Juegos cooperativos con estructuras anidadas

Miguel Angel Vargas Valencia

Centro de Investigación en Matemáticas, A.C.

Maestría en Ciencias.
Guanajuato, GTO.
2013

Juegos cooperativos con estructuras anidadas

Miguel Angel Vargas Valencia

Tesis presentada como requisito parcial
para optar por el título de Maestro en Ciencias.

Director:

Dr. Francisco Sánchez Sánchez.

Centro de Investigación
en Matemáticas, A.C.

Maestría en Ciencias.
Guanajuato, GTO.

2013

Centro de Investigación
en Matemáticas, A.C.

Maestría en Ciencias.

Miguel Angel Vargas Valencia, 1989

Juegos cooperativos con estructuras anidadas anidadas

Palabras claves: Juegos cooperativos, Valor de Shapley, Estructura anidada, Juegos 1-anidados, Juegos p-anidados.

Introducción

La Teoría de Juegos es una rama de la matemática que se dedica a modelar y caracterizar formalmente situaciones en las que se deben tomar decisiones, especialmente en el campo de la economía y la politología, aunque también se ha aplicado exitosamente en ámbitos, como la biología y la ciencia militar.

El objetivo de la Teoría de Juegos consiste en analizar las estrategias óptimas para la toma de decisiones, además del comportamiento de los agentes participantes en la situación o juego. Este estudio es de gran importancia, pues todos los acaeceres del mundo demandan la toma de alguna decisión, por más simple que pueda parecer. Algunas de estas situaciones requieren de una profunda reflexión, mientras que otras se hacen prácticamente de forma automática. Cabe notar que las decisiones tomadas están vinculadas a los objetivos personales que se pretendan alcanzar, y así, cuando se conocen las consecuencias de cada alternativa, la elección de una solución determinada resulta una tarea racional.

La Teoría de Juegos ya se percibía desde muchos siglos atrás, aunque no existía como tal. El Talmud es una recopilación de leyes y tradiciones antiguas desde el siglo V D.C. que supone la base religiosa de los judíos; en dicho texto se discute la toma de decisiones para la repartición de bienes, como el ejemplo del caso de la muerte de un hombre que tiene tres esposas. Pero formalmente, Emile Borel en 1921 a 1927 y John von Neumann en 1928 publican artículos encontrando la solución y probando el teorema de minimax para juegos bipersonales, respectivamente. Sin embargo, son los matemáticos John Von Neumann y Oskar Morgenstern los considerados padres de la Teoría de Juegos desde la publicación en 1944 de la obra *The Theory of Games and Economic Behaviour*.

El gran impacto que la Teoría de Juegos ha tenido en el desarrollo de la Economía actual queda evidentemente reconocido con los cinco Premio Nobel de Economía que se han otorgado a personas que trabajan en dicha área: John Nash, Reinhard Selten, John Harsanyi y recientemente Alvin Roth y Lloyd Shapley.

Los juegos se clasifican en dos clases: los no cooperativos y los cooperativos. En este trabajo se estudian los juegos cooperativos, en estos juegos los jugadores disponen de mecanismos que les permiten realizar acuerdos condicionales. El problema central de los juegos cooperativos es el de brindar métodos para repartir entre los jugadores las utilidades que se obtienen con su cooperación.

En este trabajo se presentan los juegos cooperativos con estructuras anidadas, estos se introducen para modelar situaciones en las que los agentes están, *a priori*, organizados en estructuras definidas debido a clasificaciones que dan lugar a clases, subclases, sub-subclases, etc. Estas situaciones suelen presentarse cuando a un grupo de agentes se le dan clasificaciones refinadas debido a diversas características. Un ejemplo relevante de estas situaciones es analizar las personas de un país teniendo en cuenta que cada una de ellas pertenece a una ciudad, que a su vez, pertenece a un estado y estos a su vez forman países. Así, la organización política del país en cuestión induce una *estructura de anidación*.

En el problema de la repartición de dinero para proyectos de una nación nos podemos encontrar con una situación que puede ser vista como un juego cooperativo. Si se desea repartir una cantidad de dinero entre los estados, es posible hacerlo teniendo en cuenta las necesidades de cada coalición de estados y modelando la situación como un juego cooperativo clásico para encontrar la cantidad que le corresponde a cada estado con soluciones conocidas, como lo es el valor de Shapley. Pero si se desean refinar las consideraciones y repartir el dinero de forma que se tenga en cuenta las necesidades de cada municipio del país, se está en una situación que requiere un modelo de juego cooperativo con estructura anidada.

Si se desea repartir el dinero teniendo en cuenta las necesidades de cada municipio del país, es razonable pensar que las necesidades de un municipio se amparan en el dinero destinado para su gobierno estatal. De aquí, se puede inferir que no toda coalición entre municipios es posible, puesto que no podría existir una coalición entre municipios de diferentes estados, pero sí pueden haber coaliciones puramente entre estados. Es importante resaltar que si tomamos una coalición de estados, la debemos ver como la coalición de todos los municipios que componen dichos estados, pues los agentes a estudiar no dejan de ser los municipios. Esta situación presenta, claramente, ciertos niveles en el juego; los municipios, que podrían tomarse como en un primer nivel de posibles coaliciones, y los estados (vistos como todos sus municipios), que pueden considerarse como un segundo nivel de posibles coaliciones. Esta situación da lugar a una estructura de "anidación". Dicha estructura restringe el conjunto de coaliciones que se deben tener en cuenta en el juego cooperativo, pues no son todas las coaliciones en el conjunto potencia de jugadores.

Las anidaciones se caracterizarán por medio de particiones en el conjunto de agentes participantes en el juego. Entonces, sean $N = \{1, 2, ..., n\}$ el conjunto de jugadores y $\mathcal{P}_1 = \{N_1^1, N_2^1, ..., N_m^1\}$ una partición de N. Esto define un segundo "nivel" en el juego; es decir, los elementos en cada N_k^1 pertenecen a un primer nivel y los elementos de $\mathcal{P}_1$ a un segundo nivel. A esta situación se le llamará juego cooperativo $1-$*anidado*.

Ahora, para generar un nuevo nivel en la anidación, considérese una partición $\mathcal{P}_2 = \{N_1^2, N_2^2, ..., N_k^2\}$, donde $\mathcal{P}_1$ es un refinamiento de $\mathcal{P}_2$; ésta caracteriza el tercer nivel en la anidación, definiendo así un juego cooperativo $2-$ *anidado*. Generalizando esta construcción, se puede obtener un juego cooperativo $p-$*anidado*, donde se tienen $p+1$ niveles que definen las coaliciones requeridas en el modelo; esto se logra definiendo p particiones del conjunto de jugadores, siendo una un refinamiento de la siguiente.

El objetivo general del presente trabajo de investigación es modelar, caracterizar y solucionar matemáticamente los *juegos cooperativos con estructuras anidadas*. Dicho objetivo se conforma paso a paso con los siguientes objetivos específicos:

- Modelar, definir y caracterizar matemáticamente la situación de un juego cooperativo *1-anidado*.
- Proponer y caracterizar una solución para los juegos cooperativos *1-anidados*, que cumple axiomas específicos que modelan características deseables en la realidad.
- Brindar una generalización para el modelo a juegos cooperativos *p-anidados*.
- Generalizar la solución propuesta para juegos *1-anidados* a juegos cooperativos *p-anidados*.

Por ello, se inicia con un primer capítulo, en el cual se introducen a los conceptos básicos de la teoría de juegos cooperativos clásicos. Igualmente, se recuerdan las soluciones que se tienen para los juegos que se utilizarán en el desarrollo del trabajo: Shapley y Shapley ponderado. Contiene una sección dedicada a la función potencial de un juego, pues ésta brinda propiedades de los anteriores valores, que son necesarias a lo largo del trabajo. Se finaliza con una sección dedicada a una caracterización de la familia de valores lineales simétricos y eficientes (LSE), pues con ella se presenta una interpretación a un resultado posterior.

Así, se obtienen herramientas para abordar el estudio de los juegos cooperativos con estructuras anidadas.

En el segundo capítulo, se modela matemáticamente la idea de juego cooperativo *1-anidado*, teniendo en cuenta una sola partición del conjunto de jugadores, así, es posible definir el conjunto de coaliciones que se tienen en cuenta en un juego *1-anidado*. Contiene una sección en la cual se define el jugo cociente de un juego anidado, éste es un juego cooperativo que ayuda a analizar el juego *1-anidado* en el segundo nivel, también, se muestra la relación entres estos juegos. En su última sección se presenta una solución para juegos *1-anidados*, que coincide con el *valor colectivo* presentado por Kamijo [9] para juegos cooperativos con *estructuras coalicionales*. Esta coincidencia es natural, ya que un juego *1-anidados* se modela con una sola partición del conjunto de jugadores. Dicha solución se caracteriza de forma única con un conjunto de axiomas independientes diferentes a los presentados en [9], pues el problema principal se enfrento de manera distinta con el objetivo de obtener una solución para juegos con estructuras anidadas de una cantidad finita de niveles.

Finalmente, en el tercer capítulo, se generalizan las ideas presentadas en el capítulo anterior, modelando los juegos cooperativos *p-anidados* con un conjunto de $p < \infty$ particiones sobre el conjunto de jugadores, dichas particiones se ordenan según el nivel que representan, por ello cada partición es un refinamiento de la que representa el nivel superior que precede. De aquí, se sigue la caracterización del conjunto de coaliciones posibles en un juego *p-anidado*. Posteriormente, se expone una sección dedicada a los *juegos de k-clases* de un juego *p-anidado*, estos describen la situación del juego en cada uno de los niveles superiores, generalizando así, la idea del juego cociente. En la última sección se presenta y caracteriza axiomáticamente una generalización de la solución presentada en el capítulo anterior.

La solución propia para juegos cooperativos *p-anidados* que brinda el desarrollo de este trabajo es relevante para la solución y repartición de pagos en juegos cooperativos en los que las posibles coaliciones presentan una estructura de anidación. Este tipo de modelo de juegos se obtiene, generalmente, en eminentes situaciones en las que se tienen en cuenta refinadas características políticas, económicas, laborales y sociales de los agentes.

Índice general

Capítulo 1

Juegos cooperativos clásicos

Supóngase la siguiente situación: México, Colombia y Brasil desean cooperar para realizar un evento sobre ciencia y tecnológica en latinoamérica. Si México organiza el evento por sí solo, debido a su cobertura, el costo de realización es de USD 60000. Por otro lado, si Colombia hace el evento, teniendo en cuenta la cantidad de participantes, el evento tiene un costo de USD 40000. Pero, si Brasil lleva a cabo el evento, su costo es de USD 80000. En caso, que dos de los países organicen el evento conjuntamente los costos son: Para México y Colombia el costo es de USD 80000, si se une México y Brasil es de USD 120000, y para Colombia con Brasil es de USD 110000. Ahora bien, si los tres paises realizan el evento conjuntamente el costo del evento es de USD 150000. Así, se concluye que si los tres países cooperan se obtiene un ahorro en los gastos de realización. Pero, con esta situación surge el problema de repartir el costo total de forma "justa" entre los participantes, teniendo en cuenta todas las situaciones posibles. El objetivo de los juegos cooperativos es resolver este tipo de situaciones.

Al principio de este capítulo se abordan conceptos básicos acerca de la teoría de juegos cooperativos, específicamente se formaliza y caracteriza el conjunto de dichos juegos; dotandolos, además, con una estructura de espacio vectorial, pues con esta caracterización se obtienen resultados y axiomatizaciones de valores que cumplen la propiedad de linealidad. Luego, se muestran las interpretaciones y caracterizaciones de algunos de los principales valores conocidos dentro de los juegos cooperativos, como son el valor de Shapley y el valor de Shapley ponderado. Posteriormente, se presenta una sección dedicada al potencial de un juego. Finalmente, termina este capítulo con una caracterización para la familia de soluciones lineales, simétricos y eficientes (LSE). Estos temas se estudian con el objetivo de preparar el campo para abordar la investigación de juegos cooperativos con estructuras anidadas, los cuales modelan una situación particular de juegos cooperativos.

1.1. Conceptos Básicos

Sea $N = \{1, 2, ..., n\}$ un conjunto finito y no vacío de *jugadores*. Se le llamará *coalición* a cualquier subconjunto no vacío $S \subseteq N$, éstas se interpretan como los diferentes grupos de jugadores que se forman para jugar unidos. Se denotará por 2^N al conjunto potencia del conjunto de jugadores, es decir, al conjunto de todos los subconjuntos de N el cual representa a todas las posibles coaliciones de jugadores que se pueden generar.

En varias aplicaciones de juegos cooperativos los jugadores modelan personas o grupos de personas, por ejemplo, sindicatos, ciudades, naciones, etc. Sin embargo, existen interesantes modelos de teoría de juegos de problemas económicos en los cuales los jugadores no son personas. Los jugadores también pueden ser objetivos de un proyecto económico, factores de producción, o algunas otras variables económicas de la situación en cuestión.

Definición 1.1.1. *Una juego cooperativo es un par (N, v), en el cual N representa el conjunto de jugadores participantes y v es una función que le asocia un número real $v(S)$ a cada uno de los subconjuntos S de N,*

$$v : 2^N \to \mathbb{R}.$$

Además, se asumirá que $v(\emptyset) = 0$.

La interpretación que se le da a un juego cooperativo es que los jugadores pertenecientes una coalición S deciden jugar unidos, en éste caso, consiguen una valía conjunta $v(S)$. Una coalición se considera formada no sólo cuando los jugadores que la conforman deciden jugar unidos, sino que también están de acuerdo en como repartir la ganancia conjunta $v(S)$. Así, el juego v especifica la ganancia que puede obtener cada una de las coaliciones. Como resultado del juego, se tiene un vector de pagos $x \in \mathbb{R}^n$, donde su i-ésima entrada, x_i, representa el valor asignado al jugador i en el juego correspondiente. De aquí, se tiene que el problema principal de los juegos cooperativos es obtener un vector de pagos que sea "justo" dadas las condiciones en que se lleva a cabo el juego.

Durante el desarrollo del presente trabajo se supone la divisibilidad arbitraria de los pagos. Es decir, no se tendrán en cuenta situaciones en las que no se pueda realizar la división de la utilidad, como por ejemplo, la situación en la cual una coalición obtenga un objeto indivisible como lo es una joya, pues ésta evidentemente solo puede pertenecer a un jugador.

Ejemplo 1.1.1. *Supóngase la situación en la cual las fábricas* 1, 2 *y* 3 *se encuentran sobre una mismo camino y desean cooperar para pavimentarlo, con el fin de comunicarse con la autopista* P. *La organización de las fábricas y el costo de pavimentación de cada uno de los tramos, en unidades monetarias, se representa en el siguiente diagrama:*

$$\overset{\mathbf{P}}{\triangle} \xleftarrow{\quad 30 \quad} \overset{\mathbf{1}}{\bigcirc} \xleftarrow{\quad 20 \quad} \overset{\mathbf{2}}{\bigcirc} \xleftarrow{\quad 10 \quad} \overset{\mathbf{3}}{\bigcirc}$$

Ésta situación se modela con un juego cooperativo donde $N = \{1, 2, 3\}$ *y para todo* $S \subseteq N$, $v(S)$ *representa el costo de pavimentación para comunicar las industrias en la coalición* S *con la autopista, y se muestra en el Cuadro 1.1.*

S	$\{1\}$	$\{2\}$	$\{3\}$	$\{1,2\}$	$\{1,3\}$	$\{2,3\}$	$\{1,2,3\}$
$v(S)$	30	50	60	50	60	60	60

Cuadro 1.1: Representación del juego (N, v) que modela el costo de la pavimentación del camino en unidades monetarias.

*Ahora, el problema radica en dividir el costo total de la pavimentación del camino entre las fábricas que desean cooperar (*1, 2 *y* 3*).*

Definición 1.1.2. *Un* ***vector de pagos*** x *es un elemento de* $\mathbb{R}^n$ *cuya i-ésima coordenada representa el pago correspondiente en el juego cooperativo del i-ésimo jugador. Se denotará por* $x(S)$ *a*

$$x(S) = \sum_{i \in S} x_i, \quad \forall S \subseteq N.$$

Los juegos cooperativos modelan situaciones en las que los jugadores pueden recibir o dar cierta utilidad, por ello, la palabra *pago* debe interpretarse según la situación, pues el jugador puede obtener o aportar dicho pago.

Se dice que un vector de pagos tiene *racionalidad individual* sí y sólo si $x_i \geq v(\{i\})$ para todo $i \in N$. También, se dice que tiene *racionalidad de grupo* sí y sólo si $x(S) \geq v(S)$ para toda $S \in 2^N$. Así mismo, se dirá que un vector de pagos x es eficiente sí y sólo si $x(N) = v(N)$. Entonces, con un vector de pagos individualmente racional, cada jugador garantiza que obtiene al menos lo que obtendría si juega por si solo, mientras que en un vector con racionalidad de grupo, cada una de las coaliciones consigue por lo menos lo que ella garantiza si todos sus integrantes jugaran como un solo agente.

Existen diversas propiedades que pueden cumplir los juegos cooperativos, y éstas se pueden interpretar según la situación que dichos juegos modelan. A continuación se describen algunas de estas características, las cuales clasifican los juegos cooperativos.

Definición 1.1.3. *Se dice que un juego (N, v) es* ***superaditivo*** *sí y sólo si*

$$v(S \cup T) \geq v(S) + v(T)$$

siempre que $S \cap T = \emptyset$, con $S, T \subset N$.

La mayoría de los juegos cooperativos que surgen en la realidad son superaditivos, ya que si los elementos de $S \cup T$ juegan juntos, pueden acordar jugar la partida como dos coaliciones diferentes, garantizando con ello al menos $v(S) + v(T)$. Sin embargo, muy a menudo se viola la superaditividad. Por ejemplo, pueden existir leyes antimonopolio, lo cual reduce las ganancias de $S \cup T$, si se llega a formar. Además, las grandes coaliciones pueden ser ineficaces, ya que es más difícil para ellos llegar a acuerdos sobre la distribución de sus beneficios.

Definición 1.1.4. *Un juego (N, v) es* ***convexo*** *sí y sólo si*

$$v(S \cup T) + v(S \cap T) \geq v(S) + v(T), \quad \forall S, T \subset N.$$

Claramente, un juego convexo es superaditivo. La siguiente caracterización de juegos convexo es equivalente: Un juego es convexo sí y sólo si, para todo $i \in N$,

$$v(S \cup \{i\}) - v(S) \leq v(T \cup \{i\}) - v(T), \quad \forall S \subseteq T \subseteq N \setminus \{i\}.$$

Por lo tanto, el juego (N, v) es convexo sí y sólo si la contribución marginal de un jugador para una coalición es monótona no decreciente con respecto a la inclusión de teoría de conjuntos. Esto explica dicho término *convexo*. Los juegos cooperativos convexos aparecen en algunas aplicaciones importantes de la teoría de juegos.

Definición 1.1.5. *Se dirá que un juego es* ***monótono*** *si $v(S) \leq v(T)$ para todo T y S subconjuntos de N tal que $S \subseteq T$.*

Los juegos cooperativos monótonos se presentan en situación en las que se obtiene un mayor beneficio cuando se dejan ingresar jugadores a una coalición.

Definición 1.1.6. *Se dice que un juego (N, v) es* ***simétrico*** *sí y sólo si, para cualesquiera dos coaliciones S y T de N con la misma cardinalidad, se tiene que $v(S) = v(T)$.*

Los juegos simétricos modelan situaciones en las que la valía obtenida por una coalición depende de la cantidad de jugadores que posee, sin importar quienes son, es decir, estos juegos no perciben diferencias entre un jugador y otro.

Definición 1.1.7. *Un juego (N, v) es de* ***suma constante*** *sí y sólo si*

$$v(S) + v(N \setminus S) = v(N) \quad \forall S \subseteq N.$$

Los juegos cooperativos de suma constante se han investigado ampliamente en los primeros trabajos en la teoría de juegos (véase von Neumann y Morgenstern de 1944 [20]). A menudo los juegos políticos son de suma constante.

Definición 1.1.8. *Se dice que un juego es **simple** sí y sólo si $v(S) = 0$ ó 1 para toda $S \subset N$ y $v(N) = 1$. Dado un juego simple se dirá que*

1. *S es una coalición ganadora sí y sólo si $v(S) = 1$.*

2. *i es un jugador vetador sí y sólo si está en toda coalición ganadora.*

Los juegos simples son utilizados, generalmente, para ver la importancia o *poder* que poseen los jugadores en una situación dada. Usualmente, son utilizados para modelar juegos de votación.

Definición 1.1.9. *Un juego (N, v) es **inesencial** sí y sólo si es un juego aditivo, que cumple que $v(S) = \sum_{i \in S} v(\{i\})$ para toda $S \subseteq N$.*

Es evidente que un juego inesencial es trivial desde el punto de vista de la teoría de juegos. Es decir, si cada jugador $i \in N$ aporta $v(\{i\})$ al entrar en cualquier coalición, entonces la distribución de $v(N)$ se determina únicamente.

