

Centro de Investigación en Matemáticas A.C.

CIMAT

Dinámica de la Función Elíptica
 $h_\lambda = \frac{1}{\wp_\lambda}$ **Parametrizada sobre**
Retículas Cuadradas Reales

T E S I S

Que para obtener el grado de

Maestro en ciencias

con Orientación en

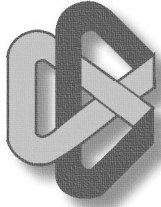
Matemáticas Básicas

P R E S E N T A:

Pablo Pérez Lucas

Directora de Tesis:

Dra. Mónica Moreno Rocha



Centro de Investigación en Matemáticas A.C.

CIMAT

Dinámica de la Función Elíptica
 $h_\lambda = \frac{1}{\wp_\lambda}$ **Parametrizada sobre**
Retículas Cuadradas Reales

T E S I S

Que para obtener el grado de

Maestro en Ciencias

con Orientación en

Matemáticas Básicas

P R E S E N T A:

Pablo Pérez Lucas

Comité de Evaluación:

Dr. José Omegar Calvo Andrade

(Presidente)

Dra. Patricia Domínguez Soto

(Secretario)

Dra. Mónica Moreno Rocha

(Vocal y Directora de Tesis)



Dedicatoria

A mis padres Felix Pérez y Epigmenia Lucas,
quienes me dieron la vida y me permitieron
elegir esta carrera a mi libre albedrío.

A mis hermanos Nancy y Daniel,
por todo el apoyo que me
han brindado.



Agradecimientos

Entrar en este vasto campo de la Dinámica Holomorfa, fue como entrar en una habitación oscura después de pasear en un soleado día de verano. Quedé cegado por la densidad de su penumbra. Pero allí estaba un alma clarividente que me guió y me mostró donde me encontraba. Me condujo y me enseñó lo mejor que pudo dicha habitación.

Eventualmente mis ojos se han ido adaptando a la carencia de luz; ahora soy capaz de caminar en ella y esquivar los obstáculos que al entrar encontré. Dra. Mónica Moreno Rocha, muchas gracias por todo su apoyo.

Quiero agradecer también...

- Al Consejo Nacional de Ciencia y Tecnología (CONACYT) por la subvención durante los dos años en los que realice mi maestría.
- A CIMAT por el apoyo económico otorgado para la culminación de esta tesis.
- A mis revisores de tesis la Dra. Patricia Domínguez Soto y el Dr. J. Omega Calvo Andrade, por los valiosos comentarios y observaciones que hicieron, para que la versión final de esta tesis quedara lo mejor posible.
- En el rubro computacional agradezco el apoyo otorgado por Iván Dzib, Saúl Díaz Infante, Oliver Juárez y Francisco López.
- A mis compañeros y amigos Luis A. Ruiz, Francisco Juárez, Mauricio Salazar, Miguel A. Rojas, Juan M. Mondragón, Adrián Terán y Daniel Terán, por sus múltiples consejos y enseñanzas, por brindarme su sincera amistad y por hacer más placentera mi estancia en Guanajuato.
- A mis compañeras y amigas Isabel Castro, Yuriria Estrada, Thalía E. Venegas y Cristabel Y. Martínez, por brindarme su amistad, por compartir momentos agradables con mi persona, por toda la fortaleza y apoyo que en diferentes aspectos me han brindado.
- A todos, sinceramente muchas gracias...
Pablo Pérez Lucas.



Tributo a la Matemática

Anciana avara,
esparce tus frutos en mi huerto;
deja tus huellas sobre el húmedo suelo que pisas;
hazme sentir que soy tu predilecto.

¡Oh Matemática, tierna nodriza de videntes!
muéstrame donde ocultas tus tesoros,
la elasticidad de tus ideas, la crudeza de tus verdades.

¡Oh Matemática, tierna nodriza de videntes!
enemiga mortal de la hipocresía;
¿cómo puedo no amarte después de haberte conocido?

Gentil dama; caminemos a través de los bosques,
que para cuando el sol despunte, sé que me habrás
contado otro de tus secretos.

Pablo Pérez Lucas

Guanajuato, Gto. México
Febrero, 2013



Resumen

Dinámica de la Función $h_\lambda = 1/\wp_\lambda$ Parametrizada sobre Retículas Cuadradas Reales

Pablo Pérez Lucas

Bajo la dirección de
Dra. Mónica Moreno Rocha

En este trabajo se estudia la dinámica asociada a la iteración de funciones elípticas $h_\lambda(z) = 1/\wp_\lambda(z)$, parametrizadas sobre retículas cuadradas reales $\Omega = [\lambda, i\lambda]$, $\lambda \in \mathbb{C} - \{0\}$.

Se demuestran tres resultados originales. Primero, se obtiene un Teorema de Dicotomía para la familia h_λ sobre retículas cuadradas reales, extendiendo el resultado publicado en 2009 por L. Koss para retículas triangulares. También se demuestra que ningún elemento en la familia exhibe ciclos de anillos de Herman, por lo que la dinámica de h_λ es similar a la dinámica polinomial. Aplicando la teoría *Polynomial-like mappings* (funciones tipo polinomiales) de A. Douady y J.H. Hubbard, se demuestra que sobre retículas cuadradas h_λ presenta un comportamiento tipo cuadrático cuando es restringida a discos topológicos del plano complejo, extendiendo resultados similares de J. Clemons en el 2010 para la familia \wp_λ sobre el mismo tipo de retículas.

Abstract: In this work we study the dynamics associated with the iteration of elliptic functions $h_\lambda(z) = \frac{1}{\wp_\lambda(z)}$, parametrized on real square lattices $\Omega = [\lambda, i\lambda]$, $\lambda \in \mathbb{C} - \{0\}$.

We prove three original results. First, we obtain a Dichotomy Theorem for the family h_λ on real square lattices, extending the result published in 2009 by L. Koss over triangular lattices. Also we shown that no elements in the family exhibit cycles of Herman rings, so that the dynamics of h_λ is similar to the dynamics of a polynomial. Applying the *Polynomial-like mappings* theory of A. Douady and J.H. Hubbard, we show that on square lattices h_λ exhibits a quadratic like behavior when restricted to topologic disks in the complex plane, extending similar results obtained by J. Clemons in the 2010 for the family \wp_λ on the same type of lattices.



Índice general

Introducción	11
1. Funciones Elípticas	13
1.1. Preliminares de análisis complejo.	13
1.2. Periodos.	15
1.3. Retículas y región fundamental.	16
1.4. Formas de retículas	18
1.5. Algunas propiedades generales de funciones elípticas.	20
1.6. La función \wp -Weierstrass.	23
1.7. La ecuación diferencial de $\wp(z)$	27
2. Interacción de Funciones Meromorfas	33
2.1. Definiciones de los conjuntos de Fatou y Julia.	33
2.2. Propiedades elementales de los conjuntos de Fatou y de Julia.	35
2.3. Puntos periódicos.	36
2.4. Clasificación de componentes periódicas.	37
2.5. Algunas clases de funciones sin dominios errantes o sin dominios de Baker.	38
2.6. Conectividad de componentes de Fatou.	40
3. Iteración de Funciones Elípticas	43
3.1. Propiedades de la función $h_{\Omega}(z) = \frac{1}{\wp_{\Omega}(z)}$	43
3.2. Simetría de los conjuntos de Julia y Fatou.	44
3.3. Conjuntos de Julia desconexos y anillos de Herman.	45
3.4. Teorema de dicotomía para h_{Ω} sobre retículas cuadradas reales.	50
3.5. Conectividad de componentes de Fatou de $h_{\Omega}(z) = \frac{1}{\wp_{\Omega}(z)}$	55
4. Funciones Tipo Polinomiales	57
4.1. Funciones tipo polinomiales.	57
4.2. Familias holomorfas de funciones meromorfas.	58
4.3. Familias analíticas de funciones tipo cuadráticas	61
4.4. Comportamiento tipo cuadrático.	62

4.5. Comportamiento tipo cuadrático en el origen.	68
Referencias	75
Indice alfabético	78

Introducción

En este trabajo se estudia la dinámica asociada a la iteración de elementos en las familias meromorfas de funciones elípticas $h_\lambda(z) = 1/\wp_\lambda(z)$, $\lambda \in \mathbb{C} - \{0\}$ parametrizada sobre retículas cuadradas reales $\Omega = [\lambda, i\lambda]$.

A continuación se hace un desglose de los capítulos que conforman esta Tesis.

En el Capítulo 1 hacemos un estudio de las funciones meromorfas doblemente periódicas respecto a una retícula en el plano complejo, mejor conocidas como funciones elípticas. Se muestran algunas propiedades generales de estas funciones y con el fin de estudiar la dinámica de la función elíptica $h_\lambda(z) = \frac{1}{\wp_\lambda(z)}$ se da la construcción de la función \wp -Weierstrass. Como resultados sobresalientes de este capítulo es que cualquier función elíptica se puede obtener apartir de la función \wp -Weierstrass y su derivada (Teorema 1.7.4).

En el Capítulo 2 abordamos la iteración de funciones meromorfas y exponemos algunos de los principales resultados de esta teoría. En particular hacemos énfasis en resultados respecto a funciones de la clase S ya que las funciones elípticas forman parte de esta clase. Todos los resultados expuestos en este capítulo se deben a personas que han trabajado en esta área y que han logrado sentar las bases de la Dinámica Holomorfa.

En el Capítulo 3 se discuten las propiedades dinámicas de la familia h_λ y las simetrías que sus conjuntos de Julia y Fatou presentan sobre retículas cuadradas y rómbicas. Dos de los resultados principales de la tesis aparecen aquí: se demuestra que h_λ no tiene ciclos de anillos de Herman (Teorema 3.3.10) y el Teorema de Dicotomía para la conectividad de conjuntos de Julia (Teorema 3.4.4). Si los tres valores críticos de h_λ están contenidos en una única componente de Fatou, entonces el conjunto de Julia es totalmente desconexo. En otro caso, es conexo. El capítulo cierra con una breve discusión de la conectividad de componentes de Fatou.

Finalmente, en el Capítulo 4 se proporciona una breve introducción a la teoría *Polynomial-like mappings* desarrollada por A. Douady y J.H. Hubbard en [DH]. Se proporcionan conceptos respecto a familias holomorfas de funciones meromorfas y familias analíticas de funciones tipo cuadráticas. En base a ello, y aplicando el Teorema de Rectificación (Teorema 4.1.6) se obtiene el tercer resultado principal de la tesis, el cual garantiza que sobre retículas cuadradas la función

h_λ presenta un comportamiento tipo cuadrático restringida a ciertos discos topológicos del plano complejo (Teorema 4.5.3).

Capítulo 1

Funciones Elípticas

En este capítulo estudiaremos las funciones elípticas como funciones meromorfas del 2-toro a la esfera de Riemann. Primero consideramos funciones elípticas en general, para luego concentrar nuestra atención en las propiedades de la función elíptica \wp -Weierstrass.

1.1. Preliminares de análisis complejo.

Las demostraciones de los siguientes resultados pueden ser consultados en libros clásicos de análisis complejo como [Ah] o [G].

Definición 1.1.1. Diremos que una función $f(z)$ es *meromorfa* en un dominio U si $f(z)$ es analítica en U excepto posiblemente en singularidades aisladas, cada una de las cuales es un polo.

Teorema 1.1.2. (*Teorema de Montel*) Sea \mathfrak{F} una familia de funciones meromorfas definidas en un dominio U . Supongamos que existen puntos distintos a, b, c en $\hat{\mathbb{C}}$ tal que para toda $f \in \mathfrak{F}$, $f(U) \subset \hat{\mathbb{C}} \setminus \{a, b, c\}$. Entonces \mathfrak{F} es una familia normal en U .

El Teorema de Picard se ocupa para caracterizar los conjuntos de Julia y Fatou que definiremos en capítulos posteriores.

Teorema 1.1.3. (*Teorema de Picard*) Sea $f(z)$ una función meromorfa en una vecindad $U = \{0 < |z - z_0| < \delta\}$ de z_0 . Si $f(z)$ omite tres valores en z_0 , entonces $f(z)$ se extiende meromorfamente a z_0 .

Definición 1.1.4. Una función f entre dos espacios topológicos es llamada *abierto* si la imagen de cada conjunto abierto bajo f es abierto.

Las funciones meromorfas cumplen la siguiente propiedad.

Proposición 1.1.5. *Las funciones meromorfas no constantes son abiertas.*

El siguiente teorema será utilizado cuando tratemos resultados acerca de cubrientes ramificadas en el Capítulo 5.

Teorema 1.1.6.

- Sea $R \subseteq \mathbb{C}$ una región y sea f una función analítica no constante definida en R . Entonces $f : R \rightarrow \mathbb{C}$ define una función abierta.
- Si $z_0 \in R$ y si $f(z_0) = w_0$ con multiplicidad m , entonces existe una vecindad N de z_0 tal que para todo $w \in f(N) \setminus \{w_0\}$ el conjunto $f^{-1}(w)$ contiene m puntos en N .

Definición 1.1.7. Un *dominio anular* D , es un dominio 2-conexo de \mathbb{C} . Si las fronteras de D son circunferencias decimos que D es un *anillo*. Un *anillo canónico* es el dominio $A_{r,R} = \{z \in \mathbb{C} : 0 \leq r < |z| < R \leq +\infty\}$. Si $r = 0$ ó $R = \infty$ entonces decimos que $A_{r,R}$ es un *anillo degenerado*.

Respecto a dominios anulares se tiene el siguiente teorema.

Teorema 1.1.8 (Representación de dominios anulares). *Sea $D \subseteq \mathbb{C}$ un dominio anular. Entonces existe una aplicación conforme $g : D \rightarrow A_{r,R}$ donde $r \geq 0$ y $R \leq +\infty$. Si $r > 0$ y $R < +\infty$, g es llamada la aplicación canónica de D .*

Corolario 1.1.9. *Todo dominio anular es conformemente equivalente a uno de los siguientes anillos:*

1. $A_{0,\infty} = \{z : 0 < |z| < +\infty\} = \mathbb{C} \setminus \{0\}$,
2. $A_{1,\infty} = \{z : 1 < |z| < +\infty\} = \mathbb{C} \setminus \overline{\mathbb{D}}$,
3. $A_{1,R} = \{z : 1 < |z| < R\}$, con $R < +\infty$.

Definición 1.1.10. El *módulo de un dominio anular* $D \subset \mathbb{C}$, se define por

$$\text{mod}(D) = \frac{\log R}{2\pi},$$

donde $R < \infty$ tal que existe una equivalencia conforme $g : D \rightarrow A_{1,R}$. Si D es equivalente a $\mathbb{C} \setminus \{0\}$ ó a $\mathbb{C} \setminus \overline{\mathbb{D}}$ entonces el $\text{mod}(D) := \infty$.

El módulo de un dominio anular resulta ser un invariante conforme como lo establece el siguiente teorema.

Teorema 1.1.11. *Sea $A \subset U$ un anillo y $f : U \rightarrow V$ una aplicación conforme, entonces*

$$\text{mod}(f(A)) = \text{mod}(A).$$

Más aún también se tiene lo siguiente.

Teorema 1.1.12. Sea $f : A_1 \rightarrow A_2$ una función cubriente holomorfa de grado d entre dos anillos. Entonces

$$\text{mod}(A_1) = \frac{1}{d} \text{mod}(A_2).$$

Otro resultado importante respecto a dominios anulares es el siguiente.

Lema 1.1.13 (Criterio de Branner-Hubbard). Sean

$$K_1 \supset K_2 \supset K_3 \supset \dots$$

subconjuntos compactos no vacíos de \mathbb{C} con cada K_{n+1} contenido en el interior de K_n para todo $n \in \mathbb{N}$. Si suponemos que $\text{int } K_n$ es simplemente conexo, $A_n = \text{int } K_n \setminus K_{n+1}$ es un dominio anular. Si $\sum_1^\infty \text{mod}(A_n) = \infty$ entonces $\bigcap_1^\infty K_n$ es un solo punto.

1.2. Periodos.

Definimos el concepto de periodo y posteriormente mencionaremos dos propiedades importantes del conjunto de periodos de una función f que denotamos por Ω_f . Proporcionamos también una clasificación de las funciones f de acuerdo al conjunto Ω_f .

Los siguientes resultados pueden ser consultados en [JS].

Definición 1.2.1. Sea f una función definida en el plano complejo \mathbb{C} , entonces un número complejo w es llamado un *periodo* de f si $f(z + w) = f(z)$ para todo $z \in \mathbb{C}$. f es llamada *periódica* si tiene un periodo $w \neq 0$.

El conjunto Ω_f tiene dos propiedades importantes, una algebraica (válida para toda función f) y una topológica (válida para funciones meromorfas no constantes).

Teorema 1.2.2. Sea Ω_f el conjunto de periodos de una función f definida en \mathbb{C} , entonces Ω_f es un subgrupo del grupo aditivo \mathbb{C} .

DEMOSTRACIÓN. Sean $\alpha, \beta \in \Omega_f$ entonces $f(z + (\alpha + \beta)) = f((z + \alpha) + \beta) = f(z + \alpha) = f(z)$, así $\alpha + \beta \in \Omega_f$. Por otro lado $f(z - \alpha) = f((z - \alpha) + \alpha) = f(z)$, de esta forma $-\alpha \in \Omega_f$. Finalmente, $f(z + 0) = f(z)$, así $0 \in \Omega_f$, por lo tanto Ω_f es un subgrupo de \mathbb{C} . \square

Teorema 1.2.3. Sea Ω_f el conjunto de periodos de una función meromorfa f no constante definida en \mathbb{C} . Entonces Ω_f es un subconjunto discreto de \mathbb{C} .

Lo cual nos lleva a que el conjunto de periodos de una función meromorfa no constante es un subgrupo discreto de \mathbb{C} .

Teorema 1.2.4. Sea Ω un subgrupo de \mathbb{C} , entonces se tiene uno de los siguientes:

i) $\Omega = \{0\}$.

ii) $\Omega = \{nw_1 : n \in \mathbb{Z}\}$ para algún w_1 fijo que pertenece a $\mathbb{C} \setminus \{0\}$, y así Ω es isomorfo a \mathbb{Z} .

iii) $\Omega = \{mw_1 + nw_2 : m, n \in \mathbb{Z}\}$ para puntos fijos $w_1, w_2 \in \mathbb{C}$ linealmente independientes sobre \mathbb{R} . En este caso Ω es isomorfo $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$.

Definición 1.2.5. Si una función f tiene un conjunto de periodos Ω_f del tipo ii) entonces f es *simplemente periódica*; si Ω_f es del tipo iii) entonces f es *doblemente periódica*.

1.3. Retículas y región fundamental.

Denotemos por Ω ó $\Omega(w_1, w_2)$ un grupo del tipo iii) definido en la sección anterior. Estos grupos son llamados *retículas* y $\{w_1, w_2\}$ es una *base* para Ω , es decir un par de generadores de Ω . Sin embargo, hay otras bases para Ω además de $\{w_1, w_2\}$; por ejemplo $\{w_1, w_1 + w_2\}$ es también una base, pues si $w \in \Omega(w_1, w_2)$ tenemos que $w = mw_1 + nw_2 = (m - n)w_1 + n(w_1 + w_2)$ con $m - n, n \in \mathbb{Z}$. En general, si $w'_1, w'_2 \in \Omega(w_1, w_2)$ entonces $w'_2 = aw_2 + bw_1$ y $w'_1 = cw_2 + dw_1$ donde a, b, c, d son enteros.

Nuestro principal objeto de estudio serán las funciones doblemente periódicas también conocidas como *funciones elípticas*.

Dada una retícula Ω , decimos que $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$ son congruentes *mod* Ω , escribiendo $z_1 \sim z_2$, si $z_1 - z_2 \in \Omega$. La congruencia *mod* Ω es una relación de equivalencia en \mathbb{C} y las clases de equivalencia son las clases laterales $z + \Omega$ de Ω en el grupo aditivo \mathbb{C} . También, podemos observar que Ω actúa sobre \mathbb{C} como un grupo de transformaciones, donde cada $w \in \Omega$ induce la transformación $t_w : z \mapsto z + w$ en \mathbb{C} , como $t_{w_1+w_2} = t_{w_1} \circ t_{w_2}$. Entonces tenemos que $\{t_w \mid w \in \Omega\}$, con la operación de composición, es un grupo isomorfo a Ω . Así dos puntos $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$ son congruentes *mod* Ω si y sólo si ellos están en la misma órbita bajo esta acción de Ω .

Definición 1.3.1. Un subconjunto $P \subset \mathbb{C}$ cerrado y conexo es una *región fundamental* para Ω si:

1. Para cada $z \in \mathbb{C}$, P contiene al menos un punto en la misma Ω -órbita de z (es decir todo punto $z \in \mathbb{C}$ es congruente a algún punto en P).
2. Dos puntos en el interior de P pertenecen a distintas Ω -órbitas (es decir, ningún par de puntos en el interior de P son congruentes).

Si, como es usualmente el caso, P es también un polígono Euclidiano con un número finito de lados, entonces a P se le llama *polígono fundamental* de Ω ; en particular si P es un paralelogramo entonces es llamado *paralelogramo fundamental* de Ω . Por ejemplo el paralelogramo P con vértices $0, w_1, w_2, w_1 + w_2$ es un paralelogramo fundamental para la retícula $\Omega(w_1, w_2)$, ver figura 1.1.

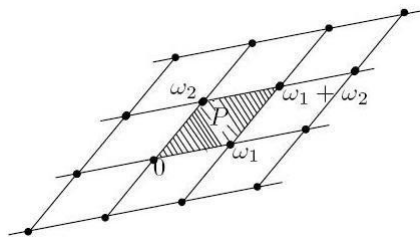


Figura 1.1: Paralelogramo fundamental.

Las condiciones 1 y 2 de la Definición 1.3.1 garantizan que si P es cualquier región fundamental para una retícula Ω , entonces P y las imágenes bajo la acción de Ω (esto es, las traslaciones $P + w$, $w \in \Omega$) cubren el plano \mathbb{C} completamente, superponiendo sólo las fronteras; a este tipo de cubriente se le conoce como *teselación* de \mathbb{C} .

Dado que una retícula tiene infinitas bases entonces podemos obtener paralelogramos fundamentales de diferentes formas y por lo tanto diferentes teselaciones de \mathbb{C} .

Si P es cualquier región fundamental de Ω , entonces para $t \in \mathbb{C}$ fijo, el conjunto $P + t = \{z + t \mid z \in P\}$ es también una región fundamental. Esto es útil cuando necesitamos encontrar una región fundamental que contenga o evite ciertos puntos específicos. Por ejemplo, podemos encontrar siempre un paralelogramo fundamental para Ω con 0 en su interior. La *región de Dirichlet*

$$D(\Omega) = \{z \in \mathbb{C} : |z| \leq |z - w| \text{ para todo } w \in \Omega\}$$

es un ejemplo de región fundamental para una retícula Ω . Con un procedimiento adecuado podemos obtener regiones fundamentales las cuales no son paralelogramos ni polígonos, como se realiza en la demostración de la Proposición 3.3.9 en el Capítulo 4.

Si una función f es doblemente periódica con respecto a una retícula $\Omega = \Omega(w_1, w_2)$, entonces el comportamiento sobre \mathbb{C} esta determinado por su comportamiento sobre una región fundamental P de Ω , el cual puede ser el paralelogramo con vértices $0, w_1, w_2, w_1 + w_2$; este comportamiento se repite sobre todos los trasladados $P + w$ ($w \in \Omega$). Como podemos considerar a f como una función definida sobre P , y como ésta toma los mismos valores en puntos congruentes de la región fundamental entonces los podemos identificar y considerar así una función sobre un espacio \mathbb{T} conocido como el *2-toro*, ver figura 1.2. Inversamente, cualquier función definida sobre \mathbb{T} puede ser considerada como una función doblemente periódica en \mathbb{C} .

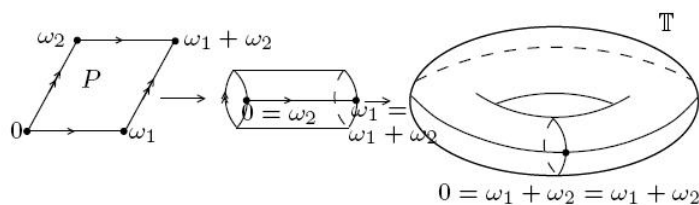


Figura 1.2: El 2-toro.

Por la definición de región fundamental, sabemos que para toda Ω -órbita en \mathbb{C} existe justamente un punto de \mathbb{T} y viceversa, podemos pensar a \mathbb{T} como el conjunto de Ω -órbitas, esto es el conjunto \mathbb{C}/Ω de clases laterales de Ω en \mathbb{C} . Dado que Ω es un subgrupo normal del grupo aditivo \mathbb{C} , el conjunto cociente $\mathbb{T} = \mathbb{C}/\Omega$ tiene estructura de grupo. Como existe una función continua del conjunto cerrado y acotado P sobre \mathbb{T} (dada por la identificación de puntos) se sigue que \mathbb{T} es compacto.

La construcción de \mathbb{T} mediante la acción de Ω sobre \mathbb{C} puede ser generalizada como sigue. Sea X un espacio topológico y G el grupo de homeomorfismos de X . Entonces la acción de G sobre X descompone a X en G -órbitas. Denotamos la G -órbita de x por $[x]_G$, por lo que $y \in [x]_G$ si y sólo si $g(x) = y$ para algún $g \in G$. El conjunto de G -órbitas es denotado por X/G y es llamado el *espacio de órbitas o espacio cociente* de X por G . Definimos la proyección canónica $p : X \rightarrow X/G$ por $p(x) = [x]_G$; entonces hemos dado una topología a X/G definiendo el conjunto $V \subseteq X/G$ abierto si y sólo si $p^{-1}(V)$ es abierto en X . Con esta definición, p es claramente continua y abierta, pues si U es abierto en X entonces

$$p^{-1}(p(U)) = \bigcup_{g \in G} g(U)$$

es también un conjunto abierto.

