. *el proceso $\tilde{\xi}$ dado por*
$$\tilde{\xi}_t := \xi_{T+t} - \xi_T,$$
es un proceso de Lévy independiente de $\mathscr{F}_T$;

II. *para cada $t \geq 0$, $\tilde{\xi}_t$ tiene la misma ley que ξ_t;*

III. *$\tilde{\xi}$ es $\{\mathscr{F}_{T+t} : t \geq 0\}$-adaptado.*

Recurrencia y transitoriedad

Sea B_a la bola abierta con centro en cero y radio $a > 0$.

[2] Sea $(\Omega, \mathscr{F}, \mu)$ un espacio de medida, si se definen los conjuntos de medida cero como $\mathscr{N} = \{A \subset \Omega : \exists N \in \mathscr{F}$ con $\mu(N) = 0$ y $A \subset N\}$, entonces $\mathscr{F}_t^\xi = \sigma(\{\xi_s : s \leq t\} \cup \mathscr{N})$.

Definición 1.14. *El proceso de Lévy ξ se dice* **transitorio** *si, para todo $a > 0$,*

$$\int_0^\infty \mathbf{1}_{B_a}(\xi_t)dt < \infty \ \ c.s.,$$

y **recurrente** *si, para todo $a > 0$,*

$$\int_0^\infty \mathbf{1}_{B_a}(\xi_t)dt = \infty \ \ c.s.$$

De la definición anterior es claro que ξ *no* puede ser transitorio y recurrente al mismo tiempo, aún mejor, una propiedad dicotómica de los procesos de Lévy es que éstos *siempre* satisfacen ser transitivos o recurrentes ([Sat99, sección 7.35]). El siguiente criterio clásico para el caso unidimensional es debido a Chung y Fuchs [CF51].

Teorema 1.15. *Sea ξ un proceso de Lévy. Si la media $\mathbb{E}[\xi_1]$ está definida, es decir, $\mathbb{E}\left[\xi_1^+\right] < \infty$ ó $\mathbb{E}\left[\xi_1^-\right] < \infty$, entonces*

$$\xi \ \text{ es recurrente si y solo si } \ \mathbb{E}[\xi_1] = 0.$$

Luego,

$$\xi \ \text{ es transitorio si y solo si } \ \mathbb{E}[\xi_1] \neq 0.$$

En términos del comportamiento asintótico de ξ en infinito, la dicotomía anterior tiene las siguientes implicaciones (ver [Sat99, sección 7.37]).

Proposición 1.16. *Sea ξ un proceso de Lévy no idénticamente cero. Entonces*

I. *Si ξ es recurrente,*

$$\limsup_{t\to\infty} \xi_t = -\liminf_{t\to\infty} \xi_t = \infty, \quad c.s.$$

II. *Si ξ es transitorio, los siguientes casos son posibles*

a) $\lim_{t\to\infty} \xi_t = \infty$ *c.s.*
b) $\lim_{t\to\infty} \xi_t = -\infty$ *c.s.*
c) $\limsup_{t\to\infty} \xi_t = -\liminf_{t\to\infty} \xi_t = \infty$ *c.s.*

Se usará la siguiente terminología para las propiedades de la proposición anterior. Un proceso de Lévy no idénticamente cero, deriva a mas infinito si a) se cumple, deriva a menos infinito si sucede b) y se dirá que el proceso oscila si se cumple c). Combinando el teorema 1.15 y la proposición 1.16 se tiene el siguiente resultado.

Proposición 1.17. *Supóngase que la media $\mathbb{E}[\xi_1]$ está definida. Entonces*

I. *si* $\mathbb{E}[\xi_1] = 0$, $\limsup_{t\to\infty} \xi_t = -\liminf_{t\to\infty} \xi_t = \infty$ *c.s.*

II. *si* $\mathbb{E}[\xi_1] > 0$, $\lim_{t\to\infty} \xi_t = \infty$ *c.s. y*

III. *si* $\mathbb{E}[\xi_1] < 0$, $\lim_{t\to\infty} \xi_t = -\infty$ *c.s.*

Demostración. Ya que $\mathbb{E}[\xi_1]$ está definida, por la ley fuerte de los grandes números para procesos de Lévy (teoremas 36.5 y 36.6 de [Sat99]), se tiene que

$$\lim_{t\to\infty} \frac{\xi_t}{t} = \mathbb{E}[\xi_1], \text{ c.s.} \tag{1.6}$$

Si $\mathbb{E}[\xi_1] = 0$, el teorema 1.15 afirma que ξ es un proceso recurrente y en este caso la proposición 1.16 dice que

$$\limsup_{t\to\infty} \xi_t = -\liminf_{t\to\infty} \xi_t = \infty, \text{ c.s.}$$

Si $0 < \mathbb{E}[\xi_1] \le \infty$, de (1.6) es claro que para todo $\omega \in \{\omega \in \Omega : \lim_{t\to\infty} \xi_t(\omega)/t = \mathbb{E}[\xi_1]\}$, existen reales estrictamente positivos M_ω y t_ω tales que para todo $t \ge t_\omega$

$$M_\omega\, t < \xi_t(\omega),$$

por lo tanto, $\lim_{t\to\infty} \xi_t(\omega) = \infty$. Como el conjunto $\{\omega \in \Omega : \lim_{t\to\infty} \xi_t(\omega)/t = \mathbb{E}[\xi_1]\}$ es de probabilidad uno, ξ deriva a mas infinito c.s. Un argumento similar demuestra el inciso III.

□

El teorema 1.15 contempló un criterio de recurrencia y transitoriedad cuando la media $\mathbb{E}[\xi_1]$ está definida; si no está definida, se tiene el siguiente resultado (ver [Don07, teorema 15] o [Kyp06, teorema 7.2]).

Teorema 1.18 (Erickson). *Sea ξ un proceso de Lévy con $\mathbb{E}\left[\xi_1^+\right] = \mathbb{E}\left[\xi_1^-\right] = \infty$. Entonces uno de los siguientes casos se cumple*

I. $\xi_t \to \infty$ *c.s.*, $t^{-1}\xi_t \to \infty$ *c.s., cuando* $t \to \infty$ *y*

$$A^+ = \int_{(-\infty,-1)} \frac{|x|\Pi(dx)}{\int_0^{|x|} \Pi(y,\infty)dy} < \infty.$$

II. $\xi_t \to -\infty$ *c.s.*, $t^{-1}\xi_t \to -\infty$ *c.s., cuando* $t \to \infty$ *y*

$$A^- = \int_{(1,\infty)} \frac{x\Pi(dx)}{\int_0^{x} \Pi(-\infty,-y)dy} < \infty.$$

III. *Si* $A^+ = A^- = \infty$, ξ *oscila, i.e.*

$$\limsup_{t\to\infty} \xi_t = -\liminf_{t\to\infty} \xi_t = \infty \text{ c.s.}$$

1.2. Momentos exponenciales y martingalas

Antes de pasar a definir los momentos exponenciales de un proceso de Lévy, de manera general, se introduce a continuación el concepto de g-momento asociado a una distribución μ.

Definición 1.19. *Sean g una función medible no negativa y μ una medida en $\mathbb{R}$. El* g-**momento** *de la medida μ se define como el número real (posiblemente infinito)*

$$\int_{\mathbb{R}} g(x)\mu(dx).$$

Análogamente, $\mathbb{E}[g(X)]$ es el g-momento de la variable aleatoria real X.

Una función g es llamada submultiplicativa si es no negativa y existe una constante $c>0$ tal que

$$g(x+y) \leq cg(x)g(y), \quad \forall x,y \in \mathbb{R}. \tag{1.7}$$

Una función acotada en cada conjunto compacto es llamada localmente acotada. El siguiente teorema proporciona un criterio para garantizar la finitud de los g-momentos $\mathbb{E}[g(\xi_t)]$, para todo $t \geq 0$.

Teorema 1.20. *(*g-**Momentos***) Sea g una función medible, submultiplicativa y localmente acotada. Entonces*

$$\mathbb{E}[g(\xi_t)] < \infty, \quad \forall t \geq 0, \quad \textit{si y solo si} \quad \int_{|x|\geq 1} g(x)\Pi(dx) < \infty.$$

Es decir, ξ_t tiene g-momento finito, para todo $t \geq 0$, si y solo si $\Pi|_{\{|x|\geq 1\}}$ tiene g-momento finito.

Demostración. Ver [Sat99, pág. 159] □

La siguiente proposición muestra la gran utilidad del teorema anterior.

Proposición 1.21.

I. *El producto de dos funciones submultiplicativas es submultiplicativa.*

II. *Si $g(x)$ es submultiplicativa entonces también lo es $g(dx+\gamma)^{\alpha}$ con $d,\gamma \in \mathbb{R}$ y $\alpha > 0$.*

III. *Si $\alpha > 0$ y $\beta \in (0,1]$, las siguientes funciones son submultiplicativas: $x \vee 1$, $x^{\alpha} \vee 1$, $|x| \vee 1$, $|x|^{\alpha} \vee 1$, $\exp(|x|^{\beta})$, $\log(|x| \vee e)$, $\log\log(|x| \vee e^{e})$.*

Demostración. I. Si g_1 y g_2 son dos funciones submultiplicativas, el producto $g_1 g_2$ es una función no negativa y además

$$g_1g_2(x+y) := g_1(x+y)g_2(x+y) \leq c_1c_2g_1(x)g_1(y)g_2(x)g_2(y) = [c_1c_2]g_1g_2(x)g_1g_2(y).$$

II. Sea g una función submultiplicativa, i.e. $g(x+y) \leq cg(x)g(y)$. Sean además $g_1(x) = g(dx)$, $g_2(x) = g(x+\gamma)$ y $g_3(x) = g(x)^\alpha$. Se sigue de (1.7) que

$$g_1(x+y) \leq cg_1(x)g_1(y), \quad g_2(x+y) \leq [c^2 g(-\gamma)]g_2(x)g_2(y)$$
$$g_3(x+y) \leq c^\alpha g_3(x)g_3(y),$$

por lo tanto, la composición $g(cx+\gamma)^\alpha$ es una función submultiplicativa.

III. Sea h una función en $\mathbb{R}$, positiva y no decreciente, tal que para algún $b \geq 0$, $h(x)$ es constante en $(-\infty, b]$ y $\log h(x)$ es cóncava en $[b, \infty)$. Se demostrará que h es una función submultiplicativa. Para $x, y \geq b$, la función $f(x) = \log h(x)$ satisface

$$f(x+b) - f(x) \leq f(2b) - f(b),$$
$$f(x+y) - f(y) \leq f(x+b) - f(b),$$

y por lo tanto

$$f(x+y) \leq f(x+b) - f(b) + f(y) \leq f(2b) - 2f(b) + f(x) + f(y),$$

lo que muestra

$$h(x+y) \leq D\, h(x)h(y) \tag{1.8}$$

con D constante. Luego, (1.8) se cumple para todo $x, y \in \mathbb{R}$ y h es una función submultiplicativa. Ya que las funciones $x \vee 1$, $x^\alpha \vee 1$ satisfacen las condiciones impuestas en la función h, se obtiene el resultado.

□

En particular, cuando se consideran las funciones $g(x) = e^{\lambda x}$ con $\lambda \in \mathbb{R}$, los g-momentos de las variables aleatorias ξ_t, $t \geq 0$, son comúnmente conocidos como los **momentos exponenciales** del proceso de Lévy ξ. Considérese el conjunto

$$C = \left\{ \lambda \in \mathbb{R} : \mathbb{E}[e^{\lambda \xi_t}] < \infty,\ \forall t \geq 0 \right\}. \tag{1.9}$$

Ya que $g(x) = e^{\lambda x}$ es una función medible, submultiplicativa y localmente acotada, del teorema 1.20 se desprende inmediatamente el siguiente corolario.

Corolario 1.22. *Para todo $\lambda \in \mathbb{R}$,*

$$\lambda \in C \quad \textit{si y solo si} \quad \int_{|x| \geq 1} e^{\lambda x} \Pi(dx) < \infty.$$

El conjunto C es no vacío pues siempre se cumple que $0 \in C$ y además es un conjunto convexo ya que si $\lambda_1, \lambda_2 \in C$, entonces para todo $\delta \in (0,1)$ se tiene por la desigualdad de Hölder

$$\mathbb{E}\left[e^{(\delta\lambda_1 + (1-\delta)\lambda_2)\xi_t}\right] \leq \mathbb{E}\left[e^{\lambda_1 \xi_t}\right]^\delta \mathbb{E}\left[e^{\lambda_2 \xi_t}\right]^{1-\delta} < \infty,\ \ \forall t \geq 0. \tag{1.10}$$

Esto implica que C es necesariamente un intervalo de la recta real que contiene al origen. Este conjunto C resultará muy útil para estudiar el exponente característico del proceso de Lévy asociado y por lo tanto, para conocer algunas propiedades asociadas al proceso. La siguiente proposición permite extender precisamente el concepto de exponente característico introducido en la sección anterior.

Proposición 1.23. *Sea ξ un proceso de Lévy con características (a,σ,Π) y C el conjunto que se definió en (1.9). Si $z\in\mathbb{C}$ es tal que $\Re(z)\in C$, entonces la expresión*

$$\varphi(z) = az + \frac{1}{2}\sigma^2 z^2 + \int_{\mathbb{R}} (e^{zx} - 1 - zx\mathbf{1}_{\{|x|\leq 1\}})\Pi(dx)$$

está bien definida, $\mathbb{E}[|e^{z\xi_t}|] < \infty$ para todo $t \geq 0$ y

$$\mathbb{E}[e^{z\xi_t}] = e^{t\varphi(z)}.$$

Demostración. Ver [Sat99, pág. 165].

□

Si $D = \{z\in\mathbb{C} : \Re(z)\in C\}$ entonces a la función $\varphi : D \to \mathbb{C}$ definida en la proposición anterior se le conoce como el **exponente de Laplace** del proceso de Lévy ξ, además, ya que para toda $z\in D$

$$\begin{aligned}\varphi(z) &= az + \frac{1}{2}\sigma^2 z^2 + \int_{\mathbb{R}} (e^{zx} - 1 - zx\mathbf{1}_{\{|x|\leq 1\}})\Pi(dx)\\ &= ia(-iz) - \frac{1}{2}\sigma^2(-iz)^2 + \int_{\mathbb{R}} (e^{i(-iz)x} - 1 - i(-iz)x\mathbf{1}_{\{|x|\leq 1\}})\Pi(dx)\\ &= -\Psi(-iz),\end{aligned} \tag{1.11}$$

esta función puede entenderse como una extensión del exponente característico Ψ al conjunto $\{z\in\mathbb{C} : -\Im(z)\in C\}$. Obviamente $C\subset D$ por lo que abusando de la notación se denotará por la misma letra φ a la restricción de φ en el conjunto C, y también se le llamará exponente de Laplace. Con esto en mente, φ es una función con dominio $C\subset\mathbb{R}$ y codominio $\mathbb{R}$ tal que para todo $\lambda\in C$

$$\varphi(\lambda) = a\lambda + \frac{1}{2}\sigma^2\lambda^2 + \int_{\mathbb{R}} (e^{\lambda x} - 1 - \lambda x\mathbf{1}_{\{|x|\leq 1\}})\Pi(dx) \in \mathbb{R}$$

y

$$\mathbb{E}[e^{\lambda\xi_t}] = e^{t\varphi(\lambda)}. \tag{1.12}$$

Si además se define $\varphi(\lambda) = \infty$ para $\lambda\notin C$, entonces $\varphi : \mathbb{R}\to\mathbb{R}\cup\{\infty\}$ es una función que satisface (1.12) para toda $\lambda\in\mathbb{R}$. Nótese que en términos del exponente de Laplace, la discusión anterior implica que el conjunto C de (1.9) también puede escribirse como

$$C = \{\lambda\in\mathbb{R} : \varphi(\lambda) < \infty\}.$$

Observación 1.24. *Cuando $\xi = \sigma$ es un subordinador, se dijo en la sección anterior que $\Pi((-\infty,0)) = 0$, por lo tanto para todo $\lambda \geq 0$*

$$\int_{|x|\geq 1} e^{-\lambda x}\Pi(dx) = \int_{[1,\infty)} e^{-\lambda x}\Pi(dx) < \infty,$$

es decir, $(-\infty,0] \subset C$ y $\varphi(-\lambda) < \infty$ para todo $\lambda \geq 0$. Para seguir con la convención de la mayoría de la literatura, en este único caso se definirá el exponente de Laplace φ_σ, del subordinador σ, como

$$\varphi_\sigma(\lambda) := -\varphi(-\lambda), \ \ \forall \lambda \geq 0,$$

y es entonces la única función que satisface $\mathbb{E}\left[e^{-\lambda\sigma_1}\right] = e^{-\varphi_\sigma(\lambda)}$, para todo $\lambda \geq 0$.

Algunas propiedades útiles del exponente de Laplace φ se describen a continuación. Lo primero que vale la pena mencionarse es que φ es una función estrictamente convexa en C, esto como consecuencia de que C es un conjunto convexo y por (1.10) y (1.12), se tiene

$$e^{t\varphi(\delta\lambda_1+(1-\delta)\lambda_2)} \leq e^{t\delta\varphi(\lambda_1)}e^{t(1-\delta)\varphi(\lambda_2)},$$

por lo que

$$\varphi(\delta\lambda_1 + (1-\delta)\lambda_2) \leq \delta\varphi(\lambda_1) + (1-\delta)\varphi(\lambda_2), \tag{1.13}$$

con igualdad si y solo si $\delta \in \{0,1\}$. Otra cosa importante es que φ es infinitamente diferenciable en el interior de C, con derivadas dadas por

$$\begin{aligned}
\varphi^{(1)}(\lambda) &= a + \sigma^2\lambda + \int_{\mathbb{R}} (xe^{\lambda x} - x\mathbf{1}_{\{|x|\leq 1\}})\Pi(dx) \\
\varphi^{(2)}(\lambda) &= \sigma^2 + \int_{\mathbb{R}} x^2 e^{\lambda x}\Pi(dx) \\
\varphi^{(n)}(\lambda) &= \int_{\mathbb{R}} x^n e^{\lambda x}\Pi(dx), \ \ n \geq 3.
\end{aligned}$$

Los elementos del conjunto C dan la posibilidad de hacer cambios de medida mediante la construcción de martingalas. Lo que se pretende es pasar de la medida $\mathbb{P}$ a otra medida $\mathbb{P}^\lambda$, bajo la cual ξ continúe siendo un proceso de Lévy. Para esto, es necesario el siguiente lema.

Lema 1.25. *Si $\lambda \in C$ y se denota por $M(\lambda)$ al proceso*

$$M_t(\lambda) := e^{\lambda\xi_t - t\varphi(\lambda)}, \ \forall t \geq 0,$$

entonces, $M(\lambda)$ es una martingala.

Demostración. Sea $(\mathscr{F}_t : t \geq 0)$ la filtración natural del proceso ξ (). Por la proposición 1.23, $M_t(\lambda)$ es integrable para todo $t \geq 0$. Por la propiedad de incrementos independientes y estacionarios del proceso de Lévy ξ es posible hacer los siguientes cálculos para $s \leq t$

$$
\begin{aligned}
\mathbb{E}[M_t(\lambda)|\mathscr{F}_s] &= \mathbb{E}[e^{\lambda\xi_t - t\varphi(\lambda)}|\mathscr{F}_s] \\
&= \mathbb{E}[e^{\lambda(\xi_t - \xi_s + \xi_s) - t\varphi(\lambda)}|\mathscr{F}_s] \\
&= e^{\lambda\xi_s - s\varphi(\lambda)}\mathbb{E}[e^{\lambda(\xi_t - \xi_s) - (t-s)\varphi(\lambda)}|\mathscr{F}_s] \\
&= e^{\lambda\xi_s - s\varphi(\lambda)}\mathbb{E}[e^{\lambda(\xi_t - \xi_s) - (t-s)\varphi(\lambda)}] \\
&= e^{\lambda\xi_s - s\varphi(\lambda)}\mathbb{E}[e^{\lambda\xi_{t-s}}e^{-(t-s)\varphi(\lambda)}].
\end{aligned}
$$

Ahora bien, de la relación (1.12) se tiene que $\mathbb{E}[e^{\lambda\xi_{t-s}}] = e^{(t-s)\varphi(\lambda)}$, por lo tanto

$$
\mathbb{E}[e^{\lambda\xi_{t-s}}e^{-(t-s)\varphi(\lambda)}] = 1
$$

y finalmente

$$
\mathbb{E}[M_t(\lambda)|\mathscr{F}_s] = e^{\lambda\xi_s - s\varphi(\lambda)} = M_s(\lambda).
$$

□

Como se mencionó anteriormente, para trabajar con procesos de Lévy, en ocasiones es conveniente utilizar el espacio canónico $\mathbf{D} = D([0,\infty),\mathbb{R})$ de las funciones con dominio los reales no negativos y codominio $\mathbb{R}$, que son continuas por la derecha y que tienen límites por la izquierda; en este sentido, dada una medida de probabilidad $\mathbb{P}$ en $(\mathbf{D},\mathscr{F}_{\mathbf{D}})$, la dupla $(\xi,\mathbb{P})$ es un proceso de Lévy si bajo $\mathbb{P}$ el proceso de coordenadas ξ es un proceso de Lévy.

Por el lema 1.25, para cada $\lambda \in C$, el proceso $M(\lambda)$ es una martingala, por lo tanto existe una única medida de probabilidad $\mathbb{P}^{\lambda}$ en $(\mathbf{D},\mathscr{F}_{\mathbf{D}})$ tal que

$$
\mathbb{P}^{\lambda}|_{\mathscr{F}_t} = M_t(\lambda)\mathbb{P}|_{\mathscr{F}_t}, \;\; t \geq 0. \tag{1.14}
$$

Para ver esto, defínase la familia de medidas de probabilidad $\{\mathbb{P}^{\lambda}_t : t \geq 0\}$ como $\mathbb{P}^{\lambda}_t := M_t(\lambda)\mathbb{P}|_{\mathscr{F}_t}$, para cada $t > 0$, explícitamente

$$
\mathbb{P}^{\lambda}_t(A) = \mathbb{E}\left[\mathbf{1}_A M_t(\lambda)\right], \;\; \forall A \in \mathscr{F}_t.
$$

Esta familia es consistente ya que por la propiedad de martingala de $M(\lambda)$, para todos $s,t \geq 0$ y $A \in \mathscr{F}_t$

$$
\begin{aligned}
\mathbb{P}^{\lambda}_{t+s}(A) &= \mathbb{E}\left[\mathbf{1}_A M_{t+s}(\lambda)\right] \\
&= \mathbb{E}\left[\mathbf{1}_A M_t(\lambda)\right] = \mathbb{P}^{\lambda}_t(A),
\end{aligned}
$$

es decir, $\mathbb{P}^{\lambda}_{t+s}|_{\mathscr{F}_t} = \mathbb{P}^{\lambda}_t$. El teorema de extensión de Kolmogorov garantiza entonces la existencia y unicidad de una medida de probabilidad $\mathbb{P}^{\lambda}$ en $(\mathbf{D},\mathscr{F}_{\mathbf{D}})$ tal que se cumple (1.14).

Lo relevante de la descripción anterior es que bajo la medida de probabilidad $\mathbb{P}^{\lambda}$, ξ es nuevamente un proceso de Lévy.

Teorema 1.26. *Sea $(\xi,\mathbb{P})$ un proceso de Lévy con características (a,σ,Π) y $\lambda\in C$, entonces $(\xi,\mathbb{P}^{\lambda})$ es un proceso de Lévy con características (a^*,σ^*,Π^*) donde*

$$a^*=a+\sigma^2\lambda+\int_{|x|<1}x(e^{\lambda x}-1)\Pi(dx),\qquad \sigma^*=\sigma\qquad y\qquad \Pi^*(dx)=e^{\lambda x}\Pi(dx).$$

Demostración. Sea $t>0$ fijo, ya que la densidad $M_t(\lambda)=e^{\lambda\xi_t-t\varphi(\lambda)}$ es positiva casi seguramente, entonces $\mathbb{P}$ y $\mathbb{P}^{\lambda}$ son medidas equivalentes en $\mathscr{F}_t$. Si para cada $t>0$ se define

$$A_t=\left\{\forall s\in(0,t],\ \exists\lim_{u\uparrow s}\xi_u\ \text{ y }\ \forall s\in[0,t),\ \lim_{u\downarrow s}\xi_u=\xi_s\right\},$$

entonces $\mathbb{P}^{\lambda}(A_t)=1$, para todo $t>0$, pues $\mathbb{P}(A_t)=1$ para todo $t>0$. Además, si $\{t_n:n\geq 1\}$ es una sucesión de números racionales estrictamente creciente y no acotada, se tiene que $\{A_{t_n}:n\geq 1\}$ es una sucesión decreciente tal que

$$\bigcap_{n\geq 1}A_{t_n}=\left\{\forall s\in(0,\infty),\ \exists\lim_{u\uparrow s}\xi_u\ \text{ y }\ \forall s\in[0,\infty),\ \lim_{u\downarrow s}\xi_u=\xi_s\right\},$$

y por lo tanto

$$\mathbb{P}^{\lambda}\left(\left\{\forall s\in(0,\infty),\ \exists\lim_{u\uparrow s}\xi_u\ \text{ y }\ \forall s\in[0,\infty),\ \lim_{u\downarrow s}\xi_u=\xi_s\right\}\right)=1.$$

Es decir, bajo la medida $\mathbb{P}^{\lambda}$, ξ tiene trayectorias continuas por la derecha con límites por la izquiera c.s.

Ahora, sean $0\leq u\leq s\leq t<\infty$ y $\beta\in\mathbb{R}$, se denotará por $\mathbb{E}^{\lambda}$ a la esperanza con respecto a la medida $\mathbb{P}^{\lambda}$. Ya que $(\xi,\mathbb{P})$ es un proceso de Lévy, para todo $B\in\mathscr{F}_u$ se tiene utilizando el lema 1.25 que

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}^{\lambda}\left[\mathbf{1}_B e^{i\beta(\xi_t-\xi_s)}\right] &= \mathbb{E}\left[\mathbf{1}_B e^{i\beta(\xi_t-\xi_s)}e^{\lambda\xi_t-t\varphi(\lambda)}\right]\\
&= \mathbb{E}\left[\mathbf{1}_B e^{\lambda\xi_s-s\varphi(\lambda)}e^{(i\beta+\lambda)(\xi_t-\xi_s)-(t-s)\varphi(\lambda)}\right]\\
&= \mathbb{E}\left[\mathbf{1}_B e^{\lambda\xi_s-s\varphi(\lambda)}\mathbb{E}\left[e^{(i\beta+\lambda)(\xi_t-\xi_s)-(t-s)\varphi(\lambda)}\middle|\mathscr{F}_s\right]\right]\\
&= \mathbb{E}\left[\mathbf{1}_B e^{\lambda\xi_s-s\varphi(\lambda)}\mathbb{E}\left[e^{(i\beta+\lambda)\xi_{t-s}-(t-s)\varphi(\lambda)}\right]\right]\\
&= \mathbb{E}\left[e^{(i\beta+\lambda)\xi_{t-s}-(t-s)\varphi(\lambda)}\right]\mathbb{E}\left[\mathbf{1}_B e^{\lambda\xi_s-s\varphi(\lambda)}\right]\\
&= \mathbb{E}\left[e^{(i\beta+\lambda)\xi_{t-s}-(t-s)\varphi(\lambda)}\right]\mathbb{E}\left[\mathbf{1}_B e^{-s\varphi(\lambda)}\mathbb{E}\left[e^{\lambda\xi_s}\middle|\mathscr{F}_u\right]\right]\\
&= \mathbb{E}\left[e^{(i\beta+\lambda)\xi_{t-s}-(t-s)\varphi(\lambda)}\right]\mathbb{E}\left[\mathbf{1}_B e^{\lambda\xi_u-u\varphi(\lambda)}\mathbb{E}\left[e^{\lambda(\xi_s-\xi_u)-(s-u)\varphi(\lambda)}\middle|\mathscr{F}_u\right]\right]\\
&= \mathbb{E}\left[e^{(i\beta+\lambda)\xi_{t-s}-(t-s)\varphi(\lambda)}\right]\mathbb{E}\left[e^{\lambda\xi_{s-u}-(s-u)\varphi(\lambda)}\right]\mathbb{E}\left[\mathbf{1}_B e^{\lambda\xi_u-u\varphi(\lambda)}\right]\\
&= \mathbb{E}\left[e^{(i\beta+\lambda)\xi_{t-s}-(t-s)\varphi(\lambda)}\right]\mathbb{P}^{\lambda}(B)\\
&= \mathbb{E}^{\lambda}\left[e^{i\beta\xi_{t-s}}\right]\mathbb{P}^{\lambda}(B),
\end{aligned}$$

Por lo tanto, bajo $\mathbb{P}^{\lambda}$, ξ tiene incrementos independientes y estacionarios, luego, $(\xi, \mathbb{P}^{\lambda})$ es un proceso de Lévy.

Finalmente, al tomar $B = \mathbb{R}$, $t = 1$ y $s = 0$ en los cálculos anteriores, se obtiene que

$$\mathbb{E}^{\lambda}[e^{i\beta\xi_1}] = \mathbb{E}[e^{(i\beta+\lambda)\xi_1-\varphi(\lambda)}] = e^{-\varphi(\lambda)}\mathbb{E}[e^{(i\beta+\lambda)\xi_1}],$$

por lo que la proposición 1.23 permite escribir

$$\mathbb{E}^{\lambda}\left[e^{i\beta\xi_1}\right] = e^{-\varphi(\lambda)+\varphi(i\beta+\lambda)},$$

luego, por las observaciones hechas en (1.11), el exponente característico de ξ bajo la medida $\mathbb{P}^{\lambda}$ está dado por

$$\Psi_{\lambda}(\beta) = \varphi(\lambda) - \varphi(i\beta+\lambda) = -\Psi(-i\lambda) + \Psi(\beta - i\lambda), \ \ \forall \beta \in \mathbb{R},$$

donde Ψ es el exponente característico de ξ bajo $\mathbb{P}$. Si se escribe explícitamente el exponente Ψ en términos de su tripleta (a, σ, Π), después de algunos cálculos algebraicos se llega a que

$$\begin{aligned}\Psi_{\lambda}(\beta) = -i\beta\left(a + \sigma^2\lambda + \int_{|x|<1} x(e^{\lambda x}-1)\Pi(dx)\right) + \frac{1}{2}\sigma^2\beta^2 \\ + \int_{\mathbb{R}}(1 - e^{i\beta x} + i\beta x \mathbf{1}_{\{|x|<1\}})e^{\lambda x}\Pi(dx), \ \ \beta \in \mathbb{R}\end{aligned}$$

por lo que la tripleta (a^*, σ^*, Π^*) del proceso de Lévy $(\xi, \mathbb{P}^{\lambda})$ es como se indica en el enunciado del teorema.

□

1.3. Condición de Cramér y ejemplos

En la sección anterior se definió el conjunto C como el conjunto de todos los números reales λ tales que el proceso de Lévy ξ tiene g_{λ}-momento finito, con $g_{\lambda}(x) = e^{\lambda x}$. En particular, se tiene la siguiente definición.

Definición 1.27. *Se dice que el proceso ξ satisface la* **condición de Cramér** *si existe $\theta > 0$ tal que*

$$\mathbb{E}\left[e^{\theta\xi_1}\right] = 1. \tag{1.15}$$

Al número positivo θ se le llamará índice de Cramér.