De aquí en adelante se denotará por

$$\Theta = \{\theta : N \to N \mid \theta \text{ es biyectiva}\}$$

y por

$$\theta(S) = \{\theta(i) \mid i \in S\}.$$

Es decir, Θ contiene todos los órdenes totales que se pueden definir sobre el conjunto N, o si se desea interpretar de otra forma, es el conjunto de todas las permutaciones de los n jugadores. De ésta forma, θ se interpretará como un intercambio de papeles en el juego. Es decir, el jugador i pasará a tomar el papel del jugador $\theta(i)$ y

$$\theta(S) = \{\theta(i) \mid i \in S\}$$

el papel de S.

1.2. Estructura y descomposición

Dado un conjunto fijo de jugadores $N = \{1, 2, ..., n\}$, $n := |N|$. En caso de que no exista ambigüedad con el conjunto de jugadores, el juego cooperativo (N, v) se denotará solamente por su función característica v. Sea G_N el conjunto de juegos cooperativos con conjunto de jugadores N:

$$G_N = \{v \mid v : 2^N \to \mathbb{R},\ v(\emptyset) = 0\}.$$

A continuación se definen operaciones de suma, producto por escalar y elemento neutro sobre el conjunto G_N, con el fin de dotarlo de una estructura de espacio vectorial.

Definición 1.2.1. *Sean $v, w \in G_N$ y $\alpha \in \mathbb{R}$. Entonces,*

- $(v + w)(S) = v(S) + w(S)$, *para todo $S \in 2^N$ (suma).*
- $(\alpha v)(S) = \alpha v(S)$ *para todo $S \in 2^N$ (producto por escalar).*
- $v_0(S) = 0$ *para todo $S \in 2^N$ (elemento neutro).*

De inmediato se observa que el conjunto G_N con la estructura definida anteriormente es un espacio vectorial. Entonces, ordenando los conjuntos pertenecientes a $2^N \setminus \{\emptyset\}$ con una función biyectiva

$$\sigma : 2^N \setminus \{\emptyset\} \to \{1, 2, ..., 2^n - 1\},$$

es posible asignar a cada coalición $S \subseteq N$, $S \neq \emptyset$ la entrada $\sigma(S)$ de un vector en $\mathbb{R}^{2^n-1}$. Así, teniendo en cuenta que cada función característica en G_N le asigna el valor de cero al conjunto vacío, es claro que G^N es isomorfo a $\mathbb{R}^{2^n-1}$, esto se debe al morfismo que asigna a cada función $v \in G_N$ el vector $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^{2^n-1}$, tal que $(\mathbf{v})_{\sigma(S)} = v(S)$ y su inverso.

Con lo anterior se ha mostrado que para N fijo, G_N tiene una estructura de espacio vectorial con dimensión $2^n - 1$. Ahora, es importante dar una base para éste espacio, que será útil para la descomposición y análisis de los juegos cooperativos. Por ello se introducirán los siguientes juegos.

1.2.1. Juegos de unanimidad

En esta sección se definen y estudian los llamados *juegos de unanimidad*, pues ellos constituirán una base para G_N, que es de gran importancia a lo largo de éste trabajo.

Definición 1.2.2. *Para $T \subseteq N$, $T \neq \emptyset$, se le llamará* ***juego de unanimidad en** T* *al juego (N, u_T), donde*

$$u_T(S) = \begin{cases} 1 & \text{si } S \supseteq T, \\ 0 & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

Lema 1.2.1. *El conjunto* $U_N := \{u_T \mid \emptyset \neq T \subseteq N\}$ *es una base de* G_N.

Demostración. Existen $2^n - 1$ juegos de unanimidad y la dimensión de G_N también es $2^n - 1$. Por lo tanto, sólo tenemos que demostrar que los juegos de unanimidad son linealmente independientes. Supongamos, por contradicción, que $\sum_{\emptyset \neq T \subseteq N} \alpha_T u_T = 0$, donde no todos los $\alpha_T \in \mathbb{R}$ son cero. Se T_0 un conjunto minimal en

$$\{T \subseteq N \mid T \neq \emptyset,\ \alpha_T \neq 0\}.$$

Entonces,

$$\left(\sum_{\emptyset \neq T \subseteq N} \alpha_T u_T \right)(T_0) = \alpha_{T_0} \neq 0,$$

lo cual es una contradicción. Por tanto, el conjunto U_N es linealmente independiente y tiene $2^n - 1$ elementos, es decir, es una base de G_N. □

Así, la única descomposición de un juego v en términos de los juegos de unanimidad está dada por

$$v = \sum_{\emptyset \neq T \subseteq N} \delta_T u_T,$$

donde $\{\delta_T\}$ es un conjunto de números reales que representan los coeficientes de la combinación lineal, estos son conocidos como los coeficientes de Harsanyi[4].

Ejemplo 1.2.1. *Tomando el juego cooperativo de tres jugadores presentado en el Ejemplo 1.1.1, su descomposición en términos de los juegos de unanimidad es:*

$$v = 30u_{\{1,2,3\}} - 30u_{\{1,2\}} - 30u_{\{1,3\}} - 50u_{\{2,3\}} + 30u_{\{1\}} + 50u_{\{2\}} + 60u_{\{3\}}.$$

Los coeficientes de Harsanyi se determinan de manera recursiva como sigue:

Evaluando la la descomposición en una coalición $S \neq \emptyset$ se tiene que,

$$v(S) = \sum_{T \subseteq S} \delta_T,$$

entonces,

$$\delta_S = v(S) - \sum_{T \subset S} \delta_T \tag{1.1}$$

donde $\delta_\emptyset = 0$. Cada coeficiente δ_S se pueden interpretar como el beneficio adicional que la coalición S obtiene en caso de que ésta se forme, tomando en cuenta que todas las subcoaliciones de S ya han sido formadas.

Evidentemente, los coeficientes (1.1) son únicos para cada $v \in G_N$. Existe otra representación para dichos coeficientes, como se muestra en el siguiente resultado.

Lema 1.2.2. *Sea $v \in G_N$ y su descomposición lineal $v = \sum_{\emptyset \neq T \subseteq N} \delta_T u_T$, entonces*

$$\delta_S = \sum_{T \subseteq S} (-1)^{|S|-|T|} v(S) \tag{1.2}$$

1.3. Soluciones para juegos cooperativos

Ésta sección esta dedicada a la mostrar y caracterizar soluciones para los juegos cooperativos. Intuitivamente, la solución de juegos cooperativos debe brindar un vector de pagos, o alternativamente, un conjunto de vectores de pagos para cada juego (N, v). Es deseable que una solución cumpla con propiedades que modelen características deseables en la realidad (las cuales se propondrán como axiomas) y además demostrar que existe una única solución que cumple dichas propiedades.

Esta idea de solución posee la ventaja que no pide condiciones a la solución de un juego en particular. El problema de dividir la valía que obtenga cada coalición se transforma en el de si los jugadores aceptan o no los supuestos elementales que reflejan situaciones en la realidad. Desde luego los jugadores deberán aceptar el resultado que de ellos se desprende.

Se comenzará por definir formalmente una solución para juegos cooperativos.

Definición 1.3.1. *Una solución para juegos cooperativos en G_N es un operador*

$$\varphi : G_N \to \mathbb{R}^n,$$

donde su i-ésima entrada representa el pago que la solución le asocia al jugador i.

Para simplificar la notación, de aquí en adelante se dirá que

$$\varphi(N, v) = (\varphi_i(N, v))_{i \in N} = \varphi(v)$$

es una solución asociada al juego (N, v). También, dado un juego (N, v) fijo y un subconjunto $S \subseteq N$, el juego $(S, v) := (S, v|_S)$ denota el subjuego obtenido restringiendo v a los subconjuntos de S, y de igual forma su solución se representara por $\varphi(S, v) = \varphi(v|_S)$. Así mismo, se utilizarán las correspondientes letras minúsculas para referirse a la cardinalidad de las coaliciones ($|S| = s$, $|T| = t$, $|R| = r$, etc.).

A continuación se presentan y caracterizan dos conocidos valores que serán de gran importancia en el desarrollo del trabajo.

1.3.1. Valor de Shapley

En 1953 [19], el ganador del premio noble en economía (2012) Lloyd S. Shapley establece una solución de gran importancia en el ámbito de la teoría de juegos, pues, ha generado una gran cantidad de investigaciones. Ya que, como menciona Alvin Roth, también ganador del premio, en el libro *The Shapley value, Essays in honor of Lloyd S. Shapley*[16], "La razón de que el valor de Shapley ha sido el foco de tanto interés es que representa un enfoque distinto a los problemas de interacción estratégica compleja que la teoría de juegos pretende iluminar".[1]

En [19], Shapley menciona: "El fundamento de la teoría de juegos es la suposición de que los jugadores de un juego pueden evaluar, con sus propias medidas de utilidad, cada "posibilidad" que pueda surgir como consecuencia de una jugada. Al tratar de aplicar la teoría a cualquier campo, uno normalmente esperaría que se permita incluir en la categoría de "posibilidades", la posibilidad de tener que jugar un juego. Por consiguiente, la capacidad de evaluar el juego es de importancia crítica"[2]. En esta sección se estudia el valor de Shapley, que proporciona una evaluación *a priori* de cada partida coalicional.

El valor de Shapley es una solución para juegos cooperativos que se caracteriza por los siguientes axiomas.

Axioma 1.3.1. ***Aditividad.*** *Para todo (N, v) y $(N, w) \in G_N$, una solución φ satisface el axioma de aditividad si*

$$\varphi(N, v) + \varphi(N, w) = \varphi(N, v + w).$$

Este axioma tiene una interpretación que, aunque intuitiva, es importante, pues tiene un gran sentido en la modelación de situaciones reales que se interpretan como juegos cooperativos. Lo que expresa el axioma de aditividad es que, si se desean repartir ciertos costos en dos procesos de negociación diferentes, el resultado debe ser el mismo si se hacen por separado o de manera conjunta.

Axioma 1.3.2. ***Eficiencia.*** *Para todo $(N, v, \mathcal{B}) \in G_{N,\mathcal{B}}$, una solución φ satisface el axioma de eficiencia si*

$$\varphi(v)(N) = v(N).$$

Lo que este axioma le está requiriendo al operador solución es que la cantidad total repartida entre los jugadores en cada juego sea igual al monto que puede obtener la gran coalición en dicho juego.

[1] Traducción del texto original [16].
[2] Traducción del texto original [19].

Definición 1.3.2. *Se dirá que un jugador i es nulo en (N, v) sí y sólo si $v(S \cup \{i\}) = v(S)$ para toda $S \subseteq N \setminus \{i\}$.*

Un jugador nulo representa en un juego cooperativo a un agente que se encuentra presente en la situación de juego simplemente como un observador, es decir, su presencia no afecta la forma del juego.

Axioma 1.3.3. *Nulidad.* *Una solución φ satisface el axioma de nulidad, si i es un jugador nulo en (N, v), entonces,*

$$\varphi_i(N, v) = 0.$$

Este axioma establece que a alguien que participe únicamente como observador dentro del juego no le corresponderle pago alguno.

Para presentar el siguiente axioma se deben tener en cuenta las siguientes definiciones.

Definición 1.3.3. *Para cualquier par $(\theta, v) \in \Theta \times G_N$ se define el **juego cooperativo permutado** $(N, \theta * v)$ de tal forma que $(\theta * v) : 2^N \to \mathbb{R}$ y*

$$(\theta * v)(\theta(S)) = v(S) \quad , \quad \forall S \in 2^N.$$

Los que desea captar la definición anterior es que $\theta * v$ represente un nuevo juego donde los jugadores cambian papeles de acuerdo a la permutación θ; entonces, como los jugadores en $\theta(S)$ suplantan a los que están en S, el monto que puede obtener $\theta(S)$ en $\theta * v$ debe ser el igual al que podría conseguir S en v. De igual manera se define la permutación de un vector de pagos, como sigue.

Definición 1.3.4. *Para cada par $(\theta, x) \in \Theta \times \mathbb{R}^n$ se define un nuevo vector de pagos $\theta * x$, donde su $i-$ésima coordenada está dada por*

$$(\theta * x)_i = x_{\theta(i)}.$$

Axioma 1.3.4. *Simetría.* *Para todo $(\theta, v) \in \Theta \times G_N$, una solución φ satisface el axioma de simetría si*

$$\varphi(N, \theta * v) = (\theta * \varphi)(N, v).$$

La propiedad que este axioma representa es que la solución no dependa de las características personales del jugador. Por lo tanto, si los jugadores cambian papeles durante el juego y cada coalición logra obtener la misma valía que la coalición a la que suplanta, se debe obtener que a cada jugador en el nuevo juego se le asigne lo mismo que se le asignó al jugador al cual sustituye en el juego original.

El siguiente lema se utilizará durante la demostración del posterior teorema.

Lema 1.3.1. *Sean $R, T \subseteq N$, $|R| = r$, $|T| = t$, entonces,*

$$\sum_{T \supseteq R} \frac{(-1)^{t-r}}{t} = \frac{(r-1)!(n-r)}{n!}.$$

Teorema 1.3.1. ***Shapley, 1953.*** *Existe un único valor φ sobre G_N, conocido como* Valor de Shapley*, que satisface los axiomas de* ***aditividad****,* ***eficiencia****,* ***nulidad*** *y* ***simetría****. Además, dicho valor está dado por la siguiente expresión:*

$$\varphi_i(v) = \sum_{S \not\ni i} \frac{s!(n-s-1)!}{n!} \left[v(S \cup \{i\}) - v(S) \right] \quad \forall i \in N. \tag{1.3}$$

Demostración. Por el Lema 1.2.1 se tiene que

$$v = \sum_{T \subseteq N} \delta_T u_T,$$

así, si dicho valor φ existe, por su aditividad se obtendría que

$$\varphi(v) = \sum_{T \subseteq N} \varphi(\delta_T u_T),$$

por ello, para obtener el resultado, basta probar que el valor φ existe y es único para los juegos

$$\delta_T u_T(S) = \begin{cases} \delta_T & si\ S \supseteq T, \\ 0 & en\ otro\ caso. \end{cases}$$

Obsérvese que:

1. La valía de la gran coalición para dichos juegos es $\delta_T u_T(N) = \delta_T$.

2. Si $i \notin S$, entonces i es un jugador nulo en $\delta_T u_T$.

3. Si $i, j \in N$, $i, j \in T$ y θ es tal que $\theta(i) = j$ y $\theta(T) = T$, por el axioma de simetría se tiene que

$$\varphi_i(\theta * \delta_T u_T) = \varphi_{\theta(i)}(\delta_T u_T) = \varphi_j(\delta_T u_T).$$

   Entonces, dada la forma en que se tomó θ, se tiene que, $\delta_T u_T = \theta * \delta_T u_T$, y así

$$\varphi_i(\theta * \delta_T u_T) = \varphi_i(\delta_T u_T);$$

   por tanto,

$$\varphi_i(\delta_T u_T) = \varphi_j(\delta_T u_T)\ \forall i, j \in N.$$

De esta forma, si se tiene que φ satisface los últimos tres axiomas, el único valor posible para $\delta_S u_S$ es

$$\varphi_i(N, \delta_T u_T) = \begin{cases} \frac{\delta_T}{t} & si\ i \in T, \\ 0 & en\ otro\ caso. \end{cases}$$

Así, φ existe y es única, ésta es

$$\varphi_i(N, v) = \sum_{T \ni i} \frac{\delta_T}{t}. \tag{1.4}$$

Para finalizar la prueba, se demostrará que (1.4) es igual a (1.3). Por el Lema 1.2.2 se tiene que

$$\begin{aligned} \varphi_i(v) &= \sum_{T \ni i} \frac{\delta_T}{t} = \sum_{T \ni i} \sum_{R \subseteq T} \frac{(-1)^{t-r}}{t} v(R) \\ &= \sum_{R \ni i} \sum_{T \supseteq R} \frac{(-1)^{t-r}}{t} v(R) - \sum_{R \not\ni i} \sum_{T \supseteq R \cup \{i\}} \frac{(-1)^{t-(r+1)}}{t} v(R), \end{aligned} \tag{1.5}$$

$$\tag{1.6}$$

así, aplicando el Lema 1.3.1 a los términos en (1.5) se tiene que

$$\begin{aligned} \varphi_i(v) &= \sum_{R \ni i} \frac{(r-1)!(n-r)!}{n!} v(R) - \sum_{R \not\ni i} \frac{(r)!(n-r-1)!}{n!} v(R) \\ &= \sum_{S \not\ni i} \frac{(s)!(n-s-1)!}{n!} \left[v(S \cup \{i\}) - v(S) \right] \end{aligned}$$

□

El valor de Shapley tiene una expresión alterna que brinda una interesante interpretación, como se muestra a continuación.

Sea $\mathcal{R} \in \mathcal{SYM}_N$ (el grupo de todos los ordenes de N) y $i \in N$. El conjunto de jugadores que preceden a i en el orden $\mathcal{R}$ se denotará por

$$P_i^{\mathcal{R}} = \{ j \in N \mid \mathcal{R}(j) < \mathcal{R}(i) \}$$

y por $m_i^{\mathcal{R}} = v\left(P_i^{\mathcal{R}} \cup \{i\}\right) - v\left(P_i^{\mathcal{R}}\right)$. Así, el valor de Shapley esta dado por

$$\varphi_i(v) = \frac{1}{n!} \sum_{\mathcal{R} \in \mathcal{SYM}_N} m_i^{\mathcal{R}}. \tag{1.7}$$

Para ver que la expresiones (1.3) y (1.7) son iguales, sólo hay que notar que

$$\left|\{\mathcal{R} \mid P_i^{\mathcal{R}} = S\}\right| = s!(n-s-1)!$$

El valor de Shapley con la expresión (1.7) tiene la siguiente interpretación probabilística: si se elige al azar un orden $\mathcal{R}$ de N con una distribución uniforme sobre los $n!$ órdenes posibles y se le asigna al jugador i la utilidad marginal que aporta cuando se incorpora a los jugadores que lo preceden, $m_i^{\mathcal{R}}$, entonces, $\varphi_i(v)$ es el pago esperado que obtiene i.

En lo que sigue, se denotará el valor de Shapley por $Sh(N,v) = (Sh_i(v))_{i\in N}$. Además, observando la expresión del valor de Shapley, inmediatamente se concluye que es un operador lineal, es decir: para $v, w \in G_N$ y $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$,

$$Sh(\alpha v + \beta w) = \alpha Sh(v) + \beta Sh(w).$$

Ejemplo 1.3.1. *Considérese el juego cooperativo dado en el Ejemplo 1.1.1. El calculo del valor de Shapley para este juego se presenta en el Cuadro 1.2*

$\mathcal{R}$	$m_i^{\pi} = v\left(P_i^{\pi} \cup \{i\}\right) - v\left(P_i^{\pi}\right)$		
	$i=1$	$i=2$	$i=3$
123	30	20	10
132	30	0	30
213	0	50	10
231	0	50	10
312	0	0	60
321	0	0	60
$Sh_i(v)$	10	20	30

Cuadro 1.2: Valor de Shapley para el juego del Ejemplo 1.1.1. Para calcular los pagos $Sh_i(v)$ se suman los valores en las columnas de cada jugador y se promedian por la cantidad de ordenes, $3! = 6$.

Después de la publicación del artículo de Shapley en 1953 [19], muchas investigaciones se han realizado, y gran parte de ellas se centran en reformular la axiomática del valor de Shapley pues consideran que algunos de los axiomas son insatisfactorios. A continuación se presenta una caracterización axiomática de dicho valor que se mencionará posteriormente.

En 1977, Myerson introduce un concepto muy importante para la teoría del valor en juegos cooperativos, el cual se observa más ampliamente en [11], éste es,

Axioma 1.3.5. ***Contribuciones balanceadas.*** *Para cualesquiera dos jugadores $i, j \in N$ y todo $(N, v) \in G_N$, una solución φ satisface el axioma de contribuciones balanceadas si*

$$\varphi_i(v) - \varphi_i(v|_{N\setminus\{j\}}) = \varphi_j(v) - \varphi_j(v|_{N\setminus\{i\}}).$$

La interpretación que se le da a este axioma es la siguiente: lo que le afecta cualquier jugador, $j \in N$, a cualquier otro jugador $i \in N$, al salir del juego, es igual a lo que afecta el jugador i, al jugador j, al salir del juego. Es decir, el hecho de que un jugador salga del juego perjudica de la misma manera a todos los jugadores que permanecieron. Con esto, Myerson introduce un valor que asocia un vector de pagos a los juegos donde se tiene un grafo que representa conexiones o lasos de comunicación entre los jugadores, y como resultado, propone la siguiente caracterización:

Teorema 1.3.2. ***Myerson, 1977.*** *El valor de Shapley es la única solución para juegos cooperativos que satisface los axiomas de eficiencia y contribuciones balanceadas.*

1.3.2. Valor de Shapley ponderado

Otro operador solución que además tiene la característica de ser lineal es el valor de Shapley ponderado. Este valor tiene como objetivo brindar una solución que tenga en cuenta el "esfuerzo" que los jugadores necesitan realizar. Teniendo en cuenta este premisa, la idea es repartir el monto total de acuerdo a ponderaciones que modelan dicho "esfuerzo". Esta idea de repartición da lugar al valor de Shapley ponderado, un valor que no necesariamente satisface el axioma de simetría.

