



Centro de Investigación en Matemáticas, A. C.

Geometría Combinatoria en Dimensiones Bajas

T E S I S

que para obtener el grado de

Maestro en Ciencias

con especialidad en

Matemáticas Básicas

P R E S E N T A:

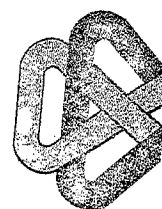
Hernán González Aguilar

DIRECTOR DE TESIS:

Dr. Vladimir Boltyanski

Julio 2001.

Guanajuato, Gto., México



CIMAT
BIBLIOTECA

C I M A T
BIBLIOTECA
016232

Índice General

Introducción	2
1 Resultados Generales	6
1.1 Sistemas de Fijación	6
1.2 Sistemas de Detención	11
1.3 Sistemas de Fijación y el Problema de Iluminación	14
1.4 Sistemas de Detención y el Problema de Sostener	16
1.5 Relaciones entre ϱ_{\min} y σ_{\min}	17
1.6 Cuerpos con Descomposición en Suma Vectorial Directa	18
1.7 Estacks y Outcuts	24
2 ϱ_{\min} y σ_{\min} en Dimensiones Bajas	26
2.1 Valores de ϱ_{\min} y σ_{\min} en \mathbb{R}^2	26
2.2 Casos Realizables de ϱ_{\min} y σ_{\min} en \mathbb{R}^2	27
2.3 Valores de ϱ_{\min} y σ_{\min} en \mathbb{R}^3	28
2.4 Casos Realizables de ϱ_{\min} y σ_{\min} en \mathbb{R}^3	30
3 ϱ_{\max} y σ_{\max} en Dimensiones Bajas	34
3.1 Valores de ϱ_{\max} y σ_{\max} en \mathbb{R}^2	34
3.2 Casos Realizables de ϱ_{\max} y σ_{\max} en \mathbb{R}^2	45
Bibliografía	48

Introducción

La geometría combinatoria es una parte de las matemáticas que surgió en este siglo. Es una materia joven con muchos problemas abiertos, aun en caso del espacio 3-dimensional. Muchos de los problemas tratados en la geometría combinatoria son de enunciados sencillos, pero las soluciones a estos no siempre lo son y algunas veces son sorprendentes.

La geometría combinatoria tiene muchos problemas interesantes y famosos como cualquier rama de las matemáticas, algunos de ellos son:

1. *Problema de Borsuk*, (ver cap. 5 [Bo-Ma-So])
2. *Problema de la Iluminación* (ver página 14) el cual es un problema abierto aun para el caso del espacio 3-dimensional (ver cap. 6 [Bo-Ma-So]),
3. *Problema de sostener* (ver página 16),
4. *Problema (clásico) de Helly*. Existen muchos problemas abiertos con algunas variantes de este resultado (ver, por ejemplo, [Bo1]).

Otro tipo de problemas son los relacionados al estudio de las propiedades de conjuntos de puntos en la frontera de un cuerpo convexo, en particular se tienen los problemas de que este conjunto de puntos fijen o detengan al cuerpo respecto a traslaciones.

En esta tesis nos dedicamos a estudiar, para los cuerpos compactos convexos de dimensión dos y tres, algunos problemas relativos a propiedades de conjuntos de puntos (de su frontera).

Para estudiar éstos problemas consideramos las nociones de *sistema de fijación* y de *sistema de fijación primitivo* para cuerpos compactos convexos en \mathbb{R}^n ; visualmente, $F \subset \text{bd } M$ es un sistema de fijación para el cuerpo compacto convexo M , si es imposible trasladar M en alguna dirección cuando colocamos “clavos fijos” en los puntos del conjunto F . Aquí los “clavos fijos” son suaves, sin fricción. Un sistema de fijación F para el cuerpo compacto convexo M es primitivo si no tiene subsistema propio $F' \subset F$ que también sea un sistema de fijación para M . Estas nociones fueron introducidas por L. Fejes Tóth [Fe]. El investigador los sistemas de fijación para cuerpos compactos convexos en el plano. En particular para un cuerpo compacto convexo $M \subset \mathbb{R}^2$, $\varrho_{\min}(M) = 4$ si M es un paralelogramo y $\varrho_{\min}(M) = 3$ en otro caso. Además, $\varrho_{\max}(M) \leq 6$ para cualquier cuerpo compacto convexo $M \subset \mathbb{R}^2$. El caso $\varrho_{\max}(M) = 6$ es realizado para un hexágono con lados opuestos paralelos, donde F es

el conjunto de sus vértices. B. Tomor [To] y S. Fudali [Fu] probaron que ésta es la única figura plana que tiene esta cota superior.

También consideramos las nociones de *sistema de detención* y *sistema de detención primitivo* para cuerpos compactos convexos en \mathbb{R}^n ; visualmente, $F \subset \text{bd } M$ es un sistema de detención del cuerpo compacto convexo M , si es imposible trasladar M en alguna dirección cuando ponemos “clavos fijos” con fricción en los puntos de F , en contraste con el caso visual de los sistemas de fijación en donde los clavos son “suaves”, sin fricción. Un sistema de detención F para el cuerpo compacto convexo M es primitivo si no tiene subsistema propio $F' \subset F$ que también sea un sistema de detención para M . Estas nociones fueron introducidas por P. Mani [Ma]. El investigó el caso de conjuntos convexos en el plano. En particular, si un cuerpo compacto convexo $M \subset \mathbb{R}^2$ tiene un segmento I en su frontera y además existe un punto frontera regular de M con línea soporte l paralela a I (y $I \cap l = \emptyset$), entonces $\sigma_{\min}(M) = 2$. En otro caso $\sigma_{\min}(M) = 3$.

Para cada uno de los conceptos se consideran las cardinalidades mínimas (ϱ_{\min} , σ_{\min}) y máximas (ϱ_{\max} , σ_{\max}), hacemos uso de las investigaciones acerca de las cotas de estos números realizadas por P. Mani [Ma], L. Fejes Tóth [Fe], B. Tomor [To] y S. Fudali [Fu], B. Bollobás [Be] y V. Boltiansky - H. Martini [Bo-Ma1], B. Grünbaum [Gr], V. Boltyanski - E. Morales [Bo-Mo1] y B. Szökefalvi-Nagy [S-N].

En la literatura revisada los resultados que se presentan acerca de los sistemas de fijación y sistemas de detención son solamente cotas de los funcionales ϱ_{\min} , ϱ_{\max} , σ_{\min} , σ_{\max} , no hay teoremas de clasificación y pocas veces se dan ejemplos concretos. En esta tesis nos dedicamos a dar teoremas de clasificación respecto a los posibles valores de los funcionales y en algunos casos damos ejemplos concretos.

En el capítulo 1 se dan las nociones básicas y los resultados generales ya obtenidos encontrados en la literatura revisada.

En los capítulos 3 y 2 se usan las cotas de los funcionales obtenidas de la literatura para encontrar ejemplos concretos de los casos realizables y se da una clasificación completa de los cuerpos respecto a los valores posibles de estos funcionales. Al final de cada sección se presenta una tabla que resume los resultados obtenidos.

En el capítulo 2 nos ocupamos de la clasificación de los cuerpos respecto a los valores de los funcionales ϱ_{\min} y σ_{\min} en el plano y el espacio \mathbb{R}^3 . En la observación 60 damos una clasificación completa de los cuerpos compactos convexos en \mathbb{R}^3 con respecto al funcional ϱ_{\min} de acuerdo al valor del funcional md del cuerpo y de esta observación obtenemos una clasificación general que se establece en la consecuencia 62.

En el capítulo 3 nos ocupamos de la clasificación de los cuerpos respecto a los valores de los funcionales ϱ_{\max} y σ_{\max} .



El teorema 75 es un teorema que caracteriza a todos los cuerpos compactos convexos en \mathbb{R}^2 para los cuales el valor del funcional σ_{\max} tiene el valor 5.


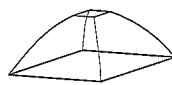
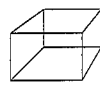
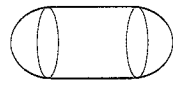
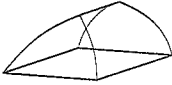
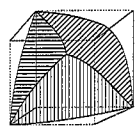
Se obtuvo una generalización de los resultados de L. Fejes Tóth [Fe] al caracterizar todos los cuerpos compactos convexos M , en el plano, para los cuales $\varrho_{\max}(M) = 5$, esto es el corolario 76.

Los teoremas 75, 79, 81, 84 y corolarios 76, 83 dan una clasificación completa de los





cuerpos en el plano con respecto a los valores de sus sistemas de fijación maximales con valores 3, 4 y 5.

Después de considerar las cotas de ϱ_{\min} , ϱ_{\max} , σ_{\min} , σ_{\max} para los casos 2-dimensionales y 3-dimensionales nos dedicamos a encontrar un cuerpo M para el cual se tenga que $\varrho_{\min}(M) = k$ y $\sigma_{\min}(M) = l$, esto no siempre es posible, en caso de no ser posible damos la prueba de ello. Las tablas siguientes resumen los resultados obtenidos para el plano y el espacio:

$\varrho_{\min} \backslash \sigma_{\min}$	3	4
2		
3	Cuerpo suave estrictamente convexo	No es realizable

$\varrho_{\min} \backslash \sigma_{\min}$	4	5	6
2			
3			No es realizable
4	Cuerpo suave estrictamente convexo		No es realizable

De manera análoga, hacemos esto para ϱ_{\max} y σ_{\max} predeterminados. La tabla siguiente resume los resultados para casos maximales en el plano:

$\sigma_{\max} \backslash \varrho_{\max}$	3	4	5	6
3		No realizable	No realizable	No realizable
4	No realizable	Cuerpo suave estrictamente convexo		
5	No realizable	No realizable		No realizable

En el Capítulo 3 consideramos las cardinalidades máximas de los sistemas de fijación y los sistemas de detención, aquí solo examinamos los valores posibles y casos realizables en el plano pues por los resultados de [Bo-Mo2] se tiene que $\varrho_{\max} = \infty$ y $\sigma_{\max} = \infty$; y de los resultados de [Bo-Mo3], no existen cuerpos M_α tales que $\varrho_{\max} = \alpha$ para cada $\alpha \in (1, \infty)$ y con esto vemos que no es posible dar una lista de todas las posibilidades en el espacio \mathbb{R}^3 .

Capítulo 1

Resultados Generales

1.1 Sistemas de Fijación

Supongamos que $M \subset \mathbb{R}^n$ es un cuerpo compacto convexo y $F \subset \text{bd } M$ es un subconjunto de su frontera. Diremos que un vector v no cero *mueve* el interior del cuerpo M fuera del conjunto F si bajo un movimiento continuo de M en la dirección del vector v , el interior del cuerpo móvil no intersecta F , esto es, para cada $t > 0$ el conjunto obtenido de $\text{int } M$ por traslación paralela por un vector tv no tiene puntos en común con F , es decir,

$$(tv + \text{int } M) \cap F = \emptyset \text{ para cada } t > 0.$$

En otras palabras, el vector $v \neq 0$ no mueve al interior de M fuera del conjunto F , si para $t > 0$, suficientemente pequeña, la relación $(tv + \text{int } M) \cap F \neq \emptyset$ es válida.

Definición 1 *El conjunto $F \subset \text{bd } M$ es llamado un sistema de fijación para el cuerpo M si no existe un vector $v \neq 0$ moviendo el interior de M fuera de F .*

Visualmente, F es un sistema de fijación para el cuerpo compacto convexo M , si es imposible trasladar M en alguna dirección cuando colocamos “clavos fijos” en los puntos del conjunto F . Aquí los “clavos fijos” son suaves, sin fricción.

Definición 2 *Un sistema de fijación F para el cuerpo compacto convexo M es primitivo si no tiene subsistema propio $F' \subset F$ que también sea un sistema de fijación para M .*

Observación 3 *Evidentemente, un sistema de fijación de la mínima cardinalidad es primitivo.*

Notación 4 *Denotaremos por $\varrho_{\min}(M)$ al menor entero positivo k tal que M tiene un sistema de fijación consistente de k puntos. Análogamente, por $\varrho_{\max}(M)$ denotamos al*

mayor entero positivo k tal que M tiene un sistema de fijación primitivo que consista de k puntos, y escribimos $\varrho_{\max}(M) = \infty$ si existen sistemas de fijación primitivos para M con cardinalidad (natural) arbitrariamente grande.

El concepto de *sistema de fijación* y el concepto de *sistema de fijación primitivo* para un cuerpo compacto convexo en \mathbb{R}^n fue introducido por L. Fejes Tóth [Fe]. Él investigó los sistemas de fijación para cuerpos compactos convexos en el plano. En particular para un cuerpo compacto convexo $M \subset \mathbb{R}^2$, $\varrho_{\min}(M) = 4$ si M es un paralelogramo y $\varrho_{\min}(M) = 3$ en otro caso. Además, $\varrho_{\max}(M) \leq 6$ para cualquier cuerpo compacto convexo $M \subset \mathbb{R}^2$. El caso $\varrho_{\max}(M) = 6$ es realizado para un hexágono con lados opuestos paralelos, donde F es el conjunto de sus vértices. B. Tomor [To] y S. Fudali [Fu] probaron que ésta es la única figura plana con la que se obtiene esta cota superior.

Ejemplo 5 De las figuras 1.1 y 1.2 es claro que para $M \subset \mathbb{R}^2$ cada sistema de fijación tiene no menos de 3 puntos.

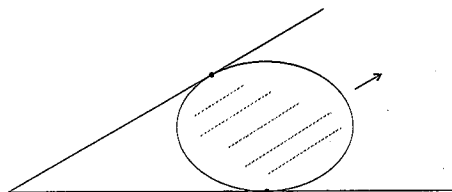


Figura 1.1:

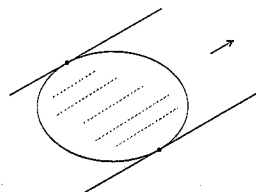


Figura 1.2:

En general, para cualquier cuerpo compacto convexo $M \subset \mathbb{R}^n$ cada sistema de fijación para M tiene no menos de $n + 1$ puntos. En particular, para $M \subset \mathbb{R}^3$ cada sistema de fijación tiene no menos de 4 puntos. También para cualquier conjunto convexo compacto $M \subset \mathbb{R}^2$ cada sistema de fijación primitivo tiene a lo más 6 puntos. En \mathbb{R}^n para $n \geq 3$, existe un cuerpo compacto convexo $M \subset \mathbb{R}^n$ tal que hay un sistema de fijación primitivo para M con cardinalidad (natural) arbitrariamente grande. Estos resultados fueron obtenidos por B. Bollobás [Be] y V. Boltiansky - H. Martini [Bo-Ma1].

Con la ayuda del funcional $\text{md } M$, introducido en [Bo1], los siguientes resultados (teorema 15) fueron establecidos en [Bo-Ma1, Bo-Mo1], dando una cota superior y una cota inferior para el número $\varrho_{\min}(M)$.

Definición 6 *Un punto x de la frontera de un cuerpo convexo $M \subset \mathbb{R}^n$ es un punto regular si existe un único hiperplano soporte de M por el punto x .*

Recordemos el siguiente teorema formulado en [Bon-Fe].

