CIMAT

Centro de Investigación en Matemáticas, A.C.

Espacios de operadores

TESIS

que para obtener el grado de

Maestro en Ciencias

con orientación en

Matemáticas Básicas

PRESENTA

Samuel García Hernández

Director de Tesis

Maite Fernández Unzueta

Guanajuato, Gto., Agosto de 2013.

Agradecimientos

A la Doctora Maite Fernández Unzueta por contribuir en el último año de mi formación. Por la paciencia, el tiempo dedicado y por dirigir este trabajo.

Al Doctor Fernando Galaz Fontes y la Doctora Verónica Isabel Dimant por el tiempo dedicado a la revisión de esta tesis.

A todos los profesores que han contribuido en mi formación académica.

A mi familia y amigos que me han apoyado siempre.

Al personal académico y administrativo del CIMAT. A CONACyT que me otorgó una beca durante el período Agosto 2011- Julio 2013.

II

Introducción

El principal objetivo de esta tesis es presentar los conceptos básicos de la teoría de espacios de operadores. Se muestra la analogía y las relaciones de la teoría de espacios de operadores con la teoría de espacios de Banach y de álgebras C^*. Se demuestra el teorema de Ruan (teorema 3.2) y se expone la importancia que tiene dentro de la teoría de los espacios de operadores. A lo largo del trabajo se presentan ejemplos importantes de espacios de operadores y en el capítulo final se expone la construcción de Gilles Pisier del espacio de operadores OH.

En el capítulo 1 se expone la notación matricial que se usará a lo largo del trabajo. Se presenta la estructura matricial del espacio $B(H)$ con H espacio de Hilbert. Como se verá más adelante, tal estructura matricial motiva la definición de espacio de operadores abstracto. Al final del capítulo se define el espacio conjugado de un espacio vectorial complejo. Esto permite definir el espacio anti-dual de un espacio de Banach complejo. El concepto de espacio anti-dual permite dar una caracterización de espacios de Hilbert, como se puede ver en la proposición 6.1.

El objetivo del capítulo 2 es exponer la idea de que las álgebras C^* se pueden pensar de manera concreta y abstracta. Se puede pensar que un álgebra C^* concreta es un subespacio de Banach de $B(H)$ que es cerrado bajo todas las operaciones algebraicas, involución y composición de operadores. Por otro lado un álgebra C^* abstracta es un álgebra de Banach, involutiva normada que cumple el axioma de la definición 2.4. Como es bien sabido, toda álgebra C^* concreta es un álgebra C^* abstracta y toda álgebra C^* abstracta es un álgebra C^* concreta. Esta última afirmación es gracias al teorema de Gelfand-Naimark, teorema 2.2.

A lo largo del capítulo 3 se estudia el concepto de espacio de operadores, se definen los operadores completamente acotados y se prueban algunas de sus propiedades básicas. Se muestra la relación que existe entre los conceptos de espacio de Banach, espacio de operadores y álgebras C^*. Finalmente se enuncia el teorema de Ruan, que se prueba en el capítulo 5.

El concepto de espacio de operadores se presenta de manera análoga al concepto de álgebras C^*, es decir, de dos maneras en principio distintas, a saber, espacios de operadores concretos y abstractos. El concepto de espacio de operadores concreto surge de estudiar los subespacios de Banach de $B(H)$, donde H es un espacio de Hilbert. Como se precisa en la definición 3.1, un espacio de operadores concreto es un subespacio de Banach de $B(H)$ para algún espacio de Hilbert H. El concepto de espacio de operadores abstracto surge de la estructura matricial de $B(H^n)$. De manera más precisa, un espacio de Banach complejo V es un espacio de operadores abstracto si los espacios $M_n(V)$ con $n \in \mathbb{N}$ están relacionados según los axiomas R_1 y R_2 de la definición 3.3.

En analogía con las álgebras C^*, los espacios de operadores concretos son espacios de operadores abstractos y los espacios de operadores abstractos son espacios de operadores concretos. Esta última afirmación es gracias al teorema de Ruan. Tal teorema permite unificar ambos conceptos de espacios de operadores, concretos y abstractos, y simplemente trabajar con el concepto de espacio de operadores.

Los conceptos de álgebras C^* y espacios de operadores están más relacionados que sólo por analogía, esto es, toda álgebra C^* se puede dotar de una estructura de espacio de operadores de forma canónica como se puede observar en el ejemplo 3.2.

La relación que existe entre espacios de Banach y espacios de operadores se puede ver en el ejemplo 3.3 donde se muestra que todo espacio de Banach se puede dotar de una estructura de espacio de operadores. Por otra parte, todo espacio de operadores es un espacio de Banach tal que sus espacios de matrices están relacionados según la definición 3.3.

Por lo dicho anteriormente, el concepto de espacios de operadores se puede concebir como una estructura intermedia entre espacios de Banach y álgebras C^* en el siguiente sentido, todo espacio de operadores es un espacio de Banach tal que sus espacios de matrices están relacionados según los axiomas R_1 y R_2 de la definición 3.3 (esto desde el punto de vista abstracto) y todo espacio de operadores es un subespacio de Banach de $B(H)$ al igual que las álgebras C^* pero con menos restricciones algebraicas, a saber, involución y composición de operadores (esto desde el punto de vista concreto).

Una vez establecido el concepto de espacio de operadores, en la definición 3.4 se expone el concepto de morfismo entre espacios de operadores. Éste se da en el contexto abstracto; de manera más precisa, se relacionan los espacios de matrices $M_n(V)$ y $M_n(W)$ para dos espacios de operadores V, W y para todo n natural. La noción de operador completamente acotado es el concepto adecuado de morfismo entre dos espacios de operadores, éste se obtiene al considerar las ampliaciones de un operador acotado de V en W. Una ampliación se obtiene al inducir un operador acotado de $M_n(V)$ en $M_n(W)$ de un operador acotado de V en W.

El capítulo 4 tiene como objetivo mostrar que los espacios de operadores forman una categoría, a saber, la categoría de espacios de operadores. Los objetos en esta categoría son obviamente los espacios de operadores, mientras que los morfismos están dados por los operadores completamente acotados. En particular se tiene que los subespacios, cocientes, productos, espacio dual y espacio conjugado de espacios de operadores, son espacios de operadores.

El capítulo 5 está totalmente dedicado a probar el teorema de Ruan.

Se sabe que los espacios de Hilbert son un caso particular e importante de los espacios de Banach. Dentro de las muchas caracterizaciones de espacios de Hilbert se puede encontrar la que habla de una isometría de un espacio de Banach con su anti-dual, ver proposición 6.1. En el último capítulo se muestra que existe un caso particular de espacios de operadores construido por Gilles Pisier en [7] que desempeña el papel de los espacios de Hilbert en forma análoga a dicha caracterización pero ahora en la categoría de espacios de operadores.

Índice general

Capítulo 1

Matrices y productos tensoriales

Como se verá en el capítulo 3, el concepto de espacio de operadores abstracto está dado a través de espacios de matrices con entradas en un espacio de Banach complejo. En este capítulo se establece la notación matricial que se usará a lo largo de todo el trabajo, además, se muestra que un espacio de matrices se puede identificar (a nivel de espacios vectoriales) con un producto tensorial de espacios vectoriales.

El concepto de espacio de operadores concreto se establece a partir del espacio de operadores acotados de un espacio de Hilbert H, denotado por $B(H)$. Se muestra que $B(H^n)$ se puede identificar con un espacio de matrices (y a su vez con un producto tensorial). Esta representación matrical de $B(H^n)$ motivará la definición de un espacio de operadores abstracto.

Finalmente, se define el espacio conjugado de un espacio vectorial complejo. La estructura vectorial del espacio conjugado caracteriza los espacios de Hilbert. En el capítulo 6 se dará el análogo a esta caracterización para espacios de operadores.

1.1. Espacios de matrices

Se denota por $M_{n,m}$ al espacio vectorial de matrices complejas de tamaño $n \times m$, en caso de tener $n = m$ simplemente se escribe M_n. Dado un espacio vectorial complejo V, se denota por $M_{n,m}(V)$ al espacio vectorial complejo de matrices con entradas en V, de tamaño $n \times m$, dotado de la suma usual de matrices y producto por escalares. La base canónica de M_n está dada por las matrices

$$\varepsilon_{ij}^{(n)} := \begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & 1 & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}$$

de tamaño $n \times n$, nulas salvo la entrada i, j de valor 1. Según sea el caso, por simplicidad en la notación se omite el superíndice (n). Dada una matriz $[\alpha_{ij}] \in M_n$ se tiene

$$[\alpha_{ij}] = \sum_{i,j} \alpha_{ij}\varepsilon_{ij}.$$

Para el caso en el que $[v_{ij}] \in M_n(V)$ es deseable tener una expresión análoga a la anterior, para ello se considera el producto tensorial $M_n \otimes V$.

Dados dos espacio vectoriales E, F se denota por $E \otimes F$ al producto tensorial de E con F. Por la propiedad universal para el producto tensorial, para cada transformación bilineal $\widetilde{T} : E \times F \to W$, con W espacio vectorial, existe una única transformación lineal $T : E \otimes F \to W$ tal que

$$T(e \otimes f) = \widetilde{T}(e, f).$$

Los espacios vectoriales $M_n(V)$ y $M_n \otimes V$ están relacionados como lo muestra la siguiente proposición.

Proposición 1.1. *$M_n(V)$ es isomorfo a $M_n \otimes V$ como espacio vectorial. De modo más general*

$$M_{n,m}(V) = M_{n,m} \otimes V.$$

Demostración
Se define

$$\begin{array}{rcl} \widetilde{\varphi} : M_n \times V & \to & M_n(V) \\ ([\alpha_{ij}], v) & \mapsto & [\alpha_{ij} v]. \end{array}$$

Esta aplicación es bilineal, luego por la propiedad universal del producto tensorial, existe una única transformación lineal φ que cumple

$$\begin{aligned} \varphi : M_n \otimes V &\rightarrow M_n(V) \\ [a_{ij}] \otimes v &\mapsto [a_{ij} v]. \end{aligned}$$

Por otro lado, se define ϕ de la siguiente manera

$$\begin{aligned} \phi : M_n(V) &\rightarrow M_n \otimes V \\ [v_{ij}] &\mapsto \sum_{i,j} \varepsilon_{ij} \otimes v_{ij}. \end{aligned}$$

La aplicación ϕ es lineal. Luego, para tensores elementales se tiene

$$\begin{aligned} \phi(\varphi([\alpha_{ij}] \otimes v)) &= \phi([\alpha_{ij} v]) \\ &= \sum_{i,j} \varepsilon_{ij} \otimes (\alpha_{ij} v) \\ &= \left(\sum_{i,j} \alpha_{ij} \varepsilon_{ij} \right) \otimes v \\ &= [\alpha_{ij}] \otimes v. \end{aligned}$$

Por otro lado

$$\begin{aligned} \varphi(\phi([v_{ij}])) &= \varphi\left(\sum_{i,j} \varepsilon_{ij} \otimes v_{ij} \right) \\ &= \sum_{i,j} \varphi(\varepsilon_{ij} \otimes v_{ij}) \\ &= \sum_{i,j} \begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & v_{ij} & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix} \\ &= [v_{ij}]. \end{aligned}$$

Se concluye de la linealidad de φ y de ϕ que $\phi = \varphi^{-1}$. Así $M_n(V)$ y $M_n \otimes V$ son isomorfos como espacios vectoriales. El isomorfismo ϕ permite identificar los espacios $M_n(V)$ y $M_n \otimes V$. Así, (con abuso de notación) podemos escribir

$$[v_{ij}] = \sum_{i,j} \varepsilon_{ij} \otimes v_{ij}$$

para todo $[v_{ij}] \in M_n(V)$. ■

Dada una matriz escalar $\alpha = [\alpha_{ij}] \in M_n$ y una matriz $v = [v_{ij}] \in M_n(V)$ se define el producto de α con v formalmente de la manera usual, es decir,

$$\begin{aligned} \alpha v &:= \begin{pmatrix} \alpha_{11} & \cdots & \alpha_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ \alpha_{n1} & \cdots & \alpha_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_{11} & \cdots & v_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ v_{n1} & \cdots & v_{nn} \end{pmatrix} \\ &= \left[\sum_k \alpha_{ik} v_{kj} \right]. \end{aligned}$$

Se definen $E_i^{(n)}$ las matrices renglón de longitud n, nulas salvo la entrada i de valor 1, es decir,

$$E_i^{(n)} := (0 \ldots 1 \ldots 0).$$

Si se tiene una matriz $v = [v_{ij}] \in M_n(V)$, entonces es posible obtener v_{ij} a partir de v de la siguiente manera

$$v_{ij} = E_i v E_j^t,$$

donde A^t denota la matriz transpuesta de la matriz A.

Finalmente para $\alpha = [\alpha_{ij}] \in M_n(V)$ y $\beta = [\beta_{ij}] \in M_m(V)$ se define

$$\alpha \oplus \beta = \begin{pmatrix} \alpha_{11} & \cdots & \alpha_{1n} & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ \alpha_{n1} & \cdots & \alpha_{nn} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & \beta_{11} & \cdots & \beta_{1m} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & \beta_{m1} & \cdots & \beta_{mm} \end{pmatrix} \in M_{n+m}(V).$$

Lo anterior se puede interpretar como una inclusión algebraica del espacio $M_n(V)$ en $M_{n+m}(V)$, via la transformación lineal

$$\alpha \mapsto \alpha \oplus 0_m,$$

donde 0_m es la matriz nula del espacio $M_m(V)$.

1.2. El espacio $B(H)$

Para un espacio de Hilbert H se puede considerar el espacio de operadores acotados de H en H, $B(H)$, o de manera más general, los espacios de operadores acotados de H^n en H^n, $B(H^n)$, donde $H^n = H \oplus \cdots \oplus H$ está dotado de la norma $\|\cdot\|_2$. Así como en el caso $B(\mathbb{C}^n)$, el espacio $B(H^n)$ tiene una estructura matricial, es decir, un operador $T : H^n \to H^n$ se puede representar mediante una matriz en el espacio $B(H)$. Esta idea se precisa en el siguiente teorema.

Teorema 1.1. *Sean H y K dos espacios de Hilbert, entonces*

$$M_n\left(B(H,K)\right) = B(H^n, K^n),$$

donde la igualdad significa isomorfismo de espacios vectoriales. De manera más general

$$M_{n,m}\left(B(H,K)\right) = B(H^m, K^n).$$

Demostración
Sean $[\alpha_{ij}] \in M_n$, y $T \in B(H,K)$. Se define una aplicación lineal de H^n en K^n, denotada por $[\alpha_{ij}T]$, a modo de producto matricial, es decir,

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} \alpha_{11}T & \cdots & \alpha_{1n}T \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \alpha_{n1}T & \cdots & \alpha_{nn}T \end{bmatrix} \begin{pmatrix} h_1 \\ \vdots \\ h_n \end{pmatrix} &:= \begin{pmatrix} \sum\limits_{j=1}^{n} \alpha_{1j}T(h_j) \\ \vdots \\ \sum\limits_{j=1}^{n} \alpha_{nj}T(h_j) \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} T(\sum\limits_{j=1}^{n} \alpha_{1j}h_j) \\ \vdots \\ T(\sum\limits_{j=1}^{n} \alpha_{nj}h_j) \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Con la finalidad de probar que $[\alpha_{ij}T]$ es un operador acotado, se estima la norma infinito

$$\begin{aligned}
\|[\alpha_{ij}T](h)\|_\infty &= \max_{1\le i\le n} \|T(\sum_{j=1}^{n} \alpha_{ij}h_j)\| \\
&\le \|T\| \max_{1\le i\le n} \sum_{j=1}^{n} \|\alpha_{ij}\|\|h_j\| \\
&\le \|T\| \max_{1\le i\le n} \sum_{j=1}^{n} \|\alpha_{ij}\|\|h\|_\infty \\
&= \|T\| \left(\max_{1\le i\le n} \sum_{j=1}^{n} \|\alpha_{ij}\| \right) \|h\|_\infty.
\end{aligned}$$

Ahora, por equivalencia de las normas $\|\cdot\|$ y $\|\cdot\|_\infty$ en K^n se consigue

$$\|[\alpha_{ij}T](h)\| \le a\|[\alpha_{ij}]T(h)\|_\infty \le a\|T\|M\|h\|_\infty \le a\|T\|M\|h\|$$

donde a es la constante de equivalencia de normas y

$$M = \max_{1\le i\le n} \sum_{j=1}^{n} \|\alpha_{ij}\|.$$

Considerando lo anterior, se define la aplicación bilineal $\widetilde{\varphi}$ como

$$\begin{aligned}
\widetilde{\varphi} : M_n \times B(H,K) &\rightarrow B(H^n, K^n) \\
([\alpha_{ij}], T) &\mapsto [\alpha_{ij}T].
\end{aligned}$$

Ahora, por la propiedad universal del producto tensorial, existe una transformación lineal φ, con

$$\begin{aligned}
\varphi : M_n \otimes B(H,K) &\rightarrow B(H^n, K^n) \\
[\alpha_{ij}] \otimes T &\mapsto [\alpha_{ij}T].
\end{aligned}$$

Por otro lado tomemos

$$\begin{array}{rcl} \psi : B(H^n, K^n) & \to & M_n \otimes B(H,K) \\ S = (S_1, ..., S_n) & \mapsto & \sum_{i,j} \varepsilon_{ij} \otimes S_{ij}, \end{array}$$

donde

$$\begin{array}{rcl} S_{ij} : H & \to & K \\ h & \mapsto & S_i(\overbrace{0, ..., h,}^{j} ..., 0). \end{array}$$

Luego

$$\begin{array}{rcl} \|S_{ij}(h)\| & = & \|S_i(0, \ldots, h, \ldots, 0)\| \\ & \leq & \|S(0, \ldots, h, \ldots, 0)\| \\ & \leq & \|S\| \|(0, \ldots, h, \ldots, 0)\| \\ & = & \|S\| \|h\|, \end{array}$$

es decir, $S_{ij} \in B(H, K)$.

Para $\alpha \otimes T = [\alpha_{ij}] \otimes T \in M_n \otimes B(H, K)$ se cumple

$$\begin{array}{rcl} \psi \circ \varphi(\alpha \otimes T) = \psi([\alpha_{ij} T]) & & \\ & = & \sum_{i,j} \varepsilon_{ij} \otimes ([\alpha_{ij} T])_{ij} \\ & = & \sum_{i,j} \varepsilon_{ij} \otimes (\alpha_{ij} T) \\ & = & \sum_{i,j} (\alpha_{ij} \varepsilon_{ij}) \otimes T \\ & = & \left(\sum_{i,j} \alpha_{ij} \varepsilon_{ij} \right) \otimes T \\ & = & \alpha \otimes T. \end{array}$$

Luego, de la linealidad de ψ y φ se concluye que $\psi \circ \varphi = I_{M_n \otimes B(H,K)}$.

Por otro lado para $S \in B(H^n, K^n)$ se tiene

$$\varphi \circ \psi(S) = \varphi\left(\sum_{i,j} \varepsilon_{ij} \otimes S_{ij}\right) = \sum_{i,j} \varphi(\varepsilon_{ij} \otimes S_{ij}).$$

Para $h = (h_1, \ldots, h_n) \in H^n$, se calcula

$$\varphi(\varepsilon_{ij} \otimes S_{ij})(h) = \begin{bmatrix} 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & S_{ij} & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} h_1 \\ \vdots \\ h_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ S_i(0, \ldots, h_j, \ldots 0) \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix},$$

así

$$\varphi \circ \psi(S)(h) = \sum_{i,j} \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ S_i(0, \ldots, h_j, \ldots 0) \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} =$$

$$\begin{pmatrix} S_1(h_1, 0, \ldots, 0) \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} S_1(0, h_2, 0, \ldots, 0) \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} + \cdots + \begin{pmatrix} S_1(0, \ldots, 0, h_n) \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$+$$

$$\vdots$$

$$+$$

$$\begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ S_n(h_1, 0, \ldots, 0) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ S_n(0, h_2, 0, \ldots, 0) \end{pmatrix} + \cdots + \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ S_n(0, \ldots, 0, h_n) \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} S_1(h_1, 0, \ldots, 0) \\ \vdots \\ S_n(h_1, 0, \ldots, 0) \end{pmatrix} + \cdots + \begin{pmatrix} S_1(0, \ldots, 0, h_n) \\ \vdots \\ S_n(0, \ldots, 0, h_n) \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} S_1(h) \\ \vdots \\ S_n(h) \end{pmatrix} = S(h),$$

o bien, $\varphi \circ \psi = I_{B(H^n K^n)}$. Se concluye entonces que $B(H^n, K^n)$ es isomorfo a $M_n \otimes B(H, K) = M_n(B(H, K))$. ■

Corolario 1.1. *Para H espacio de Hilbert*

$$M_n(B(H)) = B(H^n).$$

Habiendo identificado $M_n(B(H, K))$ con $B(H^n, K^n)$ como espacios vectoriales y dado que $B(H^n, K^n)$ es un espacio de Banach, se puede dotar a $M_n(B(H, K))$ de la norma de $B(H^n, K^n)$. En otras palabras, se define la norma de $T = [T_{ij}] \in M_n(B(H, K))$ como la norma que tiene considerado como operador de H^n en K^n.

Dada una familia de espacios de Hilbert $\{H_s\}_{s \in S}$, la suma directa

$$\bigoplus_{s \in S} H_s := \{(h_s)_{s \in S} \mid h_s = 0 \text{ salvo una cantidad finita } \}$$

es un espacio pre-Hilbert con el producto interno

$$\langle x \mid y \rangle := \sum_{s \in S} \langle x_s \mid y_s \rangle.$$

La completación del espacio normado correspondiente, denotada por el mismo símbolo, es un espacio de Hilbert que se puede identificar con

$$H := \left\{ (h_s)_{s \in S} \mid \sum_{s \in S} \|h_s\|^2 < \infty \right\},$$

dotado con la norma

$$\|x\| := \left(\sum_{s \in S} \|h_s\|^2 \right)^{\frac{1}{2}}.$$

Si se tiene otra familia de espacios de Hilbert $\{K_s\}_{s\in S}$, operadores

$$b_s : H_s \to K_s$$

con $\sup_{s\in S}\{\|b_s\|\} < \infty$ y se define $H := \bigoplus_{s\in S} H_s$, $K := \bigoplus_{s\in S} K_s$, la S-tupla $(b_s)_{s\in S}$ determina un operador lineal

$$\begin{array}{rcl} b : H & \to & K \\ (h_s)_{s\in S} & \mapsto & (b_s(h_s))_{s\in S}. \end{array}$$

El operador b así definido cumple

$$\|b\| = \sup_{s\in S} \|b_s\|,$$

pues

$$\begin{array}{rcl} \|b\| & = & \sup\limits_{h\in B_H} \|b(h)\| \\ & = & \sup\limits_{h\in B_H} \|(b_s(h_s))_{s\in S}\| \\ & = & \sup\limits_{h\in B_H} \left(\sum\limits_{s\in S} \|b_s(h_s)\|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \\ & \leq & \sup\limits_{h\in B_H} \left(\sum\limits_{s\in S} \|b_s\|^2 \|(h_s)\|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \\ & \leq & \sup\limits_{h\in B_H} \left(\sum\limits_{s\in S} \left(\sup\limits_{s\in S} \|b_s\| \right)^2 \|(h_s)\|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \\ & = & \left(\sup\limits_{s\in S} \|b_S\| \right) \sup\limits_{h\in B_H} \|h\| \\ & = & \sup\limits_{s\in S} \|b_S\|. \end{array}$$

Por otra parte para $t \in S$ y $l_t \in H_t$ con $\|l_t\| \leq 1$, se define $(h_s)_{s\in S}$ como $h_s = 0$ si $s \neq t$ y $h_t = l_t$, luego

$$\begin{aligned}
\|b_t(l_t)\| &\leq \sup_{s\in S}\|b_s(h_s)\| \\
&= \|b\left((h_s)_{s\in S}\right)\| \\
&\leq \|b\|\|(h_s)_{s\in S}\| \\
&\leq \|b\|.
\end{aligned}$$

De donde

$$\|b_t\| \leq \|b\| \qquad \forall t \in S,$$

y así

$$\sup_{s\in S}\|b_s\| \leq \|b\|,$$

por tanto

$$\|b\| = \sup_{s\in S}\|b_s\|.$$

Dados dos espacios de Hilbert H y K, el espacio vectorial $H \otimes K$ se puede dotar de un producto interno de la siguiente manera, para tensores elementales

$$\langle h_1 \otimes k_1 \mid h_2 \otimes k_2\rangle := \langle h_1 \mid h_2\rangle\, \langle k_1 \mid k_2\rangle.$$

Se define entonces

$$\left\langle \sum_{i=1}^{l} h_i \otimes k_i \mid \sum_{j=1}^{L} x_j \otimes y_j \right\rangle := \sum_{i=1}^{l}\sum_{j=1}^{L}\langle h_i \otimes k_i \mid x_j \otimes y_j\rangle.$$

Así $H \otimes K$ con $< \mid >$ es un espacio pre-Hilbert. Seguiremos denotando por $H \otimes K$ a la completación de este espacio.