En el toro $\mathbb{T} = \mathbb{C}/\Omega$ vemos que para cada punto $[z] = [z]_\Omega \in \mathbb{T}$, $p^{-1}([z])$ es la Ω -órbita $[z] = z + \Omega$ de z , y por lo tanto es discreto. Sea d la menor distancia entre cualesquiera dos puntos de $p^{-1}([z])$, y sea U un disco abierto de radio a lo más $d/2$, centrado en cualquier punto de $p^{-1}([z])$, por ejemplo en z mismo. Entonces U contiene a lo más un punto de cada Ω -órbita, por lo que si definimos $V = p(U)$, la función $p : U \rightarrow V$ es biyectiva, abierta y continua, y por lo tanto un homeomorfismo. Así todo punto $[z] \in \mathbb{T}$ tiene una vecindad homeomorfa a un conjunto abierto en \mathbb{C} .

Observese que $p^{-1}(V)$ consiste de conjuntos abiertos disjuntos de la forma $U + w$, $w \in \Omega$, cada uno de los cuales es homeomorfo a V bajo p , ver figura 1.3. Así, \mathbb{C} es un espacio cubriente de \mathbb{T} , y p es una transformación cubriente.

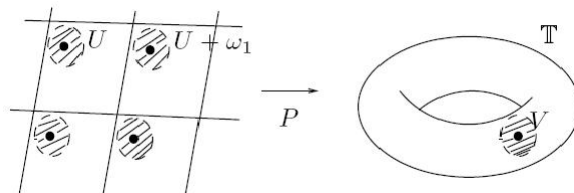


Figura 1.3: Transformación cubriente.

1.4. Formas de retículas .

Por lo regular, nos referimos a la *forma de la retícula* como la forma geométrica de sus correspondientes regiones fundamentales. Para una retícula $\Omega(w_1, w_2)$, su apariencia está determinada por el cociente $\tau = \frac{w_2}{w_1}$. Generalmente escogemos los generadores de tal manera que $Im(\tau) > 0$. Si $\Omega(w_1, w_2)$ es una retícula y $k \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$, la retícula $k\Omega$ es $\{kw : w \in \Omega(w_1, w_2)\}$, en tal caso diremos que Ω y $k\Omega$ son *similares* . En general $\Omega(w_1, w_2)$ y $\Omega'(w'_1, w'_2)$ son similares si para algún $k \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$, $\Omega' = k\Omega$.

Definimos el *módulo* de la base $\{w_1, w_2\}$ para la retícula $\Omega(w_1, w_2)$ como $\tau = \frac{w_2}{w_1}$, con $Im(\frac{w_2}{w_1}) > 0$

(si no, intercambiamos el orden de los generadores). Cada retícula Ω determina un conjunto de módulos, los módulos de sus diferentes bases. Como $\frac{kw_2}{kw_1} = \frac{w_2}{w_1}$, se tiene que retículas similares determinan el mismo conjunto de módulos.

Ahora si $\Omega(w_1, w_2)$ y $\Omega'(w'_1, w'_2)$ son retículas con módulos $\tau = \frac{w_2}{w_1}$, y $\tau' = \frac{w'_2}{w'_1}$, se tiene que Ω y Ω' son similares si y sólo si

$$\begin{aligned} w'_2 &= k(aw_2 + bw_1) \\ w'_1 &= k(cw_2 + dw_1) \end{aligned}$$

para algunos $a, b, c, d \in \mathbb{Z}$ con $ad - bc = \pm 1$. Si tratamos esto en términos de τ y τ' se tiene que las retículas son similares si y sólo si

$$\tau' = \frac{a\tau + b}{c\tau + d}$$

para algunos $a, b, c, d \in \mathbb{Z}$ con $ad - bc = \pm 1$. Notemos que τ y τ' están en el *semiplano superior* $\mathbb{H}^+ = \{z \in \mathbb{C} : \text{Im}(z) > 0\}$ si y sólo si $\tau' = \frac{a\tau + b}{c\tau + d}$ con $a, b, c, d \in \mathbb{Z}$ y $ad - bc = 1$. La propiedad de similitud es una relación de equivalencia entre retículas, y una clase de equivalencia de retículas es llamada una *forma*.

El *grupo modular* es $\Gamma = PSL(2, \mathbb{Z}) = SL(2, \mathbb{Z}) / \{\pm Id\}$, donde $SL(2, \mathbb{Z})$ es el conjunto de transformaciones de Möbius $T(z) = \frac{az+b}{cz+d}$ con $a, b, c, d \in \mathbb{Z}$ y $ad - bc = 1$. Γ actúa en \mathbb{H}^+ de la siguiente manera:

$$\begin{aligned} \Gamma \times \mathbb{H}^+ &\rightarrow \mathbb{H}^+ \\ (T, z) &\rightarrow T(z) \end{aligned}$$

Como el grupo modular es discreto y actúa discontinuamente, para $u \in \mathbb{H}$ se define la región de Dirichlet de Γ centrada en u como

$$D_u(\Gamma) = \{z \in \mathbb{H}^+ : \rho(z, u) \leq \rho(z, T(w)) \text{ para todo } T \in \Gamma\}$$

donde $\rho(z, w)$ es la distancia hiperbólica en \mathbb{H}^+ , que se define por

$$\rho(z, w) = \log \left(\frac{|z - \bar{w}| + |z - w|}{|z - \bar{w}| - |z - w|} \right).$$

La acción clásica del grupo modular Γ en \mathbb{H}^+ nos da la relación entre las posibles elecciones de τ para una misma forma. Una propiedad de una *región fundamental* de Γ es que, como es un conjunto simplemente conexo en \mathbb{H} , tiene exactamente un punto de la Γ -órbita para cada τ . Por ejemplo, si consideramos la región fundamental definida por

$$F = \{z \in \mathbb{H} : |z| \geq 1 \text{ y } |\text{Re}(z)| \leq \frac{1}{2}\} \quad (1.1)$$

entonces cualquier forma está representada por exactamente un punto en F , ver figura 1.4.

Definición 1.4.1.

1. La retícula $\Omega = [\lambda_1, \lambda_2]$ es real si $\Omega = \bar{\Omega}$.

2. $\Omega = [\lambda_1, \lambda_2]$ es *rectangular real* si existen generadores λ_1 y λ_2 tal que λ_1 es real y λ_2 es imaginario puro. Cualquier retícula similar para una retícula rectangular es *rectangular*.
3. $\Omega = [\lambda_1, \lambda_2]$ es *rómbica real* si existen generadores λ_1 y λ_2 tal que $\lambda_2 = \overline{\lambda_1}$. Por convención consideramos λ_1 como el generador con parte imaginaria negativa. Cualquier retícula similar es *rómbica*.
4. Una retícula $\Omega = [\lambda_1, \lambda_2]$ es *cuadrada* si $\Omega = i\Omega$. Es decir, Ω es cuadrada si ésta es similar a una retícula generada por $[\lambda, i\lambda]$, para algún $\lambda > 0$.
5. Una retícula $\Omega = [\lambda_1, \lambda_2]$ es *triangular* si $\Omega = e^{\frac{2\pi i}{3}}\Omega$, en este caso un paralelogramo de periodos puede ser formado por dos triángulos equiláteros.

En los casos de 2 a 4 el paralelogramo de periodos cuyos vértices son $0, \lambda_1, \lambda_2$ y $\lambda_3 := \lambda_1 + \lambda_2$, pueden ser elegidos de tal manera que, geoméricamente, el paralelogramo sea rectangular, rómbico o cuadrado, respectivamente.

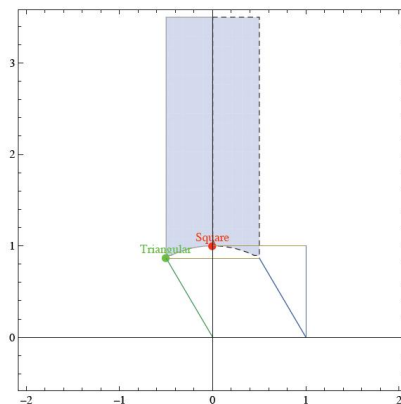


Figura 1.4: Región fundamental para Γ . Figura tomada de [CL].

Terminamos enunciando un resultado que caracteriza las retículas reales.

Teorema 1.4.2. *Una retícula Ω es real si y sólo si es rectangular real o rómbica real.*

1.5. Algunas propiedades generales de funciones elípticas.

Definición 1.5.1. Una función meromorfa $f : \mathbb{C} \rightarrow \hat{\mathbb{C}}$ es *elíptica* con respecto a una retícula $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ si f es doblemente periódica con respecto a Ω , esto es, si

$$f(z + w) = f(z) \text{ para todo } z \in \mathbb{C}, w \in \Omega$$

por lo que cada $w \in \Omega$ es un periodo de f .

Si f es una función elíptica con respecto a Ω entonces podemos pensar a f como una función $f : \mathbb{T} \rightarrow \hat{\mathbb{C}}$ donde \mathbb{T} es el toro \mathbb{C}/Ω . Cuando consideramos funciones meromorfas $g : \hat{\mathbb{C}} \rightarrow \hat{\mathbb{C}}$ la compacidad del dominio $\hat{\mathbb{C}}$ permitió el uso del teorema de Liouville para mostrar que si g es analítica y acotada entonces g es constante. Ahora como el dominio de f también es compacto se podrán probar resultados similares para funciones elípticas. Supongamos que f es elíptica con respecto a una retícula Ω tal que f no es idénticamente igual a c con $c \in \hat{\mathbb{C}}$, entonces las soluciones de $f(z) = c$ son aisladas y las soluciones congruentes tienen la misma multiplicidad. Como las soluciones son aisladas, cualquier polígono fundamental P para Ω contiene solo un número finito de soluciones (pues P es compacto), por lo cual, cada solución tiene multiplicidad finita y reemplazando P por $P+t$ ($t \in \mathbb{C}$) si es necesario, podemos asumir que no hay soluciones en ∂P .

Sean $z = z_1, \dots, z_r$ las soluciones dentro de P con multiplicidades k_1, \dots, k_r y sea $N = k_1 + \dots + k_r$, entonces diremos que hay N soluciones de $f(z) = c$. Como z_1, \dots, z_r son representantes de las clases de congruencias de soluciones de $f(z) = c$ para todo $z \in \mathbb{C}$ podemos pensar que N es la suma de las multiplicidades de las soluciones $f([z]) = c$ donde $[z] \in \mathbb{T} = \mathbb{C}/\Omega$. Con esto en mente, definimos el *orden*, $\text{ord}(f)$, de una función elíptica f como el número de soluciones de $f(z) = \infty$, esto es, la suma de los órdenes de las clases de congruencias de polos de f .

Para el resto de esta sección, asumiremos que f es elíptica con respecto a Ω , que $\text{ord}(f) = N$ y que P es el paralelogramo fundamental para Ω con vértices $t, t + w_1, t + w_2, t + w_1 + w_2$ donde $\{w_1, w_2\}$ es base para Ω y t es elegido de tal forma que ∂P no contenga ceros o polos de f , ver figura 1.5.

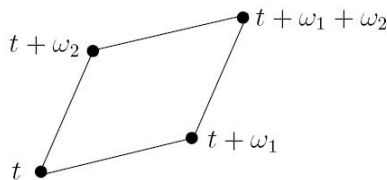


Figura 1.5: Nuevo paralelogramo fundamental.

Teorema 1.5.2. *Sea f una función elíptica en \mathbb{C} . Entonces f es constante si y sólo si $N = 0$ (así una función elíptica analítica debe ser constante).*

DEMOSTRACIÓN. Si f es constante y meromorfa, entonces ésta no tiene polos en \mathbb{C} , así $N = 0$. Inversamente, supongamos que $N = 0$ entonces f no tiene polos, así f es analítica en \mathbb{C} . Ahora P es compacto y f es continua así $f(P)$ es un subconjunto compacto de \mathbb{C} y por lo tanto acotado. Como $f(\mathbb{C}) = f(P)$ se sigue que f es acotada en \mathbb{C} entonces el Teorema de Liouville implica que f , siendo analítica y acotada, debe ser constante. \square

Teorema 1.5.3. *La suma de los residuos de f dentro de P es cero.*

DEMOSTRACIÓN. Como f es meromorfa y analítica en ∂P , entonces $\frac{1}{2\pi i} \int_{\partial P} f(z) dz$ es igual a la suma de los residuos dentro de P .

Ahora sean $\Gamma_1, \Gamma_2, \Gamma_3$ y Γ_4 los lados de P de t a $t + w_1$, $t + w_1$ a $t + w_1 + w_2$, $t + w_1 + w_2$ a $t + w_2$ y de $t + w_2$ a t , respectivamente. Así que

$$\int_{\partial P} f(z) dz = \sum_{j=1}^4 \int_{\Gamma_j} f(z) dz$$

donde la dirección de integración a lo largo de Γ_j es en el sentido positivo (es decir, en el sentido contrario de las manecillas del reloj) de la orientación de ∂P , ver figura 1.6. Ahora utilizando que w_2 es periodo de f y que $\Gamma_3 = \Gamma_1 + w_2$, con orientación inversa, tenemos que

$$\int_{\Gamma_3} f(z) dz = \int_{\Gamma_3} f(z + w_2) dz = - \int_{\Gamma_1 + w_2} f(z + w_2) d(z + w_2) = - \int_{\Gamma_1} f(z) dz.$$

Similarmente se obtiene que $\int_{\Gamma_4} f(z) dz = - \int_{\Gamma_2} f(z) dz$, en este caso utilizando a w_1 como periodo de f , así $\int_{\partial P} f(z) dz = 0$, por lo que la suma de los residuos es cero. \square

Corolario 1.5.4. *No hay funciones elípticas de orden $N = 1$.*

DEMOSTRACIÓN. Si f fuera elíptica de orden 1 tendría un polo simple de orden 1 en P , es decir para $z = c \in P$

$$f(z) = \sum_{j=-1}^{\infty} a_j (z - c)^j \text{ cerca de } z = c \text{ con } a_{-1} \neq 0.$$

Así la suma de los residuos de f dentro de P es igual a a_{-1} , el cual es distinto de cero, contradicción al Teorema 1.5.3. \square

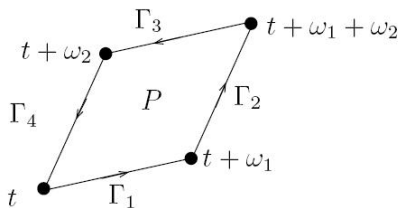


Figura 1.6: Orientación positiva para integrar sobre P .

A continuación sólo mencionamos unas propiedades más de las funciones elípticas, cuyas demostraciones pueden ser consultadas en [JS].

1. Si f tiene orden $N > 0$ entonces f toma cada valor $c \in \mathbb{C}$ exactamente N veces.
2. Sean f y g funciones elípticas con respecto a Ω con polos en los mismos puntos en \mathbb{C} y con la misma parte principal en estos puntos, entonces $f(z) = g(z) + c$ para alguna constante c .

3. Sean f y g funciones elípticas con respecto a Ω , con ceros y polos de los mismos órdenes en los mismos puntos de \mathbb{C} , entonces $f(z) = c g(z)$ para alguna constante $c \neq 0$.
4. Sean $[a_1], \dots, [a_r]$ y $[b_1], \dots, [b_s]$ las clases de congruencia de ceros y polos de una función elíptica f , con multiplicidades k_1, \dots, k_r y l_1, \dots, l_s respectivamente. Entonces

$$\sum_{j=1}^r k_j a_j \equiv \sum_{j=1}^s l_j b_j \pmod{\Omega}.$$

1.6. La función \wp -Weierstrass.

Sea $\Omega = \Omega(w_1, w_2)$ una retícula con base $\{w_1, w_2\}$ y sea P un paralelogramo fundamental que no contenga elementos de Ω en ∂P . Necesitamos construir funciones f no constantes las cuales sean elípticas con respecto a Ω . Sabemos que tal función f no puede ser analítica y por tanto ésta debe tener polos en P . También sabemos que f no puede tener justamente un polo, luego la función elíptica no constante más simple es de orden 2, es decir, debe tener 2 polos simples o un polo doble en P .

En esta sección introduciremos la función $\wp(z)$ de Weierstrass la cual es elíptica de orden 2 con respecto a Ω y con un polo de orden 2 en P . Esta será nuestra función elíptica básica en el sentido que, toda función elíptica con respecto a Ω , es una expresión racional de \wp y \wp' (ver Teorema 1.7.4).

No es difícil construir funciones elípticas de orden $N \geq 3$ directamente, pero el método de construcción no se aplica fácilmente para el caso $N = 2$. En lugar de construir $\wp(z)$ directamente, la obtendremos de la función $\sigma(z)$ de Weierstrass la cual está relacionada a $\wp(z)$.

Veremos que la convergencia de los productos y series que definen la función Weierstrass dependen de una suma de índices sobre la retícula Ω . Claramente para que tenga sentido la suma sobre Ω , debemos describir primero un orden particular en Ω .

Los conjuntos

$$\Pi_r = \{aw_1 + bw_2 \mid a, b \in \mathbb{R} \text{ y } \max(|a|, |b|) = r\},$$

para enteros $r \geq 1$ son paralelogramos semejantes centrados en cero, ver figura 1.7.

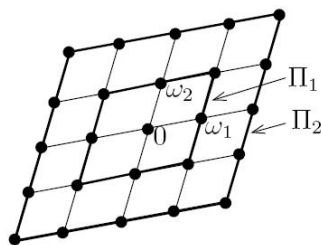


Figura 1.7: Paralelogramos centrados en cero.

Definiendo $\Omega_r = \Omega \cap \Pi_r$, tenemos

$$\Omega_r = \{mw_1 + nw_2 \mid m, n \in \mathbb{Z} \text{ y } \max(|m|, |n|) = r\}.$$

Ahora, Ω es una unión disjunta $\Omega = \{0\} \cup \Omega_1 \cup \Omega_2 \cup \dots$, y para cada $r \geq 1$ tenemos que la cardinalidad de Ω_r es

$$|\Omega_r| = 8r. \quad (1.2)$$

Podemos ordenar los elementos de Ω empezando en cero y listar los elementos de $\Omega_1, \Omega_2, \dots$ en turno, rotando alrededor de cada Ω_r en el orden $rw_1, rw_1 + w_2, \dots, rw_1 - w_2$, así que la sucesión de espirales sale hacia afuera de cero, ver figura 1.8.

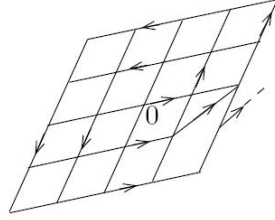


Figura 1.8: Secuencia en espiral para dar un orden.

Si denotamos este orden por $w^{(0)}, w^{(1)}, w^{(2)}, \dots$ entonces $w^{(0)} = 0, w^{(1)} = w_1, w^{(2)} = w_1 + w_2, w^{(3)} = w_2, \dots, w^{(8)} = w_1 - w_2, w^{(9)} = 2w_1, w^{(10)} = 2w_1 + w_2, \dots$. Es claro que $|w^{(k)}| \rightarrow \infty$ cuando $k \rightarrow \infty$.

Por $\sum'_{w \in \Omega}$ (respectivamente $\sum'_{w \in \Omega}$) denotamos la suma sobre todos los puntos de la retícula (distintos de cero) tomados en el orden arriba descrito; así $\sum'_{w \in \Omega} h(w) = \sum_{k=0}^{\infty} h(w^{(k)})$ para cualquier función h , y de igual manera $\sum'_{w \in \Omega} h(w) = \sum_{k=1}^{\infty} h(w^{(k)})$. Similarmente denotamos por $\Pi_{w \in \Omega}$ (respectivamente $\Pi'_{w \in \Omega}$) el producto sobre todos los puntos de la retícula (distintos de cero). Por conveniencia muy a menudo utilizaremos abreviaturas en la notación para \sum, \sum' etcétera, para la retícula Ω .

Teorema 1.6.1. *Si $s \in \mathbb{R}$, entonces $\sum'_{w \in \Omega} |w|^{-s}$ converge si y sólo si $s > 2$.*

DEMOSTRACIÓN. Si D y d son los módulos mayor y menor de los elementos del paralelogramo Π_1 que contiene a Ω_1 , entonces como

$$\Omega_r \subseteq \Pi_r = \{rz \mid z \in \Pi_1\}$$

tenemos que $rD \geq |w| \geq rd$, para todo $w \in \Omega_r$.

Definiendo

$$\sigma_{r,s} = \sum_{w \in \Omega_r} |w|^{-s}$$

vemos que por (1.2), $\sigma_{r,s}$ está entre $8r(rD)^{-s} = 8r^{1-s}D^{-s}$ y $8r(rd)^{-s} = 8r^{1-s}d^{-s}$. Así, $\sum_{r=1}^{\infty} \sigma_{r,s}$ converge si y sólo si $\sum_{r=1}^{\infty} r^{1-s}$ converge, esto es, si y sólo si $s > 2$. Como los términos de $\sum' |w|^{-s}$ son positivos y pueden ser agrupados para dar $\sum_{r=1}^{\infty} \sigma_{r,s}$, se sigue que $\sum' |w|^{-s}$ converge si y sólo si $s > 2$. \square

Ahora es fácil construir funciones elípticas de orden $N \geq 3$.

Teorema 1.6.2. *Para cada entero $N \geq 3$, la función $F_N(z) = \sum_{w \in \Omega} (z - w)^{-N}$ es elíptica de orden N con respecto a Ω .*

Claramente, el Teorema 1.6.2 falla para producir una función elíptica $F_2(z)$ de orden 2, dado que el Teorema 1.6.1 no puede ser usado para mostrar la convergencia de $\sum (z - w)^{-2}$.

Para garantizar la convergencia, podemos hacer los términos de esta serie más pequeños, reemplazando $(z - w)^{-2}$ por $(z - w)^{-2} - w^{-2}$ para cada $w \neq 0$. La serie resultante es

$$\wp(z) = \frac{1}{z^2} + \sum'_{w \in \Omega} \left(\frac{1}{(z - w)^2} - \frac{1}{w^2} \right) \quad (1.3)$$

y representa una función elíptica de orden 2, la función \wp -WEIERSTRASS.

Como $\wp(z)$ no tiene la forma $\sum_{w \in \Omega} f(z - w)$, la periodicidad de $\wp(z)$ no es obvia, y se demostrará indirectamente integrando la derivada $\wp'(z)$, la cual es la función elíptica $-2F_3(z)$. Ahora obtendremos la función $\wp(z)$ de la función σ de Weierstrass

$$\sigma(z) = z \prod'_{w \in \Omega} g(w, z) \quad (1.4)$$

donde

$$g(w, z) = \left(1 - \frac{z}{w} \right) \exp \left(\frac{z}{w} + \frac{1}{2} \left(\frac{z}{w} \right)^2 \right). \quad (1.5)$$

El factor $(1 - (\frac{z}{w}))$ es incluido en $g(w, z)$ para que $\sigma(z)$ tenga un cero simple en cada punto w de la retícula, mientras que el factor exponencial es incluido para garantizar la convergencia del producto infinito.

Si $K \subset \mathbb{C}$ es un compacto, entonces dado que K es acotado y como $|w^{(k)}| \rightarrow \infty$ si $k \rightarrow \infty$, se sigue que $g(w^{(k)}, z) \rightarrow 1$ uniformemente sobre K cuando $k \rightarrow \infty$.

Entonces existe un entero N_1 tal que para toda $k > N_1$, $\log(g(w^{(k)}, z))$ está bien definido para $z \in K$ y satisface

$$\begin{aligned} \log(g(w^{(k)}, z)) &= \log \left(1 - \frac{z}{w^{(k)}} \right) + \log \left[\exp \left(\frac{z}{w^{(k)}} + \frac{1}{2} \left(\frac{z}{w^{(k)}} \right)^2 \right) \right] \\ &= \log \left(1 - \frac{z}{w^{(k)}} \right) + \frac{z}{w^{(k)}} + \frac{1}{2} \left(\frac{z}{w^{(k)}} \right)^2. \end{aligned}$$

Más aún, como K es acotado, entonces existe un entero N_2 tal que $|w^{(k)}| > 2|z|$ para todo $z \in K$, $k > N_2$. Así para todo $z \in K$ y $k > \max(N_1, N_2)$, tenemos

$$\begin{aligned} |\log(g(w^{(k)}, z))| &= \left| \log \left(1 - \frac{z}{w^{(k)}} \right) + \frac{z}{w^{(k)}} + \frac{1}{2} \left(\frac{z}{w^{(k)}} \right)^2 \right| \\ &= \left| \frac{1}{3} \left(\frac{z}{w^{(k)}} \right)^3 + \frac{1}{4} \left(\frac{z}{w^{(k)}} \right)^4 + \dots \right| \\ &\leq \frac{1}{3} \left| \frac{z^3}{w^{(k)}} \right| \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \dots \right) \end{aligned}$$

$$\leq \left| \frac{z}{w^{(3)}} \right|^3.$$

Por lo tanto $\sum_k \log(g(w^{(k)}, z))$ converge uniformemente en K , entonces $z \cdot \prod'_{w \in \Omega} g(w, z)$ converge uniformemente sobre K . Este producto converge a la función $\sigma(z)$, la cual es analítica en \mathbb{C} . Como $g(w, -z) = g(-w, z)$, se sigue que $\sigma(-z) = -\sigma(z)$, esto es $\sigma(z)$ es una función impar. La analogía entre $\sigma(z)$ y la función

$$S(z) = z \cdot \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{z^2}{n^2} \right)$$

que converge uniformemente en subconjuntos compactos, es mas clara si $S(z)$ la escribimos como

$$S(z) = z \cdot \prod_{n=-\infty}^{\infty} \left(1 - \frac{z}{n} \right) \exp\left(\frac{z}{n}\right), \quad n \neq 0.$$

La derivada logarítmica de $\sigma(z)$ da una serie infinita que converge uniformemente en subconjuntos compactos de \mathbb{C} a una función meromorfa, la cual denotamos por $\zeta(z)$. Esta es la función *zeta de Weierstrass* dada por

$$\zeta(z) = \frac{\sigma'(z)}{\sigma(z)} = \frac{d}{dz}(\log \sigma(z)) = \frac{1}{z} + \sum'_{w \in \Omega} \left(\frac{1}{z-w} + \frac{1}{w} + \frac{z}{w^2} \right). \quad (1.6)$$

Como la función $\sigma(z)$ es una función impar, $\zeta(z)$ es también impar. Esta tiene polos simples en los puntos de la retícula y es analítica en \mathbb{C}/Ω . Como $\zeta(z)$ es una serie de funciones meromorfas, entonces converge uniformemente en subconjuntos compactos de \mathbb{C} , por lo que podemos diferenciar término a término y obtenemos una función meromorfa $\zeta'(z)$.