Por la definición anterior es claro que $\theta \in C$ y, en términos del exponente de Laplace φ de ξ, (1.15) se cumple si y solo si $\varphi(\theta) = 0$.

Supóngase entonces que ξ satisface la condición de Cramér (1.15), por lo visto en la sección anterior, al ser C un conjunto convexo se tiene $[0, \theta] \subset C$ y entonces $\varphi(\lambda) \in \mathbb{R}$ al menos para $\lambda \in [0, \theta]$, además, θ es el único número real que satisface $\varphi(\theta) = 0$ pues φ es estrictamente convexa en C.

Ya que φ es infinitamente diferenciable en el interior de C, lo es en $(0,\theta)$ y también es derivable por la derecha en 0 y por la izquierda en θ como lo indica el siguiente lema.

Lema 1.28. *Si ξ satisface (1.15) entonces*

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[\xi_1] &= \varphi'(0+) \in [-\infty,0) \\ \mathbb{E}[\xi_1 e^{\theta\xi_1}] &= \varphi'(\theta-) \in (0,\infty]. \end{aligned}$$

Demostración. La primera afirmación es directa pues

$$\mathbb{E}[\xi_1] = \frac{d}{dt}\mathbb{E}\left[e^{t\xi_1}\right]\Big|_{t=0+} = \frac{d}{dt}e^{\varphi(t)}\Big|_{t=0+} = \varphi'(0+)e^{\varphi(0+)} = \varphi'(0+),$$

que $\varphi'(0+) \in [-\infty,0)$ es consecuencia de la convexidad estricta de φ en $[0,\theta]$.

Para la segunda afirmación, considérese la medida $\mathbb{P}^\theta$ del teorema 1.26, con la misma notación, $(\xi,\mathbb{P}^\theta)$ es un proceso de Lévy con medida de Lévy dada por $\Pi^*(dx) = e^{\theta x}\Pi(dx)$ y si $t \in [-\theta,0]$ entonces

$$\int_{|x|\geq 1} e^{tx}\Pi^*(x) = \int_{|x|\geq 1} e^{(t+\theta)x}\Pi(dx) < \infty,$$

así, para $t \in [-\theta,0]$ el exponente de Laplace de ξ bajo $\mathbb{P}^\theta$ está dado por

$$\begin{aligned} \varphi_\theta(t) = -\Psi_\theta(-it) &= \Psi(-it) - \Psi(-it-i\theta) \\ &= \Psi(-it) - \Psi(-i(t+\theta)) \\ &= \varphi(t+\theta) - \varphi(\theta) \\ &= \varphi(t+\theta), \end{aligned}$$

por lo que

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[\xi_1 e^{\theta\xi_1}] = \mathbb{E}^\theta[\xi_1] &= \frac{d}{dt}\mathbb{E}^\theta\left[e^{t\xi_1}\right]\Big|_{t=0-} \\ &= \frac{d}{dt}e^{\varphi_\theta(t)}\Big|_{t=0-} \\ &= \frac{d}{dt}e^{\varphi(t+\theta)}\Big|_{t=0-} \\ &= \varphi'(\theta-)e^{\varphi(\theta-)} \\ &= \varphi'(\theta-). \end{aligned}$$

Nuevamente, que $\varphi'(\theta-) \in (0,\infty]$ es consecuencia de la convexidad estricta de φ en $[0,\theta]$. □

Ya que los procesos de Lévy que satisfacen la condición de Cramér serán aquellos para los cuales se estudiarán algunas propiedades distribucionales en los capítulos 3 y 4, a continuación se dan ejemplos de procesos que cumplen esta condición, en la mayoría de ellos se da de manera explícita el exponente de Laplace correspondiente así como su dominio.

1.3.1. Procesos de Lévy espectralmente negativos

Se dice que ξ es un proceso de Lévy espectralmente negativo si su medida de Lévy tiene soporte en $(-\infty,0)$, es decir, $\Pi(0,\infty)=0$. Por la descomposición de Lévy-Itô, la medida de Lévy está asociada a los saltos del proceso, por lo tanto, si ξ es espectralmente negativo, entonces el proceso no tiene saltos positivos.

Siempre que se hable de un proceso de Lévy espectralmente negativo se excluirá el caso en que ξ tenga trayectorias monótonas c.s., es decir, cuando $\xi=-\sigma$ con σ un subordinador. Debe notarse que bajo esta definición, un movimiento browniano lineal es un proceso de Lévy espectralmente negativo. Las siguientes propiedades se desprenden inmediatamente de la definición.

Lema 1.29. *Sea ξ espectralmente negativo con características (a,σ,Π) y φ su exponente de Laplace, entonces*

I. $[0,\infty)\subset\{\lambda\in\mathbb{R}:\varphi(\lambda)<\infty\}=C$.

II. *Para cada $\lambda\geq 0$, $\varphi(\lambda)$ tiene la forma*

$$\varphi(\lambda)=a\lambda+\frac{1}{2}\sigma^2\lambda^2+\int_{(-\infty,0)}(e^{\lambda x}-1-\lambda x\mathbf{1}_{\{x>-1\}})\Pi(dx).$$

III. $\varphi(\lambda)\to\infty$ *cuando* $\lambda\to\infty$.

IV. *Si* $\lim_{t\to\infty}\xi_t=-\infty$ *entonces ξ satisface la condición de Cramér.*

Demostración. I. Por el colorario 1.22 basta notar que para todo $\lambda\geq 0$

$$\int_{|x|\geq 1}e^{\lambda x}\Pi(dx)=\int_{(-\infty,-1]}e^{\lambda x}\Pi(dx)\leq\Pi((-\infty,-1])<\infty.$$

El inciso II es una consecuencia inmediata de la proposición 1.23. Para el inciso III, ya que ξ no es el negativo de un subordinador, entonces $\mathbb{P}(\xi_1>0)>0$ y entonces

$$e^{\varphi(\lambda)}=\mathbb{E}\left[e^{\lambda\xi_1}\right]\geq\mathbb{E}\left[e^{\lambda\xi_1}\mathbf{1}_{\{\xi_1>0\}}\right].$$

Luego, al utilizar el lema de Fatou se tiene

$$\liminf_{\lambda\to\infty}e^{\varphi(\lambda)}\geq\liminf_{\lambda\to\infty}\mathbb{E}\left[e^{\lambda\xi_1}\mathbf{1}_{\{\xi_1>0\}}\right]\geq\mathbb{E}\left[\liminf_{\lambda\to\infty}e^{\lambda\xi_1}\mathbf{1}_{\{\xi_1>0\}}\right]=\infty$$

por lo que $\varphi(\lambda)$ tiene a infinito cuando λ también lo hace.

IV. Ya que el exponente de Laplace está definido en el conjunto $[0,\infty)$, de manera similar a la demostración del lema 1.28, es posible asegurar que la media de ξ_1 está definida y

$$\mathbb{E}[\xi_1]=\varphi'(0+).$$

Ahora bien, como ξ deriva a menos infinito c.s., por la proposición 1.17 se tiene necesariamente que $\varphi'(0+)=\mathbb{E}[\xi_1]<0$. Esta última condición junto con la propiedad de convexidad estricta del exponente de Laplace y el inciso III, garantizan que φ cruce el eje real en algún $\theta>0$, es decir, $\varphi(\theta)=0$.

$\square$

Los dos ejemplos siguientes son casos particulares de procesos de Lévy espectralmente negativos y por lo tanto las afirmaciones del lema anterior son válidas en estos casos, sin embargo, debido a su importancia y utilidad se estudian en secciones independientes.

Movimiento browniano lineal

Se desarrollan a continuación de manera explícita algunos de los términos y constantes involucrados en el lema 1.29 para el caso particular de un movimiento browiano lineal. Sea $B = \{B_t : t \geq 0\}$ un movimiento browniano estándar con valores reales, B es un proceso de Lévy y si $\sigma \neq 0$ y $d \in \mathbb{R}$, el proceso $\xi = \{\xi_t : t \geq 0\}$ definido por

$$\xi_t := \sigma B_t + dt,\ t \geq 0, \tag{1.16}$$

es llamado movimiento browniano lineal. ξ es un proceso de Lévy ya que por las propiedades respectivas de B, tiene incrementos independientes y estacionarios así como trayectorias continuas c.s. Por los resultados de la sección 1.1, la distribución de $\xi_1 = \sigma B_1 + d$ es infinitamente divisible y como $\xi_1 \sim N(d, \sigma^2)$, es conocido que

$$\mathbb{E}[e^{i\lambda\xi_1}] = e^{id\lambda - \frac{1}{2}\sigma^2\lambda^2} = e^{-(-id\lambda + \frac{1}{2}\sigma^2\lambda^2)},$$

por lo que el exponente característico de ξ es

$$\Psi(\lambda) = -id\lambda + \frac{1}{2}\sigma^2\lambda^2, \quad \lambda \in \mathbb{R}. \tag{1.17}$$

Entonces, sus características son $a = d$, $\sigma = \sigma$ y $\Pi \equiv 0$.

Lema 1.30. *Sea $\xi_t = \sigma B_t + dt$, $t \geq 0$ con $\sigma > 0$ y $d \in \mathbb{R}$, entonces*

I. $\mathbb{R} = \{\lambda \in \mathbb{R} : \varphi(\lambda) < \infty\} = C$

II. *Para $\lambda \in \mathbb{R}$, el exponente de Laplace de ξ está dado por*

$$\varphi(\lambda) = d\lambda + \frac{1}{2}\sigma^2\lambda^2.$$

III. *El proceso ξ satisface la condición de Cramér si y solo si $d < 0$, en este caso, el único $\theta > 0$ tal que $\varphi(\theta) = 0$ está dado por*

$$\theta = -\frac{2d}{\sigma^2}.$$

Demostración. I. Ya que $\Pi \equiv 0$ entonces

$$\int_{|x|\geq 1} e^{\lambda x}\Pi(dx) < \infty,\ \forall\lambda \in \mathbb{R},$$

luego, $\mathbb{R} = C$. Las relaciones (1.11) y (1.17) permiten escribir el exponente de Laplace de ξ como

$$\varphi(\lambda) = -\Psi(-i\lambda) = id(-i\lambda) - \frac{1}{2}\sigma^2(-i\lambda)^2 = d\lambda + \frac{1}{2}\sigma^2\lambda^2,$$

lo cual es el inciso II. Para el inciso III es suficiente utilizar la expresión para el exponente de Laplace que se obtuvo en el inciso anterior y observar que

$$\begin{aligned}\varphi(\theta) = 0 &\iff d\theta + \frac{1}{2}\sigma^2\theta^2 = 0 \\ &\iff \theta(d + \frac{1}{2}\sigma^2\theta) = 0 \\ &\iff \theta = 0 \text{ ó } d + \frac{1}{2}\sigma^2\theta = 0 \\ &\iff \theta = 0 \text{ ó } \theta = -\frac{2d}{\sigma^2},\end{aligned}$$

por lo que ξ satisface la condición de Cramér si y solo si $-\frac{2d}{\sigma^2} > 0$ si y solo si $d < 0$.

$\square$

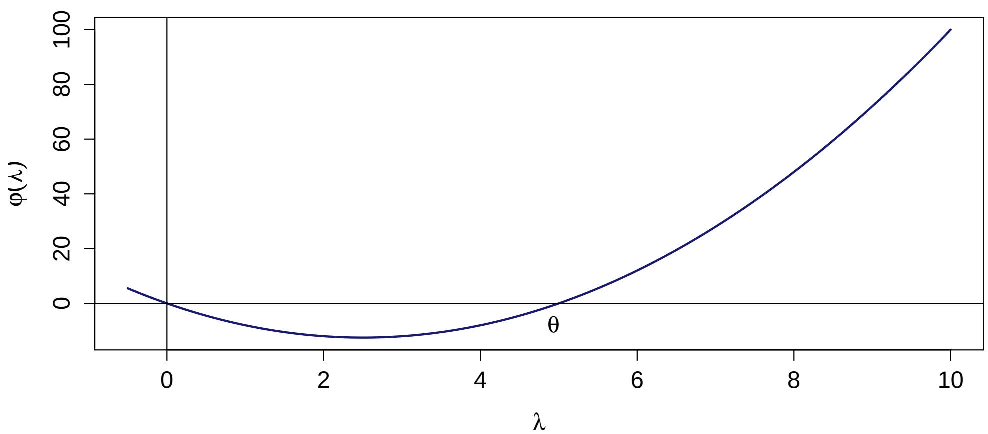

Figura 1.1: Exponente de Laplace de un movimiento browniano lineal $\sigma B_t + dt$ con $d = -10$ y $\sigma = 2$. En este caso $\theta = -2d/\sigma^2 = 5$.

Procesos con trayectorias de variación acotada

Cuando se definieron los procesos de Lévy espectralmente negativos se hizo la aclaración que no se considerarían procesos con trayectorias monótonas c.s., esto implica que no se consideran procesos de la forma $\xi = -\sigma$ con σ un subordinador. A pesar de lo anterior, aún es posible tener procesos de Lévy espectralmente negativos que involucren al negativo de un subordinador, esto se consigue agregándole un término de deriva positiva al proceso, específicamente, en esta sección se considerarán procesos de la forma

$$\xi_t = dt - \sigma_t, \; t \geq 0,$$

donde σ es un subordinador sin deriva y $d > 0$, es claro que en este caso ξ sí es un proceso espectralmente negativo y las afirmaciones del lema 1.29 son válidas.

Lema 1.31. *Sea $\xi_t = dt - \sigma_t$, $t \geq 0$, donde σ es un subordinador sin deriva y $d > 0$. Entonces*

I. *El exponente de Laplace φ de ξ está dado para cada $\lambda \geq 0$ por*

$$\varphi(\lambda) = \lambda d - \varphi_\sigma(\lambda),$$

donde φ_σ es el exponente de Laplace del subordinador σ.

II. *Si $\mathbb{E}[\sigma_1] > d$ entonces ξ satisface la condición de Cramér.*

Demostración. I. Ya que ξ es espectralmente negativo, entonces, por el lema 1.29, su exponente de Laplace φ está dado para todo $\lambda \geq 0$ por

$$\begin{aligned} e^{\varphi(\lambda)} = \mathbb{E}[e^{\lambda \xi_1}] &= \mathbb{E}[e^{\lambda(d-\sigma_1)}] \\ &= e^{\lambda d}\mathbb{E}[e^{-\lambda\sigma_1}] \\ &= e^{\lambda d}e^{-\varphi_\sigma(\lambda)} = e^{\lambda d - \varphi_\sigma(\lambda)}, \end{aligned}$$

es decir, $\varphi(\lambda) = \lambda d - \varphi_\sigma(\lambda)$. Para el inciso II, nótese que $\mathbb{E}[\sigma_1] > d$ si y solo si $\mathbb{E}[\xi_1] < 0$, en este caso, la proposición 1.17 afirma que el proceso ξ deriva a menos infinito y por el inciso IV del lema 1.29, ξ satisface la condición de Cramér, .

□

El considerar este tipo de procesos, brinda la posibilidad de utilizar distintos ejemplos de subordinadores para los cuales es posible trabajar analíticamente, por ejemplo subordinadores gama o subordinadores estables, por mencionar algunos. Para describir un ejemplo explícito, considérese σ un subordinador gama, es decir

$$\mathbb{P}(\sigma_1 \in dx) = \frac{\alpha^\beta}{\Gamma(\beta)} x^{\beta-1} e^{-\alpha x} dx$$

con $\alpha, \beta > 0$. Ya que

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[e^{-\lambda\sigma_1}] &= \int_0^\infty e^{-\lambda x} \frac{\alpha^\beta}{\Gamma(\beta)} x^{\beta-1} e^{-\alpha x} dx \\ &= \frac{\alpha^\beta}{\Gamma(\beta)} \int_0^\infty x^{\beta-1} e^{-(\lambda+\alpha)x} dx \\ &= \frac{\alpha^\beta}{\Gamma(\beta)} \frac{1}{(\lambda+\alpha)^\beta} \int_0^\infty u^{\beta-1} e^{-u} du \\ &= \frac{\alpha^\beta}{(\lambda+\alpha)^\beta}, \end{aligned}$$

entonces, el exponente de Laplace de σ es $\varphi_\sigma(\lambda) = -\beta \log(\alpha/(\lambda+\alpha))$, para todo $\lambda \geq 0$. Luego, el lema 1.31 afirma que el exponente de Laplace del proceso $\xi_t = dt - \sigma_t$, $t \geq 0$, se escribe como

$$\varphi(\lambda) = \lambda d + \beta \log\left(\frac{\alpha}{\lambda+\alpha}\right), \ \forall \lambda \geq 0,$$

donde, como se mencionó al inicio, se pide que $d > 0$. Finalmente, por el inciso II del lema 1.31, para que el proceso anterior satisfaga la condición de Cramér es suficiente que d sea estrictamente menor a la media de σ_1, y como $\mathbb{E}[\sigma_1] = \beta/\alpha$, entonces se puede concluír que el proceso $\xi_t = dt - \sigma_t$, con σ un subordinador gama, satisface la condición de Cramér si

$$\beta > \alpha d.$$

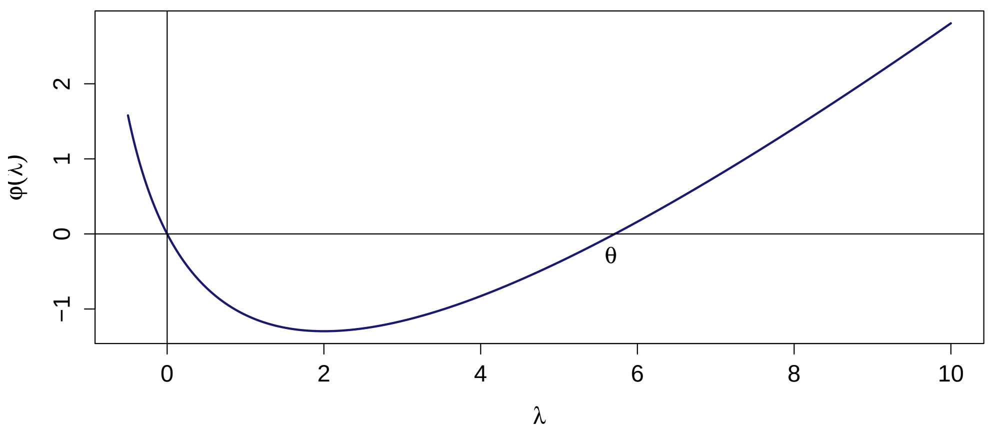

Figura 1.2: Exponente de Laplace de un proceso de la forma $dt - \sigma_t$ con σ un subordinador gamma. Los parámetros son $d = 1$, $\alpha = 1$ y $\beta = 3$.

1.3.2. Procesos estables temperados generalizados

Un **proceso estable temperado generalizado** es un proceso de Lévy con coeficiente gaussiano $\sigma = 0$ y medida de Lévy dada por

$$\Pi(dx) = \frac{c_1}{|x|^{1+\alpha_1}} e^{-\lambda_1|x|} \mathbf{1}_{\{x<0\}} dx + \frac{c_2}{x^{1+\alpha_2}} e^{-\lambda_2 x} \mathbf{1}_{\{x>0\}} dx \tag{1.18}$$

con $c_1, c_2 > 0$; $\alpha_1, \alpha_2 \in (-\infty, 2)$ y $\lambda_1, \lambda_2 > 0$. Estos procesos toman su nombre de los **procesos estables** que tienen medidas de Lévy de la forma

$$\Pi(dx) = \frac{c_1}{|x|^{1+\alpha}} \mathbf{1}_{\{x<0\}} dx + \frac{c_2}{x^{1+\alpha}} \mathbf{1}_{\{x>0\}} dx$$

con índice $\alpha \in (0, 2)$. Como puede notarse, los procesos estables temperados generalizados difieren principalmente de los anteriores en los términos exponenciales en la medida de Lévy, esto trae consigo algunas propiedades "buenas" que se describen en los siguientes dos lemas.

Lema 1.32. *Si ξ es un proceso estable con índice $\alpha \in (0,2)$ entonces, para $\beta \geq 0$, $\mathbb{E}[|\xi_t|^\beta] < \infty$ para todo $t \geq 0$ si y solo si $\beta \in [0,\alpha)$. Si ξ es un proceso estable temperado generalizado entonces*

$$\mathbb{E}[|\xi_t|^\beta] < \infty, \quad \forall \beta \geq 0.$$

Demostración. Sea $\beta > 0$, para ambos casos debe notarse que $\mathbb{E}[|\xi_t|^\beta] < \infty$ si y solo si $\mathbb{E}[|\xi_t|^\beta \vee 1] < \infty$. Por lo tanto, ya que la función $g(x) = |x|^\beta \vee 1$ es submultiplicativa (proposición 1.21) el teorema 1.20 afirma que

$$\mathbb{E}[|\xi_t|^\beta \vee 1] < \infty, \, \forall t \geq 0 \ \text{ si y solo si } \int_{|x|\geq 1} |x|^\beta \, \Pi(dx) < \infty.$$

Para el caso en que ξ es un proceso estable se tiene que

$$\begin{aligned}\int_{|x|\geq 1} |x|^\beta \, \Pi(dx) &= c_1 \int_{-\infty}^{-1} |x|^{\beta-\alpha-1} dx + c_2 \int_1^\infty x^{\beta-\alpha-1} dx \\ &= (c_1+c_2) \int_1^\infty x^{\beta-\alpha-1} dx \\ &= (c_1+c_2) \frac{1}{\beta-\alpha} x^{\beta-\alpha} \Big|_1^\infty\end{aligned}$$

y la expresión anterior es finita si y solo si $\beta - \alpha < 0$, si y solo si $\beta < \alpha$.

Cuando ξ es un proceso estable temperado generalizado se tiene

$$\begin{aligned}\int_{|x|\geq 1} |x|^\beta \, \Pi(dx) &= c_1 \int_{-\infty}^{-1} e^{-\lambda_1|x|} |x|^{\beta-\alpha_1-1} dx + c_2 \int_1^\infty e^{-\lambda_2 x} x^{\beta-\alpha_2-1} dx \\ &= c_1 \int_1^\infty e^{-\lambda_1 x} x^{\beta-\alpha_1-1} dx + c_2 \int_1^\infty e^{-\lambda_2 x} x^{\beta-\alpha_2-1} dx;\end{aligned} \tag{1.19}$$

el cálculo de ambas integrales es el mismo por lo que al considerar la primera integral se tiene

$$\begin{aligned}\int_1^\infty e^{-\lambda_1 x} x^{\beta-\alpha_1-1} dx &= \int_1^\infty \left(\int_x^\infty \lambda_1 e^{-\lambda_1 u} du \right) x^{\beta-\alpha_1-1} dx \\ &= \lambda_1 \int_1^\infty e^{-\lambda_1 u} \left(\int_1^u x^{\beta-\alpha_1-1} dx \right) du \\ &= \frac{\lambda_1}{\beta-\alpha_1} \int_1^\infty e^{-\lambda_1 u} \left(u^{\beta-\alpha_1} - 1 \right) du \\ &= \frac{\lambda_1}{\beta-\alpha_1} \left(\int_1^\infty e^{-\lambda_1 u} u^{\beta-\alpha_1} du \right) - \frac{e^{-\lambda_1}}{\beta-\alpha_1} \\ &= \frac{\lambda_1^{\alpha_1-\beta}}{\beta-\alpha_1} \left(\int_{\lambda_1}^\infty e^{-t} t^{\beta-\alpha_1} dt \right) - \frac{e^{-\lambda_1}}{\beta-\alpha_1}\end{aligned}$$

y ya que $\beta - \alpha_1 \in (\beta-2, \infty)$, la última integral de la derecha satisface

$$\int_{\lambda_1}^\infty e^{-t} t^{\beta-\alpha_1} dt \leq \begin{cases} \Gamma(\beta-\alpha_1+1) < \infty, & \text{si} \quad \beta-\alpha_1 \neq -1 \\ \\ C_{\lambda_1} + e^{-1} < \infty & \text{si} \quad \beta-\alpha_1 = -1 \end{cases}$$

con $C_{\lambda_1} = 0$ si $\lambda_1 \geq 1$ y $C_{\lambda_1} = \sup_{\lambda_1 \leq t \leq 1}\{e^{-t}t^{-1}\}$ si $\lambda_1 < 1$. Todo lo anterior es para asegurar finalmente que

$$\int_1^\infty e^{-\lambda_1 x} x^{\beta-\alpha_1-1} dx < \infty \tag{1.20}$$

y lo mismo ocurre con la segunda integral de (1.19), por lo tanto $\int_{|x|\geq 1} |x|^\beta \Pi(dx) < \infty$ y como no hubo ninguna restricción en β lo anterior se cumple para todo $\beta \geq 0$.

$\square$

Lema 1.33. *Si ξ es un proceso estable, entonces $C = \{\lambda \in \mathbb{R} : \mathbb{E}[e^{\lambda \xi_t}] < \infty, \forall t \geq 0\} = \{0\}$. Si ξ es un proceso estable temperado generalizado con medida de Lévy (1.18), entonces*

$$C = \left\{\lambda \in \mathbb{R} : \mathbb{E}[e^{\lambda \xi_t}] < \infty, \forall t \geq 0\right\} = (-\lambda_1, \lambda_2).$$

Demostración. Por el corolario 1.22 se tiene que $\lambda \in C$ si y solo si $\int_{|x|\geq 1} e^{\lambda x} \Pi(dx) < \infty$, por lo tanto, en el caso en que ξ es un proceso estable se tiene $\lambda \in C$ si y solo si

$$c_1 \int_{-\infty}^{-1} e^{\lambda x} \frac{1}{|x|^{1+\alpha}} dx + c_2 \int_1^\infty e^{\lambda x} \frac{1}{x^{1+\alpha}} dx < \infty;$$

cuando $\lambda > 0$ la segunda integral diverge ya que

$$\int_1^\infty e^{\lambda x} x^{-\alpha-1} dx \geq \int_1^\infty x^{\alpha+2} x^{-\alpha-1} dx = \int_1^\infty x\, dx = \infty \tag{1.21}$$

y cuando $\lambda < 0$ la primera integral es la que diverge ya que un cambio de variable nos regresa al caso anterior

$$\int_{-\infty}^{-1} e^{\lambda x} |x|^{-\alpha-1} dx = \int_1^\infty e^{-\lambda u} u^{-\alpha-1} du = \infty,$$

por lo tanto $C = \{0\}$.

Cuando ξ es un proceso estable temperado generalizado, $\lambda \in C$ si y solo si

$$c_1 \int_{-\infty}^{-1} e^{\lambda x} e^{-\lambda_1 |x|} \frac{1}{|x|^{1+\alpha_1}} dx + c_2 \int_1^\infty e^{\lambda x} e^{-\lambda_2 x} \frac{1}{x^{1+\alpha_2}} dx < \infty;$$

el cálculo de las integrales anteriores es muy parecido al que se hizo en la demostración del lema 1.32 por lo que a continuación solo se desarrollan los pasos principales. Al hacer un cambio de variable en la primera integral se tiene

$$\int_{-\infty}^{-1} e^{\lambda x} e^{-\lambda_1 |x|} \frac{1}{|x|^{1+\alpha_1}} dx = \int_1^\infty e^{-(\lambda+\lambda_1)u} u^{-\alpha_1-1} du,$$

y esta integral es finita si y solo si $\lambda + \lambda_1 > 0$ (lo cual es una consecuencia de cálculos análogos a los hechos para obtener (1.20) del lema anterior y a (1.21)), si y solo si

$$\lambda > -\lambda_1.$$

De manera similar, la segunda integral

$$\int_1^\infty e^{\lambda x} e^{-\lambda_2 x} \frac{1}{x^{1+\alpha_2}} dx = \int_1^\infty e^{(\lambda-\lambda_2)x} x^{-\alpha_2-1} dx$$

es finita si y solo si $\lambda - \lambda_2 < 0$ si y solo si

$$\lambda < \lambda_2,$$

luego, $C = (-\lambda_1, \lambda_2)$.

$\square$

Sea ξ un proceso estable temperado generalizado con medida de Lévy (1.18), coeficiente lineal $a \in \mathbb{R}$ y φ su exponente de Laplace, como se explicó en la sección 1.2, el lema anterior implica que

$$C = \{u \in \mathbb{R} : \varphi(u) < \infty\} = (-\lambda_1, \lambda_2),$$

es decir, para cualquier $u \in (-\lambda_1, \lambda_2)$ se tiene

$$\varphi(u) = au + \int_{\mathbb{R}} (e^{ux} - 1 - ux\mathbf{1}_{\{|x| \leq 1\}})\Pi(dx) \in \mathbb{R}, \tag{1.22}$$

además, ya que en la demostración del lema 1.32 se probó

$$\int_{|x| \geq 1} |x| \, \Pi(dx) < \infty$$

entonces resulta más conveniente expresar (1.22) en la forma

$$\varphi(u) = a'u + \int_{\mathbb{R}} (e^{ux} - 1 - ux)\Pi(dx)$$

con $a' = a + \int_{|x|>1} x\,\Pi(dx)$. En este caso, en la proposición 4.2 de [CT04] se prueba que

$$\varphi(u) = a'u + A_1 + A_2, \tag{1.23}$$

donde

$$A_1 = \begin{cases} \Gamma(-\alpha_1)\lambda_1^{\alpha_1} c_1 \left(\left(1 + \dfrac{u}{\lambda_1}\right)^{\alpha_1} - 1 - \dfrac{u\alpha_1}{\lambda_1} \right) & \text{si} \quad \alpha_1 \notin \{0,1\} \\[2ex] -uc_1 + c_1(\lambda_1 + u)\log\left(1 + \dfrac{u}{\lambda_1}\right) & \text{si} \quad \alpha_1 = 1 \\[2ex] -c_1 \left(-\dfrac{u}{\lambda_1} + \log\left(1 + \dfrac{u}{\lambda_1}\right)\right) & \text{si} \quad \alpha_1 = 0, \end{cases} \tag{1.24}$$

$$A_2 = \begin{cases} \Gamma(-\alpha_2)\lambda_2^{\alpha_2} c_2 \left(\left(1 - \dfrac{u}{\lambda_2}\right)^{\alpha_2} - 1 + \dfrac{u\alpha_2}{\lambda_2} \right) & \text{si} \quad \alpha_2 \notin \{0,1\} \\[2ex] uc_2 + c_2(\lambda_2 - u)\log\left(1 - \dfrac{u}{\lambda_2}\right) & \text{si} \quad \alpha_2 = 1 \\[2ex] -c_2 \left(\dfrac{u}{\lambda_2} + \log\left(1 - \dfrac{u}{\lambda_2}\right)\right) & \text{si} \quad \alpha_2 = 0. \end{cases} \tag{1.25}$$

Con todo lo anterior, ahora es fácil construir un proceso estable temperado generalizado que satisfaga la condición de Cramér, para ello, es suficiente hacer lo siguiente:

I. Elíjase $\theta \in (0, \lambda_2)$.

II. Ya que el término a' en (1.23) puede tomar cualquier valor real (pues el coeficiente lineal a también), defínase

$$a' := -\frac{A_1 + A_2}{\theta}.$$

III. De (1.23) es claro que $\varphi(\theta) = 0$.

1.3.3. Procesos de Lévy hipergeométricos

Los procesos de Lévy hipergeométricos fueron introducidos inicialmente por Kyprianou et al. [KPR10] y Kuznetsov et al. [KKPvS11], en ambos casos utilizando la teoría de Vigon de la filantropía (ver [Vig02]). De manera general, la construcción original de estos procesos es como sigue: se consideran dos subordinadores, H y $\hat{H}$, pertenecientes a la clase de los β-procesos de Lévy, es decir, tales que sus exponentes de Laplace, φ y $\hat{\varphi}$, tienen la forma

$$\varphi(u) = \eta + \delta u + \frac{c}{\beta}\left\{B(1-\alpha+\gamma, -\gamma) - B(1-\alpha+\gamma+\frac{u}{\beta}, -\gamma)\right\},$$

para $u \geq 0$, donde

$$\Pi(dx) = c\frac{e^{\alpha\beta x}}{(e^{\beta x}-1)^{1+\gamma}}\mathbf{1}_{(0,\infty)}dx,$$

con $\gamma \in (-\infty, 0) \cup (0,1)$, $\beta, c > 0$ y $1-\alpha+\gamma > 0$. La misma expresión para $\hat{\varphi}$ es válida con parámetros respectivos $\hat{\eta}$, $\hat{\delta}$, $\hat{\beta}$, $\hat{c}$, $\hat{\alpha}$, $\hat{\gamma}$ y medida de Lévy $\hat{\Pi}$. Por el teorema de filantropía de Vigon, es posible asegurar que existe un proceso de Lévy ξ con exponente característico ψ que satisface[3]

$$\eta\hat{\eta} + \psi(\lambda) = \varphi(-i\lambda)\hat{\varphi}(i\lambda), \quad \lambda \in \mathbb{R}.$$

Por la unicidad de la descomposición de Wiener-Hopf (véase [Kyp06, teorema 6.15]), el proceso ξ es único y es nombrado un **proceso de Lévy hipergeométrico**.