Como se observa en la demostración del Teorema 1.3.1, el valor de Shapley es una aplicación lineal que al jugador $i \in N$ en el juego de unanimidad (N, u_s), con $S \subseteq N$, le asocia el vector de pagos

$$Sh_i(u_s) = \begin{cases} \frac{1}{s} & si\ i \in S, \\ 0 & en\ otro\ caso. \end{cases} \tag{1.8}$$

Intuitivamente se observa que los los jugadores en S reparten una unidad de forma igualitaria entre los miembros que la conforman. El valor de Shapley ponderado generaliza esta idea proponiendo diferentes formas de dividir esta unidad entre los agentes de S en u_S y para ello, se tiene en cuenta un vector de pesos positivos $\lambda = (\lambda_i)_{i\in N} \in \mathbb{R}^n$ dado en forma exógena y en cada u_S los jugadores reparten la unidad proporcionalmente a sus pesos.

Definición 1.3.5. *El* ***valor de Shapley ponderado*** *con un sistema de pesos simple* $\lambda \in \mathbb{R}^n$, $\lambda > 0$, *es un operador lineal* $\varphi^\lambda : G_N \to \mathbb{R}^n$ *tal que*

$$\varphi_i^\lambda(u_T) = \begin{cases} \frac{\lambda_i}{\lambda(T)} & si\ i \in T, \\ 0 & en\ otro\ caso. \end{cases} \tag{1.9}$$

donde $\lambda(S) = \sum_{i \in S} \lambda_i$.

Cabe notar que φ^λ es equivale al valor de Shapley sí y sólo si $\lambda = (1, 1, ..., 1)$.

De aquí en adelante, se denotará el valor de Shapley ponderado de un juego (N, v), con vector de pesos λ por

$$WSh^\lambda(N, v) = \left(WSh_i^\lambda(v)\right)_{i \in N}.$$

Ejemplo 1.3.2. *Sea el juego de tres jugadores considerado en el Ejemplo 1.1.1, supóngase que se desea dividir el costo de la pavimentación teniendo en cuenta las producciones y ganancias de las empresas y así apoyar a las fábricas menos favorecidas. Entonces, teniendo en cuenta que la fábrica 3 tiene mayor ganancias, seguida de la fábrica 2 y la que menos ganancias obtiene es la fábrica 1, de tal forma que el esfuerzo que 1 hace para participar en el proyecto es tres veces más que el de la fábrica 3 y dos veces más que el de la fábrica 2 se asigna al juego el vector de pesos* $\lambda = (3, 2, 1)$*; el valor de Shapley ponderado para este vector es*

$$WSh^\lambda(v) = \left(\frac{9}{2}, 17\frac{1}{2}, 40\frac{5}{6}\right).$$

Así, se observa el apoyo que la fábrica 3 *brinda a las otras dos fábrica, además, de la disminución de los costos para que las fábricas* 1 *y* 2 *participen en el proyecto.*

Análogo al valor de valor de Shapley, el valor de Shapley ponderado tiene una interpretación probabilística con la siguiente expresión. Sea λ un vector de pesos; para toda $i \in N$ se tiene

$$WSh_i^\lambda(v) = \sum_{\mathcal{R} \in \mathcal{SYM}_N} pr^\lambda(\mathcal{R}) m_i^{\mathcal{R}} \tag{1.10}$$

donde, para cada orden $\mathcal{R} = (i_1, i_2, ..., i_n)$,

$$pr^\lambda(\mathcal{R}) = \prod_{j=1}^{n} \frac{\lambda_{i_j}}{\sum_{k=1}^{j} \lambda_{i_k}}.$$

Para interpretar esta fórmula probabilística, considérese la situación en la que un jugador en N, digamos i_n, se selecciona de manera aleatoria utilizando una distribución de probabilidad tal que la probabilidad que un jugador sea elegido es proporcional a su peso, y se posiciona al final del orden. Posteriormente, se selecciona otro jugador, i_{n-1}, utilizando el mismo proceso para $n-1$ jugadores y se coloca en la penúltima posición. Continuando el mismo proceso $n-2$ veces, se obtiene un orden $\mathcal{R} = (i_1, i_2, ..., i_n)$ y la probabilidad que ocurra dicho orden es justamente la fórmula anterior.

A continuación se introducen conceptos y axiomas para la caracterización del valor de Shapley ponderado.

Definición 1.3.6. *Se dirá que la coalición $S \subseteq N$ es una coalición natural de socios en el juego (N, v), si para todo $T \subsetneq S$ y $R \subseteq N \setminus S$ se tiene que*

$$v(R \cup T) = v(R).$$

Una coalición natural de socios se comporta como un solo individuo, ya que ninguna de sus subcoaliciones propias refleja un cambio al entrar a otra coalición.

Axioma 1.3.6. ***Asociación.*** *Sea S es una coalición de socios en (N, v), entonces una solución ϕ satisface el axioma de asociación si*

$$\phi_i(v) = \phi_i\left(\phi(v)(S)u_S\right), \quad \forall i \in S,$$

donde $\phi(v)(S) = \sum_{i \in S} \phi_i(v)$.

Este axioma se puede interpretar de la siguiente forma: se espera que cada coalición natural de socios juegue como un solo individuo en v y reparta lo obtenido entre sus jugadores en forma independiente.

Axioma 1.3.7. ***Positividad.*** *Sea (N, v) un juego monótono, una solución ϕ cumple el axioma de positividad si*

$$\varphi(v) \geq 0.$$

Teorema 1.3.3. ***Kalai*** & ***Samet, 1987.*** *Una solución ϕ satisface los axiomas de eficiencia, aditividad, positividad, nulidad y asociación sí y sólo si existe un sistema de pesos λ tal que ϕ es el valor de Shapley ponderado WSh^λ.*

Para estudiar la demostración del teorema anterior se puede referir a [7]. De igual forma, en dicha referencia es posible encontrar diversas automatizaciones del valor de Shapley ponderado.

1.4. El potencial de un juego

En esta sección se presentan resultados que se usan durante el desarrollo del trabajo. Lo aquí presentado se basa en el conocido articulo, *Potential, value, and consistency* de Sergiu Hart y Andreu Mas-Colell.

En la economía, ocasionalmente se abordar el problema de repartición asignando a cada jugador su contribución marginal a la gran coalición, es decir, al jugador i le corresponde

$$\phi_i(v) = v(N) - v(N \setminus \{i\}).$$

Evidentemente, esta regla de repartición no se puede llevar a cabo en general, pues la suma de estas contribuciones marginales puede ser diferente a la valía de la gran coalición, y no habrá forma de conseguirla (esto es, ϕ no cumple el axioma de eficiencia). Hart y Mas-Colell [5] introducen el concepto de potencial de un juego, propuesto como un operador que asigna un número real a cada subcoalición de N de tal forma que a cada jugador se le asigne su contribución marginal a la gran coalición con respecto a esta función potencial; por ello, al requerir que la asignación sea eficiente, el proceso queda determinado de manera única.

Definición 1.4.1. *Se llamará **función potencial** a la aplicación $P : G_N \to \mathbb{R}$, que asocia un número real $P(S, v|_s)$ a cada subjuego $(S, v|_s)$ de $(N, v) \in N$ de tal forma que*

$$\sum_{i \in N} D^i P(N, v) = v(N) \quad \text{y} \quad P(\emptyset) = 0 \quad \forall (N, v) \in G_N, \tag{1.11}$$

donde, $D^i P(N, v) = P(N) - P(N \setminus \{i\})$ es la contribución marginal del i-ésimo jugador respecto a P.

Por tanto, una función potencial cumple la característica de que la asignación de las contribuciones marginales de cada jugador con respecto a la gran coalición (para dicha función potencial) siempre suma exactamente la valía de la gran coalición.

Con el fin de simplificar la notación, se escribirá $P(S)$ para hacer referencia a $P(S, v|_S)$, con $S \subseteq N$.

Teorema 1.4.1. ***Hart** & **Mas-Colell, 1989.*** *Para todo juego $(N, v) \in G_N$, el vector de pago resultante $(D^i P(N))_{i \in} N$ coincide con el valor de Shapley del juego. Más aún, el potencial de cualquier juego está únicamente determinado por las condiciones dadas en (1.11) aplicadas únicamente al juego y a sus subjuegos (es decir, $(S, v|_S)$ para toda $S \subseteq N$).*

Por las condiciones dadas en (1.11), y aplicando la función potencial a toda $S \subseteq N$, se obtiene que

$$P(S) = \frac{1}{s}\left[v(S) + \sum_{i \in S} P(S \setminus \{i\})\right].$$

Fijando inicialmente $P(\emptyset) = 0$, se determina $P(S)$, $S \subseteq N$, de manera recursiva. De aquí, por el teorema anterior, se tiene un algoritmo recursivo determinado de manera única que calcula el valor de Shapley, mediante el uso de la función potencial

$$Sh_i(N, v) = P(N) - P(N \setminus \{i\}).$$

De forma análoga se caracteriza el valor de Shapley ponderado con la siguiente función.

Definición 1.4.2. *Se llamará* w***-función potencial*** *a la aplicación* $P_w : G_N \to \mathbb{R}$*, que asocia un número real* $P_w(S, v|_s)$ *a cada subjuego* $(S, v|_s)$ *de* $(N, v) \in N$ *de tal forma que*

$$\sum_{i \in N} w^i D^i P_w(N, v) = v(N) \quad \text{y} \quad P_w(\emptyset) = 0, \tag{1.12}$$

para todo, $(N, v) \in G_N$ *y toda colección de pesos positivos* $w = (w^i)_{i \in N}$*.*

Teorema 1.4.2. *Para toda colección* $w = (w^i)_{i \in N}$ *de pesos positivos existe una única función* w*-potencial* P_w*. Más aún, la función solución resultante, asociada al vector de pagos* $(w^i D^i P_w(N, v))_{i \in N}$ *a el juego* (N, v)*, coincide con el valor de Shapley ponderado* WSh^w*. Finalmente,* P_w *puede ser calculado recursivamente por la formula*

$$P_w(N, v) = \frac{1}{\sum_{i \in N} w^i}\left[v(N) + \sum_{i \in N} P_w(N \setminus \{i\}, v)\right].$$

En [5] también se muestra que los valores de Shapley y Shapley ponderado, para todo (N, v) y cualquier vector de pesos positivos $w = (w^i)_{i \in N}$ cumplen *el principio de preservación de diferencias*, como siguen:

$$Sh_i(N, v) - Sh_i(N \setminus \{j\}, v) = Sh_j(N, v) - Sh_j(N \setminus \{i\}, v)$$

$$\frac{WSh_i^w(N, v) - WSh_i^w(N \setminus \{j\}, v)}{w^i} = \frac{WSh_j^w(N, v) - WSh_j^w(N \setminus \{i\}, v)}{w^j}.$$

1.5. Familia de valores LSE

En esta sección se presenta un resultado en el cual se caracterizan las soluciones en la familia de valores lineales, simétricos y eficientes (LSE). Fórmulas ó parametrizaciones para ésta clase de valores (LSE) han sido propuestas por Ruiz, Valenciano y Zarzuelo [17], Driessen y Radzik [3], Chameni-Nembua y Andjiga [1], y Hernández-Lamoneda, Juárez y Sánchez-Sánchez [6].

Teorema 1.5.1. ***Ruiz, Valenciano y Zarzuelo, 1998.*** *Un valor* $\varphi : G_N \to \mathbb{R}^n$ *verifica los axiomas de linealidad, eficiencia y simetría, si y sólo si, existen* β_s*, con* $s = 1, ..., n-1$*, de forma que*

$$\varphi_i(N, v) = \frac{v(N)}{n} + \sum_{\substack{S \ni i \\ S \neq N}} \beta_s \frac{v(S)}{s} - \sum_{S \not\ni i} \beta_s \frac{v(S)}{n-s} \quad , \quad \forall i \in N, \ \forall v \in G_N. \tag{1.13}$$

En esencia, el valor (1.13) se puede interpretar como una *transferencia de utilidad* como se muestra en la Figura 1.1, donde, primero se hace una repartición igualitaria del valor de la gran coalición, $\left(\frac{v(N)}{n}\right)$. Posteriormente, a los jugadores que no pertenecen a una coalición dada se les cobra un "*impuesto*" [3] a una tasa en función del tamaño de la coalición S, este impuesto es dividido en partes iguales entre los jugadores en $N \setminus S$, $\left(\beta_s \frac{v(S)}{n-s}\right)$. Luego, el valor pagado es retribuido a los jugadores que pertenecen a la coalición S y se les reparte en partes iguales, $\left(\beta_s \frac{v(S)}{s}\right)$.

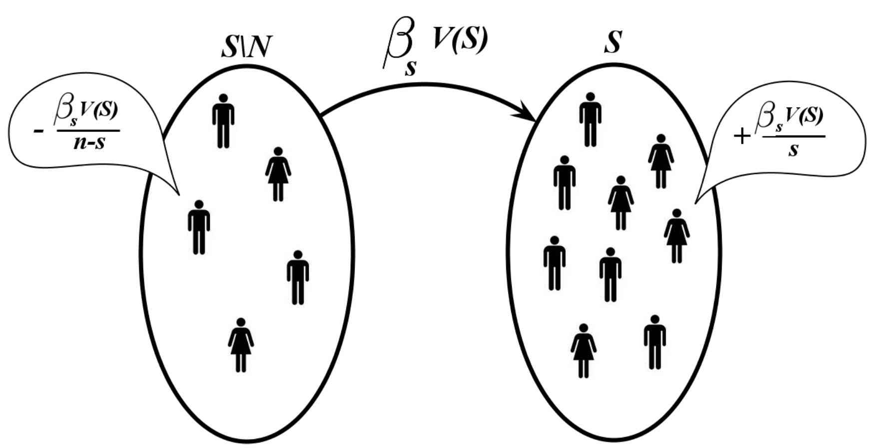

Figura 1.1: Transferencia de utilidad

[3]Como lo indica Radzik & Driessen [3], p. 5.

Dado que el valor de Shapley es lineal simétrico y eficiente el siguiente resultado es inmediato del Teorema 1.5.1.

Corolario 1.5.1. *El valor de Shapley $Sh(N, v)$ es igual a* (1.13) *con*

$$\beta_s = \frac{(n-s)!s!}{n!} \tag{1.14}$$

Demostración. Sustituyendo (1.14) en (1.13) se tiene que

$$\varphi_i(N,v) = \frac{v(N)}{n} + \sum_{S:\ i\in S\neq N} \frac{(n-s)!(s-1)!}{n!} v(S) - \sum_{S:\ i\notin S} \frac{(n-s-1)!s!}{n!} v(S),$$

de aquí, notando que $\beta_n = 1/n$ y que $i \in N$ se infiere que

$$\varphi_i(N,v) = \sum_{S\ni i} \frac{(n-s)!(s-1)!}{n!} v(S) - \sum_{S\not\ni i} \frac{(n-s-1)!s!}{n!} v(S),$$

pero tomando $S = R \cup \{i\}$, entonces, $i \in R$ y $s = r + 1$ se concluye que

$$\begin{aligned} \varphi_i(N,v) &= \sum_{R\not\ni i} \frac{(n-r-1)!r!}{n!} v(R\cup\{i\}) - \sum_{R\not\ni i} \frac{(n-r-1)!r!}{n!} v(R) \\ &= \sum_{R\not\ni i} \frac{r!(n-r-1)!}{n!} \left[v(R\cup\{i\}) - v(R)\right] \\ &= Sh_i(N,v). \end{aligned}$$

□

Capítulo 2

Juegos cooperativos 1-anidados

Supóngase la siguiente situación: Cinco diferentes industrias, $N = \{1, 2, 3, 4, 5\}$, se encuentran organizadas en tres diferentes naciones, $\{N_1, N_2, N_3\}$, como se muestra en la Figura 2.1. Dichas naciones e industrias desean cooperar para la construcción de una vía férrea que comunique sus industrias con un muelle. El problema radica en saber cómo debe ser el pago por industria para la realización del proyecto. Debido a la localización y organización política, sólo tienen sentido las coaliciones entre las industrias de una misma nación y entre naciones. Por ejemplo, en este caso, no existe una coalición de dos industrias que pertenecen a diferentes naciones. Esta situación describe una anidación, puesto que se tiene un primer nivel, que son las industrias, anidadas en un segundo nivel, que son las naciones. Así, estamos planteado un nuevo tipo de problema de juegos cooperativos en los cuales las posibles coaliciones no son todos los posibles subconjuntos del total de jugadores, y además éstas dependen de una estructura de anidación.

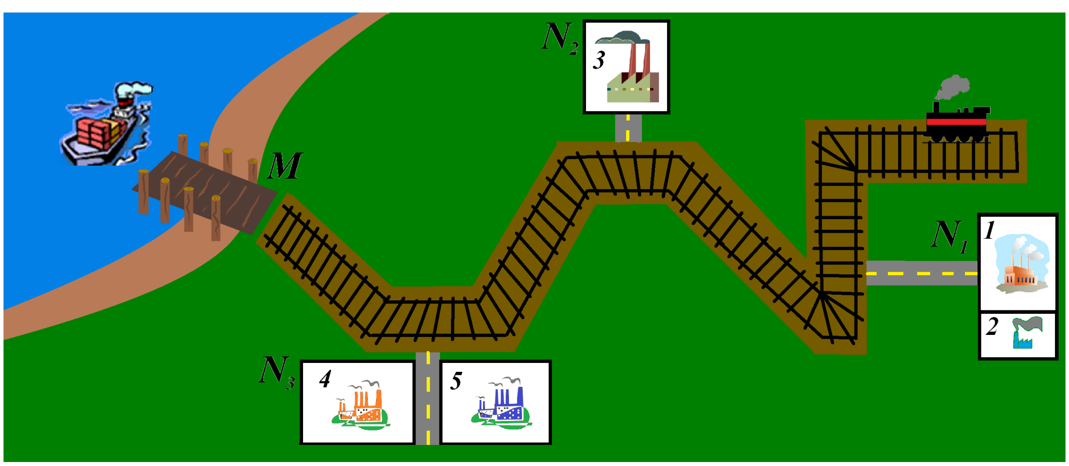

Figura 2.1: Proyecto de vía férrea internacional con una anidación.

2.1. Notación y Definiciones

Sea una situación de juego cooperativo en la cual se tiene un conjunto de agentes organizados en agrupaciones definidas por una estructura anidada en la que se tienen solamente dos niveles de jerarquía:

- $N := \{1, 2, ..., n\}$ es el conjunto de jugadores.
- $\mathcal{P}_1 := \{N_1, N_2, ..., N_m\}$ es la partición de N que define un segundo nivel en la estructura de anidación.

Se sabe que una partición define una relación de equivalencia que está determinada por los elementos de la partición; entonces, se dice que el jugador i está relacionado con el jugador j, si ambos jugadores pertenecen al mismo elemento de la partición, es decir,

$$i \sim j \;\Leftrightarrow\; i \in N_k \in \mathcal{P}_1,\; j \in N_k \in \mathcal{P}_1.$$

Ahora bien, es importante describir el conjunto cociente dado por esta relación de equivalencia, pues dicho conjunto representa las clases en las que se encuentran divididos los jugadores.

Definición 2.1.1. *Al conjunto*

$$M_1 := N/_{\sim} := N/_{\mathcal{P}_1} = \{[i_1], [i_2], ..., [i_m]\}$$

se le llamará ***conjunto cociente*** *de N. La clase $[i_k] \in M_1$ es* ***la clase asociada a*** *$N_k \in \mathcal{P}_1$, para cualquier $i_k \in N_k$.*

Es necesario resaltar una sutil diferencia entre observar un subconjunto de M_1 y la coalición de jugadores que resulta cuando diferentes clases se coaluden, pues el primero da cuenta de las clases que participan en la coalición y la segunda da cuenta de los agentes o individuos de la coalición. Es decir,

$$S = \bigcup_{j \in J} N_k, \quad J \subseteq \{1, 2, ..., m\}$$

es diferente de

$$\{[i_k] \in M_1 \mid i_k \in N_k \subseteq S\}.$$

2.2. Conjunto de coaliciones realizables 1-anidadas.

Las coaliciones que se tendrán en cuenta para el modelo basado en juegos con estructuras anidadas no son todas las posibles coaliciones pertenecientes a 2^N. Las coaliciones permitidas en juegos *1-anidados* solamente serán las coaliciones de jugadores que pertenecen a una misma clase, *coaliciones en el primer nivel*, y las coaliciones de jugadores participantes en una coalición formada por un conjunto de clases completas, *coaliciones en el segundo nivel*.

A continuación se describen las coaliciones realizables para un juego 1-anidado.