Teorema 7 *El conjunto Γ de todos los puntos frontera regulares de un cuerpo convexo compacto $M \subset \mathbb{R}^n$ es denso en la frontera de M , esto es, $\text{cl } \Gamma = \text{bd } M$.*

Definición 8 ([Bo1]) *Diremos que unos vectores a_0, a_1, \dots, a_m de \mathbb{R}^n son mínimamente dependientes si satisfacen las siguientes condiciones:*

- i) *Ellos son positivamente dependientes, es decir, existen números positivos $\lambda_0, \lambda_1, \dots, \lambda_m$ tales que*

$$\lambda_0 a_0 + \lambda_1 a_1 + \dots + \lambda_m a_m = 0.$$

- ii) *Cualesquiera m elementos de $\{a_0, a_1, \dots, a_m\}$ son linealmente independientes.*

Geoméricamente, los vectores a_0, a_1, \dots, a_m son mínimamente dependientes si estos son los vértices de un simplejo T de dimensión m que tiene al origen $0 \in \mathbb{R}^n$ en su interior relativo.

Definición 9 *Sea $H \subset \mathbb{R}^n$ un sistema (finito o infinito) de vectores no cero. Designamos por $\text{md } H$ al mayor de los enteros m tal que en H hay un sistema de $m + 1$ vectores mínimamente dependientes. Si H no contiene sistemas de vectores mínimamente dependientes, entonces $\text{md } H = 0$.*

Usualmente suponemos que \mathbb{R}^n es un espacio euclideo y consideramos un sistema de vectores H consistente de vectores unitarios, es decir, consideramos $H \subset S^{n-1}$, donde S^{n-1} es la esfera unitaria de \mathbb{R}^n .

Sea $M \subset \mathbb{R}^n$ un cuerpo compacto convexo. El conjunto de todos los vectores unitarios $x \in S^{n-1}$ que son normales exteriores unitarias del cuerpo M en sus puntos regulares lo denotaremos por $H(M)$. Si por ejemplo M es un politopo convexo, entonces $H(M)$ es un subconjunto finito de la esfera unitaria S^{n-1} .

Observación 10 *Notemos que si un cuerpo convexo $M \subset \mathbb{R}^n$ es compacto, entonces el conjunto $H(M)$ no es unilateral, es decir, no existe una semiesfera cerrada $P \subset S^{n-1}$ que contenga a $H(M)$, dicho de otra manera, no existe un vector $p \in S^{n-1}$ tal que $\langle p, x \rangle \leq 0$ para todo $x \in H(M)$.*

Notación 11 Para un cuerpo convexo compacto $M \subset \mathbb{R}^n$, denotaremos por $\text{md } M$ al número $\text{md } H(M)$; es decir, el más grande de los enteros m tal que existen $m + 1$ puntos frontera regulares de M con normales exteriores unitarias mínimamente dependientes.

Recordemos el siguiente teorema, el cual es un corolario inmediato de la definición 8.

Teorema 12 Sea $M \subset \mathbb{R}^n$ un cuerpo convexo compacto, entonces

$$1 \leq \text{md } M \leq n.$$

Para cardinalidades de sistemas de fijación minimales B. Grünbaum encontró cotas inferiores y superiores exactas en función solamente de la dimensión del cuerpo M [Gr]. De hecho, para todo cuerpo convexo compacto $M \subset \mathbb{R}^n$ la siguiente desigualdad se cumple:

$$n + 1 \leq \varrho_{\min}(M) \leq 2n.$$

Estas estimaciones son exactas, es decir, existen cuerpos $M_1, M_2 \subset \mathbb{R}^n$ para los que se cumple que $\varrho_{\min}(M_1) = n + 1$ y $\varrho_{\min}(M_2) = 2n$. Esto lo vemos con el siguiente ejemplo:

Ejemplo 13 Sea $B^n \subset \mathbb{R}^n$ y $P^n \subset \mathbb{R}^n$ la bola y el paralelotopo cuyas dimensiones son iguales a n . Entonces $\varrho_{\min}(B^n) = n + 1$ y $\varrho_{\min}(P^n) = 2n$.

B. Grünbaum formuló, también en [Gr], el interesante problema:

Problema 14 Sea $M \subset \mathbb{R}^n$ un cuerpo convexo, ¿es cierto que $\varrho_{\min}(M) = 2n$ si y sólo si M es un paralelotopo de dimensión n ?

Ahora podemos formular el teorema siguiente que combina unos resultados de los artículos [Bo-Ma1] y [Bo-Mo1].

Teorema 15 Para cualquier cuerpo convexo compacto $M \subset \mathbb{R}^n$ se tiene que

$$n + \frac{n}{\text{md } M} \leq \varrho_{\min}(M) \leq 2n + 1 - \text{md } M.$$

El siguiente teorema de [Bo-Ma1] contiene la respuesta al problema de B. Grünbaum.

Teorema 16 Sea $M \subset \mathbb{R}^n$ un cuerpo compacto convexo. La igualdad $\varrho_{\min}(M) = 2n$ se cumple, si y sólo si, M es un paralelotopo.

Demostración. Si $\text{md } M > 1$, entonces del teorema 15, $\varrho_{\min}(M) \leq 2n - 1$. Por lo tanto la igualdad $\varrho_{\min}(M) = 2n$ implica que $\text{md } M = 1$. Entonces por el teorema de B. Szökefalvi-Nagy (ver [S-N]), M es un paralelotopo.

Recíprocamente, si M es un paralelotopo, entonces $\text{md } M = 1$ y por el teorema 15 tenemos que $\varrho_{\min}(M) = 2n$. ■

Ahora formulamos y demostramos un Lema que será utilizado para construir unos ejemplos en los capítulos 2 y 3 de esta tesis.

Lema 17 Sea $M \subset \mathbb{R}^n$ un cuerpo compacto convexo y $F \subset \text{bd } M$ un conjunto finito que es un sistema de fijación de M . Sea $N \subset \mathbb{R}^n$ otro cuerpo compacto convexo tal que existe un número positivo ε con la propiedad siguiente: Para cada punto $x \in F$, se cumple la igualdad

$$U_\varepsilon(x) \cap M = U_\varepsilon(x) \cap N$$

(donde $U_\varepsilon(x)$ es una vecindad del punto x de radio ε), entonces F también es un sistema de fijación del cuerpo N .

Demostración. Sea $v \in \mathbb{R}^n$ un vector unitario y sea t un número real positivo tal que

$$|t| < \varepsilon \text{ y } (tv + \text{int } M) \cap F \neq \emptyset,$$

esto significa que existe un punto $x \in F$ tal que $x - tv \in \text{int } M$.

Ahora tenemos que $x - tv \in U_\varepsilon(x)$ y por lo tanto $x - tv \in \text{int } N$, es decir, $(tv + \text{int } N) \cap F \neq \emptyset$ y esto es válido para cada $t > 0$ suficientemente pequeña.

Por lo tanto, el vector v no mueve al interior de N fuera del conjunto F , es decir, F es un sistema de fijación para N . ■

Teorema 18 ([Bo-Mo2]) Sea $M \subset \mathbb{R}^n$ un cuerpo compacto convexo. Se cumplen las siguientes afirmaciones:

- i) Si $\text{md } M = 1$ (es decir, M es un paralelotopo n -dimensional), entonces $\varrho_{\max}(M) = 2n$.
- ii) Si $\text{md } M = 2$ entonces

$$\varrho_{\max}(M) \leq \frac{9}{2}n + \alpha_n$$

donde

$$\alpha_n = \begin{cases} 0 & \text{para } n \equiv 0 \pmod{4} \\ -\frac{5}{2} & \text{para } n \equiv 1 \pmod{4} \\ -3 & \text{para } n \equiv 2 \pmod{4} \\ -\frac{11}{2} & \text{para } n \equiv 3 \pmod{4} \end{cases}$$

- iii) Si $\text{md } M \geq 3$, entonces $\varrho_{\max}(M) \leq \infty$.

Todas las estimaciones son exactas, es decir, existen cuerpos convexos compactos $M \subset \mathbb{R}^n$ con el $\text{md } M$ prescrito para los cuales las cotas superiores se cumplen.

Este último resultado junto con las estimaciones del teorema 15 nos da el siguiente teorema.

Teorema 19 Sea $M \subset \mathbb{R}^n$ un cuerpo compacto convexo, entonces

$$\begin{aligned} \varrho_{\min}(M) = \varrho_{\max}(M) = 2n & \quad \text{para } \text{md } M = 1, \\ \frac{3}{2}n \leq \varrho_{\min}(M) \leq \varrho_{\max}(M) \leq \frac{9}{2}n + \alpha_n & \quad \text{para } \text{md } M = 2, \\ n + \frac{n}{\text{md } M} \leq \varrho_{\min}(M) \leq \varrho_{\max}(M) \leq \infty & \quad \text{para } \text{md } M \geq 3, \end{aligned}$$

donde α_n es definida como en el teorema 18.

Para el caso $\text{md } M = 2$ no todo entero contenido entre la cota inferior y la cota superior es la cardinalidad de un sistema de fijación primitivo para el cuerpo M [Bo-Mo2].

1.2 Sistemas de Detención

Ahora supongamos una vez más, que F es un conjunto contenido en la frontera de un cuerpo convexo compacto $M \subset \mathbb{R}^n$. Decimos que un vector no cero v mueve al cuerpo M fuera del conjunto F si para cada $t > 0$ el cuerpo obtenido de M por traslación paralela por el vector tv no tiene puntos en común con F , esto es,

$$(tv + M) \cap F = \emptyset \text{ para cada } t > 0.$$

Definición 20 Un conjunto $F \subset \text{bd } M$ es llamado un sistema de detención del cuerpo M , si no existe un vector $v \neq 0$ que mueva M fuera de F . Un sistema de detención $F \subset \text{bd } M$ es primitivo si no tiene subsistema propio $F' \subset F$ que también sea sistema de detención para M .

En otras palabras, un conjunto $F \subset \text{bd } M$ es un sistema de detención para M si para todo vector $v \in \mathbb{R}^n$, $v \neq 0$, existe un número real $\lambda > 0$ tal que el trasladado $\lambda v + M$ del cuerpo M tiene al menos un punto en común con F .

Observación 21 Evidentemente un sistema de detención de la menor cardinalidad es primitivo.

Visualmente, F es un sistema de detención de M , si es imposible trasladar M en alguna dirección cuando ponemos "clavos fijos" con fricción en los puntos de F , en contraste con el caso visual de los sistemas de fijación en donde los clavos son "suaves", sin fricción.

Notación 22 Denotaremos por $\sigma_{\min}(M)$ al menor entero positivo k tal que M tiene un sistema de detención consistente de k puntos. Análogamente, por $\sigma_{\max}(M)$ denotamos el mayor entero k tal que existe un sistema de detención primitivo para M que contiene k puntos; escribimos $\sigma_{\max}(M) = \infty$ si M tiene sistemas de detención primitivos con cardinalidad (natural) arbitrariamente grande.

Es claro que si un vector no cero v mueve un cuerpo M fuera de un conjunto $F \subset \text{bd } M$, en particular el vector v mueve el interior del cuerpo M fuera del conjunto F . En otras palabras, si un vector $v \neq 0$ no mueve el interior del cuerpo M fuera del conjunto F , entonces v no mueve al cuerpo M fuera de F . Por lo tanto, todo sistema de fijación $F \subset \text{bd } M$ es al mismo tiempo un sistema de detención y así $\sigma_{\min}(M) \leq \varrho_{\min}(M)$. Pero la desigualdad $\sigma_{\max}(M) \leq \varrho_{\max}(M)$ no se cumple para cualquier cuerpo convexo compacto $M \subset \mathbb{R}^n$. Para aclarar esto, consideremos unos ejemplos.

Ejemplo 23 Sea $M \subset \mathbb{R}^2$ un hexágono con lados opuestos paralelos. Entonces $\varrho_{\max}(M) = 6$ (para el sistema de fijación que contiene todos los vértices de M). Al mismo tiempo tenemos que $\sigma_{\max}(M) = 4$ (ver ejemplo 25). Es decir, para este cuerpo M tenemos $\sigma_{\max}(M) < \varrho_{\max}(M)$.

Ejemplo 24 Sea $M \subset \mathbb{R}^3$ un cubo. Entonces $\varrho_{\max}(M) = 6$ (para el sistema de fijación que contiene un punto en el interior de cada cara 2-dimensional de M). Al mismo tiempo, $\sigma_{\max}(M) = 8$ (para el sistema de detención que consiste de todos los vértices de M). Entonces, en este caso, $\sigma_{\max}(M) > \varrho_{\max}(M)$.

La noción de sistema de detención y sistema de detención primitivo para cuerpos compactos convexos en \mathbb{R}^n fue introducida por P. Mani [Ma]. Él investigó el caso de conjuntos convexos en el plano. En particular, si un cuerpo compacto convexo $M \subset \mathbb{R}^2$ tiene un segmento I en su frontera y además existe un punto frontera regular de M con línea soporte l paralela a I (y $I \cap l = \emptyset$), entonces $\sigma_{\min}(M) = 2$ (ver figura 1.3). En otro caso $\sigma_{\min}(M) = 3$.

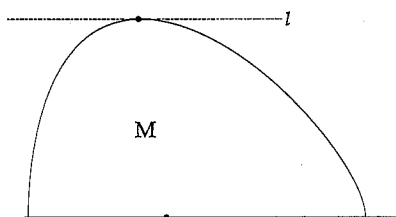


Figura 1.3:

Ejemplo 25 Sea F el conjunto de vértices de un hexágono regular $M \subset \mathbb{R}^2$ y F' es obtenido de F , removiendo dos vértices opuestos. Entonces F es un sistema de fijación primitivo para M , y $F' \subset F$ es un sistema de detención primitivo para M . Además F' tiene la cardinalidad máxima, es decir, en este caso $\sigma_{\max}(M) = 4$.

P. Mani [Ma] probó que para figuras compactas convexas 2-dimensionales la máxima cardinalidad de sistemas de detención primitivos es 5, esto es

$$2 \leq \sigma_{\min}(M) \leq \sigma_{\max}(M) \leq 5,$$

la cota superior es obtenida, por ejemplo, para un pentágono regular.

Ejemplo 26 Sea $M \subset \mathbb{R}^2$ un pentágono regular. Entonces $\sigma_{\max}(M) = 5$ y el conjunto de los vértices de M es un sistema de detención primitivo para M el cual tiene 5 puntos.

Lema 27 Sea $M \subset \mathbb{R}^n$ un cuerpo compacto convexo y $F \subset \text{bd } M$ un conjunto finito que es un sistema de detención del cuerpo M . Sea $N \subset \mathbb{R}^n$ otro cuerpo compacto convexo tal que existe un número positivo ε con la propiedad siguiente: Para cada punto $x \in F$, se cumple la igualdad

$$U_\varepsilon(x) \cap M = U_\varepsilon(x) \cap N$$

(donde $U_\varepsilon(x)$ es una vecindad del punto x de radio ε), entonces F es también un sistema de detención del cuerpo N .

Demostración. La prueba es análoga a la prueba del lema 17. ■

Lema 28 Sea $M \subset \mathbb{R}^{n-1}$ un cuerpo compacto convexo y $F = \{a_1, \dots, a_r\} \subset \text{bd } M$ un conjunto finito que es un sistema de detención del cuerpo M . Supongamos que \mathbb{R} es una línea ortogonal a \mathbb{R}^{n-1} . Entonces $F' = \{a_1 \times 0, \dots, a_r \times 0\}$ es un sistema de detención del conjunto $M' = M \times I$, donde I es el segmento $[-1, 1] \subset \mathbb{R}$.

Demostración. Sea $v \in \mathbb{R}^n$ un vector no cero.