Proposición 1.2. *Si se tienen H_1, H_2, K_1 y K_2 espacios de Hilbert y dos operadores lineales acotados $b_i : H_i \to K_i$, con $i = 1, 2$, el respectivo operador producto tensorial*

$$\begin{aligned} b_1 \otimes b_2 : H_1 \otimes H_2 &\rightarrow K_1 \otimes K_2 \\ x \otimes y &\mapsto b_1(x) \otimes b_2(y), \end{aligned}$$

cumple

$$\|b_1 \otimes b_2\| = \|b_1\| \|b_2\|.$$

Demostración
La demostración de esta proposición se puede encontrar en [5, p. 214] para el caso $H_1 = K_1$ y $H_2 = K_2$. Utilizando el caso mencionado, se prueba la proposición.

Si $x \in H_1$, $y \in H_2$ tienen norma menor o igual a uno, entonces $\|x \otimes y\| \leq 1$, así

$$\|b_1(x)\| \|b_2(y)\| = \|b_1 \otimes b_2(x \otimes y)\| \leq \|b_1 \otimes b_2\|,$$

tomando supremos sobre x y y se consigue

$$\|b_1\| \|b_2\| \leq \|b_1 \otimes b_2\|.$$

Por otro lado se definen

$$\begin{aligned} \widetilde{b_1} : H_1 \oplus K_1 &\rightarrow H_1 \oplus K_1 \\ h^1 \oplus k^1 &\mapsto 0 \oplus b_1(h^1) \end{aligned}$$

y

$$\begin{aligned} \widetilde{b_2} : H_2 \oplus K_2 &\rightarrow H_2 \oplus K_2 \\ h^2 \oplus k^2 &\mapsto 0 \oplus b_2(h^2). \end{aligned}$$

Se prueba sin dificultad que

$$\|\widetilde{b_i}\| = \|b_i\|$$

con $i = 1, 2$.

Utilizando el resultado mencionado, se obtiene

$$\|\widetilde{b_1} \otimes \widetilde{b_2}\| = \|\widetilde{b_1}\|\|\widetilde{b_2}\| = \|b_1\|\|b_2\|.$$

Resta probar que $\|b_1 \otimes b_2\| \leq \|\widetilde{b_1} \otimes \widetilde{b_2}\|$. Sea pues

$$\sum_{i=1}^{l} h_i^1 \otimes h_i^2 \in H_1 \otimes H_2.$$

El elemento

$$\sum_{i=1}^{l} \left(h_i^1 \oplus 0\right) \otimes \left(h_i^2 \oplus 0\right) \in (H_1 \oplus K_1) \otimes (H_2 \oplus K_2),$$

tiene la misma norma que $\sum_{i=1}^{l} h_i^1 \otimes h_i^2 \in H_1 \otimes H_2$.
Desarrollando se obtiene

$$\left\|\widetilde{b_1} \otimes \widetilde{b_2}\left(\sum_{i=1}^{l} \left(h_i^1 \oplus 0\right) \otimes \left(h_i^2 \oplus 0\right)\right)\right\| = \left\|b_1 \otimes b_2\left(\sum_{i=1}^{l} h_i^1 \otimes h_i^2\right)\right\|.$$

de donde

$$\|b_1 \otimes b_2\| \leq \|\widetilde{b_1} \otimes \widetilde{b_2}\|.$$

El operador $b_1 \otimes b_2$ se puede extender a la completación $H_1 \otimes H_2$ con la misma norma. ■

Dados dos espacios de Hilbert H, K y dos operadores

$$\begin{aligned} T : H^n &\rightarrow K^n \\ L : H^m &\rightarrow K^m, \end{aligned}$$

podemos considerar el respectivo operador suma directa dado por

$$\begin{aligned} T \oplus L : H^n \quad \oplus \quad H^m &\to K^n \oplus K^m \\ x \quad \oplus \quad y \quad &\mapsto T(x) \oplus L(y). \end{aligned}$$

El operador $T \oplus L$ cumple lo siguiente

$$\|T \oplus L\| = \text{máx}\{\|T\|, \|L\|\}.$$

Una matriz $\alpha = [\alpha_{ij}] \in M_{n,m}$ se puede considerar como un operador de K^m en K^n de la siguiente manera

$$\alpha : K^m \to K^n$$

$$(k_1, ..., k_m) \mapsto \begin{bmatrix} \alpha_{11} & \cdots & \alpha_{1m} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \alpha_{n1} & \cdots & \alpha_{nm} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} k_1 \\ \vdots \\ k_m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sum\limits_{j=1}^{m} \alpha_{1j} k_j \\ \vdots \\ \sum\limits_{j=1}^{m} \alpha_{nj} k_j \end{pmatrix},$$

es decir, a modo de producto matricial de la matriz α con la matriz columna formada por $(k_1, ..., k_m)$.

A continuación se prueba que la norma de la matriz α considerada como operador de $\mathbb{C}^m$ en $\mathbb{C}^n$ coincide con la norma de α considerada como operador de K^m en K^n. Para ello se utiliza el producto tensorial $\alpha \otimes I_K$ interpretado de dos maneras, a saber, como elemento de $M_{n,m} \otimes B(K)$ y como operador de $\mathbb{C}^m \otimes H$ en $\mathbb{C}^n \otimes H$ (ver prop 1.2).

Tomando a $\alpha \otimes I_K \in M_{n,m} \otimes B(K) = B(K^m, K^n)$, se tiene,

$$\alpha \otimes I_K(k_1, ..., k_m) = \begin{pmatrix} \alpha_{11} I_K & \cdots & \alpha_{1m} I_K \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \alpha_{n1} I_K & \cdots & \alpha_{nm} I_K \end{pmatrix} \begin{pmatrix} k_1 \\ \vdots \\ k_m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sum\limits_{j=1}^{m} \alpha_{1j} k_j \\ \vdots \\ \sum\limits_{j=1}^{m} \alpha_{nj} k_j \end{pmatrix},$$

es decir, la matriz α y el tensor $\alpha \otimes I_K$ corresponden al mismo operador de K^m en K^n. Por lo tanto

$$\|\alpha\|_{B(K^m,K^n)} = \|\alpha \otimes I_K\|_{B(K^m,K^n)}.$$

Si se toma a α como operador de $\mathbb{C}^m$ en $\mathbb{C}^n$, entonces

$$\alpha \otimes I_K : \mathbb{C}^m \otimes K \to \mathbb{C}^n \otimes K.$$

Por la proposición 1.2 se tiene

$$\|\alpha \otimes I_K\|_{B(\mathbb{C}^m\otimes K,\mathbb{C}^n\otimes K)} = \|\alpha\|_{M_{n,m}}\|I_K\| = \|\alpha\|_{M_{n,m}}.$$

Los espacios $\mathbb{C}^m \otimes K$ y K^m son isométricos vía

$$\begin{array}{rcl} \eta^m : \mathbb{C}^m \otimes K & \to & K^m \\ \displaystyle\sum_{i=1}^{l} c^i \otimes k_i & \mapsto & \left(\displaystyle\sum_{i=1}^{l} c_1^i k_i, \ldots, \sum_{i=1}^{l} c_m^i h_i\right), \end{array}$$

donde $\sum_{j=1}^{m} c_j^i e_j$ es la expresión de c^i en la base canónica de $\mathbb{C}^m$. Análogamente se construye η^n.

Por simple evaluación se prueba que el siguiente diagrama es conmutativo

$$\begin{array}{ccccc} & & \alpha \otimes I_K & & \\ & \mathbb{C}^m \otimes K & \longrightarrow & \mathbb{C}^n \otimes K & \\ \eta^m & \downarrow & & \downarrow & \eta^n \\ & K^m & \longrightarrow & K^n & \\ & & \alpha \otimes I_K & & \end{array} .$$

Por lo tanto

$$\|\alpha \otimes I_K\|_{B(\mathbb{C}^m\otimes I_K,\mathbb{C}^n\otimes I_K)} = \|\alpha \otimes I_K\|_{B(K^m,K^n)}.$$

Es decir, se cumple

$$\|\alpha\|_{B(\mathbb{C}^m,\mathbb{C}^n)} = \|\alpha\|_{B(K^m,K^n)}.$$

Si ahora se tiene $T = [T_{ij}] \in M_m(B(H,K)) = B(H^m, K^m)$, se puede calcular el producto matricial αT, lo cual da lugar a un operador de H^m en K^n.

Dado que α corresponde al operador $\alpha \otimes I_K$, se tiene la igualdad de operadores

$$\alpha T = (\alpha \otimes I_K)T.$$

Análogamente, para $\beta \in M_{m,n}$

$$T\beta = T(\beta \otimes I_H),$$

con I_H el operador identidad en H.

Se tiene entonces

$$\|\alpha T \beta\| = \|(\alpha \otimes I_K)T(\beta \otimes I_H)\| \leq \|\alpha\|\|T\|\|\beta\|.$$

Sean $T = [T_{ij}] \in M_n(B(H,K))$, $L = [L_{ij}] \in M_m(B(H,K))$, y denotemos por $\widetilde{T}$ y $\widetilde{L}$, los operadores correspondientes. La matriz $[T_{ij}] \oplus [L_{ij}]$ corresponde al operador $\widetilde{T} \oplus \widetilde{L}$, pues

$$\left(\widetilde{T} \oplus \widetilde{L}\right)_i (\overbrace{0, \ldots, h}^{j}, \ldots, 0) = \begin{cases} T_{ij}(h) & 1 \leq i,j \leq n \\ L_{ij}(h) & 1 \leq i+n, j+n \leq m \\ 0 & \text{de otro modo} \end{cases}$$

para todo $h \in H$, de donde,

$$\begin{aligned} \widetilde{T} \oplus \widetilde{L} &= \sum_{i,j} \varepsilon_{ij}^{(n+m)} \otimes \left(\widetilde{T} \otimes \widetilde{L}\right)_{ij} \\ &= \sum_{i,j}^{n} \varepsilon_{ij}^{(n+m)} \otimes T_{ij} + \sum_{i,j}^{m} \varepsilon_{i+n,j+n}^{(n+m)} \otimes L_{ij} \\ &= [T_{ij}] \oplus [L_{ij}], \end{aligned}$$

luego,

$$\|T \oplus L\| = \text{máx}\{\|T\|, \|L\|\}.$$

Los resultados obtenidos prueban el siguiente teorema.

Teorema 1.2. *Sean H y K espacios de Hilbert, entonces*

i) $\|\alpha T \beta\| \leq \|\alpha\| \|T\| \|\beta\| \qquad \alpha \in M_{n,m}, T \in M_m(B(H,K)), \beta \in M_{m,n}.$

ii) $\|T \oplus L\| = \text{máx}\{\|T\|, \|L\|\} \qquad T \in M_n(B(H,K)), L \in M_m(B(H,K)).$

Como se verá en el capítulo 3, este último teorema prueba que $B(H)$ es un espacio de operadores abstracto.

1.3. Espacio conjugado

Dado un espacio vectorial complejo V, se define **un espacio conjugado de** V como una pareja (W, J) con W un espacio de vectorial complejo y $J : V \to W$ un isomorfismo conjugado, esto es, además de ser J biyectiva,

$$\begin{aligned} J(x + y) &= J(x) + J(y) \\ J(\lambda y) &= \bar{\lambda} J(y). \end{aligned}$$

En caso de que (W, J) sea un espacio conjugado de V se dice simplemente que W es un espacio conjugado de V.

Para todo espacio vectorial complejo V existe un espacio conjugado, a saber, $\overline{V}$, el mismo espacio vectorial V pero dotado del producto por escalares definido por

$$\lambda \cdot v := \bar{\lambda} v$$

y el isomorfismo conjugado identidad

$$\begin{array}{rcl} J : V & \to & \overline{V} \\ v & \mapsto & v. \end{array}$$

En efecto, basta notar que

$$\begin{array}{rcl} J(v+\lambda w) & := & v+\lambda w \\ & = & v+\overline{\overline{\lambda}}w \\ & = & v+\overline{\lambda}\cdot w \\ & = & J(v)+\overline{\lambda}\cdot J(w). \end{array}$$

Un elemento $v \in V$, pensado en $\overline{V}$ se denota por $\overline{v}$. Con tal notación se tiene $J(v) = \overline{v}$, o bien

$$\overline{v+\lambda w} = \overline{v} + \overline{\lambda}\cdot\overline{w}.$$

A continuación se prueba que dado un espacio vectorial complejo V, el espacio conjugado $\overline{V}$ es único salvo isomorfismos.

Proposición 1.3. *Sea V un espacio vectorial complejo, entonces cualesquiera dos espacios conjugados de V son isomorfos.*

Demostración
Sean (W, J) y (W', J') dos espacios conjugados de V, basta definir

$$\begin{array}{rcl} \phi : W & \to & W' \\ w & \mapsto & J'\left(J^{-1}w\right). \end{array}$$

Claramente ϕ es una función biyectiva pues pues J' y J^{-1} lo son. Además

$$\begin{array}{rcl} \phi(w+\lambda z) & = & J'\left(J^{-1}(w+\lambda z)\right) \\ & = & J'\left(J^{-1}(w)+\overline{\lambda}J^{-1}(z)\right) \\ & = & J'\left(J^{-1}(w)\right)+\overline{\overline{\lambda}}J'\left(J^{-1}(z)\right) \\ & = & \phi(w)+\lambda\phi(z). \blacksquare \end{array}$$

Por la proposición anterior, podemos concluir que $\overline{V}$ es el único espacio conjugado de V salvo isomorfismos.

En caso de tener un espacio de Banach complejo V, el espacio vectorial $\overline{V}$ se puede normar con la norma de V, así, $\overline{V}$ es un espacio de Banach y la aplicación $v \mapsto \overline{v}$ preserva normas.

Sea E un espacio de Banach complejo, se define

$$A_E := \{f : E \to \mathbb{C} \mid f \text{ es anti-lineal y continua}\}$$

donde anti-lineal significa

$$\begin{aligned} f(x+y) &= f(x) + f(y) \\ f(\lambda y) &= \overline{\lambda} f(y). \end{aligned}$$

Dotando a A_E de la suma usual de funciones y producto por escalares, se obtiene que A_E es un espacio vectorial complejo.

Dado un elemento $f \in E^*$ se define

$$\begin{aligned} \overline{f} : E &\to \mathbb{C} \\ x &\mapsto \overline{f(x)}. \end{aligned}$$

Claramente $\overline{f}$ es continua, además

$$\begin{aligned} \overline{f}(x+\lambda y) &= \overline{f(x+\lambda y)} \\ &= \overline{f(x)+\lambda f(y)} \\ &= \overline{f(x)} + \overline{\lambda}\, \overline{f(y)} \\ &= \overline{f}(x) + \overline{\lambda}\, \overline{f}(y), \end{aligned}$$

es decir, $f \in A_E$.Se define ahora

$$\begin{aligned}\phi : E^* &\rightarrow A_E \\ f &\mapsto \overline{f}.\end{aligned}$$

Se afirma que ϕ es un isomorfismo conjugado. Es claro que ϕ es inyectiva. Para ver que es sobre, sea $g \in A_E$, definiendo $\widetilde{g} : E \rightarrow \mathbb{C}$ por

$$\widetilde{g}(x) := \overline{g(x)}$$

se tiene que $\phi\left(\widetilde{g}\right) = g$.

De la linealidad de la conjugación compleja se obtiene

$$\phi(f+g) = \phi(f) + \phi(g).$$

A continuación se prueba que $\phi(\lambda f) = \overline{\lambda}\,\phi(f)$. Se cumple

$$\begin{aligned}\overline{(\lambda f)}(x) &= \overline{(\lambda f)\,(x)} \\ &= \overline{\lambda f(x)} \\ &= \overline{\lambda}\,\overline{f(x)} \\ &= \overline{\lambda}\,\overline{f}(x)\end{aligned}$$

para cada $x \in E$, de donde se concluye que ϕ es un isomorfismo conjugado, luego de la unicidad del espacio conjugado, se obtiene $\overline{E^*} = A_E$ como espacios vectoriales. Se consigue que A_E tenga estructura de espacio de Banach si se dota de la norma de $\overline{E^*}$. El espacio $\overline{E^*}$ recibe el nombre de espacio anti-dual de E, y como se ha visto, se puede considerar como el espacio de Banach complejo de funciones anti-lineales de E en $\mathbb{C}$.

En caso de tener dos espacios vectoriales V, W y una transformación lineal $T : V \rightarrow W$ se puede definir una transformación lineal por

$$\begin{aligned}\overline{T} : \overline{V} &\rightarrow \overline{W} \\ \overline{v} &\mapsto \overline{T(v)}.\end{aligned}$$

Por otro lado, se puede definir la transformación anti-lineal

$$\begin{aligned} T' : V &\rightarrow \overline{W} \\ v &\mapsto \overline{T(v)}. \end{aligned}$$

Se tiene que $T' = \overline{T} \circ I$ con I el mapeo identidad conjugado de V en $\overline{V}$.

Capítulo 2

Álgebras C^*

En el presente capítulo se da la definición de álgebra C^* y se muestra que la norma en un álgebra C^* A está determinada de manera única por la involución de A. Como se verá en el siguiente capítulo, la unicidad de la norma en un álgebra C^* A permitirá dotar de una estructura de espacio de operadores de forma canónica a A.

Es inmediato de la definición, que todo espacio $B(H)$ es un álgebra C^*, a su vez, el teorema de Gelfand-Naimark afirma que toda álgebra C^* es subespacio de algún $B(H)$. Como se explica más adelante, la teoría de espacios de operadores surge de modo análogo, de forma concreta y abstracta gracias al teorema de Ruan.

Empezaremos con un repaso de definiciones previas acerca de álgebras.

Definición 2.1. *Un espacio vectorial complejo E, es un* ***álgebra*** *si está dotado de un producto $(x, y) \mapsto xy$, de $E \times E$ en E que cumple*

i) $(x + y)z = xz + yz \qquad \forall x, y, z \in E.$

ii) $x(y + z) = xy + xz \qquad \forall x, y, z \in E.$

iii) $\lambda(xy) = x(\lambda y) = (xy)\lambda \qquad \forall x, y \in E, \lambda \in \mathbb{C}.$

Se dice que E tiene elemento identidad si existe $e \in E$ tal que

$$ex = xe = e \qquad\qquad \forall\, x \in E.$$

*Si además, E es un espacio normado, se dice que E es un **álgebra normada**.*

Definición 2.2. *Una **involución** en un álgebra E, es una aplicación $*: E \to E$ que cumple*

i) $(x+y)^* = x^* + y^*$.

ii) $(\lambda x)^* = \overline{\lambda} x^*$.

iii) $(x^*)^* = x$.

iv) $(xy)^* = y^* x^*$.

*Se dice que E es un **álgebra involutiva normada**, si E es un algebra normada con una involución tal que*

$$\|x^*\| = \|x\| \qquad \forall x \in E.$$

Definición 2.3. *Un espacio de Banach complejo E es un **álgebra de Banach**, si E es un álgebra normada completa tal que*

$$\|xy\| \leq \|x\|\|y\| \qquad \forall x, y \in E.$$

*Si E es un álgebra involutiva normada además de ser un álgebra de Banach, se dice que E es un **álgebra involutiva de Banach**.*

Con ayuda de los conceptos anteriores se define un álgebra C^* de la siguiente manera.

Definición 2.4. *Un **álgebra** C^* es un álgebra involutiva de Banach A, que cumple*

$$\|x^*x\| = \|x\|^2,$$

para todo $x \in A$.

Ejemplo 2.1. *Sea K un espacio topológico compacto, entonces el espacio de funciones continuas de K en $\mathbb{C}$, $C(K)$, es un álgebra C^*.*

Como caso particular, tómese como E un espacio de Banach, luego por el teorema de Banach-Alaoglu (B_{E^*}, w^*) es un espacio topológico compacto. Así $C(B_{E^*}, w^*)$ es un álgebra C^*, además E se encaja de manera canónica e isométrica en $C(B_{E^*}, w^*)$ bajo el encaje

$$\begin{array}{rcl} E & \hookrightarrow & C(B_{E^*}, w^*) \\ x & \mapsto & f_x. \end{array}$$

donde

$$\begin{array}{rcl} f_x : E^* & \to & \mathbb{C} \\ x^* & \mapsto & x^*(x). \end{array}$$

Teorema 2.1. *Sea H un espacio de Hilbert, entonces el espacio de operadores lineales y continuos de H en H, $B(H)$, es un álgebra C^*. De hecho, cada subespacio cerrado bajo todas las operaciones algebraicas, involución, composición y cerrado bajo la norma, es un álgebra C^*.*

Demostración
Basta recordar que la función $T \mapsto T^*$ es una involución en $B(H)$ y que si $T \in B(H)$ entonces

$$\|T\|^2 = \|TT^*\|. \blacksquare$$

Definición 2.5. *Sean A y B dos álgebras involutivas. Un morfismo (isomorfismo) de A en B es una función $\pi : A \to B$ (biyectiva) tal que*

i) $\pi(x + y) = \pi(x) + \pi(y)$.

ii) $\pi(\lambda x) = \lambda \pi(x)$.

iii) $\pi(xy) = \pi(x)\pi(y)$.

iv) $\pi(x^*) = \pi(x)^*$.

para todo $x, y \in E$ *y* $\lambda \in \mathbb{C}$.

La siguiente proposición muestra que todo morfismo entre álgebras C^* es continuo.