Escribiendo $\wp(z) = -\zeta'(z)$ tenemos

$$\wp(z) = \frac{1}{z^2} + \sum'_{w \in \Omega} \left(\frac{1}{(z-w)^2} - \frac{1}{w^2} \right) \quad (1.7)$$

que es una función par la cual es analítica en \mathbb{C}/Ω y tiene polos de orden 2 en cada $w \in \Omega$.

Teorema 1.6.3. $\wp(z)$ es una función elíptica cuya retícula Ω es igual al conjunto de periodos Ω_p .

DEMOSTRACIÓN. Primeramente tenemos que ver que $\wp(z)$ es meromorfa, esto es equivalente a mostrar que $\Omega = \Omega_p$.

Como la serie (1.7) definida por $\wp(z)$ es uniformemente convergente en subconjuntos compactos de \mathbb{C} , entonces podemos diferenciar término a término, obteniendo así

$$\wp'(z) = -\frac{2}{z^3} - \sum'_{w \in \Omega} \frac{2}{(z-w)^3} = -2 \sum'_{w \in \Omega} (z-w)^{-3} = -2F_3(z),$$

donde $F_3(z)$ es la función elíptica de orden 3 que hemos definido en el Teorema 1.6.2. De esta forma se sigue que para cada $w \in \Omega$ la función $\wp'(z+w) - \wp'(z)$ es idénticamente cero, y

como $\wp(z+w) - \wp(z)$ es constante, escribimos $\wp(z+w) - \wp(z) = C_w$ para todo $z \in \mathbb{C}$. Si hacemos $z = -\frac{w}{2}$ tenemos que $C_w = \wp(\frac{w}{2}) - \wp(-\frac{w}{2}) = 0$ pues $\wp(z)$ es una función par. Así, $\wp(z+w) = \wp(z)$ para todo $z \in \mathbb{C}$ y $w \in \Omega$, por lo que $\Omega \subseteq \Omega_p$. Como 0 es un polo de $\wp(z)$, hay un polo en cada punto en Ω_p ; como $\wp(z)$ no tiene polos en \mathbb{C}/Ω se sigue que $\Omega_p \subseteq \Omega$, obteniendo $\Omega = \Omega_p$. \square

Teorema 1.6.4. $\wp(z)$ tiene orden 2 y $\wp'(z)$ tiene orden 3.

DEMOSTRACIÓN. $\wp(z)$ solo tiene una clase de congruencias de polos (los puntos de la retícula $w \in \Omega$) cada uno de orden 2, de esta forma $\wp(z)$ tiene orden 2; similarmente $\wp'(z) = -2F_3(z)$ tiene una sola clase de polos de orden 3, así $\wp'(z)$ tiene orden 3. \square

Es importante notar que la función $\wp(z)$ de Weierstrass, $\zeta(z)$ y $\sigma(z)$ dependen de la retícula Ω .

1.7. La ecuación diferencial de $\wp(z)$.

En esta sección derivamos una importante ecuación y encontramos una relación entre $\wp(z)$ y $\wp'(z)$, obtenida de la serie de Laurent para $\wp(z)$ cerca de $z = 0$.

Definimos la serie de Laurent

$$\zeta(z) = \frac{1}{z} + \sum'_{w \in \Omega} \left(\frac{1}{z-w} + \frac{1}{w} + \frac{z}{w^2} \right). \quad (1.8)$$

Sea $m = \min\{|w| : w \in \Omega \setminus \{0\}\}$, y sea $D = \{z \in \mathbb{C} : |z| < m\}$ el disco abierto más grande centrado en cero y que no contiene otros puntos de la retícula.

Como

$$\frac{1}{z-w} + \frac{1}{w} + \frac{z}{w^2} = \frac{z^2}{w^2(z-w)}$$

tenemos que al comparar con $\sum' |w|^{-3}$, la serie $\sum' \left((z-w)^{-1} + \frac{1}{w} + \frac{z}{w^2} \right)$ converge absolutamente para cada $z \in \mathbb{C}/\Omega$. Mas aún para cada $w \in \Omega \setminus \{0\}$ la serie binomial

$$\frac{1}{z-w} = -\frac{1}{w} - \frac{z}{w^2} - \frac{z^2}{w^3} - \dots$$

converge absolutamente para $z \in D$. De acuerdo a ello podemos sustituir ésto en (1.8) para obtener

$$\begin{aligned} \zeta(z) &= \frac{1}{z} + \sum' \left(-\frac{z^2}{w^3} - \frac{z^3}{w^4} - \dots \right) \\ &= \frac{1}{z} - G_3 z^2 - G_4 z^3 - \dots \end{aligned}$$

para todo $z \in D$, donde

$$G_k = G_k(\Omega) = \sum'_{w \in \Omega} w^{-k}.$$

La serie G_k es la *serie de Eisenstein* para Ω la cual converge absolutamente para $k \geq 3$. Para k impar los términos w^{-k} y $(-w)^{-k}$ se cancelan, dando $G_k = 0$, de este modo la serie de Laurent para $\zeta(z)$ es

$$\zeta(z) = \frac{1}{z} - \sum_{n=2}^{\infty} G_{2n} \cdot z^{2n-1} \quad (1.9)$$

y como $\wp(z) = -\zeta'(z)$, tenemos que

$$\wp(z) = \frac{1}{z^2} + \sum_{n=2}^{\infty} (2n-1)G_{2n} \cdot z^{2n-2} \quad (1.10)$$

es la serie de Laurent para $\wp(z)$, válida para $z \in D$. Ahora el cálculo es directo y tenemos

$$\wp'(z) = -\frac{2}{z^3} + 6G_4z + 20G_6z^3 + \dots,$$

y así

$$\begin{aligned} \wp'(z)^2 &= \frac{4}{z^6} - \frac{24G_4}{z^2} - 80G_6 + z^2\phi_1(z), \\ 4\wp(z)^3 &= \frac{4}{z^6} + \frac{36G_4}{z^2} + 60G_6 + z^2\phi_2(z), \\ 60G_4\wp(z) &= \frac{60G_4}{z^2} + z^2\phi_3(z), \end{aligned}$$

donde $\phi_1(z)$, $\phi_2(z)$ y $\phi_3(z)$ son series de potencias convergentes en D .

De las últimas tres ecuaciones obtenemos

$$\wp'(z)^2 - 4\wp(z)^3 + 60G_4\wp(z) + 140G_6 = z^2\phi(z)$$

donde $\phi(z) = \phi_1(z) - \phi_2(z) + \phi_3(z)$ es una serie de potencias convergente en D . Como \wp y \wp' son elípticas con respecto a Ω , entonces la función $f(z) = \wp'(z)^2 - 4\wp(z)^3 + 60G_4\wp(z) + 140G_6$ es también elíptica. Como $f(z) = z^2\phi(z)$ en D , con $\phi(z)$ analítica, f se anula en cero y entonces se anula en todo $w \in \Omega$. Sin embargo por la construcción, f puede tener polos donde \wp o \wp' tengan polos, es decir, en los puntos de la retícula. Entonces f no tiene polos y por lo tanto debe ser la constante cero. Con todo esto hemos mostrado el siguiente teorema.

Teorema 1.7.1. $\wp'(z)^2 = 4\wp(z)^3 - 60G_4\wp(z) - 140G_6$.

Esta es la ecuación diferencial para $\wp(z)$. Si hacemos

$$g_2 = 60G_4 = 60 \sum' w^{-1} \quad \text{y} \quad g_3 = 140G_6 = 140 \sum' w^{-6} \quad (1.11)$$

tenemos

$$\wp'(z)^2 = 4\wp(z)^3 - g_2\wp(z) - g_3. \quad (1.12)$$

Ahora haciendo $z = \wp(t)$, entonces tenemos que

$$\left(\frac{dz}{dt}\right)^2 = 4z^3 - g_2z - g_3$$

por lo que

$$\wp^{-1}(z) = t = \int \frac{dz}{\sqrt{p(z)}},$$

donde $p(z)$ es el polinomio cúbico $4z^3 - g_2z - g_3$. Notemos que la inversa de una función elíptica aparece como una integral indefinida.

Teorema 1.7.2. *Sea Ω una retícula con base $\{w_1, w_2\}$ y sea $w_3 = w_1 + w_2$. Si P es un paralelogramo fundamental con $0, \frac{1}{2}w_1, \frac{1}{2}w_2$ y $\frac{1}{2}w_3$ en su interior, entonces $\frac{1}{2}w_1, \frac{1}{2}w_2$ y $\frac{1}{2}w_3$ son los ceros de \wp' en P .*

DEMOSTRACIÓN. Sabemos que \wp' tiene orden 3 y en consecuencia 3 ceros en P . Si $w \in \Omega$ entonces, como $\frac{1}{2}w \equiv -\frac{1}{2}w \pmod{\Omega}$ tenemos que $\wp'(\frac{1}{2}w) = \wp'(-\frac{1}{2}w)$; como \wp' es una función impar se tiene que $\wp'(\frac{1}{2}w) = -\wp'(\frac{1}{2}w)$, de esta forma $\wp'(\frac{1}{2}w) = 0$ ó ∞ . Como el único polo de \wp' dentro de P es el triple polo en cero, tenemos que $\wp'(\frac{1}{2}w_j) = 0$ para $j = 1, 2, 3$. \square

Definimos $e_j = \wp(\frac{1}{2}w_j)$ para $j = 1, 2, 3$. Si definimos $S = [\frac{1}{2}w_1] \cup [\frac{1}{2}w_2] \cup [\frac{1}{2}w_3]$ como el conjunto de las clases de equivalencia de ceros de \wp' en \mathbb{C} , vemos que $\{e_1, e_2, e_3\} = \wp(S)$ es independiente de la base $\{w_1, w_2\}$ asociada a Ω .

Teorema 1.7.3. *e_1, e_2 y e_3 son mutuamente distintos.*

DEMOSTRACIÓN. Sea $f_j(z) = \wp(z) - e_j$ para $j = 1, 2, 3$. Como los polos de f_j son los mismos que los de \wp , entonces f_j es una función elíptica de orden 2 y por lo tanto tiene dos clases de ceros, contando multiplicidades. Como $f_j(\frac{1}{2}w_j) = f_j'(\frac{1}{2}w_j) = 0$, f_j tiene ceros dobles en $[\frac{1}{2}w_j]$ y en consecuencia no tiene otros ceros. En particular $f_j(\frac{1}{2}w_k) \neq 0$ para $j \neq k$. Dado que $f_j(\frac{1}{2}w_k) = \wp(\frac{1}{2}w_k) - e_j = e_k - e_j$ entonces tenemos que $e_j \neq e_k$ para $j \neq k$. \square

Finalizamos enunciando algunos resultados que relacionan la función $\wp(z)$ y $\wp'(z)$, así como sus propiedades de homogeneidad y relaciones algebraicas para los valores críticos de \wp .

Teorema 1.7.4. *Sean R_1 y R_2 funciones racionales de grado $d \geq 1$. Entonces:*

1. Si f es una función elíptica par, entonces $f = R_1(\wp)$.
2. Si f es una función elíptica entonces $f = R_1(\wp) + \wp' R_2(\wp)$.

Anteriormente vimos que la función elíptica \wp -Weierstrass satisface la ecuación diferencial $\wp' = \sqrt{p(\wp)}$ donde p es un polinomio cúbico de la forma

$$p(z) = 4z^3 - c_2z - c_3, \quad (c_2, c_3 \in \mathbb{C}). \tag{1.13}$$

Un polinomio de la forma (1.13) se dice que está en la *forma normal Weierstrass*. Si aplicamos una sustitución $\theta : z \mapsto az + b$ ($a, b \in \mathbb{C}$), cualquier polinomio cúbico puede ser escrito en esta forma. Notemos que $\theta : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ es una biyección y preserva la multiplicidad de las raíces, por lo que sin pérdida de generalidad podemos restringir nuestra atención a un polinomio cúbico p en la forma normal Weierstrass.

Si e_1, e_2 y e_3 son las raíces del polinomio p en (1.13) entonces definimos el *discriminante* de p como

$$\Delta_p = 16(e_1 - e_2)^2(e_2 - e_3)^2(e_3 - e_1)^2. \quad (1.14)$$

Claramente las raíces son distintas si y sólo si $\Delta_p \neq 0$.

Teorema 1.7.5. $\Delta_p = c_2^3 - 27c_3^2$.

DEMOSTRACIÓN. Haciendo

$$p(z) = 4(z - e_1)(z - e_2)(z - e_3) \quad (1.15)$$

e igualando coeficientes entre éstos y (1.13) tenemos

$$e_1 + e_2 + e_3 = 0, \quad e_1e_2 + e_2e_3 + e_3e_1 = \frac{-c_2}{4}, \quad e_1e_2e_3 = \frac{c_3}{4}. \quad (1.16)$$

Las funciones simétricas restantes de las soluciones se pueden obtener de (1.16). Por ejemplo

$$e_1^2 + e_2^2 + e_3^2 = (e_1 + e_2 + e_3)^2 - 2(e_1e_2 + e_2e_3 + e_3e_1) = \frac{c_2}{2},$$

$$e_1^2e_2^2 + e_2^2e_3^2 + e_3^2e_1^2 = (e_1e_2 + e_2e_3 + e_3e_1)^2 - 2e_1e_2e_3(e_1 + e_2 + e_3) = \frac{c_2^2}{16}.$$

Ahora diferenciando (1.13) y (1.15) y evaluando en $z = e_1$ tenemos

$$4(e_1 - e_2)(e_1 - e_3) = P'(e_1) = 12e_1^2 - c_2,$$

con expresiones similares para $P'(e_2)$ y $P'(e_3)$. De donde tenemos que

$$\begin{aligned} \Delta_p &= -\frac{1}{4}P'(e_1)P'(e_2)P'(e_3) = -\frac{1}{4} \prod_i (12e_i^2 - c_2) \\ &= -\frac{1}{4} (1728(e_1e_2e_3)^2 - 144c_2(e_1^2e_2^2 + e_2^2e_3^2 + e_3^2e_1^2) + 12c_2^2(e_1^2 + e_2^2 + e_3^2) - c_2^3) \\ &= -\frac{1}{4} (108c_3^2 - 9c_2^3 + 6c_2^3 - c_2^3) = c_2^3 - 27c_3^2. \end{aligned}$$

□

Inmediatamente obtenemos

Corolario 1.7.6. p tiene raíces distintas si y sólo si $c_2^3 - 27c_3^2 \neq 0$.

La función elíptica \wp y su derivada satisfacen las siguientes propiedades de homogeneidad, la verificación de estas propiedades se hacen por medio de sustitución en las series que definen a estas funciones.

Proposición 1.7.7. *Para cualquier retícula Ω y cualquier $k \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ la función elíptica \wp -Weierstrass y su derivada satisfacen las siguientes propiedades de homogeneidad*

$$\wp_{k\Omega}(kz) = k^{-2} \wp_{\Omega}(z). \quad (1.17)$$

$$\wp'_{k\Omega}(kz) = k^{-3} \wp'_{\Omega}(z).$$

DEMOSTRACIÓN. Para la primera propiedad:

$$\begin{aligned} \wp_{k\Omega}(kz) &= \frac{1}{(kz)^2} + \sum'_{kw \in k\Omega} \frac{1}{(kz - kw)^2} - \frac{1}{(kw)^2} = \frac{1}{k^2 z^2} + \sum'_{kw \in k\Omega} \frac{1}{k^2 (z - w)^2} - \frac{1}{k^2 w^2} = \\ &= \frac{1}{k^2} \left(\frac{1}{z^2} + \sum'_{w \in \Omega} \frac{1}{(z - w)^2} - \frac{1}{w^2} \right) = \frac{1}{k^2} \wp_{\Omega}(z). \end{aligned}$$

Para la segunda propiedad:

$$\begin{aligned} \wp'_{k\Omega}(kz) &= -2 \sum'_{kw \in k\Omega} \frac{1}{(kz - kw)^3} = -2 \sum'_{kw \in k\Omega} \frac{1}{k^3 (z - w)^3} = \\ &= \frac{1}{k^3} \left(\sum'_{w \in \Omega} \frac{1}{(z - w)^3} \right) = \frac{1}{k^3} \wp'_{\Omega}(z). \end{aligned}$$

□

Capítulo 2

Interacción de Funciones Meromorfas

2.1. Definiciones de los conjuntos de Fatou y Julia.

Sea $f : \mathbb{C} \rightarrow \hat{\mathbb{C}}$ una función meromorfa. Denotamos por f^n la n -ésima iterada de f , esto es, $f^0(z) = z$ y $f^n(z) = f(f^{n-1}(z))$ para $n \geq 1$. Por ser f meromorfa, $f^n(z)$ está definida para todo $z \in \mathbb{C}$ excepto en un conjunto numerable de puntos, los cuales son los polos de f, f^2, \dots, f^{n-1} . Cuando f es racional, sabemos que f tiene una extensión meromorfa en $\hat{\mathbb{C}}$. Esto no ocurre cuando f es trascendental, pues en este caso, la expansión analítica de la función es infinita. Las funciones que trataremos de ahora en adelante serán las funciones *meromorfas trascendentales*, y por simplicidad, nos referiremos a ellas simplemente como funciones meromorfas.

En la teoría de iteración de funciones, los objetos básicos de estudio son el *conjunto de Fatou*, $F = F(f)$, y el *conjunto de Julia*, $J = J(f)$. Para definir formalmente estos conjuntos recordaremos la definición de familia normal.

Definición 2.1.1. Sea $U \subset \mathbb{C}$ un conjunto abierto y conexo. Sea $\mathfrak{F} = \{f \mid f : U \rightarrow \hat{\mathbb{C}}\}$ una familia de funciones analíticas en U . La familia \mathfrak{F} es *normal* en $z_0 \in U$ si para toda sucesión $\{f_n\} \subset \mathfrak{F}$ existe una subsucesión $\{f_{n_k}\}$ que converge uniformemente en subconjuntos compactos de una vecindad de z_0 , a una función f_0 . Notemos que f_0 puede ser idénticamente igual a ∞ .

De esta forma el **conjunto de Fatou** es

$$F = \{z \in \hat{\mathbb{C}} : \{f^n\}_{n \in \mathbb{N}} \text{ está definida y es normal en alguna vecindad de } z\}$$

y el **conjunto de Julia** es el complemento del conjunto de Fatou en la esfera de Riemann, esto es

$$J(f) = \hat{\mathbb{C}} \setminus F(f).$$

Notemos que la condición de que f^n esté definida en una vecindad de z puede ser omitida de la definición cuando f es una función racional o entera. Por supuesto en este caso siempre se tiene que $\infty \in J$.

Definición 2.1.2. Un número complejo z_0 es llamado *valor omitido* de una función meromorfa f , si $f(z) \neq z_0$ para todo $z \in \mathbb{C}$.

Cuando f es una función meromorfa con exactamente un polo en z_0 y éste es un valor omitido, se tiene que $\{z_0, \infty\} \subset J$, así $f^n(z)$ está definida para todo $z \in \hat{\mathbb{C}} \setminus \{z_0, \infty\}$. Pero si f tiene más de dos polos o un polo que no es un valor omitido, entonces hay una infinidad de puntos que son llevados bajo iteración a un polo de f .

Dado $z_0 \in \hat{\mathbb{C}}$, al conjunto

$$\mathcal{O}^-(z_0) = \bigcup_{n \geq 0} f^{-n}(z_0), \text{ donde } f^{-n}(z_0) = \{z : f^n(z) = z_0\}$$

se le llama la *órbita hacia atrás* de z_0 bajo f . Entonces, lo anteriormente dicho para una función meromorfa con más de 2 polos o con un polo que no es un valor omitido, se expresa diciendo que $\mathcal{O}^-(\infty)$ es un conjunto infinito, lo cual se sigue inmediatamente del Teorema de Picard (Teorema 1.1.3).

De esta forma el abierto más grande donde las iteradas de f están definidas es $\hat{\mathbb{C}} \setminus \overline{\mathcal{O}^-(\infty)} = \hat{\mathbb{C}} \setminus \overline{\bigcup_{n \geq 0} f^{-n}(\infty)}$ y como $f(\hat{\mathbb{C}} \setminus \overline{\bigcup_{n \geq 0} f^{-n}(\infty)}) \subset \hat{\mathbb{C}} \setminus \overline{\bigcup_{n \geq 0} f^{-n}(\infty)}$ se tiene que f omita más de 3 valores. Por lo que el Teorema de Montel (Teorema 1.1.2) garantiza que la familia $\{f^n\}$ es normal en $\hat{\mathbb{C}} \setminus \overline{\bigcup_{n \geq 0} f^{-n}(\infty)}$, así

$$F(f) = \hat{\mathbb{C}} \setminus \overline{\bigcup_{n \geq 0} f^{-n}(\infty)}$$

y

$$J(f) = \overline{\bigcup_{n \geq 0} f^{-n}(\infty)}.$$

La teoría de iteración de funciones enteras y de funciones meromorfas con un polo omitido es en general, bastante diferente de la de funciones meromorfas que tienen por lo menos 2 polos o un único polo el cual no es un valor omitido. En los 2 primeros casos, es claro dónde las iteradas están definidas, y nos interesa saber dónde forman una familia normal. En el tercer caso, sólo buscamos dónde las iteradas están definidas, pues ahí forman una familia normal. Por lo tanto, debido a las diferencias entre dichos casos, dividimos la clase de funciones meromorfas trascendentales en tres subclases (ver [Be]).

- $E = \{f: f \text{ es una función entera trascendental}\};$
- $P = \{f: f \text{ es una función meromorfa trascendental, tiene exactamente un polo y éste es un valor omitido}\};$
- $M = \{f: f \text{ es una función meromorfa trascendental y tiene ya sea al menos dos polos o exactamente un polo el cual no es un valor omitido}\}.$

2.2. Propiedades elementales de los conjuntos de Fatou y de Julia.

A continuación enunciamos algunas propiedades importantes de los conjuntos F y J para funciones meromorfas, sus demostraciones pueden ser consultadas en [XC].

Propiedades :

1. Si f es racional, $f \in P$ o $f \in E$ entonces $F(f) = F(f^n)$ y $J(f) = J(f^n)$ para todo $n \geq 0$.
Notemos que se ha excluido el caso cuando $f \in M$, porque f^n puede no ser meromorfa en \mathbb{C} por lo que $F(f^n)$ y $J(f^n)$ no están definidos. Sin embargo, como hemos visto al final de la sección anterior, podemos definir estos conjuntos cuando f^n es meromorfa en \mathbb{C} excepto en un número finito de puntos, y así extender también la propiedad cuando $f \in M$.

2. F y J son completamente invariantes, es decir,

$$f^{-1}(F(f)) = f(F(f)) = F(f)$$

y lo mismo para $J(f)$.

3. J es un conjunto compacto, perfecto y no vacío.
4. Si $z_0 \in J$ entonces para todo valor finito a , existe una sucesión de puntos $\zeta_k \rightarrow z_0$ y una sucesión de enteros positivos $n_k \rightarrow \infty$ tal que

$$f^{n_k}(\zeta_k) = a, \quad k = 1, 2, \dots, \quad (2.1)$$

excepto para a lo más dos valores.

La siguiente propiedad la utilizaremos en algunos resultados del próximo capítulo, por lo que incluimos su demostración.

5. J es denso en ninguna parte o $J = \hat{\mathbb{C}}$.

DEMOSTRACIÓN. Ya que la propiedad de ser denso en ninguna parte implica que $\text{int}(J) = \emptyset$, demostraremos que si $J(f)$ tiene un punto interior entonces $J(f) = \hat{\mathbb{C}}$. Sea $z_0 \in \text{int}(J)$. De esta forma, tenemos que existe un disco $D = \{z : |z - z_0| < r\}$ para $r > 0$ suficientemente pequeño tal que $D \subset J(f)$. Sea a un valor finito que satisface la condición (2.1). Entonces podemos obtener un entero positivo k tal que $\zeta_k \in D$. Como $f^{n_k}(\zeta_k) = a \neq \infty$ y a es un valor arbitrario en \mathbb{C} excepto para a lo más 2 valores, se sigue de la propiedad 3 que $J = \hat{\mathbb{C}}$. \square

Existen ejemplos de funciones trascendentales donde $J = \hat{\mathbb{C}}$. El primer ejemplo de una función entera con esta propiedad fue dado por I. Baker [Ba], quien demostró que $J(\lambda z e^z) = \hat{\mathbb{C}}$ para un valor adecuado de λ . El ejemplo en la clase P está dado por la función $f(z) = \lambda e^z / z$ para un valor adecuado de λ y en M por la función $f(z) = \lambda \tan z$ también para un valor adecuado de λ . Ambos ejemplos se comentan con mayor detalle en [Be, §4.8].

