CIMAT

Centro de Investigación en Matemáticas A. C.

Soluciones talmúdicas a juegos cooperativos

T E S I S

Que para obtener el grado de

Maestro en ciencias

con orientación en

Matemáticas Aplicadas

P R E S E N T A:

Iván Téllez Téllez

Director de tesis:

Dr. Francisco Sánchez Sánchez

GUANAJUATO, GTO. JULIO 2012

CIMAT

Centro de Investigación en Matemáticas A. C.

Soluciones talmúdicas a juegos cooperativos

T E S I S

Que para obtener el grado de

Maestro en Ciencias

con orientación en

Matemáticas Aplicadas

P R E S E N T A:

Iván Téllez Téllez

Comité de evaluación:

Dr. José Ignacio Barradas Bribiesca
(Presidente)

Dr. Francisco Javier Solís Lozano
(Secretario)

Dr. Francisco Sánchez Sánchez
(Vocal y Director de Tesis)

GUANAJUATO, GTO. JULIO 2012

A Naomi

Agradecimientos

Este trabajo se desarrolló bajo la dirección del profesor Francisco Sánchez Sánchez a quien agradezco el tiempo dedicado a discutir las ideas aquí plasmadas.

Gracias a los revisores, profesores Javier Solís Lozano e Ignacio Barradas Bribiesca, sus observaciones ayudaron a mejorar la presentación de esta tesis.

Mil gracias a Ale, porque su cariño e invaluable compañía todo lo vuelven asequible. Haber traído al mundo a Naomi no tiene comparación.

Agradezco a mi familia el haberme brindado el soporte emocional a lo largo de la maestría, principalmente a mi madre por su confianza y apoyo incondicional.

A todas las personas que contribuyeron a que mi estancia en Guanajuato fuera amena. En especial a la familia Serrano Guerra, quienes me han tratado como a uno más de la familia.

Finalmente al Consejo Nacional de Ciencia y Tecnología por el apoyo económico brindado durante la maestría.

Índice general

Introducción

La toma de decisiones es un proceso tan común en las actividades humanas que es difícil apreciar qué acciones no están relacionadas con la elección de una opción, dado un conjunto posible de ellas. Más aun, lo deseable es que sea la mejor opción posible de acuerdo a ciertas circuntacias; esto último es una inminente fuente de problemas para el quehacer matemático, en particular para la teoría de juegos.

Las implicaciones de tomar o no la mejor decisión posible pueden ir desde llegar a un acuerdo por la venta de un artículo usado, conducir al éxito una compañía e incluso desatar una guerra entre naciones, por mencionar algunas. Parte del trabajo de la teoría de juegos es estudiar y modelar estas situaciones como un problema general, y proponer soluciones matemáticas que tengan propiedades *razonables*. Al respecto, la riqueza en los modelos es amplia, puesto que cuando se desea que las soluciones sean en cierto sentido, justas, ideas diferentes de justicia suelen conducir a soluciones diferentes.

Las reflexiones acerca de cuál es la solución adecuada para determinada situación de conflicto es algo que ha ocupado a los pensadores en todo momento de la historia. Por ejemplo, los textos antiguos del Talmud[1] relatan entre sus pasajes que

> *dos mujeres pelean por una prenda, la primera reclama la prenda completa y la segunda reclama la mitad de la prenda.*[2]

Uno puede preguntarse ¿cómo repartir la prenda entre las dos mujeres de manera justa? Las respuestas, por supuesto, dependen de qué se entiende por justicia. El mismo pasaje determina la siguiente solución sin explicación aparente alguna: dar 3/4 de la prenda a la mujer que la reclama toda y 1/4 a la mujer que reclama la mitad.

Otro ejemplo interesante ocurre en la siguiente situación contenida también en los pasajes del Talmud:

> *Un hombre, que tiene deudas por 100, 200 y 300 (en algunas unidades), muere y lo que deja como herencia no es suficiente para pagar el total de sus deudas.*[3]

En este caso, sin explicación alguna, el Talmud indica cómo se debe pagar a los acreedores en tres casos posibles: cuando la herencia es 100, 200 y 300. La solución sugerida se muestra en la siguiente tabla

[1]Conjunto de libros antiguos que son la base de las leyes civiles, criminales y religiosas judías.
[2]La forma de citar esta parte del pasaje es estándar entre diversos autores.
[3]Lo mismo que la nota anterior.

Herencia \ Reclamos	Acreedor 1 100	Acreedor 2 200	Acreedor 3 300
100	33 1/3	33 1/3	33 1/3
200	50	75	75
300	50	100	150

Uno se pregunta ¿qué criterio fue usado en cada caso para repartir la herencia existente? Observemos que si el valor de la herencia es de 100 se procede a pagar de forma igualitaria y si la herencia es 300 se paga, inconsistentemente con lo ya observado, de forma proporcional. Además, el pago en el caso de que la herencia tenga un valor de 200 no corresponde a las soluciones ya observadas. No hay principio evidente que relacione a las tres asignanciones sugeridas en los tres casos.

Por mucho tiempo la pregunta anterior quedó sin contestar. Fue hasta 1985 cuando Aumann y Maschler publicaron un análisis, basado en teoría de juegos cooperativos, que respondía a las preguntas ¿qué criterio de reparto se ajusta a la solución sugerida por el Talmud? y ¿por qué usarlo?

El resultado principal de Aumann y Maschler es, en términos de teoría de juegos, que la repartición sugerida en los pasajes del Talmud corresponde a una solución que ellos denominaron *la regla de la prenda en disputa* y que además coincide con el nucleolo del juego cooperativo definido por

$$w(S) = \text{máx}\left\{0, E - c(N \setminus S)\right\}, \qquad S \subseteq N. \tag{1}$$

En este juego, $c(N \setminus S)$ es la suma de los reclamos de los agentes en $N \setminus S$ y la suma total de dichos reclamos es mayor que el estado E; la cantidad sobre la cual se hacen los reclamos.

En este trabajo estudiamos la regla de la prenda en disputa y, motivados por esta solución, determinamos dos nuevas soluciones a juegos cooperativos. Tales soluciones tienen por coordenadas a las expresiones

$$\psi_i(v) = \frac{v(N)}{n} + \sum_{\substack{S \ni i \\ S \neq N}} \frac{(s-1)!(n-s)!}{(n-1)n!}[v(S) - v(N \setminus S)] \tag{2}$$

y

$$\eta_i(v) = \frac{2^{n-1}(n-1)!}{(2n-2)!} \sum_{P \in P_B} \phi_i^P(v). \tag{3}$$

Donde v es un juego cooperativo al que se le aplica cada solución, i representa al $i-$ésimo jugador y $n = |N|$ es la cardinalidad del conjunto de jugadores.

En este escrito deducimos que la solución (2) es una combinación convexa del valor de Shapley y la solución igualitaria, mientras que la segunda depende del conjunto de *particiones binarias anidadas* P_B que tiene un conjunto de jugadores $N = \{1, 2, \ldots, n\}$. Siendo este último, un concepto que introducimos en este escrito.

Respecto al problema de bancarrota, construimos un conjunto de juegos convexos $\mathcal{V}$ que sirven de modelo a esta situación y demostramos que el juego (1) es el único en

$\mathcal{V}$ cuyo núcleo es el conjunto de asignaciones que son solución al problema de bancarrota.