Proposición 2.1. *Sean A un álgebra involutiva de Banach con identidad, B un álgebra C^* con identidad y π un morfismo de álgebras involutivas de A en B, entonces*

$$\|\pi(a)\| \leq \|a\| \qquad \forall a \in A.$$

Demostración
La demostración de esta proposición se puede encontrar en [3, p 9]. ■

Si A es un álgebra C^* con identidad y $|||\cdot|||$ es otra norma en A que satisface

$$|||a|||^2 = |||aa^*|||$$

entonces $|||\cdot|||$ es idéntica a la norma de A. Para ello basta considerar el morfismo identidad en A

$$\begin{array}{rcl} I_A : (A, \|\cdot\|) & \to & (A, |||\cdot|||) \\ a & \mapsto & a, \end{array}$$

luego, por el resultado anterior

$$|||a||| \leq \|a\| \qquad \forall a \in A,$$

y de manera análoga

$$\|a\| \leq |||a||| \qquad \forall a \in A.$$

Este hecho garantiza que la norma en un álgebra C^* con identidad esta determinada de manera única por la involución de A.

Se puede probar sin dificultad que si se tiene un álgebra involutiva A sin elemento identidad, entonces se puede construir un álgebra involutiva $\widetilde{A}$ con identidad de modo que A sea una subálgebra involutiva de $\widetilde{A}$, es decir, todas las operaciones algebraicas de $\widetilde{A}$ restringidas a A coinciden con las operaciones algebraicas de A. En efecto, se toma $\widetilde{A} = \mathbb{C} \oplus A$ con su estructura usual de espacio vectorial, con el producto dado por

$$(\alpha, x) \cdot (\beta, y) = (\alpha\beta, \alpha y + \beta x + xy) \qquad \forall\ (\alpha, x), (\beta, y) \in \mathbb{C} \oplus A,$$

e involución

$$(\alpha, x)^* = (\overline{\alpha}, x^*) \qquad \forall\ (\alpha, x) \in \mathbb{C} \oplus A.$$

En caso de ser A un álgebra involutiva normada, entonces se puede normar $\widetilde{A}$ de diversas manera para ser un álgebra involutiva normada. Como ejemplo considere la norma

$$\|(\alpha, x)\| := |\alpha| + \|x\| \qquad \forall\ (\alpha, x) \in \widetilde{A}.$$

A su vez, si A es un álgebra de Banach, entonces $\widetilde{A}$ es un álgebra de Banach con la estructura antes construida. De hecho existen diversas normas que se pueden definir en $\widetilde{A}$ para dotarlo de una estructura de álgebra de Banach.

El objetivo que se persigue ahora es probar que toda álgebra C^* se puede considerar como un álgebra C^* con identidad. El siguiente resultado ayudará a normar el álgebra involutiva $\widetilde{A}$ de modo que se obtenga una estructura de álgebra C^*.

Sea A un álgebra C^*, entonces, para cada $x \in A$

$$\|x\| = \sup_{\|y\| \leq 1} \|xy\|.$$

En efecto, si $y \in A$ es tal que $\|y\| \leq 1$, entonces

$$\|xy\| \leq \|x\|\ \|y\| \leq \|x\|,$$

de donde

$$\sup_{\|y\| \leq 1} \|xy\| \leq \|x\|.$$

Por otro lado, el elemento z en A definido por

$$z := \frac{1}{\|x\|}\ x^*$$

cumple $\|z\| = 1$, luego

$$\|x\| = \frac{\|x\|^2}{\|x\|} = \frac{\|xx^*\|}{\|x\|} = \|xz\| \leq \sup_{\|y\|\leq 1} \|xy\|.$$

Proposición 2.2. *Sea A un álgebra C^* (sin identidad) y $\widetilde{A}$ el álgebra involutiva que se obtiene de A al agregar un elemento identidad. Entonces, la norma de A se puede extender de una única manera para obtener una estructura de álgebra C^* en $\widetilde{A}$.*

Demostración
La demostración completa se puede encontrar en [3, p 10]. La unicidad de la norma se obtiene de las conclusiones a la proposición 2.1, es decir, de la unicidad de la norma en las álgebras C^* con identidad. A continuación, sólo se presenta la norma con la que se dota a $\widetilde{A}$. Con anterioridad se probó que todo elemento x de A cumple

$$\|x\| = \sup_{\|y\|\leq 1} \|xy\|.$$

Se define entonces

$$\|(\alpha, x)\| = \sup_{y\in B_A} \|\alpha y + xy\|. \blacksquare$$

2.1. Teorema de Gelfand-Naimark

Definición 2.6. *Sea E un álgebra involutiva y H un espacio de Hilbert. Una representación de E en H es un morfismo de E en el álgebra involutiva $B(H)$.*

El siguiente resultado se conoce como teorema de Gelfand-Naimark y es de vital importancia en la teoría de álgebras C^* pues garantiza que toda álgebra C^* tiene al menos una representación.

Teorema 2.2. *Sea A un álgebra C^*. Entonces existe un espacio de Hilbert H y un morfismo (de álgebras involutivas) $\pi : A \to B(H)$ tal que π es una isometría.*

La demostración de este teorema se puede encontrar en [3, p 45]. ∎

Como se verá en el siguiente capítulo, con ayuda del teorema de Gelfand-Naimark se puede probar que si A es un álgebra C^*, entonces los espacios de matrices $M_n(A)$ se pueden normar de manera que cumplen

$$i) \quad \|\alpha a \beta\| \leq \|\alpha\|\|a\|\|\beta\| \qquad \alpha \in M_{n,m}, a \in M_m(A), \beta \in M_{m,n}$$

$$ii) \quad \|a \oplus b\| = \text{máx}\{\|a\|, \|b\|\} \qquad a \in M_n(A), b \in M_m(A),$$

tal hecho garantiza que toda álgebra C^* es un espacio de operadores.

Capítulo 3

Espacios de operadores

El objetivo del presente capítulo es establecer la definición de un espacio de operadores. Como se verá a continuación, un espacio de operadores concreto es un subespacio de Banach de algún $B(H)$. Por otra parte se define un espacio de operadores abstracto V como un espacio de Banach con ciertas propiedades en los espacios de matrices $M_n(V)$.

Se comparan las definiciones de espacios de operadores (concretos y abstractos) y se establece que todo espacio de operadores concreto es abstracto. Se enuncia el teorema de Ruan que garantiza que todo espacio de operadores abstracto es concreto. La demostración del teorema de Ruan se encuentra en el capítulo 5.

Se definen los operadores completamente acotados que serán los morfismos de la categoría de espacios de operadores, se definen además las isometrías completas. Se prueban las propiedades básicas de los operadores completamente acotados.

Se exponen ejemplos de espacios de operadores. Dentro de los ejemplos se prueba que toda álgebra C^* se puede dotar de una estructura de espacio de operadores, al igual que los espacios de Banach. Un espacio de Banach se puede dotar de múltiples estructuras de espacios de operadores. Se expone como ejemplo las estructuras de espacio de operadores renglón y columna con las que se puede dotar a un espacio de Hilbert.

3.1. Espacios de operadores concretos y abstractos

Empezamos con la definición de espacio de operadores concreto.

Definición 3.1. *Se dice que V es un* ***espacio de operadores concreto****, si V es un subespacio cerrado de $B(H)$, para algún espacio de Hilbert H.*

Dentro de la bibliografía acerca de espacios de operadores se puede encontrar la siguiente definición.

Definición 3.2. *Se dice que un espacio vectorial complejo V, es un* ***espacio de operadores concreto*** *si V es subespacio cerrado de algún álgebra C^*.*

Las definiciones anteriores son equivalentes, pues si se tiene que V es un subespacio cerrado de un álgebra C^*, entonces por el teorema de Gelfand-Naimark, V es isomorfo (e isométrico) a un subespacio cerrado de $B(H)$, donde H es el espacio de Hilbert del teorema de Gelfand-Naimark.

Por otra parte, si V es un subespacio cerrado de $B(H)$ con H espacio de Hilbert, entonces V es un subespacio cerrado del álgebra C^*, $B(H)$.

A continuación se definen los espacios de operadores abstractos.

Definición 3.3. *Considere un espacio vectorial complejo V. Suponga que cada espacio $M_n(V)$ está dotado de una norma $\|\cdot\|_n$. Se dice que V es un* ***espacio vectorial matricialmente normado****, si la sucesión de normas $\{\|\cdot\|_n\}$ cumple lo siguiente*

R_1 $\quad \|\alpha x\beta\|_m \leq \|\alpha\|\|x\|_n\|\beta\| \qquad \alpha \in M_{n,m}, x \in M_m(V), \beta \in M_{m,n}.$

R_2 $\quad \|x \oplus y\|_{n+m} = \text{máx}\{\|x\|_n, \|y\|_m\} \qquad x \in M_n(V), y \in M_m(V).$

Se dirá que V es un ***espacio de operadores abstracto*** *si V es un espacio matricialmente normado tal que V con la norma $\|\cdot\|_1$ es completo.*

Por simplicidad en la notación, en adelante se omite el subíndice de $\|\cdot\|_n$.

Antes de comparar las definiciones de espacios de operadores concretos y abstractos, se establecen algunos hechos acerca de la definición de espacio de operadores abstracto.

La siguiente proposición establece cotas para las posibles normas con las que se puede dotar a $M_n(V)$ para tener una estructura de espacio de operadores en V.

Proposición 3.1. *Sea V un espacio de operadores abstracto, entonces*

$$\max_{i,j} \|v_{ij}\| \leq \|v\| \leq \sum_{i,j} \|v_{ij}\| \qquad \forall\, v = [v_{ij}] \in M_n(V).$$

Demostración
Por el axioma R_1 se tiene

$$\begin{aligned} \|v_{ij}\| &= \|E_i v E_j^t\| \\ &\leq \|E_i\|\|v\|\|E_j^t\| \\ &\leq \|v\|, \end{aligned}$$

de donde

$$\max_{i,j} \|v_{ij}\| \leq \|v\|.$$

Por otro lado, por desigualdad del triángulo

$$\begin{aligned} \|v\| &= \left\| \sum_{i,j} \varepsilon_{ij} \otimes v_{ij} \right\| \\ &\leq \sum_{i,j} \|\varepsilon_{ij} \otimes v_{ij}\| \\ &= \sum_{i,j} \left\| \begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & v_{ij} & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix} \right\|. \end{aligned}$$

Aplicando dos veces el axioma R_2 se consigue

$$\begin{aligned}
\left\|\begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & v_{ij} & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}\right\| &= \left\|0_{i-1,j-1} \oplus \begin{pmatrix} v_{ij} & \cdots & 0 \\ \vdots & 0 & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}\right\| \\
&= \left\|\begin{pmatrix} v_{ij} & \cdots & 0 \\ \vdots & 0 & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}\right\| \\
&= \|v_{ij} \oplus 0_{i+1,j+1}\| \\
&= \|v_{ij}\|. \blacksquare
\end{aligned}$$

Se puede notar además que si se tienen dos sucesiones de normas $\{\|\cdot\|_n\}$ y $\{\|\cdot\|'_n\}$, tales que V es un espacio de operadores abstracto con cada sucesión, y $\|\cdot\|_1$ es equivalente a $\|\cdot\|'_1$ con constante de equivalencia K, entonces $\|\cdot\|_n$ y $\|\cdot\|'_n$ son equivalentes para cada $n \in \mathbb{N}$. En efecto, si $v = [v_{ij}] \in M_n(V)$, entonces

$$\begin{aligned}
\|v\|'_n &\leq \sum_{i,j} \|v_{ij}\|'_1 \\
&\leq K \sum_{i,j} \|v_{ij}\|_1 \\
&\leq K \sum_{i,j} \|v\|_n \\
&= Kn^2 \|v\|_n.
\end{aligned}$$

Volviendo a la definición de un espacio de operadores abstracto, los axiomas R_1 y R_2 son equivalentes a los siguientes pares de axiomas

$$\begin{array}{lll}
R'_1 & \|\alpha x \beta\| \leq \|\alpha\|\|x\|\|\beta\| & \alpha \in M_n, x \in M_n(V), \beta \in M_n. \\
R_2 & \|x \oplus y\| = \text{máx}\{\|x\|, \|y\|\} & x \in M_n(V), y \in M_m(V).
\end{array}$$

o bien

$$\begin{array}{lll}
R_1 & \|\alpha x \beta\| \leq \|\alpha\|\|x\|\|\beta\| & \alpha \in M_{n,m}, x \in M_m(V), \beta \in M_{m,n}. \\
R'_2 & \|x \oplus y\| \leq \text{máx}\{\|x\|, \|y\|\} & x \in M_n(V), y \in M_m(V).
\end{array}$$

A continuación se prueban tales equivalencias, el esquema de la prueba es $(R_1, R_2) \Rightarrow (R_1', R_2) \Rightarrow (R_1, R_2')$.

De manera evidente si se cumplen R_1 y R_2 entonces se cumplen R_1' y R_2.

Suponga que se cumplen R_1' y R_2, veamos que se cumple R_1. Para $\alpha \in M_{n,m}$, $x \in M_m(V)$ y $\beta \in M_{m,n}$ con $n < m$, se tiene que

$$(\alpha x \beta) \oplus 0 = \widehat{\alpha} x \widehat{\beta},$$

donde

$$\begin{aligned}
\widehat{\alpha} &:= \begin{pmatrix} \alpha_{11} & \cdots & \alpha_{1n} & \alpha_{1n+1} & \cdots & \alpha_{1m} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ \alpha_{n1} & \cdots & \alpha_{nn} & \alpha_{nn+1} & \cdots & \alpha_{nm} \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix} \\
\widehat{\beta} &:= \begin{pmatrix} \beta_{11} & \cdots & \beta_{1n} & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ \beta_{n1} & \cdots & \beta_{nn} & 0 & \cdots & 0 \\ \beta_{n+11} & \cdots & \beta_{n+1n} & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ \beta_{m1} & \cdots & \beta_{mn} & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix},
\end{aligned}$$

de modo que $\widehat{\alpha}$, $\widehat{\beta} \in M_m$, así

$$\begin{aligned}
\|\alpha x \beta\| &= \|(\alpha x \beta) \oplus 0\| = \|\widehat{\alpha} x \widehat{\beta}\| \\
&\leq \|\widehat{\alpha}\| \|x\| \|\widehat{\beta}\| \\
&= \|\alpha\| \|x\| \|\beta\|.
\end{aligned}$$

De manera completamente análoga se hace el caso $m < n$. Así, se cumplen R_1 y R_2'.

Suponga que se cumplen R_1 y R_2', veamos que se cumple R_2. Dados $x \in M_n(V)$, $y \in M_m(V)$ entonces, para $\alpha \in M_{n,n+m}$ definida como

$$\alpha := \begin{pmatrix} 1 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & \cdots & 1 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix},$$

se cumple que

$$x = \alpha(x \oplus y)\alpha^T,$$

con $\|\alpha\| = \|\alpha^T\| = 1$. Luego, por R_1

$$\|x\| = \|\alpha(x \oplus y)\alpha^T\| \leq \|x \oplus y\|.$$

Análogamente

$$\|y\| \leq \|x \oplus y\|$$

así

$$\text{máx}\{\|x\|, \|y\|\} \leq \|x \oplus y\| \leq \text{máx}\{\|x\|, \|y\|\},$$

es decir, se cumple $R2$.

Según sea el caso, las equivalencias anteriores permiten probar que un espacio de Banach está dotado de una estructura de espacio de operadores.

En un espacio vectorial matricialmente normado V, la completez de algún espacio $M_r(V)$ implica la completez de todos los espacios $M_n(V)$ como lo muestra el siguiente teorema.

Teorema 3.1. *Sea V un espacio vectorial matricialmente normado*

i) Si V es completo, entonces $M_n(V)$ es completo para todo $n \in \mathbb{N}$.

ii) Si algún espacio $M_r(V)$ es completo, entonces V es completo (y por (i) todo espacio $M_n(V)$ lo es).

Demostración
Sea $\{v^n\} \subset M_r(V)$ una sucesión de Cauchy. Se afirma que $\{v_{ij}^n\}_{n\in\mathbb{N}}$ es una sucesión de Cauchy para todo par $i, j \in \{1, \ldots, r\}$ pues

$$\|v_{ij}^n - v_{ij}^m\| \leq \max_{k,l} \|v_{kl}^n - v_{kl}^m\| \leq \|v^n - v^m\|.$$

Existe pues $v_{ij} \in V$ tal que

$$v_{ij}^n \to v_{ij}$$

cuando n tiende a infinito. Se afirma que $\{v^n\}$ converge a la matriz $v := [v_{ij}] \in M_r(V)$. En efecto pues, dado $\varepsilon > 0$ para cada i, j existe $N_{ij} \in \mathbb{N}$ tal que

$$\|v_{ij} - v_{ij}^n\| < \frac{\varepsilon}{r^2} \qquad \forall n \geq N_{ij},$$

luego, tomando $n \geq \max_{ij} N_{ij}$,

$$\begin{array}{rcl} \|v - v^n\| & = & \|[v_{ij} - v_{ij}^n]\| \\ & \leq & \sum_{i,j} \|v_{ij} - v_{ij}^n\| \\ & < & \sum_{i,j} \frac{\varepsilon}{r^2} \\ & = & \varepsilon. \end{array}$$

Suponiendo ahora que $M_r(V)$ es completo, se define

$$V \oplus 0_{r-1} := \{v \oplus 0_{r-1} | v \in V\}$$

luego, V es isométrico al subespacio $V \oplus 0_{r-1}$ de $M_r(V)$ por R_2. Basta probar que $V \oplus 0_{r-1}$ es un subespacio cerrado. Sea $\{v_n \oplus 0_{r-1}\} \subset V \oplus 0_{r-1}$ una sucesión que converge a un elemento $w \in M_r(V)$, luego

$$\|(v_n \oplus 0_{r-1})_{ij} - w_{ij}\| \leq \|v_n \oplus 0_{r-1} - w\| \to 0$$

y como $(v_n \oplus 0_{r-1})_{ij} = 0$ si $i \neq 1$ y $j \neq 1$ a la vez, entonces $\|w_{ij}\| = 0$, de donde $w_{ij} = 0$. Así $w \in V \oplus 0_{r-1}$. Luego V es completo. ∎

Se puede notar a simple vista una gran diferencia entre las definiciones de espacios de operadores concretos y abstractos, pues en la definición de espacio de operadores abstracto no se hace mención al concepto de álgebra C^* ni a espacios $B(H)$. Recíprocamente, en la definición de espacio de operadores concreto no se hace mención a los espacios de matrices. El siguiente resultado relaciona estos conceptos, de hecho garantiza que se cumplen los axiomas R_1 y R_2 de la definición 3.3 en espacios de operadores concretos.

Proposición 3.2. *Todo espacio de operadores concreto es un espacio de operadores abstracto.*

Demostración
Anteriormente, en el teorema 1.2 se probó que si H es un espacio de Hilbert, entonces $B(H)$ es un espacio de operadores abstracto. Así, dado un espacio de operadores concreto V resta restringir las normas de $M_n(B(H))$ a $M_n(V)$ para ver que V tiene estructura de espacio de operadores abstracto. ∎

Teniendo en cuenta la proposición anterior, una pregunta que surge de manera natural es saber si todo espacio de operadores abstracto es un espacio operadores concreto. La respuesta a esta pregunta es positiva y se encuentra en el teorema de Ruan. Para poner en claro lo que significa decir que un espacio de operadores abstracto es un espacio de operadores concreto se necesita el concepto de operador completamente acotado. Un operador completamente acotado relaciona la estructura matricial en espacios de operadores (concretos y abstractos).

3.2. Operadores completamente acotados

Definición 3.4. *Dados dos espacios de operadores abstractos V, W y una transformación lineal $\phi : V \to W$, se define la $n-$**ésima ampliación de** ϕ de la siguiente manera*

$$\begin{aligned} \phi_n : M_n(V) &\to M_n(W) \\ v = [v_{ij}] &\mapsto [\phi(v_{ij})]. \end{aligned}$$

Es posible definir ampliaciones de transformaciones lineales entre espacios vectoriales, es decir, no es necesario tener estructura de espacio de operadores en V y W.

De la definición de suma de matrices y de la linealidad de ϕ, se concluye que ϕ_n es lineal para toda $n \in \mathbb{N}$. Además, para un tensor elemental $\alpha \otimes v$ en $M_n \otimes V = M_n(V)$ se tiene

$$\begin{aligned}
\phi_n([\alpha_{ij} v]) &= [\phi(\alpha_{ij} v)] \\
&= [\alpha_{ij} \phi(v)] \\
&= \alpha \otimes \phi(v) \\
&= (I_{M_n} \otimes \phi)(\alpha \otimes v),
\end{aligned}$$

o bien

$$\phi_n = I_{M_n} \otimes \phi.$$

Suponga ahora que $\alpha \in M_{n,m}$, $v \in M_m(V)$ y $\beta \in M_{m,n}$ calculando la imagen de $\alpha v \beta$ bajo la ampliación ϕ_n se obtiene

$$\begin{aligned}
\phi_n(\alpha v \beta) &= \phi_n\left(\left[\sum_{k,l} \alpha_{ik} v_{kl} \beta_{lj}\right]\right) \\
&= \left[\phi\left(\sum_{k,l} \alpha_{ik} v_{kl} \beta_{lj}\right)\right] \\
&= \left[\sum_{k,l} \phi(\alpha_{ik} v_{kl} \beta_{lj})\right] \\
&= \left[\sum_{k,l} \alpha_{ik} \phi(v_{kl}) \beta_{lj}\right] \\
&= \alpha \phi_m(v) \beta.
\end{aligned}$$

Como se ha dicho anteriormente, la definición de ampliaciones se puede establecer para transformaciones lineales entre espacios vectoriales, pero si ahora se consideran espacios vectoriales matricialmente normados, entonces la continuidad de alguna ampliación ϕ_N implica la continuidad de todas las ampliaciones. De modo formal se tiene la siguiente proposición.

Proposición 3.3. *Sean V y W dos espacios vectoriales matricialmente normados y $\phi : V \to W$ una transformación lineal.*

i) Si ϕ es continua, entonces ϕ_n es continua para todo $n \in \mathbb{N}$.

ii) Si ϕ_n es continua para algún $n \in \mathbb{N}$ entonces ϕ es continua (luego por (i) todas las ampliaciones lo son).

Demostración
Suponga que ϕ es continua y $v = [v_{ij}] \in M_n(V)$, luego

$$\begin{array}{rcl} \|\phi_n(v)\| & = & \|\phi_n\left([v_{ij}]\right)\| \\ & = & \|\left[\phi(v_{ij})\right]\| \\ & \leq & \displaystyle\sum_{i,j} \|\phi(v_{ij})\| \\ & = & \|\phi\| \displaystyle\sum_{i,j} \|v_{ij}\| \\ & \leq & \|\phi\| n^2 \|v\|, \end{array}$$

es decir, ϕ_n es continua para todo $n \in \mathbb{N}$ y además $\|\phi_n\| \leq \|\phi\| n^2$.
Por otro lado si ϕ_n es continua, entonces

$$\begin{array}{rcl} \|\phi(v)\| & = & \text{máx}\{\|\phi(v)\|, \|\phi_{n-1}(0_{n-1})\|\} \\ & = & \|\phi(v) \oplus \phi_{n-1}(0_{n-1})\| \\ & = & \|\phi_n(v \oplus 0_{n-1})\| \\ & \leq & \|\phi_n\| \|v \oplus 0_{n-1}\| \\ & \leq & \|\phi_n\| \|v\|, \end{array}$$

así, ϕ es continua y además $\|\phi\| \leq \|\phi_n\|$, de hecho, esta desigualdad se tiene para todo $n \in \mathbb{N}$. ∎

Ahora que se tienen definidas las ampliaciones de un operador ϕ, cada una de ellas tiene definida una norma como operador entre espacios de Banach, a saber

$$\|\phi_n\| = \sup_{v \in B_{M_n(V)}} \|\phi_n(v)\|.$$

Si se tiene un operador $\phi : V \to W$, entonces $\{\|\phi_n\|\}$ es una sucesión creciente, pues dado $v \in M_n(V)$ se tiene que $v \oplus 0 \in M_{n+1}(V)$ cumple $\|v \oplus 0\| = \|v\|$, luego

$$\begin{aligned}
\|\phi_n(v)\| &= \text{máx}\{\|\phi_n(v)\|, \|\phi(0)\|\} \\
&= \left\| \begin{pmatrix} \phi_n(v) & 0 \\ 0 & \phi(0) \end{pmatrix} \right\| \\
&= \|\phi_{n+1}(v \oplus 0)\| \\
&\leq \|\phi_{n+1}\| \|v \oplus 0\| \\
&= \|\phi_{n+1}\| \|v\|,
\end{aligned}$$

de donde, $\|\phi_n\| \leq \|\phi_{n+1}\|$ para toda $n \in \mathbb{N}$.