Una propiedad más para J está dada en términos de un *punto excepcional*.

Definición 2.2.1. Decimos que $z_0 \in \hat{\mathbb{C}}$ es *excepcional* si $\mathcal{O}^-(z_0)$ es finita.

De esta forma, la propiedad es:

6. Si $z_0 \in J$ y no es excepcional, entonces $J = \overline{\mathcal{O}^-(z_0)}$.

2.3. Puntos periódicos.

Los puntos fijos y los puntos periódicos de una función f juegan un papel muy importante en la dinámica global de f .

Definición 2.3.1. Un punto $z \in \mathbb{C}$ es un punto *periódico* de f de periodo p si $f^p(z) = z$ y $f^j(z) \neq z$ para $0 < j < p$.

Dado $z \in \hat{\mathbb{C}}$, al conjunto

$$\mathcal{O}_f(z) = \{w \in \mathbb{C} : w = f^p(z) \text{ para algún } p \in \mathbb{N} \cup \{0\}\}$$

se le llama la *órbita positiva* de z bajo f . Cuando z es periódico, este conjunto es finito y se le llama *órbita periódica*.

Definición 2.3.2. Sea z un punto periódico de f de periodo p con *multiplicador* $\lambda = Df^p(z)$, donde $Df^p(z)$ denota la derivada compleja de f^p en z .

Un punto periódico puede clasificarse según el módulo del multiplicador como:

1. *atractor* si $|\lambda| < 1$; si $\lambda = 0$ diremos que z es *superatractor*.
2. *repulsor* si $|\lambda| > 1$.
3. *indiferente* si $|\lambda| = 1$.

El multiplicador de un punto periódico indiferente es de la forma $e^{2\pi i\alpha}$ donde $0 \leq \alpha < 1$. Decimos que z es *racionalmente indiferente* si α es racional e *irracionalmente indiferente* en otro caso. También, un punto z es llamado *preperiódico* si $f^n(z)$ es periódico para algún $n \geq 1$. Finalmente, un punto periódico de periodo 1 es llamado un *punto fijo*.

En este contexto se pueden enunciar otras propiedades de los conjuntos F y J .

7. Si z es atractor, entonces $z \in F$.
8. Si z es repulsor, entonces $z \in J$.
9. Si f es una función meromorfa, entonces $J(f)$ es la clausura del conjunto de puntos periódicos repulsores de f .

2.4. Clasificación de componentes periódicas.

Denotaremos por $\text{Crit}(f)$ el conjunto de puntos críticos de una función f , es decir, $\text{Crit}(f) = \{z : f'(z) = 0\}$. Si z_0 es un punto crítico, entonces $f(z_0)$ es un *valor crítico*. Diremos que w es un *valor asintótico* de f si y sólo si existe una curva continua $\alpha : [0, \infty) \rightarrow \mathbb{C}$ tal que

$$\lim_{t \rightarrow \infty} |\alpha(t)| = \infty \quad \text{y} \quad \lim_{t \rightarrow \infty} f(\alpha(t)) = w.$$

El *conjunto singular* denotado por $\text{Sing}(f^{-1})$, es el conjunto de valores críticos, valores asintóticos finitos y sus puntos límites. El conjunto *postsingular* de f se define por

$$P(f) = \bigcup_{n \geq 0} \overline{f^n(\text{Sing}(f^{-1}))}.$$

Supongamos que U es una componente conexa del conjunto de Fatou. Entonces $f^n(U)$ está contenida en una componente de F la cual denotaremos por U_n .

Definición 2.4.1. Una componente U es llamada *preperiódica* si existen $n > m \geq 0$ tal que $U_n = U_m$. En particular, si se da el caso que $m = 0$ (donde $U_0 = U$) y $n \geq 1$, entonces U es llamada *componente periódica* con periodo n , y $\{U, U_1, \dots, U_{n-1}\}$ es llamado un *ciclo* de componentes periódicas. Al n más pequeño que hace que esta propiedad se cumpla se le llama *periodo mínimo* de U . En el caso $n = 1$, es decir, $f(U) = U$, U es llamada *componente invariante*. Finalmente, una componente de F que no es preperiódica es llamada *componente errante* o *dominio errante*.

Para una función f meromorfa, la dinámica de f^n sobre componentes periódicas esta bien entendido. El siguiente teorema fue primeramente establecido por I. Baker, J. Kotus y Y. Lü en [BKL1], la prueba se basa en el trabajo de H. Cremer [C] y P. Fatou [F].

Teorema 2.4.2. (*Teorema de Clasificación de componentes de Fatou*) Sea f una función meromorfa trascendental y $U_0 \subset F$ una componente de periodo p . Entonces tenemos las siguientes posibilidades:

1. U_0 es una **componente atractora** si contiene un punto periódico atractor z_0 de periodo p . Si para todo $z \in U_0$, el $\lim_{n \rightarrow \infty} f^{np}(z) = z_0$, se dirá que U_0 es la **cuenca de atracción inmediata** de z_0 . En este caso, si el punto es superatractor se llamará **dominio de Böttcher**, en otro caso se llamará **dominio de Schröder**.
2. U_0 es una **componente de Leau** o **componente parabólica** si existe un punto periódico z_0 de periodo p en la frontera de U_0 y tal que $f^{np}(z) \rightarrow z_0$ para toda $z \in U_0$.
3. U_0 es un **disco de Siegel** si $f : U_0 \rightarrow U_0$ es analíticamente conjugada a una rotación euclidiana con ángulo irracional del disco unitario en sí mismo.
4. U_0 es un **anillo de Herman** si $f : U_0 \rightarrow U_0$ es analíticamente conjugada a una rotación con ángulo irracional de un anillo no degenerado en sí mismo.

5. U_0 es un **dominio de Baker** si existe $z_0 \in \partial U_0$ tal que $f^{np}(z) \rightarrow z_0$ para $z \in U_0$ pero $f^p(z_0)$ no está definido.

El siguiente teorema relaciona la importancia del conjunto singular de f y las componentes periódicas y es la versión meromorfa del Teorema de Fatou para funciones racionales, [Be].

Teorema 2.4.3. *Sea f una función meromorfa y $C = \{U_0, U_1, \dots, U_{p-1}\}$ un ciclo periódico de componentes de F . Entonces*

- *Si C es un ciclo de cuencas inmediatas de atracción o dominios de Leau, entonces $U_j \cap \text{Sing}(f^{-1}) \neq \emptyset$ para algún $0 \leq j \leq p-1$.*
- *Si C es un ciclo de discos de Siegel o un ciclo de anillos de Herman entonces $\partial U_j \subset \bigcup_{n>0} f^n(\text{Sing}(f^{-1})) = P(f)$, para todo $0 \leq j \leq p-1$.
En particular, los puntos singulares siempre están presentes en cualquier tipo de componente preperiódica del conjunto de Fatou.*

El siguiente lema es un resultado respecto a las componentes del conjunto de Fatou que frecuentemente utilizaremos en este trabajo.

Lema 2.4.4 (Maximalidad). *Toda componente de Fatou es la máxima componente de normalidad.*

DEMOSTRACIÓN. La maximalidad mencionada en el lema es en el sentido de que si U y V son dos componentes de Fatou tal que $U \cap V \neq \emptyset$ entonces $U = V$. En efecto, si $U \cap V \neq \emptyset$, entonces existe al menos un $z \in U \cap \partial V$. Pero $\partial V \in J$, entonces $z \in F \cap J$, lo cual nos conduce a una contradicción ya que $F \cap J = \emptyset$. Notemos que $\partial V \neq \emptyset$ de lo contrario tendríamos que $J = \emptyset$ lo cual es una contradicción. \square

2.5. Algunas clases de funciones sin dominios errantes o sin dominios de Baker.

Cuando se estudia la dinámica sobre el conjunto de Fatou, la posible existencia de componentes errantes hace más difícil el trabajo. Esta dificultad la eliminó D. Sullivan a principios de los años 80 para el caso de funciones racionales. Demostrado en [S2], este teorema es uno de los resultados más importantes en la iteración de funciones racionales.

Teorema 2.5.1 (Sullivan). *El conjunto de Fatou de una función racional no tiene dominios errantes.*

Para las siguientes clases de funciones :

- $S = \{f: f \text{ tiene un número finito de valores críticos y valores asintóticos}\};$
- $F = \{f: f \text{ tiene una representación de la forma } f(z) = z + r(z)e^{p(z)} \text{ donde } r \text{ es una función racional y } p \text{ es un polinomio}\};$

- $N = \{f: f \text{ tiene orden finito y } f'(z) = r(z)e^{p(z)}(f(z) - z) \text{ donde } r \text{ es una función racional y } p \text{ es un polinomio}\};$
- $R = \{f: f'(z) = r(z)(f(z) - z)^2 \text{ o } f'(z) = r(z)(f(z) - z)(f(z) - \tau) \text{ donde } r \text{ es una función racional y } \tau \in \mathbb{C}\}.$

El Teorema de Sullivan se ha extendido a todas estas clases de funciones trascendentales como lo expresa el siguiente teorema que puede consultarse en [Be].

Teorema 2.5.2. *Las funciones en las clases S , F , N y R no tienen dominios errantes.*

Notemos que la clase de funciones racionales está contenida en la clase S .

Respecto a funciones sin dominios de Baker, A. Emerenko y M. Lyubich consideraron la clase

$$B = \{f : \text{Sing}(f^{-1}) \text{ es acotado}\}$$

y demostraron los siguientes resultados que se encuentran en [EL].

Teorema 2.5.3. *Si $f \in E \cap B$, entonces no existe una componente $U \in F(f)$ tal que $f^n \rightarrow \infty$ en U cuando $n \rightarrow \infty$.*

De aquí se desprende el siguiente corolario.

Corolario 2.5.4. *Si $f \in E \cap B$, entonces f no tiene dominios de Baker.*

El siguiente resultado es una generalización del Corolario 2.5.4 para funciones meromorfas.

Teorema 2.5.5. *Sea f una función meromorfa y $\{U_0, U_1, \dots, U_{p-1}\}$ un ciclo periódico de dominios de Baker de f . Entonces ∞ es un punto de acumulación de*

$$\bigcup_{j=0}^{p-1} f^j(\text{Sing}(f^{-1})).$$

Obtenemos entonces el siguiente resultado para la clase S .

Corolario 2.5.6. *Las funciones de la clase S no tienen dominios de Baker.*

El Corolario 2.5.6 conjuntamente con el Teorema 2.5.2 de alguna forma nos anuncian que la iteración de funciones en la clase S en muchos aspectos es análogo al de las funciones racionales y pueden ser analizadas de manera similar.

Recordemos que la función elíptica \wp_Ω respecto a una latiz de periodos Ω , solamente tiene 3 valores críticos e_1, e_2 y e_3 , además por ser doblemente periódica respecto a Ω no tiene valores asíntóticos, por lo que \wp_Ω pertenece a la clase S . En este caso el conjunto $\text{Sing}(\wp_\Omega^{-1}) = \{e_1, e_2, e_3\}$ y $P(\wp_\Omega) = \bigcup_{n \geq 0} f^n(\{e_1, e_2, e_3\})$. Así, los resultados para las funciones en la clase S obtenidos aquí, serán de crucial importancia para la teoría que desarrollamos en el siguiente capítulo.

2.6. Conectividad de componentes de Fatou.

A continuación enunciamos algunos resultados relacionados a la conectividad de componentes de Fatou. Las demostraciones pueden ser consultadas en [BKL3]. Estos serán útiles más adelante para obtener resultados sobre conectividad respecto a componentes de Fatou de funciones elípticas.

Definición 2.6.1. Decimos que una región $R \subset \mathbb{C}$ es *simplemente conexa* si para todo punto $z_0 \in \mathbb{C} \setminus R$ se tiene que el índice $Ind(\gamma, z_0) = 0$, donde

$$Ind(\gamma, z_0) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{dz}{z - z_0} = 0$$

y γ es cualquier curva cerrada simple (de clase C^1) contenida en R .

Definición 2.6.2. Una región R es *múltiplemente conexa* si no es simplemente conexa. En este caso $\hat{\mathbb{C}} \setminus R$ no es conexo, si este conjunto tiene n componentes conexas, diremos que R es de *conectividad n* y tiene *conectividad infinita* si $\hat{\mathbb{C}} \setminus R$ tiene una infinidad de componentes.

De acuerdo a la definición, los discos de Siegel son simplemente conexos y los anillos de Herman son doblemente conexos.

El siguiente resultado caracteriza las componentes invariantes del conjunto de Fatou de una función meromorfa y está dado en [BKL3, Teorema 3.1].

Teorema 2.6.3. *Sea f una función meromorfa y sea U una componente invariante del conjunto de Fatou. Entonces la conectividad de U es 1, 2 o ∞ . La conectividad 2 se cumple sólo cuando U es un anillo de Herman.*

Cuando $U \subset F$ es una componente completamente invariante se tiene que U no puede ser un anillo de Herman, ya que $f : U \rightarrow U$ no es inyectiva. Así, se obtiene el siguiente lema [BKL3, Lema 4.1].

Lema 2.6.4. *Sea f una función meromorfa y sea U una componente completamente invariante de Fatou. Entonces la conectividad de U es 1 o ∞ .*

Los resultados anteriores no se pueden enunciar para componentes estrictamente preperiódicas; de hecho, I. Baker, N. Kotus y Y. Lü demuestran el siguiente resultado al respecto en [BKL3, Teorema 6.1].

Teorema 2.6.5. *Para todo $n \in \mathbb{N}$ existe una función meromorfa f tal que $F(f)$ tiene componentes U_0 y U_1 , con las siguientes propiedades: U_1 es simplemente conexo, U_0 tiene conectividad n y además $f(U_0) \subset U_1$ y $f(U_1) \subset U_1$.*

Más aún, en [BKL2] se proporcionan ejemplos de funciones meromorfas que tienen dominios errantes de cualquier conectividad preasignada.

Ahora la pregunta es: si consideramos una función meromorfa y una componente U del conjunto de Fatou que sea periódica ¿será cierto que la conectividad de U es 1,2 o ∞ ?

La respuesta es afirmativa y es A. Bolsch (utilizando la teoría de Ahlfors de superficies cubrientes) quien extiende el Teorema 2.6.3 para funciones con un conjunto contable de singularidades esenciales.

Finalmente, el siguiente resultado respecto a componentes completamente invariantes de funciones de clase S es importante para nosotros, ya que las funciones elípticas son de clase S .

Teorema 2.6.6. *Si f es una función meromorfa en la clase S , entonces $F(f)$ tiene a lo más 2 componentes completamente invariantes.*

La conectividad del conjunto de Julia de funciones meromorfas es un problema importante que discutiremos en el siguiente capítulo en el contexto de la función h_Ω . En particular nos interesa saber cuando puede ser $J(h_\Omega)$ totalmente desconexo. Un resultado debido a I. Baker, P. Domínguez y M. Herring para funciones en la clase MSR (esencialmente son funciones cuyo conjunto de singularidades totalmente desconexo satisface una condición técnica) es el siguiente.

Teorema 2.6.7. *Sea $f \in MSR$ y supongamos que existe un punto fijo atractor cuya componente de Fatou contiene todos los puntos singulares de f^{-1} . Entonces $J(f)$ es totalmente desconexo.*



Capítulo 3

Iteración de Funciones Elípticas

Algunos resultados sobre la dinámica de funciones de clase S han sido obtenidos por I. Baker, A. Eremenko, J. Kotus, M. Lyubich entre otros. Sin embargo, fueron L. Koss y J. Hawkins quienes han trabajado de cerca la dinámica de funciones elípticas, en particular, la dinámica de las funciones \wp , \wp' y $\frac{1}{\wp}$. En este capítulo incluimos por completez algunos resultados y demostraciones que las últimas dos autoras han obtenido y hacemos referencia a los artículos de los cuales han sido tomados.

3.1. Propiedades de la función $h_\Omega(z) = \frac{1}{\wp_\Omega(z)}$.

Nuestro objeto de estudio en este capítulo será la función elíptica $h_\Omega = \frac{1}{\wp_\Omega}$ respecto a una retícula $\Omega = [\lambda_1, i\lambda_1]$ cuadrada real.

Denotemos como λ_r el periodo sobre \mathbb{R} de las funciones \wp_Ω y h_Ω ; en este caso, como Ω es cuadrada real se tiene que $\lambda_r = \lambda_1$. También denotamos como $e_r = \wp_\Omega(\frac{\lambda_r}{2})$ al valor crítico más grande en norma de \wp_Ω .

Lema 3.1.1 ([HK0]). *Si Ω es una retícula rómbica real, entonces existe exactamente un valor crítico real e_3 el cual es negativo si y sólo si $g_3 < 0$. En otro caso, existe al menos un valor crítico no negativo y en cualquier caso la imagen del punto crítico real es el mínimo de \wp_Ω sobre \mathbb{R} . En particular, $\wp|_{\mathbb{R}}: \mathbb{R} \rightarrow [e_r, \infty)$ es monótona por pedazos y sobreyectiva. Especialmente, \wp_Ω es estrictamente decreciente sobre $[0, \frac{\lambda_r}{2}]$ y estrictamente creciente sobre $[\frac{\lambda_r}{2}, \lambda_r]$.*

Del Lema 3.1.1 se obtienen las siguientes propiedades de la función h_Ω .

Lema 3.1.2 ([K1]). *Si Ω es una retícula cuadrada real entonces:*

- *La función h_Ω es una función elíptica par, de grado 2 y con retícula de periodos Ω .*
- *$h_\Omega|_{\mathbb{R}}: \mathbb{R} \rightarrow [0, \frac{1}{e_r}]$ es monótona por pedazos y sobreyectiva.*

- h_Ω es estrictamente creciente en el intervalo $[0, \frac{\lambda_r}{2}]$ y estrictamente decreciente en $[\frac{\lambda_r}{2}, \lambda_r]$.

DEMOSTRACIÓN. Claramente la función h_Ω es elíptica, par y de grado 2 porque \wp_Ω lo es. Luego, por el Lema 3.1.1 sabemos que $\wp_\Omega|_{\mathbb{R}}: \mathbb{R} \rightarrow [e_r, \infty]$ es monótona a pedazos y sobreyectiva. Como $e_r > 0$ se tiene que $h_\Omega|_{\mathbb{R}}: \mathbb{R} \rightarrow [0, \frac{1}{e_r}]$ es monótona y sobreyectiva. La última afirmación se sigue también del Lema 3.1.1. \square

Otra propiedad de la función h_Ω se obtiene de la acción que realiza la función \wp_Ω sobre \mathbb{R} en retículas reales.

Lema 3.1.3. *Si Ω es una retícula real entonces h_Ω manda el eje imaginario al eje real.*

La figura 3.1 muestra el comportamiento de la función h_Ω restringida a \mathbb{R} con invariantes $g_2(\Omega) = 0.39379$ y $g_3(\Omega) = 0$.

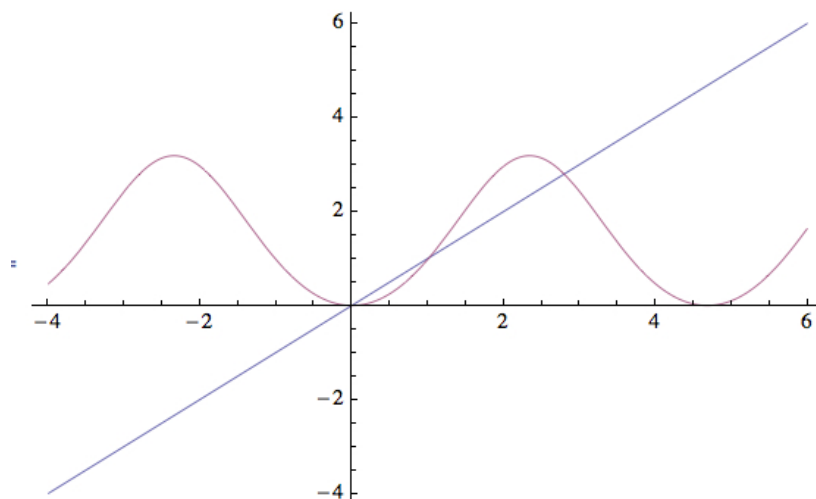


Figura 3.1: Gráfica de h_Ω restringida a \mathbb{R} .

3.2. Simetría de los conjuntos de Julia y Fatou.

$J(h_\Omega)$ y $F(h_\Omega)$ denotarán los conjuntos de Julia y de Fatou de h_Ω con respecto a la retícula Ω , respectivamente. Estos conjuntos exhiben algunas simetrías importantes, por ejemplo, los conjuntos de Julia y Fatou de una función elíptica sobre cualquier retícula Λ resultan ser conjuntos periódicos con respecto a ella.

Teorema 3.2.1 ([HK0]). *Si f_Λ es una función elíptica definida sobre cualquier retícula Λ , entonces*

$$J(f_\Lambda) + \Lambda = J(f_\Lambda) \quad \text{y} \quad F(f_\Lambda) + \Lambda = F(f_\Lambda).$$

DEMOSTRACIÓN. Supongamos que $z \in F(f_\Lambda)$ y sea $w \in \Lambda$, entonces f_Λ^n está bien definida para todo $n \in \mathbb{Z}$ y existe una vecindad U de z donde $\{f_\Lambda^n : n \in \mathbb{N}\}$ es una familia normal. Como $f_\Lambda^n(z+w) = f_\Lambda^n(z)$ para todo $z \in U$ y para todo $w \in \Lambda$ se tiene que $f_\Lambda^n(U+w) = f_\Lambda^n(U)$ como conjuntos, por lo que $U+w$ es una vecindad de $z+w$ donde $\{f_\Lambda^n\}$ es una familia normal, así $z+w \in F(f_\Lambda)$. La propiedad se cumple para el conjunto de Julia por ser el complemento del conjunto de Fatou. \square

Cuando la función elíptica es par, los conjuntos de Julia y Fatou son simétricos con respecto al origen.

Teorema 3.2.2 ([HK0]). *Si f_Λ es una función elíptica par definida sobre cualquier retícula Λ , entonces*

$$(-1)J(f_\Lambda) = J(f_\Lambda) \quad \text{y} \quad (-1)F(f_\Lambda) = F(f_\Lambda).$$

DEMOSTRACIÓN. Tomamos $z \in F(f_\Lambda)$, por definición f_Λ^n está bien definida para todo $n \in \mathbb{Z}$. Sea U una vecindad alrededor de z y sea $V = -U$, como f_Λ es par, tenemos que $f_\Lambda^n(V) = f_\Lambda^n(-U) = f_\Lambda^n(U)$ para todo $n \geq 1$, por lo que $\{f_\Lambda^n\}$ es una familia normal en V y como $V = -U$ es una vecindad de $-z$, entonces $-z \in F(f_\Lambda)$; recíprocamente si $-z \in F(f_\Lambda)$ entonces $z \in F(f_\Lambda)$. De esta forma, el conjunto de Fatou es simétrico con respecto al origen, esto obliga a que el conjunto de Julia sea también simétrico con respecto al origen, pues es el complemento del conjunto de Fatou. \square

Para la función \wp_Ω también se tienen simetrías de los conjuntos de Fatou y Julia que dependen de la forma de la retícula.

Teorema 3.2.3 ([HK0]). *Si Ω es una retícula cuadrada real, entonces $F(\wp_\Omega) = iF(\wp_\Omega)$ y $J(\wp_\Omega) = iJ(\wp_\Omega)$.*

DEMOSTRACIÓN. Sea $z \in F(\wp_\Omega)$, entonces por definición \wp_Ω^n está bien definida y en una vecindad de z la familia $\{\wp_\Omega^n\}$ es normal para toda $n \in \mathbb{N}$. Por la propiedad de homogeneidad de \wp_Ω , tenemos que $\wp_\Omega(iz) = -\wp_\Omega(z)$ y como \wp_Ω es una función par se tiene que $\wp_\Omega^n(iz) = \wp_\Omega^n(z)$ para todo $n \geq 2$. Así, $\wp_\Omega^n(iz)$ existe para todo $n \in \mathbb{N}$. Sea U una vecindad de z tal que $\{\wp_\Omega^n\}$ es una familia normal en U . Si hacemos $V = iU$ y tomamos en cuenta lo anterior tenemos que $\wp_\Omega(V) = \wp_\Omega(iU) = -\wp_\Omega(U)$ por lo que $\wp_\Omega^n(V) = \wp_\Omega^n(U)$ para todo $n \geq 2$, así $\{\wp_\Omega^n\}$ forma una familia normal. La otra contención se prueba de manera análoga. De esta forma $z \in F(\wp_\Omega)$ si y sólo si $iz \in F(\wp_\Omega)$. Por la simetría alrededor del origen tenemos que $-z, -iz \in F(\wp_\Omega)$, por lo que el conjunto de Fatou es simétrico con respecto a rotaciones de ángulo $\frac{\pi}{2}$. Esto obliga a que el conjunto de Julia también sea simétrico por este tipo de rotaciones por ser conjuntos complementarios. \square

3.3. Conjuntos de Julia desconexos y anillos de Herman.

Iniciamos esta sección demostrando lo siguiente.