Apelando a un conjunto especial de parámetros, Kuznetsov y Pardo [KP13] mostraron que

$$\psi(z) = -\frac{\Gamma(1-a+b-z)}{\Gamma(1-a-z)}\frac{\Gamma(\hat{a}+\hat{b}+z)}{\Gamma(\hat{a}+z)}, \quad z \in, \tag{1.26}$$

con $(a, b, \hat{a}, \hat{b})$ pertenecientes al conjunto admisible de parámetros

$$\mathscr{A} = \left\{a \leq 1, b \in (0,1), \hat{a} \geq 0, \hat{b} \in (0,1)\right\},$$

[3] Por la observación 1.24, el exponente de Laplace de un *subordinador* puede definirse para todo $z \in \mathbb{C}$ tal que $\Re(z) \in [0,\infty)$.

corresponde al exponente de Laplace de un (posiblemente matado) proceso de Lévy hipergeométrico, para el cual la medida de Lévy asociada puede ser calculada analíticamente. Si se utiliza la notación

$$k = 1 - a + b + \hat{a} + \hat{b},$$

ellos mostraron que la medida de Lévy es absolutamente continua con densidad

$$\pi(x) = \begin{cases} -\dfrac{\Gamma(k)}{\Gamma(k-\hat{b})\Gamma(-b)} e^{-(1-a+b)x} {}_2F_1(1+b,k;k-\hat{b};e^{-x}) & \text{si } x > 0, \\ -\dfrac{\Gamma(k)}{\Gamma(k-b)\Gamma(-\hat{b})} e^{(\hat{a}+\hat{b})x} {}_2F_1(1+\hat{b},k;k-b;e^{x}) & \text{si } x < 0, \end{cases}$$

donde ${}_2F_1$ es la función hipergeométrica, definida para $z \in \mathbb{C}$, $|z| < 1$, por

$${}_2F_1(a,b;c;z) := \sum_{n \geq 0} \frac{(a)_n (b)_n}{(c)_n} \frac{z^n}{n!},$$

y $(a)_n = \Gamma(a+n)/\Gamma(a)$ es el símbolo de Pochhammer.

Además de lo anterior, esta subclase de procesos de Lévy hipergeométricos posee otras propiedades interesantes que se resumen en la siguiente proposición, la demostración puede consultarse en el artículo original [KP13].

Proposición 1.34. I. *Cuando $a < 1$ y $\hat{a} > 0$, el proceso ξ es matado a un tiempo exponencial de parámetro*

$$p = \psi(0) = \frac{\Gamma(1-a+b)}{\Gamma(1-a)} \frac{\Gamma(\hat{a}+\hat{b})}{\Gamma(\hat{a})}.$$

Cuando $a = 1$ y $\hat{a} > 0$ $\{$resp. $a < 1$ y $\hat{a} = 0\}$, ξ deriva a $+\infty$ $\{-\infty\}$ y

$$\mathbb{E}[\xi_1] = \frac{\Gamma(b)\Gamma(\hat{a}+\hat{b})}{\Gamma(\hat{a})} \quad \left\{ \mathbb{E}[\xi_1] = -\frac{\Gamma(\hat{b})\Gamma(1-a+b)}{\Gamma(1-a)} \right\}.$$

Cuando $a = 1$ y $\hat{a} = 0$, se tiene $\mathbb{E}[\xi_1] = 0$ y el proceso ξ oscila.

II. *El proceso ξ no tiene componente gaussiano. Tiene trayectorias de variación acotada y su coeficiente lineal es cero $\{$resp. trayectorias de variación no acotada$\}$ cuando $b + \hat{b} < 1$ $\{$resp. $1 \leq b + \hat{b} < 2\}$.*

III. *El proceso $\hat{\xi} := -\xi$ también pertenece a esta subclase de procesos hipergeométricos, y tiene parámetros $(1-\hat{a}, \hat{b}, 1-a, b)$.*

Sea ξ un proceso de Lévy hipergeométrico con parámetros $(a,b,\hat{a},\hat{b}) \in \mathscr{A}$. Por razones que quedarán claras en la siguiente sección, es de especial interés considerar el caso en que $a < 1$, pues por la proposición 1.34, en este caso se tiene que ξ es matado a un tiempo exponencial de parámetro $p = \psi(0)$ (cuando $\hat{a} > 0$) o ξ deriva a menos infinito:

$$\lim_{t \to \infty} \xi_t = -\infty$$

(cuando $\hat{a} = 0$). Nótese que en ambos casos, por la definición del exponente de Laplace (1.26), es posible asegurar que el proceso ξ satisface la condición de Cramér con índice $1-a$, es decir,

$$\mathbb{E}\left[e^{(1-a)\xi_1}\right] = 1.$$

1.4. Funcionales exponenciales de procesos de Lévy

Los objetos centrales en este trabajo son las variables aleatorias

$$I_t := \int_0^t e^{\xi_s}\, ds, \;\; t \geq 0,$$

y especialmente su valor terminal

$$I := \int_0^\infty e^{\xi_s}\, ds, \tag{1.27}$$

donde $\xi = \{\xi_t : t \geq 0\}$ es un proceso de Lévy. A estas variables se les conoce como **funcionales exponenciales** asociados al proceso ξ.

Como análisis preliminar, es importante conocer es bajo qué condiciones es posible asegurar la finitud casi segura del funcional exponencial I. El siguiente teorema proporciona condiciones para poder asegurar esta finitud, la mayoría de ellas relacionan el problema a través de algunas propiedades trayectoriales del proceso ξ y naturalmente, de sus características (a, σ, Π).

Teorema 1.35. *Para un proceso de Lévy ξ no idénticamente cero, las siguientes afirmaciones son equivalentes.*

I. $I < \infty$ *c.s.*

II. $\mathbb{P}(I < \infty) > 0$.

III. $\lim_{t\to\infty} \xi_t = -\infty$ *c.s.*

IV. $\lim_{t\to\infty} t^{-1}\xi_t < 0$ *c.s.*

V. $\int_1^\infty t^{-1}\mathbb{P}(\xi_t \geq 0)dt < \infty$.

VI. *Se cumple que*

$$\int_{(1,\infty)} x\Pi(dx) < \infty \quad y \quad a + \int_{|x|>1} x\Pi(dx) \in [-\infty, 0),$$

o bien,

$$\int_{(-\infty,-1)} |x|\Pi(dx) = \int_{(1,\infty)} x\Pi(dx) = \infty \;\; y \;\; \int_{(1,\infty)} \frac{x\Pi(dx)}{\int_0^x \Pi(-\infty,-y)dy} < \infty.$$

Demostración. Primero se demostrará que III $\Leftrightarrow$ IV $\Leftrightarrow$ VI. Supóngase primero que la media $\mathbb{E}[\xi_1]$ está definida.

III $\Rightarrow$ IV. Por la proposición 1.17 se tiene que, si $\mathbb{E}[\xi_1] = 0$,

$$\limsup_{t\to\infty} \xi_t = -\liminf_{t\to\infty} \xi_t = \infty, \text{ c.s.},$$

lo que contradice el hecho que ξ deriva a menos infinito c.s. Si $\mathbb{E}[\xi_1] \in (0,\infty]$, ξ deriva a mas infinito c.s. y nuevamente contradice la hipótesis. Así, la única posibilidad es que $\mathbb{E}[\xi_1] \in [-\infty, 0)$ y por la ley fuerte de los grandes números para procesos de Lévy (teoremas 36.5 y 36.6 de [Sat99])

$$\lim_{t\to\infty} \frac{\xi_t}{t} = \mathbb{E}[\xi_1] \in [-\infty, 0), \text{ c.s.} \tag{1.28}$$

IV $\Rightarrow$ VI. Ya que la media $\mathbb{E}[\xi_1]$ está definida, en este caso se tiene por hipótesis (1.28). Por el teorema 1.20 se tiene que

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[\xi_1] \text{ está definida } &\iff \mathbb{E}\left[\xi_1^+\right] < \infty \text{ ó } \mathbb{E}\left[\xi_1^-\right] < \infty \\ &\iff \int_{(-\infty,-1)} |x|\Pi(dx) < \infty \text{ ó } \int_{(1,\infty)} x\Pi(dx) < \infty. \end{aligned}$$

Además, como $\mathbb{E}[\xi_1] \in [-\infty, 0)$, se tiene

$$a + \int_{|x|>1} x\Pi(dx) = \mathbb{E}\left[\xi_1^+\right] + \mathbb{E}\left[\xi_1^-\right] = \mathbb{E}[\xi_1] \in [-\infty, 0). \tag{1.29}$$

VI $\Rightarrow$ III. Ya que la media $\mathbb{E}[\xi_1]$ está definida, la hipótesis es

$$\int_{(-\infty,-1)} |x|\Pi(dx) < \infty \quad \text{y} \quad a + \int_{|x|>1} x\Pi(dx) \in [-\infty, 0),$$

Con lo anterior, (1.29) afirma que $\mathbb{E}[\xi_1] \in [-\infty, 0)$ y por la ley fuerte de los grandes números para procesos de Lévy, se tiene

$$\lim_{t\to\infty} \frac{\xi_t}{t} = \mathbb{E}[\xi_1] \in [-\infty, 0), \text{ c.s.}$$

De la condición anterior es claro que para todo $\omega \in \{\omega \in \Omega : -\infty \leq \lim_{t\to\infty} \xi_t(\omega)/t < 0\}$, existe un número real estrictamente negativo N_ω y un real $t_\omega > 0$ tal que para todo $t \geq t_\omega$

$$\xi_t(\omega) < N_\omega\, t. \tag{1.30}$$

Ya que el conjunto mencionado tiene probabilidad uno, se tiene $\lim_{t\to\infty} \xi_t = \infty$ c.s.

Ahora bien, en el caso en que la media $\mathbb{E}[\xi_1]$ no está definida, la equivalencia entre los incisos III, IV y VI se debe a una versión del teorema de Erickson para procesos de Lévy (teorema 1.18).

La equivalencia III $\Leftrightarrow$ V es el criterio de Rogozin ([Ber96, teorema VI.12]). Para terminar, lo que se hará es demostrar las siguientes implicaciones: IV $\Rightarrow$ I $\Rightarrow$ II $\Rightarrow$ III.

IV $\Rightarrow$ I. Suponiendo IV, nótese que se tiene entonces (1.30). Por lo tanto

$$\begin{aligned} \int_0^\infty e^{\xi_s(\omega)} ds &= \int_0^{t_\omega} e^{\xi_s(\omega)} ds + \int_{t_\omega}^\infty e^{\xi_s(\omega)} ds \\ &\leq \int_0^{t_\omega} e^{\xi_s(\omega)} ds + \int_{t_\omega}^\infty e^{N_\omega s} ds. \end{aligned} \tag{1.31}$$

Ya que toda función cádlag definida en un compacto es acotada, la primera integral del lado derecho de (1.31) es finita y

$$\int_0^\infty e^{\xi_s(\omega)}ds < \; t_\omega \cdot \max_{0\le s\le t_\omega}\{e^{\xi_s(\omega)}\} + \frac{1}{(-N_\omega)} < \infty.$$

Así,

$$\left\{\omega\in\Omega : -\infty \le \lim_{t\to\infty} \xi_t(\omega)/t < 0\right\} \subset \left\{\omega\in\Omega : \int_0^\infty e^{\xi_s(\omega)}ds < \infty\right\}$$

y ya que el conjunto del lado izquierdo es de probabilidad uno, entonces

$$I = \int_0^\infty e^{\xi_s} ds < \infty \;\; \text{c.s.}$$

I $\Rightarrow$ II. Obvia.

II $\Rightarrow$ III. Por contrapuesta, si no se cumple III, entonces, por la proposición 1.16 necesariamente alguno de los dos siguientes casos ocurre

$$\lim_{t\to\infty}\xi_t = \infty \;\; \text{c.s.} \quad \text{ó} \quad \limsup_{t\to\infty}\xi_t = -\liminf_{t\to\infty}\xi_t = \infty \;\; \text{c.s.}$$

En el primer caso, se tiene que para $\omega\in\{\omega\in\Omega : \lim_{t\to\infty}\xi_t(\omega)=\infty\}$ y $M>0$, existe $t_\omega>0$ tal que para todo $s\ge t_\omega$

$$M \le \xi_s(\omega),$$

y por lo tanto

$$\begin{aligned}\int_0^\infty e^{\xi_s(\omega)}ds &= \int_0^{t_\omega} e^{\xi_s(\omega)}ds + \int_{t_\omega}^\infty e^{\xi_s(\omega)}ds\\ &\ge \int_0^{t_\omega} e^{\xi_s(\omega)}ds + e^M\int_{t_\omega}^\infty ds = \infty.\end{aligned}$$

Si $\limsup_{t\to\infty}\xi_t = -\liminf_{t\to\infty}\xi_t = \infty$, c.s., entonces, para $a>0$, los siguientes tiempos de paro son finitos c.s.

$$\begin{aligned}\tau^+_{a,1} &:= \inf\{t>1 : \xi_t > a\}\\ \tau^-_{a,1} &:= \inf\{t>\tau^+_{a,1} : \xi_t < -a\}\\ \tau^+_{a,2} &:= \inf\{t>\tau^-_{a,1} : \xi_t > a\}\\ \tau^-_{a,2} &:= \inf\{t>\tau^+_{a,2} : \xi_t < -a\}\\ &\;\;\vdots\end{aligned}$$

Y por lo tanto, es posible escribir

$$\int_0^\infty e^{\xi_s}ds \ge \sum_{i=1}^\infty \int_{\tau^+_{a,i}}^{\tau^-_{a,i}} e^{\xi_s}ds \ge e^{-a}\sum_{i=1}^\infty(\tau^-_{a,i}-\tau^+_{a,i}),$$

donde, por la propiedad fuerte de Markov (teorema 1.13), las variables $\tau^-_{a,i}-\tau^+_{a,i}$ son i.i.d. y entonces, por el teorema de las tres series de Kolmogorov, la serie de la derecha diverge c.s. Luego, $I=\infty$ c.s.

□

Naturalmente, es interesante conocer algunas propiedades distribucionales de los funcionales exponenciales. En este sentido, Bertoin, Linder y Maller ([BLM08, teorema 3.9]) demostraron lo siguiente: sea ξ es un proceso de Lévy transitorio con medida de Lévy no cero Π, $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ es una función medible y supóngase que la integral

$$\int_0^\infty g(\xi_t)dt$$

es finita casi seguramente, si existe un intervalo cerrado $J \subset \mathbb{R} \setminus \{0\}$ con $\Pi(J) > 0$ y una constante $t_0 > 0$ tal que

$$\ell(\{|t| \geq t_0 : g(t) = g(t+z)\}) = 0, \quad \text{para todo } \ z \in J, \tag{1.32}$$

entonces la distribución de I es absolutamente continua (con respecto a la medida de Lebesgue). Una consecuencia inmediata de lo anterior es lo siguiente.

Corolario 1.36. *Si ξ es un proceso de Lévy que satisface $\text{lím}_{t\to\infty} \xi_t = -\infty$ y tiene medida de Lévy no cero, entonces la distribución del funcional exponencial*

$$I = \int_0^\infty e^{\xi_s} ds$$

es absolutamente continua.

Demostración. Si el proceso ξ deriva a menos infinito, entonces necesariamente es transitorio (proposición 1.16). Tómese cualquier intervalo cerrado $J \subset \mathbb{R} \setminus \{0\}$ con $\Pi(J) > 0$ y cualquier constante $t_0 > 0$, entonces, ya que la función $g(t) = e^t$ es inyectiva, es claro que la condición (1.32) se satisface.

$\square$

Otro aspecto que será importante más adelante es la finitud de los momentos reales del funcional exponencial I, el siguiente lema relaciona lo anterior con los momentos exponenciales del proceso de Lévy ξ introducidos en la sección 1.2.

Lema 1.37. *Sea $\beta \in (0,1)$ tal que $\mathbb{E}[e^{\beta\xi_1}] \leq 1$, entonces $\mathbb{E}[I^{\beta-1}] < \infty$. Además, para todo $\beta > 0$*

$$\mathbb{E}[I^\beta] < \infty \quad \textit{si y solo si} \quad \mathbb{E}[e^{\beta\xi_1}] < 1.$$

En este caso, se cumple la identidad

$$\mathbb{E}[I^\beta] = \frac{\beta}{-\varphi(\beta)}\mathbb{E}[I^{\beta-1}],$$

donde φ es el exponente de Laplace de ξ.

Demostración. El lema tiene tres afirmaciones y para la demostración será importante seguir el orden en el que aparecen. Se probará primero que si $\beta \in (0,1)$, entonces

$$\mathbb{E}[e^{\beta\xi_1}] \leq 1 \quad \text{implica} \quad \mathbb{E}[I^{\beta-1}] < \infty.$$

Sea $\beta \in (0,1)$ y supóngase que $\mathbb{E}[e^{\beta\xi_1}] \leq 1$. Para $t > 0$ se denotará por I_t a la variable aleatoria

$$I_t := \int_0^t e^{\xi_s} ds,$$

el primer paso es probar que $\mathbb{E}[I_t^\beta] < \infty$, para todo $t > 0$. Ya que por hipótesis

$$e^{\varphi(\beta)} = \mathbb{E}[e^{\beta\xi_1}] \leq 1,$$

entonces $\varphi(\beta) \leq 0$. La convexidad estricta de φ (ver (1.13)) implica necesariamente que para $p > 1$ fijo, $\varphi(\beta/p) < 0$ y por lo tanto $e^{-s\varphi(\beta/p)} > 1$ para todo $s > 0$. Esto último, la desigualdad de Doob y el hecho que $M_s(\beta/p) = e^{(\beta/p)\xi_s - s\varphi(\beta/p)}$ es una martingala (lema 1.25) implican que

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}\left[I_t^\beta\right] &\leq \mathbb{E}\left[\left(t \sup_{0<s\leq t}\{e^{\xi_s}\}\right)^\beta\right] \\
&= t^\beta \mathbb{E}\left[\sup_{0<s\leq t}\{e^{\beta\xi_s}\}\right] \\
&= t^\beta \mathbb{E}\left[\left(\sup_{0<s\leq t}\{e^{(\beta/p)\xi_s}\}\right)^p\right] \\
&\leq t^\beta \mathbb{E}\left[\left(\sup_{0<s\leq t}\{e^{(\beta/p)\xi_s} e^{-s\varphi(\beta/p)}\}\right)^p\right] \\
&\leq t^\beta \left(\frac{p}{p-1}\right)^p \sup_{0<s\leq t} \mathbb{E}\left[\{e^{(\beta/p)\xi_s - s\varphi(\beta/p)}\}^p\right] \\
&= t^\beta \left(\frac{p}{p-1}\right)^p \mathbb{E}\left[e^{\beta\xi_t - tp\varphi(\beta/p)}\right] \\
&= t^\beta \left(\frac{p}{p-1}\right)^p e^{-tp\varphi(\beta/p)} \mathbb{E}\left[e^{\beta\xi_1}\right]^t < \infty. \qquad (1.33)
\end{aligned}$$

Por otro lado, para todo $\beta \in (0,1)$ se tiene la desigualdad

$$||x|^\beta - |y|^\beta| \leq |x-y|^\beta, \quad \forall x, y \in \mathbb{R},$$

por lo que

$$\mathbb{E}\left[\left(\int_0^\infty e^{\xi_s} ds\right)^\beta - \left(\int_t^\infty e^{\xi_s} ds\right)^\beta\right] \leq \mathbb{E}\left[I_t^\beta\right] < \infty. \qquad (1.34)$$

Además, utilizando el teorema fundamental del cálculo, el teorema de Fubini y la propiedad de Markov del proceso de Lévy ξ (teorema 1.13), se tiene

$$
\begin{aligned}
\mathbb{E}\left[\left(\int_0^\infty e^{\xi_s}ds\right)^\beta - \left(\int_t^\infty e^{\xi_s}ds\right)^\beta\right] &= \mathbb{E}\left[\beta\int_0^t e^{\xi_s}\left(\int_s^\infty e^{\xi_u}du\right)^{\beta-1}ds\right] \\
&= \mathbb{E}\left[\beta\int_0^t e^{\xi_s}\left(\int_0^\infty e^{\xi_{z+s}}dz\right)^{\beta-1}ds\right] \\
&= \mathbb{E}\left[\beta\int_0^t e^{\beta\xi_s}\left(\int_0^\infty e^{\xi_{z+s}-\xi_s}dz\right)^{\beta-1}ds\right] \\
&= \beta\int_0^t \mathbb{E}\left[e^{\beta\xi_s}\left(\int_0^\infty e^{\xi_{z+s}-\xi_s}dz\right)^{\beta-1}\right]ds \\
&= \beta\int_0^t \mathbb{E}\left[\mathbb{E}\left[e^{\beta x}\left(\int_0^\infty e^{\xi_{z+s}-\xi_s}dz\right)^{\beta-1}\right]\Big|_{x=\xi_s}\right]ds \\
&= \beta\int_0^t \mathbb{E}\left[e^{\beta x}\mathbb{E}\left[I^{\beta-1}\right]\Big|_{x=\xi_s}\right]ds \\
&= \beta\int_0^t \mathbb{E}\left[I^{\beta-1}\right]\mathbb{E}\left[e^{\beta\xi_s}\right]ds \\
&= \beta\mathbb{E}\left[I^{\beta-1}\right]\int_0^t e^{s\varphi(\beta)}ds, \qquad (1.35)
\end{aligned}
$$

en donde ambos lados de las igualdades se entienen como infinito si las integrales no son convergentes. Cuando $\beta\in(0,1)$, (1.34) afirma que el término de la izquierda en las igualdades anteriores es finito, de donde se concluye inmediatamente la finitud del lado derecho, en particular, el término $\mathbb{E}\left[I^{\beta-1}\right]$ es finito. Esto prueba la primera afirmación del lema.

Para la segunda afirmación, se tiene que probar que para todo $\beta>0$

$$\mathbb{E}[I^\beta]<\infty \ \text{ si y solo si } \ \mathbb{E}[e^{\beta\xi_1}]<1.$$

Sea $\beta>0$ y supóngase primero que $\mathbb{E}[e^{\beta\xi_1}]<1$, se debe probar que $\mathbb{E}[I^\beta]<\infty$. Las igualdades en (1.35) son válidas para $\beta>0$ (la única diferencia es que en el caso $\beta\geq 1$ no se puede asegurar la finitud c.s. del lado izquierdo), por lo que utilizando esto y el lema de Fatou se puede asegurar que

$$
\begin{aligned}
\mathbb{E}\left[I^\beta\right] &= \mathbb{E}\left[\liminf_{t\to\infty}\left(\left(\int_0^\infty e^{\xi_s}ds\right)^\beta - \left(\int_t^\infty e^{\xi_s}ds\right)^\beta\right)\right] \\
&\leq \beta\mathbb{E}\left[I^{\beta-1}\right]\int_0^\infty e^{s\varphi(\beta)}ds \qquad (1.36) \\
&= \frac{\beta}{-\varphi(\beta)}\mathbb{E}\left[I^{\beta-1}\right],
\end{aligned}
$$

donde el lado derecho se entiende como infinito si $\mathbb{E}[I^{\beta-1}]=\infty$. Con esto en mano, si se restringe al caso $\beta\in(0,1)$, la primera afirmación del lema asegura la finitud de $\mathbb{E}[I^{\beta-1}]$ y entonces (1.36) implica la finitud de $\mathbb{E}[I^\beta]$. Además, haciendo tender t a infinito en

(1.35), el teorema de convergencia dominada implica a su vez la igualdad

$$\mathbb{E}\left[I^{\beta}\right] = \frac{\beta}{-\varphi(\beta)}\mathbb{E}\left[I^{\beta-1}\right]. \tag{1.37}$$

Resta asegurar la finitud de $\mathbb{E}[I^{\beta}]$ en el caso $\beta \in [1,\infty)$. Para ello, al iterar la fórmula (1.36) se obtiene que

$$\mathbb{E}\left[I^{\beta}\right] \leq \begin{cases} \prod_{k=1}^{\beta}\left(\frac{k}{-\varphi(k)}\right) & \text{si } \beta \in \{1,2,...\} \\ \mathbb{E}\left[I^{\beta-\lfloor\beta\rfloor}\right]\prod_{k=0}^{\lfloor\beta\rfloor-1}\left(\frac{\beta-k}{-\varphi(\beta-k)}\right) & \text{si } \beta \notin \{1,2,...\}, \end{cases}$$

donde $\lfloor\beta\rfloor$ denota la parte entera de β. Si $\beta \in \{1,2,...\}$, la finitud de $\mathbb{E}[I^{\beta}]$ es inmediata de la ecuación anterior; si $\beta \notin \{1,2,...\}$ entonces $\beta - \lfloor\beta\rfloor \in (0,1)$ y $\mathbb{E}[e^{(\beta-\lfloor\beta\rfloor)\xi_1}] < 1$, por lo que de la fórmula de arriba, la finitud de $\mathbb{E}[I^{\beta}]$ se reduce al caso anterior. Para obtener la relación (1.37) el mismo argumento que en el caso $\beta \in (0,1)$ es válido.

Finalmente, se demostrará que para todo $\beta > 0$, si $\mathbb{E}[I^{\beta}]$ es finito entonces $\mathbb{E}[e^{\beta\xi_1}] < 1$. Supóngase entonces que $\mathbb{E}\left[I^{\beta}\right]$ es finito. Por la propiedad de Markov del proceso ξ se tiene

$$\begin{aligned}
\infty > \mathbb{E}\left[I^{\beta}\right] &= \mathbb{E}\left[\left(\int_0^{\infty} e^{\xi_s}ds\right)^{\beta}\right] \\
&> \mathbb{E}\left[\left(\int_1^{\infty} e^{\xi_s}ds\right)^{\beta}\right] \\
&= \mathbb{E}\left[e^{\beta\xi_1}\left(\int_0^{\infty} e^{\xi_{u+1}-\xi_1}du\right)^{\beta}\right] \\
&= \mathbb{E}\left[e^{\beta\xi_1}\right]\mathbb{E}\left[\left(\int_0^{\infty} e^{\xi_{u+1}-\xi_1}du\right)^{\beta}\right] \\
&= \mathbb{E}\left[e^{\beta\xi_1}\right]\mathbb{E}\left[I^{\beta}\right],
\end{aligned}$$

por lo que necesariamente $\mathbb{E}\left[e^{\beta\xi_1}\right] < 1$; esto concluye la prueba.

□

Corolario 1.38. *Si existe $\theta > 0$ tal que $\mathbb{E}[e^{\theta\xi_1}] = 1$, entonces para todo $\beta \geq 0$*

$$\mathbb{E}[I^{\beta}] < \infty \quad \textit{si y solo si} \quad \beta \in [0,\theta).$$

Demostración. Si $e^{\varphi(\theta)} = \mathbb{E}[e^{\theta\xi_1}] = 1$ entonces $\varphi(\theta) = 0$ y, por la convexidad estricta del exponente de Laplace, se tiene que $\varphi(\beta) < 0$ si y solo si $\beta \in (0,\theta)$. Por lo tanto, para $\beta > 0$

$$\mathbb{E}[e^{\beta\xi_1}] = e^{\varphi(\beta)} < 1 \quad \text{si y solo si} \quad \beta \in (0,\theta),$$

y por el lema anterior, $\mathbb{E}[I^{\beta}] < \infty$ si y solo si $\beta \in [0,\theta)$.

□

Observación 1.39. *Si en lugar de* $\mathbb{E}[e^{\theta\xi_1}] = 1$ *se satisface la condición* $\mathbb{E}[e^{\theta\xi_1}] < 1$*, entonces, la misma afirmación del corolario anterior es válida para* $\beta \in [0,\theta]$.

Notas

Las secciones 1.1 y 1.2 se basaron casi en su totalidad en los libros [Sat99] y [Kyp06]. Para un primer acercamiento al tema de los procesos de Lévy, los primeros dos capítulos de [Kyp06] son especialmente recomendables. En este trabajo, el tratamiento que se dio al exponente de Laplace descrito en la proposición 1.23 fue basado en el capítulo 5 de [Sat99] y precisamente esta referencia se recomienda para una lectura más técnica de los resultados clásicos de procesos de Lévy.

La mayor parte de la secciónes 1.3 y 1.4, por otro lado, son un compendio de varias propiedades y resultados que fueron consecuencia del trabajo realizado durante el tiempo de desarrollo de la tesis. En particular, los enunciados de los lemas 1.29, 1.30, 1.31, 1.32, 1.33 y 1.37 fueron escritos con la generalidad necesaria para que puedan ser útiles como referencia en trabajos futuros.

En [CT04] pueden encontrarse muchos ejemplos de procesos de Lévy no comunes en la literatura estándar y que pueden complementar a la sección 1.3.

Con respecto a la última sección 1.4, se recomienda consultar el artículo [BY05] para un panorama general y muy completo acerca de los funcionales exponenciales de procesos de Lévy.

CAPÍTULO 2

Medidas de renovación y medidas potenciales

En este capítulo se establecen los conceptos y resultados generales de la teoría de renovación que se utilizan en los capítulos posteriores. Es importante resaltar que la teoría expuesta concierne al caso de distribuciones con soporte en toda la recta real, a diferencia de la mayoría de la literatura estándar, en donde solo se considera el caso positivo. En este sentido, la mayor parte del tratamiento que se hace en esta parte está basada en el libro aún no publicado *Renewal, recurrence and regeneration* de G. Alsmeyer (ver la sección Notas al final del capítulo).