Si $v \parallel \mathbb{R}$, entonces para $t \leq 1$ la intersección $(tv + M') \cap F'$ es no vacía, es decir, el vector v no mueve al cuerpo M' fuera del conjunto F' .

Si v no es paralelo a \mathbb{R} , entonces $v = v_1 + v_2$, donde $v_1 \parallel \mathbb{R}$ y $v_2 \neq 0$ es un vector de \mathbb{R}^{n-1} . En este caso para $\lambda > 0$ suficientemente pequeña, la intersección $(\lambda v_2 + M) \cap F$ es no vacía y por esto $(\lambda'v + M') \cap F' \neq \emptyset$ para λ' suficientemente pequeña.

Esto significa que F' es un sistema de detención para M' . ■

Teorema 29 ([Bo6]) Para cualquier cuerpo compacto convexo $M \subset \mathbb{R}^n$ la siguiente desigualdad se cumple

$$2 \leq \sigma_{\min}(M) \leq \text{md } M + 1.$$

Estas estimaciones son exactas, es decir, existe un cuerpo (por ejemplo un paralelotopo) para el cual la cota inferior se tiene, y existe un cuerpo (por ejemplo, una bola) para el cual la cota superior se cumple.

Para cardinalidades maximales de sistemas de detención primitivos de cuerpos compactos convexos $M \subset \mathbb{R}^n$, $n \geq 3$, se tienen las estimaciones

$$n + 1 \leq \sigma_{\max}(M) \leq \infty,$$

estas estimaciones son exactas.

1.3 Sistemas de Fijación y el Problema de Iluminación

Sea $M \subset \mathbb{R}^n$ un cuerpo convexo. Diremos que una dirección l definida por un vector no cero e ilumina el punto $a \in \text{bd } M$ si, para toda $\lambda > 0$ suficientemente pequeña, el punto $a + \lambda e$ está situado en el interior del cuerpo M . Diremos que las direcciones l_1, l_2, \dots, l_k definidas por unos vectores e_1, e_2, \dots, e_k iluminan la frontera de M , si cada punto $a \in \text{bd } M$ está iluminado por al menos una de estas direcciones.

Problema 30 (de Iluminación) *Encontrar el mínimo número de direcciones que iluminen la frontera de un cuerpo compacto convexo.*

Los siguientes resultados representan una herramienta importante en el estudio de los sistemas de fijación puesto que son criterios alternativos para determinar, por un lado, cuando un sistema de puntos $F \subset \text{bd } M$ en la frontera de un cuerpo convexo $M \subset \mathbb{R}^n$ es un sistema de fijación y, por otra parte, nos ofrecen un criterio para determinar si un sistema de fijación es o no primitivo. Estos criterios están dados en términos de los conceptos de iluminación y sistemas no unilaterales de vectores.

Teorema 31 (BM1) *Un sistema de puntos $F \subset \text{bd } M$ es un sistema de fijación de un cuerpo compacto convexo $M \subset \mathbb{R}^n$, si y sólo si, cada dirección ilumina al menos uno de los puntos de F .*

Demostración.

\Leftarrow) Sea $v \in \mathbb{R}^n$, $v \neq 0$. Consideremos la dirección l definida por el vector v . Por hipótesis, la dirección l ilumina a un punto $a \in F$, es decir,

$$\lambda v + a \in \text{int } M \text{ para } \lambda > 0 \text{ pequeña.}$$

Entonces $a \in \text{int } M + \lambda(-v)$ para $\lambda > 0$ pequeña, por lo tanto, $F \cap (\lambda(-v) + \text{int } M) \neq \emptyset$ para $\lambda > 0$ pequeña. Puesto que esto se cumple para cada $v \neq 0$, esto significa que F es un sistema de fijación para M .

\Rightarrow) Ahora supongamos que F es un sistema de fijación para M . Sea l una dirección definida por el vector $v \neq 0$ en \mathbb{R}^n .

Consideremos el vector $-v$. Como F es un sistema de fijación para M , tenemos que

$$(\lambda(-v) + \text{int } M) \cap F \neq \emptyset \text{ para } \lambda > 0 \text{ pequeña.}$$

Esto implica que existe un punto $a \in \text{bd } M$ tal que $a \in F$ y $a \in \lambda(-v) + \text{int } M$ para $\lambda > 0$ pequeña. Entonces $a + \lambda v \in \text{int } M$ para $\lambda > 0$ pequeña, por lo tanto el punto a es iluminado por la dirección l . ■

Teorema 32 *Sea $F = \{b_1, \dots, b_s\} \subset \text{bd } M$ un sistema de fijación para un cuerpo compacto convexo $M \subset \mathbb{R}^n$. Entonces existe un número real $\varepsilon > 0$ tal que F sigue fijando después de*

un ε -desplazamiento arbitrario. Más preciso, todo sistema $F' = \{b'_1, \dots, b'_s\} \subset \text{bd } M$ que satisfaga

$$\|b'_1 - b_1\| < \varepsilon, \dots, \|b'_s - b_s\| < \varepsilon \quad (1.1)$$

es también un sistema de fijación para M .

Corolario 33 Para todo cuerpo compacto convexo $M \subset \mathbb{R}^n$, existe un sistema de fijación regular $F \subset \text{bd } M$ (es decir, cada punto $a \in F$ es un punto frontera regular) que es minimal y en consecuencia primitivo.

Teorema 34 Sea $M \subset \mathbb{R}^n$ un cuerpo compacto convexo y $F = \{b_1, \dots, b_s\} \subset \text{bd } M$ un sistema de puntos regulares. Denotemos por p_1, p_2, \dots, p_s las normales unitarias exteriores del cuerpo M en los puntos b_1, \dots, b_s , respectivamente. El sistema $\{b_1, \dots, b_s\}$ es un sistema de fijación del cuerpo M , si y sólo si, el sistema de vectores $\{p_1, p_2, \dots, p_s\} \subset S^{n-1}$ no es unilateral.

Demostración.

\Leftarrow) Supongamos que el sistema de vectores $\{p_1, p_2, \dots, p_s\}$ es unilateral, es decir, existe $q \in S^{n-1}$ tal que $\langle q, p_i \rangle \geq 0$ para $i = 1, \dots, s$. Esto quiere decir que $M \subset \Pi_i$, donde

$$\Pi_i = \{x : \langle p_i, x - b_i \rangle \leq 0\}.$$

También el rayo l que parte de b_i en la dirección de q no tiene puntos en común con $\text{int } \Pi_i$ y en consecuencia b_i no es iluminado por la dirección definida por el vector q . Esto último es válido para cada $i = 1, \dots, s$, es decir, la dirección definida por q no ilumina ningún punto de $\{b_1, \dots, b_s\}$. Por lo tanto, del teorema 31, $\{b_1, \dots, b_s\}$ no es un sistema de fijación.

\Rightarrow) Esta parte se demuestra con el razonamiento anterior en sentido opuesto. ■

Teorema 35 Sea $F \subset \text{bd } M$ un sistema de fijación del cuerpo convexo compacto $M \subset \mathbb{R}^n$. el sistema F es primitivo, si y sólo si, para cada punto $a \in F$ existe una dirección que ilumina al punto a y a ningún otro punto de F .

Demostración.

\Rightarrow) Supongamos que F es un sistema de fijación primitivo del cuerpo M . Para todo $a \in F$, el conjunto $B_a = F \setminus \{a\}$ no es sistema de fijación del cuerpo M . Por lo tanto, existe una dirección l que mueve el interior del cuerpo M fuera del conjunto B_a , es decir, existe un vector no cero $e_a \in \mathbb{R}^n$ tal que para cada $\lambda > 0$ se satisface la relación

$$(\text{int } M - \lambda e_a) \cap B_a = \emptyset \quad (1.2)$$

(donde la dirección l es definida por el vector $-e_a$). De aquí concluimos que $b + \lambda e_a$ no pertenece al interior de M para todo $\lambda > 0$ y todo $b \in B_a$. En realidad, si $b + \lambda e_a = c \in \text{int } M$,

entonces $b = c - \lambda e_a$ lo cual contradice (1.2). Luego, ningún punto de B_a es iluminado por e_a . Finalmente, ya que F es un sistema de fijación del cuerpo M , por el teorema 31, el vector e_a ilumina a algún punto de F , este punto debe ser a , ya que e_a no ilumina ningún punto de B_a .

\Leftarrow) Aplicando el razonamiento anterior en sentido inverso se obtiene la otra parte del resultado. ■

1.4 Sistemas de Detención y el Problema de Sostener

Así como existe una relación entre los sistemas de fijación y el problema de iluminación, para los sistemas de detención existe una relación pero con el *problema de sostener*, esto lo trataremos enseguida.

Definición 36 Sea $M \subset \mathbb{R}^n$ un cuerpo compacto convexo y sea $v \in \mathbb{R}^n$ un vector no cero. Un punto frontera a del cuerpo M es sostenido por el cuerpo M con respecto a la dirección del vector v , si $a + \lambda v \in M$ para $\lambda > 0$ suficientemente pequeña.

Problema 37 (de Sostener) Dado un cuerpo compacto convexo $M \subset \mathbb{R}^n$ encontrar el mínimo número de direcciones tal que todo punto frontera del cuerpo M es sostenido por M con respecto a al menos una de las direcciones.

Teorema 38 ([Bo-Ma3]) Sea $M \subset \mathbb{R}^n$ un cuerpo compacto convexo y F un subconjunto de su frontera; el conjunto F es un sistema de detención para el cuerpo M , si y sólo si, con respecto a cualquier dirección hay al menos un punto del conjunto F que es sostenido por el cuerpo M .

Demostración.

\Rightarrow) Supongamos que F es un sistema de detención de M . Entonces para todo vector no cero $v \in \mathbb{R}^n$, la dirección de $-v$ no mueve F fuera de M , es decir, existe un punto $a \in F$ y un número real $\lambda > 0$ tal que $a \in -\lambda v + M$. En otras palabras, $a + \lambda v \in M$ y esto significa que a es sostenido por M con respecto a la dirección del vector v .

\Leftarrow) Supongamos que para toda dirección existe al menos un punto en el conjunto F que es sostenido por M , es decir, para todo vector no cero $v \in \mathbb{R}^n$ existe un punto $a \in F$ tal que $a + \lambda v \in M$ para λ suficientemente pequeña. Entonces $(-\lambda v + F) \cap M \neq \emptyset$ y esto significa que la dirección del vector $-v$ no mueve al conjunto F fuera del cuerpo M . Por lo tanto, el conjunto F es un sistema de detención para el cuerpo M . ■

Corolario 39 Sea $M \subset \mathbb{R}^n$ un cuerpo compacto convexo y $F = \{b_1, \dots, b_s\} \subset \text{bd } M$ un sistema de puntos regulares. Denotamos por p_1, \dots, p_s las normales unitarias exteriores de M en los puntos b_1, \dots, b_s , respectivamente. Si el sistema $\{p_1, \dots, p_s\}$ no es unilateral, entonces $\{b_1, \dots, b_s\}$ es un sistema de detención para el cuerpo M .

En realidad, $\{b_1, \dots, b_s\}$ es un sistema de fijación (por el teorema 34), y entonces $\{b_1, \dots, b_s\}$ es un sistema de detención.

Teorema 40 Sea $F \subset \text{bd } M$ un sistema de detención del cuerpo convexo compacto $M \subset \mathbb{R}^n$. El sistema F es primitivo, si y sólo si, para cada punto $a \in F$ existe una dirección que sostiene al punto a y a ningún otro punto del conjunto F .

Demostración. La prueba es análoga a la prueba del teorema 35. ■

1.5 Relaciones entre ϱ_{\min} y σ_{\min}

Teorema 41 Sea $M \subset \mathbb{R}^n$ un cuerpo compacto convexo, entonces $\sigma_{\min}(M) \leq \varrho_{\min}(M)$.

Demostración. Es inmediato de la observación de que todo sistema de fijación es, él mismo, un sistema de detención. ■

Definición 42 Un cuerpo convexo compacto $M \subset \mathbb{R}^n$ se llama estrictamente convexo si no contiene segmentos en su frontera.

Teorema 43 Sea $M \subset \mathbb{R}^n$ un cuerpo compacto, estrictamente convexo y suave, entonces

$$\sigma_{\min}(M) = \varrho_{\min}(M) = n + 1.$$

Demostración. Sean $e_0, e_1, \dots, e_n \in \mathbb{R}^n$ tales que $e_0 + e_1 + \dots + e_n = 0$ y que los vectores e_1, e_2, \dots, e_n son linealmente independientes.

Para cada $i = 0, 1, \dots, n$, sea a_i el punto de $\text{bd } M$ por donde pasa el plano soporte con normal exterior e_i . El punto a_i es único por ser M estrictamente convexo.

Sea $p \in \mathbb{R}^n$, $p \neq 0$. Por ser e_1, e_2, \dots, e_n linealmente independientes tenemos que $\langle p, e_i \rangle \neq 0$ para algún $i \in \{1, 2, \dots, n\}$. Sin pérdida de generalidad, supongamos que $\langle p, e_1 \rangle \neq 0$.

Demostraremos que existe un índice $j \in \{0, 1, \dots, n\}$ para el cual $\langle p, e_j \rangle < 0$. Supongamos que $\langle p, e_i \rangle \geq 0$ para $i = 0, 1, \dots, n$.

Tenemos que $\langle p, e_1 \rangle > 0$, entonces

$$0 < \langle p, e_0 \rangle + \dots + \langle p, e_n \rangle = \langle p, e_0 + \dots + e_n \rangle = \langle p, 0 \rangle = 0$$

lo que es una contradicción.

Entonces existe un índice j tal que $\langle p, e_j \rangle < 0$, esto implica que $a_j + \lambda p \in \text{int } M \subset M$ para $\lambda > 0$ suficientemente pequeña, (ver figura 1.4). Esto significa que el punto a_j es sostenido por el cuerpo M (y es iluminado) con respecto a la dirección v_p definida por el vector p .

Por lo tanto el conjunto $\{a_0, a_1, \dots, a_n\}$ es un sistema de detención (y también sistema de fijación) para el cuerpo M .

Por otro lado, cada sistema de fijación del cuerpo M tiene no menos de $n + 1$ puntos (y puesto que el cuerpo M es estrictamente convexo, cada uno de sus sistemas de detención tiene no menos de $n + 1$ puntos). ■

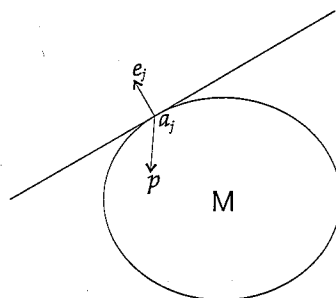


Figura 1.4:

1.6 Cuerpos con Descomposición en Suma Vectorial Directa

Definición 44 Sean M_1, \dots, M_k conjuntos convexos en \mathbb{R}^n . El conjunto de todos los puntos $x_1 + \dots + x_k$ donde $x_i \in M_i$ para $i = 1, \dots, k$, es llamado la suma vectorial (o suma de Minkowski) de los conjuntos convexos M_1, \dots, M_k . Si existen subespacios L_1, \dots, L_k de \mathbb{R}^n tales que $\mathbb{R}^n = L_1 \oplus \dots \oplus L_k$ y para toda $i = 1, \dots, k$ un trasladado de M_i está contenido en L_i , entonces la suma vectorial $M_1 + \dots + M_k$ se dice que es suma vectorial directa y es denotado por $M_1 \oplus \dots \oplus M_k$.