Como aplicaciones de nuestros resultados, sugerimos dos nuevas soluciones a problemas de bancarrota. La primera de ella es $\eta(\vartheta)$, que resulta de aplicar la solución (3) al juego

$$\vartheta(S) = \text{mín}\{c(S), E\}$$

y la segunda es

$$\rho_i^{\varphi}([E;c]) = \frac{1}{1-E/C}\int_{E/C}^{1} \varphi_i(v_{f_\alpha})\, d\alpha,$$

donde $\varphi(v_{f_\alpha})$ es una asignación que siempre está en el nucleo del juego convexo v_{f_α}, para todo $\alpha \in [E/C, 1]$.

Para deducir los resultados anteriores nuestro trabajo se divide en cuatro capítulos cuyo contenido describimos en seguida. En el primer capítulo se presentan algunas definiciones básicas de la teoría de juegos cooperativos, así como una discusión de las propiedades básicas del valor de Shapley y del nucleolo, ya que son dos soluciones a las que se hace referencia en los capítulos posteriores.

Al final del capítulo abordamos algunos problemas de bancarrota contenidos en los pasajes del Talmud y estudiamos brevemente estos problemas y sus soluciones.

En el segundo capítulo comparamos las soluciones que se obtinen aplicando los siguientes principios de reparto a problemas de bancarrota.

Primer principio de reparto. Cada persona debe conceder lo que no quiere para sí, a la otra. La parte sobrante, en caso de haber, se reparte en forma igualitaria.

Segundo principio de reparto. Partes igualmente reclamadas son igualmente divididas. La parte sobrante, en caso de haber, se reparte en forma igualitaria.

Para problemas bipersonales, la aplicación de ambos principios nos lleva a la misma solución. En particular, ambos principios conducen a la asignación que sugieren los pasajes del Talmud al problema de la prenda en disputa. Sin embargo, si los agentes que intervienen en el problema son más de dos, la generalización de estos principios conduce a soluciones diferentes.

La primera de las soluciones resultantes es

$$\alpha([E;c]) = \begin{cases} \gamma([E; 1/2\, c]), & E \leq 1/2C; \\ 1/2\, c + \pi([E - 1/2\, C; 1/2\, c]), & E > 1/2C, \end{cases}$$

donde γ y π son las conocidas soluciones de *iguales ganancias* e *iguales pérdidas*, para el primer principio. La segunda solución es

$$\beta_i([E;c]) = \sum_{j=1}^{i} \frac{\text{mín}\{E, c_j\} - \text{mín}\{E, c_{j-1}\}}{n-j+1} + \frac{(E-c_n)_+}{n},$$

donde $c_0 = 0$ y la función θ_+ está definida por

$$\theta_+ = \begin{cases} \theta, & \theta \geq 0; \\ 0, & \theta < 0, \end{cases}$$

para el segundo principio de reparto.

Estas soluciones resultan de aplicar, respectivamente, el nucleolo al juego (1) y el valor de Shapley al juego

$$u(S) = \begin{cases} \text{mín}\{\text{máx}_{i \in S} c_i, E\}, & S \subsetneq N; \\ E, & S = N. \end{cases}$$

Mostramos que α es la única solución *consistente con el principio de la prenda en disputa* y que, en general, β no es una solución a problemas de bancarrota.

En el capítulo tres se demuestra que una solución φ satisface los axiomas de aditividad, simetría y eficiencia si y sólo si es de la forma

$$\varphi_i(v) = \frac{v(N)}{n} + \sum_{\substack{S \ni i \\ S \neq N}} (n-s)[\lambda_s v(S) - \lambda_{n-s} v(N \setminus S)] \tag{4}$$

para algunos números $\lambda_1, \ldots, \lambda_{n-1}$. Lo cual implica que la solución ψ dada por (2) satisface estos tres axiomas; incluso, al igual que el valor de Shapley, esta solución puede ser interpretada como la esperanza de cierto proceso aleatorio.

Introduciremos el concepto de partición binaria anidada y mostraremos que la solución (3) es lineal, simétrica y eficiente en el conjunto de los juegos superaditivos. De donde se sigue que η puede ser escrita explícitamente de la forma (4), para ciertos coeficientes λ_s, con $s = 1, 2, \ldots, n-1$.

Mostraremos que si se aplica la solución (3) al juego

$$\vartheta(S) = \text{mín}\{c(S), E\}$$

entonces se obtiene una solución al problema de bancarrota, que denotamos por $\eta(\vartheta)$. Un caso particular muy interesante es que si se aplica esta solución al problema de la herencia incompleta, se obtienen exactamente las mismas asignaciones que sugieren los pasajes del Talmud.

En el último capítulo consideramos que un problema de bancarrota $[E; c]$, donde c es el vector de reclamos y E es el estado, puede ser modelado por varios juegos como sigue: sea C la suma de los reclamos y $\mathcal{F}$ el conjunto de las funciones $f : [0, C] \to [0, E]$, continuas, crecientes, tales que $f(0) = 0$ y $f(C) = E$. A cada $f \in \mathcal{F}$ le asociamos el juego

$$v_f(S) = f(c(S)), \qquad S \subseteq N.$$

En primera instancia demostramos que si se define f^* mediante

$$f^*(\tau) = f(C) - f(C - \tau)$$

entonces se satisfacen las siguientes propiedades

1. $f^* \in \mathcal{F}$ y $(f^*)^* = f$.
2. $v_f^* = v_{f^*}$
3. Si g es la función
$$g(\tau) = \text{máx}\{0, E - C + \tau\}, \tag{5}$$
entonces $f(\tau) \leq g(\tau)$ si y sólo si $f^*(\tau) \geq g^*(\tau)$, y $f(\tau) \geq g(\tau)$ si y sólo si $f^*(\tau) \leq g^*(\tau)$ para todo $\tau \in [0, C]$.
4. f es convexa si y sólo si f^* es cóncava, y f es cóncava si y sólo si f^* es convexa.
5. Si f es convexa entonces el juego v_f es convexo.

Estas propiedades sirven para demostrar que si

$$\mathcal{F}_c = \{f \in \mathcal{F} : f \text{ es convexa}\} \qquad \text{y} \qquad \mathcal{V} = \{v_f : f \in \mathcal{F}_c\}$$

entonces (1), el juego asociado a (5), es el único juego en $\mathcal{V}$ tal que su núcleo satisface la siguiente propiedad: la asignación x está en el núcleo del juego v_f si y sólo si x es solución al problema de bancarrota original $[E; c]$.

Demostramos que si

$$v_f \in \mathcal{V}_1 = \{v_f \in \mathcal{V} : \; E\tau/C \geq f(\tau) \geq g(\tau), \; \tau \in [0, C]\}$$

entonces toda asignación en el núcleo de v_f es solución al problema $[E; c]$ y, si v_f está en el conjunto

$$\mathcal{V}_2 = \{v_f \in \mathcal{V} : g(\tau) \geq f(\tau), \; \tau \in [0, C]\},$$

entonces toda solución al problema $[E; c]$ es un elemento del núcleo de v_f.