Lema 3.3.1. *Sea f_Ω una función elíptica con respecto a una retícula de periodos Ω con un ciclo de anillos de Herman $\{U_0, U_1, \dots, U_{p-1}\}$, entonces existe $n \in \mathbb{N}$ tal que U_n contiene un polo en su complemento acotado.*

DEMOSTRACIÓN. Sea $\{U_0, U_1, \dots, U_{p-1}\}$ un ciclo de anillos de Herman de periodo p para f_Ω . Por definición para cualquier $i = 0, 1, \dots, p-1$, $f_\Omega^p : U_i \rightarrow U_i$ es conjugada analítica a una rotación $z \mapsto e^{i\theta}z$ con ángulo irracional sobre un anillo regular $A = \{z : 1 < |z| < R\}$. Sea $\gamma \subset U_i$ una curva de la foliación inducida por la conjugación con la rotación. Luego, γ es invariante bajo f_Ω^p . Sea B_γ la componente acotada de $\mathbb{C} \setminus \gamma$ y supongamos que B_γ no contiene un polo, entonces f_Ω^{kp} es holomorfa en B_γ para todo $k > 0$. Más aún, por el Principio del Módulo Máximo, $f_\Omega^{kp}(B_\gamma) \subset B_\gamma$ para cada $k > 0$, es decir, la familia de iteradas $\{f_\Omega^{kp}\}$ es una familia de funciones holomorfas uniformemente acotadas. Así, por el Teorema de Montel, B_γ es una componente de Fatou de f_Ω^p , lo cual contradice que B_γ contiene la frontera interna del anillo U_i la cual está en el conjunto de Julia de f y por lo tanto de f^p . \square

En el Capítulo 2, sección 2.7 obtuvimos la siguiente ecuación e identidades

$$(\wp'_\Omega(z))^2 = 4(\wp_\Omega(z))^3 - g_2\wp_\Omega(z) - g_3. \quad (3.1)$$

$$e_1 + e_2 + e_3 = 0, \quad e_1e_3 + e_2e_3 + e_1e_2 = \frac{-g_2}{4}, \quad e_1e_2e_3 = \frac{g_3}{4}. \quad (3.2)$$

La siguiente proposición y corolario pueden ser consultados en [D].

Proposición 3.3.2. *Sea Ω una retícula cuadrada real, entonces $g_3 = 0$; en particular, si Ω es rectangular cuadrada, entonces $g_2 > 0$ y si Ω es una retícula rómbica cuadrada, entonces $g_2 < 0$.*

Ahora, utilizando (3.1), (3.2) y la Proposición 3.3.2 obtenemos el siguiente resultado.

Corolario 3.3.3.

1. Si Ω es una retícula rectangular real, entonces todos los valores críticos de \wp_Ω son reales. Si $g_3 > 0$ entonces $e_2 < e_3 < 0 < e_1$, y si $g_3 < 0$ entonces $e_2 < 0 < e_3 < e_1$.
2. Si Ω es cuadrada real entonces $e_1 = \frac{\sqrt{g_2}}{2} > 0$, $e_2 = -e_1$ y $e_3 = 0$.
3. Si Ω es rómbica real entonces $e_2 = \bar{e}_1 \in i\mathbb{R}$ y $e_3 \in \mathbb{R}$. Si $g_3 > 0$ entonces $e_3 > 0$ y si $g_3 < 0$ entonces $e_3 < 0$.

En la siguiente proposición probaremos que los puntos de la retícula y sus puntos medios están contenidos en el conjunto de puntos críticos y polos de h_Ω (Comparar con la demostración de la Proposición 3.3 en [K1]).

Proposición 3.3.4. *Si $\Omega = [\lambda_1, \lambda_2]$ es una retícula real entonces tenemos lo siguiente:*

- Si Ω no es cuadrada, entonces $\text{Crit}(h_\Omega) = \{0, \frac{\lambda_1}{2}, \frac{\lambda_2}{2}, \frac{\lambda_1 + \lambda_2}{2}\} + \Omega$.
- Si Ω es cuadrada, entonces $\text{Crit}(h_\Omega) = \{0, \frac{\lambda_1}{2}, \frac{\lambda_2}{2}\} + \Omega$ y $\frac{\lambda_1}{2} + \frac{\lambda_2}{2} + \Omega$ son polos de h_Ω .

■ 0 es un punto fijo superatractor.

DEMOSTRACIÓN. Observese que $\overline{h'_\Omega(z)} = \frac{-\varphi'_\Omega(z)}{(\varphi_\Omega(z))^2}$, entonces $h'_\Omega(z) = 0$ si:

1. $\varphi'_\Omega(z) = 0$ y $0 \neq \varphi_\Omega(z) \neq \infty$ ó si
2. $\varphi_\Omega(z) = \infty$ y $0 \neq \varphi'_\Omega(z) \neq \infty$.

Ahora, por el Teorema 1.7.2 sabemos que φ'_Ω se anula cuando $z \in \{\frac{\lambda_1}{2}, \frac{\lambda_2}{2}, \frac{\lambda_1+\lambda_2}{2}\}$ y cuando Ω no es cuadrada el Corolario 3.3.3 garantiza que φ no se anula en estos puntos y $\varphi(z) \neq \infty$ pues estos puntos no son polos. Por otra parte $\varphi_\Omega(0) = \infty$ y $0 \neq \varphi'_\Omega(0) \neq \infty$ por lo tanto las condiciones 1 y 2 se satisfacen cuando $z \in \{0, \frac{\lambda_1}{2}, \frac{\lambda_2}{2}, \frac{\lambda_1+\lambda_2}{2}\}$.

Si Ω es cuadrada, entonces por el Corolario 3.3.3, $e_3 = \varphi_\Omega(\frac{\lambda_1+\lambda_2}{2}) = 0$, por lo que h_Ω tiene polos en $\frac{\lambda_1+\lambda_2}{2} + \Omega$. Luego, por el Teorema 1.7.2 sabemos que φ'_Ω se anula cuando $z \in \{\frac{\lambda_1}{2}, \frac{\lambda_2}{2}\}$ y por el Corolario 3.3.3, φ_Ω no se anula en estos puntos y $\varphi_\Omega(z) \neq \infty$ pues estos puntos no son polos. Nuevamente, $\varphi_\Omega(0) = \infty$ y $0 \neq \varphi'_\Omega(0) \neq \infty$ por lo tanto en este caso las condiciones 1 y 2 se satisfacen cuando $z \in \{0, \frac{\lambda_1}{2}, \frac{\lambda_2}{2}\}$.

Finalmente, como $h(0) = 0$ y $h'_\Omega(0) = 0$ se tiene que cero siempre es un punto fijo superatractor. \square

Sea f una función elíptica arbitraria sobre una retícula Λ . Cuando los conjuntos de Fatou y Julia son proyectados hacia el toro $\mathbb{T} = \mathbb{C}/\Lambda$, la periodicidad de f , conjuntamente con las simetrías con respecto a Λ hacen variar la conectividad de las componentes de Fatou. Si consideramos

$$\pi_\Lambda : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}/\Lambda$$

como la proyección usual, se da pie a las siguientes definiciones.

Definición 3.3.5 ([HK2]). Una componente de Fatou F_0 de una función elíptica f es una *banda toral* si F_0 contiene un subconjunto abierto U el cual es simplemente conexo en \mathbb{C} , pero tal que $\pi_\Lambda(U)$ no es simplemente conexo en \mathbb{C}/Λ . Esto es, U se proyecta a una banda topológica alrededor del toro y contiene una curva homotópicamente no trivial.

Definición 3.3.6 ([HK2]). Supongamos que tenemos una función elíptica f con su respectiva retícula de periodos Λ . Si existe una componente $W \subset F(f)$ la cual contiene una curva cerrada simple que forma la frontera de una región fundamental para Λ , entonces decimos que W es una *doble banda toral*.

En la Sección 3.2 mencionamos que el conjunto de Julia es compacto, perfecto y distinto del vacío, por lo que, cuando además es totalmente desconexo, éste es llamado *conjunto de Cantor*, ya que es homeomorfo al conjunto ternario de Cantor. En este caso, el Teorema 3.3.8 muestra que para funciones elípticas hay exactamente una componente de Fatou la cual es completamente invariante, por lo que hay un punto fijo no repulsor, [HK2].

Definición 3.3.7. Decimos que una función elíptica f es *hiperbólica* si $J(f) \cap P(f) = \emptyset$, donde $P(f)$ es el conjunto postsingular de f definido en la sección 3.4.

El siguiente teorema fue demostrado en [HK2, Teorema 3.15], el cual da una condición para garantizar cuando un conjunto de Julia de una función elíptica f es un conjunto de Cantor.

Teorema 3.3.8. *Si W es una doble banda toral para f que contiene todos los valores críticos y f es hiperbólica, entonces $F(f) = W$ y $J(f)$ es un conjunto de Cantor.*

Bosquejo de la demostración: Por hipótesis, tenemos una curva simple y cerrada q contenida en $F(f)$ tal que q forma la frontera de una región fundamental para una retícula Λ .

Denotamos por Q la región cerrada y acotada en el plano con frontera q . Sea K la componente no acotada del complemento de q . Como cada región fundamental debe contener al menos un polo de orden $n \geq 2$, tenemos al menos un polo en Q , digamos p_0 . Por lo tanto $p_0 \in J(f)$ y no pertenece a K . Pero entonces, q es una curva en el conjunto de Fatou que separa a $p_0 \in J(f)$ de $\infty \in J(f)$, así que $J(f)$ no es conexo.

Enseguida se debe demostrar que cada componente de $J(f)$ consiste de justamente un punto usando la hiperbolicidad de la función; para esto es suficiente trabajar en la región fundamental Q y demostrar que si C es una componente de $J(f_\Lambda) \cap Q$, entonces $\text{diam}(C) = 0$ o C es exactamente un prepolo.

En particular, como todos los valores críticos están contenidos en W podemos encontrar una curva δ en Q que acote una vecindad U de $J(f) \cap Q$, la cual está en la componente acotada de δ , y que todos los puntos críticos y valores críticos estén en la componente no acotada de δ . Como la función f es n a 1 en regiones fundamentales, se tiene que para cada $(i, j) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$, el conjunto $f^{-1}(U_{i,j})$ consiste de n conjuntos disjuntos en la región fundamental $Q_{m,p}$ para cada $m, p \in \mathbb{Z}$ donde n es el orden de f y $Q = Q_{0,0}$, $Q_{m,n} = Q_{0,0} + m\lambda_1 + p\lambda_2$, con $\Omega = [\lambda_1, \lambda_2]$. El resto de la demostración sigue utilizando las propiedades de hiperbolicidad de la función f .

Como el conjunto de Julia es totalmente desconexo, se sigue inmediatamente que el conjunto de Fatou tiene exactamente una componente, la cual es completamente invariante.

En el contexto de la función $h_\Omega = \frac{1}{\wp_\Omega}$ podemos demostrar lo siguiente.

Proposición 3.3.9. *Sea $\Omega = [\lambda_1, \lambda_2]$ una retícula cuadrada real y $h_\Omega = \frac{1}{\wp_\Omega}$. Si la componente $B(0) \subset F(h_\Omega)$ que contiene al cero también contiene otro valor crítico, entonces los tres valores críticos están en $B(0)$ y $J(h_\Omega)$ es un conjunto de Cantor.*

DEMOSTRACIÓN. Por la Proposición 3.3.4 sabemos que $\text{Crit}(h_\Omega) = \{0, \frac{\lambda_1}{2}, \frac{\lambda_2}{2}\} + \Omega$ y que los polos son $\{\frac{\lambda_3}{2} = \frac{\lambda_1 + \lambda_2}{2}\} + \Omega$. Obsérvese que como cero es polo de \wp_Ω se tiene que es un punto fijo superatractor de h_Ω . Denotemos por v el valor crítico $h_\Omega(\frac{\lambda_1}{2}) = \frac{1}{\wp_\Omega(\frac{\lambda_1}{2})} = \frac{1}{e_1}$, entonces el segundo valor crítico está dado por

$$v_2 = \frac{1}{\wp_\Omega(\frac{\lambda_2}{2})} = \frac{1}{e_2} = \frac{1}{-e_1} = -v$$

dado que $e_2 = -e_1$ por el Corolario 3.3.3. Supongamos que $v \in B(0)$, como $B(0)$ es abierto y conexo se tiene que es conexo por trayectorias. Considerese la curva γ que une 0 con v . Entonces $i^2\gamma = -\gamma$ es una curva que une 0 con $-v$ y por la simetría con respecto a la retícula, Teorema

3.2.3, se tiene que $-\gamma \subset F(h_\Omega)$, pero $0 \in B(0) \cap -\gamma$ por lo tanto por el Lema 2.4.4 se tiene que $-\gamma = B(0)$, es decir $-\gamma \in B(0)$ por lo tanto los tres valores críticos están en $B(0)$. Notemos que todos los valores críticos se aproximan al punto fijo superatractor cero, por lo que h_Ω es hiperbólica.

Por otra parte, sabemos que $B(0) \subset F(h_\Omega)$ es la cuenca inmediata de atracción del origen, por lo que, $0 \in B(0) \subset h_\Omega^{-1}(B(0))$. Entonces una componente $\alpha \subset h_\Omega^{-1}(\gamma)$ es una curva que une a cero con $\frac{\lambda_1}{2}$, por lo que $\frac{\lambda_1}{2} \in B(0)$. Luego por el Teorema 3.2.1 se tiene que $B(0)$ contiene a λ_1 y también a la trayectoria $\delta = \alpha \cup (-\alpha + \lambda_1)$ que une cero con λ_1 . Finalmente utilizando los Teoremas 3.2.1 y 3.2.2 se tiene que la curva $\delta \cup i\delta \cup (\delta + \lambda_2) \cup (i\delta + \lambda_1) \subset B(0)$; dicha curva forma la frontera de una región fundamental de periodos, ver figura 3.2, por lo que $B(0)$ es una doble banda toral. Si agregamos a esto que todos los valores críticos están en $B(0)$ y que h_Ω es hiperbólica tenemos que $J(h_\Omega)$ es un conjunto de Cantor por el Teorema 3.3.8. \square

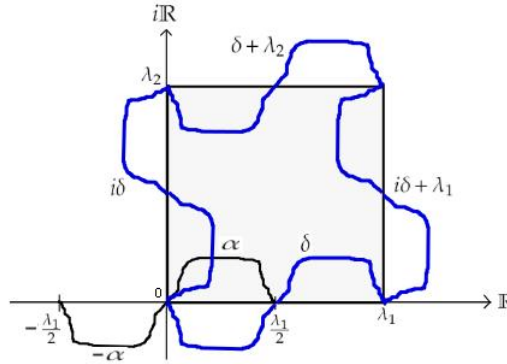


Figura 3.2: Región fundamental de periodos formada por la curva $\delta \cup i\delta \cup (\delta + \lambda_2) \cup (i\delta + \lambda_1) \subset B(0)$.

Para una retícula Λ arbitraria, la función elíptica \wp_Λ no tiene ciclos de anillos de Herman [HK1], este mismo resultado se demostró para la función h_Ω sobre retículas triangulares en [K], ahora extendemos este resultado para retículas cuadradas reales.

Teorema 3.3.10. *Si Ω es una retícula cuadrada real y $h_\Omega = \frac{1}{\wp_\Omega}$, entonces h_Ω no tiene ciclos de anillos de Herman.*

DEMOSTRACIÓN. Sea $\Omega = [w, iw]$ para algún $w > 0$ y supongamos que h_Ω tiene un ciclo de anillos de Herman $\{U_0, U_1, \dots, U_{p-1}\}$ de periodo p . Entonces por definición para cualquier $n = 0, 1, \dots, p-1$, $h_\Omega^p : U_n \rightarrow U_n$ es conjugada a una rotación con ángulo irracional de grado uno de un anillo regular en sí mismo. Las preimágenes de los círculos $|\eta| = r$, $1 < r < R$ bajo esta conjugación folian el anillo con hojas positivamente invariantes bajo h_Ω^p sobre las cuales h_Ω^p es inyectiva por ser conjugada a una rotación irracional. Ahora, por el Lema 3.3.1 sabemos que existe $n \in \{0, 1, \dots, p-1\}$ tal que $B_\gamma \subset U_n$ contiene un polo $\mu + v$ con $v \in \Omega$. Aquí, γ es una hoja h_Ω^p -invariante de U_n y B_γ es la componente acotada del complemento de γ . Dado que las propiedades topológicas se mantienen para cada región fundamental podemos, mediante

la aplicación $z \mapsto z - v$, con $v \in \Omega$, trasladar el ciclo de anillos de Herman de tal forma que $\mu \in B_{\gamma_v}$, B_{γ_v} es la componente acotada en el anillo de Herman $U_j = U_n - v$. Luego, por el Teorema 3.2.3 sabemos que iU_j es una componente de Fatou alrededor del polo $i\mu$, por lo que existe un punto de la retícula $l \in \Omega$ tal que μ está en $iB_{\gamma_v} + l$. Por lo tanto $iU_j + l$ y U_j son anillos de Herman que contienen curvas cerradas simples γ_v y $i\gamma_v + l$ respectivamente y cada una de las cuales contiene a μ en su complemento acotado. Así, $B_{\gamma_v} \cap (iB_{\gamma_v} + l) \neq \emptyset$. Notemos que $B_{\gamma_v} \cap (iB_{\gamma_v} + l) \cap F \neq \emptyset$ pues de lo contrario tendríamos una vecindad V de μ tal que $z \in J(h_\Omega)$ para toda $z \in V$ implicando que $J(h_\Omega) = \hat{\mathbb{C}}$, es decir, $F(h_\Omega) = \emptyset$ lo cual es una contradicción pues estamos suponiendo la existencia de anillos de Herman. Entonces $U_j \cap (iU_j + l) \neq \emptyset$ y por el Lema 2.4.4 $U_j = iU_j + l$. De esta forma, si $z \in U_j$, entonces $i^3(z - l) \in U_j$, luego usando la paridad y la periodicidad de $h_\Omega(z)$ tenemos que $h_\Omega(z)$ y $h_\Omega(i^3(z - l)) = -h_\Omega(z)$ están en U_{j+1} . Observese que $z \neq i^3(z + l)$ pues $z \neq \mu$; además $h_\Omega(z) \neq -h_\Omega(z)$ de lo contrario $2h_\Omega(z) = 0$, es decir, $h_\Omega(z) = 0 \in \text{Crit}(h_\Omega)$ por la Proposición 3.3.4, lo cual es una contradicción ya que los anillos de Herman no pueden tener puntos críticos. Finalmente, como h_Ω es par tenemos que $h_\Omega^p(h(z)) = h_\Omega^p(-h(z))$, esto contradice que h_Ω^p es inyectiva en U_{j+1} . \square

El siguiente teorema fue demostrado para la función elíptica \wp -Weierstrass en [HK2], basados en un resultado similar para polinomios dado por J. Milnor en [J]. Como la demostración en [HK2] es un argumento local y las funciones \wp_Ω y h_Ω se comportan localmente 2 a 1 en cada paralelogramo de periodos, la prueba es análoga para h_Ω .

Teorema 3.3.11. *Supongamos que Ω es una retícula para la cual h_Ω no tiene anillos de Herman y cada valor crítico de h_Ω que está en alguna componente del conjunto de Fatou es el único valor crítico en dicha componente. Entonces $J(h_\Omega)$ es conexo. En particular, si cada componente de Fatou contiene uno o ningún valor crítico, entonces $J(h_\Omega)$ es conexo.*

3.4. Teorema de dicotomía para h_Ω sobre retículas cuadradas reales.

En [K] L. Koss obtiene un resultado de dicotomía para la familia de funciones elípticas de la forma $h_\Omega = \frac{1}{\wp_\Omega}$ sobre retículas Ω triangulares. En esta sección consideramos la función elíptica h_Ω sobre retículas cuadradas reales, de esta manera, teniendo en cuenta que h_Ω siempre tiene al origen como punto fijo superatractor, a partir de la simetría de las retículas cuadradas reales y las propiedades algebraicas de la función elíptica \wp -Weierstrass, obtenemos una extensión del resultado de L. Koss siguiendo como referencia su exposición.

Las propiedades de conectividad del conjunto de Julia de h_Ω están estrechamente relacionadas con el número de valores críticos que se encuentran en cada componente de Fatou, (ver por ejemplo, Teorema 2.6.7). Sin embargo, la simetría de la forma de las retículas y las propiedades algebraicas de h_Ω facilitan la localización de sus valores críticos en el conjunto de Fatou.

Lema 3.4.1 (Simetría 4-rotacional). *Sea $U \subset F(h_\Omega)$ y μ una raíz primitiva cuártica de la unidad. Si existen $z_0 \in U$ y $N \in \mathbb{N}$ tal que $\mu^N z_0 \neq z_0$ y $\mu^N z_0 \in U$ entonces para todo $z \in U$, $-z, \pm iz \in U$.*

DEMOSTRACIÓN. Sin pérdida de generalidad supongamos que z_0 y $-z_0$ están en una misma componente de Fatou U . Como U es conexo por trayectorias podemos considerar δ la curva completamente contenida en U y que une z_0 con $-z_0$. Entonces $-\delta$ es una curva que une $-z_0$ con z_0 en U . Luego, $\gamma = \delta \cup -\delta \subset U$ y $\text{Ind}(\gamma, 0) = 1$. Por el Teorema 3.2.3 sabemos que $i\gamma \subset iU$. Notemos que $\pm iz_0 \in i\gamma$ y que $\text{Ind}(i\gamma, 0) = 1$, afirmamos que $\gamma \cap i\gamma \neq \emptyset$. En efecto, de lo contrario tenemos que $i\gamma \subset \mathbb{C} \setminus \gamma$, pero $i\gamma$ es conexo, esto nos da dos posibilidades, ya sea que $i\gamma \subset \text{Int}(\gamma)$ o que $i\gamma \subset \text{Ext}(\gamma)$. Si $i\gamma \subset \text{Int}(\gamma)$, entonces para todo $z \in \gamma$ se tiene que $|z| > |iz|$, lo cual claramente nos lleva a una contradicción. Un razonamiento análogo se usa para el segundo caso. Por lo tanto se sigue que $\gamma \cap i\gamma \neq \emptyset$. De esta forma obtenemos que $U \cap iU \neq \emptyset$ y por el Lema 2.4.4 tenemos que $U = iU$ por lo que $\pm iz_0 \in U$. Notemos que todo $z \in U$ se puede conectar con z_0 mediante una trayectoria en el interior de U , por lo tanto podemos repetir el argumento anterior para justificar que $-z, \pm iz \in U$. \square

La siguiente proposición se demuestra en [K] para la función h_Ω sobre retículas triangulares. A continuación presentamos la demostración para retículas cuadradas reales. Cabe mencionar que los argumentos en esta prueba cambian considerablemente en comparación a la demostración en [K].

Proposición 3.4.2. *Si Ω es una retícula cuadrada real, entonces toda componente de Fatou de h_Ω contiene uno, tres o ningún valor crítico.*

DEMOSTRACIÓN. Primero demostraremos que si existe una componente de Fatou que contiene dos valores críticos, entonces contiene a los tres. Denotemos como $B(0)$ la componente de Fatou que contiene al origen. Por la Proposición 3.3.9, si algún valor crítico $v \neq 0$ está en $B(0)$ entonces los tres valores críticos están en $B(0)$.

Supongamos entonces que v y $-v$ (ambos distintos de cero) están en una misma componente de Fatou. Por otra parte, recordemos que 0 es un punto fijo superatractor por lo que todos los valores críticos de h_Ω están en el conjunto de Fatou. Más aún, el Teorema 3.3.10 elimina la existencia de anillos de Herman y dado que no podemos tener discos de Siegel (pues estos no pueden tener puntos críticos en el interior del disco) el Teorema de Clasificación de Componentes de Fatou nos dice que todos los ciclos periódicos de Fatou son atractores, superatractores o parabólicos.

Afirmamos que el punto fijo superatractor 0 es el único ciclo no repulsor. Para demostrar esta afirmación vamos a considerar un ciclo de componentes invariantes hacia adelante y demostraremos que si dicho ciclo existe, sólo consta de una componente. En efecto, sea $\mathcal{U} = \{U_1, U_2, \dots, U_n\}$ un ciclo de componentes de Fatou invariantes hacia adelante que corresponden a un ciclo $\{p_1, p_2, \dots, p_n\}$ con $p_j \neq 0$ para todo $j = 1, 2, \dots, n$. Supongamos sin perder generalidad que U_1 es la componente de Fatou que contiene los dos valores críticos v y $-v$, ambos distintos de cero. Por el Lema 3.4.1 sabemos que U_1 tiene 4-simetría respecto al origen y por lo tanto

$\pm iv \in U_1$. Notemos que U_2 también tienen 4-simetría, ya que las propiedades de homogeneidad de la función \wp_Ω permiten asegurar que $h_\Omega(v)$ y $-h_\Omega(v) = h_\Omega(\pm iv)$ están en U_2 , luego, por el Lema 3.4.1 se concluye que U_2 tiene 4-simetría respecto al origen. Un proceso de inducción matemática nos permite afirmar que cada U_j tiene 4-simetría respecto al origen.

Por el Teorema de Fatou (Teorema 3.3.10) sabemos que existe un punto crítico c en el ciclo \mathcal{U} . Entonces tomamos dos casos:

Caso I. Si $c \in U_1$ sabemos por la 4-simetría de U_1 que $-c, \pm ic \in U_1$ por lo que U_1 es no acotado a lo largo de la línea L (que pasa por el origen y los puntos $\pm c$) y a lo largo de iL . Esto se debe a que si λ_1 es el generador de la retícula Ω entonces $|\lambda_1|nc \in U_1 \cap U_1 + n|\lambda_1|$ para todo $n \in \mathbb{N}$ y, por el Lema 2.4.4 tenemos que $U_1 = U_1 + n|\lambda_1|$. Como cada U_j es simétrico respecto al origen se tiene entonces que $U_j \cap U_1 \neq \emptyset$ y por el Lema 2.4.4 concluimos que $U_j = U_1$ para $j = 1, 2, \dots, n$.