Consideremos un cuerpo compacto convexo $M \subset \mathbb{R}^n$ el cual tiene representación en suma vectorial directa $M = M_1 \oplus \dots \oplus M_k$. Supongamos, sin pérdida de generalidad, para cada i , $i = 1, \dots, k$, que $\text{aff } M_i$ es un subespacio, es decir que $0 \in \text{aff } M_i$; también supongamos que $0 \in \text{int } M$. Denotemos por N_i la suma vectorial directa de todos los $\text{aff } M_j$ excepto $\text{aff } M_i$, es decir

$$N_i = \bigoplus_{j=1; j \neq i}^k \text{aff } M_j$$

y sea $\pi_i : \mathbb{R}^n \rightarrow \text{aff } M_i$ la proyección cuyo núcleo es N_i .

Sea $A = \{b_1, \dots, b_\mu\} \subset \text{bd } M$ un sistema de fijación primitivo de M . Diremos que $b_\alpha \in A$ pertenece al índice i , si $\pi_j(b_\alpha) \in \text{rint } M_j$ para toda j , excepto para i .

Observemos que si b_α pertenece al índice i , entonces $\pi_i(b_\alpha) \in \text{rbd } M_i$, pues $b_\alpha \in \text{bd } M$. También observemos que puede tenerse que algunos puntos b_k de A no pertenezcan a índice i alguno, es decir, que $\pi_i(b_k) \in \text{rbd } M_j$ para más de un índice j . Denotemos, para $i = 1, \dots, k$, por $A_i \subset A$ al conjunto de puntos de A que pertenecen al índice i .

Lema 45 Sea $M \subset \mathbb{R}^n$ un cuerpo compacto convexo el cual tiene representación en suma vectorial directa $M = M_1 \oplus \dots \oplus M_k$. Supongamos que $A = \{b_1, \dots, b_\mu\} \subset \text{bd } M$ es un

sistema de fijación primitivo de M , entonces, todo elemento de A pertenece a algún índice $s \in \{1, 2, \dots, k\}$.

Demostración. Supongamos que existen $i, j \in \{1, 2, \dots, k\}$ y $\alpha \in \{1, 2, \dots, \mu\}$ tales que $\pi_i(b_\alpha) \in \text{rbd } M_i$, $\pi_j(b_\alpha) \in \text{rbd } M_j$. Podemos suponer, sin pérdida de generalidad, que $i = 1, j = 2$ y $\alpha = 1$, es decir,

$$\pi_1(b_1) \in \text{rbd } M_1 \text{ y } \pi_2(b_1) \in \text{rbd } M_2 \quad (1.3)$$

Mostraremos que b_1 es un punto "superfluo" de A . Sea $e = e_1 + \dots + e_k$ un vector no cero en \mathbb{R}^n , donde $e_i \in \text{aff } M_i$, $i = 1, \dots, k$. Notemos que si e es tal que $e_1 = 0$ ó $e_2 = 0$, por (1.3) b_1 no es iluminado por e .

Supongamos que b_1 es iluminado por e y veamos que e ilumina algún otro punto de $A \setminus \{b_1\}$ para contradecir que A es primitivo.

Como b_1 es iluminado por e , $e_1 \neq 0$, también, como A es un sistema de fijación de M , entonces existe $b_\varrho \in A$ tal que b_ϱ es iluminado, en \mathbb{R}^n , por e_1 , es decir, $b_\varrho + \lambda e_1 \in \text{int } M$ para λ suficientemente pequeña.

Tenemos que

$$\pi_1(b_\varrho + \lambda e_1) = \pi_1(b_\varrho) + \lambda e_1 \in \text{rint } M_1. \quad (1.4)$$

Por otra parte

$$\pi_j(b_\varrho + \lambda e_1) = \pi_j(b_\varrho) \in \text{rint } M_j, \quad j = 2, \dots, k,$$

por lo que

$$\pi_2(b_\varrho) + \dots + \pi_k(b_\varrho) \in \text{rint } M_2 + \dots + \text{rint } M_k.$$

Por lo tanto, existe $\lambda_1 > 0$ tal que

$$\pi_2(b_\varrho) + \dots + \pi_k(b_\varrho) + \lambda_1(e_2 + \dots + e_k) \in \text{rint } M_2 + \dots + \text{rint } M_k. \quad (1.5)$$

Si $\lambda_1 > \lambda$, de (1.5) tenemos que

$$\pi_2(b_\varrho) + \dots + \pi_k(b_\varrho) + \lambda(e_2 + \dots + e_k) \in \text{rint } M_2 + \dots + \text{rint } M_k. \quad (1.6)$$

De (1.4) y (1.6) se tiene que

$$b_\varrho + \lambda e = \pi_1(b_\varrho) + \pi_2(b_\varrho) + \dots + \pi_k(b_\varrho) + \lambda(e_1 + \dots + e_k)$$

y

$$\pi_1(b_\varrho) + \pi_2(b_\varrho) + \dots + \pi_k(b_\varrho) + \lambda(e_1 + \dots + e_k) \in \text{rint } M_1 + \dots + \text{rint } M_k$$

y como $\text{rint } M_1 + \dots + \text{rint } M_k = \text{int } M$ entonces $b_\varrho + \lambda e \in \text{int } M$ y esto nos lleva a que A no es primitivo, lo cual es una contradicción. ■

Lema 46 Sea $M \subset \mathbb{R}^n$ un cuerpo compacto convexo el cual tiene representación en suma vectorial directa $M = M_1 \oplus \dots \oplus M_k$. Supongamos que $A = \{b_1, \dots, b_\mu\} \subset \text{bd } M$ es un sistema de fijación primitivo de M . Denotemos por $A_i \subset A$ al conjunto de puntos de A que pertenecen al índice i , $i = 1, \dots, k$. Si $b_i, b_j \in A_\beta$ para algún $\beta \in \{1, \dots, k\}$ entonces $\pi_\beta(b_i) \neq \pi_\beta(b_j)$.

Demostración. Supongamos que existen $b_i, b_j \in A_\beta \subset A$ y $\pi_\beta(b_i) = \pi_\beta(b_j)$. Sea $e = e_1 + \dots + e_k \in \mathbb{R}^n$ un vector no cero, donde $e_i \in \text{aff } M_i$, $i = 1, \dots, k$, el cual ilumina a b_i .

Veamos que e ilumina a b_j . Como b_j tiene índice β , entonces $\pi_s(b_j) \in \text{rint } M_s$, para $s \neq \beta$. Por lo tanto, es posible encontrar $\lambda_0 > 0$ tal que

$$\pi_s(b_j) + \lambda e_s \in \text{rint } M_s, \quad \lambda < \lambda_0, \quad s \neq \beta \quad (1.7)$$

Como $b_i + \lambda e \in \text{int } M$ para $\lambda < \lambda_1$, $\lambda_1 > 0$ suficientemente pequeña, tenemos que

$$\pi_s(b_i + \lambda e) \in \text{rint } M_s, \quad s = 1, 2, \dots, k,$$

en particular, para $s = \beta$,

$$\pi_\beta(b_i + \lambda e) = \pi_\beta(b_i) + \lambda e_\beta \in \text{rint } M_\beta, \quad \lambda < \lambda_1$$

y de la hipótesis

$$\pi_\beta(b_j) + \lambda e_\beta \in \text{rint } M_\beta, \quad \lambda < \lambda_1. \quad (1.8)$$

Sea $\tilde{\lambda} = \min\{\lambda_0, \lambda_1\}$. Puesto que (1.7) y (1.8) son válidas para $\lambda < \tilde{\lambda}$ y M tiene representación en suma vectorial directa, concluimos que

$$b_j + \lambda e \in \text{int } M, \quad \lambda < \tilde{\lambda},$$

es decir, b_j es iluminado por e .

Por el teorema 35 existe una dirección e' que ilumina a b_i y nada más a b_i y por el razonamiento de arriba, e' también ilumina a b_j y esto contradice la elección de e' .

Por lo tanto $\pi_\beta(b_i) \neq \pi_\beta(b_j)$, $i \neq j$. ■

Lema 47 Sea $M \subset \mathbb{R}^n$ un cuerpo compacto convexo el cual tiene representación en suma vectorial directa $M = M_1 \oplus \dots \oplus M_k$. Sea $A \subset \text{bd } M$ un sistema de fijación primitivo de M . Denotemos por $A_i \subset A$ al conjunto de puntos de A que pertenecen al índice i , $i = 1, \dots, k$. Entonces $\pi_i(A_i)$ es un sistema de fijación primitivo de M_i , $i = 1, \dots, k$.

Demostración. Para $i = 1, \dots, k$, sea $\mu_i = |A_i|$. Denotemos a los puntos de $\pi_i(A_i)$ por c_j^i , donde $j = 1, \dots, \delta_i$, del lema 46 tenemos que $\delta_i = \mu_i$, $i = 1, \dots, k$.

Como M tiene representación en suma vectorial directa y del lema (45), existen vectores $d_j^i \in N_i \cap \text{int } M$, $i = 1, \dots, k$, $j = 1, \dots, \mu_i$ tales que

$$A = \{f_j^i = c_j^i + d_j^i, i = 1, \dots, k; j = 1, \dots, \mu_i\}.$$

Veamos que $\pi_i(A_i)$ es un sistema inmovilizador de M_i . Sea $e \in \text{aff } M_i$ un vector no cero. Supongamos que e no ilumina a ninguno de los puntos c_j^i , $j = 1, \dots, \mu_i$ con respecto a $\text{aff } M_i$, veamos que e no ilumina, con respecto a \mathbb{R}^n , a ningún punto f_j^m , $m = 1, \dots, k$; $j = 1, \dots, \mu_m$.

Sea $m = i$ y supongamos que e ilumina a algún f_j^i , digamos que ilumina a $f_{j_0}^i$, es decir, $f_{j_0}^i + \lambda e \in \text{rint } M_i$, ya que $d_j^i \in N_i \cap \text{int } M$, $i = 1, \dots, k$; $j = 1, \dots, \mu_i$ tenemos que $\pi_i(f_{j_0}^i + \lambda e \in \text{rint } M_i)$, es decir, $c_{j_0}^i + \lambda e \in \text{rint } M_i$ y esto contradice la suposición de que ninguno de los c_j^i es iluminado por e .

Para $m \neq i$, $\pi_m(f_j^m + \lambda e) = c_j^m \in \text{rbd } M_m$, $j = 1, \dots, \mu_m$ por lo que f_j^m no puede ser iluminado por e .

Luego, el conjunto A no es un sistema de fijación y esto es una contradicción. Por lo tanto, todo vector no cero $e \in \text{aff } M_i$ ilumina a al menos un punto del conjunto c_j^i , $j = 1, 2, \dots, \mu_i$, es decir $\{c_j^i\}_{j=1}^{\mu_i}$ es un sistema de fijación de M_i .

Veamos que $\pi_i(A_i)$ es primitivo. Supongamos que $\pi_i(A_i)$ no es primitivo, es decir, supongamos que existe $c_{j_0}^i \in \pi_i(A_i)$ tal que $\pi_i(A_i) \setminus \{c_{j_0}^i\}$ es un sistema de fijación de M_i .

Sea $e = e_1 + \dots + e_k \in \mathbb{R}^n$ no cero, donde $e_i \in \text{aff } M_i$, $i = 1, 2, \dots, k$. Si $e_i = 0$, entonces $e \in \ker \pi_i$ y por lo tanto f_j^i , $j = 1, \dots, \mu_i$ no es iluminado por e , así $\pi_i(f_j^i + \lambda e) = c_j^i \in \text{rbd } \pi_i(M)$.

Como A es un sistema de fijación de M , e ilumina a algún punto de $A_i \setminus \{f_{j_0}^i\}$. Si $e_i \neq 0$, existe $w \neq j_0$ tal que $c_w^i + \lambda e_i \in \text{rint } M_i$, ya que $\pi_i(A_i) \setminus \{e_{j_0}^i\}$ es un sistema de fijación. De lo anterior y de que $d_j^i \in N_i \cap \text{int } M$, $c_w^i + \lambda e \in \text{int } M$, es decir, $(c_w^i + d_w^i) + \lambda e = f_w^i + \lambda e \in \text{int } M$, por lo tanto $f_w^i \in A_i \setminus \{f_{j_0}^i\}$ es iluminado por e .

Por lo tanto, todo vector no cero $e \in \mathbb{R}^n$ ilumina a al menos un punto del conjunto $A_i \setminus \{f_{j_0}^i\}$, por lo que $A_i \setminus \{f_{j_0}^i\}$ es un sistema de fijación de M y así A no es primitivo, lo cual es una contradicción. ■

Lema 48 Sea $M \subset \mathbb{R}^n$ un cuerpo compacto convexo el cual tiene representación en suma vectorial directa $M = M_1 \oplus \dots \oplus M_k$. Denotemos por $A_i \subset A$ al conjunto de puntos de A que pertenecen al índice i , $i = 1, \dots, k$. Supongamos, para cada i , $i = 1, \dots, k$, que los conjuntos $A_i \subset \text{rbd } M_i$, son sistemas de fijación primitivos de M_i en el subespacio $\text{aff } M_i$. Sea $\varrho_i = |A_i|$. Entonces existe un sistema de fijación $A \subset \text{bd } M$ con la propiedad de que $|A| = \varrho_1 + \dots + \varrho_k$.

Demostración. Sin pérdida de generalidad supongamos que $\text{aff } M_i$ es un subespacio, es decir, $0 \in \text{aff } M_i$, $i = 1, 2, \dots, k$ y $0 \in \text{int } M$.

Supongamos que $A_i = \{b_j^i \in \text{rbd } M_i, j = 1, 2, \dots, \varrho_i\}$. Sean $a_i \in \text{rint } M_i$, $i = 1, \dots, k$. Denotemos, para $i = 1, 2, \dots, k$; $j = 1, 2, \dots, \varrho_i$ al punto c_j^i por

$$c_j^i = a_1 + \dots + a_k + (b_j^i - a_i) \in \text{bd } M.$$

El conjunto $\{c_j^i\} \subset \text{bd } M$ contiene $\varrho_1 + \dots + \varrho_k$ puntos.

Veamos que $\{c_j^i\}$ es un sistema de fijación primitivo de M . Sea $e = e_1 + \dots + e_k$ un vector no cero de \mathbb{R}^n , donde $e_i \in \text{aff } M_i$, $i = 1, \dots, k$. Como $e \neq 0$, uno de los sumandos es no cero, digamos que $e_i \neq 0$. La dirección del vector e_i ilumina (en $\text{aff } M_i$) a al menos uno de los puntos b_j^i , $j = 1, \dots, \varrho_i$, digamos que ilumina al punto b_1^i , entonces $b_1^i + \lambda e_1 \in \text{rint } M_1$ para λ suficientemente pequeña, es decir, el punto c_1^i es iluminado por la dirección del vector e , por lo tanto, todo vector no cero $e \in \mathbb{R}^n$ ilumina a al menos uno de los puntos c_j^i , esto es, $\{c_j^i\}$ es un sistema de fijación para M .

Ahora veamos que $\{c_j^i\}$ es primitivo, para esto veamos que existe una dirección de movimiento exterior para cada conjunto $A \setminus \{a\}$ con $a \in \{c_j^i\}$.