Basados en esta clasificación de juegos proponemos una nueva solución a problemas de bancarrota. Sea

$$\mathcal{W} = \{v_{f_\alpha} : f_\alpha(\tau) = \text{máx}\{0, E - \alpha(C - \tau)\} \;\text{ y }\; \alpha \in [E/C, 1]\} \subset \mathcal{V}_1;$$

si φ es una solución a juegos cooperativos tal $\varphi(v) \in C(v)$ para juegos convexos, se tiene que $\varphi(v_{f_\alpha}) \in C(v_{f_\alpha})$ para todo $\alpha \in [E/C, 1]$ y, por tanto $\varphi(v_{f_\alpha})$ es una solución al problema $[E; c]$ para todo $\alpha \in [E/C, 1]$.

Concluimos que la fórmula

$$\rho_i^\varphi([E; c]) = \frac{1}{1 - E/C} \int_{E/C}^{1} \varphi_i(v_{f_\alpha}) \, d\alpha,$$

provee una solución a problemas de bancarrota.

Capítulo 1

Preliminares

1.1. Juegos cooperativos

A menudo, los integrantes de un conjunto N colaboran para conseguir un objetivo común. Cada grupo $S \subseteq N$ no vacío de individuos que participan en la consecución de dicho objetivo es importante en virtud de su cardinalidad o de las características de sus miembros, por ello cada uno de los subconjuntos de estos individuos tiene un valor $v(S)$.

Dicho valor puede expresar ganacias o costos; lo cual puede servir de motivación para que un individuo colabore con otros pues frecuentemente ocurre que en conjunto se logra una mayor ganancia (menor costo) que actuando por su propia cuenta.[1]

En el presente escrito consideramos que el conjunto N es finito, $N = \{1, 2, \ldots, n\}$, y denotamos al conjunto potencia de N por 2^N, es decir,

$$2^N = \{S : S \subseteq N\}.$$

A cada $S \in 2^N$ se le llama coalición y al conjunto N, la gran coalición. La notación, estándar, a usar es R, S, $T, \ldots$ para coaliciones y $|R| = r$, $|S| = s$, $|T| = t, \ldots$ para sus respectivas cardinalidades.

Definición 1.1. *Un juego cooperativo de utilidad transferible, es un par (N, v) donde N es el conjunto de jugadores y $v : 2^N \to \mathbb{R}$ asigna a cada coalición $S \subseteq N$ un valor $v(S)$, con $v(\varnothing) = 0$.*

A (N, v) se le denomina también juego en función caraterística. Por brevedad, en adelante nos referiremos a un juego de utilidad transferible simplemente como *juego* sin indicar el conjunto de jugadores, ya que será entendido por el contexto de las situaciones a estudiar. Denotamos al conjunto de juegos de utilidad transferible por G.

Una de las tareas fundamentales de la teoría de juegos cooperativos es estudiar cómo dividir el valor total, $v(N)$, conseguido por la gran coalición entre los jugadores involucrados en el juego v.

[1] Este es el ejemplo típico de la cooperación entre individuos. A lo largo de este trabajo suponemos que todos los jugadores en N están dispuestos a cooperar entre sí.

Definición 1.2. *Una solución a juegos cooperativos es una función $\varphi : G \to \mathbb{R}^n$ que asigna a cada $v \in G$ un vector de pagos $\varphi(v)$, donde la coordenada $\varphi_i(v)$ es el pago correspondiente al jugador i.*

Ejemplo 1.1. *Andrés, Beatriz y Carlos desean acordar cómo pagar la instalación de cierto servicio en sus casas. Ellos saben que, de acuerdo a la distancia de sus casas con la red pública existente, gastarán 30, 50 y 60 unidades respectivamente, si es que cada uno paga el trabajo por su cuenta. También saben que si se forma la coalición S entonces sus miembros pagarán el máximo costo unitario.*

Los costos individuales del servicio son $c_1 = 30$, $c_2 = 50$ y $c_3 = 60$ respectivamente, por lo que el juego u que modela esta situación es

$$u(S) = \max_{i \in S} c_i.$$

Discusión. En vista de que $v(N) = 60$, una solución de este juego podría ser la asignación $x_1 = (20, 20, 20)$ determinada por un juez que cree ser justo. Sin embargo Andrés podría replicar que por vivir más cerca de la red pública le corresponde pagar menos que a los otros dos; así, él propone la solución $x_2 = (0, 55, 5)$. Esta solución no le conviene a Beatriz, puesto que paga más de lo que pagaría individualmente, por lo que ella podría sugerir como solución $x_3 = (0, 10, 50)$, en este caso Carlos podría argumentar que con esta nueva solución Beatriz ahorra 40 y él sólo ahorra 10 y eso no le parece justo. ¿Qué solución es la más adecuada?

Una solución φ puede depender de un cierto principio de reparto o bien ser determinada por un conjunto de propiedades denominadas axiomas. Destacamos las siguientes soluciones a las que se hará referencia posteriormente.

1.2. El valor de Shapley

Lloyd S. Shapley introdujo lo que él denominó *el valor* de un juego cooperativo [20]. En su escrito de 1953, Shapley considera a los juegos superaditivos.

Definición 1.3. *Se dice que el juego v es superaditivo si para todo par de coaliciones S, T tales que $S \cap T = \varnothing$, se satisface la desigualdad*

$$v(S \cup T) \geq v(S) + v(T).$$

Si la desigualdad se satisface para todo $S, T \subseteq N$ en el sentido contrario entonces decimos que el juego es subaditivo y si es igualdad siempre entonces el juego es aditivo.

Ejemplo 1.2. *El dueño de m máquinas (jugador 1) fabrica un producto por cada obrero que contrata; cada obrero ocupa una máquina y el valor de cada producto es de p unidades. La utilidad obtenida por la cooperación del jugador 1 con los obreros es*

$$v(S) = \begin{cases} p(s-1), & \text{si } 1 \in S; \\ 0, & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

El juego v es superaditivo, ya que si $S \cap T = \varnothing$ y $1 \in T$ entonces

$$v(S \cup T) = p(s+t-1) \geq p(t-1) = v(S) + v(T),$$

lo mismo se tiene, cambiando s por t, si $1 \in S$. Todo se anula si $1 \notin S \cup T$.

El valor de Shapley es una solución que se determina bajo cuatro axiomas: simetría, eficiencia, nulidad y aditividad. Para presentar dichos axiomas necesitamos algunas definiciones.

Definición 1.4. *Se dice que i es un jugador nulo en el juego v si para todo $S \subseteq N \setminus i$ se tiene que*

$$v(S \cup i) = v(S).^2$$

Un jugador nulo, i, no cambia el valor de ninguna coalición a la cual se une, es decir, la cooperación del jugador i es nula en v.

Definición 1.5. *Sea S_n el conjunto de permutaciones $\sigma : N \to N$. Para $(v, w) \in G \times G$, $(\alpha, v) \in \mathbb{R} \times G$ y $(\sigma, v) \in S_n \times G$ se definen los juegos $v + w$, αv, $\sigma v \in G$ mediante*

$$(v+w)(S) = v(S) + w(S), \quad (\alpha v)(S) = \alpha v(S) \quad y \quad (\sigma v)(S) = v(\sigma(S)), \quad S \subseteq N,$$

donde $\sigma(S) = \{\sigma(i) : i \in S\}$ es la imagen de S bajo σ.