Caso II. Como por hipótesis tenemos que $\pm v \in U_1$ entonces el punto crítico c está en U_n y por el Lema 3.4.1 se sigue que $-c, \pm ic \in U_n$. Por lo tanto, U_n es no acotado a lo largo de la línea L y nuevamente concluimos como en el caso anterior.

Consideremos entonces la única componente U_1 asociada al punto fijo p_1 y como primer caso supongamos que p_1 es un punto fijo parabólico. Recordemos que $\pm v \in U_1$ y por el Lema 3.4.1 sabemos que $\pm iv \in U_1$. Entonces en U_1 (que es abierto y conexo) podemos considerar una curva simple α totalmente contenida en U_1 y con puntos finales v e iv . Entonces la curva $\gamma_0 = \alpha \cup i\alpha \cup -\alpha \cup -i\alpha$ es una curva simple, cerrada, con 4-simetría y contenida en U_1 que pasa por los puntos $\pm v, \pm iv$. En particular, $\text{Ind}(\gamma_0, 0) = 1$. Definimos las curvas $\gamma_n = h_\Omega^n(\gamma_0)$. Si tomamos el complemento acotado de cada curva γ_n vemos que tenemos una sucesión de conjuntos compactos K_n anidados, más aún estas curvas definen dominios anulares A_n con $\partial A_n = \gamma_n \cup \gamma_{n+1}$. Dado que p_1 es parabólico se tiene que $h_\Omega^n(v) \rightarrow p_1$ cuando $n \rightarrow \infty$, esto hace que las curvas γ_n (y en consecuencia los dominios anulares A_n) se acumulen a $\partial B(0)$. Por otra parte, notemos que las curvas γ_n poseen 4-simetría respecto al origen (la justificación es igual como cuando se justificó la 4-simetría de U_2), además podemos elegir las de tal manera que $A_n \cap A_{n+1} = \gamma_{n+1}$ (redefiniendo sobre preimágenes si es necesario). Por lo tanto $h_\Omega(A_n) = A_{n+1}$. Como la función h_Ω es holomorfa y actúa 2 a 1 en estas regiones, entonces por el Teorema 1.1.12 tenemos que

$$\text{mod } A_n = \frac{1}{2} \text{mod } A_{n+1},$$

de lo cual recursivamente obtenemos que

$$\text{mod } A_{n+1} = 2^{n+1} \text{mod } A_0.$$

Así, tenemos que $\sum_{n=0}^{\infty} \text{mod } A_{n+1} = \text{mod } A_0 \sum_{n=0}^{\infty} 2^{n+1} = \infty$ y por Lema 1.1.13 se tiene $\bigcap_{n=0}^{\infty} K_n$ en un único punto, lo cual es una contradicción ya que $B(0) \subset K_n$ para todo $n \geq 0$.

Con un razonamiento análogo se obtiene el mismo resultado para el caso cuando p_1 es punto fijo atractor.

Para el tercer caso (cuando p_1 es punto fijo superatractor) consideramos un punto $y_0 \in (c, \lambda_r)$ donde λ_r es el periodo de la función $h_\Omega|_{\mathbb{R}}$ (ver Sección 3.0.14). Denotemos por $\tilde{y}_0 \in (0, c)$ a la

reflexión del punto y_0 respecto al punto crítico c . La 4-simetría de U_1 permite como en los casos anteriores considerar una curva $\tilde{\gamma}_0 \subset U_1$ que pasa por los puntos $\pm\tilde{y}_0, \pm i\tilde{y}_0$ que tiene 4-simetría respecto al origen y en particular $Ind(\tilde{\gamma}_0, 0) = 1$. Definimos $\tilde{\gamma}_n = h_\Omega^n(\tilde{\gamma}_0)$ (salvo redefinición de $\tilde{\gamma}_0$ si es necesario), de esta manera obtenemos dominios anulares \tilde{A}_n acotados por las curvas $\tilde{\gamma}_n$ y $\tilde{\gamma}_{n+1}$, ver figura 3.3. Por otra parte, la imagen de las curvas $\gamma_n = \lambda_r - \tilde{\gamma}_n$ bajo la función h_Ω son las curvas $\tilde{\gamma}_{n+1}$ para cada $n \geq 0$, ya que por la periodicidad y la paridad de h_Ω tenemos que

$$h_\Omega(\gamma_n) = h_\Omega(p\lambda_r - \tilde{\gamma}_n) = h_\Omega(\tilde{\gamma}_n) = \tilde{\gamma}_{n+1}.$$

Por lo que podemos considerar la función $R(z) = \lambda_r - z$ para definir las regiones anulares $A_n := R(\tilde{A}_n)$, ver figura 3.3. Como la función R es conforme tenemos que $mod \tilde{A}_n = mod R(\tilde{A}_n) = mod A_n$. Además por construcción tenemos que $h_\Omega(A_n) = \tilde{A}_{n+1}$ y actúa 2 a 1 en estas regiones, por lo tanto

$$mod A_{n+1} = mod \tilde{A}_{n+1} = 2 mod A_n.$$

Y por recursividad,

$$mod A_{n+1} = 2^{n+1} mod A_0,$$

por lo que

$$\sum_{n \geq 0}^{\infty} mod A_{n+1} = mod A_0 \sum_{n \geq 0}^{\infty} 2^{n+1} = \infty.$$

Finalmente si nos fijamos en los complementos acotados de las curvas γ_n tenemos para cada $n \geq 0$ subconjuntos compactos K_n los cuales forman una sucesión de conjuntos compactos anidados. Entonces el Lema 1.1.13 implica que $\bigcap_{n \neq 0}^{\infty} K_n$ es un único punto lo cual es una contradicción ya que $B(0) \subset K_n$ para todo $n \geq 0$.

Por lo tanto, 0 es el único ciclo no repulsor. Así, $h_\Omega^N(U_1) = B(0)$ para algún $N \geq 0$. Resta verificar que $N = 0$. Vamos a considerar dos casos respecto a $B(0)$, uno es cuando $B(0)$ está contenido dentro una región fundamental R , y el otro es cuando no.

Sea $B(0) \subset R$, por el Teorema 3.2.1 sabemos que $B(0) + \eta$ es una componente de Fatou tal que $B(0) + \eta \subset R + \eta$ y que $h_\Omega(B(0) + \eta) = B(0)$ para cada $\eta \in \Omega$. Como $h_\Omega^{-1}(0) = \Omega$, tenemos que $h_\Omega^{-1}(B(0)) = \{B(0) + \eta : \eta \in \Omega\}$. Entonces si $N > 0$, $h^{N-1}(U_1) = B(0) + \eta \subset R + \eta$ para algún $\eta \in \Omega$, pero como consecuencia de la 4-simetría de U_1 , existe una curva alrededor del origen, $\gamma_{N-1} = h^{N-1}(\gamma_0)$ en $B(0) + \eta$. Por lo tanto $B(0) + \eta$ no puede estar contenido en una región fundamental y por simetría, $B(0)$ no está dentro de R . Por lo que este caso no puede ocurrir (y en particular $N = 0$).

Consideremos entonces que $B(0)$ no está dentro de R , entonces existen z y $z + \eta$ en $B(0)$ para algún punto $\eta \in \Omega$. Más aún, por el Teorema 3.2.1 tenemos que $z + m\eta \in B(0)$ para todo $m \in \mathbb{Z}$. Observese que de esta forma el complemento acotado y el no acotado de la curva γ_0 en U_1 contiene puntos de la forma $z + m\eta$, esto implica que $U_1 \cap B(0) \neq \emptyset$, por lo que, por el Lema 2.4.4, se concluye que $N = 0$ y por lo tanto $U_1 = B(0)$. Concluimos que los tres valores críticos están en $B(0)$. \square

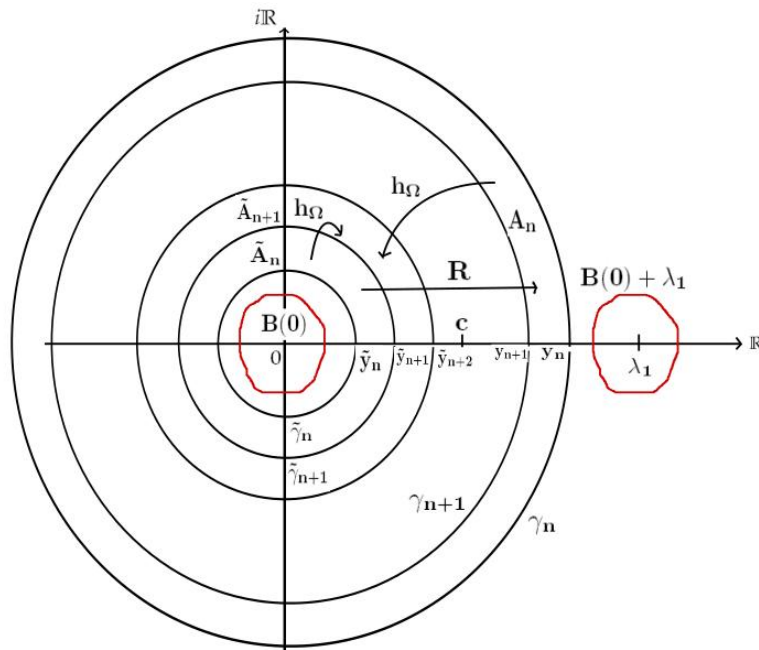


Figura 3.3: Acción de la función h_Ω sobre los anillos A_n y \tilde{A}_{n+1} .

Hablar de dicotomía en la topología del conjunto de Julia para funciones arbitrarias es de por más difícil, sabemos que para los polinomios cuadráticos si hay un Teorema de Dicotomía y que para polinomios de grado mayor no, debido a que la existencia de más de un punto crítico hace difícil esta labor. Nosotros con la teoría desarrollada hasta este momento podemos enunciar un importante resultado concerniente a la dicotomía en la topología del conjunto de Julia de la función h_Ω sobre retículas cuadradas reales.

Teorema 3.4.3. *Sea Ω una retícula cuadrada real. Si los 3 valores críticos de $h_\Omega = \frac{1}{\varphi_\Omega}$ están contenidos en una componente del conjunto de Fatou, entonces el conjunto de Julia de h_Ω es un conjunto de Cantor. En otro caso, el conjunto de Julia es conexo.*

DEMOSTRACIÓN. Por la Proposición 3.4.2 toda componente de Fatou de h_Ω contiene 1, 3 o ningún valor crítico. Si existe una componente de Fatou que contiene a todos los valores críticos, entonces el conjunto de Julia de h_Ω es un conjunto de Cantor, por la Proposición 3.3.9. De otra forma, toda componente de Fatou contiene uno o ningún valor crítico, entonces por el Teorema 3.3.11 se tiene que $J(h_\Omega)$ es conexo. \square

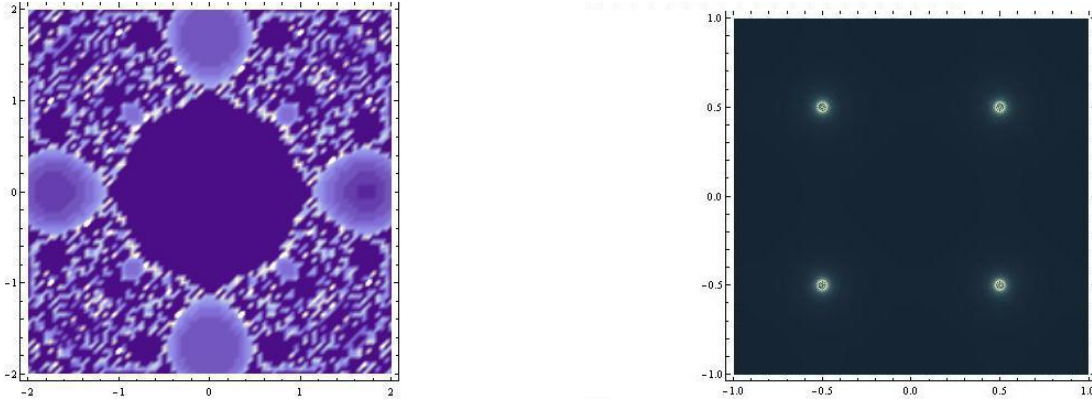


Figura 3.4: Ejemplos de conjuntos de Julia conexo (izquierda) y totalmente desconexo (derecha).

3.5. Conectividad de componentes de Fatou de $h_\Omega(z) = \frac{1}{\wp_\Omega(z)}$.

En esta sección utilizamos los resultados sobre conectividad de componentes de Fatou de funciones meromorfas dados en el Capítulo 3 y el Teorema de Dicotomía para la función h_Ω para demostrar el siguiente resultado.

Corolario 3.5.1. *Sea Ω una retícula cuadrada real, $h_\Omega = \frac{1}{\wp_\Omega}$ y U una componente de Fatou, entonces la conectividad de U es 1 ó ∞ .*

DEMOSTRACIÓN. La prueba la dividimos en 4 casos:

Caso I: Si $U \subset F(h_\Omega)$ es una componente invariante, entonces la conectividad de U es 1, 2 ó ∞ por el Teorema 2.6.3. Pero para nuestro caso, sabemos que no tenemos anillos de Herman por lo que la conectividad de U es 1 ó ∞ .

Caso II: Por el Teorema 2.6.6 sabemos que U puede ser una componente completamente invariante. Si este es el caso, por el Lema 2.6.4 estas componentes tienen conectividad 1 o ∞ .

Caso III: Si $U \subset F(h_\Omega)$ es una componente periódica, entonces la conectividad de U es 1, 2 ó ∞ por [Bo]. Nuevamente, el Teorema 3.3.10 garantiza que la conectividad de U debe ser 1 ó ∞ .

Caso IV: Sea $U \subset F(h_\Omega)$ una componente preperiódica. Si la conectividad de U es 1 hemos terminado. Supongamos que U tiene conectividad $p \neq 1$ entonces por el Teorema 3.4.3 sabemos que $J(h_\Omega)$ es totalmente desconexo; esto implica necesariamente que $p = \infty$. Por lo tanto U tiene conectividad 1 ó ∞ .

Los 4 casos terminan la prueba. □

Este resultado es conocido para funciones racionales, pero una aplicación del Teorema de Dicotomía nos ha permitido extenderlo para la función h_Ω que pertenece a la clase S .

Capítulo 4

Funciones Tipo Polinomiales

En [Cl] Joshua J. Clemons como parte de su trabajo doctoral demostró que la función \wp_Ω sobre retículas cuadradas actúa como una función tipo cuadrático. En este capítulo demostraremos, siguiendo su exposición como referencia, que la función elíptica h_Ω sobre retículas cuadradas es una función tipo polinomial de grado 2. Para ello, también utilizamos resultados de A. Douady y H. J. Hubbard [DH] acerca de *polynomials-like mappings* o *funciones tipo polinomiales* y el Teorema de Rectificación.

Primero proporcionamos las herramientas necesarias para proporcionar la conexión entre la dinámica de la función elíptica h_Ω en retículas cuadradas con la familia cuadrática polinomial $p_c(z) = z^2 + c$, $c \in \mathbb{C}$.

4.1. Funciones tipo polinomiales.

Definición 4.1.1. Sea U un conjunto abierto de \mathbb{C} . Sean $\frac{\partial}{\partial \bar{z}} = \frac{\partial}{\partial x} + i \frac{\partial}{\partial y}$ y $\frac{\partial}{\partial z} = \frac{\partial}{\partial x} - i \frac{\partial}{\partial y}$. Sea $\phi(x, y) = \phi_1(x, y) + i\phi_2(x, y)$ donde $z = x + iy$ se identifica como (x, y) y supongase que ϕ tiene derivadas parciales continuas en U . Una transformación $\phi : U \rightarrow \mathbb{C}$ es *cuasiconforme* si

$$\frac{\partial \phi}{\partial \bar{z}} = \mu(z) \frac{\partial \phi}{\partial z},$$

donde μ es una función Lebesgue medible definida en U y $|\mu| < 1$ con la norma esencial.

Las transformaciones cuasiconformes se pueden pensar como transformaciones que mandan círculos pequeños en $T_z U$ a elipses pequeñas en $T_{\phi(z)} \phi(U)$. Si ϕ es conforme, entonces $\mu(z) = 0$ para todo $z \in U$, así que $\mu(z)$ se puede pensar como una forma de medir que “tan lejos” está ϕ de ser conforme.

Definición 4.1.2. Considérese U, V conjuntos propios, abiertos y simplemente conexos de \mathbb{C} tal que U está compactamente contenido en V . Una función $f : U \rightarrow V$ se dice que es *tipo cuadrático* si ésta es una función cubriente doble ramificada con un punto crítico en U . En este caso escribimos (f, U, V) .

Una *familia de funciones tipo cuadráticas* es una colección de funciones tipo cuadráticas donde el dominio y el rango de éstas funciones varían continuamente con cambios en el espacio de parámetros.

Definición 4.1.3. Sea Γ una superficie de Riemann y sea $\mathfrak{B} = \{f_\lambda : U_\lambda \rightarrow V_\lambda\}$ una familia de funciones tipo cuadráticas. Consideramos

$$\mathcal{U} = \{(\lambda, z) : \lambda \in \Gamma, z \in U_\lambda\},$$

$$\mathcal{V} = \{(\lambda, z) : \lambda \in \Gamma, z \in V_\lambda\}, \text{ y}$$

$$f(\lambda, z) = (\lambda, f_\lambda(z)).$$

La familia \mathfrak{B} es analítica si:

1. \mathcal{U} y \mathcal{V} son homeomorfismos de Γ a $\Gamma \times \mathbb{D}$,
2. la proyección de la clausura de \mathcal{U} en \mathcal{V} a Γ es propia y
3. la función $f : \mathcal{U} \rightarrow \mathcal{V}$ es holomorfa y propia.

Recordemos que una *función propia* es una función continua tal que las preimágenes de conjuntos compactos son conjuntos compactos.

Definición 4.1.4. Definimos el *conjunto lleno de Julia* de $f_\lambda : U_\lambda \rightarrow V_\lambda$ de una familia analítica de transformaciones tipo cuadráticas como

$$K_{f_\lambda} = K_f = \bigcap_{n \geq 0} f_\lambda^{-n}(U_\lambda) = \{z \in U_\lambda : f_\lambda^n(z) \in U_\lambda, \text{ para todo } n > 0\}.$$

Definición 4.1.5. Dos transformaciones tipo cuadráticas $f : U \rightarrow V$ y $g : U' \rightarrow V'$ son *híbrido equivalentes* si existe un homeomorfismo cuasiconforme ϕ que transforma una vecindad W de K_f a una vecindad W' de K_g tal que $g \circ \phi = \phi \circ f$ y ϕ es conforme en K_f .

El principal teorema que utilizaremos en este capítulo fue demostrado por A. Douady y J. Hubbard en [DH] y lo enunciamos a continuación.

Teorema 4.1.6. [*Teorema de Rectificación*] Sea $f : U \rightarrow V$ una transformación tipo cuadrática. Entonces la transformación f es híbrido equivalente a $p_c : U_c \rightarrow V_c$ para algún $c \in \mathbb{C}$. Si K_f es conexo, entonces p_c es único salvo conjugación afín.

4.2. Familias holomorfas de funciones meromorfas.

Hablar de familias holomorfas de funciones meromorfas es hablar de R. Mañé, P. Sad y D. Sullivan, pues fueron ellos quienes crearon esta teoría. Nosotros aprovecharemos que esta teoría se ha extendido para funciones meromorfas de clase S por L. Keen y J. Kotus en [KK]. Más aún, J. Hawkins y L. Koss adaptaron esta teoría en [HK1] para la familia parametrizada \wp_λ

sobre una retícula cuadrada $\Omega = [\lambda, i\lambda]$ con generador λ .

Una manera de estudiar el espacio de parámetros para la función elíptica h_Ω es fijar una forma de retícula $\tau \in F$, donde F está definida como la región fundamental del grupo modular en el semiplano superior \mathbb{H}^+ (ver ecuación (1.1)) y después examinar el espacio de todas las retículas determinadas por el valor τ .

Definición 4.2.1. Para una retícula dada $\Omega = [1, \tau]$, con $\tau \in F$, se define el λ -espacio como el conjunto de puntos $\lambda \in \mathbb{C} - \{0\}$ que representan la retícula $\lambda\Omega$ y por lo tanto a la función $h_{\lambda\Omega}$.

Definición 4.2.2. Una familia holomorfa de funciones meromorfas f_λ sobre una variedad compleja M es una función holomorfa en λ y meromorfa en z , de $M \times \mathbb{C}$ en $\hat{\mathbb{C}}$ dada por la realación $(\lambda, z) \mapsto f_\lambda(z)$.

Definición 4.2.3. Sean $f, g : \mathbb{C} \rightarrow \hat{\mathbb{C}}$ funciones meromorfas. Si existe un homeomorfismo $\varphi : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ tal que $f \circ \varphi = \varphi \circ g$, decimos que f y g son *topológicamente conjugadas*. Si φ es conforme decimos que tales funciones son *conformemente conjugadas*.

Definición 4.2.4. Diremos que el espacio de parámetros M es *reducido* si $\lambda, \lambda' \in M$ y $\lambda \neq \lambda'$ implica que f_λ no es *conformemente conjugada* a $f_{\lambda'}$.

Para la familia h_λ podemos demostrar lo siguiente.

Lema 4.2.5. Para $\lambda, \lambda' \in \mathbb{C}^*$ las funciones h_λ y $h_{\lambda'}$ son idénticamente iguales si y sólo si $\lambda' = i^k \lambda$ para algún $k \in \mathbb{Z}$.

DEMOSTRACIÓN. Sabemos que las latices $[\lambda, i\lambda]$ y $[\lambda', i\lambda']$ son equivalentes si y sólo si

$$\begin{pmatrix} \lambda' \\ i\lambda' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda \\ i\lambda \end{pmatrix}$$

para algún

$$\mathbf{X} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in SL(2, \mathbb{Z}),$$

ver [JS, §3.4]. De esta forma obtenemos,

$$\frac{\lambda'}{\lambda} \begin{pmatrix} 1 \\ i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ i \end{pmatrix}.$$

Si hacemos $s = \frac{\lambda'}{\lambda}$ y lo consideramos como un número complejo $s = s_1 + is_2$ obtenemos

$$\begin{pmatrix} s_1 + is_2 \\ is_1 - s_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ i \end{pmatrix}.$$

lo que implica que $a = s_1$, $b = s_2$, $c = -s_2$ y $d = s_1$. Como $\mathbf{X} \in SL(2, \mathbb{Z})$ tenemos que $\det \mathbf{X} = s_1^2 + s_2^2 = 1$ y $s_1, s_2 \in \mathbb{Z}$. Por lo tanto $s = \frac{\lambda'}{\lambda} = 1, -1, i, -i$. \square

Lema 4.2.6. Sean Γ y Λ retículas cuadradas reales. Si h_Γ es conformemente conjugada a h_Λ vía una transformación de Möbius ϕ entonces $\phi(z) = az$ y $\phi(\Gamma) = \Lambda$.

DEMOSTRACIÓN. Supongamos que ambas funciones son conjugadas por una función $\phi(z) = \frac{az+b}{cz+d}$, es decir $\phi \circ h_\Gamma(z) = h_\Lambda \circ \phi(z)$ para todo $z \in \mathbb{C}$. Como $h_\Gamma(z)$ no está definida en ∞ entonces elegimos que $\phi(\infty) = \infty$. De esta forma ϕ es una función que va de \mathbb{C} en \mathbb{C} y $c = 0$, por lo que ϕ es una transformación afín de la forma $\phi(z) = az + t$ con $a \neq 0$. Debido a la conjugación sabemos que puntos críticos de h_Γ son enviados a puntos críticos de h_Λ y que valores críticos también son enviados a valores críticos bajo ϕ . Por lo tanto, si denotamos como $v_{1,\Gamma} = \frac{1}{e_{1,\Gamma}}, v_{2,\Gamma} = \frac{1}{e_{2,\Gamma}}$ y 0 como los valores críticos de h_Γ respecto a la retícula Γ entonces éstos son enviados por ϕ a los valores críticos $v_{1,\Lambda} = \frac{1}{e_{1,\Lambda}}, v_{2,\Lambda} = \frac{1}{e_{2,\Lambda}}, 0$, no necesariamente en este orden. Pero $e_{3,\Gamma} = e_{3,\Lambda} = 0$ por Corolario 3.3.3 (2), entonces

$$v_{1,\Gamma} + v_{2,\Gamma} = \frac{1}{e_{1,\Gamma}} + \frac{1}{e_{2,\Gamma}} = \frac{e_{2,\Gamma} + e_{1,\Gamma}}{e_{1,\Gamma}e_{2,\Gamma}} = \frac{-e_{3,\Gamma}}{e_{1,\Gamma}e_{2,\Gamma}} = 0$$

y como

$$\phi(v_{1,\Gamma}) + \phi(v_{2,\Gamma}) = v_{1,\Lambda} + v_{2,\Lambda} + 0 = 0,$$

por Corolario 3.3.3 (2) tenemos que

$$\begin{aligned} 0 &= \phi(v_{1,\Gamma}) + \phi(v_{2,\Gamma}) = av_{1,\Gamma} + t + av_{2,\Gamma} + t, \\ &= a(v_{1,\Gamma} + v_{2,\Gamma}) + 2t = 2t, \end{aligned}$$

por lo tanto $t = 0$ y así $\phi(z) = az$. Obsérvese que ϕ induce un isomorfismo entre los grupos \mathbb{C}/Γ y \mathbb{C}/Λ , por lo que en particular $\phi(\Gamma) = \Lambda$. \square

Teorema 4.2.7. Las funciones h_λ y $h_{\lambda'}$ son conformemente conjugadas si y sólo si $\lambda = i^k \lambda'$ para algún $k \in \mathbb{Z}$.