Sin pérdida de generalidad, supongamos que $a = c_1^1$. Para cada i fijo, tenemos que los puntos c_j^i , $j = 1, \dots, \varrho_i$ pertenecen al índice i , esto lo vemos de que

$$\begin{aligned} \pi_i(c_j^i) &= \pi_i(a_1 + \dots + a_k + (b_j^i - a_i)) \\ &= \pi_i(a_1 + \dots + a_k - a_i) + \pi_i(b_j^i) \\ &= 0 + b_j^i \in \text{rbd } M_i \end{aligned}$$

y de que

$$\pi_t(c_j^i) = a_t \in \text{rint } M_t, \quad t \neq i; \quad j = 1, \dots, \varrho_i.$$

Como A_1 es un sistema de fijación primitivo, existe una dirección l en $\text{aff } M_i$ la cual no ilumina a alguno de los puntos de $A_1 \setminus \{b_1^1\}$, esta misma dirección l considerada en el espacio \mathbb{R}^n no ilumina a alguno de los puntos c_j^1 , $j = 1, \dots, \varrho_1$. Más aún, l no ilumina a ninguno de los puntos c_j^s , $2 \leq s \leq k$; $j = 1, \dots, \varrho_s$ puesto que c_j^s pertenece al índice s , $\pi_s(c_j^s) \in \text{rbd } M_s$ y esto implica que la línea de dirección l que pasa por c_j^s no interseca a $\text{int } M$. Por lo tanto l es una dirección de movimiento exterior de M . Así, A es primitivo. ■

Corolario 49 Sea $M \subset \mathbb{R}^n$ un cuerpo compacto convexo el cual tiene representación en suma vectorial directa $M = M_1 \oplus \dots \oplus M_k$. Entonces

$$\varrho_{\min}(M) \leq \varrho_{\min}(M_1) + \dots + \varrho_{\min}(M_k) \leq \varrho_{\max}(M_1) + \dots + \varrho_{\max}(M_k) \leq \varrho_{\max}(M).$$

Demostración. Consideremos, para cada $i = 1, \dots, k$ sistemas de fijación primitivos $A_i, B_i \subset \text{rbd } M_i$ en $\text{aff } M_i$ tales que $|A_i| = \varrho_{\min}(M_i)$ y $|B_i| = \varrho_{\max}(M_i)$.

Del lema 48 tenemos que existen sistemas de fijación $A, B \subset \text{bd } M$ tales que

$$|A| = \varrho_{\min}(M_1) + \dots + \varrho_{\min}(M_k) \quad \text{y} \quad |B| = \varrho_{\max}(M_1) + \dots + \varrho_{\max}(M_k)$$

entonces

$$\varrho_{\min}(M) \leq \varrho_{\min}(M_1) + \dots + \varrho_{\min}(M_k) \quad \text{y} \quad \varrho_{\max}(M_1) + \dots + \varrho_{\max}(M_k) \leq \varrho_{\max}(M)$$

por lo tanto

$$\varrho_{\min}(M) \leq \varrho_{\min}(M_1) + \cdots + \varrho_{\min}(M_k) \leq \varrho_{\max}(M_1) + \cdots + \varrho_{\max}(M_k) \leq \varrho_{\max}(M).$$

■

Teorema 50 Sea $M \subset \mathbb{R}^n$ un cuerpo compacto convexo el cual tiene representación en suma vectorial directa $M = M_1 \oplus \cdots \oplus M_k$, entonces

$$\varrho_{\min}(M) = \varrho_{\min}(M_1) + \cdots + \varrho_{\min}(M_k)$$

y

$$\varrho_{\max}(M) = \varrho_{\max}(M_1) + \cdots + \varrho_{\max}(M_k).$$

Demostración. Sea $A \subset \text{bd} M$ un sistema de fijación primitivo de M , para cada $i = 1, \dots, k$ denotamos por $A_i \subset A$ al conjunto de puntos de A que pertenecen al índice i , $|A_i| = \mu_i$. Por el lema 45, tenemos que $A = A_1 \cup \cdots \cup A_k$ con $A_i \cap A_j = \emptyset$ si $i \neq j$. Por lo que $\mu = |A| = |A_1| + \cdots + |A_k|$.

Por el lema 46 tenemos que para cada $i = 1, \dots, k$, $|\pi_i(A_i)| = |A_i|$, de donde

$$\mu = \mu_1 + \cdots + \mu_k. \quad (1.9)$$

Por otra parte, del lema 47, tenemos que $\pi_i(A_i)$ es sistema de fijación primitivo de M_i , de donde obtenemos que

$$\varrho_{\min}(M_i) \leq |\pi_i(A_i)| \leq \varrho_{\max}(M_i)$$

es decir,

$$\varrho_{\min}(M_i) \leq \mu_i \leq \varrho_{\max}(M_i). \quad (1.10)$$

De (1.9) y (1.10) tenemos que

$$\varrho_{\min}(M_1) + \cdots + \varrho_{\min}(M_k) \leq \mu \leq \varrho_{\max}(M_1) + \cdots + \varrho_{\max}(M_k).$$

Por lo tanto

$$\varrho_{\min}(M_1) + \cdots + \varrho_{\min}(M_k) \leq \varrho_{\min}(M) \leq \varrho_{\max}(M) \leq \varrho_{\max}(M_1) + \cdots + \varrho_{\max}(M_k).$$

de esta última desigualdad y del corolario (49) obtenemos que

$$\varrho_{\min}(M) = \varrho_{\min}(M_1) + \cdots + \varrho_{\min}(M_k)$$

y

$$\varrho_{\max}(M) = \varrho_{\max}(M_1) + \cdots + \varrho_{\max}(M_k).$$

■

1.7 Estacks y Outcuts

Ahora daremos una descripción directa de los cuerpos compactos convexos indescomponibles $M \subset \mathbb{R}^n$, $n \geq 3$ tales que $\text{md } M = 2$.

Definición 51 Sea $W \subset \mathbb{R}^n$ un paralelotopo y Π una $(n-1)$ -cara de W . Un cuerpo convexo compacto M que satisface la inclusión $\Pi \subset M \subset W$ se dice que es un estack con base Π , si para cada hiperplano L que es paralelo a Π y que pasa por un punto interior de M , la intersección $L \cap M$ es un paralelotopo $(n-1)$ -dimensional cuyas caras son correspondientemente paralelas a las caras de Π . La segunda base de un estack M (es decir, la intersección de M con el hiperplano soporte Π' paralelo a Π) es un paralelotopo que puede tener dimensión $0, 1, \dots, n-1$.

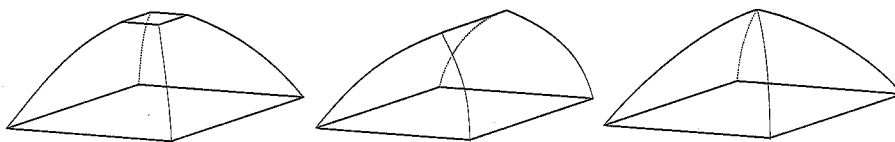
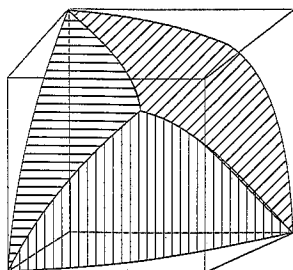


Figura 1.5: Los diferentes tipos de estack en \mathbb{R}^3

Un estack también puede describirse de la siguiente manera. Sean W y Π como en la definición 51 y $[q, a_1], \dots, [q, a_n]$ aristas de W con vértice común $q \in \Pi$, donde $[q, a_i] \subset \Pi$ para $i = 2, \dots, n$. Denotamos por $[q, a_1]$ la arista de W que no está contenida en $\text{aff } \Pi$. Para cada índice $i = 2, \dots, n$ denotamos por Γ_i el paralelogramo con los dos lados $[q, a_1]$, $[q, a_i]$. Además seleccionemos una figura convexa 2-dimensional Φ_i tal que $[q, a_i] \subset \Phi_i \subset \Gamma_i$. Finalmente, denotemos por G_i la viga $\Phi_i \oplus L_i$ donde L_i es el plano $(n-2)$ -dimensional que contiene todas las aristas $[q, a_2], \dots, [q, a_n]$ excepto $[q, a_i]$. Entonces $M = G_2 \cap \dots \cap G_n$ es un estack y todo estack puede ser representado en esa forma.

Definición 52 Sea $W \subset \mathbb{R}^n$ un n -paralelotopo y $[q, a_1], \dots, [q, a_n]$ sus aristas con vértice común q . Para cada par i, j (donde $1 \leq i < j \leq n$) denotamos por Γ_{ij} el paralelogramo generado por $[q, a_i]$ y $[q, a_j]$. Este paralelogramo es una cara 2-dimensional de W . Además tomamos una figura convexa $\Phi_{ij} \subset \Gamma_{ij}$ que contenga a los puntos q, a_i y a_j y denotamos por E_{ij} la viga $\Phi_{ij} \oplus L_{ij}$, donde L_{ij} es el espacio $(n-2)$ -dimensional generado por los vectores $a_1 - q, \dots, a_n - q$ excepto por $a_i - q$ y $a_j - q$. La intersección $\bigcap_{i < j} E_{ij}$ de estas vigas es llamada un outcut con aristas $[q, a_1], \dots, [q, a_n]$.

Un outcut también lo podemos describir de la siguiente manera: consideremos un punto $d \in W$ que no pertenezca a las facetas de W , conteniendo a q y tomemos n arcos $A_1, \dots, A_n \subset W$, donde A_i conecta a los puntos d y a_i . Estos arcos están obligados a tomarse de la manera siguiente. Para $i < j$, denotando por $\pi_{ij} : \mathbb{R}^n \rightarrow \text{aff } \{q, a_i, a_j\}$ la


 Figura 1.6: Outcut en \mathbb{R}^3

proyección paralela a L_{ij} , entonces la curva $\pi_{ij}(A_i \cup A_j) \cup [q, a_i] \cup [q, a_j]$ acota una figura convexa $\Phi_{ij} \subset \text{aff}\{q, a_i, a_j\}$. Bajo estas denotaciones,

$$\text{conv} \left(\left(\bigcup_{i,j} \Phi_{ij} \right) \cup \left(\bigcup_i A_i \right) \right)$$

es un outcut y todo outcut puede ser representado en esa forma.

Hemos descrito sólo dos tipos de cuerpos compactos $M \subset \mathbb{R}^n$ con $\text{md } M = 2$. En el artículo [Bo5] todos los cuerpos con $\text{md } M = 2$ son indicados. Además de los estacks y los outcuts, hay otros tipos de cuerpos convexos con $\text{md } M = 2$. Ellos son los estack-outcuts y los politopos particulares cuatro-dimensionales. Pero en el espacio dos-dimensional y tres-dimensional hay sólo stacks y outcuts, es decir, los otros dos tipos de cuerpos con $\text{md } M = 2$ sólo existen en \mathbb{R}^n , $n \geq 4$. Como en los capítulos siguientes consideramos solo dimensiones bajas (es decir, los espacios \mathbb{R}^n con $n = 2$ o $n = 3$), consideramos aquí sólo estacks y outcuts. En realidad en [Bo5] es demostrado que cada cuerpo convexo compacto $M \subset \mathbb{R}^3$ con $\text{md } M = 2$ es un estack o un outcut. También, en \mathbb{R}^2 , cada cuerpo convexo compacto con $\text{md } M = 2$ es un estack dos-dimensional, es decir, una figura compacta distinta de un paralelogramo. Así, en \mathbb{R}^2 y \mathbb{R}^3 no hay cuerpos con $\text{md } M = 2$ de los últimos dos tipos.

Capítulo 2

ϱ_{\min} y σ_{\min} en Dimensiones Bajas

Los resultados siguientes son consecuencia de los teoremas formulados en el capítulo 1. También damos unos ejemplos nuevos.

2.1 Valores de ϱ_{\min} y σ_{\min} en \mathbb{R}^2

Teorema 53 Para todo cuerpo compacto convexo $M \subset \mathbb{R}^2$, se tiene que

$$2 + \frac{2}{\text{md } M} \leq \varrho_{\min}(M) \leq 2 \cdot 2 + 1 - \text{md } M,$$

es decir

$$3 \leq \varrho_{\min}(M) \leq 4.$$

Teorema 54 Sea $M \subset \mathbb{R}^2$ un cuerpo compacto convexo. Entonces

$$\varrho_{\min}(M) = \begin{cases} 4 & \text{si } M \text{ es un paralelogramo} \\ 3 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

Teorema 55 Para todo cuerpo convexo $M \subset \mathbb{R}^2$, se tiene que

$$2 \leq \sigma_{\min}(M) \leq \text{md } M + 1,$$

es decir

$$2 \leq \sigma_{\min}(M) \leq 3.$$

2.2 Casos Realizables de ϱ_{\min} y σ_{\min} en \mathbb{R}^2

En esta sección consideramos todas las combinaciones de $\varrho_{\min}(M)$ y $\sigma_{\min}(M)$ que pueden ser realizables conjuntamente en el plano \mathbb{R}^2 .

Al considerar todos los posibles valores de ϱ_{\min} y σ_{\min} para un cuerpo compacto convexo $M \subset \mathbb{R}^2$, tenemos los siguientes cuatro casos posibles. En la columna de la derecha indicamos la realizabilidad de estos casos.

Caso	Valores Posibles	Realizable
I	$\varrho_{\min}(M) = 3, \sigma_{\min}(M) = 2$	Si
II	$\varrho_{\min}(M) = 3, \sigma_{\min}(M) = 3$	Si
III	$\varrho_{\min}(M) = 4, \sigma_{\min}(M) = 2$	Si
IV	$\varrho_{\min}(M) = 4, \sigma_{\min}(M) = 3$	No

Ahora vamos con las descripciones de cada uno de los casos

- I) Consideremos el cuerpo de la figura 2.1. Por tener un par de caras paralelas tenemos que $\sigma_{\min}(M) = 2$ y por no ser un paralelogramo tenemos que $\varrho_{\min}(M) = 3$.

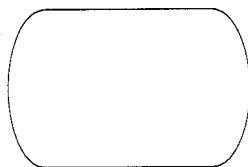




Figura 2.1: Ejemplo para el caso I en \mathbb{R}^2

- II) Del teorema 43 vemos que este caso es realizable para cualquier cuerpo suave estrictamente convexo.
- III) Este caso es realizable para un paralelogramo M . En realidad, por el teorema 54, $\varrho_{\min}(M) = 4$ y por tener un par de caras paralelas, $\sigma_{\min}(M) = 2$.
- IV) No es realizable, pues $\varrho_{\min}(M) = 4$ solo para M un paralelogramo y para este caso $\sigma_{\min}(M) = 2$.

Lo anterior lo podemos resumir en la siguiente tabla

$\sigma_{\min} \backslash \varrho_{\min}$	3	4
2		
3	Cuerpo suave estrictamente convexo	No es realizable

2.3 Valores de ϱ_{\min} y σ_{\min} en \mathbb{R}^3

Teorema 56 Sea $M \subset \mathbb{R}^3$ un cuerpo compacto convexo, entonces

$$1 \leq \text{md } M \leq 3.$$

Teorema 57 Para un cuerpo compacto, convexo $M \subset \mathbb{R}^3$ tenemos la desigualdad

$$3 + \frac{3}{\text{md } M} \leq \varrho_{\min}(M) \leq 2 \cdot 3 + 1 - \text{md } M,$$

es decir,

$$4 \leq \varrho_{\min}(M) \leq 6.$$

Teorema 58 Sea $M \subset \mathbb{R}^3$ un cuerpo compacto convexo. Supongamos que $M = M_1 \oplus \dots \oplus M_k$ es la suma directa de k conjuntos convexos compactos ($k \leq 3$), entonces

$$\varrho_{\min}(M) = \varrho_{\min}(M_1) + \dots + \varrho_{\min}(M_k).$$

Teorema 59 Si $M \subset \mathbb{R}^3$ es un paralelepípedo, entonces $\varrho_{\min}(M) = 6$.