Primero, nótese que las coaliciones en un primer nivel son coaliciones de jugadores pertenecientes a un mismo elemento de $\mathcal{P}_1$. Supóngase N_k para algún $[i_k] \in M_1$; entonces, el conjunto de coaliciones en N_k se denotará por

$$B_k^1 := 2^{N_k}$$

y así, el conjunto de coaliciones del primer nivel está dado por

$$B^1 := \bigcup_{[i_k] \in M_1} B_k^1.$$

De igual manera, se desean determinar las coaliciones en un segundo nivel, es decir, las coaliciones que existen entre los agentes que componen un conjunto de elementos de $\mathcal{P}_1$. El conjunto de estas coaliciones lo denotaremos por

$$B^2 := \left\{ \bigcup_{j \in J} N_k \mid J\{1, 2, ..., m\} \right\}.$$

Por tanto, el conjunto de todas las coaliciones realizables es la unión de las coaliciones en ambos niveles,

$$\mathcal{B} = B^1 \cup B^2.$$

Claramente se observa que $N_k \in B_k^1$ y $N_k \in B^2$; es decir, los conjuntos que conforman la partición $\mathcal{P}_1$, pertenecen al primer y segundo nivel.

Cabe notar que cada conjunto $S \in B^2$ se compone de forma única por clases. La siguiente definición se utiliza a lo largo de este capítulo.

Definición 2.2.1. *Dado un conjunto $S \in B^2$, al conjunto $\widehat{S} \subseteq M_1$ se le llamará* ***conjunto de clases asociado a*** *S, donde*

$$\widehat{S} = \{[i_k] \in M_1 \mid i_k \in N_k \subseteq S\}.$$

Así, un conjunto que esta compuesto por clases se puede expresar de la siguiente forma

$$S = \bigcup_{[i_k] \in \widehat{S}} N_k.$$

Ejemplo 2.2.1. *Sean* $N = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ *el conjunto de jugadores y* $\mathcal{P}_1 = \{\{1, 2\}, \{3\}, \{4, 5\}\}$, *donde* $M_1 = \{[1], [3], [4]\}$ *con*

$$N_1 = \{1, 2\}\ ,\ N_2 = \{3\}\ , N_3 = \{4, 5\}.$$

Así, el conjunto de coaliciones realizables, $\mathcal{B}$, *es*

B^1			B^2
	$\emptyset$		$\{1, 2, 3\}$
$\{1\}$		$\{4\}$	$\{1, 2, 4, 5\}$
$\{2\}$	$\{3\}$	$\{5\}$	$\{3, 4, 5\}$
$\{1, 2\}$		$\{4, 5\}$	N

Cuadro 2.1: Conjunto de coaliciones realizables del Ejemplo 2.2.1. Cabe notar, que los conjuntos al final de cada columna de B^1 también pertenecen a B^2.

2.3. Estructura y descomposición de juegos 1-anidados

El conjunto $\mathcal{B}$ es el conjunto de las coaliciones que representan una estructura de anidación para un juego cooperativo con una anidación; esto hace posible dar una definición formal de juego 1-anidado y del conjunto de juegos 1-anidados como sigue:

Definición 2.3.1. *Se le llamará* ***juego cooperativo 1-anidado*** *a la terna* $(N, v, \mathcal{B})$, *donde*

- $N = \{1, 2, ..., n\}$ *es un conjunto finito de jugadores.*
- $\mathcal{B}$ *brinda una estructura de 1-anidación.*
- $v : \mathcal{B} \to \mathbb{R}$ *es una función tal que* $v(\emptyset) = 0$.

En caso que no exista confusión, fijando el conjunto de jugadores N y la estructura de anidación $\mathcal{B}$, se denotará al juego $(N, v, \mathcal{B})$ solamente por su función *característica* v.

Ejemplo 2.3.1. *Considérese el conjunto de jugadores* $N = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ *con la estructura de anidación presentada en el Cuadro 2.1. Ahora bien, para construir la función característica que modela los costos de la situación presentada como motivación al comienzo del capítulo se deben tener en cuenta las siguientes observaciones:*

Al país N_1 *le cuesta* 2 *unidades monetarias construir una vía férrea que lo comunica con el muelle. Si una de sus dos industrias decide hacer la vía por si sola, el monto de dicha obra no varia.*

El país N_2 *debe pagar* 2 *unidades monetarias si decide construir el proyecto por si sólo. Este valor debe ser pagado por su única industria.*

En el caso del país N_3*, construir la vía férrea por si sólo tiene un costo de* 1 *unidad monetaria. Al analizar la situación dentro de ésta nación, resulta que la industria* 5 *debe pagar el proyecto al mismo precio que le cuesta a toda la nación, si decide construirla por si sola, mientras que la industria* 4 *no pagaría costo alguno, si no está en ninguna coalición, esto se debe a que posee una vía férrea privada que pone a disposición del proyecto.*

Por otro lado, se tiene que si los países N_1 *y* N_2 *se unen para construir una vía férrea que puedan utilizar ambos, les cuesta* 1 *unidad monetaria menos, que si construyen las dos vías por separado. Pero, si el país* N_4 *se une a cualquier coalición de naciones no se genera un ahorro, es decir,* N_4 *no contribuye al entrar en cualquier coalición.*

Así, la función característica que modela los costos hipotéticos de la situación presentada como motivación al comienzo del capítulo está dada en el Cuadro 2.2.

S	$\{1\}$	$\{2\}$	$\{1,2\}$	$\{3\}$	$\{4\}$	$\{5\}$	$\{4,5\}$
$v(S)$	2	2	2	2	0	1	1

S	$\{1,2,3\}$	$\{1,2,4,5\}$	$\{3,4,5\}$	N
$v(S)$	3	3	3	4

Cuadro 2.2: Función característica del ejemplo presentado como motivación, en el cual se modela un proyecto para la construcción de una vía férrea internacional.

Así, el juego cooperativo 1-anidado que modela los costos de construcción de la vía férrea, es representado por la terna $(N, v, \mathcal{B})$.

Definición 2.3.2. *Sea*

$$G_{N,\mathcal{B}} = \{v \mid v : \mathcal{B} \to \mathbb{R},\ v(\emptyset) = 0\}.$$

A este conjunto se le llamará ***conjunto de juegos* 1*-anidados*** *en* $\mathcal{B}$.

Al conjunto $G_{N,\mathcal{B}}$ se le puede dar una estructura de espacio vectorial sobre el campo de los números reales. Para esto se requieren las siguientes definiciones.

Definición 2.3.3. *Sean $v, v' \in G_{N,\mathcal{B}}$ y $\alpha \in \mathbb{R}$. Entonces,*

- $(v + v')(S) = v(S) + v'(S)$, *para todo* $S \in \mathcal{B}$ *(suma).*
- $(\alpha v)(S) = \alpha v(S)$ *para todo* $S \in \mathcal{B}$ *(producto por escalar).*
- $v_0(S) = 0$ *para todo* $S \in \mathcal{B}$ *(elemento neutro).*

Cabe notar que $G_{N,\mathcal{B}}$, con la anterior estructura de espacio vectorial, es isomorfo a $\mathbb{R}^{|\mathcal{B}|}$. Es deseable tener una base para el espacio $G_{N,\mathcal{B}}$. A continuación se presenta una base que es sub-base de la base usual de juegos cooperativos, compuesta por los llamados juegos de unanimidad que son,

$$u_T(S) = \begin{cases} 1 & si \quad S \supseteq T \\ 0 & en\ otro\ caso. \end{cases}$$

Entonces, una base para $G_{N,\mathcal{B}}$ es

$$U_{\mathcal{B}} = \{u_T | T \in \mathcal{B}\}, \tag{2.1}$$

lo cual se demuestra análogamente al Lema 1.2.1 en la sección de juegos cooperativos clásicos.

Ahora bien, dado que tenemos una base para el espacio vectorial $G_{N,\mathcal{B}}$, es importante tener una descomposición de un juego 1-anidado análoga a la descomposición de juegos cooperativos clásicos; entonces, si

$$v = \sum_{T \in \mathcal{B}} \delta_T u_T, \tag{2.2}$$

los escalares δ_T se determinan unívocamente debido a la recursividad, pues

$$v(S) = \sum_{\substack{T \in \mathcal{B} \\ T \subseteq S}} \delta_T$$

y entonces,

$$\delta_S = v(S) - \sum_{\substack{T \in \mathcal{B} \\ T \subsetneq S}} \delta_T \tag{2.3}$$

donde $\delta_\emptyset = 0$. Así, se han caracterizado los escalares δ_S análogamente a los conocidos como coeficientes de Harsanyi [4], presentados en la Sección 1.2, para juegos cooperativos clásicos.

2.4. Juego cociente

A continuación, se introduce un concepto que será una herramienta útil para analizar el comportamiento de un juego cooperativo 1-anidado en su segundo nivel; este será el juego cociente. La idea principal de dicho juego es tener las clases expuestas en la Definición 2.1.1 como agentes, es decir, el conjunto de jugadores será M_1.

Definición 2.4.1. *Sean $S \in \mathcal{B}$ y su conjunto de clases asociado $\widehat{S} \subseteq M_1$. Llamaremos* **juego cociente** *asociado a $(N, v, \mathcal{B})$ al juego cooperativo tradicional $(M_1, \widehat{v})$, donde*

$$\widehat{v}(\widehat{S}) = v(S).$$

Ejemplo 2.4.1. *El juego cociente $(M_1, \widehat{v})$ del juego $(N, v, \mathcal{B})$ presentado en el Ejemplo 2.3.1, tiene la función característica indicada en el Cuadro 2.3,*

$\widehat{S}$	$\{[1]\}$	$\{[3]\}$	$\{[4]\}$	$\{[1],[3]\}$	$\{[1],[4]\}$	$\{[3],[4]\}$	M_1
$\widehat{v}(\widehat{S})$	2	2	1	3	3	3	4

Cuadro 2.3: Función característica del juego cociente asociada al juego presentado en Ejemplo 2.3.1.

Dado que el juego cociente se define como un juego cooperativo clásico, éste se puede descomponer en términos de juegos de unanimidad clásicos. Para diferenciar, en particular, esta descomposición, se introduce la siguiente notación:

$$\widehat{u}_{\widehat{T}}(\widehat{S}) = \begin{cases} 1 & si \;\; \widehat{S} \supseteq \widehat{T} \\ 0 & en\ otro\ caso. \end{cases}$$

Así, para un juego 1-anidado $(N, \mathcal{B}, v)$, tenemos que la descomposición de su juego cociente es

$$\widehat{v} = \sum_{\widehat{T} \subseteq M_1} \widehat{\delta}_{\widehat{T}} \widehat{u}_{\widehat{T}},$$

donde, $\widehat{\delta}_{\widehat{S}}$ son los coeficientes de Harsanyi [4],

$$\widehat{\delta}_{\widehat{S}} = \widehat{v}(\widehat{S}) - \sum_{\widehat{T} \subsetneq \widehat{S}} \widehat{\delta}_{\widehat{T}}. \tag{2.4}$$

El juego cociente está definido en términos del juego 1-anidado; por tanto, es pertinente conocer ciertas relaciones entre ellos, debido a que el juego 1-anidado es realmente el juego en estudio. Algunas relaciones se muestran en el siguiente lema, el cual se basa en la descomposición de ambos juegos.

Lema 2.4.1. *Dados* $\widehat{S}, \widehat{T} \subseteq M_1$ *los conjuntos de clases asociados a* $S, T \in \mathcal{B}$ *respectivamente y los juegos*

$$v = \sum_{T \in \mathcal{B}} \delta_T u_T \quad \text{y} \quad \widehat{v} = \sum_{\widehat{T} \subseteq M_1} \widehat{\delta}_{\widehat{T}} \widehat{u}_{\widehat{T}},$$

entonces

(a) $\widehat{u}_{\widehat{T}}(\widehat{S}) = u_T(S)$.

(b) $\widehat{\delta}_{\{[i_k]\}} = v(N_k)$, *para todo* $[i_k] \in M_1$.

(c) Si $|\widehat{S}| \geq 2$ *entonces* $\widehat{\delta}_{\widehat{S}} = \delta_S$.

Demostración. (a) El resultado es inmediato de la definición de $\widehat{S}$ y $\widehat{T}$, pues $\widehat{S} \supseteq \widehat{T}$ si y sólo si, $S \supseteq T$.

(b) De la descomposición de $\widehat{v}$, un caso particular de (2.4), $\widehat{S} = \{[i_k]\}$, se tiene

$$\begin{aligned} \widehat{\delta}_{\{[i_k]\}} &= \widehat{v}(\{[i_k]\}) - \delta_\emptyset \\ &= \widehat{v}(\{[i_k]\}) \\ &= v(N_k) \end{aligned}$$

pues $\delta_\emptyset = 0$.

(c) Aplicando inducción fuerte sobre la cardinalidad de $\widehat{S}$, se comienza por verificar la afirmación para el caso $|\widehat{S}| = 2$, entonces, de (2.4) con $\widehat{S} = \{[i_k], [i_l]\}$ se tiene

$$\widehat{\delta}_{\{[i_k],[i_l]\}} = \widehat{v}(\{[i_k], [i_l]\}) - \delta_{\{[i_k]\}} - \delta_{\{[i_l]\}}.$$

Entonces, usando la definición de $\widehat{v}$, la descomposición de v y el resultado del inciso *(b)* se tiene que

$$\begin{aligned} \widehat{\delta}_{\{[i_k],[i_l]\}} &= v(N_k \cup N_l) - v(N_k) - v(N_l) \\ &= v(N_k \cup N_l) - \sum_{\substack{T \subseteq N_k \\ T \in \mathcal{B}}} \delta_T - \sum_{\substack{T \subseteq N_l \\ T \in \mathcal{B}}} \delta_T \\ &= v(N_k \cup N_l) - \sum_{\substack{T \subsetneq N_k \cup N_l \\ T \in \mathcal{B}}} \delta_T \\ &= \delta_{N_k \cup N_l} \end{aligned}$$

Se toma como hipótesis inductiva que si $\widehat{S} \subseteq M_1$ es tal que $2 \leq |\widehat{S}| < m$, entonces $\widehat{\delta}_{\widehat{S}} = \delta_S$.

Sea $\widehat{S} \subseteq M_1$ tal que $|\widehat{S}| = m$; entonces, de (2.4) se tiene que

$$\begin{aligned} \widehat{\delta}_{\widehat{S}} &= \widehat{v}(\widehat{S}) - \sum_{\widehat{T} \subsetneq \widehat{S}} \delta_{\widehat{T}} \\ &= \widehat{v}(\widehat{S}) - \sum_{\substack{\widehat{T} \subset \widehat{S} \\ |\widehat{T}| \geq 2}} \delta_{\widehat{T}} - \sum_{\substack{\widehat{T} \subset \widehat{S} \\ |\widehat{T}| = 1}} \delta_{\widehat{T}} \end{aligned}$$

pero todo subconjunto propio de $\widehat{S}$ tiene cardinalidad menor que m, entonces, usando la hipótesis inductiva y el inciso *(b)* se sigue que

$$\begin{aligned} \widehat{\delta}_{\widehat{S}} &= v(S) - \sum_{\substack{T \subset S \\ |\widehat{T}| \geq 2}} \delta_T - \sum_{[i_j] \in \widehat{S}} v(N_j) \\ &= v(S) - \sum_{\substack{T \subset S \\ |\widehat{T}| \geq 2}} \delta_T - \sum_{[i_j] \in \widehat{S}} \left(\sum_{T \subseteq N_j} \delta_T \right) \\ &= v(S) - \sum_{\substack{T \subset S \\ |\widehat{T}| \geq 2}} \delta_T - \sum_{\substack{T \subset S \\ |\widehat{T}| < 2}} \delta_T \\ &= v(S) - \sum_{\substack{T \subset S \\ T \in \mathcal{B}}} \delta_T \\ &= \delta_S. \end{aligned}$$

Por tanto, se concluye que $\widehat{\delta}_{\widehat{S}} = \delta_S$ para todo $S \in \mathcal{B}$ tal que $|\widehat{S}| \geq 2$. □

2.5. Solución de un juego cooperativo 1-anidado

La solución de un juego cooperativo 1-anidado, análoga a las soluciones de los juegos cooperativos clásicos, se puede interpretar como un vector de pagos $x \in \mathbb{R}^{|N|}$, donde su $i - \acute{e}sima$ entrada, x_i, denota el *pago* para el jugador i. Entonces, lo que se desea obtener son operadores (o *valores*) que a cada juego cooperativo 1-andado le asocien una solución.

Definición 2.5.1. *La* ***solución*** *de un juego cooperativo con estructura 1-anidada* $(N, v, \mathcal{B})$ *es un operador*

$$\varphi : G_{N,\mathcal{B}} \to \mathbb{R}^{|N|},$$

donde su $i-$ésima entrada representa el pago que la solución le asigna al jugador i y es denotada por $\varphi_i(N, v, \mathcal{B})$.

En caso que no exista confusión, se denotará $\varphi_i(N, v, \mathcal{B})$ por $\varphi_i(v)$. También se introduce la siguiente notación

$$\sum_{i \in S} \varphi_i(N, v, \mathcal{B}) := \varphi(N, v, \mathcal{B})(S) := \varphi(v)(S).$$

Es de gran importancia que estas soluciones, igual que las soluciones de juegos cooperativos clásicos, cumplan propiedades que modelen situaciones de interés en la realidad, ya que son los resultados de la teoría de juegos que son usados para proponer soluciones en el ámbito de la economía, la industria entre otras áreas. Más aún, es usual definir propiedades deseables para una solución, las cuales tomaremos como axiomas, y posteriormente demostrar que existe una única solución caracterizada por dichos axiomas.

2.5.1. Caracterización axiomática

A continuación, se definen axiomas para caracterizar una solución análoga al valor de Shapley para juegos cooperativos 1-anidados. La analogía consiste en los valores que asigna una solución, φ, a los juegos que se encuentran en la base $U_{\mathcal{B}}$, es decir, los juegos de unanimidad, para cada $T \in \mathcal{B}$, lo que se desea es que los agentes en el conjunto unánime, T, se dividan la unidad en partes iguales, y a los jugadores que no se encuentren en dicho conjunto se les asigne el valor de cero, esto es:

$$\varphi_i(u_T) = \begin{cases} \frac{1}{|T|} & si \;\; i \in T \\ 0 & en\ otro\ caso. \end{cases} \tag{2.5}$$

Debido a la estructura de anidación, los axiomas deben darse específicamente para juegos 1-anidados; de hecho, algunos de los axiomas tendrán cambios significativos, aunque modelen situaciones similares a las representadas con los axiomas que se presentan en la Sección 1.3, para caracterizar el valor de Shapley.

Axioma 2.5.1. ***Aditividad.*** *Para todo $(N, v, \mathcal{B})$ y $(N, v', \mathcal{B}) \in G_{N,\mathcal{B}}$, una solución φ satisface el axioma de aditividad si*

$$\varphi(N, v, \mathcal{B}) + \varphi(N, v', \mathcal{B}) = \varphi(N, v + v', \mathcal{B}).$$

La interpretación de este axioma es análoga a la presentada en la Sección 1.3.1 para el axioma 1.3.1 de simetría en juegos cooperativos clásicos.

Axioma 2.5.2. ***Eficiencia.*** *Para todo $(N, v, \mathcal{B}) \in G_{N,\mathcal{B}}$, una solución φ satisface el axioma de eficiencia si*

$$\varphi(v)(N) = v(N).$$

Este axioma es análogo al axioma 1.3.2 para juegos cooperativos clásicos, su interpretación se discutió en la sección 1.3.1.

Para el siguiente axioma son necesarias las siguientes definiciones; además, debe tenerse en cuenta la Definición 1.3.2 referente a los jugadores nulos en un juego cooperativo clásico.

Definición 2.5.2. *Un jugador $i \in N$ es **dummy** en (N, v) si $v(S \cup \{i\}) = v(S) + v(\{i\})$ para todo $S \subseteq N \backslash \{i\}$.*

Definición 2.5.3. *Un jugador $i \in N_k \in \mathcal{B}$ es **$\mathcal{B}$-nulo** en $(N, v, \mathcal{B})$ si es jugador nulo en $(N_k, v|_{N_k})$ y $[i_k] \in M_1$ es un jugador dummy en $(M_1, \widehat{v})$ (esto es, N_k es una clase dummy.).*

Ejemplo 2.5.1. *El jugador 4 en el Ejemplo 2.3.1 es un jugador $\mathcal{B}$-nulo, pues $v(\{4\}) = 0$, $v(\{5\}) = 1$ y $v(\{4, 5\}) = \widehat{v}(\{[4]\}) = 1$, entonces 4 es nulo en el juego $(N_3, v|_{\{4,5\}})$, y además, como se aprecia en el Cuadro 2.3, $[4]$ es dummy en $(M_1, \widehat{v})$.*

Axioma 2.5.3. ***$\mathcal{B}$-Nulidad.*** *Una solución φ satisface el axioma de $\mathcal{B}$-nulidad si para cualquier $i \in N_k \in \mathcal{B}$ jugador $\mathcal{B}$-nulo en $(N, v, \mathcal{B})$, entonces,*

$$\varphi_i(N, v, \mathcal{B}) = 0.$$

Lo que el axioma de $\mathcal{B}$-nulidad establece, es la situación en que la solución le asigna el valor de cero a un jugador, más específicamente, lo que se requiere para que esto suceda, es que el jugador no aporte rendimiento alguno a la clase en la que se encuentra, es decir el jugador únicamente actúa como observador dentro del juego restringido a la clase (el jugador es nulo en $(N_k, v|_{N_k})$), y que además a la clase a la que pertenece no le sea posible obtener un pago diferente a lo que puede conseguir por sí misma (la clase es *dummy* en $(M_1, \widehat{v})$). Entonces, en una solución que satisfaga el axioma anterior, un jugador que realmente se comporta como un observador en el juego debe ser excluido en la repartición.