En la primera parte del capítulo se introduce el concepto de **medida de renovación** (necesaria para establecer la identidad fundamental de la sección 3.1) y se postulan sin demostración los teoremas de renovación clásicos cuya utilidad se ve reflejada en la demostración de la proposición 3.2 del capítulo 3. La segunda parte del capítulo inicia en la sección 2.4 y está destinada a estudiar algunas propiedades de la **medida potencial** asociada a un proceso de Lévy, que como se verá, es el concepto análogo al de una medida de renovación para caminatas aleatorias. Los resultados presentados en esta última parte son el puente para la presentación del capítulo 3.

2.1. Medidas de renovación

Cualquier sucesión $S = \{S_n : n \geq 0\}$ de variables aleatorias con valores reales definidas en un espacio de probabilidad $(\Omega, \mathscr{F}, \mathbb{P})$, con incrementos i.i.d.

$$X_n := S_n - S_{n-1}, \quad n \geq 1,$$

y valor inicial S_0 independiente de éstos, es conocida como una **caminata aleatoria** con demora S_0.

Si para cada $\omega \in \Omega$ se define

$$N(\omega) := \sum_{n \geq 0} \delta_{S_n(\omega)},$$

entonces, para ω fijo, $N(\omega)$ es una medida puntual sobre la recta real. N es entonces una función de Ω que toma valores en el conjunto $\mathscr{M}$ de todas las medidas puntuales en $\mathbb{R}$. La medibilidad de esta función se obtiene dotando a $\mathscr{M}$ con la mínima σ-álgebra $\mathfrak{M}$ que hace medibles a todas las proyecciones

$$\pi_B : \mathscr{M} \to \mathbb{N} \cup \{\infty\}, \;\; \mu \mapsto \mu(B).$$

Por lo tanto, $N : (\Omega, \mathscr{F}, \mathbb{P}) \to (\mathscr{M}, \mathfrak{M})$ es un elemento aleatorio, el cual es conocido como medida puntual aleatoria o proceso puntual aleatorio asociado a la caminata S.

Una consecuencia de lo anterior es que, para cada $B \in \mathscr{B}(\mathbb{R})$, $N(\cdot)(B)$ es una variable aleatoria que cuenta el número de "puntos" S_n en el conjunto B. Al tomar esperanzas, la **medida intensidad** de N es una medida en $\mathbb{R}$ dada por

$$U(B) := \mathbb{E}\left[N(\cdot)(B)\right] = \mathbb{E}\left[\sum_{n\geq 0} \mathbf{1}_{\{S_n \in B\}}\right] = \sum_{n\geq 0} \mathbb{P}\left(S_n \in B\right), \tag{2.1}$$

para todo $B \in \mathscr{B}(\mathbb{R})$.

Recuérdese que para μ y ν dos medidas σ-finitas en $\mathbb{R}$, se define la convolución de μ y ν como la medida $\mu * \nu$, en $\mathbb{R}$, dada por

$$(\mu * \nu)(B) := \int_{\mathbb{R}} \nu(B-y)\mu(dy) = \int_{\mathbb{R}} \mathbf{1}_B(x+y)\nu(dx)\mu(dy),$$

con $B - y = \{x - y : x \in B\}$, $B \in \mathscr{B}(\mathbb{R})$; se denota también por $\mu^{*(0)} = \delta_0$ a la delta de Dirac en cero y para $n \geq 1$, se define

$$\mu^{*(n)} := \mu * \mu^{*(n-1)}.$$

Entonces, si F es la distribución común de los incrementos X_n y λ es la distribución de la demora S_0, la medida intensidad (2.1) puede expresarse como

$$U(B) = \sum_{n\geq 0} \lambda * F^{*(n)}(B).$$

Para los propósitos de este trabajo, es útil introducir la siguiente definición sin hacer referencia explícita a las caminatas aleatorias. La igualdad anterior motiva lo siguiente.

Definición 2.1. *Sean λ y F distribuciones en $\mathbb{R}$, la* **medida de renovación** U^λ *asociada a F con distribución inicial λ es la medida en $\mathbb{R}$ definida por*

$$U^\lambda := \sum_{n=0}^{\infty} \lambda * F^{*(n)}.$$

Si $\lambda = \delta_x$ para algún $x \in \mathbb{R}$, se escribe U^x en lugar de U^{δ_x} y siempre se supone que $F \neq \delta_0$. Los casos particulares $\lambda = \delta_0$ y $\lambda = F$ son de especial interés y para éstos se tiene

$$U^0 = \sum_{n=0}^{\infty} F^{*(n)} \quad \text{y} \quad U^F = \sum_{n=1}^{\infty} F^{*(n)}.$$

Además, para cualquier distribución inicial λ se cumple

$$U^{\lambda} = \sum_{n=0}^{\infty} \lambda * F^{*(n)} = \lambda * \sum_{n=0}^{\infty} F^{*(n)} = \lambda * U^{0}.$$

Debe notarse que la definición de medida de renovación que se da aquí *no* se restringe a distribuciones con soporte en los reales positivos, esta generalidad tiene como consecuencia que algunas propiedades que se cumplen en el caso positivo, no necesariamente se cumplen en el caso real. Por ejemplo, mientras que en el caso positivo siempre se cumple que para todo $B \in \mathscr{B}(\mathbb{R})$ acotado

$$U^{\lambda}(B) < \infty, \tag{2.2}$$

en el caso real esto no siempre sucede. Una medida con la propiedad (2.2) es llamada **localmente finita**.

Muchas propiedades, sin embargo, tienen su extensión análoga para el caso real. Una propiedad muy conocida de las medidas de renovación en el caso positivo es el principio del máximo, éste establece que

$$\sup_{t \geq 0} U^{0}([t, t+h]) \leq U^{0}([0, h]), \quad \forall h > 0.$$

En el caso real se tiene una afirmación similar:

Lema 2.2. *Sea λ cualquier distribución inicial. Si U^{λ} es localmente finita, entonces U^{λ} es localmente uniformemente acotada, es decir, para todo $h > 0$*

$$\sup_{t \in \mathbb{R}} U^{\lambda}([t, t+h]) \leq U^{0}([-h, h]).$$

2.2. Teoremas de renovación: teorema de Blackwell y teorema clave de renovación

La finalidad de esta sección es enunciar de la manera más general y precisa posible los dos principales resultados de la teoría de renovación, llamados comúnmente **teoremas de renovación**, éstos serán una herramienta muy importante en el capítulo 3.

El teorema de Blackwell y el teorema clave de renovación son, como ya se ha dicho, los teoremas más importantes de esta teoría ya que permiten determinar el comportamiento asintótico de muchas cantidades de interés en modelos estocásticos. El teorema de Blackwell es la versión simple del teorema clave de renovación y, gracias al concepto de directamente Riemann integrabilidad (introducido por el destacado matemático W. Feller), es posible demostrar que incluso son teoremas equivalentes.

Teorema de renovación de Blackwell

Antes de establecer el teorema de renovación de Blackwell, al cual suele llamarse la versión *two-sided* del resultado original de Blackwell (1948), es importante hacer una clasificación de la distribución F de acuerdo a su soporte; en este sentido, si se establece $\mathbb{G}_0 := \mathbb{R}$, $\mathbb{G}_d := d\mathbb{Z}$ para $d > 0$ y $\mathbb{G}_\infty := \{0\}$, el *span* de F se define como

$$d(F) := \sup\{d \in [0,\infty] : F(\mathbb{G}_d) = 1\},$$

F es llamada **no aritmética** si $d(F) = 0$ y **aritmética** si $d(F) > 0$. Con la finalidad de facilitar una formulación unificada para los dos casos anteriores, se define para $d \geq 0$

$$d\text{-}\lim_{t\to\infty} f(t) := \begin{cases} \lim\limits_{t\to\infty} f(t) & \text{si} \quad d = 0, \\ \lim\limits_{n\to\infty} f(nd) & \text{si} \quad d > 0. \end{cases}$$

Se denota también a la medida de Lebesgue en $\mathbb{R}$ por ℓ_0; mientras que para $d > 0$, ℓ_d se define como $\ell_d := d\mu_d$, con μ_d la medida de conteo en $d\mathbb{Z}$.

Teorema 2.3 (Teorema de renovación de Blackwell). *Sea F una distribución en $\mathbb{R}$ con span $d \geq 0$ y media $\mu \in (0,\infty]$. Entonces*

$$d\text{-}\lim_{t\to\infty} U^\lambda([t,t+h]) = \frac{\ell_d([0,h])}{\mu} \quad y$$
$$\lim_{t\to-\infty} U^\lambda([t,t+h]) = 0,$$

para todo $h > 0$ y cualquier distribución inicial λ. Aquí, se interpreta a μ^{-1} como 0 si $\mu = \infty$.

Antes de pasar a la formulación del teorema clave de renovación, es interesante notar lo que afirma el teorema de renovación de Blackwell bajo un contexto de teoría de la medida. Como se recordará, se dice que una sucesión $\{Q_n : n \geq 1\}$ de medidas localmente finitas en $\mathbb{R}$ converge vagamente a una medida localmente finita Q (denotado $Q_n \xrightarrow{v} Q$), si para cada función continua $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, con soporte compacto ($g \in \mathscr{C}_0(\mathbb{R})$), se cumple

$$\lim_{n\to\infty} \int_{\mathbb{R}} g \, dQ_n = \int_{\mathbb{R}} g \, dQ. \tag{2.3}$$

Ya que cualquier función $g \in \mathscr{C}_0(\mathbb{R})$ puede ser aproximada puntualmente por funciones simples de la forma $h = \sum_{j=1}^{k} a_j \mathbf{1}_{I_j}$, con $a_j \in \mathbb{R}$ y I_j intervalos acotados, y recíprocamente, cualquier función simple es un elemento de $\mathscr{C}_0(\mathbb{R})$, una condición equivalente a (2.3) es

$$\lim_{n\to\infty} Q_n(I) = Q(I),$$

para todos los intervalos acotados Q-continuos, es decir, todos aquellos intervalos acotados para los cuales $Q(\partial I) = 0$, donde ∂I es la frontera de I. Con lo anterior es posible notar que las dos afirmaciones del teorema de renovación de Blackwell pueden ser descritas de la siguiente manera

$$U^\lambda(t+\cdot) \xrightarrow{v} \frac{\ell_d}{\mu} \ \text{cuando} \ t \to \infty, \quad \text{y}$$
$$U^\lambda(t+\cdot) \xrightarrow{v} 0 \ \text{cuando} \ t \to -\infty,$$

para cualquier distribución inicial λ.

Teorema clave de renovación

Dada una distribución F en $\mathbb{R}$ con *span* $d \geq 0$ y media positiva μ, el hecho que

$$U^{\lambda}([t-h,t]) = \int_{\mathbb{R}} \mathbf{1}_{[0,h]}(t-y)U^{\lambda}(dy) = U^{\lambda} * \mathbf{1}_{[0,h]}(t), \quad \forall t \in \mathbb{R},$$

con $h > 0$ y λ cualquier distribución inicial, muestra que la primera afirmación del teorema de Blackwell puede reescribirse como

$$d\text{-}\lim_{t\to\infty} U^{\lambda} * \mathbf{1}_{[0,h]}(t) = \frac{1}{\mu}\int_{\mathbb{R}} \mathbf{1}_{[0,h]}\, d\ell_d. \tag{2.4}$$

Es decir, el teorema de Blackwell puede entenderse como un resultado límite para convoluciones de la medida de renovación con funciones indicadoras de conjuntos compactos. Lo anterior motiva el interés de conocer una clase $\mathscr{R}$ de funciones $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ para la cual es posible extender (2.4) en el sentido que

$$d\text{-}\lim_{t\to\infty} U^{\lambda} * g(t) = \frac{1}{\mu}\int_{\mathbb{R}} g\, d\ell_d, \ \ \forall g \in \mathscr{R}.$$

En [Fel71], W. Feller probó que que la relación anterior se cumple para una clase amplia de funciones, a las que denominó **directamente Riemann integrables**, y es de hecho, a través de este último concepto, que el teorema de Blackwell y el teorema clave de renovación resultan equivalentes.

Definición 2.4. *Sea g una función definida en $\mathbb{R}$ con valores reales. Para $\delta > 0$ y $n \in \mathbb{Z}$, sean*

$$\begin{aligned} I_{n,\delta} &:= (\delta n, \delta(n+1)], \\ m_{n,\delta} &:= \inf\{g(x) : x \in I_{n\delta}\}, \quad M_{n,\delta} := \sup\{g(x) : x \in I_{n,\delta}\} \\ \underline{\sigma}(\delta) &:= \delta \sum_{n\in\mathbb{Z}} m_{n,\delta} \quad y \quad \overline{\sigma}(\delta) := \delta \sum_{n\in\mathbb{Z}} M_{n,\delta}. \end{aligned}$$

La función g es llamada directamente Riemann integrable (dRi) si $\underline{\sigma}(\delta)$ y $\overline{\sigma}(\delta)$ son absolutamente convergentes para todo $\delta > 0$ y

$$\lim_{\delta\to 0}(\overline{\sigma}(\delta) - \underline{\sigma}(\delta)) = 0.$$

Ahora es posible formular el teorema clave de renovación, nombrado así por W. Smith (1954) en alusión a su gran utilidad y trascendencia.

Teorema 2.5 (Teorema clave de renovación). *Sea F una distribución en $\mathbb{R}$ con span $d \geq 0$ y media $\mu \in (0,\infty]$. Entonces*

$$\begin{aligned} &d\text{-}\lim_{t\to\infty} U^{0} * g(t) = \frac{1}{\mu}\int_{\mathbb{R}} g\, d\ell_d \quad y \\ &\lim_{t\to-\infty} U^{0} * g(t) = 0, \end{aligned} \tag{2.5}$$

para toda función $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ directamente Riemann integrable.

Al desarrollar los casos aritmético y no aritmético separadamente, si $d=0$ entonces (2.5) toma la forma

$$\lim_{t\to\infty} U^0 * g(t) = \frac{1}{\mu}\int_{\mathbb{R}} g(x)dx,$$

donde la integral del lado derecho se entiende como el límite $\lim_{\delta\to 0}\overline{\sigma}(\delta)$, o como una integral de Lebesgue si g es una función integrable. Por el contrario, si $d>0$, (2.5) toma la forma

$$\lim_{n\to\infty} U^0 * g(nd) = \frac{d}{\mu}\sum_{k\in\mathbb{Z}} g(kd).$$

Para finalizar, una observación que vale la pena mencionarse es que todas las funciones indicadoras de la forma $\mathbf{1}_{[0,h]}$ con $h>0$ son directamente Riemann integrables, entonces (2.4) asegura que el teorema clave de renovación implica el teorema de Blackwell; recíprocamente, por medio de aproximaciones por funciones simples es posible demostrar que el teorema de Blackwell también implica el teorema clave de renovación, es decir, ambos teoremas son equivalentes (ver [Fel71, pág. 362]).

2.3. Comportamiento asintótico de la función de renovación

Como es natural, un objeto de importancia en el estudio de las medidas de renovación $U^\lambda = \sum_{n\geq 0}\lambda * F^{*(n)}$, es su correspondiente "función de distribución"

$$U^\lambda(t) := U^\lambda((-\infty,t]), \quad \forall t\in\mathbb{R},$$

que comúnmente es conocida como la **función de renovación** asociada a F (y a λ). En general, no necesariamente se cumple que la función de renovación es finita, para todo t positivo; sin embargo, es conocido que en el caso de distribuciones con soporte en los reales positivos, éste siempre es el caso (ver [Res02, pág. 186]).

Ya que este trabajo es concerniente al caso real, el primer problema que se presenta es conocer bajo qué condiciones se puede garantizar

$$U^\lambda(t) < \infty, \quad \forall t\in\mathbb{R}. \tag{2.6}$$

Al respecto, se tiene el siguiente resultado.

Lema 2.6. *Sea F una distribución en $\mathbb{R}$ con media $\mu\in(0,\infty)$ y medida de renovación $U=U^0=\sum_{n\geq 0}F^{*(n)}$. Entonces $U(t)<\infty$ para todo $t\geq 0$ si y solo si*

$$\mu_2^- := \int_{(-\infty,0]} x^2 F(dx) < \infty.$$

En particular, por el lema anterior es claro que (2.6) se cumple si la distribución F tiene segundo momento finito (varianza finita) o F tiene soporte en los reales positivos. El primer resultado clásico concerniente a la función de renovación es el siguiente.

Teorema 2.7 (Teorema elemental de renovación). *Sea F una distribución en $\mathbb{R}$ con media $\mu \in (0,\infty]$ y $\mu_2^- < \infty$. Su función de renovación U satisface*

$$\lim_{t\to\infty} \frac{U(t)}{t} = \frac{1}{\mu}.$$

Si se reescribe el teorema anterior en la forma

$$\lim_{t\to\infty} \frac{U(t)-\mu^{-1}t}{t} = 0,$$

entonces, naturalmente surge el interés de encontrar información más precisa sobre el comportamiento de $U(t)-\mu^{-1}t$ cuando $t\to\infty$. Este es el contexto de la siguiente proposición.

Proposición 2.8. *Sea F una distribución en $\mathbb{R}$ no aritmética con media $\mu \in (0,\infty)$, varianza σ^2 finita y medida de renovación asociada U. Entonces*

$$\lim_{t\to\infty}\left(U(t)-\frac{t}{\mu}\right) = \frac{\mu^2+\sigma^2}{2\mu^2}.$$

Si además, λ es una distribución en $\mathbb{R}$ con media finita μ_0, entonces la función de renovación $U^\lambda(t) = \lambda * U(t)$ satisface

$$\lim_{t\to\infty}\left(U^\lambda(t)-\frac{t}{\mu}\right) = \frac{\mu^2+\sigma^2}{2\mu^2} - \frac{\mu_0}{\mu}. \tag{2.7}$$

En el caso de distribuciones F con soporte en los reales positivos, la expansión (2.7) fue derivada originalmente por Täcklind (1945) bajo la suposición más restrictiva

$$\int |x|^{2+\delta} F(dx) < \infty,$$

para algún $\delta > 0$, y después por Smith (1954) y Karlin (1955) si F tiene varianza finita. El caso de distribuciones en la recta real que se ha considerado aquí, el resultado es debido a Smith (1960).

La expresión en (2.7) puede reescribirse como el siguiente desarrollo

$$U^\lambda(t) = \frac{t}{\mu} + \frac{\mu^2+\sigma^2}{2\mu^2} - \frac{\mu_0}{\mu} + o(1), \ \ t\to\infty, \tag{2.8}$$

y si la distribución inicial es $\lambda = F$, entonces

$$U^F(t) = \frac{t}{\mu} + \frac{\sigma^2-\mu^2}{2\mu^2} + o(1), \ \ t\to\infty.$$

2.3.1. Caso positivo: decaimiento exponencial en los teoremas de renovación

Para obtener el desarrollo (2.8) fue suficiente suponer que F tiene varianza finita. Naturalmente, si se desean obtener estimaciones más precisas del término $o(1)$ es necesario hacer más suposiciones en la distribución F. A continuación se describen algunos resultados establecidos por J. Teugels en su tesis doctoral [Teu67] al respecto de la velocidad de convergencia en los tres teoremas básicos de renovación, cuando la distribución asociada tiene soporte en los reales positivos.

Sea F una distribución con soporte en $[0,\infty)$, F se dice **exponencialmente acotada** (en $+\infty$) si existen constantes $\lambda > 0$ y $0 \leq K < \infty$ tales que para todo $t \geq t_0 \geq 0$

$$1 - F(t) \leq Ke^{-\lambda t}, \tag{2.9}$$

y F es **fuertemente no aritmética** si es no aritmética y

$$\liminf_{|t|\to\infty} |1 - \hat{F}(it)| > 0, \tag{2.10}$$

con $\hat{F}(s) = \int_0^\infty e^{-st} dF(t)$, $s \in \mathbb{C}$. En particular, si F es absolutamente continua entonces es fuertemente no aritmética.

Se enuncian a continuación los tres teoremas básicos de renovación que incluyen una estimación de la velocidad a la cual se da la convergencia. La constante ρ que aparece es la misma en los tres enunciados, además, los nombres de los teoremas van antecedidos por una letra R para distinguirlos de los teoremas de renovación originales.

Teorema 2.9 (R-teorema elemental de renovación). *Sea F una distribución que satisface (2.9) y (2.10). Entonces existe una constante $\rho \leq \lambda$ tal que*

$$U^F(t) = \frac{t}{\mu} + \frac{\sigma^2 - \mu^2}{2\mu^2} + O(e^{-\rho t}), \;\; t \to \infty.$$

Teorema 2.10 (R-teorema de renovación de Blackwell). *Sea F una distribución que satisface (2.9) y (2.10). Entonces existe una constante $\rho \leq \lambda$ tal que para cada $h > 0$*

$$U^F(t + [0,h]) = \frac{h}{\mu} + O(e^{-\rho t}), \;\; t \to \infty.$$

Teorema 2.11 (R-teorema clave de renovación). *Sea F una distribución que satisface (2.9) y (2.10). Sea g una función en $\mathbb{R}$ con valores reales que satisface las siguientes condiciones:*

I. *$g(t) = 0$ para $t < 0$,*

II. *$g(t) \geq 0$ para $t \geq 0$,*

III. *g es decreciente para $t \geq 0$ y*

IV. *para algún $\rho' > 0$, $\int_0^\infty e^{\rho' t} g(t)\,dt < \infty$,*

entonces existe una constante $\beta = \min\{\rho, \rho'\}$ tal que

$$\int_0^t g(t-y)\,dU^F(dy) = \frac{1}{\mu}\int_0^\infty g(t)\,dt + O(e^{-\beta t}), \;\; t \to \infty.$$

2.3.2. Caso general: distribuciones spread-out y descomposición de Stone

Definición 2.12. *Una distribución F en $\mathbb{R}$ es llamada* **spread-out** *si $F^{*(n)}$ es no singular con respecto a la medida de Lebesgue ℓ_0, para algún $n \in \mathbb{N}$; esto es, si existen medidas $F_1 \neq 0$ y F_2 tales que F_1 es absolutamente continua con respecto a ℓ_0 y*

$$F^{*(n)} = F_1 + F_2,$$

para algún $n \in \mathbb{N}$.

De la definición, es claro que cualquier distribución F que sea absolutamente continua con respecto a ℓ_0 es spread-out, y a su vez, es posible demostrar que cualquier distribución spread-out es fuertemente no aritmética (ver (2.10)) y en particular, no aritmética. De esta manera, se impone en F una condición extra que el solo ser no aritmética, pero como se menciona en [Asm03, sección VII.1], esto no es demasiado restrictivo y la teoría gana generalidad y simplificaciones.

Ahora bien, la medida de renovación asociada a una distribución spread-out F tiene las mismas propiedades que la distribución F e incluso mejores, como puede notarse en el teorema 2.14. Además, al considerar medidas de renovación de este tipo, es posible derivar versiones más fuertes de los teoremas de Blackwell y clave de renovación (teoremas 2.16 y 2.17 respectivamente).

Lema 2.13. *Una distribución F es spread-out si y solo si su medida de renovación asociada U es no singular con respecto a ℓ_0.*

En vista del lema anterior, es natural preguntar por más información sobre la medida de renovación asociada a una distribución spread-out. El teorema siguiente (debido a Stone [Sto66]) proporciona una descomposición de la medida de renovación en este caso.

Teorema 2.14 (Descomposición de Stone). *Sea F una distribución spread-out con media $\mu \in (0,\infty]$. Entonces, para cada distribución inicial λ en $\mathbb{R}$, la medida de renovación asociada a F, U^{λ}, se puede escribir como*

$$U^{\lambda} = U_1^{\lambda} + U_2^{\lambda},$$

donde U_1^{λ} es una medida finita y U_2^{λ} tiene densidad u_{λ} (con respecto a ℓ_0) continua y acotada que satisface

$$\lim_{t\to-\infty} u_{\lambda}(t) = 0 \quad y \quad \lim_{t\to\infty} u_{\lambda}(t) = \frac{1}{\mu}. \tag{2.11}$$

Si se imponen más condiciones en la distribución F, es posible obtener una estimación de la velocidad de convergencia en (2.11). La siguiente proposición considera esta situación, la demostración para el caso $\lambda = \delta_0$ puede consultarse en el artículo original [Sto66], mientras que el caso general se obtiene sin mucha dificultad de este último.

Proposición 2.15. *Sea F una distribución spread-out con media $\mu > 0$ y momento entero m-ésimo finito, con $m \geq 2$. Entonces, en la descomposición de Stone se tiene*

$$u_\lambda(t) = \frac{1}{\mu} + o(t^{-(m-1)}), \quad t \to \infty,$$
$$u_\lambda(t) = o(x^{-(m-1)}), \qquad t \to -\infty,$$

y U_1^λ tiene momento m-ésimo finito.

Si además, la cola de distribución derecha de F decrece exponencialmente, i.e.

$$1 - F(t) = o(e^{-\delta t}), \;\; t \to \infty,$$

para algún $\delta > 0$, entonces

$$u_\lambda(t) = \frac{1}{\mu} + o(e^{-\varepsilon t}), \;\; t \to \infty,$$

$$U_1^\lambda([t, \infty)) = o(e^{-\varepsilon t}), \quad t \to \infty,$$

para algún $\varepsilon > 0$. Las afirmaciones análogas se cumplen si la cola de distribución izquierda decrece exponencialmente.

Teoremas de renovación en el caso spread-out

Como se mencionó al inicio de la sección, una ventaja de considerar distribuciones spread-out es que es posible dar versiones más generales del teorema de renovación de Blackwell y del teorema clave de renovación. Estas versiones pueden derivarse utilizando la técnica de acoplamiento junto con la descomposición de Stone que se presentó anteriormente (ver [Als, sección 4.6]) y también usando propiedades ergódicas para cadenas de Markov ([MT09, sección 14.5]).

Teorema 2.16. *Sea F una distribución spread-out con media $\mu \in (0, \infty]$. Entonces para cualquier distribución inicial λ y para todo $h > 0$ se tiene*

$$\lim_{t \to \infty} ||U^\lambda(\cdot \cap [t, t+h]) - \mu^{-1}\ell_0(\cdot \cap [t, t+h])|| = 0,$$

o, equivalentemente

$$\lim_{t \to \infty} \sup_{A \in \mathscr{B}([0,a])} |U^\lambda(t + A) - \mu^{-1}\ell_0(A)| = 0.$$

Con respecto al teorema clave de renovación, la siguiente versión extiende al teorema clásico en dos maneras: la primera es que la convergencia es uniforme dentro de una clase especial de funciones y la segunda es que se suavizan las condiciones en la función g, en particular, no se requiere la propiedad de directamente Riemann integrabilidad.

Teorema 2.17. *Bajo las mismas hipótesis que en el teorema anterior, sea* $g \geq 0$ *una función definida en* $\mathbb{R}$*, acotada, integrable con respecto a* ℓ_0 *y que satisface* $\lim_{|t|\to\infty} g(t) = 0$*. Entonces*

$$\lim_{t\to\infty} \sup_{|h|\leq g} \left| U^\lambda * h(t) - \frac{1}{\mu}\int_{\mathbb{R}} h(x)\,\ell_0(dx) \right| = 0, \quad y$$

$$\lim_{t\to\infty} \sup_{|h|\leq g} |u^\lambda * h(t)| = 0,$$

para cualquier distribución inicial λ.

2.4. Medida potencial de un proceso de Lévy

La primera parte de este capítulo estuvo destinada al estudio de varios resultados de la teoría de renovación para caminatas aleatorias, ahora el objetivo es introducir algunos conceptos de la teoría de procesos de Lévy que en cierto sentido son una generalización de los anteriores y que serán de gran utilidad en todo lo que resta del trabajo.

En total analogía con las medidas de renovación para caminatas aleatorias (ver (2.1)), se define lo siguiente.

Definición 2.18. *Sea* ξ *un proceso de Lévy, la* **medida potencial** *asociada a* ξ *es la medida* U_ξ *en* $\mathscr{B}(\mathbb{R})$ *definida por*

$$U_\xi(B) = \mathbb{E}\left[\int_0^\infty \mathbf{1}_{\{\xi_t\in B\}} dt\right] \in [0,\infty],$$

para cada $B \in \mathscr{B}(\mathbb{R})$.

Ya que la definición anterior está en términos de una doble integral es claro que U_ξ es una medida. Además, por el teorema de Tonelli la definición anterior es equivalente a

$$U_\xi(B) = \int_0^\infty \mathbb{P}(\xi_t \in B)\,dt,$$

para cada $B \in \mathscr{B}(\mathbb{R})$. Al reescribir la igualdad anterior es inmediato que

$$\int_{\mathbb{R}} \mathbf{1}_B(y) U_\xi(dy) = \mathbb{E}\left[\int_0^\infty \mathbf{1}_B(\xi_t) dt\right] = \int_0^\infty \mathbb{E}\left[\mathbf{1}_B(\xi_t)\right] dt, \tag{2.12}$$

por lo que utilizando la maquinaria básica de aproximación de funciones medibles positivas mediante funciones simples, (2.12) es válida para toda $f : \mathbb{R} \to [0,\infty)$ medible, es decir

$$\int_{\mathbb{R}} f(y) U_\xi(dy) = \mathbb{E}\left[\int_0^\infty f(\xi_t) dt\right] = \int_0^\infty \mathbb{E}\left[f(\xi_t)\right] dt. \tag{2.13}$$

La medida potencial anterior es un concepto importante para determinar la recurrencia o transitoriedad del proceso de Lévy ξ. A la cantidad

$$U_\xi(B) = \mathbb{E}\left[\int_0^\infty \mathbf{1}_{\{\xi_t \in B\}} dt\right],$$

en ocasiones se le suele llamar *tiempo medio de permanencia* en el conjunto B. El siguiente criterio complementa el que se dio en el teorema 1.15 (para su demostración, ver [Sat99, sección 7.35]).

Teorema 2.19. *Sea B_a la bola centrada en cero y de radio $a > 0$. El proceso de Lévy ξ es recurrente si y solo si para todo $a > 0$*

$$U_\xi(B_a) = \infty.$$

Y transitorio si y solo si para todo $a > 0$

$$U_\xi(B_a) < \infty.$$

En este trabajo, una propiedad de la medidas potenciales que será muy útil es su relación con las medidas de renovación para caminatas aleatorias, que se definieron en la primera sección del capítulo. En los siguientes capítulos quedarán de manifiesto todas las ventajas que esta relación implica.