Demostración. Como M es un paralelepípedo, este se puede descomponer como suma directa de 3 segmentos (en posición general), M_1, M_2, M_3 , i.e.,

$$M = M_1 \oplus M_2 \oplus M_3,$$

y del teorema 58 tenemos que

$$\varrho_{\min}(M) = \varrho_{\min}(M_1) + \varrho_{\min}(M_2) + \varrho_{\min}(M_3) = 2 + 2 + 2 = 6.$$

■

Observación 60 De los teoremas previos tenemos que para un cuerpo compacto convexo $M \subset \mathbb{R}^3$:

Si $\text{md } M = 1$ entonces $\varrho_{\min}(M) = 6$.

Si $\text{md } M = 2$ entonces $\varrho_{\min}(M) = 5$.

Si $\text{md } M = 3$ entonces $\varrho_{\min}(M) = 4$.

De lo anterior podemos notar que para encontrar cuerpos convexos M para un valor determinado de $\varrho_{\min}(M)$ basta considerar el valor del funcional md de este cuerpo.

Teorema 61 Sea $M \subset \mathbb{R}^3$ un cuerpo compacto convexo con frontera "suave", entonces $\varrho_{\min}(M) = 4$.

Demostración. Si $\text{md } M = 1$, entonces M es un paraleletopeo, y en este caso no tiene frontera "suave".

Si $\text{md } M = 2$, entonces M es un estack o un outcut y en ambos casos M tiene puntos que no son regulares, es decir, M no es un cuerpo con frontera suave.

Entonces $\text{md } M = 3$ y por lo tanto, $\varrho_{\min}(M) = 4$ (ver observación 60).

Notemos que otra prueba la podemos deducir del teorema 43. ■

De lo anterior tenemos la siguiente

Consecuencia 62 $\varrho_{\min}(M) = 7 - \text{md } M$ para todo cuerpo compacto convexo $M \subset \mathbb{R}^3$.
Más detalladamente:

$\varrho_{\min}(M) = 6$ si y sólo si M es un paralelepípedo.

Si M no es un paralelepípedo, entonces,

$\varrho_{\min}(M) = 5$ si y sólo si M es descomponible o M es un estack o M es un outcut,

$\varrho_{\min}(M) = 4$ para los otros cuerpos 3-dimensionales.

Teorema 63 Sea $M \subset \mathbb{R}^3$ un cuerpo compacto convexo, entonces

$$2 \leq \sigma_{\min}(M) \leq 4.$$

Teorema 64 Si $M \subset \mathbb{R}^3$ es un paralelepípedo, entonces $\sigma_{\min}(M) = 2$.

Demostración. Basta observar que si consideramos un par de caras paralelas y un punto interior en cada una de ellas obtenemos un sistema de detención para M . Claramente un solo punto no es sistema de detención, así, $\sigma_{\min}(M) = 2$. ■

Teorema 65 Sea $M \subset \mathbb{R}^3$ un cuerpo compacto convexo. Supongamos que $M = M_1 \oplus \dots \oplus M_k$ es la suma directa de k conjuntos convexos compactos ($k \leq 3$), entonces

$$\sigma_{\min}(M) = \min \{ \sigma_{\min}(M_1), \dots, \sigma_{\min}(M_k) \}.$$

Demostración. Si $k = 3$, entonces M es un paralelotopo, es decir, $M = M_1 \oplus M_2 \oplus M_3$ donde M_1, M_2, M_3 son segmentos. En este caso $\sigma_{\min}(M) = 2$ y $\sigma_{\min}(M_i) = 2$ para $i = 1, 2, 3$ (ver teorema 64). Esto significa que la afirmación del teorema se cumple.

Si $k = 2$, entonces $M = M_1 \oplus M_2$ donde M_1 es un segmento y M_2 es una figura dos-dimensional distinta de un paralelogramo. Como M tiene dos bases paralelas $a \oplus M_2$ y $b \oplus M_2$ (donde a, b son extremos del segmento M_1) tenemos que $\sigma_{\min}(M) = 2$. También $\sigma_{\min}(M_1) = 2$, y por lo tanto, la afirmación del teorema se cumple.

En el caso $k = 1$ el teorema es trivial. ■

Teorema 66 Sea $M \subset \mathbb{R}^3$ un cuerpo suave y estrictamente convexo, entonces

$$\sigma_{\min}(M) = \varrho_{\min}(M) = 4.$$

Ahora daremos unas definiciones que nos serán útiles para los ejemplos de la sección siguiente.

Definición 67 Para un cuerpo convexo $T \subset \mathbb{R}^3$ definimos el cuerpo paralelo exterior T_δ del cuerpo T como la unión de todas las esferas sólidas de radio δ cuyos centros se encuentran en puntos de T .

Observación 68 Se puede verificar que el cuerpo paralelo exterior T_δ se obtiene mediante la suma de Minkowski del cuerpo T con una bola con centro en el origen, es decir, $T_\delta = T + B_\delta$, donde B_δ es la bola de radio δ y centro en el origen.

Observación 69 Dado un cuerpo compacto convexo $T \subset \mathbb{R}^n$, su cuerpo paralelo exterior T_δ tiene frontera "suave".

2.4 Casos Realizables de ϱ_{\min} y σ_{\min} en \mathbb{R}^3

En esta sección consideramos todas las combinaciones posibles de $\varrho_{\min}(M)$ y $\sigma_{\min}(M)$ que pueden ser realizables conjuntamente para un cuerpo compacto convexo M , en el espacio \mathbb{R}^3 .

Al considerar los diferentes valores de ϱ_{\min} y de σ_{\min} para un cuerpo compacto convexo $M \subset \mathbb{R}^3$, tenemos los siguientes nueve casos posibles. En la columna de la derecha indicamos la realizabilidad de estos casos.

Caso	Valores Posibles	Realizable
I	$\varrho_{\min}(M) = 4, \sigma_{\min}(M) = 2$	Si
II	$\varrho_{\min}(M) = 4, \sigma_{\min}(M) = 3$	Si
III	$\varrho_{\min}(M) = 4, \sigma_{\min}(M) = 4$	Si
IV	$\varrho_{\min}(M) = 5, \sigma_{\min}(M) = 2$	Si
V	$\varrho_{\min}(M) = 5, \sigma_{\min}(M) = 3$	Si
VI	$\varrho_{\min}(M) = 5, \sigma_{\min}(M) = 4$	Si
VII	$\varrho_{\min}(M) = 6, \sigma_{\min}(M) = 2$	Si
VIII	$\varrho_{\min}(M) = 6, \sigma_{\min}(M) = 3$	No
IX	$\varrho_{\min}(M) = 6, \sigma_{\min}(M) = 4$	No

Tenemos las siguientes descripciones para cada uno de los casos:

- I) Este caso sí es realizable. Sea M el cuerpo paralelo exterior a un paralelepípedo (ver figura 2.2). Para éste, por tener un par de caras paralelas, $\sigma_{\min}(M) = 2$ y por tener frontera "suave", $\varrho_{\min}(M) = 4$ (teorema 61).

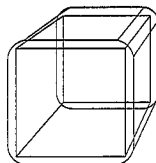


Figura 2.2: Ejemplo para el caso I en \mathbb{R}^3

- II) Este caso si es realizable. Consideremos un cilindro (finito) y le "pegamos" semiesferas en las "tapas", como muestra la figura 2.3. Este cuerpo tiene la frontera "suave", por

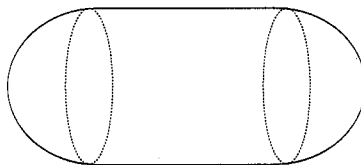


Figura 2.3: Ejemplo para el caso II en \mathbb{R}^3

lo tanto $\varrho_{\min}(M) = 4$. Además consideremos un cilindro $N = B^2 \oplus I$ donde B^2 es un disco 2-dimensional e I es el segmento $[-1, 1]$ en la línea \mathbb{R} ortogonal a B^2 . Sean $a, b, c \in B^2$ tres puntos los cuales forman un sistema de detención para B^2 . Por el lema 28 los tres puntos $a \oplus 0, b \oplus 0, c \oplus 0$ forman un sistema de detención minimal para N , ahora, por el lema 27, estos tres puntos forman un sistema de detención para el cuerpo de la figura 2.3.

- III) Tenemos que si M es suave y estrictamente convexo (que no contiene segmentos en su frontera) entonces $\varrho_{\min}(M) = \sigma_{\min}(M) = 4$ (teorema 66).
- IV) Este caso lo obtenemos con un estack M como el de la figura 2.4.

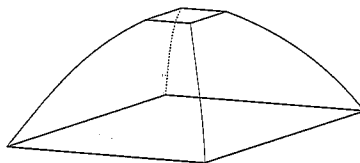


Figura 2.4: Ejemplo para el caso IV en \mathbb{R}^3

Por tener un par de caras paralelas, tenemos $\sigma_{\min}(M) = 2$, y por ser un estack, $\text{md } M = 2$ y por lo tanto $\varrho_{\min}(M) = 5$ (ver observación 60).

- V) Consideremos el estack M de la figura 2.5.

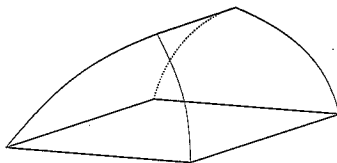


Figura 2.5: Ejemplo para el caso V en \mathbb{R}^3

Para los estack tenemos que $\text{md } M = 2$, por lo tanto $\varrho_{\min}(M) = 5$, también $\sigma_{\min}(M) = 3$. En realidad, consideremos un cilindro $N = P + I$ donde P es la sección ortogonal de M como en la figura 2.6.

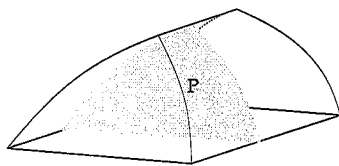



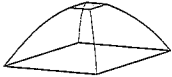



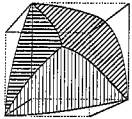
Figura 2.6:

Para P tenemos $\sigma_{\min}(P) = 3$, entonces por lema 28 $\sigma_{\min}(N) = 3$. Aplicando el lema 27 obtenemos que $\sigma_{\min}(M) = 3$.

- VI) Este caso es realizable con un outcut M , por ser outcut, tenemos que $\text{md } M = 2$ y por lo tanto $\varrho_{\min}(M) = 5$, también $\sigma_{\min}(M) = 4$. Consideremos la definición 52 con

- $n = 3$. Denotemos por a_{ij} un punto interior de la figura Φ_{ij} ; así obtenemos tres puntos a_{12}, a_{13}, a_{23} en la frontera del outcut. Tomemos el punto d como en la definición 52. Entonces los cuatro puntos $a_{12}, a_{13}, a_{23}, d$ forman un sistema de detención para el outcut M , y así $\sigma_{\min}(M) = 4$.
- VII) Este es realizable para un paralelepípedo, pues $\varrho_{\min}(M) = 6$ si y sólo si M es un paralelepípedo y para los paralelepípedos $\sigma_{\min}(M) = 2$ (considerando un par de caras opuestas y tomando un punto en el interior de cada una de ellas).
- VIII) No es realizable, pues $\varrho_{\min}(M) = 6$ si y sólo si M es un paralelepípedo y en este caso $\sigma_{\min}(M) = 2$.
- IX) No es realizable, pues $\varrho_{\min}(M) = 6$ si y sólo si M es un paralelepípedo y en este caso $\sigma_{\min}(M) = 2$.

Lo anterior lo podemos resumir en la siguiente tabla

$\varrho_{\min} \backslash \sigma_{\min}$	4	5	6
2			
3			No es realizable
4	Cuerpo suave estrictamente convexo		No es realizable

Capítulo 3

ϱ_{\max} y σ_{\max} en Dimensiones Bajas

3.1 Valores de ϱ_{\max} y σ_{\max} en \mathbb{R}^2

Hemos visto que en \mathbb{R}^3 la desigualdad $\sigma_{\max}(M) \leq \varrho_{\max}(M)$ no se cumple (ver ejemplo 24). Ahora veamos, con un ejemplo, que no es válida en el plano.

Ejemplo 70 Consideremos una figura M formada por un arco de parábola "seccionado" como la parte sombreada en la figura 3.1. Donde el segmento $[b, c]$ es paralelo a la línea

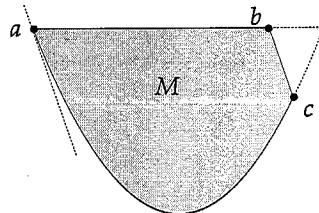


Figura 3.1:

tangente de la parábola en el punto a.

En la figura 3.2(a) vemos que, dada una dirección cualquiera siempre es sostenido al menos uno de los puntos a, b, c, d . Además cada una de las direcciones l_1, l_2, l_3, l_4 sostiene a un único punto de entre $\{a, b, c, d\}$. Por lo tanto el conjunto $\{a, b, c, d\}$ es un sistema de detención primitivo y este sistema es maximal, como M tiene solo tres puntos angulares y tenemos que $\sigma_{\max}(M) \neq 5$ (ver teorema 75). Así $\sigma_{\max}(M) = 4$.

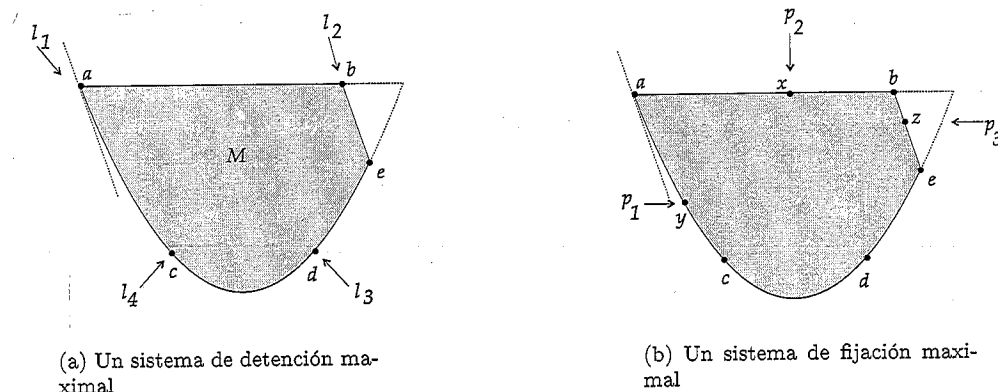


Figura 3.2:

Por otra parte, en la figura 3.2(b) vemos que, dada una dirección cualquiera siempre es iluminado al menos uno de los puntos x, y, z . Además cada una de las direcciones p_1, p_2, p_3 ilumina a un único punto de entre $\{x, y, z\}$. Por lo tanto el conjunto $\{x, y, z\}$ es un sistema de fijación primitivo. Este sistema es maximal. Realmente, sea $F \subset \text{bd } M$ un sistema de fijación. Entonces hay un punto $x \in F$ el cual es iluminado por la dirección p_2 , es decir, x es un punto en el interior relativo del segmento $[a, b]$. También hay dos puntos $y, z \in F$ iluminados por las direcciones p_1 y p_3 (el punto z puede colocarse en el segmento $[b, e]$ o abajo). Pero $\{x, y, z\}$ ya es un sistema de fijación. Por lo tanto $\varrho_{\max}(M) = 3$.