DEMOSTRACIÓN. Supongamos que h_λ y $h_{\lambda'}$ son conformemente conjugadas. Por el Lema 4.2.6 sabemos que la conjugación conforme es de la forma $\phi(z) = az$, por lo que tenemos la siguiente ecuación

$$\begin{aligned} h_\lambda \circ \phi(z) &= \phi \circ h_{\lambda'}(z) \\ \frac{1}{\wp_\lambda(az)} &= a \frac{1}{\wp_{\lambda'}(z)}, \end{aligned}$$

y utilizando la propiedad de homogeneidad de la Proposición 1.7.7, tenemos que

$$a^2 \wp_{\lambda'}(z) = a \wp_{\frac{\lambda}{a}}(z).$$

Como $\wp_{\frac{\lambda}{a}}$ y $\wp_{\lambda'}$ comparten los mismos polos, las retículas sobre las que están definidas son idénticas, por lo que $\wp_{\frac{\lambda}{a}} = \wp_{\lambda'}$ y de esta manera $a = 1$. Ahora por el Lema 4.2.5 tenemos que $\frac{\lambda}{a} = i^k \lambda'$ y como $a = 1$ entonces se sigue que $\lambda = i^k \lambda'$. El regreso se cumple trivialmente con la transformación identidad. \square

Si definimos

$$M = \mathbb{C}^* / \sim, \quad (4.1)$$

donde $\lambda_1 \sim \lambda_2$ si $\lambda_1 = i^k \lambda_2$, entonces por el teorema anterior tenemos que la familia h_λ con $\lambda \in M$ forma una familia holomorfa reducida de funciones sobre M .

4.3. Familias analíticas de funciones tipo cuadráticas .

En esta sección denotaremos por h_1 a la función $h_\Omega(z) = \frac{1}{\wp_\Omega(z)}$ con retícula de periodos $\Omega = [1, i]$ y utilizaremos la familia de funciones dada por $W_\mu(z) = \mu\gamma^2 h_1(z)$, cada función será conformemente conjugada a una única h_λ . Además, para simplificar el estudio de h_λ sobre todos los parámetros λ se demuestra que esta función se puede pensar como un múltiplo de h_1 bajo una conjugación conforme.

Definición 4.3.1. Para $\mu \in \mathbb{C}^*$ definimos

$$W_\mu(z) = \mu h_{\frac{1}{\gamma}}\left(\frac{z}{\gamma}\right) = \mu\gamma^2 h_1(z), \quad (4.2)$$

donde γ está definida como la raíz positiva de $\gamma^2 = \wp_1(\frac{1}{2})$.

En seguida se demuestra que las funciones W_μ y h_λ son dinámicamente equivalentes.

Proposición 4.3.2. Sea $\lambda \neq 0$ y sea $\phi_\lambda(z) = \lambda z$. La función $h_\lambda(z) = \frac{1}{\wp_\lambda(z)}$ es conformemente conjugada bajo ϕ_λ a W_μ , con $\mu = \frac{\lambda}{\gamma^2}$.

DEMOSTRACIÓN. Sea $\lambda \in \mathbb{C}^*$, si consideramos las propiedades de homogeneidad de $\wp_\Omega(z)$ tenemos que

$$h_\lambda \circ \phi_\lambda(z) = h_\lambda(\lambda z) = \frac{1}{\wp_\lambda(\lambda z)} = \frac{1}{\frac{1}{\lambda^2} \wp_1(z)} = \lambda^2 \frac{1}{\wp_1(z)} = \lambda^2 h_1(z)$$

y por otra parte, para $\mu = \frac{\lambda}{\gamma^2}$,

$$\phi_\lambda \circ W_\mu(z) = \lambda W_\mu(z) = \lambda \mu \gamma^2 h_1(z) = \lambda^2 h_1(z)$$

lo cual demuestra el resultado. □

Proposición 4.3.3. Para todo $\mu \in \mathbb{C}^*$ la función $W_{-\mu}$ es conformemente conjugada a la función W_μ .

DEMOSTRACIÓN. La demostración es casi inmediata, si consideramos $\psi(z) = -z$ y la paridad de la función h_λ entonces tenemos que

$$\psi^{-1} \circ W_{-\mu} \circ \psi(z) = -(W_\mu(-z)) = -(-\mu\gamma^2 h_1(-z)) = \mu\gamma^2 h_1(z) = W_\mu.$$

lo cual prueba la afirmación. □

Ahora, vamos a definir

$$N = \left\{ z \in \mathbb{C}^* : -\frac{\pi}{4} < \text{Arg}(z) < \frac{\pi}{4} \right\}. \quad (4.3)$$

Considerando M como en la ecuación (4.1) definimos la función $\sigma : M \rightarrow N$ dada por

$$\sigma(z) = \frac{1}{\gamma^2} z. \quad (4.4)$$

Claramente la función σ está bien definida en M y es uno a uno. Notemos que hemos obtenido la siguiente proposición respecto a W_μ y h_λ .

Proposición 4.3.4. *Sea $\lambda \in M$, entonces la función $W_{\sigma(\lambda)}$ es conformemente conjugada a h_λ bajo $\phi_\lambda(z) = \lambda z$.*

Además, como σ realiza un cambio analítico de coordenadas se obtiene el siguiente resultado.

Proposición 4.3.5. *La familia W_μ parametrizada sobre N forma una familia holomorfa reducida.*

4.4. Comportamiento tipo cuadrático.

Definamos $\|z\| = | \text{Re}(z) | + | \text{Im}(z) |$, la cual es una norma sobre \mathbb{C} considerado como un espacio vectorial sobre \mathbb{R} . Sean

$$c_1^{m,n} = \frac{1}{2} + m + in \quad \text{y} \quad c_2^{m,n} = \frac{i}{2} + m + in \quad \text{para} \quad m, n \in \mathbb{Z}. \quad (4.5)$$

Obsérvese que estos puntos son los puntos críticos de W_μ y que son independientes de la elección de μ .

Ahora consideremos:

$$U_j^{m,n} = \left\{ z : \|z - c_j^{m,n}\| < \frac{1}{2}, \quad j = 1, 2 \right\} \quad (4.6)$$

las cuales son regiones con forma de rombo centrados en $c_j^{m,n}$ (ver figura 4.1). También consideremos

$$V_\mu = \{ \mu z : \text{Re}(z) > 0 \}.$$

Vamos a trabajar principalmente con la función W_1 , debido a que $W_\mu = \mu W_1$. Por lo que si $W_1 : A \rightarrow B$ entonces $W_\mu : A \rightarrow \mu B$, para $\mu \in N$.

Una consecuencia inmediata de que la función \wp_Ω actúa 2 a 1 sobre regiones fundamentales es la siguiente proposición:

Proposición 4.4.1. *La función W_μ actúa 2 a 1 sobre regiones fundamentales.*

Definición 4.4.2. La *reflexión* de un punto $z_0 + z$ respecto del punto z_0 es $z_0 - z$. Decimos que una función F es *simétrica* respecto a un punto $z_0 \in \mathbb{C}$ si $F(z_0 + z) = F(z_0 - z)$.

Proposición 4.4.3. *La función W_μ es simétrica con respecto a los puntos $c_j^{m,n}$, o lo que es lo mismo $W_\mu(c_j^{m,n} + z) = W_\mu(c_j^{m,n} - z)$, para todo $j = 1, 2$ y $m, n \in \mathbb{Z}$.*

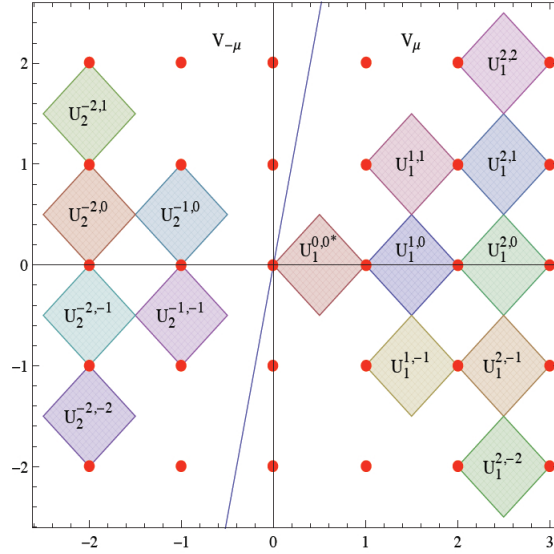


Figura 4.1: Los rombos $U_i^{m,n}$ como subconjuntos de V_{μ} ó $V_{-\mu}$. Figura tomada de [Cl].

DEMOSTRACIÓN. Tomemos en cuenta que $2c_j^{m,n}$ es un punto de la retícula, que W_{μ} es par y que es doblemente periódica respecto a puntos de la retícula. Así

$$W_{\mu}(c_j^{m,n} - z) = W_{\mu}(z - c_j^{m,n}) = W_{\mu}(z - c_j^{m,n} + 2c_j^{m,n}) = W_{\mu}(c_j^{m,n} + z)$$

□

Lema 4.4.4. *La función $W_1 : \partial U_1^{m,n} \rightarrow i\mathbb{R} \cup \{\infty\}$ es 2 a 1 y sobreyectiva.*

DEMOSTRACIÓN. Observemos que $W_1(c_1^{m,n} \pm \frac{1}{2}) = \gamma^2 \frac{1}{\wp_1(c_1^{m,n} \pm \frac{1}{2})} = 0$ y que $W_1(c_1^{m,n} \pm \frac{i}{2}) = \gamma^2 \frac{1}{\wp_1(c_1^{m,n} \pm \frac{i}{2})} = \infty$, además W_1 no tiene puntos críticos sobre las líneas que conectan los vértices de $U_1^{m,n}$. Primeramente demostraremos que la imagen de estas líneas es el eje imaginario. Para ello consideremos los puntos de la forma $e^{\frac{i\pi}{4}t}$ y $e^{-\frac{i\pi}{4}t}$ para $-\frac{\sqrt{2}}{2} < t < \frac{\sqrt{2}}{2}$, $t \neq 0$. Haciendo uso de las propiedades de homogeneidad de $\wp_{\Omega}(z)$ tenemos lo siguiente:

$$W_1(e^{\frac{i\pi}{4}t}) = \gamma^2 h_1(e^{\frac{i\pi}{4}t}) = \gamma^2 \frac{1}{\wp_1(e^{\frac{i\pi}{4}t})} = e^{\frac{i\pi}{2}} \gamma^2 \frac{1}{\wp_{e^{-\frac{i\pi}{4}}}(t)} = i\gamma^2 \frac{1}{\wp_{e^{-\frac{i\pi}{4}}}(t)}$$

y

$$W_1(e^{-\frac{i\pi}{4}t}) = \gamma^2 h_1(e^{-\frac{i\pi}{4}t}) = \gamma^2 \frac{1}{\wp_1(e^{-\frac{i\pi}{4}t})} = e^{-\frac{i\pi}{2}} \gamma^2 \frac{1}{\wp_{e^{\frac{i\pi}{4}}}(t)} = -i\gamma^2 \frac{1}{\wp_{e^{\frac{i\pi}{4}}}(t)}$$

Como para $h_{e^{-\frac{i\pi}{4}}}$ y $h_{e^{\frac{i\pi}{4}}}$ las retículas son reales se tiene que $h_{e^{-\frac{i\pi}{4}}}(t)$ y $h_{e^{\frac{i\pi}{4}}}(t)$ son números reales, por lo tanto se obtiene el resultado. □

Además, también se tiene el siguiente teorema.

Teorema 4.4.5. *Las funciones $W_1 : U_1^{m,n} \rightarrow V_1$ y $W_1 : U_2^{m,n} \rightarrow V_{-1}$ son cubrientes ramificadas que actúan 2 a 1.*

DEMOSTRACIÓN. Primeramente, sabemos que W_1 es una función meromorfa y por lo tanto continua, por lo que la imagen de $U_1^{m,n}$ debe ser conexa y por otra parte tenemos que

$$W_1(c_1^{m,n}) = \gamma^2 h_1(c_1^{m,n}) = \gamma^2 \frac{1}{\wp_1(c_1^{m,n})} = \frac{\gamma^2}{\gamma^2} = 1.$$

Ahora, vamos a demostrar que $Re(W_1(z)) > 0$ para $z \in U_1^{m,n}$, ver figura 4.2. Supongamos que no es así, es decir, supongamos que existe $z_0 \in U_1^{m,n}$ tal que $Re(W_1(z_0)) \leq 0$. Consideremos una curva $\alpha \subset U_1^{m,n}$ que conecta $c_1^{m,n}$ con z_0 . Entonces $W_1(\alpha)$ debe intersectar el eje imaginario, lo cual nos lleva a una contradicción, ya que por el Lema 4.4.4 sabemos que $W_1 : \partial U_1^{m,n} \rightarrow i\mathbb{R} \cup \{\infty\}$ es 2 a 1 y sobreyectiva, además de que W_1 es una función elíptica de orden 2 en $U_1^{m,n}$ ya que está contenido en un paralelogramo de periodos. Luego, por la simetría de $U_1^{m,n}$ respecto a $c_1^{m,n}$ se tiene por la Proposición 4.4.3, que la función W_1 es simétrica respecto al punto crítico $c_1^{m,n}$ y por lo tanto actúa 2 a 1 en $U_1^{m,n}$. Con un argumento similar se demuestra que la función $W_1 : U_2^{m,n} \rightarrow V_{-1}$, actúa 2 a 1. Para terminar, debemos demostrar que las funciones $W_1 : U_1^{m,n} \rightarrow V_1$ y $W_1 : U_2^{m,n} \rightarrow V_{-1}$ son sobreyectivas.

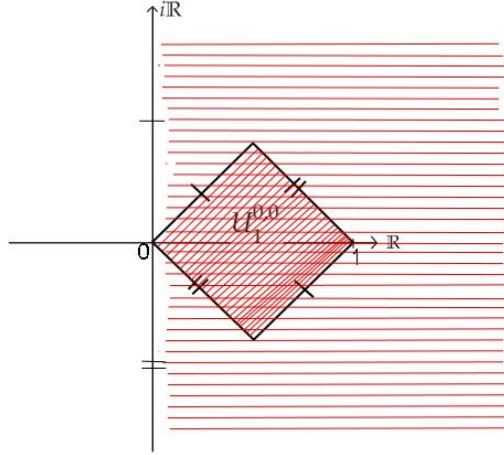


Figura 4.2: $W_1 : \partial U_1^{m,n} \rightarrow i\mathbb{R} \cup \{\infty\}$ y $Re(W_1(z)) > 0$ para todo $z \in U_1^{m,n}$.

Observemos que $\overline{U_1^{m,n} \cup U_2^{m,n}}$ es la cerradura de una región fundamental para W_1 (ver figura 4.3) así por la Proposición 4.4.1 la función $W_1 : \overline{U_1^{m,n} \cup U_2^{m,n}} \rightarrow \overline{V_1 \cup V_{-1}}$ es sobreyectiva. Si analizamos la función por regiones tenemos que:

$$W_1 : U_1^{m,n} \rightarrow V_1,$$

$$W_1 : U_2^{m,n} \rightarrow V_{-1},$$

$$W_1 : \partial U_1^{m,n} \cup \partial U_2^{m,n} \rightarrow i\mathbb{R} \cup \{\infty\},$$

por lo que $W_1 : U_1^{m,n} \rightarrow V_1$ es sobreyectiva, y por lo tanto una función cubriente ramificada 2 a 1. \square

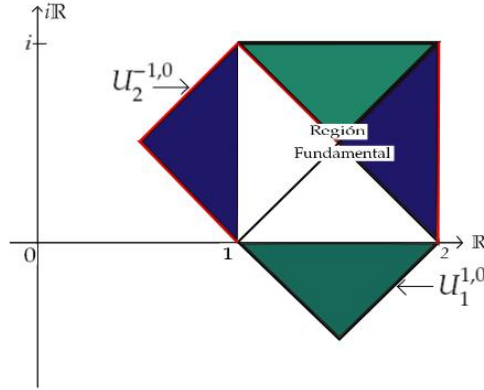


Figura 4.3: $\overline{U_1^{1,0} \cup U_2^{-1,0}}$ es la cerradura de una región fundamental para W_1 y se cumple para todo $m, n \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$.

Con estos resultados se obtiene el siguiente corolario.

Corolario 4.4.6. Para $\mu \in \mathbb{C}^*$

$$W_\mu : U_1^{m,n} \rightarrow V_\mu \quad y \quad W_\mu : U_2^{m,n} \rightarrow V_{-\mu}$$

son cubrientes ramificadas 2 a 1.

Ahora debemos garantizar que $\overline{U_1^{m,n}} \subset V_\mu$ y que $\overline{U_2^{m,n}} \subset V_{-\mu}$, para ello basta determinar qué valores de m y n hacen esto posible. La siguiente proposición muestra que la elección de m y n se deben esencialmente a la elección de N .

Proposición 4.4.7. Sea $\mu \in N$ es decir, $|Arg(\mu)| < \frac{\pi}{4}$, entonces se tiene que

$$\overline{U_1^{m,n}} \subset V_\mu \text{ si y sólo si } m > 0 \text{ y } -m \leq n \leq m.$$

También, cuando $|Arg(\mu)| < \frac{\pi}{4}$,

$$\overline{U_2^{m,n}} \subset V_{-\mu} \text{ si y sólo si } m < 0 \text{ y } m \leq n \leq -m - 1.$$

DEMOSTRACIÓN. La prueba es inmediata luego de observar que

$$\bigcap_{|Arg(\mu)| < \frac{\pi}{4}} V_\mu = \left\{ z : |Arg(z)| < \frac{\pi}{4} \right\}$$

ya que esto implica que $\overline{U_1^{m,n}} \subset V_\mu$ si y sólo si $m > 0$ y $-m \leq n \leq m$. La prueba de la segunda parte se obtiene de manera similar cambiando μ por $-\mu$. \square

Hacemos la observación que $U_1^{0,0} \subset V_\mu$ pero que $\overline{U_1^{0,0}}$ contiene el origen y éste no está en V_μ . En otras palabras, $U_1^{0,0}$ no está compactamente contenido en V_μ . Por lo que este caso lo tratamos como un caso especial a continuación.

Sabemos que la función W_μ tiene un punto fijo superatractor en $z = 0$ para todo $\mu \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$. Sea $B(0)$ la cuenca inmediata de atracción de $z = 0$. Por ser un dominio de Böttcher sabemos que existen $\epsilon > 0$ y una función $\theta(z) = \zeta$ que va de una vecindad $D_\epsilon(0)$ de cero a $B(0)$ la cual conjuga W_μ con la aplicación $\zeta \mapsto \zeta^2$. Consideremos ahora un círculo α_1 en D_ϵ con radio menor que ϵ y centrado en el origen, entonces $\alpha = \theta^{-1}(\alpha_1)$ es una curva cerrada simple en $B(0)$ con 0 en su interior, ver figura 4.4.

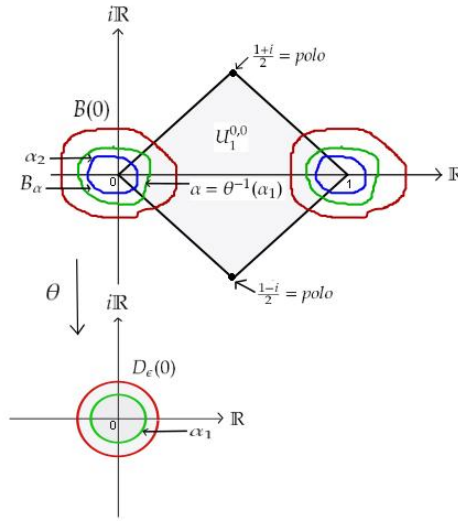


Figura 4.4: Cambio de coordenadas en la cuenca inmediata de atracción de 0.

Definición 4.4.8. Definimos

$$U_1^{0,0}(0) = U_1^{0,0} \setminus (B_\alpha \cup B_{\alpha+1}),$$

donde B_α y $B_{\alpha+1}$ son el complemento acotado de α y $\alpha + 1$ en \mathbb{C} , respectivamente, ver figura 4.5.

Recordemos que θ es analítica y conforme, por lo que tiene distorsión acotada y eligiendo $\epsilon > 0$ suficientemente pequeño podemos garantizar que α es una curva que corta las fronteras de $U_1^{0,0}$ exactamente en dos puntos.

Sea α_2 la curva $W_\mu(\alpha)$ y debido a que la función W_μ contrae alrededor de cero, se tiene que α_2 está completamente contenida en B_α (ver figura 4.4). Finalmente sabemos por el Corolario 4.4.6 que la función $W_\mu : U_1^{m,n} \rightarrow V_\mu$ es una cubierta ramificada 2 a 1, por lo que la función $W_\mu : U_1^{0,0}(0) \rightarrow V_\mu \setminus B_{\alpha_2}$ también es una función cubierta ramificada 2 a 1. Además, se ha

garantizado que $\overline{U_1^{0,0}(0)} \subset W_\mu(U_1^{0,0}(0)) = V_\mu \setminus B_{\alpha_2}$. Por lo que concluimos con el siguiente teorema:

Teorema 4.4.9. *Para $\mu \in N$, las siguientes funciones son tipo cuadrático*

$$W_\mu : U_1^{m,n} \rightarrow V_\mu \text{ para } m > 0, -m \leq n \leq m,$$

$$W_\mu : U_2^{m,n} \rightarrow V_{-\mu} \text{ para } m < 0, m \leq n \leq -m - 1,$$

$$W_\mu : U_1^{0,0}(0) \rightarrow V_\mu \setminus B_{\alpha_2}.$$

DEMOSTRACIÓN. La demostración se sigue inmediatamente de la Proposición 4.4.7 y el Corolario 4.4.6, ya que las conclusiones de estos resultados es lo que pide la Definición 4.1.2 para que una función sea tipo cuadrático. \square

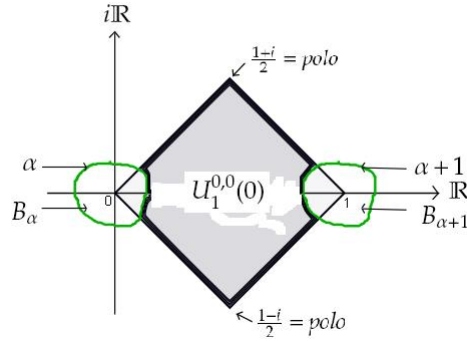


Figura 4.5: $U_1^{0,0}(0) = U_1^{0,0} \setminus (B_\alpha \cup B_{\alpha+1})$.

Para dar resultados en términos de la función h_Ω tomamos en cuenta que la función $\sigma : M \rightarrow N$ es biyectiva (en particular es un homeomorfismo) entonces las propiedades topológicas de W_μ se preservan bajo σ^{-1} . Además, por la Proposición 4.3.4 sabemos que para $\lambda \in M$ la función $W_{\sigma(\lambda)}$ es conformemente conjugada a h_λ bajo $\phi_\lambda(z) = \lambda z$, por lo que se obtiene el siguiente teorema.

Teorema 4.4.10. *Para $\lambda \in M$, las siguientes funciones son tipo cuadrático*

$$h_\lambda : \phi_\lambda(U_1^{m,n}) \rightarrow \phi_\lambda(V_{\sigma(\lambda)}) \text{ para } m > 0, -m \leq n \leq m,$$

$$h_\lambda : \phi_\lambda(U_2^{m,n}) \rightarrow \phi_\lambda(V_{-\sigma(\lambda)}) \text{ para } m > 0, -m \leq n \leq m,$$

$$h_\lambda : \phi_\lambda(U_1^{0,0}(0)) \rightarrow \phi_\lambda(V_\mu \setminus B_{\alpha_2}).$$

4.5. Comportamiento tipo cuadrático en el origen.

Como queremos demostrar que la familia h_Ω es tipo cuadrática en vecindades del origen, debemos encontrar regiones U y V que satisfagan la Definición 4.1.2. Por facilidad, supondremos que $J(h_\Omega)$ es conexo para garantizar el comportamiento tipo polinomial asociado a un punto fijo superatractor. Proponemos U como un conjunto dentro de una región fundamental de periodos para h_Ω y $V = h_\Omega(U)$.

Proposición 4.5.1. *Sea $B(0)$ la cuenca inmediata de atracción del origen. Entonces ocurre uno de los siguientes casos:*

1. $\mathbb{R} \subset B(0)$ y por lo tanto $J(h_\Omega)$ es totalmente disconexo ó
2. si $J(h_\Omega)$ conexo, entonces $\partial B(0)$ intersecta a \mathbb{R}^+ en un único punto x_0 que es punto fijo repulsor ó parabólico para h_Ω .

DEMOSTRACIÓN. Por el Lema 3.1.2 respecto al comportamiento de la función $h_\lambda(x)$ restringida a \mathbb{R} podemos elegir λ_r como el periodo de $h_\lambda(x)$ sobre \mathbb{R} . Sea $c = \frac{\lambda_r}{2}$ el punto crítico real positivo de $h_\lambda(x)$ en el intervalo $I = [0, \lambda_r]$, el cual es un máximo de la función sobre todo \mathbb{R} . Denotemos como $v = h_\lambda(c)$.

Recordemos que 0 siempre es un punto fijo superatractor de la función h_λ y de acuerdo al comportamiento periódico de $h_\lambda(x)$ sobre \mathbb{R} (ver figura 3.1) se tiene que $h_\lambda(x)$ con $x \in \mathbb{R}$ puede tener 1, 2 ó 3 puntos fijos en el intervalo I .