Cabe notar que una solución que satisfaga este axioma le da bastante importancia al hecho de que el jugador pertenezca a una clase, pues, aunque el jugador sea nulo en el juego restringido a la clase, tiene la posibilidad de obtener un pago si la clase no es *dummy* en el juego cociente. Es decir, todos los jugadores de una misma clase adquieren responsabilidad cuando toda su clase pertenece a una coalición del segundo nivel, y esto debe reflejarse en la solución indistintamente del comportamiento de un jugador dentro de su clase.

Para presentar el siguiente axioma se deben tener en cuenta las siguientes definiciones.

Análogamente, como en la Sección 1.1, considérese el conjunto

$$\Theta_N = \{\theta \mid \theta : N \to N,\ \theta \ \textit{biyectiva}\}$$

de todos los ordenes de los n jugadores. Igualmente, θ se interpreta como un intercambio de papeles en la situación de juego 1-anidado. Es decir, el jugador i toma la posición del jugador $\theta(i)$. También, se denota por

$$\theta(S) = \{\theta(i) \mid i \in S\},$$

al conjunto de jugadores que *suplantan* a los jugadores que están en S.

Es importante resaltar que, diferente al conjunto 2^N, el conjunto de coaliciones realizables, $\mathcal{B}$, no es invariante bajo cualquier permutación $\theta \in \Theta_N$. Después de una permutación, los agentes que componen una clase deben seguir estando dentro de esa clase. Si se permutan agentes de diferentes clases, es necesario que dichas clases tengan la misma cardinalidad, lo cual es una condición bastante restrictiva para una situación de anidación. Pero una condición suficiente para que $\theta(\mathcal{B}) = \mathcal{B}$, que además es apropiada para la situación de juegos anidados, es que la biyección cumpla $\theta(N_k) = N_k$, para todo $N_k \in \mathcal{P}_1$. Por ello se introduce la siguiente definición.

Definición 2.5.4. *El conjunto de biyecciones $\theta \in \Theta_N$ que cumplen $\theta(N_k) = N_k$, para todo $N_k \in \mathcal{P}_1$ se denota por*

$$\Theta_{\mathcal{B}} = \{\theta \in \Theta_N \mid \theta(N_k) = N_k,\ \forall N_k \in \mathcal{P}_1\}.$$

Así, es posible definir un juego cooperativo 1-anidado permutado como sigue.

Definición 2.5.5. *Para cualquier par $(\theta, v) \in \Theta_{\mathcal{B}} \times G_{N,\mathcal{B}}$ se define el **juego cooperativo 1-anidado permutado** $(N, \theta * v, \mathcal{B})$ de tal forma que $(\theta * v) : \mathcal{B} \to \mathbb{R}$ y*

$$(\theta * v)(\theta(S)) = v(S) \quad , \quad \forall S \in \mathcal{B}.$$

Por otro lado, igual que en la Sección 1.3.1, para cada par $(\theta, x) \in \Theta_{\mathcal{B}} \times \mathbb{R}^{|N|}$, se define el vector de pagos permutados $\theta * x$, donde su $i-$*ésima* coordenada está dada por $(\theta * x)_i = x_{\theta(i)}$. Esto indica que el pago que recibe el jugador i con $\theta * x$ es igual al que recibía $\theta(i)$ con x.

Después de conocer las situaciones que describen estas definiciones, es deseable obtener una solución que sea inmune a las características personales del jugador. Es decir, si los jugadores intercambian papeles en el juego y cada coalición obtiene la misma cantidad que la coalición a la que está suplantando, entonces cada jugador, participante en el juego 1-anidado permutado, debe obtener exactamente el mismo pago que el jugador suplantado. Para ello, se introduce el siguiente axioma.

Axioma 2.5.4. ***$\mathcal{B}$-Simetría.*** *Para todo $(\theta, v) \in \Theta_{\mathcal{B}} \times G_{N,\mathcal{B}}$, una solución φ satisface el axioma de $\mathcal{B}$-simetría si*

$$\varphi(N, \theta * v, \mathcal{B}) = (\theta * \varphi)(N, v, \mathcal{B}).$$

Es decir, la solución φ es $\mathcal{B}$-simétrica si y sólo si para cada $(\theta, v) \in \Theta_{\mathcal{B}} \times G_{N,\mathcal{B}}$, el pago que asigna φ a cada jugador i en el juego $(\theta * v)$, $(\varphi_i(\theta * v))$, es igual al que φ le asigna al jugador que suplanta a i, $(\theta(i))$, en v, $(\varphi_{\theta(i)}(v))$.

Para el siguiente axioma, es necesario definir el siguiente conjunto

$$\mathcal{B}_{-S} = \{T \in \mathcal{B} \mid S \not\subseteq T\}.$$

Axioma 2.5.5. ***Contribución de clases balanceadas.*** *Para todo $i \in N_k$ y todo $j \in N_l$, con $N_k \neq N_l$, una solución φ satisface el axioma de contribución de clases balanceadas si*

$$\varphi_i(N, v, \mathcal{B}) - \varphi_i(N \setminus N_l, v, \mathcal{B}_{-N_l}) = \varphi_j(N, v, \mathcal{B}) - \varphi_j(N \setminus N_k, v, \mathcal{B}_{-N_k}).$$

Este axioma lo que requiere es que la contribución de una clase, N_l, en el pago que asigna la solución, a un jugador que no pertenece a esta clase, $i \in N_k$, sea igual que la contribución de la clase N_k en el pago asignado a un jugador $j \in N_l$, por la misma solución.

En el siguiente teorema caracteriza una solución para juegos cooperativos 1-anidados que cumple con todos los axiomas presentados anteriormente; además, ésta solución resulta ser única.

Teorema 2.5.1. *Existe una única solución para juegos cooperativos 1-anidados en $G_{N,\mathcal{B}}$ que satisface los axiomas de **aditividad**, **eficiencia**, **$\mathcal{B}$-nulidad**, **$\mathcal{B}$-simetría** y **contribución de clases balanceadas**. Además, para $i \in N_k \in \mathcal{B}$, está dada por la siguiente expresión:*

$$\varphi_i(N, v, \mathcal{B}) = Sh_i(N_k, v|_{N_k}) + \frac{WSh^{\omega}_{[i_k]}(M_1, \widehat{v}) - v(N_k)}{|N_k|}, \tag{2.6}$$

donde $\omega = (|N_1|, ..., |N_k|)$ es el sistema de pesos.

Demostración. Como se mostró anteriormente, dado que, $U_{\mathcal{B}}$ en (2.1) es una base de $G_{N,\mathcal{B}}$, existen $\delta_T \in \mathbb{R}$ únicos, tales que v se descompone como en (2.2),

$$v = \sum_{T \in \mathcal{B}} \delta_T u_T.$$

Así, por la aditividad de $\varphi(N, v, \mathcal{B})$ se tiene que

$$\varphi(N, v, \mathcal{B}) = \sum_{T \in \mathcal{B}} \varphi(N, \delta_T u_T, \mathcal{B}).$$

Entonces, si $\varphi(N, \delta_T u_T, \mathcal{B})$ existe y es único para cada $\delta_T u_T$, $T \in \mathcal{B}$, se tiene que también lo es para v.

Para demostrar la unicidad del valor para cada $\delta_T u_T$, obsérvese que para $i \in N_k$:

1. Si $i \notin T$ y $|\widehat{T}| \leq 1$, entonces, i es nulo en $u_T|_{N_k}$.
2. Si $i \notin T$ y $|\widehat{T}| \geq 2$, entonces, i es nulo en $u_T|_{N_k}$ y $[i] \notin \widehat{T}$. Así, $[i]$ es *dummy* en $\widehat{\delta_T u_T} = \delta_T \widehat{u}_{\widehat{T}}$. Por tanto, i es $\mathcal{B}-$nulo.
3. $(\delta_T u_T)(N) = \delta_T$.
4. Si $i, j \in N_k$, $i, j \in T$ y θ es tal que $\theta(i) = j$ y $\theta(T) = T$, por el axioma de simetría se tiene que

   $$\varphi_i(\theta * u_T) = \varphi_{\theta(i)}(u_T) = \varphi_j(u_T).$$

   Entonces, dada la forma en que se tomó θ, se tiene que, $u_T = \theta * u_T$, y así

   $$\varphi_i(\theta * u_T) = \varphi_i(u_T);$$

   por tanto,

   $$\varphi_i(u_T) = \varphi_j(u_T) \; \forall i, j \in N_k, \; \forall [i_k] \in M_1.$$

De lo anterior, se tiene que, si φ cumple el axioma de $\mathcal{B}-$simetría, entonces, para todo N_k,

$$\sum_{i \in N_k} \varphi_i(N, \delta_T u_T, \mathcal{B}) = |N_k| \varphi_{i_k}(N, \delta_T u_T, \mathcal{B}),$$

donde i_k es cualquier agente perteneciente a N_k. Así, por los axiomas de $\mathcal{B}-$nulidad y eficiencia se concluye que,

$$\sum_{[i_k] \in \widehat{T}} |N_k| \varphi_{i_k}(N, \delta_T u_T, \mathcal{B}) = \delta_T. \tag{2.7}$$

Claramente, si $|\widehat{T}| \leq 1$, entonces $\varphi_i(N, \delta_T u_T, \mathcal{B}) = \frac{\delta_T}{|T|}$ si $i \in T$ y $\varphi_i(N, \delta_T u_T, \mathcal{B}) = 0$ en otro caso.

Si $|\widehat{T}| \geq 2$, por la definición de $\delta_T u_T$, para todo $[i_k] \in \widehat{T}$, se tiene que

$$\varphi(N \setminus N_k, \delta_T u_T, \mathcal{B}_{-N_k}) = 0.$$

Entonces, por el axioma de contribución de clases balanceadas se tiene que para cualquier par $[i_k], [i_l] \in \widehat{T}$,

$$\varphi_{i_k}(N, \delta_T u_T, \mathcal{B}) = \varphi_{i_l}(N, \delta_T u_T, \mathcal{B}). \tag{2.8}$$

Entonces, de (2.7) y (2.8) se concluye que el único valor posible para $\delta_T u_T$ es

$$\varphi_i(N, \delta_T u_T, \mathcal{B}) = \begin{cases} \frac{\delta_T}{|T|} & si\ i \in T \\ 0 & en\ otro\ caso. \end{cases} \tag{2.9}$$

Por tanto, existe un único valor que cumple con los axiomas requeridos y es

$$\varphi_i(N, v, \mathcal{B}) = \sum_{\substack{T \ni i \\ T \in \mathcal{B}}} \frac{\delta_T}{|T|}. \tag{2.10}$$

Ahora, falta comprobar que el anterior valor es igual a (2.6). Para ello, basta observar que si $i \in N_k$ se tiene que,

$$\begin{aligned} \varphi_i(N, v, \mathcal{B}) &= \sum_{\substack{T \ni i \\ |\widehat{T}| < 2}} \frac{\delta_T}{|T|} + \sum_{\substack{T \ni i \\ |\widehat{T}| \geq 2}} \frac{\delta_T}{|T|} \\ &= \sum_{\substack{T \ni i \\ T \subseteq N_k}} \frac{\delta_T}{|T|} + \sum_{\substack{T \ni i \\ |\widehat{T}| \geq 2}} \frac{\delta_T}{|T|}. \end{aligned}$$

Pero, por la definición del Valor de Shapley se tiene que,

$$\begin{aligned} \varphi_i(N, v, \mathcal{B}) &= Sh_i(N_k, v|_{N_k}) + \sum_{\substack{T \ni i \\ |\widehat{T}| \geq 2}} \frac{\delta_T}{|T|} \\ &= Sh_i(N_k, v|_{N_k}) + \left(\frac{v(N_k)}{|N_k|} - \frac{v(N_k)}{|N_k|} \right) + \sum_{\substack{T \ni i \\ |\widehat{T}| \geq 2}} \frac{\delta_T}{|T|}. \end{aligned}$$

Al aplicar los resultados, de los incisos (a) y (b), obtenidos en el Lema 2.4.1 se obtiene que

$$\begin{aligned}
\varphi_i(N,v,\mathcal{B}) &= Sh_i(N_k, v|_{N_k}) - \frac{v(N_k)}{|N_k|} + \frac{\widehat{\delta}_{\{k\}}}{|N_k|} + \sum_{\substack{\widehat{T}\ni[i_k] \\ |\widehat{T}|\geq 2}} \left(\frac{\widehat{\delta}_{\widehat{T}}}{\sum\limits_{[i_l]\in\widehat{T}} |N_l|} \right) \\
&= Sh_i(N_k, v|_{N_k}) - \frac{v(N_k)}{|N_k|} + \frac{1}{|N_k|} \sum_{\substack{\widehat{T}\ni[i_k] \\ \widehat{T}\subseteq M_1}} \left(\frac{|N_k|}{\sum\limits_{[i_l]\in\widehat{T}} |N_l|} \widehat{\delta}_{\widehat{T}} \right) \\
&= Sh_i(N_k, v|_{N_k}) + \frac{WSh^{\omega}_{[i_k]}(M_1, \widehat{v}) - v(N_k)}{|N_k|}.
\end{aligned}$$

$\square$

Este valor tiene la siguiente interpretación: para $i \in N_k$, el término $Sh_i(N_k, v|_{N_k})$ expresa que la valía de la clase N_k, $v(N_k)$, es repartida entre sus integrantes de acuerdo con el valor de Shapley. El término

$$\frac{WSh^{\omega}_{[i_k]}(M_1, \widehat{v}) - v(N_k)}{|N_k|}$$

representa la repartición, en partes iguales entre los agentes de una misma clase, del excedente o faltante que puede obtener dicha clase en el juego cociente con una repartición que tiene en cuenta el tamaño de las clases, lo cual se indica con un valor de Shapley ponderado donde los pesos corresponden con el tamaño de las clases, $WSh^{\omega}_{[i_k]}(M_1, \widehat{v})$, con $\omega = (|N_1|, ..., |N_k|)$.

Por otro lado, teniendo en cuenta el resultado de Ruiz, Valenciano y Zarzuelo [17], el valor $\varphi_i(N,v,\mathcal{B})$ puede expresarse como sigue

$$\varphi_i(N,v,\mathcal{B}) = \left(\sum_{\substack{S\ni i \\ S\neq N_k}} \beta_s \frac{v(S)}{s} - \sum_{i\notin S} \beta_s \frac{v(S)}{n-s} \right) + \frac{WSh^{\omega}_{[i_k]}(M_1, \widehat{v})}{|N_k|},$$

donde, $\beta_s = \frac{(n-s)!s!}{n!}$.

Esta representación brinda una interpretación lacónica de (2.6). Lo que expresa es que después de repartir en partes iguales lo que una clase gana en el juego cociente, $\frac{WSh^{\omega}_{[i_k]}(M_1,\widehat{v})}{|N_k|}$, los jugadores de dicha clase hacen transferencias de utilidad, de forma análoga que en el valor de Shapley.

Ejemplo 2.5.2. *El vector de pagos que le asocia la solución (2.6) al juego presentado en el Ejemplo 2.3.1 es*

$$\varphi(N, v, \mathcal{B}) = \left(\frac{2}{3}, \frac{2}{3}, \frac{5}{3}, 0, 1\right)$$

A este resultado se le da la siguiente interpretación: Para el país N_1 el costo de participar en el proyecto es de $4/3$ de unidades monetarias, el cual es dividido en partes iguales entre sus industrias, a la nación N_2 se le asigna un cobro de $5/3$ unidades monetarias, valor que debe pagar su única industria participante; por otro lado, al país N_3 se le cobra un total de 1 unidad monetaria, valor que debe cubrir, en su totalidad, la industria número 5, pues como era de esperarse, el 4 (jugador $\mathcal{B}$-nulo) no paga cantidad alguna, pues posee una vía férrea privada.

Cabe notar, que el valor (2.6) coincide con el *valor colectivo* presentado por Kamijo [9] para juegos cooperativos con *estructuras coalicionales* en dos niveles. Dicha coincidencia se obtiene de manera natural, pues un juego *1-anidados* se modela con una sola partición del conjunto de jugadores, lo cual, permite interpretar este juego como un juego cooperativo coalicional.

2.5.2. Independencia de axiomas

Después de esta caracterización axiomática, es importante mostrar que los axiomas que determinan de forma única el valor obtenido son independientes entre si, es decir, que cada uno de esos axiomas no se puede deducir a partir de los demás. Para ello, se muestran valores diferentes a (2.6) que no satisfacen un axioma, pero los cuatro restantes si los satisfacen. Todo esto, se hará pensando en un jugador $i \in N_k$, $[i_k] \in M_1$.

Primero, se presenta un valor que cumple con los axiomas de eficiencia, $\mathcal{B}$-nulidad, $\mathcal{B}$-simetría y contribución de clases balanceadas pero no cumple el axioma de aditividad,

$$\varphi_i^{\neg Adi}(N, v, \mathcal{B}) = Nu_i(N_k, v|_{N_k}) + \frac{WSh^{\omega}_{[i_k]}(M_1, \widehat{v}) - v(N_k)}{|N_k|}, \tag{2.11}$$

donde $\mathrm{Nu}(N, v)$ es el nucléolo propuesto por Schmeidler [18]. Debido a que el nucléolo cumple simetría, eficiencia, y nulidad, (2.11) cumple los primeros tres axiomas. Por otro lado, aquí se mostrará que (2.11) cumple con el axioma de contribución de clases balanceadas. Como muestran Hart y Mas-Collel [5], el valor de Shapley ponderado satisface la siguiente propiedad: en este caso, para $[i_k], [i_l] \in M_1$, $[i_k] \neq [i_l]$, $i \in N_k$,

$j \in N_l$

$$\frac{WSh^{\omega}_{[i_k]}(M_1, \widehat{v}) - WSh^{\omega}_{[i_k]}(M_1 \setminus [i_l], \widehat{v})}{|N_k|} = \frac{WSh^{\omega}_{[i_l]}(M_1, \widehat{v}) - WSh^{\omega}_{[i_l]}(M_1 \setminus [i_k], \widehat{v})}{|N_l|}, \tag{2.12}$$

entonces, sumando y restando $\mathrm{Nu}_i(N_k, v|_{N_k})$ y $\frac{v(N_k)}{|N_k|}$ al lado izquierdo de (3.19) y $\mathrm{Nu}_j(N_l, v|_{N_l})$ y $\frac{v(N_l)}{|N_l|}$ a su lado derecho, se demuestra lo requerido.

Por otro lado, el siguiente valor cumple los axiomas de aditividad, $\mathcal{B}$-nulidad, $\mathcal{B}$-simetría y contribución de clases balanceadas pero no cumple el axioma de eficiencia,

$$\varphi_i^{\neg Efi}(N, v, \mathcal{B}) = Sh_i(N_k, v|_{N_k}) + \frac{2WSh^{\omega}_{[i_k]}(M_1, \widehat{v}) - v(N_k)}{|N_k|}, \tag{2.13}$$

pues, claramente, $\varphi_i^{\neg Efi}(v)(N) = 2v(N)$. Los demás, axiomas se siguen cumpliendo de forma análoga, pues el coeficiente 2, del Shapley ponderado, no afecta dichos axiomas.

Ahora, se presenta un valor que cumple los axiomas de aditividad, eficiencia, $\mathcal{B}$-simetría y contribución de clases balanceadas pero no $\mathcal{B}$-nulidad,

$$\varphi_i^{\neg BNul}(N, v, \mathcal{B}) = \frac{WSh^{\omega}_{[i_k]}(M_1, \widehat{v})}{|N_k|}, \tag{2.14}$$

pues si i es un jugador $\mathcal{B}$-nulo, pero su clase puede obtener, por si sola, un valor diferente de cero, es decir, $v(N_k) = \widehat{v}(\{[i_k]\}) \neq 0$, aunque i es nulo en $(N_k, v|_k)$, este valor le asigna

$$\varphi_i^{\neg BNul}(N, v, \mathcal{B}) = \frac{v(N_k)}{|N_k|} \neq 0,$$

pues $[i_k]$ es *dummy* en $(M_1, \widehat{v})$. Claramente, $\varphi_i^{\neg BNul}(N, v, \mathcal{B})$ cumple con los axiomas de aditividad, eficiencia y contribución de clases balanceadas, pero se debe tener cuidado con el axioma de $\mathcal{B}$-simetría, pues aunque el valor de Shapley ponderado no es simétrico, es necesario recordar que las permutaciones en $\Theta_{\mathcal{B}}$, solamente, permutan agentes dentro de las clases, y que $\theta(N_k) = N_k$, para cualquier $\theta \in \Theta_{\mathcal{B}}$ y $[i_k] \in M_1$.