Así obtenemos que para esta figura $4 = \sigma_{\max}(M) > \varrho_{\max}(M) = 3$.

Otro ejemplo con estos mismos valores lo podemos obtener de la figura 3.1 al considerar un corte por un segmento paralelo al segmento $[a, b]$, como podemos ver en la figura 3.3.

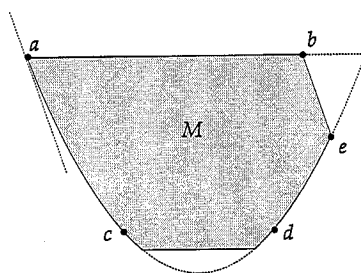


Figura 3.3:

Teorema 71 Sea $M \subset \mathbb{R}^2$ un cuerpo estrictamente convexo. Un conjunto $F \subset \text{bd } M$ es un sistema de fijación del cuerpo M , si y sólo si, F es un sistema de detención del cuerpo M .

Demostración.

\Rightarrow) En la sección 1.2, vimos que todo sistema de fijación es también un sistema de detención.

\Leftarrow) Sea F un sistema de detención del cuerpo M . Por el teorema 38 dada una dirección $v \in \mathbb{R}^2$, esta dirección sostiene a al menos un punto del conjunto F , digamos al punto $a \in F$. Esto significa que $a + \lambda v \in M$, para $\lambda > 0$ suficientemente pequeña. Pero como M es estrictamente convexo (no contiene segmentos en su frontera) $a + \lambda v \notin \text{bd } M$, es decir $a + \lambda v \in \text{int } M$. Por lo tanto la dirección v ilumina al punto $a \in F$, y por el teorema 31, el conjunto F es un sistema de fijación del cuerpo M . ■

Corolario 72 Del teorema anterior tenemos que para cualquier cuerpo compacto estrictamente convexo $M \subset \mathbb{R}^2$ un conjunto $F \subset \text{bd } M$ es un sistema de fijación primitivo, si y sólo si, F es un sistema de detención primitivo del cuerpo M .

Corolario 73 Para cualquier cuerpo $M \subset \mathbb{R}^2$ compacto estrictamente convexo se cumple que $\sigma_{\max}(M) = \varrho_{\max}(M)$.

Ejemplo 74 Consideremos un triángulo de Reuleaux M (ver figura 3.4) para este cuerpo

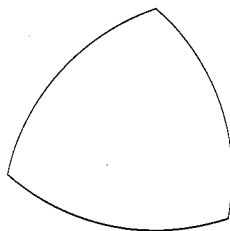


Figura 3.4: Triángulo de Reuleaux

M , tenemos que $\varrho_{\max}(M) = \sigma_{\max}(M) = 3$.

Por ser M estrictamente convexo, del corolario 73 obtenemos que $\varrho_{\max}(M) = \sigma_{\max}(M)$. Dos puntos no son suficientes para fijar al triángulo de Reuleaux M (ya que $\varrho_{\max}(M) \geq \varrho_{\min}(M) \geq 3$ para cada $M \subset \mathbb{R}^2$), por lo tanto necesitamos al menos tres puntos. Después, para cada lado de M hay una dirección que ilumina solo puntos interiores de este lado (ver Figura 3.5). Entonces, si F es un sistema de fijación del cuerpo M , cada lado contiene un punto del sistema de fijación F . Esto significa que F contiene tres puntos, un punto en cada lado del cuerpo M . Pero estos tres puntos forman un sistema de fijación. Cualquier otro punto es superfluo. Por todo lo anterior concluimos que $\varrho_{\max}(M) = 3$ y entonces $\varrho_{\max}(M) = \sigma_{\max}(M) = 3$.

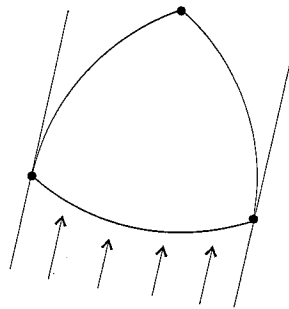


Figura 3.5: Sólo los puntos interiores de un lado son iluminados.

Teorema 75 Sea $M \subset \mathbb{R}^2$ una figura compacta y convexa. La igualdad $\sigma_{\max}(M) = 5$ se cumple si y sólo si hay un polígono con 5 vértices inscrito en M tal que, para cada par b, e de sus vértices (no vecinos) hay dos líneas soporte paralelas de M a través de b y e las cuales no tienen otros puntos en común con M , excepto b y e , respectivamente, ver figura 3.6.

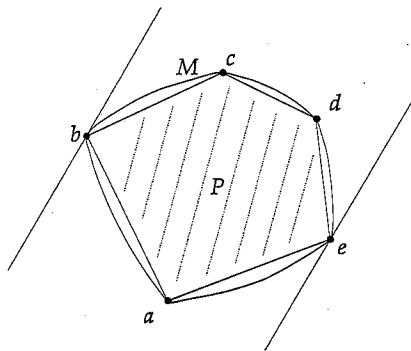


Figura 3.6:

Demostración.

\implies) Sea $F \subset bd M$ un sistema de detención para F el cual consiste de cinco puntos a, b, c, d, e dispuestos en orden cíclico.

Denotaremos por P_1 el semiplano con la frontera (be) que contiene al punto a y por P_2 el semiplano opuesto. Sean l_1, l_2 los rayos emanados de b y e respectivamente, los cuales toquen la figura M y estén contenidos en el semiplano P_1 .

Si l_1 y l_2 no tienen ningún punto en común, tenemos los casos que aparecen en las figuras 3.7(a) y 3.7(b).

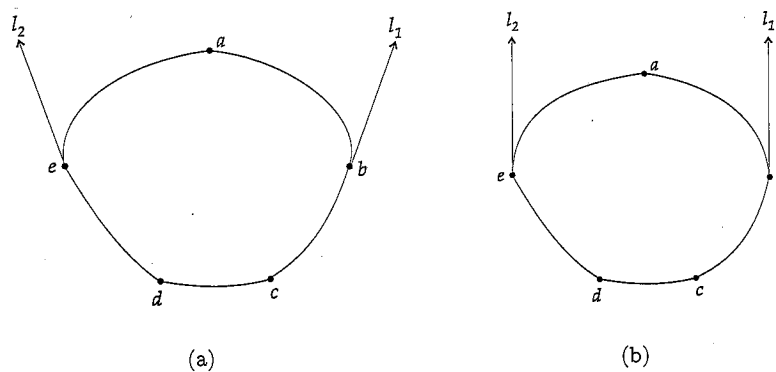


Figura 3.7:

En el caso de la figura 3.7(b), cada dirección fuera de la banda formada por l_1 y l_2 (figura 3.7(b)) ilumina (y sostiene) al punto b o al punto e . Entonces para iluminar solo al punto c (o d) es necesario tomar (ver figura 3.7(b)) la dirección l_1 (o l_2), pero esta dirección sostiene a los dos puntos c, d y por esto no es posible sostener solo al punto c (o solo al punto d). Esto significa que el sistema de detención $\{a, b, c, d, e\}$ en la figura 3.7(b) no es primitivo. Análogamente en el caso de la figura 3.7(a). Así los rayos l_1 y l_2 tienen la posición como muestra la figura 3.8.

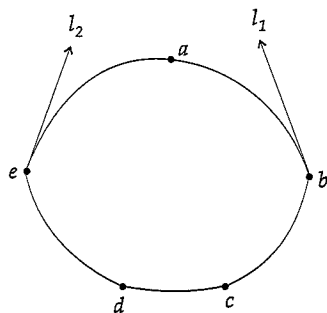


Figura 3.8:

Consideremos ahora los rayos m_1 y m_2 emanados de b y e respectivamente, los cuales tocan a M y están contenidos en el semiplano P_2 .

La posición de m_1 y m_2 como muestra la figura 3.9 no es posible, pues en este caso no es posible sostener solo al punto a , entonces la figura M está colocada en una banda entre dos líneas paralelas a través de b y e (figura 3.10).

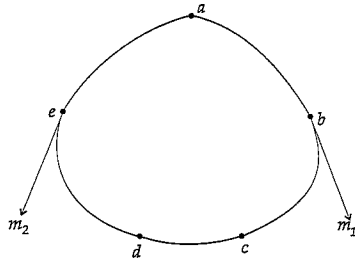


Figura 3.9:

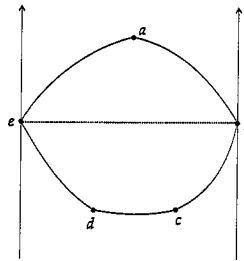


Figura 3.10:

También es posible buscar esta banda de tal manera que los puntos c y d estén colocados dentro de esta banda (en caso contrario, no es posible sostener solo al punto a , ver figura

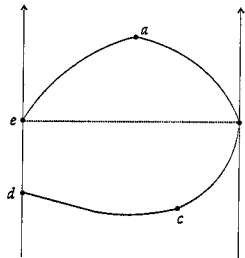


Figura 3.11:

3.11).

Además, si consideramos dos puntos no vecinos b , d , entonces también hay una banda entre dos líneas paralelas a través de b y d tal que el cuerpo M está colocado en ésta banda (figura 3.12).

Por lo tanto, b es un punto frontera de M el cual no es regular. Con un razonamiento análogo vemos que los puntos a , b , c , d , e no son puntos frontera regulares.

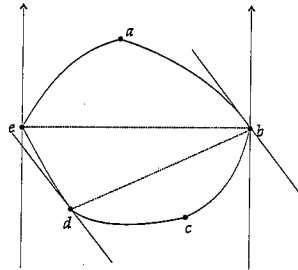


Figura 3.12:

Ahora vemos que la figura M está colocada en un cuadrángulo como en la figura 3.13.

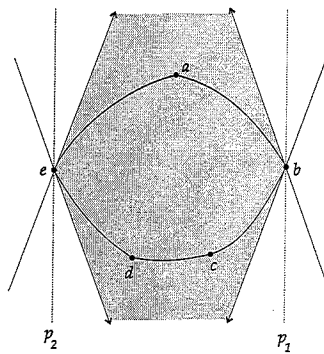


Figura 3.13:

Por lo tanto existen dos líneas soporte paralelas p_1 y p_2 a través de b y e respectivamente, las cuales no tienen otros puntos en común con el cuerpo M , excepto b y e .

\Leftarrow) Si $F = \{a, b, c, d, e\}$ es un sistema de puntos en la frontera de M que cumplen las hipótesis del teorema, es posible sostener cada punto separadamente. Además, F es un sistema de detención, como cada dirección sostiene al menos a un punto del conjunto F . Esto significa que el conjunto F es un sistema de detención primitivo, el cual consiste de 5 puntos, y por esto $\sigma_{\max}(M) = 5$. ■

Corolario 76 Sea $M \subset \mathbb{R}^2$ un cuerpo compacto convexo. Si para este cuerpo M tenemos que $\sigma_{\max}(M) = 5$ entonces $\varrho_{\max}(M) = 5$.

Demostración. El sistema $\{a, b, c, d, e\}$ como en el teorema 75 es un sistema de fijación primitivo. Por eso $\varrho_{\max}(M)$ es igual a 5 ó 6. Pero $\varrho_{\max}(M) = 6$ solo para el hexágono con lados opuestos paralelos, este caso no es posible por el teorema 75. Por lo tanto $\sigma_{\max}(M) = \varrho_{\max}(M) = 5$. ■

Teorema 77 Sea $M \subset \mathbb{R}^2$. Si $\varrho_{\max}(M) > \sigma_{\max}(M)$, entonces M contiene al menos un segmento en su frontera.

Demostración. Si M no contiene ningún segmento en su frontera, entonces M es estrictamente convexo y por lo tanto, $\varrho_{\max}(M) = \sigma_{\max}(M)$. Pero esto no es posible por hipótesis. Así, la frontera de M contiene al menos un segmento. ■

Observación 78 Del teorema 77 vemos que para $M \subset \mathbb{R}^2$ con $\varrho_{\max}(M) > \sigma_{\max}(M)$, tenemos básicamente dos casos:

- a) Que el cuerpo M contenga un segmento en su frontera y la línea soporte paralela a el tiene solo un punto en común con M (ver figura 3.14).

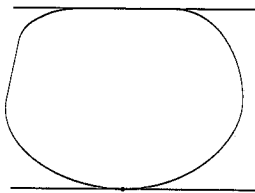


Figura 3.14: Un segmento en la frontera de M y la línea soporte paralela

- b) Que el cuerpo M contenga un par de segmentos paralelos en su frontera (ver figura 3.15).

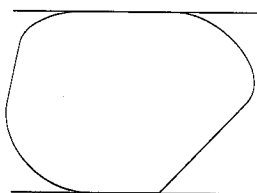


Figura 3.15: Dos segmentos paralelos en la frontera de M

Teorema 79 Sea $M \subset \mathbb{R}^2$ un cuerpo compacto convexo. Si M contiene dos segmentos paralelos de igual longitud en su frontera, entonces $\sigma_{\max}(M) = 4$.

Demostración. Si M es un paralelogramo, la afirmación del teorema es evidente.

Sea M como la figura 3.16, entonces los puntos $\{a, b, c, d\}$ forman un sistema de detención para el cuerpo M . Este sistema es maximal, ya que la igualdad $\sigma_{\max}(M) = 5$ no es posible por el teorema 75.

Finalmente, si M tiene la forma como muestra la figura 3.17, entonces los puntos $\{x, y, z, t\}$ forman un sistema de detención maximal. ■

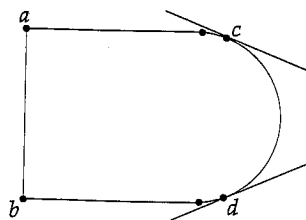


Figura 3.16: Un sistema de detención maximal

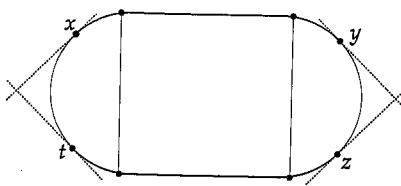
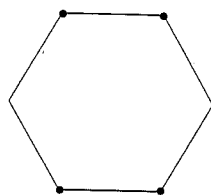
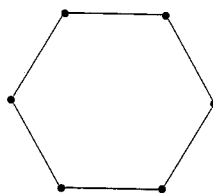


Figura 3.17: Otro sistema de Detención maximal

Ejemplo 80 *Un hexágono con lados opuestos paralelos cumple que $\rho_{\max} = 6$ y $\sigma_{\max} = 4$ (ver figura 3.18).*



(a) Un sistema de detención maximal



(b) Un sistema de fijación maximal

Figura 3.18:

Teorema 81 *Sea $M \subset \mathbb{R}^2$ un cuerpo compacto convexo. Si M tiene 4 puntos regulares, a, b, c, d , en su frontera, tales que la línea soporte que contiene al punto a es paralela a la línea soporte que contiene al punto b y la línea soporte que contiene al puntos c es paralela a la línea soporte que contiene al punto d y además cada una de estas líneas tiene solo un punto en común con M , entonces $\sigma_{\max}(M) = 4$.*

Demostración. Los cuatro puntos a, b, c, d forman un sistema de detención maximal (ver figura 3.19). ■

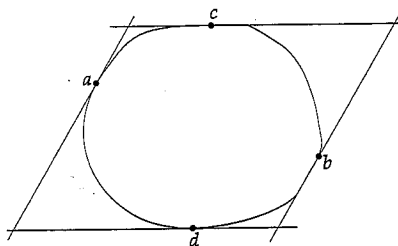


Figura 3.19:

Ejemplo 82 Consideremos un hexágono M con lados opuestos paralelos no de la misma longitud (ver figura 3.20).