Definición 1.6. *La solución φ satisface el axioma de*

1. *Simetría. Si para cada $\sigma \in S_n$,*

$$\varphi_i(\sigma v) = \varphi_{\sigma(i)}(v).$$

2. *Eficiencia. Si*

$$\sum_{i \in N} \varphi_i(v) = v(N).$$

3. *Nulidad. Si para cada jugador nulo, i, en v*

$$\varphi_i(v) = 0.$$

4. *Aditividad. Si para cada par de juegos $(v, w) \in G \times G$,*

$$\varphi_i(v+w) = \varphi_i(v) + \varphi_i(w).$$

Si una solución satisface los primeros dos axiomas entonces el monto total a pagar es el valor de la gran coalición y los montos a pagar a los jugadores no depende de las etiquetas que se les asignen. Si además se satisfacen los últimos dos axiomas, entonces la forma en que hay que pagar se puede determinar de forma explícita.

Para calcular la fórmula del valor de Shapley introducimos una base de juegos superaditivos de G.

[2] Por brevedad en la notación, sustituimos $N \setminus \{i\}$ y $v(S \cup \{i\})$ por $N \setminus i$ y $v(S \cup i)$.

Definición 1.7. *Para cada $T \in 2^N \setminus \varnothing$ el juego de $T-$unanimidad se define mediante*

$$u_T(S) = \begin{cases} 1, & T \subseteq S; \\ 0, & \textit{en otro caso.} \end{cases}$$

Lema 1.1. *Para todo $v \in G$ se tiene que*

$$v(S) = \sum_{T \subseteq N} \Delta_T(v) u_T(S),$$

donde

$$\Delta_T(v) = \sum_{R \subseteq T} (-1)^{t-r} v(R).$$

Demostración. Sustituyendo el valor de $\Delta_T(v)$ en la primera suma e intercambiando el orden de las sumas involucradas se tiene que, por la definición de juego de unanimidad

$$\begin{aligned} \sum_{T \subseteq N} \sum_{R \subseteq T} (-1)^{t-r} v(R) u_T(S) &= \sum_{R \subseteq T} \sum_{T \subseteq S} (-1)^{t-r} u_T(S) v(R) \\ &= \sum_{R \subseteq S} \left(\sum_{t=r}^{s} (-1)^{t-r} \binom{s-r}{t-r} \right) v(R) \\ &= v(S). \end{aligned}$$

Puesto que la suma entre paréntesis es cero excepto para $r = s$. □

En virtud del lema (1.1), para determinar el valor de Shapley en todo $v \in G$, basta calcularlo en los juegos de $T-$unanimidad y extenderlo usando el axioma de aditividad.

Lema 1.2. *Para todo $c \in \mathbb{R}$ el valor de Shapley, φ, satisface*

$$\varphi_i(c\, u_T) = \begin{cases} c/t, & i \in T; \\ 0, & i \in N \setminus T. \end{cases}$$

Demostración. Observemos que todo $i \in N \setminus T$ es un jugador nulo en el juego $c\, u_T$, que es el producto de c por el juego u_T. Por el axioma de nulidad $\varphi_i(c\, u_T) = 0$. Luego, si se elige $\sigma \in S_n$ tal que $\sigma(T) = T$, $\sigma(i) = j$ y $\sigma(j) = i$ para $i, j \in T$, entonces por simetría

$$\varphi_i(c\, u_T) = \varphi_i(\sigma c\, u_T) = \varphi_{\sigma(i)}(c\, u_T) = \varphi_j(c\, u_T).$$

De donde, por eficiencia, $\varphi_i(c\, u_T) = c/t$ para todo $i \in T$. □

Por los lemas (1.1) y (1.2) se tiene que, por aditividad, si $v \in G$ el valor de Shapley satisface

$$\begin{aligned} \varphi_i(v) &= \sum_{T \ni i} \frac{\Delta_T(v)}{t} = \sum_{T \ni i} \sum_{S \subseteq T} \frac{(-1)^{t-s} v(S)}{t} \\ &= \sum_{S \ni i} \sum_{T \supseteq S} \frac{(-1)^{t-s} v(S)}{t} + \sum_{S \not\ni i} \sum_{T \supseteq S \cup i} \frac{(-1)^{t-s} v(S)}{t}. \end{aligned}$$

Ahora, usando el hecho de que

$$\sum_{T\supseteq S} \frac{(-1)^{t-s}}{t} = \frac{(s-1)!(n-s)!}{n!},$$

la expresión anterior nos conduce a

$$\begin{aligned}\varphi_i(v) &= \sum_{S\ni i} \frac{(s-1)!(n-s)!}{n!} v(S) - \sum_{S\not\ni i} \frac{s!(n-s-1)!}{n!} v(S) \\ &= \sum_{S\not\ni i} \frac{s!(n-s-1)!}{n!} (v(S\cup i) - v(S)).\end{aligned}$$

Teorema 1.1 (Shapley, 1953). *La solución φ satisface los axiomas de simetría, nulidad, eficiencia y aditividad si y sólo si φ es el valor de Shapley*

$$\varphi_i(v) = \sum_{S\not\ni i} \frac{s!(n-s-1)!}{n!} (v(S\cup i) - v(S)).^3 \tag{1.1}$$

Demostración. Por los lemas 1.1 y 1.2 se tiene que si φ satisface los cuatro axiomas citados, entonces φ es el valor de Shapley y está determinado de forma única por (1.1). Recíprocamente, es sencillo verificar que (1.1) satisface los axiomas mencionados. □

El valor de Shapley es una solución cuya deducción se basa fuertemente en el axioma de aditividad; este supuesto es lo que le da forma al modelo sugerido originalmente por Shapley en [20].

Aparte del axioma de aditividad, los otros tres axiomas que determinan al valor de Shapley son naturalmente deseables en situaciones de la vida real: asignar cero a aquellos cuya cooperación es nula, repartir lo conseguido por la gran coalición y pagar igual a aquellos jugadores cuya cooperación es la misma, como se indica a continuación.

Definición 1.8. *Los jugadores i, $j \in N$ son sustitutos en el juego v si para todo $S \subseteq N \setminus \{i, j\}$ se tiene que*

$$v(S\cup i) = v(S\cup j).$$

Proposición 1.1. *Si i, $j \in N$ son jugadores sustitutos en v entonces*

$$\varphi_i(v) = \varphi_j(v).$$

Demostración. El resultado se obtiene sustituyendo directamente en (1.1) al jugador i por el jugador j.

□

Ejemplo 1.3. *El valor de Shapley de los ejemplos* 1.1 y 1.2 es

$$\varphi(u) = (10, 20, 30) \qquad \text{y} \qquad \varphi_i(v) = \begin{cases} pm/2, & i = 1; \\ p/2, & i \neq 1, \end{cases}$$

respectivamente.

[3] En adelante reservamos la letra φ para denotar al valor de Shapley, a menos que se indique lo contrario.

1.3. El núcleo y el nucleolo

Si $v \in G$ es superaditivo entonces para todo $i \in N$ se tiene

$$v(S \cup i) \geq v(S) + v(i), \qquad S \subseteq N, \tag{1.2}$$

con igualdad si y sólo si i es un jugador nulo. De esta desigualdad se sigue la

Proposición 1.2. *Si $v \in G$ es superaditivo, el valor de Shapley satisface*

$$\varphi_i(v) \geq v(i), \qquad i \in N,$$

con igualdad si y sólo si i es un jugador nulo.