Continuando con la prueba de independencia de axiomas, se muestra un valor que cumple con los axiomas de aditividad, eficiencia, $\mathcal{B}$-nulidad y contribución de clases balanceadas pero no $\mathcal{B}$-simetría,

$$\varphi_i^{\neg BSim}(N, v, \mathcal{B}) = WSh_i^{a}(N_k, v|_{N_k}) + \frac{WSh^{\omega}_{[i_k]}(M_1, \widehat{v}) - v(N_k)}{|N_k|}, \tag{2.15}$$

donde $a = (1, 2, ..., |N_k|)$. Este valor no cumple el axioma de $\mathcal{B}$-simetría, pues, si se tiene una biyección $\theta \in \Theta_{\mathcal{B}}$ que sólo genera una permutación de dos jugadores dentro de una misma clase, $\theta(i) = j$, $i, j \in N_k$, entonces, la repartición del exceso que gana su clase es igual para ambos, pero debido al termino $WSh_i^a(N_k, v|_{N_k})$, con $a = (1, 2, ..., |N_k|)$, resulta que $\varphi_i^{\neg BSim}(N, v, \mathcal{B}) \neq \varphi_j^{\neg BSim}(N, \theta(v), \mathcal{B})$, pues el valor de Shapley ponderado no es simétrico. La prueba de que $\varphi_i^{\neg BSim}(N, v, \mathcal{B})$ cumple con los demás axiomas es análoga a las mostradas anteriormente.

Finalmente, se da un valor que cumple con los axiomas de aditividad, eficiencia, $\mathcal{B}$-nulidad y $\mathcal{B}$-simetría pero no contribución de clases balanceadas

$$\varphi_i^{\neg CCB}(N, v, \mathcal{B}) = Sh_i(N_k, v|_{N_k}) + \frac{Sh_{[i_k]}(M_1, \widehat{v}) - v(N_k)}{|N_k|}, \tag{2.16}$$

pues si $|N_k| \neq |N_l|$, entonces,

$$\frac{Sh_{[i_k]}(M_1, \widehat{v}) - Sh_{[i_k]}(M_1 \setminus [i_l], \widehat{v})}{|N_k|} \neq \frac{Sh_{[i_l]}(M_1, \widehat{v}) - Sh_{[i_l]}(M_1 \setminus [i_k], \widehat{v})}{|N_l|}$$

ya que, como bien se conoce, $Sh_{[i_k]}(M_1, \widehat{v}) - Sh_{[i_k]}(M_1 \setminus [i_l], \widehat{v}) = Sh_{[i_l]}(M_1, \widehat{v}) - Sh_{[i_l]}(M_1 \setminus [i_k], \widehat{v})$[1], mientras que el cumplimiento de los demás axiomas se obtiene de forma inmediata.

[1] Myerson [11]

Capítulo 3

Juegos cooperativos p-anidados

En éste capítulo se tendrán en cuenta estructuras en juegos cooperativos con una cantidad finita de anidaciones, es decir, presentará una generalización del de los juegos cooperativos 1-anidados.

Supóngase la situación presentada al comienzo del Capítulo 2 de cinco diferentes industrias, $N = \{1, 2, 3, 4, 5\}$, que se encuentran organizadas en tres diferentes naciones $\mathcal{P}_1 = \{N_1^1, N_2^1, N_3^1\}$, desean cooperar para la construcción de una vía férrea que comunique sus industrias con un muelle, pero además se debe tener en cuenta que las naciones N_2 y N_3 se encuentran en un tratado económico para la mejora de sus industrias, lo cual brinda otra partición $\mathcal{P}_2 = \{N_1^2, N_2^2\}$, donde $\mathcal{P}_1$ es un refinamiento de $\mathcal{P}_2$, como se muestra en la Figura 3.1. El problema radica en saber cómo debe ser el pago por industria para la realización del proyecto. Debido a la localización, organización política y el tratado económico sólo tienen sentido las coaliciones entre las industrias de una misma nación y entre naciones de un mismo tratado económico. Esta situación describe una doble anidación, puesto que se tiene un primer nivel, que son las industrias, anidadas en un segundo nivel, que son las naciones, que a su vez están anidadas en un tercer nivel que son los tratados. Así, estamos planteado un problema de juegos cooperativos con estructura de anidación, diferente al estudiado en el capítulo anterior donde las coaliciones dependen de una estructura de anidación más restringida. Esta situación se puede plantear más generalmente con estructuras de anidación con un número finito de anidaciones y niveles.

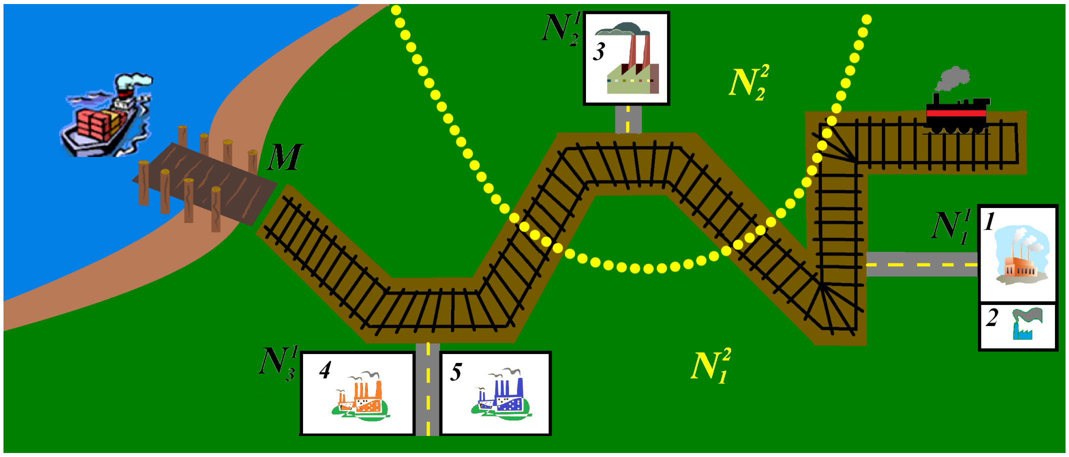

Figura 3.1: Proyecto de vía férrea internacional con dos anidaciones.

3.1. Notación y Definiciones

En este capítulo será necesario el manejo de varias particiones del conjunto de agentes N, pues éstas son las que describen la característica de anidación en varios niveles que posee la situación de juego cooperativo. Dichas particiones deben cumplir características particulares que se introducen con las siguientes definiciones y notación.

Definición 3.1.1. *Sean P y Q particiones del mismo conjunto N, se dirá que P es un refinamiento de Q, y se denotará por $P \prec Q$, si*

$$\forall X \in P, \; \exists Y \in Q : \quad X \subseteq Y.$$

Definición 3.1.2. *Sea P una partición de N y $x \in N$, al conjunto $U_P(x) \in P$ tal que $x \in U_P(x)$ se el llamará conjunto de vecinos de x en P.*

A partir de estas definiciones se obtiene un resultado que se dará por hecho a lo largo de la generalización del modelo, pues, debido a la estructura de anidación las particiones que se tomarán cumplen con la característica que se presenta a continuación.

Proposición 3.1.1. *Si $P \prec Q$, entonces para todo $Y \in Q$ existe $A \subseteq P$ tal que A es partición de Y.*

Demostración. Sea $Y \in Q$, entonces para cada $y \in Y$ se tiene que $U_p(y) \subseteq Y$, pues $P \prec Q$.

Por otro lado, es inmediato que

$$Y = \bigcup_{y \in Y} U_P(y).$$

Por tanto, $A = \{U_P(y) \mid y \in Y\} \subset P$ es una partición de Y. $\square$

Sea una situación de juego cooperativo en la cual se tiene un conjunto de agentes organizados en clases definidas por una estructura anidada en la que se tienen p niveles de jerarquía:

- $N := \{1, 2, ..., n\}$ es el conjunto de jugadores.
- $\mathcal{P}_k := \{N_1^k, N_2^k, ..., N_{m_k}^k\}$ son particiones de N, $k = 0, ..., p$, tales que $\mathcal{P}_k \prec \mathcal{P}_{k+1}$, considerando las particiones "triviales": $\mathcal{P}_0 := \{\{i\} \mid i \in N\}$ y $\mathcal{P}_{p+1} := \{N_1^{p+1}\} := \{N\}$.

Se denotará por $\mathfrak{P}^{p+1}$ al conjunto de particiones P_k, $k = 0, ..., p+1$, descritos anteriormente.

Definición 3.1.3. *Se le llamará k-clase a cada elemento N_t^k de la partición $\mathcal{P}_k$.*

Los siguientes resultados serán utilizados en la siguiente sección para describir conjuntos de coaliciones en una forma más compacta y concreta.

Aplicando la Proposición 3.1.1 a las particiones del modelo, se concluye que para cada N_t^k, $k = 1, ..., p+1$, $t = 1, ..., m_k$, existe un subconjunto $A \subseteq \mathcal{P}_{k-1}$ que es una partición de N_t^k. Por ésta razón es posible introducir la siguiente definición.

Definición 3.1.4. *Se le llamará conjunto de índices que caracterizan a N_t^k al conjunto*

$$M_t^k := \{s \mid N_s^{k-1} \subseteq N_t^k\}.$$

Por tanto, cada conjunto N_t^k, $k = 1, ..., p+1$, $t = 1, ..., m_k$ se puede caracterizar como la unión de los elementos de la partición $\mathcal{P}_{k-1}$ que lo componen,

$$N_t^k = \bigcup_{s \in M_t^k} N_s^{k-1}. \tag{3.1}$$

3.2. Conjunto de coaliciones realizables p-anidadas.

Cabe notar que todas las coaliciones que se han descrito hasta ahora no tienen restricción alguna, pero las coaliciones que se tendrán en cuenta para el modelo basado en un juegos con una estructura p-anidada, como es de esperarse, no son todas las posibles coaliciones pertenecientes a 2^N.

Las coaliciones permitidas en juegos p-anidados solamente serán las coaliciones de jugadores que conforman conjuntos de $(k-1)$-clases que pertenecen a una misma k-clase, el conjunto que las contiene se le llamará *conjunto de coaliciones realizables en* N_t^k y es:

$$B_t^k = \left\{ \bigcup_{s \in T} N_s^{k-1} \mid T \subseteq M_t^k \right\} \tag{3.2}$$

para $k = 1, ..., p+1$ y $t = 1, ..., m_k$.

Así, se le llamará *conjunto de coaliciones realizables en el nivel* k al conjunto

$$B^k = \bigcup_{t=1}^{m_k} B_t^k.$$

Por tanto, el *conjunto de todas las coaliciones realizables* en una situación de cooperación con una estructura p-anidada es la unión de todas las coaliciones realizables en los $p+1$-niveles,

$$\mathcal{B}_p = \bigcup_{k=1}^{p+1} B^k.$$

A continuación se presentan algunas observaciones, que aunque se obtienen como casos particulares de la ecuación (3.2), se deben tener en cuenta de aquí en adelante, pues son soporte de posteriores afirmaciones.

Primero, debido a la definición de la partición $\mathcal{P}_0$ de N, se tiene que para $k = 1$,

$$B_t^1 = 2^{N_t^1}, \quad \forall\ t = 1, ..., m_1,$$

pues $M_t^1 := \{s \mid N_s^0 \subseteq N_t^1\}$ y N_s^0 es un conjunto de un sólo elemento (singulete).

El conjunto vacío pertenece a $\mathcal{B}_p$; esto se observa si se toma $T = \emptyset$ en (3.2), para cualesquiera k y t. Además la gran coalición N entra a pertenecer a $\mathcal{B}_p$ cuando se toma $T = M_1^{p+1}$ en (3.2).

Finalmente, se debe resaltar que para cualquier $k = 1, ..., p$ y $t = 1, ..., m_k$ se tiene que $N_t^k \in B^k$, cuando se tiene $T = M_t^k$ en (3.2). Además, $N_t^k \in B^{k+1}$, en el caso que $T = \{t\}$ en (3.2). Es decir, los conjuntos que conforman las particiones $\mathcal{P}_k$, pertenecen a los niveles k y $k+1$.

Ejemplo 3.2.1. *Sean* $N = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ *el conjunto de jugadores con las particiones*

$$\mathcal{P}_1 = \{\{1, 2\}, \{3\}, \{4, 5\}\} \quad , \quad \mathcal{P}_2 = \{\{1, 2, 4, 5\}, \{3\}\},$$

donde

$$N_1^1 = \{1, 2\} \quad , \quad N_2^1 = \{3\} \quad N_3^1 = \{4, 5\},$$
$$N_1^2 = \{1, 2, 4, 5\} \quad , \quad N_2^2 = \{3\},$$

además, se tiene la partición trivial $\mathcal{P}_3 = \{N_1^3\} = \{N\}$*. Entonces, los conjuntos de índices que caracterizan las clases de los niveles superiores son:*

$$M_1^2 = \{1, 3\} \quad , \quad M_2^2 = \{2\},$$
$$M_1^3 = \{1, 2\}.$$

Así, el conjunto de coaliciones realizables, $\mathcal{B}_2$*, es*

B^1			B^2	B^3
	$\emptyset$		$\{1,2\}$	$\{1,2,4,5\}$
$\{1\}$		$\{4\}$	$\{3\}$	$\{3\}$
$\{2\}$	$\{3\}$	$\{5\}$	$\{4,5\}$	N
$\{1,2\}$		$\{4,5\}$	$\{1,2,4,5\}$	

Cuadro 3.1: Conjunto de coaliciones realizables del Ejemplo 3.2.1.

3.3. Estructura y descomposición de juegos p-anidados

El conjunto $\mathcal{B}_p$ es una estructura de p-anidación para un juego cooperativo; esto hace posible dar una definición formal de juego p-anidado y del conjunto de juegos p-anidados, de forma análoga a los juegos cooperativos 1-anidados.

Definición 3.3.1. *Se le llamará* ***juego cooperativo*** p***-anidado*** *a la terna* $(N, v, \mathcal{B}_p)$*, donde*

- $N = \{1, 2, ..., n\}$ *es un conjunto finito de jugadores.*
- $\mathcal{B}_p$ *es una estructura de* p*-anidación.*

- $v : \mathcal{B}_p \to \mathbb{R}$ *es una función tal que* $v(\emptyset) = 0$.

En caso que no exista confusión, fijando el conjunto de jugadores N y la estructura de anidación $\mathcal{B}_p$, se denotará al juego $(N, v, \mathcal{B}_p)$ solamente por su función *característica* v.

Ejemplo 3.3.1. *Considérese el conjunto de jugadores* $N = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ *con la estructura de anidación presentada en el Cuadro 3.1. Dado que este ejemplo presenta la misma situación propuesta en el Ejemplo 2.3.1 con una estructura de 2-anidación, entonces la función característica que modela los costos de esta situación es igual a la presentada en el Cuadro2.2 restringida a los conjunto en* $\mathcal{B}_2$*, es decir:*

S	$\{1\}$	$\{2\}$	$\{1,2\}$	$\{3\}$	$\{4\}$	$\{5\}$	$\{4,5\}$	$\{1,2,4,5\}$	N
$v(S)$	2	2	2	2	0	1	1	3	4

Cuadro 3.2: Función característica del ejemplo de la construcción de la vía férrea internacional con una estructura de 2-anidación.

Definición 3.3.2. *Sea*

$$G_{N,\mathcal{B}_p} = \{v \mid v : \mathcal{B}_p \to \mathbb{R},\ v(\emptyset) = 0\}.$$

A este conjunto se le llamará ***conjunto de juegos*** p***-anidados*** *en* $\mathcal{B}_p$.

De forma análoga al caso de los juegos 1-anidados, al conjunto $G_{N,\mathcal{B}_p}$ se le da una estructura de espacio vectorial sobre el campo de los números reales.

Definición 3.3.3. *Sean* $v, v' \in G_{N,\mathcal{B}_p}$ *y* $\alpha \in \mathbb{R}$. *Entonces,*

- $(v + v')(S) = v(S) + v'(S)$, *para todo* $S \in \mathcal{B}_p$ *(suma).*
- $(\alpha v)(S) = \alpha v(S)$ *para todo* $S \in \mathcal{B}_p$ *(producto por escalar).*
- $v_0(S) = 0$ *para todo* $S \in \mathcal{B}_p$ *(elemento neutro).*

Como en el caso particular de los juegos 1-anidados, análogamente se concluye que

$$G_{N,\mathcal{B}_p} \simeq \mathbb{R}^{|\mathcal{B}_p|}$$

y que una base para $G_{N,\mathcal{B}_p}$ es

$$U_{\mathcal{B}_p} = \{u_T | T \in \mathcal{B}_p\}, \tag{3.3}$$

lo cual se demuestra análogamente al Lema 1.2.1 en la sección de juegos cooperativos clásicos.

Ahora bien, con ésta base para el espacio vectorial $G_{N,\mathcal{B}_p}$, es posible tener una descomposición de un juego p-anidado análoga a la descomposición de juegos cooperativos 1-anidados; entonces, si

$$v = \sum_{T \in \mathcal{B}_p} \delta_T u_T, \tag{3.4}$$

los escalares δ_T se determinan unívocamente debido a la recursividad, pues

$$v(S) = \sum_{\substack{T \in \mathcal{B}_p \\ T \subseteq S}} \delta_T$$

y entonces,

$$\delta_S = v(S) - \sum_{\substack{T \in \mathcal{B}_p \\ T \subsetneq S}} \delta_T \tag{3.5}$$

donde $\delta_\emptyset = 0$. Así, se han caracterizado los escalares δ_S, igual que en los juegos cooperativos 1-anidados, los cuales son análogos a los conocidos como coeficientes de Harsanyi [4].

3.4. Juegos de clases

A continuación, se extiende la definición de juego cociente para juegos cooperativos 1-anidados a juegos p-anidados, ésta será útil para analizar el comportamiento de un juego cooperativo p-anidado en cada una de las k-clases y así expresar la generalización de la solución (2.6) en una forma compacta; estos serán los juego de k-clases. La idea principal de dichos juegos es observar las $(k-1)$-clases como agentes usando los conjuntos de índices M_t^k, $k = 2, ..., p+1$.

Definición 3.4.1. *Sea $S \subseteq B_t^k$, se le llamará* ***conjunto de clases asociado a*** *S* ***en*** *N_t^k al conjunto:*

$$S_t^k := \{s \mid N_s^{k-1} \subseteq S\}.$$

De esta definición es inmediato que si $S = N_t^k$, entonces

$$\left(N_t^k\right)^k = M_t^k.$$

También, cabe notar que usando la Definición 3.4.1, el conjunto de coaliciones realizables en N_t^k se define de la siguiente forma:

$$B_t^k = \left\{S \mid S_t^k \in 2^{M_t^k}\right\}.$$

Ésta definición, permite observar que las coaliciones realizables se pueden definir en términos de los conjuntos potencia $2^{M_t^k}$. Dado que las colaciones de un juego cooperativo tradicional es el conjunto potencia de sus agentes, a continuación se define un juego cooperativo con conjunto de agentes M_t^k.

Definición 3.4.2. *Sean $S \in \mathcal{B}_p$ y su conjunto de clases asociado $S_t^k \subseteq M_t^k$. Se le llamará* **juego de clases en** N_t^k *asociados a $(N, v, \mathcal{B}_p)$ al juego cooperativo tradicional (M_t^k, v_t^k), donde*

$$v_t^k\left(S_t^k\right) = v\left(\bigcup_{s \in S_t^k} N_s^{k-1}\right) = v(S).$$

Ejemplo 3.4.1. *Los juegos (M_1^2, v_1^2), (M_2^2, v_2^2) y (M_1^3, v_1^3) del juego $(N, v, \mathcal{B}_2)$ presentado en el Ejemplo 3.3.1, tienen las funciones características indicadas en los Cuadros 3.3 y 3.4, respectivamente.*

S_1^2	$\{1\}$	$\{3\}$	$\{1,3\}$
$v_1^2\left(S_1^2\right)$	2	1	3

,

S_2^2	$\{2\}$
$v_2^2\left(S_2^2\right)$	2

Cuadro 3.3: Funciones características de los juegos de clases en el segundo nivel asociados al juego presentado en el Ejemplo 3.3.1.

S_1^3	$\{1\}$	$\{2\}$	$\{1,2\}$
$v_1^3\left(S_1^3\right)$	3	2	4

Cuadro 3.4: Función característica del juego de clases en N_1^3 asociado al juego presentado en el Ejemplo 3.3.1.