Proposición 2.20. *Sea $\mathbf{e}$ una variable aleatoria exponencial de parámetro $\lambda = 1$ e independiente del proceso ξ, si F es la distribución en $\mathbb{R}$ dada por $F(dy) = \mathbb{P}(\xi_{\mathbf{e}} \in dy)$, entonces*

$$U_\xi(dy) = \sum_{n=1}^{\infty} F^{*(n)}(dy).$$

Demostración. Sea $\{\mathbf{e}_n : n \geq 1\}$ una sucesión de variables aleatorias i.i.d. exponenciales de parámetro $\lambda = 1$, e independientes también del proceso ξ. Ya que

$$\Gamma_{n+1} = \sum_{k=1}^{n+1} \mathbf{e}_k \sim gama(n+1, 1),$$

entonces al utilizar el teorema de convergencia monótona se tiene

$$
\begin{aligned}
U_\xi(dy) &= \int_0^\infty \mathbb{P}(\xi_t \in dy)dt \\
&= \int_0^\infty \left(\sum_{n=0}^\infty \frac{t^n}{n!}\right) e^{-t}\mathbb{P}(\xi_t \in dy)dt \\
&= \int_0^\infty \left(\sum_{n=0}^\infty \frac{t^n}{n!} e^{-t}\mathbb{P}(\xi_t \in dy)\right) dt \\
&= \sum_{n=0}^\infty \int_0^\infty \frac{t^n}{n!} e^{-t}\mathbb{P}(\xi_t \in dy)dt \\
&= \sum_{n=0}^\infty \mathbb{P}\left(\xi_{\Gamma_{n+1}} \in dy\right) = \sum_{n=1}^\infty \mathbb{P}\left(\xi_{\Gamma_n} \in dy\right). \qquad (2.14)
\end{aligned}
$$

Ahora, si se define $\Gamma_0 = 0$ es posible escribir

$$
\xi_{\Gamma_n} = \sum_{k=1}^n (\xi_{\Gamma_k} - \xi_{\Gamma_{k-1}}), \qquad (2.15)
$$

por lo que de (2.14) y (2.15) es claro que para demostrar la proposición basta probar que la sucesión de variables aleatorias $\{\xi_{\Gamma_k} - \xi_{\Gamma_{k-1}} : 1 \le k \le n\}$ es i.i.d. con distribución común $\mathbb{P}(\xi_{\mathbf{e}} \in dy)$. Pues bien, para cada $2 \le k \le n$ sea g_k la densidad de una v.a. gama de parámetros $(k,1)$, para toda función no negativa y acotada f se tiene por la propiedad de incrementos estacionarios del proceso ξ que

$$
\begin{aligned}
\mathbb{E}[f\left(\xi_{\Gamma_k} - \xi_{\Gamma_{k-1}}\right)] &= \int_0^\infty g_{k-1}(t)\mathbb{E}\left[f\left(\xi_{\mathbf{e}_k+t} - \xi_t\right)\right] dt \\
&= \int_0^\infty g_{k-1}(t)\left(\int_0^\infty e^{-s}\mathbb{E}[f(\xi_{s+t} - \xi_t)]ds\right) dt \\
&= \int_0^\infty g_{k-1}(t)\left(\int_0^\infty e^{-s}\mathbb{E}[f(\xi_s)]ds\right) dt \\
&= \int_0^\infty g_{k-1}(t)\left(\mathbb{E}\left[f(\xi_{\mathbf{e}_k})\right]\right) dt \\
&= \mathbb{E}\left[f(\xi_{\mathbf{e}})\right]
\end{aligned}
$$

por lo que la sucesión es idénticamente distribuída con distribución común $\mathbb{P}(\xi_{\mathbf{e}} \in dy)$. Para la independencia supóngase que $n = 2$ y sean $h_1, h_2 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ funciones medibles y acotadas, entonces, por la propiedad de incrementos independientes del proceso ξ

$$
\begin{aligned}
\mathbb{E}\left[h_1(\xi_{\Gamma_2}-\xi_{\Gamma_1})h_2(\xi_{\Gamma_1})\right] &= \mathbb{E}\left[h_1\left(\xi_{\mathbf{e}_1+\mathbf{e}_2}-\xi_{\mathbf{e}_1}\right)h_2\left(\xi_{\mathbf{e}_1}\right)\right] \\
&= \int_0^\infty e^{-t}\mathbb{E}\left[h_1\left(\xi_{\mathbf{e}_2+t}-\xi_t\right)h_2\left(\xi_t\right)\right]dt \\
&= \int_0^\infty e^{-t}\left(\int_0^\infty e^{-s}\mathbb{E}\left[h_1\left(\xi_{s+t}-\xi_t\right)h_2\left(\xi_t\right)\right]ds\right)dt \\
&= \int_0^\infty e^{-t}\left(\int_0^\infty e^{-s}\mathbb{E}\left[h_1\left(\xi_{s+t}-\xi_t\right)\right]\mathbb{E}[h_2\left(\xi_t\right)]\,ds\right)dt \\
&= \int_0^\infty e^{-t}\mathbb{E}\left[h_2\left(\xi_t\right)\right]\mathbb{E}\left[h_1\left(\xi_{\mathbf{e}_2+t}-\xi_t\right)\right]dt \\
&= \mathbb{E}\left[h_2\left(\xi_{\mathbf{e}_1}\right)\right]\mathbb{E}\left[h_1\left(\xi_{\mathbf{e}_2+\mathbf{e}_1}-\xi_{\mathbf{e}_1}\right)\right] \\
&= \mathbb{E}\left[h_2\left(\xi_{\Gamma_1}\right)\right]\mathbb{E}\left[h_1\left(\xi_{\Gamma_2}-\xi_{\Gamma_1}\right)\right],
\end{aligned}
$$

por lo que $\xi_{\Gamma_2}-\xi_{\Gamma_1}$ y ξ_{Γ_1} son independientes. El caso $n>2$ es totalmente análogo al anterior con la diferencia que aparecen n integrales interadas.

□

Corolario 2.21. *La medida potencial U_ξ es una medida de renovación asociada a la distribución $F(dy)=\mathbb{P}(\xi_{\mathbf{e}}\in dy)$.*

Demostración. Es inmediato de la proposición 2.20 pues ahí se establece que

$$U_\xi(dy)=\sum_{n=1}^{\infty}F^{*(n)}(dy),$$

donde $F(dy)=\mathbb{P}(\xi_{\mathbf{e}}\in dy)$, luego, por definición U_ξ es la medida de renovación asociada a F con distribución inicial F.

□

Ahora bien, es importante relacionar propiedades de los momentos de la distribución anterior F, con algunas propiedades asociadas al proceso de Lévy ξ, lo cual se describe en el corolario 2.24. Para ello, serán útiles los siguientes lemas.

Lema 2.22. *Si $\mathbb{E}[\xi_1]<\infty$ y $\mathbb{V}ar[\xi_1]<\infty$, entonces, para todo $t\geq 0$*

$$
\begin{aligned}
\mathbb{E}[\xi_t] &= t\mathbb{E}[\xi_1], \\
\mathbb{V}ar[\xi_t] &= t\mathbb{V}ar[\xi_1].
\end{aligned}
$$

Demostración. Si $\mathbb{E}[\xi_1]<\infty$, por el teorema 1.20 se tiene entonces que $\mathbb{E}[\xi_t]<\infty$, $\forall t\geq 0$. En este caso, sea $f(t)=\mathbb{E}[\xi_t]$ para $t\geq 0$, f así definida es una función aditiva ya que

$$f(t+s)=\mathbb{E}[\xi_{t+s}]=\mathbb{E}[\xi_{t+s}-\xi_t]+\mathbb{E}[\xi_t]=\mathbb{E}[\xi_s]+\mathbb{E}[\xi_t]=f(t)+f(s)$$

y además es continua, luego $f(t)=ct$ para alguna $c\in\mathbb{R}$, en particular, $c=f(1)=\mathbb{E}[\xi_1]$ y se tiene la primera identidad. Ahora bien, nuevamente por el teorema 1.20 se tiene que la finitud de $\mathbb{V}\mathrm{ar}[\xi_1]$ implica la finitud de todas las varianzas $\mathbb{V}\mathrm{ar}[\xi_t]$, $t \geq 0$, luego, un argumento similar al anterior se puede aplicar para la función $g(t) = \mathbb{V}\mathrm{ar}[\xi_t]$, $t \geq 0$.

$\square$

Lema 2.23. *Sea $\mathbf{e}_\lambda$ una variable aleatoria exponencial de parámetro $\lambda > 0$ independiente del proceso ξ, si $\mathbb{E}[\xi_1] < \infty$ y $\mathbb{V}ar[\xi_1] < \infty$, entonces*

$$\mathbb{E}\left[\xi_{\mathbf{e}_\lambda}\right] = \mathbb{E}[\mathbf{e}_\lambda]\,\mathbb{E}[\xi_1],$$
$$\mathbb{V}ar\left[\xi_{\mathbf{e}_\lambda}\right] = \mathbb{E}[\mathbf{e}_\lambda]\,\mathbb{V}ar[\xi_1] + \mathbb{E}[\xi_1]^2\,\mathbb{V}ar[\mathbf{e}_\lambda].$$

Demostración. De acuerdo al lema 2.22, para la primera igualdad nótese que

$$\mathbb{E}\left[\xi_{\mathbf{e}_\lambda}\right] = \int_0^\infty \lambda e^{-\lambda t}\mathbb{E}[\xi_t]\,dt = \mathbb{E}[\xi_1]\int_0^\infty t\lambda e^{-\lambda t}dt = \mathbb{E}[\xi_1]\,\mathbb{E}[\mathbf{e}_\lambda].$$

La segunda igualdad es ligeramente más complicada, para reducir la notación sean $a = \mathbb{E}[\xi_1]$ y $b = \mathbb{E}[\mathbf{e}_\lambda]$, entonces al utilizar la primera igualdad se tiene

$$\begin{aligned}
\mathbb{V}\mathrm{ar}\left[\xi_{\mathbf{e}_\lambda}\right] &= \mathbb{E}\left[\left(\xi_{\mathbf{e}_\lambda} - \mathbb{E}\left[\xi_{\mathbf{e}_\lambda}\right]\right)^2\right] \\
&= \mathbb{E}\left[\left(\xi_{\mathbf{e}_\lambda} - a\mathbf{e}_\lambda + a\mathbf{e}_\lambda - ab\right)^2\right] \\
&= \mathbb{E}\left[\left(\xi_{\mathbf{e}_\lambda} - a\mathbf{e}_\lambda\right)^2\right] + a^2\mathbb{E}\left[(\mathbf{e}_\lambda - b)^2\right] + 2a\mathbb{E}\left[\left(\xi_{\mathbf{e}_\lambda} - a\mathbf{e}_\lambda\right)(\mathbf{e}_\lambda - b)\right],
\end{aligned}$$

y desarrollando por separado cada término, por el lema 2.22 se obtiene

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}\left[\left(\xi_{\mathbf{e}_\lambda} - a\mathbf{e}_\lambda\right)^2\right] &= \int_0^\infty \lambda e^{-\lambda t}\mathbb{E}\left[(\xi_t - at)^2\right]dt \\
&= \mathbb{E}\left[(\xi_1 - a)^2\right]\int_0^\infty t\lambda e^{-\lambda t}dt \\
&= \mathbb{E}[\mathbf{e}_\lambda]\,\mathbb{E}\left[(\xi_1 - a)^2\right] = \mathbb{E}[\mathbf{e}_\lambda]\,\mathbb{V}\mathrm{ar}[\xi_1],
\end{aligned}$$

$$a^2\mathbb{E}\left[(\mathbf{e}_\lambda - b)^2\right] = \mathbb{E}[\xi_1]^2\,\mathbb{V}\mathrm{ar}[\mathbf{e}_\lambda], \quad \text{y}$$

$$\begin{aligned}
2a\mathbb{E}\left[\left(\xi_{\mathbf{e}_\lambda} - a\mathbf{e}_\lambda\right)(\mathbf{e}_\lambda - b)\right] &= 2a\int_0^\infty \lambda e^{-\lambda t}\mathbb{E}\left[(\xi_t - at)(t - b)\right]dt \\
&= 2a\int_0^\infty \lambda e^{-\lambda t}(t - b)\,\mathbb{E}\left[(\xi_t - \mathbb{E}[\xi_t])\right]dt = 0,
\end{aligned}$$

por lo tanto

$$\mathbb{V}\mathrm{ar}\left[\xi_{\mathbf{e}_\lambda}\right] = \mathbb{E}[\mathbf{e}_\lambda]\,\mathbb{V}\mathrm{ar}[\xi_1] + \mathbb{E}[\xi_1]^2\,\mathbb{V}\mathrm{ar}[\mathbf{e}_\lambda].$$

$\square$

Corolario 2.24. *Sea $F(dy) = \mathbb{P}(\xi_{\mathbf{e}} \in dy)$ la distribución asociada a la medida de renovación (potencial) U_ξ. La media μ y varianza σ^2 de F son finitas si y solo si la media y varianza de ξ_1 son finitas, respectivamente, y en este caso*

$$\mu = \mathbb{E}[\xi_1] \quad y \quad \sigma^2 = \mathbb{E}\left[\xi_1^2\right].$$

Demostración. Ya que $\mathbb{E}[\mathbf{e}] = 1$, la afirmación es inmediata del lema anterior. □

2.5. Más sobre la condición de Cramér

En la sección anterior se demostró que la medida potencial U_ξ de un proceso de Lévy es una medida de renovación en el sentido usual para caminatas aleatorias y que está asociada a la distribución

$$F(dy) = \mathbb{P}(\xi_{\mathbf{e}} \in dy).$$

Considérese ahora $\theta > 0$ tal que

$$\int_{\mathbb{R}} e^{\theta y} F(dy) = 1. \tag{2.16}$$

Entonces $F_\theta(dy) := e^{\theta y} F(dy)$ es nuevamente una distribución en $\mathbb{R}$ y su medida de renovación asociada (con distribución inicial F_θ) es

$$\sum_{n=1}^{\infty} F_\theta^{*(n)}(dy) = \sum_{n=1}^{\infty} (e^{\theta y} F)^{*(n)}(dy) = e^{\theta y} \sum_{n=1}^{\infty} F^{*(n)}(dy) = e^{\theta y} U_\xi(dy).$$

De lo anterior se desprende lo siguiente.

Proposición 2.25. *Sea ξ un proceso de Lévy que satisface la condición de Cramér, es decir, existe $\theta > 0$ tal que*

$$\mathbb{E}[e^{\theta \xi_1}] = 1.$$

Entonces, $U_\theta(dy) := e^{\theta y} U_\xi(dy)$ es una medida de renovación asociada a la distribución $F_\theta(dy) = e^{\theta y} F(dy)$, específicamente

$$U_\theta(dy) = \sum_{n=1}^{\infty} F_\theta^{*(n)}(dy).$$

Además, la media μ_θ y varianza σ_θ^2 de F_θ satisfacen

$$\mu_\theta = \mathbb{E}\left[\xi_1 e^{\theta \xi_1}\right] \in (0, \infty],$$
$$\sigma_\theta^2 = \mathbb{E}\left[\xi_1^2 e^{\theta \xi_1}\right] \in (0, \infty].$$

Demostración. Por el análisis anterior a la proposición, para la primera parte es suficiente verificar que la condición de Cramér implica (2.16). Pues bien, si $\mathbb{E}[e^{\theta \xi_1}] = 1$ entonces

$$\int_{\mathbb{R}} e^{\theta y} F(dy) = \mathbb{E}[e^{\theta \xi_{\mathbf{e}}}] = \int_0^\infty e^{-t} \mathbb{E}[e^{\theta \xi_t}] dt = \int_0^\infty e^{-t} \left(\mathbb{E}[e^{\theta \xi_1}]\right)^t dt = 1.$$

Para la segunda afirmación, sea $\mathbb{P}^\theta$ la medida de probabilidad del teorema 1.26, $(\xi, \mathbb{P}^\theta)$

es un proceso de Lévy por lo que utilizando nuevamente el lema 2.22 se tiene

$$\begin{aligned}\mu_\theta = \int_{\mathbb{R}} yF_\theta(dy) &= \int_{\mathbb{R}} ye^{\theta y}F(dy)\\&= \mathbb{E}\left[\xi_{\mathbf{e}}e^{\theta\xi_{\mathbf{e}}}\right]\\&= \int_0^\infty e^{-t}\mathbb{E}\left[\xi_t e^{\theta\xi_t}\right]dt\\&= \int_0^\infty e^{-t}\mathbb{E}^\theta\left[\xi_t\right]dt\\&= \int_0^\infty e^{-t}t\mathbb{E}^\theta\left[\xi_1\right]dt\\&= \mathbb{E}^\theta\left[\xi_1\right]\mathbb{E}\left[\mathbf{e}\right]\\&= \mathbb{E}\left[\xi_1 e^{\theta\xi_1}\right].\end{aligned}$$

Que $\mathbb{E}[\xi_1 e^{\theta\xi_1}] \in (0,\infty]$ se demostró en el lema 1.28. Por otro lado

$$\begin{aligned}\sigma_\theta^2 &= \int_{\mathbb{R}} (y-\mu_\theta)^2 F_\theta(dy)\\&= \int_{\mathbb{R}} (y-\mu_\theta)^2 e^{\theta y}F(dy)\\&= \mathbb{E}\left[(\xi_{\mathbf{e}}-\mu_\theta)^2 e^{\theta\xi_{\mathbf{e}}}\right]\\&= \int_0^\infty e^{-t}\mathbb{E}\left[(\xi_t-\mu_\theta)^2 e^{\theta\xi_t}\right]dt\\&= \int_0^\infty e^{-t}\mathbb{E}^\theta\left[(\xi_t-\mu_\theta)^2\right]dt\end{aligned}$$

y procediendo de manera análoga a la demostración del lema 2.23, si $a = \mathbb{E}^\theta\left[\xi_1\right]$ se tiene

$$\begin{aligned}\sigma_\theta^2 &= \int_0^\infty e^{-t}\mathbb{E}^\theta\left[(\xi_t-at)^2\right]dt + a^2\int_0^\infty e^{-t}(t-1)^2dt + 2a\int_0^\infty e^{-t}(t-1)\mathbb{E}^\theta\left[\xi_t-at\right]dt\\&= \mathbb{E}^\theta\left[(\xi_1-a)^2\right]+a^2\\&= \mathbb{E}^\theta\left[\xi_1^2\right]\\&= \mathbb{E}\left[\xi_1^2 e^{\theta\xi_1}\right],\end{aligned}$$

finalmente, ya que

$$\mathbb{E}[\xi_1 e^{\theta\xi_1}] = \mathbb{E}^\theta\left[\xi_1\right] \le \mathbb{E}^\theta\left[\xi_1^2\right]^{1/2} = \mathbb{E}\left[\xi_1^2 e^{\theta\xi_1}\right]^{1/2},$$

es claro que también se cumple $\mathbb{E}\left[\xi_1^2 e^{\theta\xi_1}\right] \in (0,\infty]$.

□

Además de lo expuesto en la sección 1.3, cuando un proceso de Lévy satisface la condición de Cramér, se tienen algunas consecuencias más. Sea ξ un proceso de Lévy con índice de Cramér $\theta > 0$, por el lema 1.28, la media $\mathbb{E}\left[\xi_1\right]$ está definida y satisface

$$\mathbb{E}\left[\xi_1\right] \in [-\infty, 0).$$

Utilizando el teorema 1.15 y la proposición 1.17, es posible asegurar que el proceso ξ es transitorio, deriva a menos infinito, i.e.

$$\lim_{t\to\infty} \xi_t = -\infty \text{ c.s.}$$

y, de acuerdo al teorema 2.19,

$$U_\xi(B) < \infty$$

para todo $B \in \mathscr{B}(\mathbb{R})$ acotado, es decir, U_ξ es una medida localmente finita.

Cuando se considera el cambio de medida $\mathbb{P}^\theta$ del teorema 1.26, las propiedades de ξ y U_θ son las siguientes.

Lema 2.26. *Sean ξ y θ como en la proposición anterior. Entonces, bajo $\mathbb{P}^\theta$, ξ es un proceso de Lévy transitorio y deriva a mas infinito, es decir*

$$\lim_{t\to\infty} \xi_t = \infty \text{ c.s.}$$

Además, su medida potencial es $U_\theta(dy) := e^{\theta y} U_\xi(dy)$ y también es una medida localmente finita.

Demostración. En el lema 1.28 se demostró que

$$\mathbb{E}^\theta[\xi_1] = \mathbb{E}\left[\xi_1 e^{\theta \xi_1}\right] \in (0, \infty],$$

por lo que el proceso ξ, bajo $\mathbb{P}^\theta$, es transitorio y por la proposición 1.17

$$\lim_{t\to\infty} \xi_t = \infty \text{ c.s.} \tag{2.17}$$

Por las identidades en (2.13), para todo $B \in \mathscr{B}(\mathbb{R})$

$$\begin{aligned} U_\theta(B) &= \int_{\mathbb{R}} \mathbf{1}_B(y) U_\theta(dy) \\ &= \int_{\mathbb{R}} \mathbf{1}_B(y) e^{\theta y} U_\xi(dy) \\ &= \int_0^\infty \mathbb{E}\left[\mathbf{1}_B(\xi_t) e^{\theta \xi_t}\right] dt \\ &= \int_0^\infty \mathbb{E}^\theta[\mathbf{1}_B(\xi_t)]\, dt \\ &= \mathbb{E}^\theta\left[\int_0^\infty \mathbf{1}_{\{\xi_t \in B\}} dt\right], \end{aligned}$$

por lo que U_θ es la medida potencial del proceso ξ bajo $\mathbb{P}^\theta$. Que $U_\theta(dy) := e^{\theta y} U_\xi(dy)$ sea localmente finita es consecuencia de (2.17).

□

Notas

Como se mencionó en la descripción inicial del capítulo, las secciones 2.1, 2.2, 2.3 y 2.4 se basaron casi en su totalidad en el libro aún no publicado *Renewal, recurrence and regeneration* de Gerold Alsmeyer, y que puede descargarse desde la página personal del autor. Este libro confiere únicamente el caso de caminatas aleatorias pero en el aspecto más general posible, es decir, cuando el soporte de la distribución asociada no necesariamente está restringido a los reales positivos, además, dedica un capítulo exclusivamente para retomar diferentes pruebas del teorema de renovación de Blackwell y las adapta para el caso general antes mencionado, utilizando lo que denomina la descomposición clíclica de las medidas de renovación.

Después de una búsqueda entre la literatura clásica de teoría de renovación para caminatas aleatorias, es posible que el libro antes mencionado se convierta en una excelente referencia a futuro en el tema.

En las secciones 2.5 y 2.6 se pretendió conectar la teoría de caminatas aleatorias de las secciones anteriores con la teoría de procesos de Lévy, introduciendo el concepto de medida potencial. Estas secciones no se basaron en referencias específicas pero el capítulo 5 de [Kyp06] y la sección 1.4 de [Ber96] pueden ser muy útiles para profundizar en los conceptos de la sección 2.5

CAPÍTULO 3

Una estimación de la cola de distribución derecha para funcionales exponenciales

En la última sección del capítulo 1 se probó que si ξ es un proceso de Lévy que deriva a menos infinito, es decir, que satisface la condición

$$\lim_{t\to\infty} \xi_t = -\infty, \quad \text{c.s.},$$

entonces el proceso ξ es transitorio y, por el lema 1.35, se tiene que el funcional exponencial

$$I = \int_0^\infty e^{\xi_t} dt,$$

es finito c.s. Más aún, bajo estas condiciones es posible asegurar que la distribución del funcional I tiene densidad $k(x)$ con respecto a la medida de Lebesgue (ver sección 1.4). Sin embargo, en general no existe una fórmula explícita que permita determinar a la función $k(x)$ (y por lo tanto a la distribución de I), principalmente debido a que el funcional exponencial I está definido a partir de toda la trayectoria del proceso ξ.

Es posible, sin embargo, obtener en algunos casos que la densidad $k(x)$ satisface cierta ecuación integral. Si U_ξ es la medida potencial asociada al proceso ξ, entonces, en la sección 3.1 se prueba que la densidad $k(x)$ satisface la ecuación

$$\int_t^\infty k(y)dy = \int_{\mathbb{R}} k(te^{-y}) U_\xi(dy), \ \ \text{c.s.},$$

que en términos del funcional I, se puede reescribir como

$$\mathbb{P}\left(\int_0^\infty e^{\xi_s} ds > t\right) = \int_{\mathbb{R}} k(te^{-y}) U_\xi(dy), \ \ \text{c.s.} \tag{3.1}$$

La identidad (3.1) permite ahora abordar el problema de estudiar la cola de distribución derecha del funcional exponencial $I = \int_0^\infty e^{\xi_s} ds$, esto mediante la manipulación de la integral en el lado derecho, en donde las propiedades asintóticas de la medida potencial U_ξ, vista como medida de renovación para caminatas aleatorias (teorema 2.19), serán las herramientas principales. La descripción detallada de estas últimas afirmaciones anteriores es el objetivo de la sección 3.2.

3.1. Una identidad fundamental

En [PRvS13, proposición 2.3], Pardo, Rivero y van Schaik, demostraron que cuando $\xi = -\sigma$, con σ un subordinador, entonces la densidad $k(x)$ del funcional $I = \int_0^\infty e^{-\sigma_s} ds$ satisface la ecuación integral

$$\int_t^\infty k(y)dy = \int_0^\infty k(te^y)U_\sigma(dy), \quad \text{c.s.},$$

donde U_σ es la medida potencial del subordinador σ. La proposición que se enuncia a continuación generaliza el resultado anterior para el caso en que ξ es un proceso de Lévy que deriva a menos infinito.

Proposición 3.1. *Sea ξ un proceso de Lévy que deriva a menos infinito, es decir, $\lim_{t\to\infty} \xi_t = -\infty$. Si U_ξ es la medida potencial asociada a ξ, entonces*

$$\int_t^\infty k(y)dy = \int_{\mathbb{R}} k(te^{-y})U_\xi(dy), \quad \text{c.s.} \tag{3.2}$$

Demostración. Sean f y g las funciones dadas por

$$f(t) := \int_t^\infty k(y)dy \quad \text{y} \quad g(t) := \int_{\mathbb{R}} k(te^{-y})U(dy), \text{ para todo } t \geq 0.$$

Se demostrará que f y g tienen la misma transformada de Laplace, ya que en este caso, por unicidad (ver [Fel71, pág. 432]) se tiene que

$$f(t) = g(t), \quad \text{c.s.}$$

La transformada de Laplace $\mathscr{L}_g$ de g está dada para $\lambda > 0$ por

$$\begin{aligned}
\mathscr{L}_g(\lambda) &= \int_0^\infty e^{-\lambda t} g(t)dt \\
&= \int_0^\infty e^{-\lambda t} \left(\int_{\mathbb{R}} k(te^{-y})U(dy) \right) dt \\
&= \int_{\mathbb{R}} \left(\int_0^\infty e^{-\lambda t} k(te^{-y})dt \right) U(dy) \\
&= \int_{\mathbb{R}} \left(\int_0^\infty e^y e^{-\lambda z e^y} k(z)dz \right) U(dy), \qquad (3.3)
\end{aligned}$$

donde en la última igualdad se hizo el cambio de variable $z = te^{-y}$. Ahora bien, para cada $v > 0$ sea $\tilde{\xi}^v := \{\xi_{s+v} - \xi_v : s \geq 0\}$, entonces $\tilde{\xi}^v \perp\!\!\!\perp \xi_v$ y $\xi^v \overset{D}{=} \xi$ por lo que $I^v :=$

$\int_0^\infty e^{\xi_{s+v}-\xi_v} ds$ tiene la misma distribución que I y es independiente de ξ_v, para cada $v > 0$. Ya que I tiene densidad k, al utilizar (2.1) en la expresión (3.3) se obtiene

$$\begin{aligned}
\mathscr{L}_g(\lambda) &= \int_0^\infty \mathbb{E}\left[\int_0^\infty e^{\xi_v} e^{-\lambda z e^{\xi_v}} k(z)dz\right] dv \\
&= \int_0^\infty \mathbb{E}\left[\mathbb{E}\left[e^x e^{-\lambda I^v e^x}\right]\Big|_{x=\xi_v}\right] dv \\
&= \int_0^\infty \mathbb{E}\left[e^{\xi_v} e^{-\lambda I^v e^{\xi_v}}\right] dv \\
&= \lim_{u\downarrow 0} \int_u^\infty \mathbb{E}\left[e^{\xi_v} e^{-\lambda I^v e^{\xi_v}}\right] dv, \qquad (3.4)
\end{aligned}$$

cada término del límite anterior se puede reescribir como

$$\begin{aligned}
\int_u^\infty \mathbb{E}\left[e^{\xi_v} e^{-\lambda I^v e^{\xi_v}}\right] dv &= \int_u^\infty \mathbb{E}\left[e^{\xi_v} e^{-\lambda e^{\xi_v} \int_0^\infty (e^{\xi_{s+v}-\xi_v}) ds}\right] dv \\
&= \mathbb{E}\left[\int_u^\infty e^{\xi_v} e^{-\lambda e^{\xi_v} \int_0^\infty (e^{\xi_{s+v}-\xi_v}) ds} dv\right] \\
&= \mathbb{E}\left[\int_u^\infty e^{\xi_v} e^{-\lambda \int_v^\infty e^{\xi_s} ds} dv\right] \\
&= \frac{1}{\lambda}\mathbb{E}\left[\int_u^\infty d\left(e^{-\lambda \int_v^\infty e^{\xi_s} ds}\right)\right] \\
&= \frac{1}{\lambda}\mathbb{E}\left[1 - e^{-\lambda \int_u^\infty e^{\xi_s} ds}\right]
\end{aligned}$$

por lo que al retomar (3.4) y utilizando el teorema de convergencia dominada se tiene finalmente

$$\mathscr{L}_g(\lambda) = \lim_{u\downarrow 0} \frac{1}{\lambda}\mathbb{E}\left[1 - e^{-\lambda \int_u^\infty e^{\xi_s} ds}\right] = \frac{1}{\lambda}\mathbb{E}\left[1 - e^{-\lambda I}\right]. \qquad (3.5)$$

Por otro lado la transformada de Laplace $\mathscr{L}_f$ de f evaluada en $\lambda > 0$ es

$$\begin{aligned}
\mathscr{L}_f(\lambda) &= \int_0^\infty e^{-\lambda t} f(t)dt \\
&= \int_0^\infty e^{-\lambda t}\left(\int_t^\infty k(y)dy\right) dt \\
&= \int_0^\infty e^{-\lambda t} \mathbb{P}(I > t)\, dt \\
&= \mathbb{E}\left[\int_0^\infty e^{-\lambda t} \mathbf{1}_{\{I>t\}} dt\right]
\end{aligned}$$

y casi seguramente se tiene la igualdad $\int_0^\infty e^{-\lambda t} \mathbf{1}_{\{I>t\}} dt = \frac{1}{\lambda}\left(1 - e^{-\lambda I}\right)$, por lo tanto

$$\mathscr{L}_f(\lambda) = \mathbb{E}\left[\int_0^\infty e^{-\lambda t} \mathbf{1}_{\{I>t\}} dt\right] = \frac{1}{\lambda}\mathbb{E}\left[1 - e^{-\lambda I}\right], \qquad (3.6)$$

así, de (3.5) y (3.6) se concluye que $\mathscr{L}_f = \mathscr{L}_g$ y por lo tanto

$$\int_t^\infty k(y)dy = \int_{\mathbb{R}} k(te^{-y}) U(dy), \text{ c.s.}$$

□

La identidad anterior es la herramienta fundamental para la demostración de las dos proposiciones principales de esta tesis (proposiciones 3.2 y 4.8), es por ello que de ahora en adelante la identidad (3.2) siempre se referirá como la **identidad fundamental**.

Para finalizar esta sección, se describen a continuación otras consecuencias interesantes de la identidad (3.2) que resultan fáciles de deducir con base en el trabajo de los capítulos anteriores.

I. Como ya se comentó, en el caso en que $\xi = -\sigma$, con σ un subordinador, se recupera la identidad de Pardo, Rivero y van Schaik [PRvS13, proposición 2.3].