Demostración. Si i es un jugador nulo en v tenemos que $v(i) = 0$ y $\varphi_i(v) = 0$ por nulidad. Si $\varphi_i(v) = v(i) = 0$ entonces en la suma de términos no negativos (1.1) se tiene que $v(S \cup i) = v(S)$ para todo S que no contiene a i, luego i es un jugador nulo. Si i no es un jugador nulo entonces insertando (1.2) en (1.1) se tiene que

$$\varphi_i(v) \geq \sum_{S \not\ni i} \frac{s!(n-s-1)!}{n!} v(i) = \sum_{s=0}^{n-1} \binom{n-1}{s} \frac{s!(n-s-1)!}{n!} v(i) = v(i).$$

□

La proposición anterior indica que el valor de Shapley asigna más de lo que logran por su propia cuenta los jugadores de un juego superaditivo; esta es una propiedad deseable desde el punto de vista individual, por ello se dice que el valor de Shapley satisface *racionalidad individual.*

Sin embargo si se considera que $x \in \mathbb{R}^n$ satisface *racionalidad de grupo*, es decir, que para todo $S \subseteq N$

$$x(S) \geq v(S),$$

donde

$$x(S) = \sum_{i \in S} x_i, \qquad S \subseteq N,$$

con la convención usual $x(\varnothing) = 0$, entonces resulta que el valor de Shapley no siempre es una de estas asignaciones.

Definición 1.9. *Dado un juego $v \in G$ su núcleo, $C(v)$, es el conjunto de asignaciones eficientes que satisfacen racionalidad de grupo,*

$$C(v) = \{x \in \mathbb{R}^n : x(N) = v(N) \text{ y } x(S) \geq v(S) \text{ para todo } S \subseteq N\}.$$

Existen juegos que tienen núcleo vacío y cuando éste es no vacío, no necesariamente contiene al valor de Shapley.

Ejemplo 1.4 (Juego de los guantes)**.** *Hay $n \geq 3$ jugadores. El jugador 1 tiene un guante izquierdo mientras que cada jugador en $N \setminus 1$ tiene un guante derecho. El valor de la coalición S es 1 cuando sus miembros pueden formar un par de guantes (izquierdo y derecho) y cero si no.*

El juego que modela la cooperación descrita está dado por

$$v(S) = \begin{cases} 1, & S \ni 1 \text{ y } s > 1; \\ 0, & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

Se tiene que $C(v) = \{(1, 0, \dots, 0)\}$ *y*

$$\varphi_i(v) = \begin{cases} \dfrac{n-1}{n}, & i = 1; \\ \dfrac{1}{n(n-1)}, & i \neq 1, \end{cases}$$

luego $\varphi(v) \notin C(v)$.

Existe una clase de juegos que siempre tienen nucleo no vacío.

Definición 1.10. *El juego* $v \in G$ *es convexo si para todo par de coaliciones* $S, T \subseteq N$ *se satisface la desigualdad*

$$v(S \cup T) + v(S \cap T) \geq v(S) + v(T).$$

Notemos que $v(S \cap T) = 0$, para todo $v \in G$ cuando S, T, son coaliciones disjuntas. De lo cual se sigue que si v es convexo entonces v es superaditivo.

Teorema 1.2 (Shapley, 1971). *Si* $v \in G$ *es convexo entonces tiene núcleo no vacío y*

$$\varphi(v) \in C(v).$$

Comentario. La idea central en la demostración de Shapley es la siguiente. Para $v \in G$ convexo y toda permutación $\sigma \in S_n$ el pago marginal $m^\sigma(v)$, cuyas coordenadas son

$$m_i^\sigma(v) = v(\sigma(1), \dots, \sigma(i)) - v(\sigma(1), \dots, \sigma(i-1)),$$

está en $C(v)$, lo cual demuestra que $C(v) \neq \varnothing$. Además el valor de Shapley satisface

$$\varphi(v) = \frac{1}{n!} \sum_{\sigma \in S_n} m^\sigma(v).$$

Luego, por la convexidad del núcleo, se tiene que $\varphi(v) \in C(v)$; véase [21].

Si $v \in G$ es tal que $C(v) \neq \varnothing$ existe una solución, $\nu(v)$, tal que $\nu(v) \in C(v)$. Tal solución es el nucleolo y fue propuesto por Schmeidler en 1969.

Definición 1.11. *Dado un juego* v *se define la función exceso* $e : \mathbb{R}^n \times 2^N \setminus \{\varnothing, N\} \to \mathbb{R}$ *por*

$$e(x, S) = v(S) - x(S).$$

Con la función de exceso definimos $\theta : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^{2^n-2}$ *como sigue. Para* $x \in \mathbb{R}^n$ *fijo, las coordenadas en forma ascendente del vector* $\theta(x) \in \mathbb{R}^{2^n-2}$ *son los* $2^n - 2$ *elementos en* $\{e(x, S) : S \in 2^N \setminus \{\varnothing, N\}\}$ *ordenados de forma descendente.*

En $\Theta_v = \{\theta(x) : x \in \mathbb{R}^n\}$ *se define el orden lexicográfico* $\preccurlyeq_L$. *Para* $x, y \in \Theta_v$, *se dice que* $x \preccurlyeq_L y$ *si* $x_i \leq y_i$ *para* $i \in \{1, 2, \dots, k\}$ *y* $x_{k+1} < y_{k+1}$.

Mediante el orden lexicográfico podemos comparar los elementos de Θ_v y obtener el siguiente

Teorema 1.3 (Schmeidler, 1969). *Sea $v \in G$. Si*

$$N(v) = \{x \in \mathbb{R}^n : \theta(x) \preccurlyeq_L \theta(y) \text{ para todo } y \in \mathbb{R}^n\},$$

entonces $N(v) = \{\nu(v)\}$. A $\nu(v)$ se le conoce como el nucleolo de v.[4]

Comentario. La demostración de este teorema depende esencialmente de que el orden lexicográfico es un orden completo y por tanto $N(v)$ no puede contener más de un elemento. Véase [18].

Corolario 1.1. *Si $v \in G$ es tal que $C(v) \neq \varnothing$ entonces $\nu(v) \in C(v)$.*

Demostración. Notemos que para todo $x_1 \in C(v)$ y $x_2 \notin C(v)$ se tiene que $e(x_1, S) \leq 0$ para toda $S \subset N$ y $e(x_2, S) > 0$ para algún $S \subset N$; por lo que $\theta(x_1) \preccurlyeq_L \theta(x_2)$. Luego, $\nu(v) \in C(v)$. □

El resultado anterior es útil cuando el núcleo de v consiste de un sólo punto.

Ejemplo 1.5. *Sea v el juego del ejemplo 1.4. Por el corolario 1.1 se tiene que el nucleolo de v es $\nu(v) = (1, 0, \ldots, 0)$ ya que $C(v) = \{(1, 0, \ldots, 0)\}$.*

1.4. Algunos problemas de bancarrota

Contrario a la repartición de utilidades se puede tratar con la repartición de costos o pérdidas; a manera de ejemplo, considérese la siguiente situación contenida en [5, 12].