Supongamos que cero es el único punto fijo en I , entonces para la primera afirmación basta demostrar que $h_\lambda^n(x) \rightarrow 0$ para todo $x \in I$ pues por la periodicidad de h_λ tendremos que $\mathbb{R} \subset B(0)$. Observemos que $h_\lambda(x) < x$ para todo $x \in \mathbb{R}$ y como $h_\lambda(x) \leq v < \lambda_r$ entonces se tiene que $0 < h_\lambda(x) < \lambda_r$ para todo $x \in (0, c)$. Así, la sucesión de iteradas

$$0 < h_\lambda^{n+1}(x) < h_\lambda^n(x) < \dots < \lambda_r, \text{ para todo } x \in (0, c) \text{ y para todo } n \in \mathbb{N},$$

siendo decreciente y acotada implica que $h_\lambda^n(x) \rightarrow 0$ cuando $n \rightarrow \infty$. Por otra parte, si $x \in [c, \lambda_r]$ entonces $h_\lambda(x) \in [0, v] \subset [0, c]$ por lo que podemos repetir el argumento anterior para justificar que $h_\lambda^n(x) \rightarrow 0$ cuando $n \rightarrow \infty$ para todo $x \in [c, \lambda_r]$. Así obtenemos que $h_\lambda^n(x) \rightarrow 0$ cuando $n \rightarrow \infty$ para todo $x \in I$ que es lo que queríamos demostrar. Como $B(0)$ es una componente no acotada, $J(h_\Omega)$ es disconexo, por lo tanto por el Teorema de Dicotomía (Teorema 3.4.3) se tiene que $J(h_\Omega)$ es totalmente disconexo.

Supongamos ahora que hay al menos dos puntos fijos en I . Por el Lema 3.1.2 h_λ es estrictamente creciente sobre $[0, c]$ entonces existe un primer punto $x_0 \in (0, c)$ tal que $h_\lambda(x_0) = x_0$. Demostremos ahora que $x_0 \in \partial B(0) \cap (0, \lambda_r)$.

Como x_0 es el primer punto tal que $h(x_0) = x_0$ entonces para todo $x \in (0, x_0)$ se tiene que $h_\lambda(x) < x$ debido a la concavidad de la función en $(0, c)$ y como $h_\lambda(x)$ es creciente en $(0, x_0)$ obtenemos que

$$0 < h_\lambda^{n+1}(x) < h_\lambda^n(x) < \dots < x, \text{ para todo } x \in (0, x_0) \text{ y para todo } n \in \mathbb{N}.$$

Si suponemos que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} h_\lambda^n(x) = x', \text{ para } x' \in (0, x_0),$$

entonces $h_\lambda^{n+1}(x) \rightarrow h(x')$ cuando $n \rightarrow \infty$ pero por la continuidad de la función se tiene que $h_\lambda(x') = x'$ lo cual es una contradicción, ya que x_0 se eligió como el primer punto fijo en $(0, c)$.

Se sigue que $x_0 \in \partial B(0) \cap (0, \lambda_r)$.

Para demostrar que x_0 es el único punto en $\partial B(0) \cap (0, \lambda_r)$ consideraremos $l = \partial B(0) \cap (0, \lambda_r)$ y demostraremos que $l = \{x_0\}$. Como x_0 es punto fijo de h_Ω y pertenece a $J(h_\Omega)$ entonces x_0 es repulsor ó parabólico.

Si x_0 es parabólico, de la dinámica de la función $h_\Omega|_{\mathbb{R}}$ (Lema 3.1.2) es sencillo verificar que el intervalo $(x_0, \lambda_r - x_0)$ está contenido en el pétalo atractor de x_0 . Esto implica que $l = \{x_0\}$.

Supongamos que x_0 es repulsor, entonces existe otro punto fijo $x_1 \in (x_0, \lambda_r - x_0)$. Si $x_0 < x_1 \leq c$, entonces x_1 es (super)atractor y como en el caso anterior, se puede demostrar que el intervalo $(x_0, \lambda_r - x_0)$ está en la cuenca de atracción de x_1 , por lo que x_0 es el único punto en l .

Finalmente, supongamos que $x_1 > c$. En este caso $h_\Omega(x) > x$ para todo $x \in (x_0, c)$ y $h_\Omega|_{(x_0, c)}$ es estrictamente creciente. Por lo tanto, existe una sucesión decreciente $c_k \in (x_0, c)$ de preimágenes de c en el intervalo (x_0, c) , esto es, $x_0 < \dots < c_k < c_{k-1} < \dots < c_1 < c$ y tales que $h_\Omega^k(c_k) = c$. Si existe $y \in l$ tal que $y \neq x_0$, podemos pues encontrar $N > 0$ tal que $c_N < y \leq c_{N-1}$, por lo que $y_N = h^N(y) > c$.

Tomemos entonces $y_N \in \partial B(0) \cap (0, \lambda_r)$ tal que $y_N > c = \frac{\lambda_r}{2}$. Por simetría, $-y_N \in \partial B(0) \cap (-\lambda_r, 0)$. Dada una vecindad D_ϵ de y_N elegimos $z \in B(0) \cap D_\epsilon$. Por la 4-simetría, $-z \in B(0)$ y está suficientemente cercano a $-y_N$. Luego $d(\text{Re}(z), \text{Re}(-z)) > \lambda_r$ implicando que $B(0)$ no está contenida en R , lo cual es una contradicción. Por lo tanto $\{x_0\} = \partial B(0) \cap (0, \lambda_r)$. □

Proposición 4.5.2. *Sea $J(h_\Omega)$ conexo, entonces $B(0)$ está compactamente contenida en el interior de una región fundamental.*

DEMOSTRACIÓN. Primeramente sabemos que $B(0)$ está completamente contenida en el interior de una región fundamental. Supongamos ahora que existe $z \in \partial B(0)$ y un elemento $w \in \Omega$, $w \neq 0$ tal que $z + w \in \partial B(0)$. Luego, por el Lema 3.4.1, sabemos que $-z$ y $-z - w$ están en $\partial B(0)$, entonces por la periodicidad de h_Ω tenemos que $h_\Omega(\pm z) = h_\Omega(\pm(z+w))$ lo cual contradice que h_Ω actúa 2 a 1 sobre regiones fundamentales a menos que $z = z+w$ ó $-z = z+w$. De aquí se obtiene que $2z = w$, $w \in \Omega$, esto es:

$$z = \frac{1}{2}(n\lambda_1 + im\lambda_1) \text{ para ciertos } n, m \in \mathbb{Z} \text{ y } \lambda_1 \text{ el generador de } \Omega.$$

Notemos que z no puede ser un polo ya que si lo fuese $h_\Omega(z) = \infty$ y por la invarianza hacia adelante de $J(h_\Omega)$ se tendría que $\infty \in \partial B(0)$, luego, $B(0)$ sería no acotado, contradicción. Entonces, ó $n = 0$ ó $m = 0$. Se sigue entonces que $z \in \{\pm c_1, \pm c_2\}$, lo que contradice la Proposición 4.5.1. Por lo tanto, $B(0)$ está compactamente contenido en el interior de una región fundamental. □

Para finalizar, daremos las regiones adecuadas para garantizar el comportamiento tipo cuadrático de la función h_Ω alrededor del origen. Supondremos que x_0 es un punto fijo repulsor. En este caso, existe otro punto fijo x_1 tal que $x_0 < x_1 < \lambda_r - x_0$ el cual, en principio puede ser atractor, superatractor, repulsor, etcétera.

Trabajaremos únicamente los casos cuando x_1 es atractor (y por lo tanto $x_0 < x_1 < c$) o superatractor ($x_0 < x_1 = c$).

Sea R la región fundamental cuya frontera está dada por la siguiente parametrización

$$R(t) = \begin{cases} R_1(t) = \frac{1}{2} + i\frac{t}{2}, & -1 \leq t \leq 1 \\ R_2(t) = \frac{t}{2} + i\frac{1}{2}, & -1 \leq t \leq 1 \\ R_3(t) = \frac{t}{2} - i\frac{1}{2}, & -1 \leq t \leq 1 \\ R_4(t) = -\frac{1}{2} + i\frac{t}{2}, & -1 \leq t \leq 1. \end{cases}$$

Por la Proposición 4.5.2, $B(0)$ se encuentra compactamente contenida en R , ver figura 4.6.

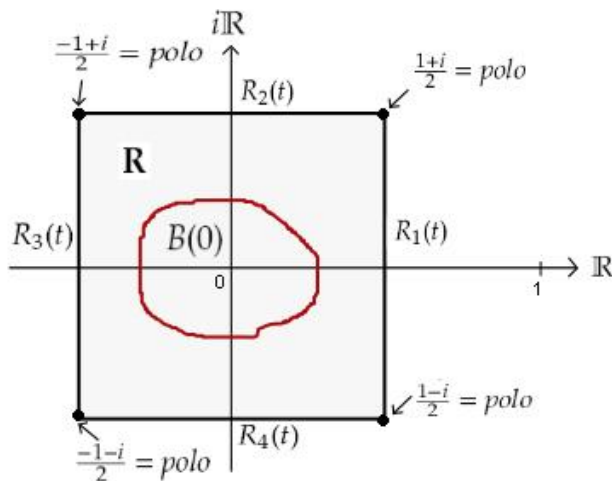


Figura 4.6: $B(0)$ compactamente contenido en R .

Caso I. Supongamos que x_1 es un punto atractor.

Sea $B(x_1)$ la cuenca inmediata de atracción de x_1 , por ser un dominio de Schröder sabemos que existen $\epsilon > 0$ y una función conforme $\theta(z) = \zeta$ que va de una vecindad $D_\epsilon(x_1)$ de cero a $B(x_1)$ la cual conjuga h_Ω con la aplicación $\zeta \mapsto \lambda\zeta$. Consideremos ahora un círculo C_1 en D_ϵ con radio menor que ϵ y centrado en el origen, entonces $C = \theta^{-1}(C_1)$ es una curva cerrada simple en

$B(x_1)$ con x_1 en su interior. Elegimos una curva suave β que une el punto q_1 de la curva C con el punto q_2 del lado $R_1(t)$ de R en el semiplano superior como en la figura 4.7. La reflexión de β respecto al eje real es una curva $\tilde{\beta}$ que une a \tilde{q}_1 en C con el punto \tilde{q}_2 en el lado $R_1(t)$ en el semiplano inferior. Sean τ el segmento de recta que une el punto $\frac{1+i}{2}$ con q_2 y $\tilde{\tau}$ el segmento de recta que une el punto $\frac{1-i}{2}$ con \tilde{q}_2 .

Si consideramos en arco de curva γ que une el punto q_1 con \tilde{q}_1 y que contiene a x_1 en su interior, podemos formar una nueva curva $\delta = \tau \cup \beta \cup \gamma \cup \tilde{\beta} \cup \tilde{\tau}$ y con ello la región U_0 que es el complemento acotado de la curva $\delta \cup i\delta \cup -\delta \cup -i\delta$ (ver figura 4.7) que nos será útil para garantizar el comportamiento tipo cuadrático de la función h_Ω alrededor del origen.

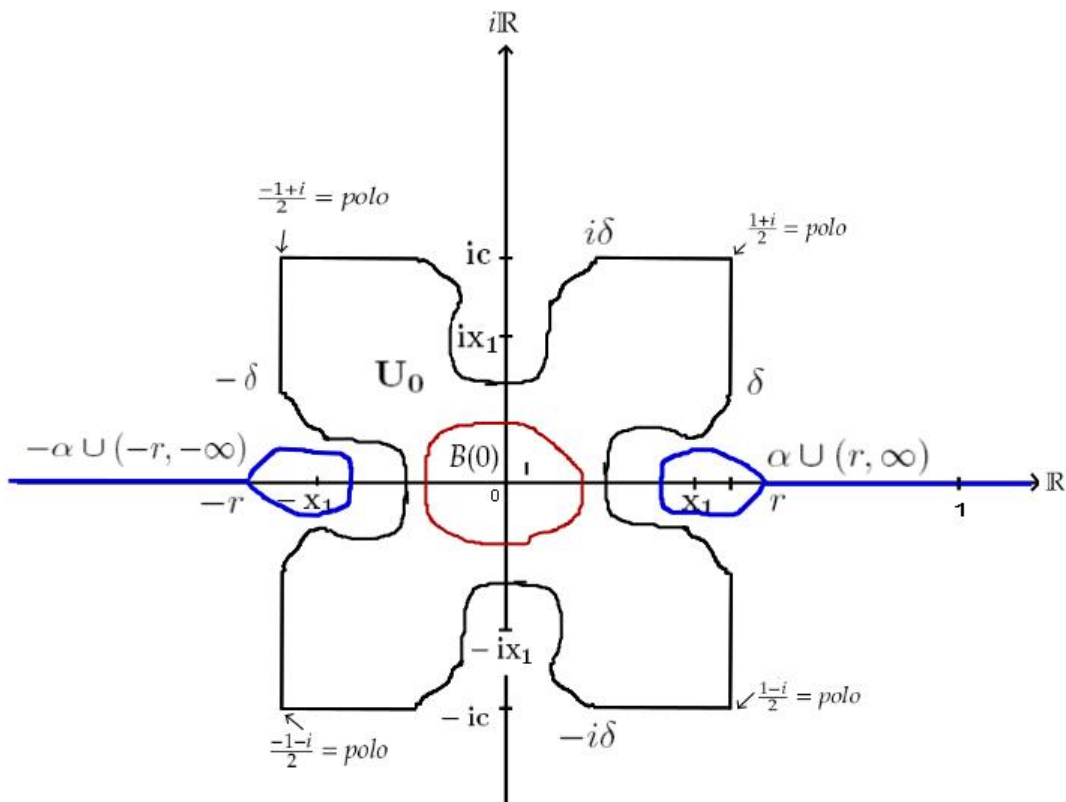


Figura 4.7: Nueva región U_0 .

Ya que la función h_Ω contrae alrededor de x_1 y debido a que $h_\Omega(R_1(t)) \subset \mathbb{R}$ se garantiza que la imagen de la curva $\beta \cup \gamma \cup \tilde{\beta}$ es una curva α totalmente contenida en $B(x_1)$ que cierra en el punto $r = h_\Omega(q_2) \in \mathbb{R}$, mientras que la imagen de los segmentos τ y $\tilde{\tau}$ van sobre el intervalo (r, ∞) . La simetría de U_0 respecto al origen y la paridad de la función hacen que la acción de $h_\Omega|_{U_0}$ sea 2 a 1, pues $h_\Omega(-\delta) = \alpha \cup (r, \infty)$.

Con un argumento análogo y sabiendo que $h_\Omega(R_2(t)) \subset i\mathbb{R}$ se justifica que $h_\Omega(\pm i\delta) = -\alpha \cup$

$(-r, -\infty)$, ver figura 4.7. Por lo tanto, $h_\Omega : U_0 \rightarrow h_\Omega(U_0)$ es una función cubriente ramificada que actúa 2 a 1, más aún como $\overline{U_0} \subset h_\Omega(U_0)$, concluimos que $(h_\Omega, U_0, h_\Omega(U_0))$ es una función tipo cuadrática.

Caso II. El caso cuando x_1 es un punto superatractor, se sigue exactamente como el procedimiento que se realizó con la región $U_1^{0,0}$.

Observación. Para el caso cuando $x_1 > c$ conjeturamos la existencia de una región U_0^* definida como en la figura 4.8. Aquí tomamos el disco $D_{c_1}(c)$ centrado en el punto crítico c y de radio $c_1 \in (x_0, c)$, donde c_1 es una preimágen de c (la existencia de c_1 se ha garantizado al final de la prueba de la Proposición 4.5.1). Salvo la propiedad de $\overline{U_0^*} \subset h_\Omega(U_0^*)$, es fácil verificar todas las otras propiedades que hacen que $(h_\Omega, U_0^*, h_\Omega(U_0^*))$ sea una función tipo cuadrática.

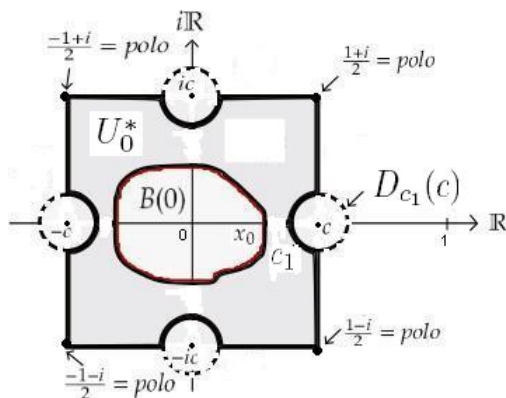


Figura 4.8: Región U_0^* .

En este capítulo se ha demostrado que la función h_Ω parametrizada sobre retículas cuadradas reales es una función tipo cuadrática sobre ciertos discos topológicos contruidos en las secciones anteriores. Esto nos permite concluir este trabajo de tesis enunciando el siguiente teorema cuya demostración se sigue inmediatamente del Teorema de Rectificación.

Teorema 4.5.3. *Consideremos la función elíptica $h_\lambda(z) = \frac{1}{\wp_\lambda(z)}$ parametrizada sobre $\Omega = [\lambda, i\lambda]$, una retícula cuadrada, $\lambda \in \mathbb{C} - \{0\}$. Si $(h_\lambda, U_\lambda, V_\lambda)$ denota una función tipo cuadrática definida en el Teorema 4.4.10 o denota $(h_\lambda, U_0, h_\lambda(U_0))$, entonces $(h_\lambda, U_\lambda, V_\lambda)$ es híbrido equivalente a $p_c(z) = z^2 + c$ para algún c en el conjunto de Mandelbrot, esto es, $c \in \mathcal{M} = \{c : K_{p_c} \text{ es conexo}\}$.*

Debido a que el origen es un punto fijo superatractor de h_λ , se sigue directamente el siguiente resultado.

Corolario 4.5.4. *Si K_0 denota el conjunto lleno de Julia de $(h_\lambda, U_0, h_\lambda(U_0))$ entonces K_0 es la imagen cuasiconforme de \mathbb{D} .*

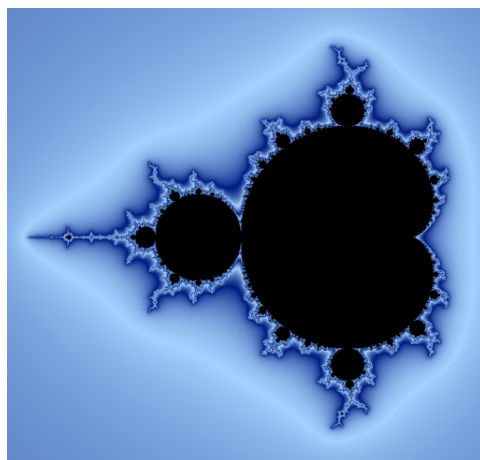


Figura 4.9: Conjunto de Mandelbrot.

Referencias

- [Ah] Ahlfors L. V. (1978) *Complex Analysis*, third ed., McGraw-Hill Book Co., New York, An introduction to the theory of analytic functions of one complex variable, International Series in Pure and Applied Mathematics.
- [Ba] Baker N.I. (1970) *Limit functions and sets of non-normality in iteration theory*, Annales Academy Scientific Fenn. Ser. A I Mathematical. **467**.
- [Be] Bergweiler W. (1993) *Iteration of meromorphic functions*, Bulletin of the American Mathematical Society, 29, 151-188.
- [Bo] Bolsch A. (1999) *Periodic Fatou components of meromorphic functions*, Bulletin London Mathematical Society 31, 543-555.
- [BDH] Baker N.I., Domínguez P. y Herring M. (2001) *Dynamics of functions meromorphic outside a small set*, Ergodic Theory and Dynamical Systems 21, 647-672.
- [BKL1] Baker N.I., Kotus J. y Lü Y. N. (1991) *Iterates of meromorphic functions I*, Ergodic Theory and Dynamical Systems 11, 241-248.
- [BKL2] Baker N.I., Kotus J. y Lü Y. N. (1990) *Iterates of meromorphic functions II: Examples of wandering domains*, J. London Mathematical Society.(2) 42, 267-278.
- [BKL3] Baker N.I., Kotus J. y Lü Y. N. (1991) *Iterates of meromorphic functions III: Preperiodic domains*, Ergodic Theory and Dynamical Systems 11, 603-618.
- [C] Cremer H. (1932) *Über die Schrödersche Funktionalgleichung und das Schwarzsche Eckenabbildungsproblem*. Ber. Verh. Sächs. Akad. Wiss. Leipzig, Math. Phys. Kl. 84, 291-324.
- [CG] Carleson L. y Gamelin T. W. (1993) *Complex Dynamics*. Springer-Verlang, New York, Berlin y Heidelberg.
- [Cl] Clemons J. (2010) *Dinamical Properties of Weierstrass Elliptic Functions on Square Lattices*, Tesis doctoral.
- [D] Du P. (1973) *Elliptic Functions and Elliptic Curves*. Cambridge University Press.

- [DH] Douady A. y Hubbard J. H. (1985) *On the dynamics of polynomial-like mappings*. Annales Scientifiques de École Normale Supérieur.
- [EL] Eremenko A.E. y Lyubich M. Yu. (1992) *Dynamical properties of some classes of entire functions*, Annales Institute Fourier (Grenoble) **42**, 989-1020.
- [F] Fatou P. (1919-1920) *Sur les équations fonctionnelles*. Bulletin of the France Mathematical Society, 47, 161-271; 48, 33-94 y 208-314.
- [G] Gamelin T. W. (2001) *Complex Analysis*. Springer-Verlang, New York.
- [HK0] Hawkins J. y Koss L. (2002) *Ergodic properties and Julia sets of Weierstrass elliptic functions*, Monatsh. Mathematical **137**(4), 273-300.
- [HK1] Hawkins J. y Koss L. (2003) *Parametrized dynamics of the Weierstrass elliptic function*, Conformal geometry and dynamics, American Mathematical Society, volume 8, 1-35.
- [HK2] Hawkins J. y Koss L. (2005) *Connectivity properties of Julia sets of Weierstrass elliptic functions*, Topology and its Applications, volume 152, 107-137.
- [JS] Jones G.A. y Singerman D. (1997) *Complex Functions. An algebraic and geometric viewpoint*. Cambridge University Press.
- [K] Koss L. (2009) *A fundamental dichotomy for Julia sets of a family of elliptic functions*, Proceedings of the american mathematical society, volume 137, 3927-3938.
- [K1] Koss L. (2010) *Cantor Julia sets in a family of even elliptic functions*, Journal of Difference Equations and Applications, 16:5-6, 675-688.
- [KK] Keen L. y Kotus J. (1997) *Dynamics of the family $\lambda \tan(z)$* , Conformal Geometry Dynamics. 1, 28-57.
- [M] Milnor J. (2006) *Dynamics in one complex variable*, third edition, Princeton University Press.
- [MI] Abramowitz M. y Stegun I.A. (1992), Handbook of Mathematical Functions with Formulas, Graphs, and Mathematical Tables, Dover Publications Inc., New York.
- [MS] McMullen C. T. and Sullivan D. P. (1998) *Quasiconformal homeomorphisms and dynamics III. The Teichmüller space of a holomorphic dynamical system*, Adv. Math. 135, no. 2, 351-395.
- [MSS] Mañe R., Sad P. y Sullivan D. P. (1983) *On the dynamics of rational maps* Ann. Sci. Ecole Norm. Sup.
- [S1] Sullivan D. P. (1982) *Itération des fonctions analytiques complexes*, C.R. Academy Scientific Paris Sér. I Mathematical. **294**, 301-303.

- [S2] Sullivan D. P. (1985) *Quasiconformal homeomorphisms and dynamics I. Solution of the Fatou-Julia problem on wandering domains*, Ann. of Math. (2) **122**, 401-418. Acad. Sci. Paris Sér. I Math. **294**, 301-303.
- [XC] Xin-Hou H. y Chung-Chun Y. (1998) *Dynamics of transcendental functions*. Gordon and Breach Science Publishers. Asian Mathematics Series.

Índice alfabético

- Banda toral, 47
- Clasificación
 - de componentes de Fatou, 37
 - de puntos periódicos, 36
- Conjunto
 - de Fatou, 33
 - de Julia, 33
 - de Mandelbrot, 72
 - lleno de Julia, 58
 - postsingular, 37
 - singular, 37
- Criterio de Branner-Hubbard, 15
- Discriminante de un polinomio cúbico, 30
- Doble banda toral, 47
- Dominio anular, 14
 - módulo, 14
- Ecuación diferencial de φ , 28
- El 2-toro, 17
- Espacio
 - cociente, 18
 - de parámetros reducido, 59
- Familia
 - analítica de funciones tipo cuadráticas, 61
 - holomorfa de funciones meromorfas, 59
 - normal, 33
- Forma normal Weierstrass, 29
- Función
 - φ -Weierstrass, 25
 - $h_\Omega = \frac{1}{\varphi_\Omega}$, 43
 - abierta, 13
 - cuasiconforme, 57
 - de clase S , 38
 - elíptica, 20
 - hiperbólica, 47
 - meromorfa, 13
 - meromorfa trascendental, 33
 - propia, 58
 - sigma de Weierstrass, 25
 - simétrica, 62
 - tipo cuadrático, 57
 - zeta de Weierstrass, 26
- Funciones
 - conformemente conjugadas, 59
 - híbrido equivalentes, 58
 - topológicamente conjugadas, 59
- Grupo modular, 19
- Período, 15
- Propiedades de homogeneidad de φ , 30
- Región
 - fundamental, 16
 - múltiplemente conexa, 40
 - simplemente conexa, 40
- Retículas, 16
 - formas, 18
 - similares, 18
- Teorema
 - de Dicotomía, 54
 - de Montel, 13
 - de Picard, 13
 - de Rectificación, 58

de Sullivan, 38
Teselación, 17

Valor

asintótico, 37
crítico, 37
omitido, 34