II. En el lema 1.37 se obtuvo una identidad sobre los momentos positivos del funcional I. Con ayuda de (3.2) se puede obtener la misma identidad de manera mucho más directa. Si φ es el exponente de Laplace de ξ, para $\beta > 0$ se tiene que

$$\begin{aligned}\mathbb{E}\left[I^{\beta}\right] &= \beta \int_0^{\infty} s^{\beta-1}\mathbb{P}(I > s)\,ds \\ &= \beta \int_0^{\infty} s^{\beta-1}\left(\int_{\mathbb{R}} k(se^{-y})U_{\xi}(dy)\right)ds \\ &= \beta \int_{\mathbb{R}}\left(\int_0^{\infty} s^{\beta-1}k(se^{-y})ds\right)U_{\xi}(dy) \\ &= \beta \int_{\mathbb{R}} e^{(\beta-1)y}e^{y}\left(\int_0^{\infty} t^{\beta-1}k(t)dt\right)U_{\xi}(dy) \\ &= \beta\mathbb{E}\left[I^{\beta-1}\right]\int_{\mathbb{R}} e^{\beta y}U_{\xi}(dy). \qquad (3.7)\end{aligned}$$

Por lo tanto, la finitud de $\mathbb{E}[I^{\beta}]$ implica también la finitud del término $\mathbb{E}[I^{\beta-1}]$. Supóngase ahora que $\mathbb{E}[e^{\beta\xi_1}] < 1$, equivalentemente $\varphi(\beta) < 0$. En este caso, las identidades en (2.13) implican

$$\int_{\mathbb{R}} e^{\beta y}U_{\xi}(dy) = \int_0^{\infty}\mathbb{E}\left[e^{\beta\xi_t}\right]dt = \int_0^{\infty} e^{t\varphi(\beta)}dt = \frac{1}{-\varphi(\beta)},$$

por lo que retomando (3.7) se tiene

$$\mathbb{E}[I^{\beta}] = \frac{\beta}{-\varphi(\beta)}\mathbb{E}[I^{\beta-1}], \qquad (3.8)$$

que es la identidad en el lema 1.37.

III. Incluso es posible extender (3.8) a momentos complejos, de la siguiente manera. Recuérdese que para $t \in \mathbb{R}^+$ y $z \in \mathbb{C}$, $z = a + ib$, se define

$$t^z := e^{z\log(t)} = t^a e^{ib\log(t)}.$$

Ya que las igualdades en (3.7) son válidas en el caso complejo, entonces

$$\mathbb{E}\left[I^z\right] = z\mathbb{E}\left[I^{z-1}\right]\int_{\mathbb{R}} e^{zy}U_{\xi}(dy).$$

Además, las identidades en (2.13) pueden generalizarse a funciones con valores complejos, por lo que si $\Re(z) \in C$ (con C el conjunto en (1.9)) y $\Re(\varphi(z)) < 0$, entonces

$$\int_{\mathbb{R}} e^{zy} U_\xi(dy) = \int_0^\infty \mathbb{E}\left[e^{z\xi_t}\right] dt = \int_0^\infty e^{t\varphi(z)} dt = \frac{1}{-\varphi(z)}.$$

En resumen, para cualquier $z \in \mathbb{C}$ tal que $\Re(z) \in C$ y $\Re(\varphi(z)) < 0$, se tiene

$$\mathbb{E}[I^z] = \frac{z}{-\varphi(z)} \mathbb{E}[I^{z-1}].$$

3.2. Estimaciones bajo la condición de Cramér

Se ha dicho que otra manera de escribir a la identidad fundamental, demostrada en la sección anterior, es

$$\mathbb{P}\left(\int_0^\infty e^{\xi_s} ds > t\right) = \int_{\mathbb{R}} k(te^{-y}) U_\xi(dy), \quad \text{c.s.,} \tag{3.9}$$

y por lo tanto, es posible abordar el problema de obtener estimaciones en infinito para la cola de distribución

$$t \mapsto \mathbb{P}\left(\int_0^\infty e^{\xi_s} ds > t\right). \tag{3.10}$$

Específicamente, en esta sección se muestra que la identidad fundamental (3.9) permite dar una demostración alternativa de un resultado de Méjane [Mej02] y Rivero [Riv05], que proporciona una estimación en infinito para la cola (3.10), cuando el proceso de Lévy satisface la **condición de Cramér** (proposición 3.2)

Como análisis preliminar para estudiar el comportamiento en infinito de (3.10), usando el corolario 1.38 es posible obtener que, si $\beta \in (0, \theta)$, entonces (3.10) decrece al menos como una función potencia de orden β, es decir

$$\mathbb{P}\left(\int_0^\infty e^{\xi_s} ds > t\right) = o\left(t^{-\beta}\right), \quad t \to \infty.$$

Para ver esto, considérese $\beta > 0$, ya que

$$\begin{aligned}
\int_0^\infty s^{\beta-1} \mathbb{P}(I > s) ds &= \int_0^\infty s^{\beta-1} \left(\int_s^\infty k(v) dv\right) ds \\
&= \int_0^\infty k(v) \left(\int_0^v s^{\beta-1} ds\right) dv \\
&= \frac{1}{\beta} \int_0^\infty v^\beta k(v) dv \\
&= \frac{1}{\beta} \mathbb{E}[I^\beta],
\end{aligned} \tag{3.11}$$

y, por el corolario 1.38,

$$\mathbb{E}[I^\beta] < \infty \quad \text{si y solo si} \quad \beta \in [0, \theta), \tag{3.12}$$

entonces, combinando (3.11) y (3.12) se tiene que para todo $\beta \in (0,\theta)$ y para todo $t > 0$

$$\begin{aligned} t^{\beta}\mathbb{P}(I>t) &\leq \beta \int_0^t s^{\beta-1}\mathbb{P}(I>s)\,ds \\ &\leq \beta \int_0^{\infty} s^{\beta-1}\mathbb{P}(I>s)\,ds = \mathbb{E}[I^{\beta}] < \infty. \end{aligned}$$

Lo anterior implica que el conjunto $\{t^{\beta}\mathbb{P}(I>t) : t>0\}$ está acotado superiormente por $\mathbb{E}[I^{\beta}]$ y por lo tanto

$$0 \leq \limsup_{t\to\infty} t^{\beta}\mathbb{P}(I>t) \leq \mathbb{E}[I^{\beta}] < \infty.$$

Ya que las afirmaciones anteriores fueron para todo $\beta \in (0,\theta)$, si $0<\beta_1<\beta_2<\theta$, entonces

$$0 \leq \limsup_{t\to\infty} t^{\beta_1}\mathbb{P}(I>t) = \limsup_{t\to\infty} t^{\beta_1-\beta_2}t^{\beta_2}\mathbb{P}(I>t) = 0$$

pues $t^{\beta_1-\beta_2}$ decrece a cero, de esta manera se obtiene que para todo $\beta \in (0,\theta)$

$$0 \leq \liminf_{t\to\infty} t^{\beta}\mathbb{P}(I>t) \leq \limsup_{t\to\infty} t^{\beta}\mathbb{P}(I>t) = 0,$$

y por lo tanto

$$\mathbb{P}\left(\int_0^{\infty} e^{\xi_s}ds > t\right) = o\left(t^{-\beta}\right), \quad t\to\infty.$$

Esta aproximación quiere decir que la cola de distribución $t \to \mathbb{P}(I>t)$ puede escribirse como la función t^{β} multiplicada por una función $f(t)$ que tiende a cero cuando t tiende a infinito, es decir

$$\mathbb{P}\left(\int_0^{\infty} e^{\xi_s}ds > t\right) = t^{-\beta}f(t), \tag{3.13}$$

donde $f(t)\to 0$ cuando $t\to\infty$. En realidad esta no es una muy buena aproximación ya que lo anterior no proporciona prácticamente ninguna información sobre la función $f(t)$.

Cuando el proceso de Lévy ξ satisface la **condición de Cramér**, Rivero ([Riv05, lema 4]) y Méjane ([Mej02, teorema 1.1]), aplicando algunos resultados de Kesten y Goldie en ecuaciones afines aleatorias[1], obtuvieron una estimación más precisa que la descrita en (3.13). El objetivo principal de esta sección es dar una demostración alternativa de este resultado (proposición 3.2), que tiene la ventaja de no apelar a los resultados de Kesten y Goldie como se hizo originalmente, y que se basa fundamentalmente en la identidad enunciada en la proposición 3.1.

Proposición 3.2. *Sea ξ un proceso de Lévy no aritmético que satisface la condición de Cramér con $\theta>0$ y $\mathbb{E}[\xi_1^{+}e^{\theta\xi_1}]<\infty$. Entonces existe una constante $C>0$ tal que*

$$\mathbb{P}\left(\int_0^{\infty} e^{\xi_s}\,ds > t\right) \sim Ct^{-\theta}, \quad t\to\infty. \tag{3.14}$$

Además, $C = \frac{\mathbb{E}[I^{\theta-1}]}{\mathbb{E}[\xi_1 e^{\theta\xi_1}]}$.

[1] Ver la sección 4.1 del siguiente capítulo.

Demostración. La prueba se dividirá en tres casos, de acuerdo a lo siguiente

$$\theta \in (0,1), \quad \theta = 0 \ \text{ó} \ \theta \in (1,\infty).$$

Caso $\theta < 1$. Por el lema 1.37, el término $\mathbb{E}[I^{\theta-1}]$ es finito. Ya que $\mathbb{E}[\xi_1 e^{\theta\xi_1}]$ es finito si y solo si $\mathbb{E}[\xi_1^+ e^{\theta\xi_1}]$ lo es, entonces, por la proposición 2.25, también es posible asegurar que

$$\mu_\theta := \mathbb{E}[\xi_1 e^{\theta\xi_1}] \in (0,\infty).$$

Para obtener el límite (3.14), será suficiente probar

$$\lim_{t\to\infty} t^{\theta-1}\int_0^t \mathbb{P}(I>s)\,ds = \frac{\mathbb{E}[I^{\theta-1}]}{\mu_\theta(1-\theta)}, \tag{3.15}$$

pues en este caso, el teorema A.1 de los apéndices asegura

$$\lim_{t\to\infty} t^{\theta}\mathbb{P}(I>t) = \frac{\mathbb{E}[I^{\theta-1}]}{\mu_\theta(1-\theta)}(1-\theta) = \frac{\mathbb{E}[I^{\theta-1}]}{\mu_\theta},$$

que es justo (3.14). Pues bien, al usar la identidad de la proposición 3.1 se tiene, para todo $t>0$

$$\begin{aligned}
\int_0^t \mathbb{P}(I>s)\,ds &= \int_0^t \left(\int_{\mathbb{R}} k(se^{-y})U(dy)\right) ds \\
&= \int_{\mathbb{R}} \left(\int_0^t k(se^{-y})ds\right) U(dy) \\
&= \int_{\mathbb{R}} \left(\int_0^{te^{-y}} e^y k(v)dv\right) U(dy),
\end{aligned}$$

por lo tanto

$$t^{\theta-1}\int_0^t \mathbb{P}(I>s)\,ds = t^{\theta-1}\int_{\mathbb{R}} e^y \left(\int_0^{te^{-y}} k(v)dv\right) U(dy).$$

Haciendo $t=e^x$ con $x\in\mathbb{R}$, es posible reescribir lo anterior como

$$\begin{aligned}
e^{(\theta-1)x}\int_0^{e^x} \mathbb{P}(I>s)\,ds &= e^{(\theta-1)x}\int_{\mathbb{R}} e^y \left(\int_0^{e^x e^{-y}} k(v)dv\right) U(dy) \\
&= \int_{\mathbb{R}} e^{\theta x} e^{y-x} \left(\int_0^{e^{x-y}} k(v)dv\right) U(dy) \\
&= \int_{\mathbb{R}} e^{\theta(x-y)} e^{-(x-y)} \left(\int_0^{e^{x-y}} k(v)dv\right) e^{\theta y} U(dy) \\
&= \int_{\mathbb{R}} \psi_\theta(x-y) U_\theta(dy), \qquad (3.16)
\end{aligned}$$

donde $\psi_\theta(x) = e^{(\theta-1)x}\int_0^{e^x} k(v)dv$ es la función descrita en el lema 3.3 y

$$U_\theta(dy) = e^{\theta y}U(dy),$$

es la medida de renovación asociada a la distribución $F_\theta(dy) = e^{\theta y}F(dy)$ (ver proposición 2.25).

Entonces, se requiere determinar el límite, cuando x tiende a infinito, de la expresión

$$\int_{\mathbb{R}} \psi_\theta(x-y)U_\theta(dy). \tag{3.17}$$

Para ello, el lema 3.3 afirma que ψ_θ es una función dRi y nuevamente por la proposición 2.25, F_θ es una distribución con media $\mu_\theta := \mathbb{E}[\xi_1 e^{\theta\xi_1}] \in (0,\infty)$, por lo tanto, el teorema clave de renovación (teorema 2.5) aplicado a la expresión (3.17) da como resultado

$$\psi_\theta(x) + \int_{\mathbb{R}} \psi_\theta(x-y)U_\theta(dy) \overset{x\to\infty}{\longrightarrow} \frac{1}{\mu_\theta}\int_{\mathbb{R}} \psi_\theta(x)dx = \frac{\mathbb{E}[I^{\theta-1}]}{\mu_\theta(1-\theta)}.$$

Además, por el lema 3.4 se cumple que $\psi_\theta(x) \to 0$ cuando $x \to \infty$, por lo tanto

$$e^{(\theta-1)x}\int_0^{e^x} \mathbb{P}\,(I > s)\,ds = \int_{\mathbb{R}} \psi_\theta(x-y)U_\theta(dy) \overset{x\to\infty}{\longrightarrow} \frac{\mathbb{E}[I^{\theta-1}]}{\mu_\theta(1-\theta)}.$$

Así, cuando $t = e^x$ tiende a infinito, se tiene finalmente el límite (3.15):

$$t^{\theta-1}\int_0^t \mathbb{P}(I > s)ds \longrightarrow \frac{\mathbb{E}[I^{\theta-1}]}{\mu_\theta(1-\theta)}.$$

Caso $\theta > 1$. El corolario 1.38 garantiza que el término $\mathbb{E}[I^{\theta-1}]$ es finito y también garantiza que, para todo $t > 0$

$$\int_t^\infty \mathbb{P}(I > s)ds \le \int_0^\infty \mathbb{P}(I > s)ds = \mathbb{E}[I] < \infty.$$

Por lo tanto, de manera similar al caso anterior, será suficiente probar

$$\lim_{t\to\infty} t^{\theta-1}\int_t^\infty \mathbb{P}(I > s)ds = \frac{\mathbb{E}[I^{\theta-1}]}{\mu_\theta(\theta-1)}, \tag{3.18}$$

pues el teorema A.1 implica inmediatamente

$$\lim_{t\to\infty} t^\theta \mathbb{P}(I > t) = -\frac{\mathbb{E}[I^{\theta-1}]}{\mu_\theta(\theta-1)}(1-\theta) = \frac{\mathbb{E}[I^{\theta-1}]}{\mu_\theta},$$

que es el límite (3.14). Nuevamente por la identidad de la proposición 3.1, se tiene

$$\begin{aligned}
\int_t^\infty \mathbb{P}(I > s)ds &= \int_t^\infty \left(\int_{\mathbb{R}} k(se^{-y})U(dy)\right)ds \\
&= \int_{\mathbb{R}} \left(\int_t^\infty k(se^{-y})ds\right)U(dy) \\
&= \int_{\mathbb{R}} e^y \left(\int_{te^{-y}}^\infty k(v)dv\right)U(dy),
\end{aligned}$$

por lo que

$$t^{\theta-1}\int_t^\infty \mathbb{P}(I > s)ds = t^{\theta-1}\int_{\mathbb{R}} e^y\left(\int_{te^{-y}}^\infty k(v)dv\right)U(dy).$$

Haciendo $t = e^x$ con $x \in \mathbb{R}$, se puede reescribir lo anterior como

$$\begin{aligned}
e^{(\theta-1)x} \int_{e^x}^{\infty} \mathbb{P}(I > s) ds &= e^{(\theta-1)x} \int_{\mathbb{R}} e^y \left(\int_{e^x e^{-y}}^{\infty} k(v) dv \right) U(dy) \\
&= \int_{\mathbb{R}} e^{\theta(x-y)} e^{-(x-y)} \left(\int_{e^{x-y}}^{\infty} k(v) dv \right) e^{\theta y} U(dy) \\
&= \int_{\mathbb{R}} \tilde{\psi}_\theta (x-y) U_\theta (dy), \qquad (3.19)
\end{aligned}$$

con $\tilde{\psi}_\theta = e^{(\theta-1)x} \int_{e^x}^{\infty} k(v) dv$ y $U_\theta(dy)$ la misma medida de renovación del caso anterior. Por los lemas 3.3 y 3.4, $\tilde{\psi}_\theta$ es una función dRi y se anula en infinito, así, de manera similar al caso anterior, al aplicar el teorema clave de renovación a (3.19) se obtiene

$$\int_{\mathbb{R}} \tilde{\psi}_\theta (x-y) U_\theta (dy) \xrightarrow{x\to\infty} \frac{1}{\mu_\theta} \int_{\mathbb{R}} \tilde{\psi}_\theta (x) dx = \frac{\mathbb{E}[I^{\theta-1}]}{\mu_\theta (\theta-1)}.$$

Por lo tanto, cuando t tiende a infinito, se tiene el límite (3.18):

$$t^{\theta-1} \int_t^{\infty} \mathbb{P}(I > s) ds \longrightarrow \frac{\mathbb{E}[I^{\theta-1}]}{\mu_\theta (\theta-1)}.$$

Caso $\theta = 1$. Por el teorema A.2 de los apéndices, bastará verificar que para todo $\lambda > 1$

$$\lim_{t\to\infty} \int_t^{\lambda t} \mathbb{P}(I > s) ds = \frac{1}{\mu_\theta} \cdot \log \lambda,$$

pues en este caso se tiene

$$\lim_{t\to\infty} t\, \mathbb{P}(I > t) = \frac{1}{\mu_\theta},$$

que es el límite (3.14) para el caso $\theta = 1$.

Sea pues $\lambda > 1$, por la identidad de la proposición 3.1 se tienen las igualdades

$$\begin{aligned}
\int_t^{\lambda t} \mathbb{P}(I > s) ds &= \int_t^{\lambda t} \left(\int_{\mathbb{R}} k(se^{-y}) U(dy) \right) ds \\
&= \int_{\mathbb{R}} \left(\int_t^{\lambda t} k(se^{-y}) ds \right) U(dy) \\
&= \int_{\mathbb{R}} e^y \left(\int_{te^{-y}}^{\lambda te^{-y}} k(v) dv \right) U(dy).
\end{aligned}$$

Haciendo $t = e^x$ con $x \in \mathbb{R}$ y, como antes, $U_\theta(dy) = e^y U(dy)$, entonces

$$\begin{aligned}
\int_{e^x}^{\lambda e^x} \mathbb{P}(I > s) ds &= \int_{\mathbb{R}} \left(\int_{e^{x-y}}^{\lambda e^{x-y}} k(v) dv \right) U_\theta (dy) \\
&= \int_{\mathbb{R}} \left(\int_{\mathbb{R}} \mathbf{1}_{\{e^{x-y} < v < \lambda e^{x-y}\}} k(v) dv \right) U_\theta (dy) \\
&= \int_0^{\infty} k(v) \left(\int_{\mathbb{R}} \mathbf{1}_{\{\log(e^x/v) < y < \log(e^x/v) + \log \lambda\}} U_\theta (dy) \right) dv \\
&= \int_0^{\infty} k(v) U_\theta ((\log(e^x/v), \log(e^x/v) + \log \lambda)) dv. \qquad (3.20)
\end{aligned}$$

Para obtener la convergencia en infinito de esta última integral, naturalmente el primer recurso que se quisiera utilizar es el teorema de convergencia dominada (TCD). Pues bien, por el lema 2.2 se cumple que para todo $v > 0$

$$\sup_{x\in\mathbb{R}} |k(v)U_\theta((\log(e^x/v), \log(e^x/v) + \log\lambda))| \leq k(v)U_\theta([-\log\lambda, \log\lambda]), \tag{3.21}$$

y, por el teorema de renovación de Blackwell (teorema 2.3), para todo $v > 0$

$$k(v)U_\theta((\log(e^x/v), \log(e^x/v) + \log\lambda)) \overset{x\to\infty}{\longrightarrow} k(v)\cdot\frac{\log\lambda}{\mu_\theta}. \tag{3.22}$$

De esta manera, (3.21) y (3.22) garantizan que es posible aplicar el TCD en la identidad (3.20) y asegurar que

$$\int_{e^x}^{\lambda e^x} \mathbb{P}(I > s)ds \overset{x\to\infty}{\longrightarrow} \frac{\log\lambda}{\mu_\theta}\int_0^\infty k(v)dv,$$

lo cual implica finalmente la convergencia

$$\int_t^{\lambda t} \mathbb{P}(I > s)ds \overset{t\to\infty}{\longrightarrow} \frac{\log\lambda}{\mu_\theta},$$

que es lo que se quería probar.

□

3.3. Resultados auxiliares

Para la demostración de la proposición 3.2 son necesarios los siguientes lemas de carácter técnico.

Lema 3.3. *Sea ξ un proceso de Lévy que satisface la condición de Cramér con $\theta > 0$. Si $\theta < 1$ la función $\psi_\theta : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^+$ dada por*

$$\psi_\theta(x) = e^{(\theta-1)x}\int_0^{e^x} k(v)dv,$$

es directamente Riemann integrable (dRi), si $\theta > 1$ la misma afirmación es válida para la función $\tilde{\psi}_\theta : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^+$

$$\tilde{\psi}_\theta(x) = e^{(\theta-1)x}\int_{e^x}^\infty k(v)dv.$$

Demostración. Caso $\theta < 1$. ψ_θ es una función integrable pues utilizando el lema 1.37 se tiene

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}} \psi_\theta(x)dx &= \int_{\mathbb{R}} \left(e^{(\theta-1)x} \int_0^{e^x} k(v)dv \right) dx \\
&= \int_0^\infty \left(s^{\theta-1} \int_0^s k(v)dv \right) s^{-1} ds \\
&= \int_0^\infty k(v) \left(\int_v^\infty s^{\theta-2} ds \right) dv \\
&= \int_0^\infty k(v) \left(\frac{s^{\theta-1}}{\theta-1} \Big|_v^\infty \right) dv \\
&= \frac{1}{1-\theta} \int_0^\infty v^{\theta-1} k(v)dv = \frac{1}{1-\theta} \mathbb{E}[I^{\theta-1}] < \infty.
\end{aligned}$$

Se deben verificar ahora todas las condiciones para que ψ_θ sea una función dRi (definición 2.4). Ya que ψ_θ es no negativa, para cualquier $\delta > 0$ se cumple $0 \leq \underline{\sigma}(\delta) \leq \overline{\sigma}(\delta)$ y, como ψ_θ es el producto de una función decreciente $h_\theta(x) = e^{(\theta-1)x}$ por una creciente $g(x) = \int_0^{e^x} k(v)dv$, para todo $n \in \mathbb{Z}$ se tiene

$$\begin{aligned}
M_{n,\delta} &:= \sup\{h_\theta(x)g(x) : x \in I_{n,\delta}\} \\
&\leq \sup\{h_\theta(x) : x \in I_{n,\delta}\} \cdot \sup\{g(x) : x \in I_{n,\delta}\} \\
&= h_\theta(n\delta) g((n+1)\delta) \\
&= e^{(\theta-1)n\delta} \cdot \text{ínf}\{g(x) : x \in I_{n+1,\delta}\} \\
&= e^{-(\theta-1)2\delta} (e^{(\theta-1)(n+2)\delta} \cdot \text{ínf}\{g(x) : x \in I_{n+1,\delta}\}) \\
&= e^{-(\theta-1)2\delta} (\text{ínf}\{h_\theta(x) : x \in I_{n+1,\delta}\} \cdot \text{ínf}\{g(x) : x \in I_{n+1,\delta}\}) \\
&\leq e^{-(\theta-1)2\delta} \cdot \text{ínf}\{h_\theta(x)g(x) : x \in I_{n+1,\delta}\} \\
&= e^{-(\theta-1)2\delta} \cdot m_{n+1,\delta}.
\end{aligned}$$

Por lo tanto, al utilizar la integrabilidad de ψ_θ

$$\overline{\sigma}(\delta) := \delta \sum_{n \in \mathbb{Z}} M_{n,\delta} \leq e^{-(\theta-1)2\delta} \delta \sum_{n \in \mathbb{Z}} m_{n+1,\delta} = e^{-(\theta-1)2\delta} \underline{\sigma}(\delta) \leq e^{-(\theta-1)2\delta} \int_{\mathbb{R}} \psi_\theta(x)dx < \infty,$$

y entonces los términos $\underline{\sigma}(\delta)$ y $\overline{\sigma}(\delta)$ son absolutamente convergentes para todo $\delta > 0$. Por cálculos similares a los anteriores se tiene

$$\begin{aligned}
\overline{\sigma}(\delta) - \underline{\sigma}(\delta) &\leq e^{-(\theta-1)2\delta} \underline{\sigma}(\delta) - \underline{\sigma}(\delta) \\
&= (e^{-(\theta-1)2\delta} - 1) \underline{\sigma}(\delta) \\
&\leq (e^{-(\theta-1)2\delta} - 1) \int_{\mathbb{R}} \psi_\theta(x)dx \overset{\delta \to 0}{\longrightarrow} 0,
\end{aligned}$$

lo que muestra que ψ_θ es dRi.

El caso $\theta > 1$ es similar, $\tilde{\psi}_\theta$ también es integrable pues

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}} \tilde{\psi}_\theta(x)dx &= \int_{\mathbb{R}} \left(e^{(\theta-1)x}\int_{e^x}^{\infty} k(v)dv\right)dx\\ &= \int_0^{\infty}\left(s^{\theta-1}\int_s^{\infty} k(v)dv\right)s^{-1}ds\\ &= \int_0^{\infty} k(v)\left(\int_0^v s^{\theta-2}ds\right)dv\\ &= \frac{1}{\theta-1}\int_0^{\infty} v^{\theta-1}k(v)dv = \frac{1}{\theta-1}\mathbb{E}[I^{\theta-1}] < \infty,\end{aligned}$$

donde la finitud de $\mathbb{E}[I^{\theta-1}]$ es asegurada por el corolario 1.38. Luego, como $\tilde{\psi}_\theta$ es no negativa y es el producto de una función creciente $\tilde{h}_\theta(x) = e^{(\theta-1)x}$ por una decreciente $\tilde{g}(x) = \int_{e^x}^{\infty} k(v)dv$, se tiene que para todo $n \in \mathbb{Z}$

$$\begin{aligned}M_{n,\delta} &:= \sup\{\tilde{h}_\theta(x)\tilde{g}(x) : x \in I_{n,\delta}\}\\ &\leq \tilde{h}_\theta((n+1)\delta)\tilde{g}(n\delta)\\ &= e^{(\theta-1)(n+1)\delta}\cdot \text{ínf}\{\tilde{g}(x) : x \in I_{n-1,\delta}\}\\ &= e^{(\theta-1)2\delta}(\text{ínf}\{\tilde{h}_\theta(x) : x \in I_{n-1,\delta}\}\cdot \text{ínf}\{\tilde{g}(x) : x \in I_{n-1,\delta}\})\\ &\leq e^{(\theta-1)2\delta}\cdot m_{n-1,\delta}.\end{aligned}$$

Por lo tanto

$$\overline{\sigma}(\delta) := \delta\sum_{n\in\mathbb{Z}} M_{n,\delta} \leq e^{(\theta-1)2\delta}\underline{\sigma}(\delta) \leq e^{(\theta-1)2\delta}\int_{\mathbb{R}} \tilde{\psi}_\theta(x)dx < \infty$$

y entonces

$$\overline{\sigma}(\delta) - \underline{\sigma}(\delta) \leq (e^{(\theta-1)2\delta} - 1)\int_{\mathbb{R}} \tilde{\psi}_\theta(x)dx \xrightarrow{\delta\to 0} 0.$$

Esto muestra que $\tilde{\psi}_\theta$ es dRi, según la definición 2.4.

□

Lema 3.4. *Cualquier función directamente Riemann integrable se anula en infinito y menos infinito. Es decir, si $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ es dRi, entonces*

$$\lim_{|x|\to\infty} g(x) = 0.$$

Demostración. Supóngase que $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ es una función dRi. Sea $\delta > 0$, de acuerdo a la definición 2.4, los términos

$$\underline{\sigma}(\delta) := \delta\sum_{n\in\mathbb{Z}} m_{n,\delta} \quad \text{y} \quad \overline{\sigma}(\delta) := \delta\sum_{n\in\mathbb{Z}} M_{n,\delta}$$

son absolutamente convergentes, donde para todo $n \in \mathbb{Z}$ se define $I_{n,\delta} := (\delta n, \delta(n+1)]$ y

$$m_{n,\delta} := \text{ínf}\{g(x) : x \in I_{n\delta}\}, \quad M_{n,\delta} := \sup\{g(x) : x \in I_{n,\delta}\}.$$

Por lo tanto

$$\lim_{n\to\pm\infty} |M_{n,\delta}| = 0 \quad \text{y} \quad \lim_{n\to\pm\infty} |m_{n,\delta}| = 0. \tag{3.23}$$

Sea $\varepsilon > 0$, por lo anterior existe $N \in \mathbb{N}$ tal que para todo $n \geq N$

$$|\inf\{g(x) : x \in I_{n\delta}\}| < \varepsilon \quad \text{y} \quad \left|\sup\{g(x) : x \in I_{n,\delta}\}\right| < \varepsilon$$

y entonces se cumple que para cualquier real $x > \delta N$

$$|g(x)| < \varepsilon,$$

es decir, $\lim_{x\to\infty} g(x) = 0$. Utilizando nuevamente (3.23) y de manera similar a la anterior se demuestra que g se anula en $-\infty$.

$\square$

Notas

Como se mencionó después de la demostración de la proposición 3.2, ésta última es una generalización de la proposición 2.3 de [PRvS13].

Puede leerse que la demostración presentada aquí se basa en el uso directo de la transformada de Laplace, mientras que en [PRvS13], al tener el caso particular $\xi = -\sigma$ con σ un subordinador, la demostración utiliza principalmente la siguiente igualdad para los momentos enteros positivos del funcional I evaluado en un tiempo exponencial $\mathbf{e}_q$

$$\mathbb{E}\left[I_{\mathbf{e}_q}^k\right] = \frac{k!}{(q+\varphi_\sigma(1))\cdots(q+\varphi_\sigma(k))}, \quad \text{para} \quad k = 1, 2, \ldots$$

Para el enunciado estricto y la demostración de la igualdad anterior, consúltese el teorema 2 de [BY05].

CAPÍTULO 4

Velocidad de convergencia

En el capítulo anterior se demostró la siguiente estimación para la cola de distribución derecha del funcional exponencial $I = \int_0^\infty e^{\xi_s} ds$:

$$\lim_{t \to \infty} t^\theta \mathbb{P}\left(\int_0^\infty e^{\xi_s}\, ds > t \right) = C, \tag{4.1}$$

con $C > 0$. Ahora, en este último capítulo se estudia la velocidad de convergencia en esta aproximación.

Como ya se ha mencionado, la aproximación (4.1) se puede reescribir como

$$\mathbb{P}\left(\int_0^\infty e^{\xi_s}\, ds > t \right) = t^{-\theta} f(t)$$

donde $f(t) \to C$ cuando $t \to \infty$, y aún cuando esta descripción da cierta idea sobre el comportamiento en infinito de la cola de distribución, es necesario obtener estimaciones que contribuyan a mejorar esta aproximación de la función $f(t)$, cuando t es suficientemente grande.