Ejemplo 1.6 (Tarifas de aterrizaje en un aeropuerto). *En un aeropuerto se construye una pista donde aterrizarán n aviones, ¿cómo repartir el costo total de construcción entre los aviones que la usaran?*

Solución de Owen y Littlechild (1973). Primero se considera el costo de construir la pista para el avión más pequeño que la usará; este costo se divide entre todos los aviones. En seguida se considera el incremento del costo que tendra construir la pista suficientemente grande para que pueda aterrizar el siguiente avión más pequeño; este incremento se divide entre todos los aviones menos el más pequeño, y así sucesivamente hasta llegar al avión más grande.

El problema de repartición de costos es un caso particular de un conjunto de problemas llamado *problemas de bancarrota* y el procedimiento de Owen y Littlechild esta relacionado con la solución de algunos de ellos.

Definición 1.12. *Un problema de bancarrota $[E; c]$ consiste en una cantidad positiva E, denominado el estado, y un vector de reclamos $c \in \mathbb{R}^n$ tal que sus coordenadas son todas positivas y satisfacen $c_1 + c_2 + \cdots + c_n > E$.*

Al conjunto de entes N que hacen los reclamos se les denomina agentes, y al conjunto de problemas de bancarrota se le denota por B_N.

[4] En adelante reservamos la letra ν para referirnos al nucleolo, a menos que se indique lo contrario.

Ejemplo 1.7 (La prenda en disputa). *La siguiente situación de conflicto se describe en los pasajes del Talmud*

> *dos mujeres pelean por una prenda, una de ellas reclama la prenda completa y la otra sólo la mitad.*

¿Cómo repartir la prenda, dado que no se alcanza a satisfacer la demanda total del bien?

Discusión. El vector de reclamos es $c = (1/2, 1)$ y el estado es $E = 1$. Al igual que cuando se considera un juego cooperativo; la solución de este problema no parece evidente: en primera instancia uno podría sugerir que la solución es dar la mitad de la prenda a cada mujer. De inmediato, la mujer que reclama la prenda completa protestaría. Más aun, quedaría inconforme con cualquier solución que asigne más de la mitad de la prenda a la mujer que reclama sólo la mitad.

Los pasajes del Talmud sugieren dar 3/4 de la prenda a la mujer que la reclama toda y 1/4 a la mujer que reclama la mitad. ¿Por qué se sugiere esta solución?

Para fijar ideas, necesitamos saber que se entiende por solución a un problema de bancarrota.

Definición 1.13. *Una solución a problemas de bancarrota es una función $\varphi : B_N \to \mathbb{R}^n$ que satisface*

$$0 \leq \varphi_i([E; c]) \leq c_i \qquad y \qquad \sum_{i \in N} \varphi_i([E; c]) = E.$$

Ejemplo 1.8 (La herencia incompleta). *Otro ejemplo interesante ocurre en la siguiente situación, contenida también en los pasajes del Talmud.*

> *Un hombre, que tiene deudas por 100, 200 y 300 (en algunas unidades), muere y lo que deja como herencia no es suficiente para pagar el total de sus deudas.*

El Talmud indica cómo se debe pagar a los acreedores en tres casos posibles: cuando la herencia es 100, 200 y 300. La solución sugerida se muestra en la siguiente tabla

Herencia\ Reclamos	Acreedor 1 100	Acreedor 2 200	Acreedor 3 300
100	33 1/3	33 1/3	33 1/3
200	50	75	75
300	50	100	150

Uno se pregunta ¿qué criterio fue usado en cada caso para repartir la herencia existente? Observemos que si el valor de la herencia es de 100 se procede a pagar de forma equitativa y si la herencia es 300 se paga, inconsistentemente con lo ya observado, de forma proporcional. Además, el pago en el caso de que la herencia tenga un valor de 200 no es equitativo ni proporcional y no hay principio evidente que relacione a las tres asignanciones sugeridas en los tres casos.

Ejemplo 1.9 (La subasta cancelada). *Cinco personas hacen pujas de 10, 20, 30, 40 y 50 para obtener un artículo. Al final todos ellos rechazan comprar el artículo y éste es vendido a una persona diferente por 5 unidades. La pérdida de 45 debe ser repartida entre los cinco postores.*

La solución es como sigue: los cinco postores ofrecieron al menos 10, así que todos son responsables por 5 unidades, que es la diferencia entre 10 y el valor en el que fue vendido el artículo. Estas cinco unidades se dividen igualmente entre los cinco postores. Por las siguientes 10 unidades de la pérdida sólo son responsables cuatro personas: aquellas que ofrecieron al menos 20, así que estas 10 unidades son pagadas por estas cuatro personas. Continuando con este proceso, la pérdida debe ser cubierta de acuerdo al vector de pagos $(1, 3\frac{1}{2}, 6\frac{5}{6}, 11\frac{5}{6}, 21\frac{5}{6})$.

El procedimiento con el cual se resuelve el problema anterior es idéntico a la solución de Owen y Littlechild al problema de las tarifas de aterrizaje en un aeropuerto; éste no es el único problema de bancarrota donde se da esta coincidencia [2]. Sin embargo, dicho procedimiento aplicado al problema del ejemplo 1.8 no conduce a la solución prescrita por los pasajes del Talmud.

La razón de esta discrepancia es que las asignaciones resultan de aplicar principios de reparto distintos. En el siguiente capítulo estudiaremos ambos principios de reparto y describiremos cómo son obtenidos mediante el valor de Shapley y el nucleolo de ciertos juegos cooperativos.

Capítulo 2

El principio de la prenda en disputa

2.1. Dos principios de reparto bipersonales

La solución al problema de la prenda en disputa propuesta en el Talmud puede interpretarse como resultado de aplicar el siguiente razonamiento.

(P1) Primer principio de reparto. Cada mujer[1] debe conceder lo que no quiere para sí, a la otra. La parte sobrante, en caso de haber, se reparte en forma igualitaria.

Este procedimiento evidentemente conduce a la solución $3/4 - 1/4$, sin embargo, no es el único que nos lleva a la misma solución.

(P2) Segundo principio de reparto. Partes igualmente reclamadas son igualmente divididas. La parte sobrante, en caso de haber, se reparte en forma igualitaria.

Resolvamos otro problema aplicando ambos principios de reparto.

Ejemplo 2.1. *Un hombre muere y deja intestado un terreno. Su esposa reclama el terreno completo y su único hijo reclama la tercera parte. ¿Cómo se debe repartir el terreno?*

Aplicando el primer principio tenemos que la esposa concede 0 *a su hijo, mientras que este concede* $2/3$ *del terreno a su madre. Como queda* $1/3$ *del terreno sin asignar, se reparte igualitariamente. Dando la asignación final:* $5/6$ *para la esposa y* $1/6$ *para el hijo.*

Por otro lado, si aplicamos el segundo principio tenemos que $1/3$ *del terreno es la parte disputada por ambos. Luego, de esta fracción se le da la mitad a cada persona,* $1/6 - 1/6$. *Como los otros* $2/3$ *del terreno sólo están siendo reclamados por la esposa, se le asignan a ella. La asignación final es:* $5/6$ *para la esposa y* $1/6$ *para el hijo.*

También en este ejemplo ambos principios nos conducen a la misma solución, lo cual no es coincidencia.

[1] Agente en general. Usamos el término *mujer* debido al relato original.