Definición 3.5. *Se dice que un operador lineal $\phi : V \to W$ es* ***completamente acotado*** *si la sucesión $\{\|\phi_n\|\}$ es acotada.*

Definición 3.6. *Se define $CB(V, W)$ como el espacio de operadores lineales completamente acotados de V en W.*

De hecho, la aplicación

$$\phi \mapsto \sup_{n \in \mathbb{N}} \|\phi_n\|$$

es una norma en $C(V, W)$.

Definición 3.7. *Un operador completamente acotado ϕ es una* ***isometría completa****, si cada ampliación ϕ_n es una isometría. En caso de que $\|\phi_n\| \leq 1$ para toda $n \in \mathbb{N}$ se dirá que ϕ es una contracción completa.*

En ocasiones es posible controlar la sucesión de normas $\{\|\phi_n\|\}_{n \in \mathbb{N}}$ como se verá en la siguiente proposición, para ello se necesita el siguiente lema.

Lema 3.1. *Sean $m, n \in \mathbb{N}$ con $n \leq m$ y $\eta \in \mathbb{C}^m \otimes \mathbb{C}^n$, entonces existen, una isometría $\beta : \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}^m$ y un vector $\widetilde{\eta} \in \mathbb{C}^n \otimes \mathbb{C}^n$ tales que $(\beta \otimes I_n)\widetilde{\eta} = \eta$.*

Demostración

Para $\eta = \sum_{i=1}^{k} x_i \otimes y_i \in \mathbb{C}^m \otimes \mathbb{C}^n$ se tiene

$$\begin{aligned}
\eta &= \sum_{i=1}^{k} x_i \otimes y_i \\
&= \sum_{i=1}^{k} x_i \otimes \left(\sum_{j=1}^{n} y_j^i \otimes \varepsilon_j^{(n)} \right) \\
&= \sum_{i=1}^{k} \sum_{j=1}^{n} y_j^i x_i \otimes \varepsilon_j^{(n)} \\
&= \sum_{j=1}^{n} \sum_{i=1}^{k} \left(y_j^i x_i \otimes \varepsilon_j^{(n)} \right) \\
&= \sum_{j=1}^{n} \left(\sum_{i=1}^{k} y_j^i x_i \right) \otimes \varepsilon_j^{(n)} \\
&= \sum_{j=1}^{n} \eta_j \otimes \varepsilon_j^{(n)},
\end{aligned}$$

donde se ha utilizado la identificación

$$y_i = (y_1^i, \ldots, y_n^i) = \begin{pmatrix} y_1^i & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & y_n^i \end{pmatrix} = \sum_{j=1}^{n} y_j^i \otimes \varepsilon_j^{(n)}$$

y se ha definido $\eta_j := \sum_{i=1}^{k} y_j^i x_i \in \mathbb{C}^m$. Sea F el espacio generado por los elementos η_j, así, F es un espacio de dimensión menor o igual a n. Se puede definir entonces una isometría $\beta : \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}^m$ de modo que la imagen de β contenga al espacio F. Ahora, para cada η_j existe un $\widetilde{\eta}_j \in \mathbb{C}^n$ tal que $\beta(\widetilde{\eta}_j) = \eta_j$, luego, definiendo $\widetilde{\eta} := \sum_{j=1}^{n} \widetilde{\eta}_j \otimes \varepsilon_j^{(n)}$ se obtiene

$$\begin{aligned}
\beta \otimes I_n(\widetilde{\eta}) &= \beta \otimes I_n\left(\sum_{j=1}^{n} \widetilde{\eta}_j \otimes \varepsilon_j^{(n)}\right) \\
&= \sum_{j=1}^{n} \eta_j \otimes \varepsilon_j^{(n)} \\
&= \eta. \blacksquare
\end{aligned}$$

Proposición 3.4. *Sea V un espacio de operadores abstracto y $\phi : V \to M_n$ un operador lineal, entonces*

$$\|\phi\|_{cb} = \|\phi_n\|.$$

Demostración

Como $\{\|\phi_n\|\}$ es creciente, basta probar que $\|\phi_m\| \leq \|\phi_n\|$ para $n \leq m$. Sea $m \geq n$ y $\varepsilon > 0$, luego, existe $v \in M_m(V)$ con $\|v\| \leq 1$ tal que

$$\|\phi_m\| - \varepsilon < \|\phi_m(v)\|.$$

Utilizando la compacidad de la esfera de $(\mathbb{C}^n)^m$ y sabiendo que todo espacio de Hilbert se puede identificar con su espacio dual, existen $\eta, \xi \in (\mathbb{C}^n)^m = \mathbb{C}^m \otimes \mathbb{C}^n$ tales que, $\|\eta\| = \|\xi\| = 1$ y $\|\phi_m(v)\| = |\langle \phi_m(v)\eta|\xi\rangle$. Por el lema anterior existen isometrías $\alpha, \beta : \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}^m$, vectores $\widetilde{\xi}$, $\widetilde{\eta} \in \mathbb{C}^n \otimes \mathbb{C}^n$ tales que

$$\xi = \alpha \otimes I_n(\widetilde{\xi})$$

$$\eta = \beta \otimes I_n(\widetilde{\eta}).$$

Por la desigualdad anterior

$$
\begin{aligned}
\|\phi_m\| - \varepsilon &< |\langle\, \phi_m(v)\eta \mid \xi \,\rangle| \\
&= |\langle\, \phi_m(v)\,(\beta \otimes I_n)\,(\widetilde{\eta}) \mid \alpha \otimes I_n(\widetilde{\xi})\,\rangle| \\
&= |\langle\, (\alpha^* \otimes I_n)\phi_m(v)(\beta \otimes I_n)(\widetilde{\eta}) \mid \widetilde{\xi}\,\rangle| \\
&= |\langle\, (\alpha^*\phi_m(v)\beta)\,\widetilde{\eta} \mid \widetilde{\xi}\,\rangle| \\
&= |\langle\, \phi_n(\alpha^* v \beta)\widetilde{\eta} \mid \widetilde{\xi}\,\rangle| \\
&\leq \|\phi_n(v)\|\,\|\alpha^*\|\,\|v\|\,\|\beta\|\,\|\widetilde{\eta}\|\,\|\widetilde{\xi}\| \\
&\leq \|\phi_n(v)\|.
\end{aligned}
$$

Dado que $\varepsilon > 0$ fue arbitrario se concluye que $\|\phi_m\| \leq \|\phi_n\|$. ∎

Corolario 3.1. *Si V es un espacio de operadores abstracto, entonces para cada funcional lineal $f : V \to \mathbb{C}$ se tiene*

$$\|f\|_{cb} = \|f\|.$$

3.3. Ejemplos

A continuación se muestran ejemplos de espacios de operadores. En estos ejemplos se puede observar el uso de las ampliaciones para dar estructura de espacio de operadores a determinados espacios de Banach.

Ejemplo 3.1. *Si H es un espacio de Hilbert, entonces $B(H)$ es un espacio de operadores concreto de manera trivial, además, en el teorema 1.2 se probó que $B(H)$ es un espacio de operadores abstracto.*

Ejemplo 3.2. *Si A es un álgebra C^*, entonces A tiene estructura de espacio de operadores abstracto de manera canónica en el sentido de que se preserva que $M_n(A)$ sea un álgebra C^* para cada $n \in \mathbb{N}$. La forma de construir esta estructura de espacio de operadores es la siguiente:*
Sea $\pi : A \to B(H)$ una representación de A que sea isometría , es decir, para todo $a, b \in A$, $\lambda \in \mathbb{C}$ se cumple

$$\begin{aligned}
\pi(a+\lambda b) &= \pi(a)+\lambda\pi(b)\\
\pi(ab) &= \pi(a)\pi(b)\\
\pi(a^*) &= \pi(a)^*\\
\|\pi(a)\| &= \|a\|.
\end{aligned}$$

Se sabe que tal representación existe por el teorema de Gelfand-Naimark.

Para cada $n \in \mathbb{N}$ considere $M_n(A)$, este espacio se puede dotar de la norma de $M_n(B(H))$ con ayuda de la n-ésima ampliación de π, es decir

$$\|[a_{ij}]\| := \|\pi_n([a_{ij}])\| = \|[\pi(a_{ij})]\|.$$

Tomando la suma usual de matrices, el producto usual por escalares, el producto usual de matrices y la involución $*$ definida por

$$a^* = [a_{ij}]^* := [a_{ij}^*]^t,$$

se obtiene que $M_n(A)$ es un álgebra C^*. Para ver esto, primero notemos que $*$ es una involución en $M_n(A)$. Si $a = [a_{ij}]$, $b = [b_{ij}] \in M_n(A)$ y $\lambda \in \mathbb{C}$, entonces

$$\begin{aligned}
(a+\lambda b)^* &= ([a_{ij}]+\lambda[b_{ij}])^*\\
&= [a_{ij}+\lambda b_{ij}]^*\\
&= [(a_{ij}+\lambda b_{ij})^*]^t\\
&= \left[a_{ji}^*+\overline{\lambda} b_{ij}^*\right]^t\\
&= \left([a_{ij}^*]+\overline{\lambda}[b_{ij}]\right)^t\\
&= [a_{ij}^*]^t+\overline{\lambda}[b_{ij}^*]^t\\
&= a^*+\overline{\lambda} b^*,
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
(ab)^* &= \left[\sum_k a_{ik}b_{kj}\right]^* \\
&= \left[\left(\sum_k a_{ik}b_{kj}\right)^*\right]^t \\
&= \left[\sum_k b_{kj}^* a_{ik}^*\right]^t \\
&= \begin{pmatrix} \sum\limits_k b_{k1}^* a_{1k}^* & \cdots & \sum\limits_k b_{k1}^* a_{nk}^* \\ \vdots & & \vdots \\ \sum\limits_k b_{kn}^* a_{1k}^* & \cdots & \sum\limits_k b_{kn}^* a_{nk}^* \end{pmatrix},
\end{aligned}
$$

por otro lado

$$
\begin{aligned}
b^*a^* &= [b_{ij}]^*[a_{ij}]^* \\
&= [b_{ij}^*]^t[a_{ij}^*]^t \\
&= \begin{pmatrix} b_{11}^* & \cdots & b_{n1}^* \\ \vdots & & \vdots \\ b_{1n}^* & \cdots & b_{nn}^* \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{11}^* & \cdots & a_{n1}^* \\ \vdots & & \vdots \\ a_{1n}^* & \cdots & a_{nn}^* \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} \sum\limits_k b_{k1}^* a_{1k}^* & \cdots & \sum\limits_k b_{k1}^* a_{nk}^* \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \sum\limits_k b_{kn}^* a_{1k}^* & \cdots & \sum\limits_k b_{kn}^* a_n k^* \end{pmatrix},
\end{aligned}
$$

de donde

$$(ab)^* = b^*a^*.$$

De la definición de $*$ se observa claramente que $(a^*)^* = a$.
A continuación se muestra que π_n es multiplicativa

$$\begin{aligned}
\pi_n(ab) &= \pi_n\left([a_{ij}][b_{ij}]\right) \\
&= \pi_n\left(\left[\sum_k a_{ik}b_{kj}\right]\right) \\
&= \left[\pi\left(\sum_k a_{ik}b_{kj}\right)\right] \\
&= \left[\sum_k \pi(a_{ik})\pi(b_{kj})\right] \\
&= [\pi(a_{ij})][\pi(b_{ij})] \\
&= \pi_n([a_{ij}])\pi_n([b_{ij}]) \\
&= \pi_n(a)\pi_n(b).
\end{aligned}$$

Además

$$\begin{aligned}
\pi_n(a^*) &= \pi_n([a_{ij}]^*) \\
&= \pi_n([a_{ij}^*]^t) \\
&= \left[\pi(a_{ij}^*)\right]^t \\
&= [\pi(a_{ij})^*]^t \\
&= [\pi(a_{ij})^*]^t \\
&= \pi_n(a)^*.
\end{aligned}$$

Finalmente

$$\begin{aligned}
\|aa^*\| &= \|[a_{ij}][a_{ij}]^*\| \\
&= \|\pi_n([a_{ij}][a_{ij}]^*)\| \\
&= \|\pi_n([a_{ij}])\pi_n([a_{ij}]^*)\| \\
&= \|\pi_n([a_{ij}])\pi_n([a_{ij}])^*\| \\
&= \|\pi_n(a_{ij})\|^2 \\
&= \|a\|^2.
\end{aligned}$$

Ahora que se ha normado cada espacio $M_n(A)$ se prueba que A tiene estructura de espacio de operadores. En efecto, si $\alpha \in M_{n,m}$, $a \in M_m(A)$ y $\beta \in M_{m,n}$, entonces

$$\begin{aligned}
\|\alpha a \beta\| &= \|\pi_n(\alpha a \beta)\| \\
&= \left\| \pi_n \left(\sum_{k,l} \alpha_{ik} a_{kl} \beta_{lj} \right)_{i,j} \right\| \\
&= \left\| \left(\pi \left(\sum_{k,l} \alpha_{ik} a_{kl} \beta_{lj} \right) \right)_{i,j} \right\| \\
&= \left\| \left(\sum_{k,l} \alpha_{ik} \pi\left(a_{kl}\right) \beta_{lj} \right)_{i,j} \right\| \\
&= \|\alpha \pi(a) \beta\| \\
&= \|\left(\alpha \otimes I_H\right) \pi(a) \left(\beta \otimes I_H\right)\| \\
&\leq \|\alpha \otimes I_H\| \, \|\pi(a)\| \, \|\beta \otimes I_H\| \\
&= \|\alpha\| \|a\| \|\beta\|.
\end{aligned}$$

Por otra parte si $a \in M_n(A)$ y $b \in M_m(A)$, entonces

$$\begin{aligned}
\|a \oplus b\| &= \|\pi_{n+m}(a \oplus b)\| \\
&= \|\pi_n(a) \oplus \pi_m(b)\| \\
&= \text{máx}\{\|\pi_n(a)\|, \|\pi_m(b)\|\} \\
&= \text{máx}\{\|a\|, \|b\|\}.
\end{aligned}$$

Se concluye entonces que el álgebra C^* A tiene estructura de espacio de operadores.

Observación 3.1. *Teniendo en cuenta que la involución $*$ en $M_n(A)$ depende únicamente de la involución $*$ en A y que la norma en el álgebra C^* $M_n(A)$ esta determinada de manera única por su involución, se concluye que la norma $\|\cdot\|$ en $M_n(A)$ es independiente de la representación π. Luego la estructura de espacio de operadores abstracto de A es única si se quiere conservar la estructura de álgebra C^* en $M_n(A)$ para cada $n \in \mathbb{N}$.*

Ejemplo 3.3. *Como se vio anteriormente, todo espacio de Banach E se puede encajar en el álgebra C^*, $C(B_{E^*})$ y como las álgebras C^* cumplen los axiomas R_1 y R_2, entonces, todo espacio de Banach se puede dotar de una estructura de espacio de operadores abstracto, más aún, E está dotado de una estructura de espacio de operadores concreto.*

3.3.1. Espacio columna y renglón de un espacio de Hilbert

En el siguiente ejemplo se puede observar que un espacio de Banach puede tener distintas estructuras de espacios de operadores.

Ejemplo 3.4. *Dado un espacio de Hilbert H podemos dar a este espacio dos estructuras de espacio de operadores, a saber, H_c y H_r de la siguiente manera:*

Dado un elemento $h \in H$ se define el operador lineal

$$\begin{array}{rcl} C(h) : \mathbb{C} & \to & H \\ c & \mapsto & ch. \end{array}$$

De hecho

$$\begin{array}{rcl} C : H & \to & B(\mathbb{C}, H) \\ h & \mapsto & C(h) \end{array}$$

es una isometría lineal pues se cumple lo siguiente

$$\|C(h)\| = \sup_{\|c\| \leq 1} \|C(h)(c)\| = \sup_{\|c\| \leq 1} \|c\| \|h\| = \|h\|.$$

Utilizando la n-ésima ampliación de C dada por

$$\begin{array}{rcl} C_n : M_n(H) & \to & B(\mathbb{C}^n, H^n) \\ h = [h_{ij}] & \mapsto & [C(h_{ij})], \end{array}$$

se define una norma en $M_n(H)$ como sigue

$$\|h\|_c = \|[h_{ij}]\|_c := \|C_n([h_{ij}])\| = \|[C(h_{ij})]\|.$$

Al espacio H con esta estructura de espacio de operadores se le llama **espacio columna de** H y se denota por H_c.

Por otro lado para $h \in H$ se define el operador

$$\begin{aligned} R(h) : \overline{H} &\to \mathbb{C} \\ y &\mapsto \, < h|\overline{y} > . \end{aligned}$$

En este caso se tiene la aplicación lineal

$$\begin{aligned} R : H &\to B(\overline{H}, \mathbb{C}) \\ h &\mapsto R(h), \end{aligned}$$

la cual es una isometría pues

$$\|R(h)\| = \sup_{\|y\| \leq 1} \| < h|\overline{y} > \| = \sup_{\|y\| \leq 1} \| < h|y > \| = \sup_{\|y\| \leq 1} \| < y|h > \| = \|h\|.$$

De igual manera se utiliza la n-ésima ampliación de R

$$\begin{aligned} R_n : M_n(H) &\to B(\overline{H}^n, \mathbb{C}^n) \\ h = [h_{ij}] &\mapsto [R(h_{ij})] \end{aligned}$$

para definir una norma en $M_n(H)$ como sigue

$$\|h\|_r = \|[h_{ij}]\|_r := \|R_n([h_{ij}])\| = \|[R(h_{ij})]\|.$$

Al espacio H con esta estructura de espacio de operadores se le conoce como **espacio renglón de** H y se denota por H_r.

A continuación se muestra que las estructuras H_c y H_r son diferentes. Para ello tómese $e_1 \dots e_p$ vectores ortonormales en H y considere la matriz

$$\begin{pmatrix} e_1 & \cdots & e_p \\ \vdots & & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix} \in M_p(H),$$

luego

$$\begin{aligned}\left\| \begin{pmatrix} e_1 & \cdots & e_p \\ \vdots & & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix} \right\|_c &= \sup_{|z|\leq 1} \left\| \begin{pmatrix} C(e_1) & \cdots & C(e_p) \\ \vdots & & \vdots \\ C(0) & \cdots & C(0) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} z_1 \\ \vdots \\ z_p \end{pmatrix} \right\| \\ &= \sup_{|z|\leq 1} \left\| \sum_{i=1}^{n} z_i e_i \right\| \\ &= \sup_{|z|\leq 1} |z| \\ &= 1.\end{aligned}$$

Por otro lado

$$\begin{aligned}\left\| \begin{pmatrix} e_1 & \cdots & e_p \\ \vdots & & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix} \right\|_r^2 &= \left\| \begin{pmatrix} R(e_1) & \cdots & R(e_p) \\ \vdots & & \vdots \\ R(0) & \cdots & R(0) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} R(e_1) & \cdots & R(e_p) \\ \vdots & & \vdots \\ R(0) & \cdots & R(0) \end{pmatrix}^* \right\| \\ &= \left\| \begin{pmatrix} 1 & \cdots & 1 \\ \vdots & & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix} \right\| \\ &= p,\end{aligned}$$

de donde se observa que $I_{M_p(H)}$ no es una isometría y así las estructuras de espacio de operadores H_c y H_r son distintas. De hecho, se ha probado que la p-ésima ampliación de la identidad en H, con

$$(I_H)_p : M_p(H_c) \to M_p(H_r)$$

tiene norma al menos $\sqrt{p}$, luego I_H no es un operador completamente acotado y por lo tanto no puede ser un isomorfismo completo a pesar de que los espacios de operadores H_c y H_r tienen el mismo espacio de Banach adyacente H.

El álgebra C^*, $\mathbb{C}$, tiene una única estructura canónica de espacio de operadores conservando la estructura de álgebra C^* en cada nivel M_n, pero considerando su estructura de espacio de Hilbert, $\mathbb{C}$ tiene al menos dos estructuras de espacio de operadores, a saber, $\mathbb{C}_c$ y $\mathbb{C}_r$. A continuación se prueba que $\mathbb{C}$ como espacio de operadores considerado como álgebra C^* es precisamente $\mathbb{C}_c$.

Denotando por $\mathbb{C}_A$ a $\mathbb{C}$ con su estructura de álgebra C^* y por $\mathbb{C}_H$ a $\mathbb{C}$ con su estructura de espacio de Hilbert, se tiene que la representación π dada por

$$\begin{array}{rcl}\pi : \mathbb{C}_A & \to & B(\mathbb{C}_H, \mathbb{C}_H) \\ c & \mapsto & c\end{array}$$

es precisamente el operador columna C

$$\begin{array}{rcl}C : \mathbb{C}_H & \to & B(\mathbb{C}_H, \mathbb{C}_H) \\ c & \mapsto & c\end{array}$$

que dota a $\mathbb{C}_H$ de su estructura $\mathbb{C}_c$, de donde, $\|\cdot\|_c = \|\cdot\|_A$ (norma inducida como álgebra C^*), luego $\mathbb{C}_A$ y $\mathbb{C}_c$ son estructuras de espacio de operadores idénticas.

3.4. Teorema de Ruan

La prueba del teorema de Ruan se realiza en el capítulo 5.

Ahora que se tiene el concepto de operador completamente acotado, se enuncia el teorema de Ruan.

Teorema 3.2. *Sea V un espacio vectorial matricialmente normado. Entonces existe un espacio de Hilbert H, un subespacio W de $B(H)$ y una aplicación $\Phi : V \to W$ tal que Φ es un isomorfismo y una isometría completa.*

Corolario 3.2. *Todo espacio de operadores abstracto es un espacio de operadores concreto.*

En la formulación del teorema de Ruan se puede observar claramente que W es la concreción del espacio de operadores abstracto V a través de Φ. Este resultado, al ser un teorema de concreción, es un teorema de representación. Más aún, el teorema de Ruan es un resultado análogo al teorema de Gelfand-Naimark el cual es un teorema de concreción y representación de álgebras C^*.

Dado H un espacio de Hilbert y considerando los subespacios de $B(H)$, es decir, los subespacios de Banach de $B(H)$, el concepto de espacios de operadores caracteriza estos subespacios, o dicho de otra manera, el concepto de espacio de operadores es la abstracción o axiomatización de los subespacios de Banach de $B(H)$, de la misma manera en que el concepto de álgebras C^* es la abstracción de los subespacios cerrados bajo todas las operaciones algebraicas, involución y composición de $B(H)$.