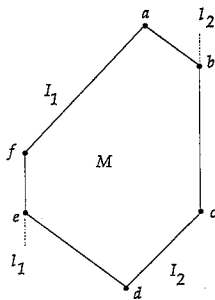


Figura 3.20:

Tenemos que los puntos extremos de I_1 y I_2 forman un sistema de detención. Al mismo tiempo, los seis vértices de M forman un sistema de fijación.

Corolario 83 Sea $M \subset \mathbb{R}^2$ un cuerpo compacto convexo. Si M contiene dos segmentos paralelos, I_1, I_2 en su frontera con $\text{long}(I_2) > \text{long}(I_1) > 0$ y existe una cuerda l de M tal que l es paralela a I_1 y $\text{long}(l) > \text{long}(I_2)$ entonces $\sigma_{\max}(M) = 4$.

Demostración. Consideremos un paralelogramo circunscrito al cuerpo M como se indica en la figura 3.21.

Podemos suponer que los puntos a, b, c, d están bastante cercanos a los extremos de los segmentos I_1, I_2 (o coinciden con sus extremos). También podemos suponer que cada una de las líneas k_1, k_2, l_1, l_2 tiene solo un punto en común con M (solo hay un número contable

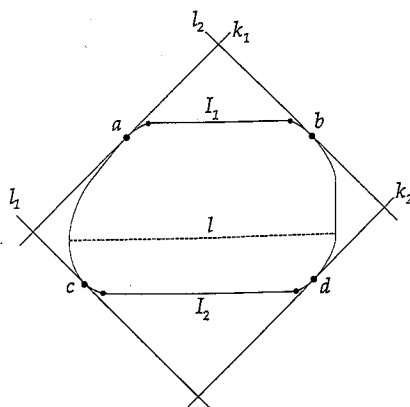


Figura 3.21:

de líneas soporte las cuales tienen un segmento en común con M). Entonces $\{a, b, c, d\}$ es un sistema de detención primitivo, y por lo tanto $\sigma_{\max}(M) \geq 4$. El caso $\sigma_{\max}(M) = 5$ es imposible por el teorema 75. ■

Teorema 84 Sea $M \subset \mathbb{R}^2$. Si $\sigma_{\max}(M) = 3$ entonces $\varrho_{\max}(M) = 3$.

Demostración. Si M es estrictamente convexo, entonces $\varrho_{\max}(M) = \sigma_{\max}(M) = 3$, por el corolario 73.

Supongamos ahora que M no es estrictamente convexo, es decir, hay al menos un segmento $[a, b]$ en su frontera. Denotemos por l la línea soporte de M paralela al segmento $[a, b]$ y por Q la intersección $l \cap M$. Aquí Q puede ser un punto o un segmento $[c, d]$. Es posible suponer que $\text{long}[a, b] \geq \text{long}[c, d]$. Denotemos por p, q los rayos emanados de los puntos a, b y tangentes a M . Ahora los casos posibles son los que aparecen en la tabla 3.1.

En el caso (a) y (b) de la tabla 3.1 tenemos que $\varrho_{\max}(M) = \sigma_{\max}(M) = 3$, es decir, la afirmación del teorema es válida. En el caso (c) de la tabla 3.1 tenemos que $\sigma_{\max}(M) = 4$ (ver ejemplo 70), que no es posible por las hipótesis del teorema.

También en los casos (d), (e), (f), (g) de la tabla 3.1 tenemos que $\sigma_{\max}(M) = 4$ (los puntos a, b, x, y forman un sistema de detención), que es imposible por las hipótesis del teorema. ■

El siguiente resultado es consecuencia de los teoremas formulados en el capítulo 1.

Teorema 85 Sea $M \subset \mathbb{R}^2$ un cuerpo compacto convexo, entonces

$$3 \leq \sigma_{\max}(M) \leq 5.$$

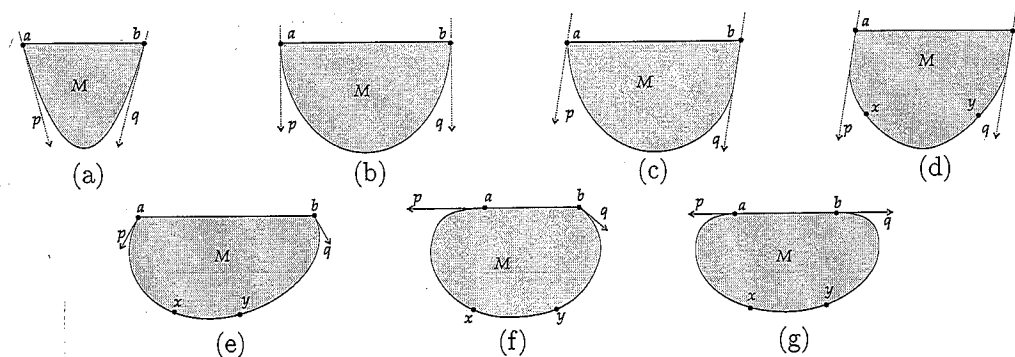


Tabla 3.1: Casos posibles del teorema 84

3.2 Casos Realizables de ϱ_{\max} y σ_{\max} en \mathbb{R}^2

En esta sección consideramos todas las combinaciones de valores de $\varrho_{\min}(M)$ y $\sigma_{\min}(M)$ que pueden ser realizables conjuntamente para un cuerpo compacto convexo M en el plano \mathbb{R}^2 .

Al considerar los diferentes valores de ϱ_{\max} y de σ_{\max} para un cuerpo compacto convexo $M \subset \mathbb{R}^2$, tenemos los siguientes doce casos posibles. En la columna de la derecha indicamos la realizabilidad de estos casos.

Caso	Valores Posibles	Realizable
I	$\varrho_{\max}(M) = 3, \sigma_{\max}(M) = 3$	Si
II	$\varrho_{\max}(M) = 3, \sigma_{\max}(M) = 4$	Si
III	$\varrho_{\max}(M) = 3, \sigma_{\max}(M) = 5$	No
IV	$\varrho_{\max}(M) = 4, \sigma_{\max}(M) = 3$	No
V	$\varrho_{\max}(M) = 4, \sigma_{\max}(M) = 4$	Si
VI	$\varrho_{\max}(M) = 4, \sigma_{\max}(M) = 5$	No
VII	$\varrho_{\max}(M) = 5, \sigma_{\max}(M) = 3$	No
VIII	$\varrho_{\max}(M) = 5, \sigma_{\max}(M) = 4$	Si
IX	$\varrho_{\max}(M) = 5, \sigma_{\max}(M) = 5$	Si
X	$\varrho_{\max}(M) = 6, \sigma_{\max}(M) = 3$	No
XI	$\varrho_{\max}(M) = 6, \sigma_{\max}(M) = 4$	Si
XII	$\varrho_{\max}(M) = 6, \sigma_{\max}(M) = 5$	No

Ahora vamos con las descripciones de cada uno de los casos

I) Este caso es realizable (ver ejemplo 74).

II) Este caso es realizable (ver ejemplo 70).

- III) No es realizable. (ver corolario 76).
- IV) No es realizable. Del teorema 84 sabemos que si $\sigma_{\max}(M) = 3$, entonces $\varrho_{\max}(M) = 3$.
- V) Este caso es realizable. Consideremos un círculo C (o una figura estrictamente convexa y suave). Del corolario 73 deducimos que $\sigma_{\max}(C) = \varrho_{\max}(C)$. Además, del teorema 81 vemos que $\sigma_{\max}(C) = 4$.
- VI) No es realizable (ver corolario 76).
- VII) No es realizable. Del teorema 84 tenemos que si $\sigma_{\max}(M) = 3$, entonces $\varrho_{\max}(M) = 3$.
- VIII) Sea M el cuerpo de la figura 3.22.

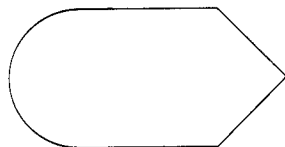


Figura 3.22: Ejemplo para el caso VIII en \mathbb{R}^2

Primero veamos que $\varrho_{\max}(M) = 5$. Consideremos los puntos y las direcciones indicadas por las flechas en la figura 3.23. Claramente dada una dirección cualquiera, esta

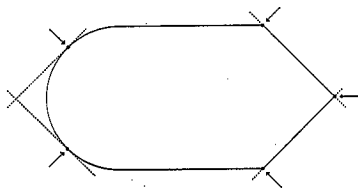


Figura 3.23: Direcciones que iluminan un único punto

dirección ilumina a al menos uno de los puntos indicados. También cada una de las direcciones indicadas en la figura 3.23 ilumina a un único punto de los indicados. Esto quiere decir, por el teorema 35, que los puntos indicados forman un sistema de fijación primitivo para M , por lo tanto $\varrho_{\max}(M) \geq 5$. Además $\varrho_{\max}(M) < 6$ por los resultados de B. Tomor [To] y S. Fudali [Fu]. Por lo tanto $\varrho_{\max}(M) = 5$.

Ahora veamos que $\sigma_{\max}(M) = 4$. Consideremos los puntos y las direcciones indicadas en la figura 3.24. Podemos ver que cada una de las cuatro direcciones indicadas en la figura sostienen a un único punto y por el teorema 40 estos forman un sistema de detención primitivo de M . Del teorema 75 deducimos que $\sigma_{\max}(M) < 5$. Por lo tanto obtenemos que $\sigma_{\max}(M) = 4$.

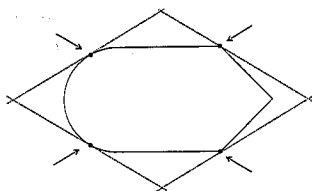


Figura 3.24: Direcciones que sostienen un único punto

- IX) Consideremos un pentágono regular P . Entonces, por el teorema 75 tenemos que $\sigma_{\max}(P) = 5$. Por el corolario 76 tenemos que $\varrho_{\max}(M) = 5$.
- X) No es realizable (ver teorema 84).
- XI) Consideremos un hexágono regular H . Como hemos visto en el ejemplo 80, $\varrho_{\max}(H) = 6$, $\sigma_{\max}(M) = 4$.
- XII) No es realizable (ver corolario 76).

Todos los casos los podemos resumir en la siguiente tabla

$\sigma_{\max} \backslash \varrho_{\max}$	3	4	5	6
3		No realizable	No realizable	No realizable
4		Cuerpo suave estrictamente convexo		
5	No realizable	No realizable		No realizable

Bibliografía

- [Be] B. Bollobás, *Fixing Systems for Convex Bodies*, Studia Sci. Math. Hungar. 2 (1967), 351-354.
- [Bo1] V.G. Boltyanski, *Helly's Theorem for H -convex Sets*, Dokl. Akad. Nauk SSSR 226 (1976), 249-252; English transl. in Soviet Math. Dokl. 17 (1976).
- [Bo2] V.G. Boltyanski, *Solution of the Illumination Problem for Belt Bodies*, Mat. Zametki 58 (1996), 505-511; English Transl. in Math. Notes 58 (1996).
- [Bo3] V.G. Boltyanski, *A generalization of a Theorem of Szökefalvi-Nagy*, Dokl. Akad. Nauk SSSR 228 (1976), 265-268; English transl. in Soviet Math. Dokl. 17 (1976).
- [Bo4] V.G. Boltyanski, *Some Theorems of Combinatorial Geometry*, Mat. Zametki 21 (1977), 117-124; English transl. in Math. Notes 21 (1977).
- [Bo5] V.G. Boltyanski, *A New Step in the Solution of the Szökefalvi-Nagy Problem*, Discrete Comput. Geom. 8:1 (1992), 27-49.
- [Bo6] V. G. Boltyanski, *Hindering Systems for Convex Bodies*, (Russian) Matematicheski Sbornik, 188 (1999), no. 3, pp 3-16.
English Translation: V. G. Boltyanski, *Hindering Systems for Convex Bodies*, Sbornik: Mathematics, 188 (1997) no. 3, pp 327-329
- [Bo-Ba] E.D. Baladze and V.G. Boltyanski, *Belt Bodies and Helly Dimension*, Mat. Sb. 186:2 (1995), 3-20; English transl. in Sbornik Math. 186 (1995).
- [Bo-Ma1] V.G. Boltyanski and H. Martini, *Combinatorial Geometry of Belt Bodies*, Results, math. 28 (1995), 224-249.
- [Bo-Ma2] V.G. Boltyanski and H. Martini, *On Maximal Primitive Fixing Systems*, Beiträge Algebra Geom. 37:1 (1996), 199-207.
- [Bo-Ma3] V.G. Boltyanski and H. Martini, *Fixing and Hindering Systems in Combinatorial Geometry*, Beiträge Algebra Geom. 40:2 (1999), 551-563.

- [Bo-Ma-So] V.G. Boltyanski, H. Martini and P. Soltan, *Excursions into Combinatorial Geometry*, Springer, 1997, xiii+419 pp.
- [Bo-Mo1] V.G. Boltyanski and E. Morales-Amaya, *Minimal Fixing Systems for Convex Bodies*, J. Appl. Analysis 1:1 (1995), 1-13.
- [Bo-Mo2] V.G. Boltyanski and E. Morales-Amaya, *Maximal Primitive Fixing Systems*, (Por aparecer en Discrete Comput. Geom.).
- [Bo-Mo3] V.G. Boltyanski and E. Morales-Amaya, *Cardinalities of Primitive Fixing Systems for Convex Bodies*, Discrete Comput. Geom. 24 (2000), 209-218.
- [Bon-Fe] T. Bonnesen and W. Fenchel, *Theorie der Konvexen Körper*, Ergebnisse der Mathematik, 3, 1, Berlin 1934, New York 1948.
- [Fe] Fejes Tóth, *On Primitive Polyhedra*, Acta Math. Hungar. 13 (1962), 379-383.
- [Fu] S. Fudali, *Six-points Primitive Fixing System in the Plane*, Demonstratio Math. 19 (1986), 341-348.
- [Gr] B. Grünbaum, *Fixing Systems and inner illumination*, Acta Math. Acad. Sci. Hungar. 15 (1964), 161-163.
- [Ma] P. Mani, *On Polytopes Fixed by Their Vertices*, Acta Math. Hungar. 22 (1971), 269-273.
- [S-N] B. Szökefalgy-Nagy, *Ein Satz Über Parallelverschiebungen Konvexer Körper*, Acta Sci. Math. 15 (1954), No. 3-4, 169-177
- [To] B. Tomor, *The Fixing Problem for Convex Figures* (in Hungaria; Russian and German Summaries), Mat. Lapok 14 (1963), 120-123.

Índice de Materias

$\text{md } H$, 8

$\varrho_{\max}(M)$, 6

$\varrho_{\max}(M) = \infty$, 7

$\varrho_{\min}(M)$, 6

$\sigma_{\max}(M)$, 11

$\sigma_{\max}(M) = \infty$, 11

$\sigma_{\min}(M)$, 11

Cuerpo compacto, 6

convexo, 6

estrictamente convexo, 17

Cuerpo paralelo exterior, 30

Estack, 24

Outcut, 24

Problema de sostener, 16

Punto frontera

regular, 8

Sistema de detención, 11

primitivo, 11

Sistema de fijación, 6

primitivo, 6

Suma de Minkowski, 18

Suma vectorial, 18

directa, 18

Vectores

mínimamente dependientes, 8

positivamente dependientes, 8