En las siguientes secciones se obtienen algunos resultados al respecto del problema anterior. Específicamente, en las primeras dos secciones se utilizan resultados ya establecidos para ecuaciones afines aleatorias y se aplican al caso particular de funcionales exponenciales de procesos de Lévy, mientras que en la sección 4.3 se engloban algunos resultados obtenidos a raíz del trabajo realizado en el tiempo de elaboración de la tesis.

4.1. Resultados de Goldie

Para poder utilizar los resultados de Goldie [Gol91] en el estudio de la velocidad de convergencia de (4.1), es necesario dar la idea general de la demostración original de Rivero [Riv05] y Méjane [Mej02] de la proposición 3.2. Con esto, será posible aplicar directamente el teorema 4.7 de [Gol91] y obtener así una primera estimación.

La propiedad fuerte de Markov (teorema 1.13) tiene una útil consecuencia para el funcional exponencial I. Sea T un tiempo de paro finito c.s. con respecto a la filtración natural $(\mathscr{F}_t)_{t\geq 0}$ del proceso ξ, entonces

$$\xi_t^{'} := \xi_{T+t} - \xi_T, \ \ t \geq 0,$$

es un proceso independiente de $\mathscr{F}_T$ y tiene la misma ley que ξ. Luego, por la linealidad de la integral

$$\begin{aligned}
\int_0^\infty e^{\xi_s} ds &= \int_0^T e^{\xi_s} ds + \int_T^\infty e^{\xi_s} ds \\
&= \int_0^T e^{\xi_s} ds + \int_T^\infty e^{\xi_s - \xi_T + \xi_T} ds \\
&= \int_0^T e^{\xi_s} ds + e^{\xi_T} \int_T^\infty e^{\xi_s - \xi_T} ds \\
&= \int_0^T e^{\xi_s} ds + e^{\xi_T} \int_0^\infty e^{\xi_{T+t} - \xi_T} dt \\
&= \int_0^T e^{\xi_s} ds + e^{\xi_T} \int_0^\infty e^{\xi_t^{'}} dt,
\end{aligned}$$

lo que origina la **ecuación afín aleatoria**:

$$I = Q + MI',$$

donde, en el lado derecho, la variable I' es igual en distribución al funcional exponencial I, y es independiente del vector

$$(Q, M) = \left(\int_0^T e^{\xi_s} ds, \ e^{\xi_T} \right).$$

En otras palabras, el funcional exponencial I es solución de la ecuación

$$X \overset{D}{=} Q + MX, \quad X \ \text{independiente de} \ (Q, M). \tag{4.2}$$

Uno de los resultados más importantes sobre ecuaciones afines aleatorias, como la anterior, es el siguiente teorema a veces llamado el **teorema de renovación de Kesten**.

Teorema 4.1 (Kesten [Kes73], Goldie [Gol91]). *Sean Q y M variables aleatorias definidas en un mismo espacio de probabilidad. Supóngase que*

I. *Existe $\theta > 0$ tal que $\mathbb{E}\left[|M|^{\theta}\right] = 1$,*

II. $\mathbb{E}\left[|M|^{\theta}\log^{+}|M|\right] < \infty$,

III. *la ley condicional de $\log|M|$ dado $M \neq 0$, es no aritmética y*

IV. $\mathbb{E}\left[|Q|^{\theta}\right] < \infty$.

Entonces, existe una única distribución para X que satisface (4.2). Para esta distribución se tiene

$$\lim_{t\to\infty} t^{\theta}\mathbb{P}(X > t) = C \quad y \quad \lim_{t\to-\infty} |t|^{\theta}\mathbb{P}(X < t) = C', \tag{4.3}$$

donde, si $M \geq 0$

$$C = \frac{\mathbb{E}[\left((Q+MX)^{+}\right)^{\theta} - \left((MR)^{+}\right)^{\theta}]}{\theta\mathbb{E}\left[|M|^{\theta}\log|M|\right]},$$
$$C' = \frac{\mathbb{E}[\left((Q+MX)^{-}\right)^{\theta} - \left((MR)^{-}\right)^{\theta}]}{\theta\mathbb{E}\left[|M|^{\theta}\log|M|\right]},$$

y en caso contrario

$$C = C' = \frac{1}{2\theta\mathbb{E}\left[|M|^{\theta}\log|M|\right]}\mathbb{E}[|Q+MR|^{\theta} - |MR|^{\theta}].$$

Finalmente, $C + C' > 0$ si y solo si

$$\mathbb{P}(Mx+Q=x) < 1, \quad \text{para cada} \;\; x \in \mathbb{R}.$$

Como una aplicación del teorema anterior, la demostración original de la proposición 3.2, proporcionada por Rivero [Riv05] y Méjane [Mej02], es como sigue: sea T el tiempo de paro constante $T \equiv 1$, entonces, el funcional exponencial I satisface la ecuación afín (4.2) con

$$Q = \int_0^1 e^{\xi_s} ds \quad \text{y} \quad M = e^{\xi_1}. \tag{4.4}$$

Los supuestos de la proposición 3.2 son los siguientes:

H.1 el proceso de Lévy ξ satisface la condición de Cramér con $\theta > 0$,

H.2 $\mathbb{E}[\xi_1^{+}e^{\theta\xi_1}] < \infty$,

H.3 ξ es no aritmético,

por lo tanto, es fácil notar que los tres supuestos anteriores corresponden respectivamente a las condiciones I, II y III del teorema 4.1, luego, para poder utilizar el teorema, la única condición que falta garantizar es IV, es decir, falta garantizar

$$\mathbb{E}\left[|Q|^{\theta}\right] = \mathbb{E}\left[\left(\int_0^1 e^{\xi_s} ds\right)^{\theta}\right] < \infty.$$

Afortunadamente, esto no es problema ya que esta condición se probó dentro de la demostración del lema 1.37 (específicamente, en las igualdades (1.33)).

Así, utilizando el teorema de renovación de Kesten se tiene que la distribución del funcional exponencial I es la única que satisface la ecuación afín

$$X \stackrel{D}{=} Q + MX, \quad X \text{ independiente de } (Q,M), \tag{4.5}$$

con (Q,M) dados por (4.4), y más importante aún:

$$\lim_{t\to\infty} t^{\theta}\mathbb{P}(I > t) = C, \tag{4.6}$$

donde, después de algunos cálculos, también puede probarse que la constante C tiene la forma

$$C = \frac{\mathbb{E}[I^{\theta-1}]}{\mathbb{E}[\xi_1 e^{\theta\xi_1}]},$$

(ver el artículo original [Riv05, lema 4]). Nótese que en el caso del funcional exponencial I, no es interesante conocer el comportamiento en menos infinito de su cola izquierda, ya que al ser $I \geq 0$ c.s., naturalmente se cumple que

$$\lim_{t\to-\infty} \mathbb{P}(I < t) = 0.$$

En cambio, otro problema interesante es el comportamiento del funcional exponencial para valores muy cercanos a cero, es decir, el límite

$$\lim_{t\to 0+} \mathbb{P}(I < t).$$

El problema que concierne a este capítulo es el estudio de la **velocidad de convergencia** en la aproximación (4.6). Al respecto, reforzando los supuestos en las variables Q y M del teorema general 4.1, Goldie [Gol91] incluye la siguiente cuantificación de la velocidad de convergencia en el teorema de renovación de Kesten.

Teorema 4.2. *Supóngase que X resuelve la ecuación (4.2), donde M satisface la condición I del teorema anterior. Supóngase además que para algún $\beta \in (0,1)$ se cumple*

$$\mathbb{E}\left[|M|^{\theta+\beta}\right] < \infty, \quad \mathbb{E}\left[|Q|^{\theta+\beta}\right] < \infty, \tag{4.7}$$

y la ley condicional de $\log|M|$, dado $M \neq 0$, es spread-out. Para $M \geq 0$ c.s. defínase

$$\eta(dy) := e^{\theta y}\mathbb{P}(\log M \in dy).$$

Si para algún $n_0 \in \mathbb{N}$

$$\eta^{(n_0)} = (1-\delta)\phi_0 + \delta\phi_1,$$

donde $\delta \in [0,1)$ es constante y ϕ_0, ϕ_1 son medidas de probabilidad con ϕ_0 absolutamente contínua, y β ha sido tomado suficientemente pequeño tal que

$$\delta\int_{\mathbb{R}} e^{\beta t}\phi_1(dt) < 1, \quad y$$
$$\hat{\eta}(z) = \int_{\mathbb{R}} e^{izt}\eta(dt) \neq 1 \quad en \quad \Im(z) = -\beta.$$

Entonces,

$$t^{\theta}\mathbb{P}(X > t) = C - \frac{1}{2\pi}\Re\int_{\mathscr{C}} e^{-izt}\frac{\hat{g}_1(z)}{1-\hat{\eta}(z)}dz + O\left(t^{-\beta/2}\right), \quad t \to \infty,$$

$$t^{\theta}\mathbb{P}(X < -t) = C' - \frac{1}{2\pi}\Re\int_{\mathscr{C}} e^{-izt}\frac{\hat{g}_{-1}(z)}{1-\hat{\eta}(z)}dz + O\left(t^{-\beta/2}\right), \quad t \to \infty,$$

donde

$$\hat{g}_1(z) = \int_{\mathbb{R}} e^{izt}g_1(t)dt = \int_{\mathbb{R}} e^{izt}e^{\theta t}\left(\mathbb{P}\left(X > e^t\right) - \mathbb{P}\left(MX > e^t\right)\right)dt,$$
$$\hat{g}_{-1}(z) = \int_{\mathbb{R}} e^{izt}g_{-1}(t)dt = \int_{\mathbb{R}} e^{izt}e^{\theta t}\left(\mathbb{P}\left(X < -e^t\right) - \mathbb{P}\left(MX < -e^t\right)\right)dt.$$

y $\mathscr{C}$ es un contorno cerrado simple en el dominio $\mathscr{D} := \{z \in \mathbb{C} : -\beta < \Im(z) < 0\}$ que encierra todos los ceros de $1-\hat{\eta}$ en $\mathscr{D}$.

La intención en esta sección es utilizar el teorema anterior y aplicarlo directamente para el caso de los funcionales exponenciales, de esta manera, se obtendrá una primera estimación de la velocidad de convergencia en el límite

$$\lim_{t\to\infty} t^{\theta}\mathbb{P}\left(\int_0^{\infty} e^{\xi_s}ds > t\right) = C.$$

El resultado se enuncia a continuación.

Proposición 4.3. *Sea ξ un proceso de Lévy que satisface la condición de Cramér con $\theta > 0$, supóngase que para algún $\beta \in (0,1)$ se cumple*

$$\mathbb{E}\left[e^{(\theta+\beta)\xi_1}\right] < \infty$$

y la distribución infinitamente divisible $\mathbb{P}(\xi_1 \in dy)$ es spread-out. Defínase

$$\eta(dy) := e^{\theta y}\mathbb{P}(\xi_1 \in dx).$$

Si para algún $n_0 \in \mathbb{N}$

$$\eta^{(n_0)} = (1-\delta)\phi_0 + \delta\phi_1,$$

donde $\delta \in [0,1)$ es constante y ϕ_0, ϕ_1 son medidas de probabilidad con ϕ_0 absolutamente continua, y β ha sido tomado suficientemente pequeño tal que

$$\delta \int_{\mathbb{R}} e^{\beta t}\phi_1(dt) < 1, \quad y$$
$$\hat{\eta}(z) = \mathbb{E}\left[e^{(iz+\theta)\xi_1}\right] \neq 1 \quad en \quad \Im(z) = -\beta.$$

Entonces,

$$t^{\theta}\mathbb{P}(I > t) = C_+ - \frac{1}{2\pi}\Re\int_{\mathscr{C}} e^{-izt}\frac{\hat{g}_1(z)}{1-\hat{\eta}(z)}dz + O\left(t^{-\beta/2}\right), \;\; t \to \infty,$$

donde

$$\hat{g}_1(z) = \int_{\mathbb{R}} e^{izt}g_1(t)dt = \int_{\mathbb{R}} e^{izt}e^{\theta t}\left(\mathbb{P}\left(I > e^t\right) - \mathbb{P}\left(e^{\xi_1}I > e^t\right)\right)dt.$$

y $\mathscr{C}$ es un contorno cerrado simple en el dominio $\mathscr{D} := \{z \in \mathbb{C} : -\beta < \Im(z) < 0\}$ que encierra todos los ceros de $1-\hat{\eta}$ en $\mathscr{D}$.

Demostración. Es consecuencia directa de aplicar el teorema 4.2 y reescribirlo en función de los términos $X = I$,

$$Q = \int_0^1 e^{\xi_s}ds \quad \text{y} \quad M = e^{\xi_1}.$$

Lo único que hay que aclarar es que, de acuerdo el teorema 4.2, la condición en (4.7):

$$\mathbb{E}\left[|Q|^{\theta+\beta}\right] < \infty, \quad \left(\mathbb{E}\left[\left|\int_0^1 e^{\xi_s}ds\right|^{\theta+\beta}\right] < \infty\right),$$

queda asegurada por la condición

$$\mathbb{E}\left[e^{(\theta+\beta)\xi_1}\right] < \infty,$$

ya que por la desigualdad de Doob y de manera similar al desarrollo en (1.33), para $p > 1$ se tiene

$$\mathbb{E}\left[\left|\int_0^1 e^{\xi_s} ds\right|^{\theta+\beta}\right] \leq \mathbb{E}\left[\left(\sup_{0<s\leq 1}\{e^{\xi_s}\}\right)^{\theta+\beta}\right] \leq \left(\frac{p}{p-1}\right)^p e^{-p\varphi(\theta+\beta/p)}\mathbb{E}\left[e^{(\theta+\beta)\xi_1}\right].$$

□

4.2. Una segunda estimación

Nuevamente, considerando el teorema de renovación de Kesten y en general, ecuaciones afines aleatorias en dimensiones mayores, D. Buraczewski, E. Damek y T. Przebinda en su artículo aún no publicado *On the rate of convergence in the Kesten renewal theorem* (2014), también estudian la velocidad de convergencia en el límite

$$\lim_{t\to\infty} t^{\theta}\mathbb{P}(X > t) = C, \tag{4.8}$$

sin embargo, bajo condiciones menos restrictivas que las de Goldie (teorema 4.2).

La idea general en este artículo (y también en el trabajo de Goldie) es controlar la velocidad de convergencia en (4.8), mediante la descripción de la velocidad de convergencia en los teoremas clásicos de renovación. Para enunciar su resultado principal (teorema 4.4), si $M \geq 0$, defínase

$$\eta(dy) := e^{\theta y}\mathbb{P}(\log M \in dy),$$

y sea $U = \sum_{n=1}^{\infty}\eta^{(n)}$ la correspondiente medida de renovación. En la sección 2.3 se estableció una aproximación de segundo orden para la función de renovación asociada a U; específicamente, si η tiene media $\mu \in (0,\infty)$ y varianza σ^2 finita, entonces

$$U(t) = \frac{t}{\mu} + \frac{\sigma^2-\mu^2}{2\mu^2} + o(1), \quad t\to\infty.$$

En síntesis, el siguiente resultado dice que si el término $o(1)$ es de orden $O(t^{-\delta})$, entonces la velocidad de convergencia en (4.8) es de orden logarítmico.

Teorema 4.4. *Supóngase que las cuatro condiciones del teorema 4.1 se satisfacen, además*

$$U(t) = \begin{cases} \dfrac{t}{\mu} + \dfrac{\sigma^2 - \mu^2}{2\mu^2} + O(t^{-\delta}), & t \to +\infty, \\ \\ O(|t|^{-\delta}), & t \to -\infty. \end{cases}$$

para algún $\delta > 0$ y

$$\mathbb{E}\left[M^\theta |\log M|^\gamma\right] < \infty$$
$$\mathbb{E}\left[\left(M^\theta + |Q|^\theta\right)\left(|\log M|^\chi + |\log Q|^\chi\right)\right] < \infty$$

para algunos $\gamma > 2$ y $\chi > 1$. Entonces

$$t^\theta \mathbb{P}(X > t) = C + o\left(|\log t|^{-\beta}\right) \quad t \to \infty,$$
$$|t|^\theta \mathbb{P}(X < t) = C' + o\left(|\log |t||^{-\beta}\right) \quad t \to -\infty,$$

donde

$$\beta = \frac{1}{2} \min\{\chi - 1, \gamma - 2, \delta\}.$$

Como en la sección anterior, la siguiente proposición proporciona otra estimación de la velocidad de convergencia en

$$\lim_{t\to\infty} t^\theta \mathbb{P}\left(\int_0^\infty e^{\xi_s}\, ds > t\right) = C,$$

y que es el resultado de aplicar directamente el teorema anterior al funcional exponencial I y a las variables aleatorias

$$Q = \int_0^1 e^{\xi_s} ds \quad \text{y} \quad M = e^{\xi_1}. \tag{4.9}$$

Debe notarse que las condiciones impuestas en la distribución $F_\theta(dy) = e^{\theta y}\mathbb{P}(\xi_{\mathbf{e}} \in dy)$ son ligeramente menos restrictivas que en la proposición 4.3, mientras ahí se requiere que la distribución F' tenga momentos exponenciales finitos y que sea spread-out, la siguiente proposición pide que F_θ tenga momento absoluto finito de orden $\gamma > 2$ y que su función de renovación decrezca como una función potencia.

Proposición 4.5. *Sea ξ un proceso de Lévy no aritmético que satisface la condición de Cramér con $\theta > 0$. Supóngase que*

$$\mathbb{E}\left[|\xi_1|^{\gamma} e^{\theta\xi_1}\right] < \infty \tag{4.10}$$

$$\mathbb{E}\left[\left(e^{\theta\xi_1} + \left|\int_0^1 e^{\xi_s} ds\right|^{\theta}\right)\left(|\xi_1|^{\chi} + \left|\log \int_0^1 e^{\xi_s} ds\right|^{\chi}\right)\right] < \infty \tag{4.11}$$

para algunos $\gamma > 2$ y $\chi > 1$. Además, sea U_θ la medida de renovación de la proposición 2.25, si

$$U_\theta(t) = \begin{cases} \dfrac{t}{\mu_\theta} + \dfrac{\sigma_\theta^2 - \mu_\theta^2}{2\mu_\theta^2} + O(t^{-\delta}), & t \to +\infty, \\ O(|t|^{-\delta}), & t \to -\infty, \end{cases}$$

para algún $\delta > 0$, entonces

$$t^{\theta}\mathbb{P}(I > t) = C + o\left(|\log t|^{-\beta}\right) \quad t \to \infty,$$

donde

$$\beta = \frac{1}{2}\operatorname{mín}\{\chi - 1, \gamma - 2, \delta\}.$$

Suponiendo la existencia de momentos exponenciales para la distribución F_θ, es posible deducir el siguiente resultado que simplifica las hipótesis impuestas en la proposición anterior. Sin embargo, aunque se gana simplicidad en las hipótesis, se desperdicia la generalidad que proporciona la proposición 4.5.

Proposición 4.6. *Sea ξ un proceso de Lévy que satisface la condición de Cramér con $\theta > 0$ y U_θ la medida de renovación de la proposición 2.25, supóngase que*

I. *existe $\beta > 0$ tal que $\mathbb{E}[e^{(\theta+\beta)\xi_1}] < \infty$,*

II. *existe $\chi > (\theta+\beta)/\beta$ tal que*

$$\mathbb{E}\left[|\xi_1|^\chi\right] < \infty \quad y \quad \mathbb{E}\left[\left|\log \int_0^1 e^{\xi_s} ds\right|^\chi\right] < \infty,$$

III. *y existe $\delta > 0$ tal que*

$$U_\theta(t) = \begin{cases} \dfrac{t}{\mu_\theta} + \dfrac{\sigma_\theta^2 - \mu_\theta^2}{2\mu_\theta^2} + O(t^{-\delta}), & t \to +\infty, \\ \\ O(|t|^{-\delta}), & t \to -\infty. \end{cases}$$

Entonces

$$t^\theta \mathbb{P}\left(\int_0^\infty e^{\xi_s} ds > t\right) = C + o\left(|\log t|^{-\eta}\right), \quad t \to \infty,$$

para todo $\eta > 0$.

En particular, si $\mathbb{E}[e^{\beta\xi_1}] < \infty$ para todo $\beta > 0$, en la condición II es suficiente pedir $\chi > 1$.

Demostración. Lo primero que se debe hacer es demostrar que I y II implican las condiciones (4.10) y (4.11) de la proposición 4.5. Pues bien, ya que para todo $\beta > 0$

$$\begin{aligned} \mathbb{E}\left[|\xi_1|^\gamma e^{\theta\xi_1}\right] &\le \mathbb{E}\left[e^{\beta|\xi_1|} e^{\theta\xi_1}\right] \\ &= \mathbb{E}\left[e^{\beta\xi_1} e^{\theta\xi_1} \mathbf{1}_{\{\xi_1 > 0\}}\right] + \mathbb{E}\left[e^{-\beta\xi_1} e^{\theta\xi_1} \mathbf{1}_{\{\xi_1 \le 0\}}\right] \\ &= \mathbb{E}\left[e^{(\theta+\beta)\xi_1} \mathbf{1}_{\{\xi_1 > 0\}}\right] + \mathbb{E}\left[e^{(\theta-\beta)\xi_1} \mathbf{1}_{\{\xi_1 \le 0\}}\right], \end{aligned}$$

entonces, por convexidad, para cualquier $\beta < \theta$,

$$\mathbb{E}\left[e^{(\theta+\beta)\xi_1}\right] < \infty \quad \Longrightarrow \quad \mathbb{E}\left[|\xi_1|^\gamma e^{\theta\xi_1}\right] < \infty.$$

Por otro lado, nótese que

$$e^{\theta\xi_1} + \left|\int_0^1 e^{\xi_s} ds\right|^\theta \le e^{\theta\xi_1} + \sup_{0\le s\le 1} e^{\theta\xi_s} \le 2 \sup_{0\le s\le 1} e^{\theta\xi_s},$$

por lo tanto, la expresión

$$\mathbb{E}\left[\left(e^{\theta\xi_1} + \left|\int_0^1 e^{\xi_s} ds\right|^\theta\right)\left(|\xi_1|^\chi + \left|\log\int_0^1 e^{\xi_s} ds\right|^\chi\right)\right] \tag{4.12}$$

está acotada superiormente por

$$2\mathbb{E}\left[\sup_{0\le s\le 1} e^{\theta\xi_s}\left(|\xi_1|^{\chi} + \left|\log\int_0^1 e^{\xi_s}ds\right|^{\chi}\right)\right].$$

Así, para garantizar la finitud de (4.12) será suficiente demostrar que

$$\mathbb{E}\left[|\xi_1|^{\chi}\sup_{0\le s\le 1} e^{\theta\xi_s}\right] < \infty \quad \text{y} \quad \mathbb{E}\left[\left|\log\int_0^1 e^{\xi_s}ds\right|^{\chi}\sup_{0\le s\le 1} e^{\theta\xi_s}\right] < \infty. \tag{4.13}$$

Considérese primero la esperanza del lado izquierdo, por la desigualda de Hölder se tiene que para cualesquiera $p,q\in[1,\infty]$ tales que $1/p+1/q=1$

$$\mathbb{E}\left[|\xi_1|^{\chi}\sup_{0\le s\le 1} e^{\theta\xi_s}\right] \le \mathbb{E}\left[|\xi_1|^{\chi p}\right]^{\frac{1}{p}}\mathbb{E}\left[\sup_{0\le s\le 1} e^{\theta q\xi_s}\right]^{\frac{1}{q}},$$

luego, si $q=(\theta+\beta)/\theta>1$ y se considera su conjugado $p=(\theta+\beta)/\beta$, se tiene

$$\mathbb{E}\left[|\xi_1|^{\chi}\sup_{0\le s\le 1} e^{\theta\xi_s}\right] \le \mathbb{E}\left[|\xi_1|^{\chi p}\right]^{\frac{1}{p}}\mathbb{E}\left[\sup_{0\le s\le 1} e^{(\theta+\beta)\xi_s}\right]^{\frac{1}{q}}. \tag{4.14}$$

De las igualdades en (1.33), se tiene que

$$\mathbb{E}\left[\sup_{0\le s\le 1} e^{(\theta+\beta)\xi_s}\right] < \infty \quad \text{si} \quad \mathbb{E}\left[e^{(\theta+\beta)\xi_1}\right] < \infty,$$

y la condición I en el enunciado del teorema garantiza justamente esto último. Por su parte, la finitud del término $\mathbb{E}\left[|\xi_1|^{\chi p}\right]$ queda garantizada por la condición II, así, el término (4.14) es finito y por lo tanto, la primera esperanza en (4.13) es finita.

Un argumento similar es válido para probar la finitud de la segunda esperanza en (4.13).

□

4.3. Otra estimación vía descomposición de Stone

En esta sección se intenta establecer otra estimación para la velocidad de convergencia en el límite

$$\lim_{t\to\infty} t^{\theta}\mathbb{P}\left(\int_0^{\infty} e^{\xi_s}\,ds > t\right) = C. \tag{4.15}$$

De manera similar a Goldie [Gol91], la idea de la demostración es descomponer la medida potencial U_θ del proceso de Lévy, utilizando la descomposición de Stone, para después estimar la diferencia entre $t^{\theta}\mathbb{P}(I>t)$ y C; esto último mediante las estimaciones correspondientes que se tienen de la velocidad de convergencia en la descomposición de Stone (proposición 2.15).

Ya que no se trabaja el caso general de ecuaciones afines aleatorias, la ventaja que se tiene con respecto a los resultados de Goldie, es el tratamiento más simple y directo a la hora de utilizar los teoremas de renovación y obtener las estimaciones. Cabe mencionar que la identidad presentada en la sección 3.1, es en gran medida la responsable de estas simplificaciones.

La proposición 4.8 describe los resultados que se obtuvieron con el objetivo de estudiar la velocida de convergencia en (4.15), el enunciado y la demostración hacen uso de las expresiones utilizadas en la prueba de la proposición 3.2 y del lema siguiente.

Lema 4.7. *Sean U_1^λ, u_λ y μ como en la proposición 2.15. Entonces, para todo $t \in \mathbb{R}$,*

$$\left| u_\lambda(t) - \frac{1}{\mu} \right| \leq M e^{-\varepsilon t},$$
$$\left| U_1^\lambda([t,\infty)) \right| \leq M' e^{-\varepsilon t},$$

para algunas constantes positivas ε, M y M'.

Demostración. Por la proposición 2.15 ya se sabe que existe $T > 0$ tal que para todo $t > T$

$$\left| u_\lambda(t) - \frac{1}{\mu} \right| \leq K e^{-\varepsilon t},$$
$$\left| U_1^\lambda([t,\infty)) \right| \leq K' e^{-\varepsilon t},$$

para constantes positivas ε, K y K'. Ahora bien, para $t < T$, al ser u_λ una función continua y acotada y U_1^λ una medida finita, se tiene que existe $C > 0$ tal que

$$\left| u_\lambda(t) - \frac{1}{\mu} \right| \leq C \leq C e^{-\varepsilon(t-T)} = C e^{\varepsilon T} e^{-\varepsilon t},$$
$$\left| U_1^\lambda([t,\infty)) \right| \leq U_1^\lambda(\mathbb{R}) \leq U_1^\lambda(\mathbb{R}) e^{-\varepsilon(t-T)} \leq U_1^\lambda(\mathbb{R}) e^{\varepsilon T} e^{-\varepsilon t}.$$

Poniendo $M := \text{máx}\{K, Ce^{\varepsilon T}\}$ y $M' := \text{máx}\{K', U_1^\lambda(\mathbb{R}) e^{\varepsilon T}\}$ se tiene el resultado.