Una gran diferencia que existe entre los espacios de operadores y las álgebras C^* es que en un espacio de operadores se piden menos operaciones algebraicas que en un álgebra C^*, a saber, no existe involución ni producto de vectores en V.

La diferencia entre espacios de Banach y espacios de operadores radica en que en un espacio de operadores se pide una estructura matricial además de la completez respecto a la norma.

Por otra parte, como se ha visto, dado un espacio de Banach E, es posible dotar a E de una estructura de espacio de operadores a través del álgebra C^*, $C(B_{E^*})$. En [6, cor 3.9 p. 77] se prueba que todo espacio de Banach de dimensión mayor o igual a tres tiene al menos dos estructuras diferentes de espacios de operadores. A su vez, en la proposición 3.10 de la misma referencia se prueba que $\big(\mathbb{C}^2, \|\cdot\|_1\big)$ y $\big(\mathbb{C}^2, \|\cdot\|_\infty\big)$ tienen una única estructura de espacio de operadores.

Capítulo 4

Construcciones

El presente capítulo tiene como objetivo mostrar que los espacios de operadores forman una categoría. Los objetos en la categoría de espacios de operadores son obviamente los espacios de operadores, mientras que los morfismos están dados por los operadores completamente acotados.

En particular, se muestra que los subespacios, cocientes, productos, espacio dual y espacio conjugado de espacios de operadores, son espacios de operadores.

Proposición 4.1. *Todo subespacio cerrado de W de un espacio de operadores V tiene una estructura natural de espacio de operadores.*

Demostración
Basta definir una norma en cada nivel de W, es decir, se tiene que normar cada espacio $M_n(W)$, de modo que se cumplan los axiomas R_1 y R_2. Para ello sólo se nota que $M_n(W)$ es un subespacio vectorial de $M_n(V)$, luego se restringe la norma de $M_n(V)$ al espacio $M_n(W)$. ■

Proposición 4.2. *Dado un subespacio cerrado W de un espacio de operadores V, el espacio de Banach V/W tiene, de manera natural, estructura de espacio de operadores.*

Demostración
Se tiene la identificación de espacios vectoriales

$$\begin{aligned} M_n(V/W) &= M_n(V)/M_n(W) \\ [v_{ij} + W] &= [v_{ij}] + M_n(W), \end{aligned}$$

donde $M_n(V)/M_n(W)$ es un espacio de Banach pues $M_n(W)$ es un subespacio de Banach de $M_n(V)$. Se norma el espacio $M_n(V/W)$ con la identificación anterior, es decir,

$$\begin{aligned}
\|[v_{ij}+W]\| &:= \|[v_{ij}]+M_n(W)\| \\
&= d\left([v_{ij}], M_n(W)\right) \\
&= \inf_{[w_{ij}]\in M_n(W)} \|[v_{ij}]-[w_{ij}]\|\,.
\end{aligned}$$

Para $[w_{ij}] \in M_n(W)$ se tiene

$$\begin{aligned}
\|\alpha[v_{ij}+W]\beta\| &= \left\|\sum_{k,l}\alpha_{ik}[v_{kl}+W]\beta_{lj}\right\| \\
&= \left\|\sum_{k,l}[\alpha_{ik}v_{kl}\beta_{lj}+W]\right\| \\
&= \left\|\sum_{k,l}[\alpha_{ik}v_{kl}\beta_{lj}]+M_n(W)\right\| \\
&= \|\alpha[v_{ij}]\beta+M_n(W)\| \\
&\le \|\alpha[v_{ij}]\beta-\alpha[w_{ij}]\beta\| \\
&= \|\alpha\left([v_{ij}]-[w_{ij}]\right)\beta\| \\
&\le \|\alpha\|\ \ \|[v_{ij}]-[w_{ij}]\|\ \ \|\beta\|,
\end{aligned}$$

ahora, tomando ínfimo sobre $[w_{ij}] \in M_n(W)$ se obtiene

$$\|\alpha[v_{ij}+W]\beta\| \le \|\alpha\|\ \ \|[v_{ij}+W]\|\ \ \|\beta\|.$$

Por otra parte, para $[y_{ij}] \in M_n(W)$, $[w_{ij}] \in M_m(W)$

$$\begin{aligned}
\|[v_{ij}+W]\oplus[u_{ij}+W]\| &= \left\|\begin{bmatrix} [v_{ij}+W] & W \\ W & [u_{ij}+W] \end{bmatrix}\right\| \\
&= \left\|\begin{bmatrix} v_{ij} & 0 \\ 0 & u_{ij} \end{bmatrix} + M_{n+m}(W)\right\| \\
&\leq \left\|\begin{bmatrix} v_{ij} & 0 \\ 0 & u_{ij} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} y_{ij} & 0 \\ 0 & w_{ij} \end{bmatrix}\right\| \\
&= \left\|\begin{bmatrix} v_{ij}-y_{ij} & 0 \\ 0 & u_{ij}-w_{ij} \end{bmatrix}\right\| \\
&= \|[v_{ij}-y_{ij}]\oplus[u_{ij}-w_{ij}]\| \\
&= \max\left\{\|[v_{ij}-y_{ij}]\|, \|[u_{ij}-w_{ij}]\|\right\},
\end{aligned}$$

luego

$$\begin{aligned}
\|[v_{ij}+W]\oplus[u_{ij}+W]\| &\leq \inf_{y,w}\max\left\{\|v_{ij}-y_{ij}\|, \|u_{ij}-w_{ij}\|\right\} \\
&= \max\left\{\inf_{y}\|[v_{ij}]-[y_{ij}]\|, \inf_{w}\|[u_{ij}]-[w_{ij}]\|\right\} \\
&= \max\left\{\|[v_{ij}+W]\|, \|[u_{ij}+W]\|\right\},
\end{aligned}$$

es decir, se cumplen R_1 y R_2', o bien, R_1 y R_2 de la definición 3.3. ■

Proposición 4.3. *Sea $\{V_s\}_{s\in S}$ una familia de espacios de operadores, entonces*

$$\prod_{s\in S} V_s$$

tiene una estructura natural de espacio de operadores.

Demostración
La identificación

$$\begin{aligned}
M_n(\prod_{s\in S} V_s) &= \prod_{s\in S} M_n(V_s) \\
\left[(v_{ij}^s)_{s\in S}\right] &= \left([v_{ij}^s]\right)_{s\in S}
\end{aligned}$$

permite normar al espacio $M_n\left(\prod_{s\in S} V_s\right)$. Se tiene lo siguiente

$$
\begin{aligned}
\|\alpha[v_{ij}]\beta\| &= \left\| \left[\sum_{k,l} \alpha_{ik} v_{kl} \beta_{lj} \right] \right\| \\
&= \left\| \left[\sum_{k,l} \alpha_{ik} (v^s_{kl})_{s\in S} \beta_{lj} \right] \right\| \\
&= \left\| \left[\sum_{k,l} (\alpha_{ik} v^s_{kl} \beta_{lj})_{s\in S} \right] \right\| \\
&= \left\| \left(\left[\sum_{k,l} \alpha_{ik} v^s_{kl} \beta_{lj} \right] \right)_{s\in S} \right\| \\
&= \sup_{s\in S} \left\| \sum_{k,l} \alpha_{ik} v^s_{ij} \beta_{lj} \right\| \\
&= \sup_{s\in S} \left\| \alpha[v^s_{ij}]\beta \right\| \\
&\leq \sup_{s\in S} \left(\|\alpha\| \, \|[v^s_{ij}]\| \, \|\beta\| \right) \\
&= \|\alpha\| \left(\sup_{s\in S} \|[v^s_{ij}]\| \right) \|\beta\| \\
&= \|\alpha\| \, \|(v^s_{ij})_{s\in S}\| \, \|\beta\|.
\end{aligned}
$$

Por otro lado

$$
\begin{aligned}
\|[v_{ij}] \oplus [u_{ij}]\| &= \left\| \begin{bmatrix} [v_{ij}] & 0 \\ 0 & [u_{ij}] \end{bmatrix} \right\| \\
&= \left\| \left(\begin{bmatrix} [v_{ij}] & 0 \\ 0 & [u_{ij}] \end{bmatrix} \right)_{s\in S} \right\| \\
&= \sup_{s\in S} \| \begin{bmatrix} [v_{ij}^s] & 0 \\ 0 & [u_{ij}^s] \end{bmatrix} \| \\
&= \sup_{s\in S} \left(\text{máx} \left\{ \, \|[v_{ij}^s]\| \, , \, \|[u_{ij}^s]\| \, \right\} \right) \\
&= \text{máx} \left\{ \sup_{s\in S} \|[v_{ij}^s]\| \, , \, \sup_{s\in S} \|u_{ij}^s\| \right\} \\
&= \text{máx} \left\{ \, \|([v_{ij}^s])_{s\in S}\| \, , \, \|([u_{ij}^s])_{s\in S}\| \, \right\} \\
&= \text{máx} \left\{ \, \|[(v_{ij}^s)_{s\in S}]\| \, , \, \|[(u_{ij}^s)_{s\in S}]\| \, \right\} \\
&= \text{máx} \left\{ \, \|[v_{ij}]\| \, , \, \|[u_{ij}] \, \| \right\},
\end{aligned}
$$

por lo que $\prod_{s\in S} V_s$ tiene estructura de espacio de operadores. ■

Proposición 4.4. *Dado un espacio de operadores V, el espacio dual V^* tiene una estructura natural de espacio de operadores.*

Demostración
Un elemento $f = [f_{ij}] \in M_n(V^*)$ se puede interpretar como una aplicación de V en M_n de la siguiente manera

$$f : V \to M_n$$

$$v \mapsto [f_{ij}(v)]$$

y como se vio anteriormente, f es una aplicación completamente acotada. Recíprocamente, si se tiene una aplicación $g : V \to M_n$ completamente acotada, entonces g define n^2 elementos en V^*, a saber, sus componentes. De esta manera se identifican los espacios vectoriales $M_n(V^*)$ y $CB(V, M_n)$. Con tal identificación se norma al espacio $M_n(V^*)$, es decir

$$\|f\| := \|f\|_{cb}$$

para toda $f = [f_{ij}] \in M_n(V^*)$. Se verá a continuación que V^* tiene estructura de espacio de operadores.

Dados $f \in M_n(V^*)$, $g \in M_m(V^*)$ se tiene que

$$f \oplus g : V \to M_{n+m}.$$

La r-ésima ampliación de $f \oplus g$ está dada por

$$\begin{aligned} (f \oplus g)_r : M_r(V) &\to M_r\left(M_{n+m}\right) = M_{r(n+m)} \\ v = [v_{ij}] &\mapsto [f \oplus g(v_{ij})]. \end{aligned}$$

Se puede ver por simple evaluación que

$$\begin{aligned} (f \oplus g)_r(v) &= [f(v_{ij}) \oplus g(v_{ij})] \\ &= \begin{pmatrix} \begin{pmatrix} f(v_{11}) & 0 \\ 0 & g(v_{11}) \end{pmatrix} & \ldots \begin{pmatrix} f(v_{1r}) & 0 \\ 0 & g(v_{1r}) \end{pmatrix} \\ \vdots & \vdots \\ \begin{pmatrix} f(v_{r1}) & 0 \\ 0 & g(v_{r1}) \end{pmatrix} & \ldots \begin{pmatrix} f(v_{rr}) & 0 \\ 0 & g(v_{rr}) \end{pmatrix} \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Por otro lado

$$\begin{aligned} f_r : M_r(V) &\to M_r(M_n) = M_{rn} \\ g_r : M_r(V) &\to M_r(M_m) = M_{rm}, \end{aligned}$$

de donde

$$f_r(v) \oplus g_r(v) = [f(v_{ij})] \oplus [g(v_{ij})] \in M_{rn} \oplus M_{rm} \subset M_{r(n+m)},$$

con

$$f_r(v) \oplus g_r(v) = \begin{pmatrix} f(v_{11}) & \ldots & f(v_{1r}) & 0 & \ldots & 0 \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ f(v_{r1}) & \ldots & f(v_{rr}) & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & \ldots & 0 & g(v_{11}) & \ldots & g(v_{1r}) \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & \ldots & 0 & g(v_{r1}) & \ldots & g(v_{1r}) \end{pmatrix}.$$

Se puede observar que las matrices $(f \oplus g)_r(v)$ y $f_r(v) \oplus g_r(v)$ son elementos de $M_{r(n+m)}$ con las mismas submatrices $f(v_{ij})$ $g(v_{ij})$. Además, al intercambiar renglones de $f_r(v) \oplus g_r(v)$ se obtiene el siguiente operador con la misma norma

$$\begin{pmatrix} f(v_{11}) & \dots & f(v_{1r}) & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & g(v_{11}) & \dots & g(v_{1r}) \\ f(v_{11}) & \dots & f(v_{1r}) & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & g(v_{11}) & \dots & g(v_{1r}) \\ & \vdots & & & \vdots & \\ f(v_{11}) & \dots & f(v_{1r}) & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & g(v_{11}) & \dots & g(v_{1r}) \end{pmatrix}.$$

A su vez, al intercambiar columnas se obtiene

$$\begin{pmatrix} \begin{pmatrix} f(v_{11}) & 0 \\ 0 & g(v_{11}) \end{pmatrix} & \dots \begin{pmatrix} f(v_{1r}) & 0 \\ 0 & g(v_{1r}) \end{pmatrix} \\ \vdots & \vdots \\ \begin{pmatrix} f(v_{r1}) & 0 \\ 0 & g(v_{r1}) \end{pmatrix} & \dots \begin{pmatrix} f(v_{rr}) & 0 \\ 0 & g(v_{rr}) \end{pmatrix} \end{pmatrix},$$

de donde se concluye que $(f \oplus g)_r$ y $f_r(v) \oplus g_r(v)$ son operadores de $\mathbb{C}^{r(n+m)}$ en sí mismo con la misma norma, o bien,

$$\| (f \oplus g)_r \| = \| f_r(v) \oplus g_r(v) \|.$$

Luego, para $v \in M_r(V)$ con $\|v\| \leq 1$

$$\begin{aligned} \| (f \oplus g)_r (v) \| &= \| f_r(v) \oplus g_r(v) \| \\ &= \text{máx}\{ \|f_r(v)\| \, , \, \|g_r(v)\| \} \\ &\leq \text{máx}\{ \|f_r\|_{cb} \, , \, \|g_r\|_{cb} \}, \end{aligned}$$

así

$$\| (f \oplus g)_r \| \leq \text{máx}\{ \|f_r\|_{cb} \, , \, \|g_r\|_{cb} \} \qquad \forall r \in \mathbb{N}.$$

Al tomar supremo sobre $r \in \mathbb{N}$ se consigue

$$\|f \oplus g\|_{cb} \leq \text{máx}\{ \ \|f\|_{cb} \ , \ \|g\|_{cb} \ \}.$$

Por otro lado, si $\alpha \in M_{n,m}$, $f \in M_m(V^*)$ y $\beta \in M_{m,n}$ se tiene

$$(\alpha f \beta)_r : M_r(V) \to M_r(M_n) = M_n(M_r),$$

luego, para $v \in M_r(V)$

$$\begin{aligned}
\alpha f_r(v)\beta &= (\alpha \otimes I_r) f_r(v)(\beta \otimes I_r) \\
&= \begin{pmatrix} \alpha & & \\ & \ddots & \\ & & \alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} f(v_{11}) & \cdots & f(v_{1r}) \\ \vdots & & \vdots \\ f(v_{r1}) & \cdots & f(v_{rr}) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \beta & & \\ & \ddots & \\ & & \beta \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} \alpha f(v_{11})\beta & \cdots & \alpha f(v_{1r})\beta \\ \vdots & & \vdots \\ \alpha f(v_{r1})\beta & \cdots & \alpha f(v_{rr})\beta \end{pmatrix} \\
&= [\alpha f(v_{ij})\beta] \\
&= (\alpha f \beta)_r (v),
\end{aligned}$$

de donde

$$\begin{aligned}
\| (\alpha f \beta)_r \| &= \|(\alpha \otimes I_r) f_r(v)(\beta \otimes I_r)\| \\
&\leq \|\alpha\| \ \|f_r\| \ \|\beta\| \\
&\leq \|\alpha\| \ \|f\|_{cb} \ \|\beta\|.
\end{aligned}$$

Finalmente al tomar supremo sobre $r \in \mathbb{N}$ se consigue

$$\|\alpha f \beta\|_{cb} \leq \|\alpha\| \ \|f\|_{cb} \ \|\beta\|,$$

y así, el dual de Banach de V, V^* tiene estructura de espacio de operadores.
■

Proposición 4.5. *Dado un espacio de operadores V, el espacio conjugado $\overline{V}$ tiene una estructura natural de espacio de operadores.*

Demostración
Basta normar al espacio $M_n\left(\overline{V}\right)$. Se define

$$\|[\overline{v_{ij}}]\| := \|[v_{ij}]\|.$$

Se tiene

$$\begin{aligned}
\|\alpha\,[\overline{v_{ij}}]\,\beta\| &= \left\|\sum_{k,l}\alpha_{ik}\cdot\overline{v_{kl}}\cdot\beta_{lj}\right\| \\
&= \left\|\sum_{k,l}\overline{\overline{\alpha_{ik}}v_{kl}\overline{\beta_{lj}}}\right\| \\
&= \left\|\overline{\sum_{k,l}\overline{\alpha_{ik}}v_{kl}\overline{\beta_{lj}}}\right\| \\
&= \left\|\sum_{k,l}\overline{\alpha_{ik}}v_{kl}\overline{\beta_{lj}}\right\| \\
&= \left\|\overline{\alpha}[v_{ij}]\overline{\beta}\right\| \\
&\leq \|\overline{\alpha}\|\;\|[v_{ij}]\|\;\|\overline{\beta}\| \\
&= \|\alpha\|\;\|[v_{ij}]\|\;\|\beta\|.
\end{aligned}$$

Por otro lado

$$\begin{aligned}
\|[\overline{v_{ij}}]\oplus[\overline{w_{ij}}]\| &= \left\|\begin{pmatrix}[\overline{v_{ij}}] & \overline{0}\\ \overline{0} & [\overline{w_{ij}}]\end{pmatrix}\right\| \\
&= \left\|\begin{pmatrix}[v_{ij}] & 0\\ 0 & [w_{ij}]\end{pmatrix}\right\| \\
&= \text{máx}\left\{\,\|v_{ij}\|\,,\,\|w_{ij}\|\,\right\} \\
&= \text{máx}\left\{\,\|\overline{v_{ij}}\|\,,\,\|\overline{w_{ij}}\|\,\right\}.
\end{aligned}$$

Así, $\overline{V}$ tiene estructura de espacio de operadores. ∎

Capítulo 5

Teorema de Ruan

Como ejemplo de la importancia del teorema de Ruan dentro de la teoría de espacios de operadores, considérese la siguiente situación. Suponga que se tiene a la mano sólo el concepto de espacio de operadores concreto y sea V un espacio de operadores concreto contenido en $B(H)$ con H un espacio de Hilbert, es decir, V es un subespacio de Banach de $B(H)$. Suponga ahora que $W \subset V$ es un subespacio de Banach, luego, W es un espacio de operadores concreto pues es un subespacio de Banach de $B(H)$. Se desea saber si el espacio de Banach V/W tiene estructura de espacio de operadores concreto. Claramente se necesita encontrar un espacio de Hilbert K tal que V/W sea subespacio de Banach de $B(K)$. Como se puede observar, no se tienen candidatos naturales para la elección de un espacio K que sea útil. Ahora, teniendo en cuenta el concepto de espacio de operadores abstracto y sabiendo que todo espacio de operadores concreto es un espacio de operadores abstracto como se enuncia en la proposición 3.2, se puede realizar la construcción de una estructura de espacio de operadores abstracto en el espacio de Banach V/W como en la proposición 4.2. Recordando que el objetivo es dar una estructura de espacio de operadores concreto a V/W, resta saber si todo espacio de operadores abstracto es un espacio de operadores concreto. Se ha mencionado antes que la respuesta a tal cuestión es el teorema de Ruan.

En el presente capítulo se demuestra el teorema de Ruan. Este teorema nos permite tratar simplemente con el concepto de espacios de operadores y no distinguir más entre espacios de operadores concretos y abstractos.

En la demostración del teorema de Ruan se necesitan cuatro lemas previos.

Lema 5.1. *Suponga que Σ es un cono de funciones reales continuas y afines en un subconjunto compacto convexo K de un espacio vectorial topológico E y que para cada $e \in \Sigma$ existe $k_e \in K$ tal que $e(k_e) \geq 0$. Entonces existe $k_0 \in K$ tal que $e(k_0) \geq 0$ para todo $e \in \Sigma$.*

Demostración
Para cada $e \in \Sigma$ se define

$$K(e) = \{k \in K | e(k) \geq 0\}.$$

Se probará que

$$\bigcap_{e \in \Sigma} K(e) \neq \emptyset.$$

Se tiene que cada $K(e)$ es compacto y por hipótesis, no vacío. Basta con probar que la familia $\{K(e)\}_{e \in \Sigma}$ tiene la propiedad de intersección finita. De no ser así, existen $e_1, \ldots, e_n$, tales que $K(e_1) \cap \ldots \cap K(e_n) = \emptyset$. Luego la función

$$\theta : K \to \mathbb{R}^n$$
$$k \mapsto (e_1(k), \ldots, e_n(k))$$

es continua y afín, pues cada función componente lo es. Así $\theta(K)$ es un subconjunto convexo y compacto de $\mathbb{R}^n$. Por hipótesis

$$\theta(K) \cap (\mathbb{R}^n)^+ = \emptyset.$$

Como consecuencia del lema de separación en $\mathbb{R}^n$, existe $f \in (\mathbb{R}^n)^*$ tal que

$$f((\mathbb{R}^n)^+) \geq 0$$
$$f(\theta(K)) < 0.$$

Como

$$f(x_1, \ldots, x_n) = c_1 x_1 + \ldots + c_n x_n,$$

con $c_j \geq 0$, entonces, $e := f \circ \theta = c_1 e_1 + \cdots + c_n e_n$ es un elemento de Σ tal que $K(e)$ es vacío, esto último es una contradicción, luego

$$\bigcap_{e\in\Sigma} K(e) \neq \emptyset. \blacksquare$$

Se denota por S_n al conjunto de estados en el álgebra C^*, M_n, es decir, el conjunto de funciones lineales continuas de M_n en $\mathbb{C}$ positivas (en el sentido de álgebras C^*) de norma uno.

Lema 5.2. *Si V es un espacio de operadores abstracto y $F \in [M_n(V)]^*$ con $\|F\| = 1$, entonces existen estados p_0 y q_0 en M_n tales que*

$$|F(\alpha v\beta)| \leq p_0(\alpha\alpha^*)^{\frac{1}{2}}\|v\|q_0(\beta^*\beta)^{\frac{1}{2}}$$

para toda $\alpha \in M_{nr}$, $\beta \in M_{rn}$ y $v \in M_r(V)$.