Proposición 2.1. *Si en el problema de bancarrota $[E; c]$ se tiene que $N = \{A, B\}$ entonces la aplicación de cualquiera de los dos principios de reparto $P1$ y $P2$ conducen a la misma solución.*

Demostración. Notemos que si $c = (c_1, c_2)$, con $c_i \geq E$, entonces la solución obtenida con la aplicación de cualquier principio es $E/2 - E/2$. Ya que, de acuerdo a $P1$ nadie concede nada y el estado se divide igualitariamente. Aplicando $P2$ se tiene que el estado completo está siendo reclamado por ambas personas, por lo que se debe repartir igualitariamente.

Si $c_1 < E \leq c_2$. Entonces, según $P1$, B no concede nada a A y A concede $E - c_1$ a B. Como sobra c_1, esto se reparte igualitariamente. Lo anterior da lugar a la solución $c_1/2$ para A y $E - c_1/2$ para B. Según $P2$, ambos están reclamando c_1 por lo que esta cantidad se reparte igualitariamente. El sobrante $E - c_1$ se asigna a B ya que sólo él lo está reclamando; se obtiene la misma solución que con $P1$. Lo mismo sucede, intercambiando los jugadores, si $c_2 < E \leq c_1$.

Si $c_1 \leq c_2 < E$ entonces $P1$ indica que A concede $E - c_1$ a B y B concede $E - c_2$ a A. Como sobra $c_1 + c_2 - E$ se le da a cada uno la mitad, al sumar, los pagos finales son

$$\frac{E}{2} + \frac{c_1 - c_2}{2} \qquad \text{y} \qquad \frac{E}{2} + \frac{c_2 - c_1}{2} \tag{2.1}$$

para A y B respectivamente. Por otro lado ambos jugadores disputan c_1, de acuerdo a $P2$, se les asigna $c_1/2$ a cada uno. En seguida, el incremento $c_2 - c_1$ sólo lo reclama B, por lo que se le asigna a él. Aún queda $E - c_2$ sin asignar, esta porción se reparte igualitariamente. Al sumar, uno verifica que los pagos están dados por (2.1). El mismo analísis es válido, intercambiando los jugadores, si $c_2 \leq c_1 < E$. $\square$

Se podría pensar que $P1$ y $P2$ son el mismo principio de reparto, sin embargo posteriormente presentaremos una generalización de estos dos principios con la cual mostraremos que si N consta de más de dos jugadores entonces nos conducen a resultados diferentes.

Uno puede pensar en los principios $P1$ y $P2$ como consejos de dos jueces diferentes, sugeridos a dos partes en conflicto. El primero de ellos resuelve el conflicto *cediendo* lo que no quiere una persona a la otra, el segundo lo hace *repartiendo* igualitariamente las partes en disputa.

Lo anterior motiva la aplicación de estos principios de reparto para obtener soluciones a juegos cooperativos.

2.2. Generalización

Una vez vista la forma en que se resuelven problemas de bancarrota bipersonales con $P1$ y $P2$, es natural preguntarse si existe una extensión de estos principios para hallar una solución cuando el problema es $n-$personal.

Primero abordemos el caso de $P2$. La forma en la que procedemos es interpretando a los reclamos ordenados; sin pérdida de generalidad $c_1 \leq c_2 \leq \cdots \leq c_n$, digamos. En seguida se eligen n intervalos anidados

$$[0, c_1] \subseteq \cdots \subseteq [0, c_n]$$

y uno extra $[0, E]$.

Las partes disputadas ocurren en la intersección de los primeros n intervalos con el intervalo $[0, E]$. Notemos que el intervalo $[0, \text{mín}\{E, c_1\}]$ está disputado por las n personas y $P2$ indica que partes igualmente disputadas deben ser igualmente divididas; por lo que la cantidad

$$\frac{\text{mín}\{c_1, E\}}{n}$$

se asigna a cada persona en N.

Se ha repartido $\text{mín}\{c_1, E\}$. Si $E > c_1$, $n-1$ personas, todos menos el primero, disputan el intervalo $[\text{mín}\{E, c_1\}, \text{mín}\{c_2, E\}]$. Por lo que, aplicando $P2$ de nuevo, se asigna

$$\frac{\text{mín}\{c_2, E\} - \text{mín}\{c_1, E\}}{n-1}$$

a cada persona en $N \setminus 1$.

El proceso sigue hasta llegar a $\text{mín}\{c_n, E\}$. Si $c_n < E$ entonces el intervalo $[c_n, E]$ no es reclamado por nadie y según $P2$ se debe repartir igualitaramente, por lo que, si este es el caso, se asigna

$$\frac{E - c_n}{n}$$

a cada persona en N.

Sumando sobre las asignaciones hechas con el proceso anterior se tiene que la generalización de $P2$ es

$$\beta_i([E; c]) = \sum_{j=1}^{i} \frac{\text{mín}\{E, c_j\} - \text{mín}\{E, c_{j-1}\}}{n-j+1} + \frac{(E - c_n)_+}{n}, \tag{2.2}$$

donde $c_0 = 0$ y la función θ_+ está definida por

$$\theta_+ = \begin{cases} \theta, & \theta \geq 0; \\ 0, & \theta < 0. \end{cases}$$

Una nota importante acerca de esta solución es que la fórmula encontrada no es solución a todo problema de bancarrota.

Ejemplo 2.2. *Tres socios invierten* 99, 201 *y* 300 *unidades, respectivamente, en un negocio. Al cabo de cierto tiempo no se obtienen los resultados esperados y, tras cerrar el negocio, sólo pueden recuperar* 501 *unidades. ¿Cómo se debe repartir este monto entre los socios? Solución. Tenemos el problema de bancarrota* $[E; c] = [501; 99, 201, 300]$. *Empleando* (2.2) *se tiene la solución*

$$\beta([E; c]) = (100, 151, 250),$$

la cual indica que el jugador 1 *recibe más de lo que reclama. Esto, según la definición* 1.13*, no es admitido como solución.*

Existe otro problema con la fórmula (2.2).

Proposición 2.2. *Si* $C = c_1 + c_2 + \cdots + c_n$ *y* $n > 1$*, entonces la solución* (2.2) *satisface*

$$\beta_i([C; c]) = c_i \tag{2.3}$$

si y sólo si $c_1 = c_2 = \cdots = c_{n-1}$.

Demostración. Si todos los reclamos c_i son iguales, excepto quizá c_n, entonces

$$\beta_i([C; c]) = \frac{c_1}{n} + \frac{(n-1)c_1}{n} = c_1$$

para todo $i \in N \setminus n$ y

$$\beta_n([C; c]) = c_1 + c_n - c_{n-1} = c_n.$$

Si se satisface (2.3), entonces

$$c_{i+1} - c_i = \frac{c_{i+1} - c_i}{n - i}$$

por lo que $c_i = c_{i+1}$ para todo $i \in \{1, 2 \ldots, n-2\}$. □

El ejemplo 2.2 y la proposición anterior indican que, cuando $E \in (c_n, C]$, la solución (2.2) no es necesariamente una solución a problemas de bancarrota. Lo cual si se garantiza cuando $E \in (0, c_n]$.