Puesto que los juego de clases se definen como un juego cooperativo clásico, análogo al juego cociente presentado en la Sección 2.4, estos se puede descomponer en términos de juegos de unanimidad clásicos. Para diferenciar, en particular, esta descomposición, se introduce la siguiente notación:

$$u_{T_t^k}(S_t^k) = \begin{cases} 1 & si \;\; S_t^k \supseteq T_t^k \\ 0 & en\ otro\ caso. \end{cases}$$

Así, para un juego p-anidado $(N, \mathcal{B}_p, v)$, tenemos la descomposición

$$v_t^k = \sum_{T_t^k \subseteq M_t^k} \delta_{T_t^k} u_{T_t^k},$$

donde, $\delta_{S_t^k}$ son los coeficientes de Harsanyi [4],

$$\delta_{S_t^k} = v_t^k(S_t^k) - \sum_{T_t^k \subsetneq S_t^k} \delta_{T_t^k}. \tag{3.6}$$

Dado que cada juego de clases está definido en términos del juego p-anidado, análogamente que el juego cociente de la Sección 2.4, es pertinente conocer ciertas relaciones entre ellos, pues el juego p-anidado es el juego en estudio. A continuación, se presenta una extensión del Lema 2.4.1 para juegos de clases asociados a cada una de las clases N_t^k.

Se denotará por $v_t^k(\{s\}) := v_t^k(s)$ y $\delta_{\{s\}} := \delta_s$.

Lema 3.4.1. *Dados $S_t^k, T_t^k \subseteq M_t^k$ los conjuntos de clases asociados a $S, T \in B_t^k \subset \mathcal{B}_p$ respectivamente y los juegos*

$$v = \sum_{T \in \mathcal{B}_p} \delta_T u_T \quad \text{y} \quad v_t^k = \sum_{T_t^k \subseteq M_t^k} \delta_{T_t^k} u_{T_t^k},$$

entonces

(a) $u_{T_t^k}(S_t^k) = u_T(S)$.

(b) $\delta_s = v(N_s^{k-1})$, *para todo* $s \in M_t^k$.

(c) Si $\left|S_t^k\right| \geq 2$ *entonces* $\delta_{S_t^k} = \delta_S$.

Demostración. *(a)* El resultado es inmediato de la definición de S_t^k y T_t^k, pues $S_t^k \supseteq T_t^k$ si y sólo si, $S \supseteq T$.

(b) De la descomposición de v_t^k, un caso particular de (3.6), $S_t^k = \{s\}$, se tiene

$$\begin{aligned} \delta_s &= v_t^k(s) - \delta_\emptyset \\ &= v_t^k(s) \\ &= v(N_s^{k-1}) \end{aligned}$$

pues $\delta_\emptyset = 0$.

(c) Aplicando inducción fuerte sobre la cardinalidad de S_t^k, se comienza por verificar la afirmación para el caso $\left|S_t^k\right| = 2$; supóngase que $N_r^{k-1}, N_s^{k-1} \subset N_t^k$, entonces, de (3.6) con $S_t^k = \{r, s\}$ se tiene

$$\delta_{\{r,s\}} = v_t^k(\{r, s\}) - \delta_r - \delta_s.$$

Entonces, usando la definición de v_t^k, la descomposición de v y el resultado del inciso *(b)* se tiene que

$$\begin{aligned}
\delta_{\{r,s\}} &= v(N_r^{k-1} \cup N_s^{k-1}) - v(N_r^{k-1}) - v(N_s^{k-1}) \\
&= v(N_r^{k-1} \cup N_s^{k-1}) - \sum_{\substack{T \subseteq N_r^{k-1} \\ T \in \mathcal{B}_p}} \delta_T - \sum_{\substack{T \subseteq N_s^{k-1} \\ T \in \mathcal{B}_p}} \delta_T \\
&= v(N_r^{k-1} \cup N_s^{k-1}) - \sum_{\substack{T \subsetneq (N_r^{k-1} \cup N_s^{k-1}) \\ T \in \mathcal{B}_p}} \delta_T \\
&= \delta_{N_r^{k-1} \cup N_s^{k-1}}
\end{aligned}$$

Se toma como hipótesis inductiva que si $S_t^k \subseteq M_t^k$ es tal que $2 \leq \left|S_t^k\right| < m$, entonces $\delta_{S_t^k} = \delta_S$.

Sea $S_t^k \subseteq M_t^k$ tal que $\left|S_t^k\right| = m$; entonces, de (3.6) se tiene que

$$\begin{aligned}
\delta_{S_t^k} &= v_t^k(S_t^k) - \sum_{T_t^k \subsetneq S_t^k} \delta_{T_t^k} \\
&= v_t^k(S_t^k) - \sum_{\substack{T_t^k \subset S_t^k \\ \left|T_t^k\right| \geq 2}} \delta_{T_t^k} - \sum_{\substack{T_t^k \subset S_t^k \\ \left|T_t^k\right| = 1}} \delta_{T_t^k}
\end{aligned}$$

pero todo subconjunto propio de S_t^k tiene cardinalidad menor que m, entonces, usando la hipótesis inductiva y el inciso *(b)* se sigue que

$$\begin{aligned}
\delta_{S_t^k} &= v\left(S\right) - \sum_{\substack{T \subset S \\ \left|T_t^k\right| \geq 2}} \delta_T - \sum_{s \in S_t^k} v(N_s^{k-1}) \\
&= v\left(S\right) - \sum_{\substack{T \subset S \\ \left|T_t^k\right| \geq 2}} \delta_T - \sum_{s \in S_t^k} \left(\sum_{T \subseteq N_s^{k-1}} \delta_T \right) \\
&= v\left(S\right) - \sum_{\substack{T \subset S \\ T \in \mathcal{B}_p}} \delta_T \\
&= \delta_S.
\end{aligned}$$

Por tanto, se concluye que $\delta_{S_t^k} = \delta_S$ para todo $S \in \mathcal{B}_p$ tal que $\left|S_t^k\right| \geq 2$. $\square$

3.5. Solución de un juego cooperativo p-anidado

La solución de un juego cooperativo p-anidado, análoga a las soluciones de los juegos cooperativos 1-anidados, se representa como un vector de pagos $x \in \mathbb{R}^{|N|}$, donde sus entradas denotan el *pago* para cada uno de los jugadores en N. De igual forma, lo que se desea obtener son operadores (o *valores*) que a cada juego cooperativo p-andado le asocien una solución.

Definición 3.5.1. *La **solución** de un juego cooperativo p-anidado $(N, v, \mathcal{B}_p)$ es un operador*

$$\varphi : G_{N,\mathcal{B}_p} \to \mathbb{R}^{|N|},$$

donde su $i-$ésima entrada representa el pago que la solución le asigna al jugador i y es denotada por $\varphi_i(N, v, \mathcal{B}_p)$.

En caso que no exista confusión, se denotará $\varphi_i(N, v, \mathcal{B}_p)$ por $\varphi_i(v)$. También se introduce la siguiente notación

$$\sum_{i \in S} \varphi_i(N, v, \mathcal{B}_p) := \varphi(N, v, \mathcal{B}_p)(S) := \varphi(v)(S).$$

Igual que las soluciones de juegos cooperativos 1-anidados, se desea que las soluciones de los juegos cooperativos p-anidados cumplan propiedades que modelen situaciones de interés en la realidad. En este trabajo, se espera caracterizar una solución análoga al valor de Shapley para juegos cooperativos p-anidados.

La similaridad del valor de Shapley con la solución que se desea caracterizar, consiste en los valores que asigna dicha solución, φ, a los juegos que se encuentran en la base de $G_{N,\mathcal{B}_p}$, en este caso los juegos de unanimidad, para cada $T \in \mathcal{B}_p$, deben tomar el siguiente valor con dicha solución:

$$\varphi_i(u_T) = \begin{cases} \frac{1}{|T|} & si \;\; i \in T \\ 0 & en\ otro\ caso. \end{cases} \tag{3.7}$$

En la siguiente sección se presentarán los axiomas que tomaran para caracterizar de manera única esta solución y posteriormente se demostrará su independencia.

3.5.1. Caracterización axiomática

Para caracterizar la solución en (3.7), se tomarán axiomas similares a los presentados en la Sección 2.5.1 extendidos y adaptados a estructuras p-anidadas.

Axioma 3.5.1. ***Aditividad.*** *Para todo* $(N, v, \mathcal{B}_p)$ *y* $(N, v', \mathcal{B}_p) \in G_{N,\mathcal{B}_p}$*, una solución* φ *satisface el axioma de aditividad si*

$$\varphi(N, v, \mathcal{B}_p) + \varphi(N, v', \mathcal{B}_p) = \varphi(N, v + v', \mathcal{B}_p).$$

Axioma 3.5.2. ***Eficiencia.*** *Para todo* $(N, v, \mathcal{B}_p) \in G_{N,\mathcal{B}_p}$*, una solución* φ *satisface el axioma de eficiencia si*

$$\varphi(v)(N) = v(N).$$

La interpretación de estos dos axiomas es igual a la interpretación dada en el Capituló 2 de los axiomas 1.3.1 y 1.3.2 respectivamente.

Para presentar un axioma para una solución de juegos cooperativos p-anidados análogo al axioma de $\mathcal{B}$-nulidad 2.5.3 es necesario introducir la siguiente definición, que es análoga a la definición de jugador $\mathcal{B}$-nulo 2.5.3, adaptada a estructuras p-anidadas.

Definición 3.5.2. *Un jugador* $i \in N_t^1 \in \mathcal{B}_p$ *es* $\mathcal{B}_p$***-nulo*** *en* $(N, v, \mathcal{B}_p)$ *si* i *es jugador nulo en* (N_t^1, v) *y* $s \in M_t^k$ *es un jugador dummy en* (M_t^k, v_t^k)*, donde* $i \in N_s^{k-1} \subseteq N_t^k$.

Axioma 3.5.3. $\mathcal{B}_p$***-Nulidad.*** *Una solución* φ *satisface el axioma de* $\mathcal{B}_p$*-nulidad si para cualquier* $i \in N_t^1 \in \mathcal{B}_p$ *jugador* $\mathcal{B}_p$*-nulo en* $(N, v, \mathcal{B}_p)$*, entonces,*

$$\varphi_i(N, v, \mathcal{B}_p) = 0.$$

Lo que el axioma de $\mathcal{B}_p$-nulidad establece, es la situación en que la solución le asigna el valor de cero a un jugador, lo que se requiere para que esto suceda, es que el jugador únicamente actúe como observador dentro del juego restringido a la clase del primer nivel (el jugador es nulo en (N_t^1, v)), y que además a las clases a las que pertenece en cada nivel no le sea posible obtener un pago diferente a lo que puede conseguir por sí misma (la clase t es *dummy* en (M_t^k, v_t^k), si $i \in N_t^k$). Entonces, en una solución que satisfaga el axioma anterior, un jugador que toma una posición de observador en el juego debe ser excluido en la repartición.

Cabe notar que una solución que satisfaga este axioma le da bastante importancia al hecho de que el jugador pertenezca a una clase, pues, aunque el jugador sea nulo en el juego restringido a la clase, tiene la posibilidad de obtener un pago si la clase no es *dummy* en el juego cociente.

De forma análoga para estructuras 1-anidadas, una condición suficiente para que la estructura de anidación $\mathcal{B}_p$ sea invariante bajo permutaciones $\theta(\mathcal{B}_p) = \mathcal{B}_p$, es que la biyección θ deje invariante a las clases de la primera partición, es decir, $\theta(N_t^1) = N_t^1$, para todo $N_t^1 \in \mathcal{P}_1$, pues si esta partición es invariante, entonces las demás particiones $\mathcal{P}_t$, $t = 2, ..., p$ también lo serán, ya que son menos finas que $\mathcal{P}_1$. Así se introduce la siguiente definición.

Definición 3.5.3. *El conjunto de biyecciones $\theta \in \Theta_N$ que cumplen $\theta(N_t^1) = N_t^1$, para todo $t = 1, ..., m_1$ se denota por*

$$\Theta_{\mathcal{B}_p} = \{\theta \in \Theta_N \mid \theta(N_t^1) = N_t^1, \ \forall t = 1, ..., m_1\}.$$

Así, es posible definir un juego cooperativo p-anidado permutado análogamente al juego de la Definición 2.5.5, como sigue.

Definición 3.5.4. *Para cualquier par $(\theta, v) \in \Theta_{\mathcal{B}_p} \times G_{N,\mathcal{B}_p}$ se define el **juego cooperativo p-anidado permutado** $(N, \theta * v, \mathcal{B}_p)$ de tal forma que $(\theta * v) : \mathcal{B}_p \to \mathbb{R}$ y*

$$(\theta * v)(\theta(S)) = v(S) \quad , \quad \forall S \in \mathcal{B}_p.$$

Igual que en la Sección 2.5.1, para cada par $(\theta, x) \in \Theta_{\mathcal{B}_p} \times \mathbb{R}^{|N|}$, se define el vector de pagos permutados $\theta{*}x$, donde su $i{-}ésima$ coordenada está dada por $(\theta{*}x)_i = x_{\theta(i)}$. Esto indica que el pago que recibe el jugador i con $\theta{*}x$ es igual al que recibía $\theta(i)$ con x.

Así, es posible presentar un axioma análogo al axioma de $\mathcal{B}$-simetría 2.5.4 para juegos p-anidados con el cual se describe una solución que sea inmune a las características personales del jugador.

Axioma 3.5.4. ***$\mathcal{B}_p$-Simetría.*** *Para todo $(\theta, v) \in \Theta_{\mathcal{B}_p} \times G_{N,\mathcal{B}_p}$, una solución φ satisface el axioma de $\mathcal{B}_p$-simetría si*

$$\varphi(N, \theta * v, \mathcal{B}_p) = (\theta * \varphi)(N, v, \mathcal{B}_p).$$

Así, si los jugadores cambian papeles durante el juego y cada coalición en $\mathcal{B}_p$ obtiene exactamente el mismo valor, en la función característica $\theta * v$, que la coalición a la que suplanta, entonces cada jugador en el nuevo juego debe obtener exactamente lo mismo que obtendría el jugador al cual suplanta en el juego original.

Para generalizar el axioma de contribución de clases balanceadas 2.5.5 para el caso de juegos p-anidados, será necesario hacerlo para cada uno de los niveles, así se deben tener en cuenta los siguientes conjuntos

$$(\mathcal{B}_p)_{-N_t^k} = \{T \in \mathcal{B}_p \mid N_t^k \nsubseteq T\}.$$

Axioma 3.5.5. ***Contribución de k-clases balanceadas.*** *Para todo $i \in N_s^k$ y todo $j \in N_t^k$, con $k \geq 1$, $N_s^k \neq N_t^k$, $N_s^k, N_t^k \subset N_r^{k+1}$ para algún r, una solución φ satisface el axioma de contribución de clases balanceadas si*

$$\varphi_i(N_r^{k+1}, v, \mathcal{B}_p) - \varphi_i(N_r^{k+1} \backslash N_t^k, v, (\mathcal{B}_p)_{-N_t^k}) = \varphi_j(N_r^{k+1}, v, \mathcal{B}_p) - \varphi_j(N_r^{k+1} \backslash N_s^k, v, (\mathcal{B}_p)_{-N_s^k}).$$

En el siguiente teorema se caracteriza la generalización para juegos cooperativos p-anidados de la solución presentada en el Teorema 2.5.1, la cual es análoga al valor de Shapley para juegos cooperativos clásicos en el sentido mencionado anteriormente; ésta solución cumple con todos los axiomas presentados anteriormente y resulta ser única.

Teorema 3.5.1. *Existe una única solución para juegos cooperativos p-anidados en $G_{N,\mathcal{B}_p}$ que satisface los axiomas de* ***aditividad****,* ***eficiencia****, $\mathcal{B}_p$***-nulidad****, $\mathcal{B}_p$***-simetría*** *y* ***contribución de k-clases balanceadas****. Además, para $i \in N_s^{k-1} \subseteq N_t^k$, está dada por $\varphi_i(N, v, \mathcal{B}_p)$.*

$$\varphi_i(N, v, \mathcal{B}_p) = Sh_i(N_s^1, v) + \sum_{k=2}^{p+1} \frac{WSh_s^{\omega^k}(M_t^k, v_t^k) - v(N_s^{k-1})}{|N_s^{k-1}|}, \tag{3.8}$$

donde

$$\left(\omega^k\right)_j = \left|N_j^{k-1}\right|.$$

Demostración. Se comenzará presentando una prueba de la unicidad de la solución. Como se mencionó en la Sección 3.3, dado que, $U_{\mathcal{B}_p}$ en (3.3) es una base de $G_{N,\mathcal{B}_p}$, existen $\delta_T \in \mathbb{R}$ únicos, tales que v se descompone como en (3.4),

$$v = \sum_{T \in \mathcal{B}_p} \delta_T u_T.$$

Entonces, debido a la aditividad de $\varphi(N, v, \mathcal{B}_p)$ se tiene que

$$\varphi(N, v, \mathcal{B}_p) = \sum_{T \in \mathcal{B}_p} \varphi(N, \delta_T u_T, \mathcal{B}_p).$$

Así, de forma análoga a la demostración del Teorema 2.5.1, si $\varphi(N, \delta_T u_T, \mathcal{B})$ es único para cada $\delta_T u_T$, $T \in \mathcal{B}_p$, se obtiene que también lo es para v.

Para demostrar la unicidad de la solución para cada $\delta_T u_T$, es necesario hacer las siguientes observaciones:

1. Si $i \in N_s^1$ es tal que $i \notin T$ entonces, por la definición de los juegos de unanimidad, se tiene que i es un jugador nulo en (N_s^1, u_T) y así se concluye que también lo es en $(N_s^1, \delta_T u_T)$.

   Ahora bien, si $i \in N_s^{k-1}$ y $i \notin T$, entonces se tiene que $s \notin T_t^k$, por tanto $s \in M_t^k$ es un jugador *dummy* en $(M_t^k, \delta_T(u_T)_t^k)$, para todo $k = 1, ..., p$.

   Así, de lo anterior se concluye que si $i \notin T$, entonces i es un jugador $\mathcal{B}$-nulo en $(N, \delta_T u_T, \mathcal{B})$.

2. El valor que obtiene la gran coalición en los juegos que están siendo tratados es

   $$(\delta_T u_T)(N) = \delta_T,$$

   pues en los juegos de unanimidad $(N, u_T, \mathcal{B})$ a la gran coalición se le asigna el total de la unidad.

3. Sean $i, j \in N_s^1$, $i, j \in T$ y θ es tal que $\theta(i) = j$ y $\theta(T) = T$, por el axioma de simetría se tiene que

   $$\varphi_i(\theta * u_T) = \varphi_{\theta(i)}(u_T) = \varphi_j(u_T).$$

   Entonces, dada la forma en que se tomó θ, se tiene que, $u_T = \theta * u_T$, y así

   $$\varphi_i(\theta * u_T) = \varphi_i(u_T);$$

   por tanto,

   $$\varphi_i(u_T) = \varphi_j(u_T)\ \forall i, j \in N_s^1,\ \forall s = 1, ..., m_1$$

De los anteriores incisos, se concluye que si φ cumple con los axiomas de eficiencia, $\mathcal{B}_p$-nulidad y $\mathcal{B}_p$-simetría, entonces, para $T \in B^1 \subset \mathcal{B}_p$, es decir $T \subseteq N_s^1$ para algún $s = 1, ..., m_1$, se tiene que

$$\sum_{i \in T} \varphi_i(N, \delta_T u_T, \mathcal{B}_p) = |T| \varphi_t(N, \delta_T u_T, \mathcal{B}_p) = \delta_T,$$

para cualquier $t \in T$. Por tanto, la solución del juego $(N, \delta_T u_T, \mathcal{B}_p)$, para $T \in B^1$, está dada por:

$$\varphi_i(N, \delta_T u_T, \mathcal{B}_p) = \begin{cases} \frac{\delta_T}{|T|} & \textit{si } i \in T \\ 0 & \textit{en otro caso.} \end{cases} \tag{3.9}$$

Ahora bien, para obtener la solución del juego $(N, \delta_T u_T, \mathcal{B}_p)$ para un $T \in B^k \subset \mathcal{B}_p$ para $k > 1$, primero se probará que $\varphi_i(u_T) = \varphi_j(u_T)\ \forall i, j \in T$.

Como se mostró en el inciso 3, se tiene que $\varphi_i(u_T) = \varphi_j(u_T)$ para $i, j \in N_s^1 \subset T$. Por otro lado, por la definición de $\delta_T u_T$, se tiene que para cualquier $N_s^l \subseteq T$,

$$\varphi(N_s^{l+1} \setminus N_s^l, \delta_T u_T, \mathcal{B}_{-N_s^l}) = \mathbf{0}.$$

Entonces, por el axioma de contribución de k-clases balanceadas, tomando $T \subseteq N_r^{k+1}$ y cualquier par de jugadores $i \in N_t^k \subset N_r^{k+1}$, $j \in N_s^k \subset N_r^{k+1}$, donde $N_t^k, N_s^k \subseteq T$, se tiene

$$\varphi_i(N_r^{k+1}, \delta_T u_T, \mathcal{B}_p) = \varphi_j(N_r^{k+1}, \delta_T u_T, \mathcal{B}_p); \tag{3.10}$$

además, por lo observado en el inciso 1, se tiene que si $i \notin T$ entonces por axioma de $\mathcal{B}$-nulidad se tiene que

$$\varphi_i(N, \delta_T u_T, \mathcal{B}_p) = 0,$$

de aquí, usando (3.10) se tiene que:

$$\varphi_i(N, \delta_T u_T, \mathcal{B}_p) = \varphi_j(N, \delta_T u_T, \mathcal{B}_p), \tag{3.11}$$

para todo $i \in T$, pues $\varphi_k(N, \delta_T u_T, \mathcal{B}_p) = 0$, para todo $k \in T$.