Demostración
Suponga que $\|v\| = 1$. Es suficiente probar que existen estados en M_n, p_0, $q_0 \in \mathbf{S}_n$ tales que

$$ReF(\alpha v\beta) \leq p_0(\alpha\alpha^*)^{\frac{1}{2}}q_0(\beta^*\beta)^{\frac{1}{2}},$$

ya que existe $\theta \in \mathbb{R}$ tal que $F(\alpha v\beta) = e^{i\theta}|F(\alpha v\beta)|$, luego

$$\begin{aligned}
|F(\alpha v\beta)| &= e^{-i\theta}F(\alpha v\beta)\\
&= F((e^{-i\theta}\alpha)v\beta)\\
&= ReF((e^{-i\theta}\alpha)v\beta)\\
&\leq p_0(e^{-i\theta}e^{i\theta}\alpha\alpha^*)^{\frac{1}{2}}q_0(\beta^*\beta)\\
&= p_0(\alpha\alpha^*)^{\frac{1}{2}}q_0(\beta^*\beta)^{\frac{1}{2}}.
\end{aligned}$$

A su vez, basta probar

$$ReF(\alpha v\beta) \leq \frac{1}{2}[p_0(\alpha\alpha^*) + q_0(\beta^*\beta)],$$

pues para $t > 0$ se tiene lo siguiente

$$\begin{aligned}
ReF(\alpha v\beta) &= ReF((t^{\frac{1}{2}}\alpha)v(t^{-\frac{1}{2}}\beta))\\
&\leq \frac{1}{2}[p_0((t^{\frac{1}{2}}\alpha)(t^{\frac{1}{2}}\alpha^*) + q_0((t^{-\frac{1}{2}}\beta^*)(t^{-\frac{1}{2}}\beta))]\\
&= \frac{1}{2}[tp_0(\alpha\alpha^*) + t^{-1}q_0(\beta^*\beta)].
\end{aligned}$$

I) Si $p_0(\alpha\alpha^*) \neq 0$ y $q_0(\beta^*\beta) \neq 0$, tomando $t = p_0(\alpha\alpha^*)^{-\frac{1}{2}} q_0(\beta^*\beta)^{\frac{1}{2}}$ se consigue lo deseado.

II) Si $p_0(\alpha\alpha^*) = 0$ y $q_0(\beta^*\beta) \neq 0$, tomando límite cuando t tiende a infinito se obtiene $ReF(\alpha v\beta) = 0$ y así lo deseado. De modo similar si $p_0(\alpha\alpha^*) \neq 0$ y $q_0(\beta^*\beta) = 0$.

III) Si $p_0(\alpha\alpha^*) = 0$ y $q_0(\beta^*\beta) = 0$ nuevamente se consigue $ReF(\alpha v\beta) = 0$ y por tanto lo deseado.

A fin de probar

$$ReF(\alpha v\beta) \leq \frac{1}{2}[p_0(\alpha\alpha^*) + q_0(\beta^*\beta)],$$

considere el subconjunto $K := \mathbf{S}_n \times \mathbf{S}_n$ de $(M_n \oplus M_n)^*$ el cual es convexo y compacto dado que $\mathbf{S}_n$ lo es. Sea $A(K)$ el conjunto de funciones reales continuas y afines en K. Dados $\alpha \in M_{nr}$, $\beta \in M_{rn}$ y $v \in M_r(V)$ con $\|v\| = 1$ se define $e_{\alpha,v,\beta} \in A(K)$ como

$$e_{\alpha,v,\beta}(p,q) := p(\alpha\alpha^*) + q(\beta^*\beta) - 2ReF(\alpha v\beta).$$

Se toma ahora

$$\Sigma := \{e_{\alpha,v,\beta} | \alpha \in M_{nr}, \beta \in M_{rn}, v \in M_r(V)\},$$

con esto en mente se desea probar que existe un punto $(p_0, q_0) \in K$ tal que $e(p_0, q_0) \geq 0$ para toda $e \in \Sigma$. Por el lema anterior, basta probar que para cada $e \in \Sigma$ existe un punto $(p_e, q_e) \in K$ tal que $e(p_e, q_e) \geq 0$ y que Σ es un cono.
Para $e = e_{\alpha,v,\beta} \in \Sigma$ se eligen dos estados p_e, $q_e \in \mathbf{S}_n$ tales que

$$\begin{aligned} p_e(\alpha\alpha^*) &= \|\alpha\alpha^*\| = \|\alpha\|^2 \\ q_e(\beta^*\beta) &= \|\beta^*\beta\| = \|\beta\|^2, \end{aligned}$$

luego, como

$$ReF(\alpha v\beta) \leq |F(\alpha v\beta)| \leq \|\alpha v\beta\| \leq \frac{1}{2}[\|\alpha\|^2 + \|\beta\|^2],$$

entonces

$$e(p_e, q_e) = \|\alpha\|^2 + \|\beta\|^2 - 2ReF(\alpha v\beta) \geq 0.$$

Por otro lado, si $c \geq 0$, entonces

$$\begin{aligned}
ce_{\alpha,v,\beta}(p,q) &= c\big[p(\alpha\alpha^*) + q(\beta^*\beta) - 2ReF(\alpha v\beta)\big] \\
&= cp(\alpha\alpha^*) + cq(\beta^*\beta) - 2cReF(\alpha v\beta) \\
&= p((c^{\frac{1}{2}}\alpha)(c^{\frac{1}{2}}\alpha^*)) + q((c^{\frac{1}{2}}\beta^*)(c^{\frac{1}{2}}\beta)) - 2ReF((c^{\frac{1}{2}}\alpha)v(c^{\frac{1}{2}}\beta)) \\
&= e_{c^{\frac{1}{2}}\alpha,v,c^{\frac{1}{2}}\beta}(p,q).
\end{aligned}$$

Finalmente para $e_{\alpha,v,\beta}$, $e_{\alpha',v',\beta'} \in \Sigma$ y tomando

$$\begin{aligned}
\alpha'' : &= \begin{bmatrix} \alpha & \alpha' \end{bmatrix} \\
\beta'' : &= \begin{bmatrix} \beta \\ \beta' \end{bmatrix} \\
v'' : &= v \oplus v',
\end{aligned}$$

se tiene

$$\begin{aligned}
(\alpha'')* : &= \begin{bmatrix} \alpha^* \\ \alpha'^* \end{bmatrix} \\
(\beta'')^* : &= \begin{bmatrix} \beta^* & \beta'^* \end{bmatrix} \\
\|v''\| &= \|v \oplus v'\| = 1,
\end{aligned}$$

y por tanto

$$\begin{aligned}
e_{\alpha,v,\beta}(p,q) + e_{\alpha',v',\beta'}(p,q) &= p(\alpha\alpha^*) + q(\beta^*\beta) - 2ReF(\alpha v\beta) \\
&\quad +p(\alpha'\alpha'^*) + q(\beta'^*\beta') - 2ReF(\alpha' v'\beta') \\
&= p(\alpha\alpha^* + \alpha'\alpha'^*) + q(\beta^*\beta + \beta'^*\beta') \\
&\quad -2ReF(\alpha v\beta + \alpha' v'\beta') \\
&= p\left(\begin{bmatrix} \alpha & \alpha' \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha^* \\ \alpha'^* \end{bmatrix}\right) \\
&\quad +q\left(\begin{bmatrix} \beta^* & \beta'^* \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \beta \\ \beta' \end{bmatrix}\right) \\
&\quad -2ReF\left(\begin{bmatrix} \alpha & \alpha' \end{bmatrix} v'' \begin{bmatrix} \beta \\ \beta' \end{bmatrix}\right) \\
&= e_{\alpha'',v'',\beta''}(p,q). \blacksquare
\end{aligned}$$

Lema 5.3. *Sean V un espacio de operadores abstracto y $F \in [M_n(V)]^*$ con $\|F\| = 1$, entonces existe una contracción completa $\varphi : V \to M_n$ y vectores unitarios $\eta, \xi \in (\mathbb{C}^n)^n$ tales que*

$$F(v) = \langle \varphi_n(v)\eta | \xi \rangle$$

para todo $v \in M_n(V)$.

Demostración
Para F, sean p_0 y q_0 estados en M_n como en el lema anterior. Por el teorema de representación GNS (que se puede encontrar en [1, p. 27]), existen representaciones π y θ de M_n en espacios de Hilbert de dimensión finita H y K respectivamente, con vectores cíclicos $\xi_0 \in H$ $\eta_0 \in K$ tales que

$$\begin{array}{rcl} p_0(\alpha) & = & \langle \pi(\alpha)\xi_0 | \xi_0 \rangle \\ q_0(\alpha) & = & \langle \theta(\alpha)\eta_0 | \eta_0 \rangle \end{array}$$

para toda $\alpha \in M_n$.

Para $\alpha = \begin{pmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 & \dots & \alpha_n \end{pmatrix} \in M_{1n}$ se define $\tilde{\alpha} \in M_n$ como

$$\tilde{\alpha} := \begin{pmatrix} \alpha_1 & \dots & \alpha_n \\ 0 & \dots & 0 \\ \vdots & & \vdots \\ 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}.$$

El subespacio de M_n de tales matrices se denotará por $\tilde{M_{1n}}$ y se toma

$$\begin{array}{rcl} H_0 & = & \pi(\tilde{M_{1n}})\xi_0 \subset H \\ K_0 & = & \theta(\tilde{M_{1n}})\eta_0 \subset K. \end{array}$$

Para $v \in V$ fijo, se define la forma sesquilineal B_v de la siguiente manera

$$\begin{array}{rcl} B_v : K_0 \times H_0 & \to & \mathbb{C} \\ (\ \theta(\tilde{\beta})\eta_0\ ,\ \pi(\tilde{\alpha})\xi_0\ ) & \mapsto & F(\alpha^* v \beta). \end{array}$$

La forma sesquilineal B_v es acotada pues se tiene

$$\begin{aligned}
B_v(\ \theta(\tilde{\beta})\eta_0\ ,\ \pi(\tilde{\alpha}\ )\xi_0)) &= F(\alpha^* v\beta) \\
&\leq p_0(\alpha^*(\alpha^*)^*)^{\frac{1}{2}}\ \|v\|\ q_0(\beta^*\beta)^{\frac{1}{2}} \\
&= p_0(\alpha^*\alpha)^{\frac{1}{2}}\ \|v\|\ q_0(\beta^*\beta)^{\frac{1}{2}} \\
&= \langle \pi(\alpha^*\alpha)\xi_0 \mid \xi_0\rangle^{\frac{1}{2}}\ \ \|v\|\ \ \langle \theta(\beta^*\beta)\eta_0 \mid \eta_0\rangle^{\frac{1}{2}} \\
&= \langle \pi(\tilde{\alpha}^*\tilde{\alpha})\xi_0 \mid \xi_0\rangle^{\frac{1}{2}}\ \ \|v\|\ \ \left\langle \theta(\tilde{\beta}^*\tilde{\beta})\eta_0 \mid \eta_0\right\rangle^{\frac{1}{2}} \\
&= \langle \pi(\tilde{\alpha})\xi_0 \mid \pi(\tilde{\alpha})^*\xi_0\rangle^{\frac{1}{2}}\ \ \|v\|\ \ \left\langle \theta(\tilde{\beta})\eta_0 \mid \theta(\tilde{\beta})^*\eta_0\right\rangle^{\frac{1}{2}} \\
&= \|\pi(\tilde{\alpha})\xi_0\|\ \|v\|\ \|\theta(\tilde{\beta})\eta_0\|.
\end{aligned}$$

Para la forma sesquilinear B_v existe un operador $\varphi_0(v) : H_0 \to K_0$ tal que

$$F(\alpha^* v\beta) = \langle \varphi_0(v)\theta(\tilde{\beta})\eta_0 \mid \pi(\tilde{\alpha}\xi_0)\rangle.$$

La función φ_0 es lineal pues se tiene

$$\begin{aligned}
&\left\langle [\varphi_0(v) + \lambda\varphi_0(w))]\theta(\tilde{\beta})\eta_0 \mid \pi(\tilde{\alpha}\xi_0)\right\rangle \\
&= \left\langle \varphi_0(v)\theta(\tilde{\beta})\eta_0 \mid \pi(\tilde{\alpha}\xi_0)\right\rangle + \lambda \left\langle \varphi_0(w)\theta(\tilde{\beta})\eta_0 \mid \pi(\tilde{\alpha})\xi_0\right\rangle \\
&= F(\alpha^* v\beta) + \lambda F(\alpha^* w\beta) \\
&= F(\alpha^* v\beta + \lambda\alpha^* w\beta) \\
&= F(\alpha^*(v + \lambda w)\beta) \\
&= \left\langle \varphi_0(v + \lambda w)\theta(\tilde{\beta})\eta \mid \pi(\tilde{\alpha})\xi_0\right\rangle.
\end{aligned}$$

Los espacios H_0 y K_0 tienen dimensiones h, $k \leq n$ y se pueden identificar con los subespacios $\mathbb{C}^h \oplus 0_{n-h}$, $\mathbb{C}^k \oplus 0_{n-k}$ de $\mathbb{C}^n$. Si se toma E como la proyección de $\mathbb{C}^n$ en K_0 y se define

$$\varphi(v) := \varphi_0 E : \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}^n,$$

se consigue una función $\varphi : V \to M_n$ que cumple

$$F(\alpha^* v\beta) = \left\langle \varphi(v)\theta(\tilde{\beta})\eta_0 \mid \pi(\tilde{\alpha})\xi_0\right\rangle.$$

Ahora, dada una matriz $v \in M_n(V)$ se obtiene

$$F(v) = F\left(\sum_{i,j} E_i^* v_{ij} E_j\right) = \sum_{i,j} \left(F\left(E_i^* v_{ij} E_j\right)\right)$$

$$= \sum_{i,j} \left\langle \varphi_0(v_{ij})\theta\left(\tilde{E}_j\right)\eta_0 \mid \pi\left(\tilde{E}_i\right)\xi_0 \right\rangle$$

$$= \sum_{j=1}^{n} \left\langle \varphi_0(v_{1j})\theta\left(\tilde{E}_j\right)\eta_0 \mid \pi\left(\tilde{E}_1\right)\xi_0 \right\rangle + \ldots$$
$$+ \sum_{j=1}^{n} \left\langle \varphi_0(v_{nj})\theta\left(\tilde{E}_j\right)\eta_0 \mid \pi\left(\tilde{E}_n{}^*\right)\xi_0 \right\rangle$$

$$= \left\langle \sum_{j=1}^{n} \varphi_0(v_{1j})\theta\left(\tilde{E}_j\right)\eta_0 \mid \pi\left(\tilde{E}_1\right)\xi_0 \right\rangle + \ldots$$
$$+ \left\langle \sum_{j=1}^{n} \varphi_0(v_{nj})\theta\left(\tilde{E}_j\right)\eta_0 \mid \pi\left(\tilde{E}_n{}^*\right)\xi_0 \right\rangle$$

$$= \left\langle \begin{pmatrix} \sum_{j=1}^{n} \varphi_0(v_{1j})\theta\left(\tilde{E}_j\right)\eta_0 \\ \vdots \\ \sum_{j=1}^{n} \varphi_0(v_{nj})\theta\left(\tilde{E}_j\right)\eta_0 \end{pmatrix} \mid \begin{pmatrix} \pi\left(\tilde{E}_1\right)\xi_0 \\ \vdots \\ \pi\left(\tilde{E}_n\right)\xi_0 \end{pmatrix} \right\rangle$$

$$= \left\langle \begin{pmatrix} \varphi(v_{11}) & \cdots & \varphi(v_{1n}) \\ \vdots & & \vdots \\ \varphi(v_{n1}) & \cdots & \varphi(v_{nn}) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \theta(\tilde{E}_1)\eta_0 \\ \vdots \\ \theta(\tilde{E}_n)\eta_0 \end{pmatrix} \mid \begin{pmatrix} \pi(\tilde{E}_1)\xi_0 \\ \vdots \\ \pi(\tilde{E}_n)\xi_0 \end{pmatrix} \right\rangle$$

$$= \langle \varphi_n(v)\eta \mid \xi \rangle,$$

con η, $\xi \in (\mathbb{C}^n)^n$ definidos como

$$\eta := \begin{pmatrix} \theta(\tilde{E}_1)\eta_0 \\ \vdots \\ \theta(\tilde{E}_n)\eta_0 \end{pmatrix}$$

$$\xi := \begin{pmatrix} \pi(\tilde{E}_1)\xi_0 \\ \vdots \\ \pi(\tilde{E}_n)\xi_0 \end{pmatrix}$$

y tales que

$$\|\eta\|^2 = \sum_{j=1}^{n} \left\| \theta(\tilde{E}_j)\eta_0 \right\|^2 = \sum_{j=1}^{n} p_0(E_j^* E_j) = q_0(I) = 1.$$

Resta probar que φ es una contracción completa, para ello basta probar que φ_n es una contracción pues $\|\varphi\| = \|\varphi_n\|$. Si se define la forma sesquilineal

$$\begin{array}{rcl} K_0^n \times H_0^n & \to & \mathbb{C} \\ (\eta_1, \xi_1) & \mapsto & \langle \varphi_n(v)\eta_1 | \xi_1 \rangle \end{array}$$

para cada $v \in M_n(V)$, $\eta_1 \in K_0^n$ y $\xi_1 \in H_0^n$, con

$$\eta_1 = \begin{pmatrix} \theta(\tilde{\beta}_1)\eta_0 \\ \vdots \\ \theta(\tilde{\beta}_n \eta_0) \end{pmatrix}$$

$$\xi_1 = \begin{pmatrix} \pi(\tilde{\alpha_1})\xi_0 \\ \vdots \\ \pi(\tilde{\alpha_n})\xi_0 \end{pmatrix},$$

donde α_j, $\beta_j \in M_{1n}$, se tiene

$$\|\eta_1\|^2 = \sum_{i=1}^{n} \left\| \theta(\tilde{\beta}_i)\eta_0 \right\|^2 = \sum_{i=1}^{n} q_0(\beta_i^* \beta_i) = q_0(\beta^* \beta),$$

y de manera análoga $\|\xi_1\|^2 = p_0(\alpha^* \alpha)$, en donde

$$\beta = \begin{pmatrix} \beta_1 \\ \vdots \\ \beta_n \end{pmatrix} \in M_n$$

$$\alpha = \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{pmatrix} \in M_n.$$

Luego

$$|\langle \varphi_n(v)\eta_1 \mid \xi_1\rangle| = |\langle [\varphi(v_{ij})]\eta_1 \mid \xi_1\rangle|$$

$$= |\langle [\varphi_0(v_{ij})E]\eta_1 \mid \xi_1\rangle|$$

$$= |\langle [\varphi_0(v_{ij})]\eta_1 \mid \xi_1\rangle|$$

$$= |\langle [(\varphi_0)_n(v_{ij})]\eta_1 \mid \xi_1\rangle|$$

$$= |\langle (\varphi_0)_n([v_{ij}])\eta_1 \mid \xi_1\rangle|$$

$$= \left| \left\langle \begin{pmatrix} \varphi_0(v_{11}) & \cdots & \varphi_0(v_{1n}) \\ \vdots & & \vdots \\ \varphi_0(v_{n1}) & \cdots & \varphi_0(v_{nn}) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \theta(\tilde{\beta_1})\eta_0 \\ \vdots \\ \theta(\tilde{\beta_n}\eta_0) \end{pmatrix} \mid \begin{pmatrix} \pi(\tilde{\alpha_1})\xi_0 \\ \vdots \\ \pi(\tilde{\alpha_n})\xi_0 \end{pmatrix} \right\rangle \right|$$

$$= \left| \sum_{i,j} \left\langle \varphi_0(v_{ij})\theta(\tilde{\beta_j})\eta_0 \mid \pi(\tilde{\alpha_i})\xi_0 \right\rangle \right|$$

$$= \left| \sum_{i,j} F(\alpha_i^* v_{ij}\beta_j) \right|$$

$$= |F(\sum_{i,j} \alpha_i^* v_{ij}\beta_j)|$$

$$= |F(\alpha^* v\beta)|$$

$$\leq p_0(\alpha^*\alpha)^{\frac{1}{2}}\|v\| q_0(\beta^*\beta)^{\frac{1}{2}}$$
$$= \|v\|\|\eta_1\|\|\xi_1\|,$$

de donde se obtiene que $\|\varphi_n(v)\| \leq \|v\|$ para todo $v \in M_n(V)$. ∎

Lema 5.4. *Sea V un espacio de operadores abstracto, entonces para cada $v \in M_n(V)$ existe una contracción completa $\varphi : V \to M_n$ tal que*

$$\|\varphi_n(v)\| = \|v\|.$$

Demostración
Por teorema de Hanh-Banach, existe un funcional lineal $F \in (M_n(V))^*$ tal que $\|F\| = 1$ y $F(v) = \|v\|$, luego, por el lema anterior existe una contracción completa $\varphi : V \to M_n$ tal que

$$F(v) = \langle \varphi_n(v)\eta|\xi\rangle,$$

así

$$\|v\| = |F(v)| = |\langle \varphi_n(v)\eta|\xi\rangle| \leq \|\varphi_n(v)\| \leq \|v\|,$$

es decir, $\|\varphi_n(v)\| = \|v\|$. ∎

Teorema 5.1. *Sea V un espacio vectorial matricialmente normado. Entonces existe un espacio de Hilbert H, un subespacio vectorial W de $B(H)$ y $\Phi : V \to W$ tal que Φ es un isomorfismo y una isometría completa.*

Demostración
Para cada $n \in \mathbb{N}$ sea

$$S_n := S_n(V) = CB(V, M_n)_{\|\cdot\|_{cb}\leq 1}$$

y

$$S := S(V) = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} S_n(V).$$

Se define

$$H := \bigoplus_{\varphi\in S} \mathbb{C}^{n(\varphi)},$$

donde $n(\varphi)$ es el número natural n tal que $\varphi \in S_n$, de manera mas explícita, para $\varphi \in S$ existe $n := n(\varphi)$ tal que $\varphi \in S_n$, es decir,

$$\varphi : V \to M_n$$

es una contracción completa y

$$\varphi(v) : \mathbb{C}^{n(\varphi)} \to \mathbb{C}^{n(\varphi)}.$$

El espacio H es un espacio pre-Hilbert pues es suma directa de espacios de Hilbert. Se toma

$$\begin{aligned} \Phi : V &\to B(H) \\ v &\mapsto (\varphi(v))_{\varphi\in S} \end{aligned}$$

con

$$\begin{array}{rcl}(\varphi(v))_{\varphi\in S} : H & \to & H \\ (c_\varphi)_{\varphi\in S} & \mapsto & (\varphi(v)(c_\varphi))_{\varphi\in S}.\end{array}$$

La aplicación Φ es lineal ya que cada elemento de S lo es. Para ver que Φ es inyectiva basta ver que si $v \in V$ es tal que $\Phi(v) = 0$, entonces $\varphi(v) = 0$ para toda $\varphi \in S$, luego $v = 0$. Ahora, a fin de ver que Φ es una isometría completa, se estima su n-ésima ampliación. Para $v \in M_n(V)$

$$\begin{array}{rcl}\Phi_n(v) & = & [\Phi(v_{ij})] \\ & = & [(\varphi(v_{ij}))_{\varphi\in S}] \\ & = & ([\varphi(v_{ij})])_{\varphi\in S} \\ & = & (\varphi_n(v))_{\varphi\in S},\end{array}$$

donde se ha utilizado la identificación de espacios vectoriales

$$M_n\left(\prod_{\varphi\in S} M_{n(\varphi)}\right) = \prod_{\varphi\in S} M_n\left(M_{n(\varphi)}\right).$$

Por la forma que en que se ha expresado $\Phi_n(v)$ se tiene que su norma está dada por

$$\|\Phi_n(v)\| = \|(\varphi_n(v))_{\varphi\in S}\| = \sup_{\varphi\in S}\|\varphi_n(v)\|.$$

Teniendo en cuenta que cada elemento de S es una contracción completa, se consigue

$$\|\Phi_n(v)\| \leq \|v\|.$$

Por otra parte, gracias al lema anterior, dado $v \in M_n(V)$, existe una contracción completa $\varphi_0 : V \to M_n$ tal que $\|(\varphi_0)_n(v)\| = \|v\|$, luego

$$\|v\| = \|(\varphi_0)_n(v)\| \leq \|\Phi_n(v)\|.$$

Así, Φ es una isometría completa de el espacio matricialmente normado V en el subespacio de $B(H)$, $W = \Phi(V)$. ∎

Corolario 5.1. *Todo espacio de operadores abstracto es un espacio de operadores concreto.*

Demostración
Por el teorema anterior se tiene que si V es un espacio de operadores abstracto y por tal razón un espacio vectorial matricialmente normado, existe un espacio pre-Hilbert H que sin pérdida de generalidad se puede suponer completo, una isometría completa $\Phi : V \to B(H)$ y un subespacio vectorial W de $B(H)$ tal que V es completamente isométrico a W. Del hecho de que V es espacio de Banach se sigue que W es un subespacio de Banach de $B(H)$, es decir, V es completamente isométrico a W. ∎

Capítulo 6

El espacio OH

Como es bien sabido, los espacios de Hilbert desempeñan un papel importante dentro de la categoría de espacios de Banach. En este último capítulo se prueba una caracterización de espacios de Hilbert y se muestra la construcción de Gilles Pisier del espacio OH. Gilles Pisier construyó el espacio OH buscando, en la categoría de espacios de operadores, el análogo a los espacios de Hilbert según la caracterización antes mencionada.