□

Proposición 4.8. *Sea ξ un proceso de Lévy que satisface la condición de Cramér con $\theta > 0$. Supóngase que $\mathbb{P}(\xi_{\mathbf{e}} \in dy)$ es spread-out y que su cola de distribución derecha decrece exponencialmente.*

I. *Si $\theta < 1$ y $\mathbb{E}[\xi_1] < \infty$, entonces existe $\varepsilon < 1 - \theta$ tal que*

$$t^{(\theta-1)} \int_0^t \mathbb{P}(I > s) ds = \frac{C}{1-\theta} + O\left(t^{-\varepsilon}\right), \quad t \to \infty.$$

II. *Si $\theta > 1$, existe $\varepsilon < 1$ tal que*

$$t^{(\theta-1)} \int_t^\infty \mathbb{P}(I > s) ds = \frac{C}{\theta - 1} + O\left(t^{-\varepsilon}\right), \quad t \to \infty.$$

III. *Si $\theta = 1$, existe $\varepsilon < 1$ tal que para todo $\lambda > 1$*

$$\int_t^{\lambda t} \mathbb{P}(I > s) ds = C \log \lambda + O\left(t^{-\varepsilon}\right), \quad t \to \infty.$$

Demostración. Si la distribución $\mathbb{P}(\xi_{\mathbf{e}} \in dy)$ es spread-out, entonces

$$F_\theta(dy) = e^{\theta y} \mathbb{P}(\xi_{\mathbf{e}} \in dy)$$

también es spread-out. Ahora bien, por la proposición 2.25, $U_\theta(dy) = e^{\theta y} U_\xi$ es la medida de renovación asociada a la distribución F_θ, por lo que utilizando la descomposición de Stone (teorema 2.14) es posible escribir a la medida U_θ como

$$U_\theta = U_1 + U_2,$$

donde U_1 es una medida finita y U_2 tiene densidad u (con respecto a ℓ_0) continua y acotada que satisface

$$\lim_{t \to -\infty} u(t) = 0 \quad \text{y} \quad \lim_{t \to \infty} u(t) = \frac{1}{\mu}. \tag{4.16}$$

Caso $\theta < 1$. Con la descomposición anterior, se tiene que

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}} \psi_\theta(x-y) U_\theta(dy) &= \int_{\mathbb{R}} \psi_\theta(x-y) U_1(dy) + \int_{\mathbb{R}} \psi_\theta(x-y) U_2(dy) \\ &= \int_{\mathbb{R}} \psi_\theta(x-y) U_1(dy) + \int_{\mathbb{R}} \psi_\theta(x-y) u(y) dy, \end{aligned}$$

con $\psi_\theta(x) = e^{(\theta-1)x} \int_0^{e^x} k(v) dv$. Por lo tanto, utilizando la estimación dada en la proposición 2.15, para la velocidad de convergencia en el límite 4.16, y el lema 4.7, se tiene

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}} \psi_\theta(x-y)U_\theta(dy) &= \int_{\mathbb{R}} \psi_\theta(x-y)U_1(dy) + \int_{\mathbb{R}} \psi_\theta(y)u(x-y)dy \\ &= \int_{\mathbb{R}} \psi_\theta(x-y)U_1(dy) + \int_{\mathbb{R}} \psi_\theta(y)\left(\frac{1}{\mu_\theta} + o\left(e^{-\varepsilon(x-y)}\right)\right)dy \\ &= \int_{\mathbb{R}} \psi_\theta(x-y)U_1(dy) + \frac{1}{\mu_\theta}\int_{\mathbb{R}} \psi_\theta(y)dy + e^{-\varepsilon x}\int_{\mathbb{R}} \psi_\theta(y)o\left(e^{\varepsilon y}\right)dy \\ &= \int_{\mathbb{R}} \psi_\theta(x-y)U_1(dy) + \frac{\mathbb{E}[I^{\theta-1}]}{\mu_\theta(1-\theta)} + e^{-\varepsilon x}\int_{\mathbb{R}} \psi_\theta(y)o\left(e^{\varepsilon y}\right)dy,\end{aligned}$$

por lo que restando de ambos lados el término $\frac{\mathbb{E}[I^{\theta-1}]}{\mu_\theta(1-\theta)}$, se obtiene

$$\int_{\mathbb{R}} \psi_\theta(x-y)U_\theta(dy) - \frac{\mathbb{E}[I^{\theta-1}]}{\mu_\theta(1-\theta)} = \int_{\mathbb{R}} \psi_\theta(x-y)U_1(dy) + e^{-\varepsilon x}\int_{\mathbb{R}} \psi_\theta(y)o\left(e^{\varepsilon y}\right)dy.$$

Con la igualdad anterior, la intención ahora es obtener una estimación de la diferencia de la izquierda cuando x es suficientemente grande, y esto se hará mediante la manipulación de las integrales que aparecen del lado derecho. Para ello, primero considérese la integral

$$e^{-\varepsilon x}\int_{\mathbb{R}} \psi_\theta(y)o\left(e^{\varepsilon y}\right)dy.$$

Sustituyendo explícitamente el término $\psi_\theta(y) = e^{(\theta-1)y}\int_0^{e^y} k(v)dv$, se tiene que

$$\begin{aligned}\left|e^{-\varepsilon x}\int_{\mathbb{R}} \psi_\theta(y)o\left(e^{\varepsilon y}\right)dy\right| &\le e^{-\varepsilon x}\int_{\mathbb{R}} e^{\varepsilon y}\psi_\theta(y)dy \\ &= e^{-\varepsilon x}\int_{\mathbb{R}}\left(e^{(\theta+\varepsilon-1)y}\int_0^{e^y} k(v)dv\right)dy, \end{aligned} \tag{4.17}$$

y haciendo cálculos similares a la demostración del lema 3.3, se obtiene que la última integral es finita si $\theta+\varepsilon-1<0$ y $\mathbb{E}[\xi_1]<\infty$, en cuyo caso

$$\int_{\mathbb{R}}\left(e^{(\theta+\varepsilon-1)y}\int_0^{e^y} k(v)dv\right)dy = \frac{1}{1-\theta-\varepsilon}\mathbb{E}\left[I^{\theta+\varepsilon-1}\right] < \infty.$$

Por lo tanto, denotando por M_1 a la constante anterior, de (4.17) se sigue que

$$\left|e^{-\varepsilon x}\int_{\mathbb{R}} \psi_\theta(y)o\left(e^{\varepsilon y}\right)dy\right| \le M_1 e^{-\varepsilon x}$$

y entonces es posible escribir

$$e^{-\varepsilon x}\int_{\mathbb{R}} \psi_\theta(y)o\left(e^{\varepsilon y}\right)dy = O\left(e^{-\varepsilon x}\right), \quad x\to\infty. \tag{4.18}$$

Por otro lado, para la integral

$$\int_{\mathbb{R}} \psi_\theta(x-y)U_1(dy),$$

nótese que $\psi_\theta(y) = e^{(\theta-1)y}\int_0^{e^y} k(v)dv$ es una función de variación finita (pues es el producto de una función decreciente por una creciente), por lo tanto, se puede escribir

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}} \psi_\theta(x-y)U_1(dy) &= \int_{\mathbb{R}} \left(-\int_{x-y}^{\infty} d\psi_\theta(u)\right) U_1(dy)\\ &= -\int_{\mathbb{R}} \left(\int_{x-u}^{\infty} U_1(dy)\right) d\psi_\theta(u)\\ &= -\int_{\mathbb{R}} U_1([x-u,\infty))d\psi_\theta(u),\end{aligned}$$

donde $d\psi_\theta(u) = e^{\theta u}k(e^u)du + (\theta-1)\psi_\theta(u)du$. Así

$$\begin{aligned}\left|\int_{\mathbb{R}} \psi_\theta(x-y)U_1(dy)\right| &\leq \int_{\mathbb{R}} e^{-\varepsilon(x-u)}d\psi_\theta(u)\\ &= e^{-\varepsilon x}\left[\int_{\mathbb{R}} e^{(\theta+\varepsilon)u}k(e^u)du + (\theta-1)\int_{\mathbb{R}} e^{\varepsilon u}\psi_\theta(u)du\right]\\ &= e^{-\varepsilon x}\left[\int_{\mathbb{R}} e^{(\theta+\varepsilon)u}k(e^u)du + (\theta-1)\int_{\mathbb{R}} \left(e^{(\theta+\varepsilon-1)u}\int_0^{e^u} k(v)dv\right) du\right]\\ &= e^{-\varepsilon x}\left[\mathbb{E}\left[I^{\theta+\varepsilon-1}\right] + \frac{\theta-1}{1-\theta-\varepsilon}\mathbb{E}\left[I^{\theta+\varepsilon-1}\right]\right]\\ &= e^{-\varepsilon x}\left[\frac{\varepsilon}{\theta+\varepsilon-1}\mathbb{E}\left[I^{\theta+\varepsilon-1}\right]\right],\end{aligned}$$

denotando por M_1' a la constanste del lado derecho, se concluye que

$$\left|\int_{\mathbb{R}} \psi_\theta(x-y)U_1(dy)\right| \leq M_1' e^{-\varepsilon x},$$

y entonces

$$\int_{\mathbb{R}} \psi_\theta(x-y)U_1(dy) = O\left(e^{-\varepsilon x}\right), \quad x\to\infty. \tag{4.19}$$

Finalmente, (4.18) y (4.19) implican la estimación en infinito

$$\int_{\mathbb{R}} \psi_\theta(x-y)U_\theta(dy) - \frac{\mathbb{E}[I^{\theta-1}]}{\mu_\theta(1-\theta)} = O\left(e^{-\varepsilon x}\right), \quad x\to\infty,$$

que es lo que se deseaba obtener.

Caso $\theta > 1$. De manera similar que en el caso anterior, es posible conseguir la siguiente igualdad

$$\int_{\mathbb{R}} \tilde{\psi}_\theta(x-y)U_\theta(dy) - \frac{\mathbb{E}[I^{\theta-1}]}{\mu_\theta(\theta-1)} = \int_{\mathbb{R}} \tilde{\psi}_\theta(x-y)U_1(dy) + e^{-\varepsilon x}\int_{\mathbb{R}} \tilde{\psi}_\theta(y)o\left(e^{\varepsilon y}\right)dy,$$

con $\tilde{\psi}_\theta(x) = e^{(\theta-1)x}\int_{e^x}^{\infty} k(v)dv$. Sustituyendo la expresión anterior para $\tilde{\psi}_\theta$ en la segunda integral del lado derecho, se tiene que

$$\begin{aligned}\left|e^{-\varepsilon x}\int_{\mathbb{R}}\tilde{\psi}_\theta(y)o\left(e^{\varepsilon y}\right)dy\right| &\leq e^{-\varepsilon x}\int_{\mathbb{R}}e^{\varepsilon y}\tilde{\psi}_\theta(y)dy\\ &= e^{-\varepsilon x}\int_{\mathbb{R}}\left(e^{(\theta+\varepsilon-1)y}\int_{e^y}^{\infty}k(v)dv\right)dy\\ &= e^{-\varepsilon x}\frac{1}{\theta+\varepsilon-1}\mathbb{E}\left[I^{\theta+\varepsilon-1}\right]<\infty,\end{aligned}$$

siempre y cuando $\theta+\varepsilon-1<\theta$, y esto último pasa si y solo si $\varepsilon<1$. Denotando por $M_2=\frac{1}{\theta+\varepsilon-1}\mathbb{E}\left[I^{\theta+\varepsilon-1}\right]$ se tiene entonces

$$\left|e^{-\varepsilon x}\int_{\mathbb{R}}\tilde{\psi}_\theta(y)o\left(e^{\varepsilon y}\right)dy\right|\leq M_2e^{-\varepsilon x},$$

es decir,

$$e^{-\varepsilon x}\int_{\mathbb{R}}\tilde{\psi}_\theta(y)o\left(e^{\varepsilon y}\right)dy=O\left(e^{-\varepsilon x}\right),\quad x\to\infty. \tag{4.20}$$

Para la integral

$$\int_{\mathbb{R}}\tilde{\psi}_\theta(x-y)U_1(dy),$$

debe notarse que la función $\tilde{\psi}_\theta(x)=e^{(\theta-1)x}\int_{e^x}^{\infty}k(v)dv$ también es de variación finita, por lo tanto, al igual que en el caso anterior

$$\int_{\mathbb{R}}\tilde{\psi}_\theta(x-y)U_1(dy)=-\int_{\mathbb{R}}U_1([x-u,\infty))d\tilde{\psi}_\theta(u),$$

con $d\tilde{\psi}_\theta(u)=-e^{\theta u}k(e^u)du+(\theta-1)\tilde{\psi}_\theta du$. Sustituyendo $\tilde{\psi}_\theta$ se tiene

$$\begin{aligned}\left|\int_{\mathbb{R}}\tilde{\psi}_\theta(x-y)U_1(dy)\right| &\leq \int_{\mathbb{R}}e^{-\varepsilon(x-u)}d\tilde{\psi}_\theta(u)\\ &= e^{-\varepsilon x}\left[-\int_{\mathbb{R}}e^{(\theta+\varepsilon)u}k(e^u)du+(\theta-1)\int_{\mathbb{R}}e^{\varepsilon u}\tilde{\psi}_\theta(u)du\right]\\ &= e^{-\varepsilon x}\left[-\int_{\mathbb{R}}e^{(\theta+\varepsilon)u}k(e^u)du+(\theta-1)\int_{\mathbb{R}}\left(e^{(\theta+\varepsilon-1)u}\int_{e^u}^{\infty}k(v)dv\right)du\right]\\ &= e^{-\varepsilon x}\left[-\mathbb{E}\left[I^{\theta+\varepsilon-1}\right]+\frac{\theta-1}{\theta+\varepsilon-1}\mathbb{E}\left[I^{\theta+\varepsilon-1}\right]\right]\\ &= e^{-\varepsilon x}\left[\frac{\varepsilon}{1-\theta-\varepsilon}\mathbb{E}\left[I^{\theta+\varepsilon-1}\right]\right],\end{aligned}$$

denotando por M_2' a la constante del lado derecho, se obtiene

$$\left|\int_{\mathbb{R}}\tilde{\psi}_\theta(x-y)U_1(dy)\right|\leq M_2'e^{-\varepsilon x},$$

es decir

$$\int_{\mathbb{R}} \tilde{\psi}_\theta(x-y)U_1(dy) = O\left(e^{-\varepsilon x}\right), \quad x \to \infty. \tag{4.21}$$

De (4.20) y (4.21) se concluye finalmente la estimación

$$\int_{\mathbb{R}} \tilde{\psi}_\theta(x-y)U_\theta(dy) - \frac{\mathbb{E}[I^{\theta-1}]}{\mu_\theta(\theta-1)} = O\left(e^{-\varepsilon x}\right), \quad x \to \infty.$$

Caso $\theta = 1$. Este caso es un poco diferente de los anteriores, la expresión principal es

$$\int_0^\infty k(v)U_\theta((\log(e^x/v), \log(e^x/v) + \log\lambda))dv \tag{4.22}$$

por lo que utilizando la descomposición de Stone se tiene que (4.22) es igual a

$$\int_0^\infty k(v)U_1((\log(e^x/v), \log(e^x/v) + \log\lambda))dv + \int_0^\infty k(v)U_2((\log(e^x/v), \log(e^x/v) + \log\lambda))dv.$$

Para la segunda integral se tiene que

$$\begin{aligned}
&\int_0^\infty k(v)U_2((\log(e^x/v), \log(e^x/v) + \log\lambda))dv \\
&= \int_0^\infty k(v)\left(\int_{\mathbb{R}} \mathbf{1}_{\{\log(e^x/v)<y<\log(e^x/v)+\log\lambda\}} u(y)dy\right)dv \\
&= \int_0^\infty k(v)\left(\frac{1}{\mu_\theta}\log\lambda + \int_{\mathbb{R}} \mathbf{1}_{\{\log(e^x/v)<y<\log(e^x/v)+\log\lambda\}} O(e^{-\varepsilon y})dy\right)dv \\
&= \frac{1}{\mu_\theta}\log\lambda + \int_0^\infty k(v)\left(\int_{\mathbb{R}} \mathbf{1}_{\{\log(e^x/v)<y<\log(e^x/v)+\log\lambda\}} O(e^{-\varepsilon y})dy\right)dv \\
&= \frac{1}{\mu_\theta}\log\lambda + \int_0^\infty k(v)\left(\int_{\mathbb{R}} \mathbf{1}_{\{0<u<\log\lambda\}} O(e^{-\varepsilon(u+\log(e^x/v))})du\right)dv \\
&= \frac{1}{\mu_\theta}\log\lambda + e^{-\varepsilon x}\int_0^\infty O(v^\varepsilon)k(v)\left(\int_{\mathbb{R}} \mathbf{1}_{\{0<u<\log\lambda\}} e^{-\varepsilon u}du\right)dv \\
&= \frac{1}{\mu_\theta}\log\lambda + e^{-\varepsilon x}K\int_0^\infty O(v^\varepsilon)k(v)dv
\end{aligned}$$

con $K = \int_{\mathbb{R}} \mathbf{1}_{\{0<u<\log\lambda\}} e^{-\varepsilon u}du$ constante (que depende de λ). Por lo tanto

$$\begin{aligned}
&\int_0^\infty k(v)U_\theta((\log(e^x/v), \log(e^x/v) + \log\lambda))dv - \frac{1}{\mu_\theta}\log\lambda \\
&= \int_0^\infty k(v)U_1((\log(e^x/v), \log(e^x/v) + \log\lambda))dv + e^{-\varepsilon x}K\int_0^\infty O(v^\varepsilon)k(v)dv
\end{aligned} \tag{4.23}$$

Para obtener una estimación de (4.23) cuando x es suficientemente grande, primero se trabajará con la primer integral. Por la proposición 2.15 se tiene

$$
\begin{aligned}
\left|\int_0^\infty k(v)U_1((\log(e^x/v),\log(e^x/v)+\log\lambda))dv\right| &\leq \int_0^\infty k(v)U_1((\log(e^x/v),\infty))dv\\
&\leq M\int_0^\infty k(v)e^{-\varepsilon\log(e^x/v)}dv\\
&= M\int_0^\infty k(v)(e^x/v)^{-\varepsilon}dv\\
&= Me^{-\varepsilon x}\int_0^\infty v^\varepsilon k(v)\\
&= M\mathbb{E}\left[I^\varepsilon\right]e^{-\varepsilon x}
\end{aligned}
$$

y $\mathbb{E}\left[I^\varepsilon\right]$ es finito si y solo si $\varepsilon < \theta = 1$. Por lo tanto

$$
\int_0^\infty k(v)U_1((\log(e^x/v),\log(e^x/v)+\log\lambda))dv = O\left(e^{-\varepsilon x}\right), \quad x\to\infty. \tag{4.24}
$$

Ahora bien, para la segunda integral de (4.23) basta notar que

$$
\left|\int_0^\infty O(v^\varepsilon)k(v)dv\right| \leq \int_0^\infty v^\varepsilon k(v)dv = \mathbb{E}\left[I^\varepsilon\right],
$$

y nuevamente $\mathbb{E}\left[I^\varepsilon\right] < \infty$ si $\varepsilon < \theta = 1$, luego

$$
e^{-\varepsilon x}K\int_0^\infty O(v^\varepsilon)k(v)dv = O\left(e^{-\varepsilon x}\right), \quad x\to\infty. \tag{4.25}
$$

De (4.24) y (4.25) se concluye finalmente

$$
\int_0^\infty k(v)U_\theta((\log(e^x/v),\log(e^x/v)+\log\lambda))dv - \frac{1}{\mu_\theta}\log\lambda = O\left(e^{-\varepsilon x}\right), \quad x\to\infty.
$$

□

4.4. Supuestos básicos

Como puede notarse en los enunciados de las proposiciones 4.3 y 4.8, algunas de las condiciones que se imponen para garantizar las respectivas estimaciones de la velocidad de convergencia de $t^\theta\mathbb{P}(I>t)$ a C, es que las distribuciones

$$
\mathbb{P}(\xi_1\in dy) \quad \text{y} \quad \mathbb{P}(\xi_{\mathbf{e}}\in dy), \tag{4.26}
$$

sean spread-out. Según la definición 2.12, una distribución F es spread-out si existe $n\in\mathbb{N}$ tal que la n-ésima convolución de F consigo misma, $F^{*(n)}$, se puede escribir como

$$
F^{*(n)} = F_1 + F_2,
$$

donde $F_1 \neq 0$ es absolutamente continua con respecto a la medida de Lebesgue. La pregunta natural es saber si existen procesos de Lévy ξ tales que alguna de las distribuciones en (4.26) sean spread-out y que por lo tanto puedan aplicarse las proposiciones 4.3 o 4.8.

Sea ξ un proceso de Lévy ξ fijo, considérese primero la distribución $G(dy) = \mathbb{P}(\xi_1\in dy)$ de la proposición 4.3. La pregunta es ¿es posible dar condiciones (relacionadas al proceso ξ) al menos suficientes para garantizar que la distribución G sea spread-out?

I. Al ser ξ un proceso de Lévy, entonces su distribución infinitamente divisible asociada es G y claramente una condición suficiente para que G sea spread-out es que G sea absolutamente continua (con respecto a la medida de Lebesgue).

II. Por el teorema de inversión de Fourier, si G tiene una función característica integrable, entonces G tiene una densidad acotada g dada por

$$g(y) = \frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{R}} e^{-ixy}\mathbb{E}[e^{ix\xi_1}]dx.$$

Para simplificar lo anterior, si se cuenta con una expresión explícita para el exponente característico Ψ del proceso ξ, entonces, utilizando la igualdad

$$\mathbb{E}[e^{ix\xi_1}] = e^{-\Psi(x)}, \quad \forall x \in \mathbb{R},$$

para asegurar la integrabilidad de la función característica de G es suficiente garantizar la condición

$$\int_{\mathbb{R}} \left| e^{-\Psi(x)} \right| dx < \infty.$$

Y en este caso, en particular G será spread-out.

Ahora considérese la distribución $F(dy) = \mathbb{P}(\xi_{\mathbf{e}} \in dy)$ de la proposición 4.8, donde, recuérdese, $\mathbf{e}$ es una variable aleatoria exponencial de parámetro $\lambda = 1$ independiente de ξ. Nuevamente lo que se buscan son condiciones suficientes para asegurar que la distribución F sea spread-out.

I. Si la distribución de ξ_t, $t > 0$, tiene densidad $p(t,y)$ medible en (t,y), entonces, la medida potencial del proceso ξ satisface que para todo $B \in \mathscr{B}(\mathbb{R})$

$$\begin{aligned} U_\xi(B) &= \int_0^\infty \mathbb{P}(\xi_t \in B)\, dt \\ &= \int_0^\infty \left(\int_B p(t,x)dx \right) dt \\ &= \int_B \left(\int_0^\infty p(t,x)dt \right) dx, \end{aligned}$$

es decir, U_ξ es absolutamente continua y su densidad está dada por

$$u(x) = \int_0^\infty p(t,x)dt.$$

Ahora bien, por la proposición 2.20 se tiene que $U_\xi = \sum_{n\geq 1} F^{*(n)}$, por lo que si U_ξ es absolutamente continua entonces F también lo es. En particular, F es spread-out.

II. Nuevamente por el teorema de inversión de Fourier, si la función característica de F es integrable, entonces F es absolutamente continua. Supóngase que Ψ es el exponente característico del proceso de Lévy ξ, la función característica de F está dada por

$$
\begin{aligned}
\mathbb{E}[e^{ix\xi_{\mathbf{e}}}] &= \int_0^\infty e^{-t}\mathbb{E}[e^{ix\xi_t}]dt \\
&= \int_0^\infty e^{-t}e^{-t\Psi(x)}dt \\
&= \int_0^\infty e^{-t(\Psi(x)+1)}dt \\
&= \frac{1}{-(\Psi(x)+1)},
\end{aligned}
$$

donde la última igualdad se cumple ya que $\Re(\Psi(x)) > 0$. Por lo tanto, una condición suficiente para que la distribución F sea absolutamente continua (y en particular spread-out), es que se cumpla la siguiente condición de integrabilidad

$$
\int_{\mathbb{R}} \left| \frac{1}{\Psi(x)+1} \right| dx < \infty.
$$

Notas

Ver el inciso III en las Conclusiones (capítulo 5).

CAPÍTULO 5

Conclusiones

Para concluir, será útil describir las conclusiones finales a las que se han llegado después de todo el trabajo realizado en las páginas anteriores.

De manera general, este trabajo tuvo dos partes esenciales en su desarrollo. La primera, que abarcó básicamente los capítulos 1 y 2, se relacionó con un trabajo de búsqueda entre varios libros y artículos, selección de aspectos principales, análisis y síntesis de la información relevante; luego, con base en los conocimientos adquiridos antes y durante el desarrollo de los primeros capítulos, la segunda parte de la tesis, que comprendió los capítulos 3 y 4, buscó aplicar estos conocimientos para resolver un problema nuevo, interesante, y que naturalmente conllevó otro tipo de habilidades y hábitos de trabajo un tanto desconocidos hasta el momento.

De manera más precisa, es posible decir que se cumplieron todos y cada uno de los objetivos planteados en la presentación de los avances de tesis en el seminario de titulación, que se describen a continuación.

I. El primer objetivo era entender la demostración original de Méjane [Mej02] y Rivero [Riv05] de la proposición 3.2, lo cual fue descrito de manera detallada en la sección 4.1, después del teorema 4.1.

II. El segundo obtetivo era proponer una demostración alternativa de la proposición 3.2, sin apelar directamente a los resultados de Kesten [Kes73] y Goldie [Gol91] para ecuaciones afines aleatorias. Esto se hizo completamente en el capítulo 3, como puede leerse ahí, la manera de lograrlo fue utilizando una identidad fundamental descrita y demostrada en la sección 3.1, y que después de mucho trabajo y diferentes versiones infructuosas de demostración, la versión final es la que aparece descrita en la sección 3.2.

III. Finalmente, el tercer objetivo era estudiar el error en la aproximación

$$\lim_{t\to\infty} t^{\theta}\mathbb{P}\left(\int_0^{\infty} e^{\xi_s}\,ds > t\right) = C, \tag{5.1}$$

establecida en la proposición 3.2. El capítulo 4 se dedicó exclusivamente a estudiar este problema. Como se mencionó desde la presentación de los avances de tesis, la intención en esta parte era obtener todos los resultados posibles que contribuyeran de alguna manera con el objetivo de proporcionar una estimación para el error en (5.1), y, si bien los resultados presentados en las proposiciones 4.3, 4.5, 4.6 y 4.8 resultan interesantes, aún se requiere trabajo de investigación para refinarlos.

Particularmente, la proposición 4.8 se basó en la demostración alternativa que se presentó de la proposición 3.2 y en una versión con estimaciones de la velocidad de convergencia en la descomposición de Stone (proposición 2.15). Es posible que el método anterior de la posibilidad de obtener un refinamiento de la proposición 4.8 que mejore las estimaciones hechas en las proposiciones 4.3, 4.5 y 4.6; un nuevo objetivo es lograr este refinamiento y queda pendiente para un trabajo futuro.

APÉNDICE A

Lemas tauberianos

Una función medible $g : [d,\infty) \to [0,\infty)$, $d \geq 0$, es de **variación regular** en infinito con índice $\rho \in \mathbb{R}$ (denotado por $g \in VR_\rho$), si para todo $\lambda > 0$

$$\lim_{x\to\infty} \frac{g(\lambda x)}{g(x)} = \lambda^\rho.$$

Si $\rho = 0$ se dice que g es de **variación lenta**.

Para dos funciones g y h, se escribe $g(x) \sim h(x)$ cuando $x \to \infty$, si

$$\lim_{x\to\infty} \frac{g(x)}{h(x)} = 1.$$

Claramente lo anterior implica que existe una vecindad de ∞ en la cual h no es cero. La demostración de los siguientes dos teoremas pueden consultarse en [NHBT89], páginas 39 y 159 respectivamente.

Teorema A.1 (Teorema de la densidad monótona). *Sea $U(x) = \int_0^x u(y)dy$. Si*

$$U(x) \sim cx^\rho l(x) \quad \textit{cuando} \quad x \to \infty,$$

con $c \in \mathbb{R}$, $\rho \in \mathbb{R}$, $l \in VR_0$ y si u es monótona en alguna vecindad de infinito, entonces

$$u(x) \sim c\rho x^{\rho-1} l(x) \quad \textit{cuando} \quad x \to \infty.$$

Teorema A.2. *Sea $U(x) = U(c) + \int_c^x u(t)dt$, donde u es monótona en alguna vecindad de infinito y $l \in VR_0$. Entonces*

$$\lim_{x\to\infty} \frac{U(\lambda x) - U(x)}{l(x)} = c \log \lambda, \quad \forall \lambda \geq 1$$

con $c \in \mathbb{R}$, si y solo si

$$u(x) \sim cx^{-1} l(x) \quad \textit{cuando} \quad x \to \infty.$$

Bibliografía

[AL06] K. Athreya y S. Lahiri. *Measure theory and probability theory*. Springer, Nueva York 2006.

[Als] Gerold Alsmeyer. *Renewal, recurrence and regeneration*. Springer, 2012, disponible en http://wwwmath.uni-muenster.de/statistik/alsmeyer.

[App09] David Applebaum. *Lévy processes and stochastic calculus*. Cambridge University Press, Nueva York, 2a edición 2009.

[Asm03] S. Asmussen. *Applied probability and queues*. Springer-Verlag, Nueva York, 2a edición 2003.

[Ber96] J. Bertoin. *Lévy processes*. Cambridge University Press, Cambridge, 1a edición 1996.

[BLM08] Jean Bertoin, Alexander Lindner y Ross Maller. On continuity properties of the law of integrals of Lévy processes. En *Séminaire de probabilités XLI*, tomo 1934 de "Lecture Notes in Math.", páginas 137–159. Springer, Berlin 2008.

[Bre93] L. Breiman. *Probability*. Classics in applied mathematics. Addison-Wesley, 2a edición 1993.

[BY05] Jean Bertoin y Marc Yor. Exponential functionals of Lévy processes. Probab. Surv. 2, 191–212 2005.

[CF51] K. L. Chung y W. H. J. Fuchs. On the distribution of values of sums of random variables. Mem. Amer. Math. Soc. 1951(6), 12 1951.

[CKP09] L. Chaumont, A. E. Kyprianou y J. C. Pardo. Some explicit identities associated with positive self-similar Markov processes. Stochastic Process. Appl. 119(3), 980–1000 2009.

[CT04] R. Cont y P. Tankov. *Financial modelling with jump processes*. Chapman and Hall, Florida 2004.

[Don07] R.A. Doney. *Fluctuation theory of Lévy processes*. Springer 2007.

[DVJ03] D.J. Daley y D. Vere-Jones. *An introduction to the theory of point processes, Volume I: Elementary theory and methods*. Springer, Nueva York, 2a edición 2003.

[EM07] K. Bruce Erickson y Ross A. Maller. Finiteness of integrals of functions of Lévy processes. Proc. Lond. Math. Soc. (3) 94(2), 386–420 2007.

[Fel71] W. Feller. *An introduction to probability theory and its applications, Vol.II*. Wiley, 2a edición 1971.

[Gol91] Charles M. Goldie. Implicit renewal theory and tails of solutions of random equations. Ann. Appl. Probab. 1(1), 126–166 1991.

[Gra09] G. Grabinsky. *Teoría de la medida*. Facultad de Ciencias, UNAM, México, D.F., 1a edición 2009.

[Kes73] Harry Kesten. Random difference equations and renewal theory for products of random matrices. Acta Math. 131, 207–248 1973.

[KKPvS11] A. Kuznetsov, A. E. Kyprianou, J. C. Pardo y K. van Schaik. A Wiener-Hopf Monte Carlo simulation technique for Lévy processes. Ann. Appl. Probab. 21(6), 2171–2190 2011.

[KP13] A. Kuznetsov y J. C. Pardo. Fluctuations of table processes and exponential functionals of hypergeometric Lévy processes. Acta Appl. Math. 123, 113–139 2013.

[KPR10] A. E. Kyprianou, J. C. Pardo y V. Rivero. Exact and asymptotic n-tuple laws at first and last passage. Ann. Appl. Probab. 20(2), 522–564 2010.

[KT75] S. Karlin y H. Taylor. *A first course in stochastic processes*. Academic Press, San Diego, 2a edición 1975.

[Kyp06] A.E. Kyprianou. *Introductory lectures on fluctuations of Lévy processes with applications*. Universitext Springer-Verlag, Berlín 2006.

[Mej02] O. Mejane. Cramer's estimate for the exponential functional of a lévy process. No publicado, Laboratoire de Statistiques et Probabilités, Université Paul Sabatier. Disponible en 2002.

[MT09] S. Meyn y R. Tweedie. *Markov chains and stochastic stability*. Cambridge University Press, Nueva York, 2a edición 2009.

[MZ06] Krishanu Maulik y Bert Zwart. Tail asymptotics for exponential functionals of Lévy processes. Stochastic Process. Appl. 116(2), 156–177 2006.

[NHBT89] C. M. Goldie N. H. Bingham y J. L. Teugels. *Regular variation*. Volumen 27 de *Encyclopedia of mathematics and its applications*. Cambridge University Press, Cambridge 1989.

[PRvS13] J. C. Pardo, V. Rivero y K. van Schaik. On the density of exponential functionals of Lévy processes. Bernoulli 19(5A), 1938–1964 2013.

[Res87] S. Resnick. *Extreme values, regular variation and point processes*. Springer-Verlag, Nueva York 1987.

[Res02] S. Resnick. *Adventures in stochastic processes*. Birkhauser, Boston, 3a edición 2002.

[Res05] S. Resnick. *A probability path*. Birkhauser, Boston, 5a edición 2005.

[Riv05] Víctor Rivero. Recurrent extensions of self-similar Markov processes and Cramér's condition. Bernoulli 11(3), 471–509 2005.

[Riv07] Víctor Rivero. Recurrent extensions of self-similar Markov processes and Cramér's condition. II. Bernoulli 13(4), 1053–1070 2007.

[Riv12] Víctor Rivero. Tail asymptotics for exponential functionals of Lévy processes: the convolution equivalent case. Ann. Inst. Henri Poincaré Probab. Stat. 48(4), 1081–1102 2012.

[RY05] D. Revuz y M. Yor. *Continuous martingales and brownian motion*. Springer, Nueva York, 3a edición 2005.

[Sat99] K.I. Sato. *Lévy processes and infinitely divisible distributions*. Cambridge University Press, Cambridge 1999.

[Sto66] Charles Stone. On absolutely continuous components and renewal theory. Ann. Math. Statist. 37, 271–275 1966.

[Teu67] Jozef Lodewijk Teugels. *On the rate of convergence in renewal and Markov renewal processes*. ProQuest LLC, Ann Arbor, MI 1967. Thesis (Ph.D.)–Purdue University.

[Vig02] V. Vigon. *Simplifiez vos Lévy en titillant la factorisation de Wiener-Hopf*. Thèse de doctorat de lINSA de Rouen 2002.

[Yor01] M. Yor. *Exponential functionals of brownian motion and related processes*. Springer, Berlín 2001.