Ahora, dado que φ cumple con los axioma de eficiencia y $\mathcal{B}_p$-nulidad, se tiene que

$$\sum_{i \in T} \varphi_i(N, \delta_T u_T, \mathcal{B}_p) = |T| \varphi_t(N, \delta_T u_T, \mathcal{B}_p) = \delta_T, \tag{3.12}$$

para cualquier $t \in T$.

Entonces, de (3.11) y (3.12) se concluye que el único valor posible para $\delta_T u_T$, con $T \in B^k$, $k > 1$, es

$$\varphi_i(N, \delta_T u_T, \mathcal{B}) = \begin{cases} \frac{\delta_T}{|T|} & si\ i \in T \\ 0 & en\ otro\ caso. \end{cases} \tag{3.13}$$

Por tanto, existe un único valor que cumple con los axiomas requeridos y es

$$\varphi_i(N, v, \mathcal{B}_p) = \sum_{\substack{T \ni i \\ T \in \mathcal{B}_p}} \frac{\delta_T}{|T|}. \tag{3.14}$$

Ahora, falta comprobar que el anterior valor es igual a (3.8). Para ello se prosigue de la siguiente forma:

Dado $i \in N_s^{k-1} \subseteq N_t^k$, recordando que los conjunto N_t^k pertenecen a B^k y a B^{k+1}, para todo $k = 1, ..., p$ y todo $t = 1, ..., m_k$

$$\begin{aligned}
\varphi_i(N, v, \mathcal{B}_p) &= \sum_{\substack{T \ni i \\ T \in \mathcal{B}_p}} \frac{\delta_T}{|T|}. \\
&= \sum_{k=1}^{p+1} \left(\sum_{\substack{T \ni i \\ T \in B^k}} \frac{\delta_T}{|T|} \right) - \sum_{k=2}^{p+1} \frac{\delta_{N_s^{k-1}}}{|N_s^{k-1}|}, \qquad (3.15)
\end{aligned}$$

pues, la sustracción de la segunda suma evita la repetición de términos en la primera suma.

Ahora, observando que si $T \in B^1$ y $i \in T$ entonces $T \subseteq N_s^1$, si se observa el caso $k = 1$ de la primera suma de (3.15), y teniendo en cuenta el valor de Shapley para la descomposición en juegos de unanimidad de un juego, se obtiene que:

$$\begin{aligned}
\varphi_i(N, v, \mathcal{B}_p) &= \sum_{\substack{T \ni i \\ T \subseteq N_s^1}} \frac{\delta_T}{|T|} + \sum_{k=2}^{p+1} \left(\sum_{\substack{T \ni i \\ T \in B^k}} \frac{\delta_T}{|T|} \right) - \sum_{k=3}^{p+1} \frac{\delta_{N_s^{k-1}}}{|N_s^{k-1}|} \\
&= Sh\left(N_s^1, v\right) + \sum_{k=2}^{p+1} \left(\sum_{\substack{T \ni i \\ T \in B^k}} \frac{\delta_T}{|T|} \right) - \sum_{k=2}^{p+1} \frac{\delta_{N_s^{k-1}}}{|N_s^{k-1}|} \qquad (3.16)
\end{aligned}$$

Tomando $i \in N_s^{k-1} \subseteq T \subseteq N_t^k$, se tiene que $T_t^k \subseteq M_t^k$ y $s \in T_t^k$, entonces aplicando el Lema 3.4.1 a la igualdad (3.16), se obtiene que

$$\begin{aligned}
\varphi_i(N, v, \mathcal{B}_p) &= Sh\left(N_s^1, v\right) + \sum_{k=2}^{p+1} \left(\sum_{\substack{T_t^k \ni s \\ T_t^k \subseteq M_t^k}} \frac{\delta_{T_t^k}}{|T|} \right) - \sum_{k=2}^{p+1} \frac{v(N_s^{k-1})}{|N_s^{k-1}|} \\
&= Sh\left(N_s^1, v\right) + \sum_{k=2}^{p+1} \left(\sum_{\substack{T_t^k \ni s \\ T_t^k \subseteq M_t^k}} \frac{\delta_{T_t^k}}{|T|} \right) - \sum_{k=2}^{p+1} \frac{v(N_s^{k-1})}{|N_s^{k-1}|}. \qquad (3.17)
\end{aligned}$$

También, se observa que

$$|T| = \sum_{l \in T_t^k} \left|N_l^k\right|,$$

para algún $N_l^{k-1} \subseteq N_t^k$. Entonces, multiplicando y dividiendo por $|N_s^{k-1}|$, y recordando la definición del valor de Shapley ponderado, se tiene que el argumento de la segunda suma en (3.17) es:

$$\begin{aligned}\sum_{\substack{T_t^k \ni s \\ T_t^k \subseteq M_t^k}} \frac{\delta_{T_t^k}}{|T|} &= \frac{1}{|N_s^{k-1}|} \sum_{\substack{T_t^k \ni s \\ T_t^k \subseteq M_t^k}} \left(\frac{|N_s^{k-1}|}{\sum_{l \in T_t^k} |N_l^{k-1}|} \delta_{T_t^k} \right) \\ &= \frac{WSh_s^{\omega^k}(M_s^k, v_t^k)}{|N_s^{k-1}|}. \end{aligned} \tag{3.18}$$

donde, al jugador $j \in M_t^k$ se le asigna el peso $\left(\omega^k\right)_j = |N_j^k|$.

Finalmente, sustituyendo (3.18) en (3.17), se obtiene lo requerido:

$$\varphi_i(N, v, \mathcal{B}_p) = Sh_i(N_s^1, v) + \sum_{k=2}^{p+1} \frac{WSh_s^{\omega^k}(M_t^k, v_t^k) - v(N_s^{k-1})}{|N_s^{k-1}|}$$

□

Este valor tiene la siguiente interpretación: Cada uno de los k términos

$$\frac{WSh_s^{\omega^k}(M_t^k, v_t^k) - v(N_s^{k-1})}{|N_s^{k-1}|}$$

representa la repartición, en partes iguales entre los agentes de una misma k-clase, del excedente o faltante que puede obtener dicha k-clase en el juego cociente con una repartición que tiene en cuenta el tamaño de las clases, lo cual se indica con un valor de Shapley ponderado donde los pesos corresponden con el tamaño de las clases, $WSh_s^{\omega^k}(M_t^k, v_t^k)$, y así, cada uno de los valores $v_t^k(N_s^{k-1})$ es repartido con el termino anterior de la suma $(k-1)$. Finalmente, para $i \in N_s^1$, el término $Sh\left(N_s^1, v\right)$ expresa que la valía de la clase N_s^1, $v(N_s^1)$, es repartida entre sus integrantes de acuerdo con el valor de Shapley.

Teniendo en cuenta que el valor de Shapley se puede interpretar como un valor de Shapley ponderado, con pesos iguales a uno para todos los jugadores; recordando que cada conjunto en $\mathcal{P}_0$ tiene un sólo elemento y que $N_s^0 = \{i\}$, entonces (3.8) se puede escribir como sigue:

$$\varphi_i(N, v, \mathcal{B}_p) = v(\{i\}) + \sum_{k=1}^{p+1} \frac{WSh_s^{\omega^k}\left(M_t^k, v_t^k\right) - v_t^k(N_s^{k-1})}{|N_s^{k-1}|},$$

para $i \in N_s^{k-1} \subseteq N_t^k$.

Ejemplo 3.5.1. *El vector de pagos que le asocia la solución (3.8) al juego presentado en el Ejemplo 3.3.1 es*

$$\varphi(N, v, \mathcal{B}) = \left(\frac{4}{5}, \frac{4}{5}, \frac{9}{5}, -\frac{1}{5}, \frac{4}{5}\right).$$

donde, el valor negativo $-\frac{1}{5}$*, se puede interpretar como un pago que recibe la industria 4 de las demás industrias, por brindar su vía férrea privada al proyecto que todas las industrias usarán.*

3.5.2. Independencia de axiomas

Después de esta caracterización axiomática, es importante mostrar que los axiomas que determinan de forma única el valor obtenido son independientes entre si. Entonces, análogamente a lo presentado en la Sección 2.5.2 se darán valores diferentes a (3.8) que no satisfacen un axioma, pero los cuatro restantes si los satisfacen.

Las verificaciones del cumplimiento de cada uno de los axiomas para los valores que se presentaran a continuación son análogas a las presentadas en la Sección 2.5.2. La única, aunque ligera, diferencia radica en la verificación del axioma de k-clases balanceadas, pues ahora el axioma se tiene en cada uno de los niveles. Ahora, lo que se debe tener en cuenta es que en cada k-clase, entonces, como muestran Hart y Mas-Collel [5], el valor de Shapley ponderado satisface que para $r, s \in M_t^k$, $r \neq s$,

$$\frac{WSh_r^{\omega^k}(M_t^k, v_t^k) - WSh_r^{\omega}(M_t^k \setminus \{s\}, v_t^k)}{|N_r^{k-1}|} = \frac{WSh_s^{\omega^k}(M_t^k, v_t^k) - WSh_r^{\omega}(M_t^k \setminus \{r\}, v_t^k)}{|N_s^{k-1}|}. \tag{3.19}$$

Se presenta un valor que cumple con los axiomas de eficiencia, $\mathcal{B}_p$-nulidad, $\mathcal{B}_p$-simetría y contribución de k-clases balanceadas pero no cumple el axioma de aditividad,

$$\varphi_i^{\neg Adi}(N, v, \mathcal{B}_p) = Nu_i(N_s^1, v) + \sum_{k=2}^{p+1} \frac{WSh_s^{\omega^k}(M_t^k, v_t^k) - v(N_s^{k-1})}{|N_s^{k-1}|}, \tag{3.20}$$

donde Nu(N, v) es el nucléolo propuesto por Schmeidler [18]. Debido a que el nucléolo cumple simetría, eficiencia, y nulidad, (3.20) cumple los primeros tres axiomas, y como el segundo termino en la expresión de 3.20 es igual al de (3.8), se tiene que este valor cumple el axioma de contribución de k-clases balanceadas, eficiencia, $\mathcal{B}_p$-nulidad y $\mathcal{B}_p$-simetría.

El siguiente valor cumple los axiomas de aditividad, $\mathcal{B}_p$-nulidad, $\mathcal{B}_p$-simetría y contribución de k-clases balanceadas pero no cumple el axioma de eficiencia,

$$\begin{aligned} \varphi_i^{\neg Efi}(N, v, \mathcal{B}_p) &= Sh_i(N_s^1, v) + \sum_{k=2}^{p} \frac{WSh_s^{\omega^k}(M_t^k, v_t^k) - v(N_s^{k-1})}{|N_s^{k-1}|} \\ &+ \frac{2WSh_s^{\omega^k}(M_t^{p+1}, v_t^{p+1}) - v(N_s^p)}{|N_s^p|}, \end{aligned} \tag{3.21}$$

pues, claramente, $\varphi_i^{\neg Efi}(v)(N) = 2v(N)$. Los demás, axiomas se siguen cumpliendo de forma análoga, pues el coeficiente 2 del Shapley ponderado en el último termino, no afecta dichos axiomas.

A continuación se muestra un valor que cumple los axiomas de aditividad, eficiencia, $\mathcal{B}_p$-simetría y contribución de k-clases balanceadas pero no $\mathcal{B}_p$-nulidad,

$$\varphi_i^{\neg BpNul}(N, v, \mathcal{B}_p) = \frac{WSh_s^{\omega^2}(M_t^2, v_t^2)}{|N_s^1|} + \sum_{k=3}^{p+1} \frac{WSh_s^{\omega^k}(M_t^k, v_t^k) - v(N_s^{k-1})}{|N_s^{k-1}|}, \tag{3.22}$$

pues si i es un jugador $\mathcal{B} - p$-nulo, pero la clase N_s^1 puede obtener, por si sola, un valor diferente de cero, es decir, $v(N_s^1) = v_t^2(s) \neq 0$, pues, aunque i es nulo en (N_s^1, v) y las clases s son *dummy* en (M_t^k, v_t^k) para $k \geq 3$, este valor le asigna a i,

$$\varphi_i^{\neg BpNul}(N, v, \mathcal{B}_p) = \frac{v(N_t^2)}{|N_s^1|} \neq 0.$$

Con el siguiente valor se muestra el caso con el cual se cumplen los axiomas de aditividad, eficiencia, $\mathcal{B}_p$-nulidad y contribución de k-clases balanceadas pero no $\mathcal{B}_p$-simetría,

$$\varphi_i^{\neg BpSim}(N, v, \mathcal{B}_p) = WSh_i^a(N_s^1, v) + \sum_{k=2}^{p+1} \frac{WSh_s^{\omega^k}(M_t^k, v_t^k) - v(N_s^{k-1})}{|N_s^{k-1}|} \tag{3.23}$$

donde $a = (1, 2, ..., |N_k|)$. Este valor no cumple el axioma de $\mathcal{B}_p$-Simetría debido al Shapley ponderado, $WSh_i^a(N_s^1, v)$, con $w = (1, 2, ..., |N_k|)$, que se utiliza para repartir el valor $v(N_s^1)$.

Finalmente, se da un valor que cumple con los axiomas de aditividad, eficiencia, $\mathcal{B}_p$-nulidad y $\mathcal{B}_p$-simetría pero no contribución de k-clases balanceadas

$$\varphi_i^{\neg CkCB}(N, v, \mathcal{B}) = Sh_i(N_s^1, v) + \sum_{k=2}^{p+1} \frac{Sh_s(M_t^k, v_t^k) - v(N_s^{k-1})}{|N_s^{k-1}|} \tag{3.24}$$

pues el valor de Shapley no cumple con la relación presentada en (3.19).

Capítulo 4

Conclusiones

En este trabajo se modelaron y caracterizaron matemáticamente los juegos cooperativos con estructuras anidadas, finitas. Además, se presentó una solución para dichos juegos, esto se logró desarrollando y demostrando resultados para cada una de las ideas que se exponen a continuación.

Primero, se presentaron y estudiaron las definiciones y resultados en los fundamentos de la teoría desarrollada para juegos cooperativos clásicos, que se usaron para abordar la investigación de los juegos cooperativos con estructuras anidadas, en especial las definiciones y propiedades de los valores de Shapley y su ponderado.

Posteriormente, se estudió el caso particular de jugos cooperativos con una sola anidación (*1-anidados*), los cuales poseen dos niveles. Para ello, se caracterizó el conjunto de coaliciones realizables, $\mathcal{B}$, en un juego cooperativo *1-anidado*. Con esto, fue posible la definición formal de un juego cooperativo *1-anidado*, $(N, v, \mathcal{B})$. Luego, con el fin de caracterizar dichos juegos, se definió el jugo cociente de un juego *1-anidado* $(M_1, \widehat{v})$, el cual es un juego cooperativo clásico en el segundo nivel, y además se muestra un lema que describe la relación entre estos juegos. Para finalizar el estudio de los juegos *1-anidado* se propuso una solución para dichos juegos que es análoga al valor de Shapley para juegos cooperativos clásicos, en el sentido de la asignación que hacen a los juegos de las bases de los espacios de juegos G_N y $G_{N,\mathcal{B}}$ y se presento una axiomática independiente que lo caracteriza; dicha solución resultó ser

$$\varphi_i(N, v, \mathcal{B}) = Sh_i(N_k, v|_{N_k}) + \frac{WSh^{\omega}_{[k]}(M_1, \widehat{v}) - v(N_k)}{|N_k|},$$

donde $\omega = (|N_1|, ..., |N_k|)$ es el vector de pesos. Esta solución coincidió con el valor colectivo presentado por Kamijo [9] para juegos cooperativos con *estructuras coalicionales*; dicha coincidencia tiene gran sentido, ya que un juego *1-anidados* se modela con una sola partición del conjunto de jugadores.

Finalmente, se encaminó el trabajo a la generalización de los resultados expuestos anteriormente, comenzando con la construcción de un modelo para los juegos cooperativos *p-anidados* con un conjunto de $p < \infty$ particiones sobre el conjunto de jugadores, éstas particiones se definen con un orden según el nivel que representan, y se requirió la característica que cada partición fuera un refinamiento de la que representa el nivel superior que precede. Así, se caracterizó el conjunto de coaliciones realizables en un juego *p-anidado*, $\mathcal{B}_p$. Luego, para generalizar la idea del juego cociente, se definieron los *juegos de k-clases*, (M_t^k, v_t^k), los cuales describen la situación del juego en cada una de las clases que componen una partición, N_t^k. Por último se generalizó y caracterizó axiomáticamente la solución para juegos *p-anidados*:

$$\varphi_i(N, v, \mathcal{B}_p) = Sh_i(N_s^1, v) + \sum_{k=2}^{p+1} \frac{WSh_s^{\omega^k}(M_t^k, v_t^k) - v(N_s^{k-1})}{|N_s^{k-1}|}, \tag{4.1}$$

donde, los vectores de pesos son:

$$\left(\omega^k\right)_j = \left|N_j^{k-1}\right|.$$

Dando por hecho las conclusiones anteriores y las recomendaciones, es posible dar estudio para trabajos posteriores:

1. Proporcionar una axiomatización compacta del valor (4.1), análoga a la presentada en el artículo [9], para juegos coalicionales.

2. Presentar y caracterizar soluciones que asignen en cada nivel múltiples reparticiones con valores diferentes al de Shapley y su ponderado.

3. Asignar una gráfica que restrinja la comunicación en el conjunto de jugadores y clases y brindar una solución para dicha situación.

Bibliografía

[1] Chameni-Nembua, C. & Andjiga, N. G. (2008). *Linear, efficient and symmetric values for TU- games*, Economics Bulletin 3(71): 1-10.

[2] Driessen, T. (1988). *Cooperative games, solutions and applications*, Kluwer Academic Publishers.

[3] Driessen, T. & Radzik, T. (2003). *Extensions of Hart and Mas-Colell's consistency to efficient, linear, and symmetric values for TU-games*, ICM Millenium lectures on Games, Springer, 147-166.

[4] Harsanyi, J. C. (1963). *A Simplified Bargaining Model for the n-Person Cooperative Game*, International Economic Review, 4, 194-220.

[5] Hart, S. & Mas-Colell, A. (1989). *Potential, value and consistency.* Econometrica 57:589-614.

[6] Hernandez-Lamoneda, L., Juarez, R. & Sánchez-Sánchez, F. (2008). *Solutions without dummy axiom for TU cooperative games*, Economics Bulletin 3(1): 1-9.

[7] Kalai E. & Samet D. (1987). *On Weighted Shapley values.* International Journal of Game Theory 16:205-222.

[8] Kamijo, Y. (2009). *A two-step Shapley value for cooperative games with coalition structure*, International Game Theory Review Vol 11.

[9] Kamijo, Y. (2011). *The collective value: a new solution for games with coalition structures*, TOP, Spanish Society of Statistics and Operations Research, Springer-Verlag.

[10] Myerson, R.B. (1976). *Values of Games in Partition Function Form*, International Journal of Game Theory, Vol. 6, Issue 1, page 23-31. Physica-Verlag, Vienna.

[11] Myerson, R.B. (1977). *Graphs and cooperation on games*, Mathematics of Operation Research 2:225-229.

[12] Myerson, R.B. (1980). *Conference structures and fair allocation rules.* International Journal of Game Theory 9:169-182.

[13] Myerson, R.B. (1991). *Game Theory: Analysis of Conflict*, Harvard University Press.

[14] Owen, G. (1977). *Values of games with a priori unions*, Essay in Mathematical Economics and Game Theory.

[15] Peleg, B. & Sudhölter, P. (2003). *Introduction to the Theory of Cooperative Games*, Kluwer Academic Publishers.

[16] Roth, A. (1988). *The Shapley value, Essays in honor of Lloyd S. Shapley*, Cambridge University Press.

[17] Ruiz, L.M., Valenciano, F. & Zarzuelo, F.M. (1998). *The Family of Least Square Values for Transferable Utility Games.* Games and Economic Behavior 24, 109-130.

[18] Schmeidler, D. (1969). *The nucleolus of a characteristic function Game*, SIAM Journal of Applied Mathematics 1163-1169.

[19] Shapley, L. (1953). *A Value for n-Person Games*, Contributions to the Theory of Games II, Princeton University Press, 307-317.

[20] von Neumann, J. & Morgenstern, O. (1944). *Game Theory and Economic Behavior*, Princeton University Press, Princeton, NJ, third edn.