6.1. Caracterización de espacios de Hilbert via espacio anti-dual

Sea H un espacio de Hilbert, luego, existe un conjunto de índices I tal que H es isométrico a $\ell_2(I)$ bajo una isometría u. Evidentemente $\overline{u^*}$ también es una isometría, así, $\overline{u^*}u : H \to \overline{H^*}$ es isometría. Resumiendo, si H es un espacio de Hilbert, entonces existe un encaje u (de hecho isometría) tal que $\overline{u^*}u : H \to \overline{H^*}$ es isometría. De manera recíproca, si E es un espacio de Banach con la propiedad de que existe un encaje $u : E \to \ell_2(I)$ tal que $\overline{u^*}u : E \to \overline{E^*}$ es isometría, entonces E es isométrico a un espacio de Hilbert. De manera formal se tiene la siguiente proposición.

Proposición 6.1. *Sea E un espacio de Banach y $u : E \to \ell_2(I)$ un operador acotado e inyectivo tal que $\overline{u^*}u : E \to \overline{E^*}$ es una isometría, entonces E es isométrico a un espacio de Hilbert.*

Demostración

Se define

$$\begin{array}{rcl} \langle \cdot \mid \cdot \rangle : E \times E & \to & \mathbb{C} \\ (x, y) & \mapsto & \langle u(x) \mid u(y) \rangle . \end{array}$$

Claramente se ha definido un producto escalar en E pero no se sabe aún si la norma inducida por este producto sea la norma original de E.

Se puede notar que

$$\overline{u^*} u(x)(y) = \langle x \mid y \rangle ,$$

pues

$$\begin{array}{rcl} \overline{u^*} u(x)(y) & = & \overline{u^* u(x)(y)} \\ & = & \overline{u^* \left(\langle \cdot \mid u(x) \rangle \right) (y)} \\ & = & \overline{\langle u(y) \mid u(x) \rangle} \\ & = & \langle u(x) \mid u(y) \rangle . \end{array}$$

Denotando por $\| \cdot \|_h$ la norma inducida por el producto escalar y dado que $\overline{u^*} u$ es isometría

$$\begin{array}{rcl} \|x\|_h^2 & = & \langle x \mid x \rangle \\ & = & \overline{u^*} u(x)(x) \\ & \leq & \|\overline{u^*} u(x)\| \, \|x\| \\ & = & \|x\|^2 , \end{array}$$

así

$$\|x\|_h \leq \|x\| .$$

Por otra parte, por desigualdad de Cauchy-Schwarz

$$\begin{aligned} |\overline{u^*}u(x)(y)| &= |\langle x \mid y\rangle| \\ &\leq \|x\|_h\|y\|_h \\ &\leq \|x\|_h\|y\|, \end{aligned}$$

así, tomando supremo sobre y con $\|y\| \leq 1$ se consigue

$$\|x\| = \|\overline{u^*}u(x)\| \leq \|x\|_h$$

es decir, el operador identidad de $(E, \|\cdot\|)$ en $(E, \|\cdot\|_h)$ es una isometría. Mas aún, E es isométrico a un subespacio cerrado de $\ell_2(I)$. ■

6.2. Construcción del espacio OH

Considere dos espacios de operadores, $E \subset B(H)$ y $F \subset B(K)$, luego, $e \otimes f \in B(H \otimes K)$ para cada $e \otimes f$ elemento del tensor algebraico $E \otimes F$. Normando a $E \otimes F$ con la norma inducida por $B(H \otimes K)$ se cumple que $\|e \otimes f\| = \|e\|\|f\|$. La completación de $E \otimes F$, que se denotará también por $E \otimes F$ es un espacio de operadores.

Cabe mencionar que en el párrafo anterior se ha realizado la construcción de un producto tensorial de espacios de operadores. Tal producto tensorial recibe el nombre de producto tensorial mínimo o producto tensorial inyectivo. En la teoría de espacios de operadores existen múltiples formas de normar al producto tensorial algebraico $E \otimes F$ para dotarlo de una estructura de espacio de operadores, tales normas se conocen como normas tensoriales de espacios de operadores. En esta tesis sólo se trabaja con el producto tensorial antes construido, es decir, el mínimo. La demostración de la proposición 6.6 utiliza una descripción específica de la norma tensorial antes construida.

Los siguientes resultados tienen como objetivo probar que un operador $u : E \to F$ es completamente acotado si y sólo si el operador $I_{B(\ell_2)} \otimes u$ de $B(\ell_2) \otimes E$ en $B(\ell_2) \otimes F$ es acotado. Se puede notar que la complejidad de probar que u_n es un operador acotado y estimar el supremo sobre $n \in \mathbb{N}$

se reduce a sólo estimar la norma de un operador.

Dado $n \in \mathbb{N}$ fijo, la inclusión

$$\begin{array}{rcl} s : \mathbb{C}^n & \to & \ell_2 \\ (c_1, \dots, c_n) & \mapsto & (c_1, \dots, c_n, 0, \dots) \end{array}$$

es claramente una isometría. A su vez, es claro que la proyección

$$\begin{array}{rcl} p : \ell_2 & \to & \mathbb{C}^n \\ (y_1, \dots, y_n, \dots) & \mapsto & (y_1, \dots, y_n) \end{array}$$

es una contracción (i.e. $\|p\| \leq 1$).

Sea $\alpha = [\alpha_{ij}] \in M_n = B(\mathbb{C}^n)$ una matriz, luego, la matriz de orden infinito

$$\begin{pmatrix} \alpha & \cdots \\ \vdots & \ddots \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} \alpha_{11} & \cdots & \alpha_{1n} & 0 & \cdots \\ \vdots & & \vdots & \vdots & \\ \alpha_{n1} & \cdots & \alpha_{nn} & 0 & \cdots \\ 0 & \dots & 0 & \ddots & \\ \vdots & & \vdots & & \end{pmatrix}$$

define un operador en ℓ_2 a modo de producto matricial, o equivalentemente,

$$\begin{pmatrix} \alpha_{11} & \cdots & \alpha_{1n} & 0 & \cdots \\ \vdots & & \vdots & \vdots & \\ \alpha_{n1} & \cdots & \alpha_{nn} & 0 & \cdots \\ 0 & \dots & 0 & \ddots & \\ \vdots & & \vdots & & \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \\ y_{n+1} \\ \vdots \end{pmatrix} := s \circ \alpha \circ p(y),$$

donde $y = (y_1, \dots, y_n, \dots) \in \ell_2$. Se define entonces la aplicación

$$\begin{array}{rcl} \phi : M_n & \to & B(\ell_2) \\ \alpha & \mapsto & \begin{pmatrix} \alpha & \cdots \\ \vdots & \ddots \end{pmatrix}. \end{array}$$

La siguiente proposición muestra que los espacios M_n se pueden encajar en $B(\ell_2)$, o bien, que una matriz de orden finito se puede ampliar a orden infinito (numerable) sin cambiar su norma.

Proposición 6.2. *La aplicación ϕ es una isometría.*

Demostración
Sea $\alpha \in M_n$, recuerde que

$$\|\alpha\| = \sup_{x \in B_{\mathbb{C}^n}} \|\alpha(x)\|,$$

y

$$\|\phi(\alpha)\| = \sup_{y \in B(\ell_2)} \|\phi(\alpha)(y)\|.$$

Dado $x \in B_{\mathbb{C}^n}$ se cumple que $s(x) \in B_{\ell_2}$, luego como

$$\|\alpha(x)\| = \|\phi(\alpha)(s(x))\| \leq \|\phi(\alpha)\|,$$

entonces $\|\alpha\| \leq \|\phi(\alpha)\|$. Por otro lado como $\phi(\alpha) = s \circ \alpha \circ p$, con s isometría y p contracción, entonces $\|\phi(\alpha)\| \leq \|\alpha\|$, por lo que ϕ es isometría. ∎

En la siguiente proposición se utiliza el producto tensorial de dos espacios de Hilbert construido en el capítulo 1 (ver pag. 11).

Proposición 6.3. *Sea K un espacio de Hilbert. La aplicación*

$$\begin{array}{rcl} s \otimes I_K : \mathbb{C}^n \otimes K & \to & \ell_2 \otimes K \\ x \otimes k & \mapsto & s(x) \otimes k \end{array}$$

es una isometría.

Demostración
Basta probar que

$$\left\| s \otimes I_K \left(\sum e_i \otimes k_i \right) \right\| = \left\| \sum_{i=1}^{n} e_i \otimes k_i \right\|,$$

donde $\sum e_i \otimes k_i \in \mathbb{C}^n \otimes K$ es una suma finita de a lo más n sumandos y $e_1, \ldots, e_n$ es la base canónica de $\mathbb{C}^n$, pues

$$\begin{aligned}
\sum_{j=1}^{m} c_j \otimes k_j &= \sum_{j=1}^{m} \left(\sum_{i=1}^{n} c_i^j e_i \right) \otimes k_j \\
&= \sum_{j=1}^{m} \sum_{i=1}^{n} c_i^j e_i \otimes k_j \\
&= \sum_{j=1}^{m} \sum_{i=1}^{n} e_i \otimes c_i^j k_j \\
&= \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} e_i \otimes c_i^j k_j \\
&= \sum_{i=1}^{n} e_i \otimes \left(\sum_{j=1}^{m} c_i^j k_j \right)
\end{aligned}$$

de donde

$$\begin{aligned}
\left\| s \otimes I_K \left(\sum_{j=1}^{m} c_j \otimes k_j \right) \right\| &= \left\| s \otimes I_K \left(\sum_{i=1}^{n} e_i \otimes \left(\sum_{j=1}^{m} c_i^j k_j \right) \right) \right\| \\
&= \left\| \sum_{i=1}^{n} e_i \otimes \left(\sum_{j=1}^{m} c_i^j k_j \right) \right\| \\
&= \left\| \sum_{j=1}^{m} c_j \otimes k_j \right\|.
\end{aligned}$$

Sea pues $\sum e_i \otimes k_i \in \mathbb{C}^n \otimes K$, de la ortogonalidad de los elementos $s(e_i)$ en ℓ_2 se tiene

$$
\begin{aligned}
\left\| s \otimes I_K \left(\sum e_i \otimes k_i \right) \right\|^2 &= \left\| \sum s(e_i) \otimes k_i \right\|^2 \\
&= \left\langle \sum s(e_i) \otimes k_i \mid \sum s(e_i) \otimes k_i \right\rangle_{\ell_2 \otimes K} \\
&= \sum_{i,j} \langle s(e_i) \otimes k_i \mid s(e_j) \otimes k_j \rangle_{\ell_2 \otimes K} \\
&= \sum_{i,j} \langle s(e_i) \mid s(e_j) \rangle_{\ell_2} \, \langle k_i \mid k_j \rangle_K \\
&= \sum_{i,j} \delta_{ij} \langle k_i \mid k_j \rangle_K \\
&= \sum_{i,j} \langle e_i \mid e_j \rangle_{\ell_2} \langle k_i \mid k_j \rangle_K \\
&= \left\langle \sum e_i \otimes k_i \mid \sum e_i \otimes k_i \right\rangle_{\ell_2 \otimes K} \\
&= \left\| \sum e_i \otimes k_i \right\|^2 . \blacksquare
\end{aligned}
$$

El siguiente resultado muestra que una matriz en F se puede considerar como una matriz infinita en F sin cambiar su norma.

Proposición 6.4. *Sea $F \subset B(K)$ un espacio de operadores. La aplicación*

$$
\begin{aligned}
\phi \otimes I_F : M_n \otimes F &\rightarrow B(\ell_2) \otimes F \\
\alpha \otimes x &\mapsto \phi(\alpha) \otimes x
\end{aligned}
$$

es una isometría.

Demostración

Sea $\sum \alpha_i \otimes x_i \in M_n \otimes F$. Sea $\sum c_j \otimes k_j \in \mathbb{C}^n \otimes K$ con norma menor o igual a 1, luego, como $s \otimes I_K$ es isometría, $\| \sum s(c_j) \otimes k_j \| \leq 1$. Se tiene

$$\begin{aligned}
\left\|\sum \phi(\alpha_i)\otimes x_i\left(\sum s(c_j)\otimes k_j\right)\right\| &= \left\|\sum_{i,j}\phi(\alpha_i)s(c_j)\otimes x_i(k_j)\right\| \\
&= \left\|\sum_{i,j} s(\alpha_i(c_j))\otimes x_i(k_j)\right\| \\
&= \left\|s\otimes I_K\left(\sum_{i,j}\alpha_i(c_j)\otimes x_i(k_j)\right)\right\| \\
&= \left\|\sum_{i,j}\alpha_i(c_j)\otimes x_i(k_j)\right\| \\
&= \left\|\sum_i \alpha_i\otimes x_i\left(\sum_j c_j\otimes k_j\right)\right\|,
\end{aligned}$$

de donde

$$\left\|\sum \alpha_i\otimes x_i\right\| \le \left\|\sum \phi(\alpha_i)\otimes x_i\right\|.$$

Por otro lado se puede notar que

$$\begin{aligned}
\sum \phi(\alpha_i)\otimes x_i &= \sum (s\circ\alpha_i\circ p)\otimes x_i \\
&= \sum (s\otimes I_K)(\alpha_i\otimes x_i)(p\otimes I_K) \\
&= (s\otimes I_K)\left(\sum \alpha_i\otimes x_i\right)(p\otimes I_K),
\end{aligned}$$

lo que conduce a

$$\left\|\sum \phi(\alpha_i)\otimes x_i\right\| \le \left\|\sum \alpha_i\otimes x_i\right\|.$$

Finalmente

$$\begin{aligned}
\left\|\phi\otimes I_F\left(\sum \alpha_i\otimes x_i\right)\right\| &= \left\|\sum \phi(\alpha_i)\otimes x_i\right\| \\
&= \left\|\sum \alpha_i\otimes x_i\right\|. \blacksquare
\end{aligned}$$

Con ayuda de los resultados anteriores se prueba la siguiente proposición.

Proposición 6.5. *Sean E, F dos espacios de operadores y $u : E \to F$ un operador lineal. El operador*

$$\begin{aligned} I_{B(\ell_2)} \otimes u : B(\ell_2) \otimes E &\to B(\ell_2) \otimes F \\ a \otimes e &\mapsto a \otimes u(e) \end{aligned}$$

es acotado (resp. isometría) si y solo si u es completamente acotado (resp. isometría completa).

Demostración
Suponga que $I_{B(\ell_2)} \otimes u$ es isometría (con un simple cambio se prueba el caso en que $I_{B(\ell_2)} \otimes u$ es acotado). Para $n \in \mathbb{N}$ se tiene

$$\begin{aligned} \left\| u_n \left(\sum \alpha_i \otimes e_i \right) \right\| &= \left\| I_{M_n} \otimes u \left(\sum \alpha_i \otimes e_i \right) \right\| \\ &= \left\| \sum \alpha_i \otimes u(e_i) \right\| \\ &= \left\| \phi \otimes I_F \left(\sum \alpha_i \otimes u(e_i) \right) \right\| \\ &= \left\| \sum \phi(\alpha_i) \otimes u(e_i) \right\| \\ &= \left\| I_{B(\ell_2)} \otimes u \left(\sum \phi(\alpha_i) \otimes e_i \right) \right\| \\ &= \left\| \sum \phi(\alpha_i) \otimes e_i \right\| \\ &= \left\| \phi \otimes I_E \left(\sum \alpha_i \otimes e_i \right) \right\| \\ &= \left\| \sum \alpha_i \otimes e_i \right\|. \end{aligned}$$

Para el caso en que $I_{B(\ell_2)} \otimes u$ es un operador acotado se tiene

$$\|u\|_{cb} \leq \|I_{B(\ell_2)} \otimes u\|.$$

Suponga ahora que para cada $n \in \mathbb{N}$, $u_n = I_{M_n} \otimes u$ es una isometría. Cada elemento $T \in B(\ell_2)$ se puede representar por una matriz de orden infinito (pues basta expresar cada $T(e_i)$ como combinación lineal de la base canónica de ℓ_2)

$$T = \begin{pmatrix} x_{11} & \cdots & x_{1n} & \cdots \\ \vdots & & \vdots & \\ x_{n1} & \cdots & x_{nn} & \cdots \\ \vdots & & \vdots & \ddots \end{pmatrix}.$$

Definiendo

$$T_n = \begin{pmatrix} x_{11} & \cdots & x_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ x_{n1} & \cdots & x_{nn} \end{pmatrix}$$

es claro que $\{T_n\}$ converge a T de manera puntual, es decir, para cada $y \in \ell_2$ se tiene que $\|T(y) - T_n(y)\|$ converge a cero cuando n tiende a infinito.

Sea $\sum a_i \otimes e_i \in B(\ell_2) \otimes E$. Se desea probar

$$\left\| I_{B(\ell_2)} \otimes u \left(\sum a_i \otimes e_i \right) \right\| = \left\| \sum a_i \otimes e_i \right\|.$$

Dado $\sum y_j \otimes l_j$ de norma menor o igual a 1 y $\{T_n^i\} \subset M_n$ correspondiente a $a_i \in B(\ell_2)$ como antes, se tiene

$$\begin{aligned} \left\| \sum_{i,j} a_i(y_j) \otimes u(e_i)(l_j) \right. & - \left. \sum_{ij} T_n^i(y_j) \otimes u(e_i)(l_j) \right\| \\ & = \left\| \sum_{i,j} a_i(y_j) - T_n^i(y_j) \otimes u(e_i)(l_j) \right\| \\ & \leq \sum_{i,j} \|a_i(y_j) - T_n^i(y_j)\| \, \|u(e_i)(l_j)\|. \end{aligned}$$

Sea $\varepsilon > 0$. Existe $N \in \mathbb{N}$ tal que

$$\left\| \sum_{i,j} a_i(y_j) \otimes u(e_i)(l_j) - \sum_{ij} T_N^i(y_j) \otimes u(e_i)(l_j) \right\| < \varepsilon.$$

Ahora, como u es una isometría completa

$$\begin{aligned}
\left\|\sum_{i,j} a_i(y_j)\otimes u(e_i)(l_j)\right\| &< \varepsilon + \left\|\sum_{i,j} T_N^i(y_j)\otimes u(e_i)(l_j)\right\| \\
&\leq \varepsilon + \left\|\sum T_N^i \otimes u(e_i)\right\| \\
&= \varepsilon + \left\|I_{M_N}\otimes u\left(\sum T_N^i\otimes e_i\right)\right\| \\
&= \varepsilon + \left\|\sum T_N^i\otimes e_i\right\|.
\end{aligned}$$

Por la definición de la norma de $\sum T_N^i \otimes e_i$, existe $\sum w_j \otimes k_j \in \mathbb{C}^N \otimes H$ (con H espacio de Hilbert tal que $E \subset B(H)$) de norma menor o igual a uno tal que

$$\left\|\sum_{i,j} a_i(y_j)\otimes u(e_i)(l_j)\right\| \leq \varepsilon + \left\|\sum_{i,j} T_N^i(w_j)\otimes e_i(k_j)\right\|.$$

Utilizando la proposición 6.3 (con $n = N$) se tiene

$$\begin{aligned}
\left\|\sum_{i,j} T_N^i(w_j)\otimes e_i(k_j)\right\| &= \left\|s\otimes I_H\left(\sum_{i,j} T_N^i(w_j)\otimes e_i(k_j)\right)\right\| \\
&= \left\|\sum_{i,j} s\left(T_N^i(w_j)\right)\otimes e_i(k_j)\right\| \\
&= \left\|\sum_{i,j} a_i\left(s(w_j)\right)\otimes e_i(k_j)\right\| \\
&\leq \left\|\sum a_i\otimes e_i\right\| \left\|\sum s(w_j)\otimes k_j\right\| \\
&= \left\|\sum a_i\otimes e_i\right\| \left\|\sum w_j\otimes k_j\right\| \\
&\leq \left\|\sum a_i\otimes e_i\right\|.
\end{aligned}$$

Por lo tanto se consigue

$$\left\| \sum_{i,j} a_i(y_j) \otimes u(e_i)(l_j) \right\| \leq \varepsilon + \left\| \sum a_i \otimes e_i \right\|,$$

de donde

$$\left\| \sum_{i,j} a_i(y_j) \otimes u(e_i)(l_j) \right\| \leq \left\| \sum a_i \otimes e_i \right\|,$$

y así

$$\left\| \sum a_i \otimes u(e_i) \right\| \leq \left\| \sum a_i \otimes e_i \right\|.$$

De manera completamente análoga se consigue

$$\left\| \sum a_i \otimes e_i \right\| \leq \left\| \sum a_i \otimes u(e_i) \right\|.$$

Es decir, $I_{B(\ell_2)} \otimes u$ es isometría. En el caso de que u sea completamente acotado se consigue

$$\|I_{B(\ell_2)} \otimes u\| \leq \|u\|_{cb}.$$

Se puede notar que en cualquier caso se cumple

$$\|I_{B(\ell_2)} \otimes u\| = \|u\|_{cb}. \quad \blacksquare$$

La siguiente proposición permitirá probar que el espacio OH es completamente isométrico a su anti-dual.

Proposición 6.6. *Sea $E \subset B(H)$ un espacio de operadores y suponga que se tienen dos sucesiones, $\{\theta_n\} \subset E$ y $\{\xi_n\} \subset E^*$ tales que $\overline{span\{\theta_n\}} = E$ y $\overline{span\{\xi_n\}} = E^*$. Sea K un espacio de Hilbert y $\{a_n\} \subset B(K)$ una sucesión finita. Se define el siguiente operador*

$$\begin{array}{rcl} u : E & \rightarrow & B(K) \\ x & \mapsto & \sum \xi_n(x) a_n. \end{array}$$

Entonces

$$\begin{aligned}\|u\|_{cb} &= \left\|\sum \xi_n \otimes a_n\right\|_{E^* \otimes B(K)} = \\ &\sup \left\{\|\sum b_n \otimes a_n\|_{B(\ell_2 \otimes K)} \mid \{b_n\} \in B(\ell_2)^{\mathbb{N}}, \|\sum b_n \otimes \theta_n\|_{B(\ell_2 \otimes H)} \leq 1\right\},\end{aligned}$$

donde $B(\ell_2)^{\mathbb{N}}$ se define como el conjunto de sucesiones finitas en $B(\ell_2)$.

Demostración
En [2, teo. 5.1] se da una descripción explícita de la norma tensorial mínima, misma que se utiliza como definición en [4]. A su vez, en [4, prop. 8.1.2] se prueba que si V y W son dos espacios de operadores, entonces, el encaje

$$\theta : V^* \otimes W \to CB(V, W)$$

dado por

$$\theta(f \otimes w)(x) := f(x)w \qquad \forall\, x \in V$$

es una isometría completa. Tomando a $V = E$ y $W = B(K)$ se tiene

$$\theta\left(\sum \xi_n \otimes a_n\right)(x) = \sum \xi_n(x) a_n = u(x),$$

de donde se obtiene

$$\|u\|_{cb} = \left\|\theta\left(\sum \xi_n \otimes a_n\right)\right\|_{cb} = \left\|\sum \xi_n \otimes a_n\right\|_{E^* \otimes B(K)}.$$

Para la otra igualdad, por la proposición 6.5 se tiene que

$$\|u\|_{cb} = \left\|I_{B(\ell_2)} \otimes u\right\|$$

con

$$\left\|I_{B(\ell_2)} \otimes u\right\| = \sup_{\|\sum b_i \otimes x_i\| \leq 1} \left\|\sum b_i \otimes u(x_i)\right\|.$$

Se define

$$A := \left\{\left\|\sum b_n \otimes a_n\right\|_{B(\ell_2 \otimes K)} \mid \{b_n\} \in B(\ell_2)^{\mathbb{N}}, \left\|\sum b_n \otimes \theta_n\right\|_{B(\ell_2 \otimes H)} \leq 1\right\}$$

y

$$\alpha := \sup A.$$

Para todo elemento $\|\sum b_n \otimes a_n\|$ de A se tiene que $\|\sum b_n \otimes \theta_n\| \leq 1$, además

$$I_{B(\ell_2)} \otimes u\left(\sum b_n \otimes \theta_n\right) = \sum b_n \otimes a_n$$

pues $u(\theta_n) = a_n$, así

$$\alpha \leq \|I_{B(\ell_2)} \otimes u\|.$$

Por otra parte sea $\sum b_i \otimes x_i \in B(\ell_2) \otimes E$ de norma menor o igual a 1. Para cada i, sea $\{y_k^i\}_{k\in\mathbb{N}} \subset span\{\theta_n\}$ convergente a x_i. Se tiene

$$\begin{aligned}
\left\|\sum b_i \otimes u(x_i) \ - \ \sum b_i \otimes u(y_k^i)\right\| &= \left\|\sum b_i \otimes \left(u(x_i) - u(y_k^i)\right)\right\| \\
&= \sum \|b_i\| \; \|u\| \; \|x_i - y_k^i\| \\
&\leq \|u\| \; \text{máx}\,\|b_i\| \; \sum_i \|x_i - y_k^i\|
\end{aligned}$$

de donde se obtiene

$$\left\|\sum b_i \otimes u(x_i)\right\| \leq \|u\| \; \text{máx}\,\|b_i\| \; \sum_i \|x_i - y_k^i\| + \left\|\sum b_i \otimes u(y_k^i)\right\|.$$

Denotando a $y_k^i = \sum\limits_j c_j^{i,k}\theta_j$ se tiene

$$u\left(y_k^i\right) = \sum_j c_j^{i,k} a_j$$

luego, sustituyendo se consigue

$$\begin{aligned}
\left\|\sum b_i \otimes u(x_i)\right\| &\leq \|u\| \; \text{máx}\,\|b_i\| \; \sum_i \|x_i - y_k^i\| + \left\|\sum_i b_i \otimes \left(\sum_j c_j^{i,k} a_j\right)\right\| \\
&= \|u\| \; \text{máx}\,\|b_i\| \; \sum_i \|x_i - y_k^i\| + \left\|\sum_j \left(\sum_i b_i c_j^{i,k}\right) \otimes a_j\right\|.
\end{aligned}$$

Se puede notar que

$$\sum_j \left(\sum_i b_i c_j^{i,k} \right) \otimes \theta_j$$

converge a

$$\sum b_i \otimes x_i,$$

con este último de norma menor o igual a uno, suponiendo que es no cero, tal elemento tiene norma positiva, así, se puede suponer que

$$\left\| \sum_j \left(\sum_i b_i c_j^{i,k} \right) \otimes \theta_j \right\| \neq 0 \qquad \forall k.$$

Se obtiene entonces

$$\frac{1}{\left\| \sum_j \left(\sum_i b_i c_j^{i,k} \right) \otimes \theta_j \right\|} \left\| \sum_j \left(\sum_i b_i c_j^{i,k} \right) \otimes a_j \right\| \leq \alpha,$$

de aquí se obtiene

$$\left\| \sum b_i \otimes u(x_i) \right\| \leq \|u\| \ \text{máx} \|b_i\| \ \sum_i \|x_i - y_k^i\| + \left\| \sum_j \left(\sum_i b_i c_j^{i,k} \right) \otimes \theta_j \right\| \alpha,$$

por último, tomando límite cuando k tiene a infinito

$$\left\| \sum b_i \otimes u(x_i) \right\| \leq 0 + 1\alpha,$$

de donde se consigue

$$\left\| I_{B(\ell_2)} \otimes u \right\| \leq \alpha. \ \blacksquare$$

Antes de enunciar el teorema análogo a la proposición 6.1 se enuncia el siguiente lema que es de vital importancia en la demostración del teorema. La prueba del siguiente lema se encuentra en [6, p. 123]. Tal lema se puede interpretar como la desigualdad de Cauchy-Schwarz para espacios de operadores.

Lema 6.1. *Sean H, K espacios de Hilbert y $a_0, \dots, a_n \in B(H)$, $b_0, \dots, b_n \in B(K)$. Entonces*

$$\left\| \sum a_i \otimes \overline{b_i} \right\|_{B(H \otimes K)} \leq \left\| \sum a_i \otimes \overline{a_i} \right\|^{\frac{1}{2}}_{B(H \otimes \overline{H})} \left\| \sum b_i \otimes \overline{b_i} \right\|^{\frac{1}{2}}_{B(K \otimes \overline{K})}.$$

A continuación se formula y demuestra el teorema análogo a la proposición 6.1.

Teorema 6.1. *Para cada conjunto de índices I, existe un espacio de Hilbert $\mathcal{H}$ (separable si I es a lo más numerable) y un espacio de operadores*

$$OH(I) \subset B(\mathcal{H})$$

tal que

i) $OH(I)$ es isométrico a $\ell_2(I)$ como espacios de Banach.

ii) La identificación canónica entre $OH(I)$ y $\overline{OH(I)^*}$ (correspondiente a la identificación canónica entre $\ell_2(I)$ y $\overline{\ell_2(I)^*}$) es una isometría completa.

Más aún, $OH(I)$ es el único espacio que cumple (i) y (ii) salvo isometrías completas.

Demostración
Por simplicidad en la notación, se demuestra sólo el caso $I = \mathbb{N}$. Sea K un espacio de Hilbert de dimensión infinita fijo. Se denota por S al conjunto de sucesiones finitas en $B(K)$, $\{b_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ tales que

$$\left\| \sum b_i \otimes \bar{b}_i \right\| \leq 1.$$

De igual manera, se denota por S_n al conjunto de n-adas en $B(K)$, $(b_1, \dots, b_n)$ tales que

$$\left\| \sum b_i \otimes \bar{b}_i \right\| \leq 1.$$

Con ayuda del lema anterior se calcula

$$\left\| \sum a_i \otimes \bar{a}_i \right\|^{\frac{1}{2}}_{B(K \otimes \overline{K})}$$

donde $a_i \in B(K)$ y $1 \leq i \leq n$. Dado un elemento $b = \{b_i\} \in S$, el lema 6.1 garantiza

$$\left\|\sum a_i \otimes \overline{b_i}\right\|_{B(K\otimes\overline{K})} \leq \left\|\sum a_i \otimes \overline{a}_i\right\|^{\frac{1}{2}}_{B(K\otimes\overline{K})},$$

luego,

$$\sup_{b\in S}\left\|\sum a_i \otimes \overline{b_i}\right\| \leq \left\|\sum a_i \otimes \overline{a}_i\right\|^{\frac{1}{2}}_{B(K\otimes\overline{K})}.$$

Si se toma ahora un elemento $b = (b_1, \ldots, b_n) \in S_n$, b se puede considerar como un elemento de S simplemente añadiendo ceros para conseguir una sucesión. Así, se obtiene

$$\sup_{b\in S_n}\left\|\sum a_i \otimes \overline{b_i}\right\| \leq \left\|\sum a_i \otimes \overline{a}_i\right\|^{\frac{1}{2}}_{B(K\otimes\overline{K})}.$$

Tomando a

$$b_i := \frac{1}{\|\sum a_i \otimes \overline{a}_i\|^{\frac{1}{2}}}\ a_i \in B(K)$$

para $1 \leq i \leq n$ y $b_i := 0$ en otro caso se tiene

$$\begin{aligned}
\left\|\sum b_i \otimes \bar{b}_i\right\| &= \left\|\sum \left(\frac{1}{\|\sum a_i \otimes \overline{a}_i\|^{\frac{1}{2}}}\ a_i\right) \otimes \left(\frac{1}{\|\sum a_i \otimes \overline{a}_i\|^{\frac{1}{2}}}\ \overline{a}_i\right)\right\| \\
&= \frac{1}{\|\sum a_i \otimes \overline{a}_i\|}\left\|\sum a_i \otimes \overline{a}_i\right\| \\
&= 1,
\end{aligned}$$

además,

$$\begin{aligned}
\left\|\sum a_i \otimes \bar{b}_i\right\| &= \left\|\sum a_i \otimes \left(\frac{1}{\|\sum a_i \otimes \overline{a}_i\|^{\frac{1}{2}}}\ \overline{a}_i\right)\right\| \\
&= \frac{1}{\|\sum a_i \otimes \overline{a}_i\|^{\frac{1}{2}}}\left\|\sum a_i \otimes \overline{a}_i\right\| \\
&= \left\|\sum a_i \otimes \overline{a}_i\right\|^{\frac{1}{2}},
\end{aligned}$$

de donde

$$\left\|\sum a_i \otimes \overline{a}_i\right\|_{B(K\otimes\overline{K})}^{\frac{1}{2}} = \sup_{b\in S}\left\|\sum a_i \otimes \overline{b}_i\right\| = \sup_{b\in S_n}\left\|\sum a_i \otimes \overline{b}_i\right\|.$$

A continuación se construye un espacio de Hilbert $\mathcal{H}$ y una sucesión de operadores $\{T_n\} \in B(\mathcal{H})$ tal que si $a_1, \ldots, a_n \in B(K)$, entonces

$$\left\|\sum a_i \otimes T_i\right\|_{B(H\otimes\mathcal{H})} = \sup_{b\in S}\left\|\sum a_i \otimes \overline{b}_i\right\|_{B(K\otimes\overline{K})}.$$

Sea $b = \{b_n\} \in S$ fijo. Se denota por T_n^b el operador en $\overline{K}$ definido por $T_n^b := \overline{b}_n$. Es claro que $T_n^b \in B(\overline{K})$. Se toma $\overline{K_b} := \overline{K}$ para todo $b \in S$. Se define

$$\mathcal{H} := \bigoplus_{b\in S} \overline{K_b},$$

y

$$\begin{array}{rcl} T_n : \mathcal{H} & \to & \mathcal{H} \\ (y_b)_{b\in S} & \mapsto & (T_n^b(y_b))_{b\in S}, \end{array}$$

es conveniente expresar T_n como suma directa de operadores, es decir,

$$T_n = \bigoplus_{b\in S} T_n^b.$$

Para una sucesión finita de escalares $a_1, \ldots, a_n$ se tiene

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^{n} a_i T_i &= \sum_{i=1}^{n} a_i \left(\bigoplus_{b\in S} T_i^b\right) \\ &= \bigoplus_{b\in S} \sum_{i=1}^{n} a_i T_i^b. \end{aligned}$$

De esta última expresión se obtiene

$$
\begin{aligned}
\left\| \sum_{i=1}^{n} a_i T_i \right\| &= \sup_{b \in S} \left\| \sum_{i=1}^{n} a_i T_i^b \right\| \\
&= \sup_{b \in S} \left\| \sum_{i=1}^{n} a_i \bar{b}_i \right\| \\
&= \sup_{b \in S} \left\| \sum_{i=1}^{n} a_i \otimes \bar{b}_i \right\| \\
&= \left\| \sum_{i=1}^{n} a_i \otimes \overline{a}_i \right\|^{\frac{1}{2}} \\
&= \left\| \sum_{i=1}^{n} a_i \overline{a}_i \right\|^{\frac{1}{2}} \\
&= \left\| \sum_{i=1}^{n} |a_i|^2 \right\|^{\frac{1}{2}}.
\end{aligned}
$$

Se define $OH := \overline{span}\{T_n\} \subset B(\mathcal{H})$. La igualdad anterior garantiza que la aplicación lineal tal que

$$
\begin{aligned}
OH &\to \ell_2 \\
T_n &\mapsto e_n
\end{aligned}
$$

es una isometría, lo cual prueba (i). Si se toma ahora una sucesión finita $a_1, \ldots, a_n$ en $B(K)$ se tiene

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^{n} a_i \otimes T_i &= \sum_{i=1}^{n} a_i \otimes \left(\bigoplus_{b\in S} T_i^b \right) \\
&= \sum_{i=1}^{n} \bigoplus_{b\in S} \left(a_i \otimes T_i^b \right) \\
&= \bigoplus_{b\in S} \sum_{i=1}^{n} \left(a_i \otimes T_i^b \right) \\
&= \bigoplus_{b\in S} \left(\sum_{i=1}^{n} a_i \otimes T_i^b \right),
\end{aligned}$$

de donde

$$\begin{aligned}
\left\| \sum_{i=1}^{n} a_i \otimes T_i \right\|_{B(K\otimes\mathcal{H})} &= \sup_{b\in S} \left\| \sum_{i=1}^{n} a_i \otimes T_i^b \right\| \\
&= \sup_{b\in S} \left\| \sum_{i=1}^{n} a_i \otimes \bar{b}_i \right\| \\
&= \left\| \sum_{i=1}^{n} a_i \otimes \bar{a}_i \right\|_{B(K\otimes\overline{K})}^{\frac{1}{2}}.
\end{aligned}$$

Se tiene entonces

$$\begin{aligned}
\left\| \sum_{i=1}^{n} a_i \otimes T_i \right\|_{B(K\otimes\mathcal{H})} &= \sup_{b\in S_n} \left\| \sum_{i=1}^{n} a_i \otimes \bar{b}_i \right\| \\
&= \sup \left\{ \left\| \sum_{i=1}^{n} a_i \otimes \bar{b}_i \right\| \quad | b_i \in B(K), \left\| \sum_{i=1}^{n} b_i \otimes T_i \right\| \leq 1 \right\},
\end{aligned}$$

pues

$$\left\| \sum_{i=1}^{n} b_i \otimes T_i \right\|_{B(K\otimes\mathcal{H})} = \left\| \sum_{i=1}^{n} b_i \otimes \bar{b}_i \right\|_{B(K\otimes\overline{K})}.$$

Con ayuda de esta última ecuación se prueba (ii). Sea $\{\xi_n\} \in OH^*$ biortogonal a $\{T_n\}$. La isometría canónica

$$\begin{array}{rcl} \ell_2 & \rightarrow & \overline{\ell_2^*} \\ x & \mapsto & \overline{\langle \cdot, x\rangle} \end{array}$$

corresponde con

$$\begin{array}{rcl} \iota : OH & \rightarrow & \overline{OH^*} \\ T_n & \mapsto & \overline{\xi_n}. \end{array}$$

Cabe notar que ι no depende de la base de OH sino del producto escalar, así como la isometría canónica entre ℓ_2 y $\overline{\ell_2^*}$.

Tomemos $K = \ell_2$. Por la proposición 6.6, para $a_1, \dots, a_n$ en $B(K)$

$$\left\| \sum_{i=1}^{n} \overline{\xi}_i \otimes a_i \right\|_{B(\overline{\mathcal{H}} \otimes K)} = \left\| \sum_{i=1}^{n} \xi_i \otimes \overline{a}_i \right\|_{B(\mathcal{H} \otimes \overline{K})}$$

$$\begin{aligned} &= \sup \left\{ \left\| \sum_{i=1}^{n} b_i \otimes \overline{a}_i \right\|_{B(K \otimes \overline{K})} \mid b_i \in B(K), \left\| \sum_{i=1}^{n} b_i \otimes T_i \right\|_{B(K \otimes \mathcal{H})} \leq 1 \right\} \\ &= \left\| \sum_{i=1}^{n} T_i \otimes a_i \right\| \\ &= \left\| \sum_{i=1}^{n} a_i \otimes T_i \right\|. \end{aligned}$$

Considere ahora el operador

$$I_{B(K)} \otimes \iota : B(K) \otimes OH \rightarrow B(K) \otimes \overline{OH^*},$$

así

$$\begin{aligned} \left\| I_{B(K)} \otimes \iota \left(\sum_{i=1}^{n} a_i \otimes T_i \right) \right\| &= \left\| \sum_{i=1}^{n} a_i \otimes \overline{\xi}_i \right\| \\ &= \left\| \sum_{i=1}^{n} \overline{\xi}_i \otimes a_i \right\| \\ &= \left\| \sum_{i=1}^{n} a_i \otimes T_i \right\|, \end{aligned}$$

es decir, $I_{B(K)} \otimes \iota$ es una isometría, luego ι es una isometría completa por proposición 6.5, así, se ha probado (ii).

A fin de probar la unicidad, sea $X \subset B(H)$ un espacio de operadores que cumple (i) y (ii), es decir, existe un isomorfismo

$$u : X \to \ell_2$$

que es una isometría y tal que si se identifica ℓ_2 con $\overline{\ell_2^*}$ de manera usual, el operador

$$j := \overline{u^*} u : X \to \overline{X^*}$$

es una isometría completa. En adelante se tomará $K = \ell_2$. Como j es una isometría completa, entonces, por proposición 6.5, $I_{B(K)} \otimes j$ es isometría, así

$$\left\| \sum a_i \otimes t_n \right\|_{B(K) \otimes X} = \left\| \sum a_i \otimes j(t_n) \right\|_{B(K) \otimes \overline{X^*}}.$$

Sea $\{e_n\}$ la base canónica de ℓ_2 y $\{\theta_n\} \subset X$ tal que $u(\theta_n) = e_n$. Se elige $\{\xi_n\} \subset X^*$ biortogonal a $\{\theta_n\} \subset X$. Se puede observar que así como está identificado e_n con $\overline{\langle \cdot, e_n \rangle}$, entonces θ_n está identificado con $\overline{\xi_n}$ a través de j. A continuación se prueba que

$$\phi : OH \to X$$

definida mediante $\phi(T_n) := \theta_n$ es una isometría completa, de hecho se prueba que $I_{B(K)} \otimes \phi$ es isometría. Basta probar que

$$\left\|\sum a_i \otimes \theta_i\right\| = \left\|\sum a_i \otimes T_i\right\|$$

para cualquier sucesión finita $\{a_n\}$ en $B(K)$.

Como $I_{B(\ell_2)} \otimes j$ es isometría

$$\begin{aligned}
\left\|\sum a_i \otimes \theta_i\right\| &= \left\|\sum a_i \otimes j(\theta_i)\right\| \\
&= \left\|\sum a_i \otimes \overline{\xi_i}\right\| \\
&= \|\overline{a}_i \otimes \xi_i\|
\end{aligned}$$

$$= \sup\left\{\left\|\sum \overline{a}_i \otimes b_i\right\| \quad | \quad \{b_n\} \subset B(K)^{\mathbb{N}}, \left\|\sum b_i \otimes \theta_i\right\| \leq 1\right\}.$$

Tomando

$$b_i := a_i \left\|\sum a_i \otimes \theta_i\right\|^{-1},$$

se consigue

$$\begin{aligned}
\left\|\sum b_i \otimes \theta_i\right\| &= \left\|\sum \left(a_i \left\|\sum a_i \otimes \theta_i\right\|^{-1}\right) \otimes \theta_i\right\| \\
&= \left\|\sum a_i \otimes \theta_i\|\right\|^{-1} \left\|\sum a_i \otimes \theta_i\|\right\| \\
&= 1,
\end{aligned}$$

de donde

$$\left\|\sum \left(a_i \left\|\sum a_i \otimes \theta_i\right\|^{-1}\right) \otimes \overline{a}_i\right\| \leq \left\|\sum a_i \otimes \theta_i\right\|,$$

luego,

$$\left\|\sum a_i \otimes \overline{a}_i\right\| \leq \left\|\sum a_i \otimes \theta_i\right\|^2.$$

Recordando que

$$\left\|\sum a_i \otimes T_i\right\| = \left\|\sum a_i \otimes \overline{a}_i\right\|^{\frac{1}{2}},$$

se concluye que

$$\left\|\sum a_i \otimes T_i\right\| \leq \left\|\sum a_i \otimes \theta_i\right\|.$$

De la desigualdad anterior se concluye que

$$\begin{aligned} \{\|\sum \overline{a}_i \otimes b_i\| \,|\{b_n\} &\subset B(K)^{\mathbb{N}}, \|\sum b_i \otimes \theta_i\| \leq 1\} \\ &\subset \big\{\|\sum \overline{a}_i \otimes b_i\| \,|\{b_n\} \subset B(K)^{\mathbb{N}}, \|\sum b_i \otimes T_i\| \leq 1\big\}, \end{aligned}$$

de donde se obtiene

$$\left\|\sum a_i \otimes \theta_i\right\| \leq \sup\left\{\left\|\sum \overline{a}_i \otimes b_i\right\| |\{b_n\} \subset B(K)^{\mathbb{N}}, \left\|\sum b_i \otimes T_i\right\| \leq 1\right\}.$$

Anteriormente se probó que este último supremo es igual a

$$\left\|\sum a_i \otimes T_i\right\|.$$

Por lo tanto ϕ es una isometría completa, lo cual concluye que OH es único salvo isometrías completas. ■

Bibliografía

[1] Arveson William. *An invitation to C^*-algebras*, Springer-Verlag, New York. 1976.

[2] Belcher David, Paulsen Vern. *Tensor products of operator spaces*, Journal Functional Analysis. 1991.

[3] Dixmier Jacques. *C^*-algebras*, North-Holland Publishing Company, Amsterdam, New York, Oxford. 1977.

[4] Effros Edward G., Zhong-Jin Ruan. *Operator spaces*, Oxford University Press, New York. 2000.

[5] Folland B. Gerald. *A course in abstract harmonic analyis*, CRC Press Boca Raton, Florida. 1995.

[6] Gilles Pisier. *Introduction to operator space theory*, Cambridge University Press, Cambridge. 2003.

[7] Gilles Pisier. *The operator Hilbert space OH, complex interpolation and tensor norms*, Memoirs American Mathematical Society, Rhode Island. 1996.

[8] Lang, Serge. *Algebra*, Springer-Verlag, New York. 2002

[9] Wittstock G., Betz B., Fischer H.J., Lambert A., Louis K., Neufang M., Zimmermann I.. *What are operator spaces?*. 2001.<http://www.math.uni-sb.de/ag/wittstock/OperatorSpace.pdf>.