Proposición 2.3. *La solución*

$$\beta_i([E; c]) = \sum_{j=1}^{i} \frac{\min\{E, c_j\} - \min\{E, c_{j-1}\}}{n - j + 1},$$

que es consecuencia de (2.2)*, cuando* $E \leq c_n$*, es una solución a problemas de bancarrota.*

Demostración. Notemos que

$$\begin{aligned} \sum_{i \in N} \beta_i([E; c]) &= \sum_{j=1}^{i} \sum_{i=1}^{n} \frac{\min\{E, c_j\} - \min\{E, c_{j-1}\}}{n - j + 1} \\ &= \sum_{j=1}^{n} \min\{E, c_j\} - \min\{E, c_{j-1}\} \\ &= \min\{E, c_n\} = E. \end{aligned}$$

Además

$$\begin{aligned} \beta_i([E; c]) &= \sum_{j=1}^{i} \frac{\min\{E, c_j\} - \min\{E, c_{j-1}\}}{n - j + 1} \\ &\leq \sum_{j=1}^{i} \min\{E, c_j\} - \min\{E, c_{j-1}\} \\ &= \min\{E, c_i\} \leq c_i \end{aligned}$$

□

En particular, tenemos que si $E = c_n$ entonces la fórmula (2.2) se reduce a

$$\beta_i([E;c]) = \sum_{j=1}^{i} \frac{c_j - c_{j-1}}{n-j+1}. \tag{2.4}$$

Esta fórmula conduce a la solución de Owen y Littlechild para el problema de costos del ejemplo 1.6.

Mejor aun, si el problema del ejemplo 1.1 es modelado como un problema de bancarrota $[c_n; c]$, y se aplica (2.4), entonces se obtiene el valor de Shapley del juego

$$u(S) = \max_{i \in S} c_i, \tag{2.5}$$

según el ejemplo 1.3.

Es decir,

$$\varphi(u) = \beta([c_n; c]), \tag{2.6}$$

para todo problema de bancarrota $[c_n; c] \in B_N$. Lo cual es un caso particular del siguiente

Teorema 2.1 (Aumann, 2010). *Si $[E;c] \in B_N$ y se define el juego u por*

$$u(S) = \begin{cases} \min\{\max_{i\in S} c_i,\, E\}, & S \subsetneq N; \\ E, & S = N, \end{cases} \tag{2.7}$$

entonces el valor de Shapley del juego u está dado por

$$\varphi_i(u) = \sum_{j=1}^{i} \frac{\min\{E, c_j\} - \min\{E, c_{j-1}\}}{n-j+1} + \frac{(E-c_n)_+}{n}.$$

Demostración. Por casos. Si $E = c_n$, sea $c_0 = 0$ y

$$w_i(S) = \begin{cases} c_i - c_{i-1}, & i \leq \max S; \\ 0, & \text{en otro caso}, \end{cases}$$

entonces, por la definición de u se sigue que

$$u(S) = \max_{i\in S} c_i = \sum_{i=1}^{\max S} (c_i - c_{i-1}) = \sum_{i=1}^{n} w_i(S).$$

Notemos que en el juego w_j los jugadores $1, \ldots, j-1$ so nulos y los jugadores $j, \ldots, n$ son sustitutos, por lo que

$$\varphi_i(w_j) = \begin{cases} 0, & i < j; \\ \dfrac{c_j - c_{j-1}}{n-j+1}, & i \geq j, \end{cases}$$

De donde, por la aditividad del valor de Shapley, se sigue que

$$\varphi_i(u) = \sum_{j=1}^{n} \varphi_i(w_j) = \sum_{j=1}^{i} \frac{c_j - c_{j-1}}{n-j+1},$$

es decir, la generalización de $P2$.

Cuando $c_n > E$, los argumentos siguen válidos reemplazando c_i por $\min\{c_i, E\}$. En el caso $E > c_n$ se usa la descomposición

$$u(S) = (E - c_n)u_N(S) + \max_{i \in S} c_i,$$

donde u_N es el juego de unanimidad sobre N y, por la aditividad del valor de Shapley, se sigue que

$$\varphi_i(u) = \frac{(E - c_n)}{n} + \sum_{j=1}^{i} \frac{c_j - c_{j-1}}{n - j + 1},$$

verificando la generalización del principio $P2$ como valor de Shapley del juego u. $\square$

Corolario 2.1. *Si* $E = c_n$ *en el Teorema* 2.1 *entonces el juego* u *se reduce al juego* (2.5) *y en ese caso el valor de Shapley de* u *es* (2.4)*, por lo que* (2.6) *se verifica.*

Una consecuencia importante es que las soluciones a los problemas de bancarrota planteados en los ejemplos 1.1, 1.6, 1.7 y 1.9 son casos particulares del teorema 2.1. En todos ellos se tiene que $E \leq c_n$ y, por ende, no hay ningún problema como en el caso del ejemplo 2.2.

Los problemas de la solución (2.2) señalados por la proposición 2.2 y el ejemplo 2.2 cuando $E \in (c_n, C]$ no se tienen en soluciones como el *valor de mínima superposición.*[2] Dicha solución está dada por

$$\mu_i([E; c]) = \sum_{j=1}^{i} \frac{\min\{c_i, t\} - \min\{c_{i-1}, t\}}{n - j + 1} + \max\{c_i - t, 0\},$$

donde $t = E$ si $E < c_n$ y si $E \geq c_n$ entonces t es la única solución a la ecuación

$$\sum_{k=1}^{n} \max\{c_k - t, 0\} = E - t.$$

Consúltese [1].

Notemos que la solución sugerida en los pasajes del Talmd al problema de bancarrota del ejemplo 1.8 no corresponde a la generalización de $P2$ ya que

$$\beta([300; 100, 200, 300]) = (33\,1/3, 83\,1/3, 183\,1/3).$$

Esto indica que la solución propuesta en los pasajes del Talmud a este problema proviene de otro principio de reparto.

Para escribir la generalización de $P1$ al caso de más de dos agentes debemos tomar en consideración dos soluciones clásicas a problemas de bancarrota. La solución de iguales ganancias

$$\gamma_i([E; c]) = \min\{c_i, t\}$$

[2] Minimal overlap value.

donde $t > 0$ es el único número tal que $\sum_{i=1}^{n} \text{mín}\{c_i, t\} = E$, y la solución de iguales pérdidas

$$\pi_i([E; c]) = \text{máx}\{0, c_i - t\},$$

donde $t \geq 0$ es el único número tal que $\sum_{i=1}^{n} \text{máx}\{0, c_i - t\} = E$.

La generalización de $P1$, α, es por inducción sobre $n-$el número de personas$-$ como sigue. Supongamos que conocemos la solución para problemas $(n-1)-$personales en los cuales se considera a los agentes $\{2, \ldots, n\}$. Si 1 es un agente extra entonces dependiendo de E y c_1 tratamos al problema $n-$personal $[E; c]$ de acuerdo a uno de los siguientes tres casos

1. Si $E \leq nc_1/2$ entonces aplicar la solución de iguales ganancias, γ, al problema $[E; c]$.
2. Si $nc_1/2 \leq E \leq C - nc_1/2$, entonces repartir E entre las coaliciones 1 y $N \setminus 1$ usando $P1$. Luego, usar la solución conocida para repartir el monto asignado a la coalición $N \setminus 1$ entre sus miembros.
3. Si $C - nc_1/2 \leq E$, entonces aplicar la solución de iguales pérdidas, π, al problema $[E; c]$.

Ejemplo 2.3. *El problema del ejemplo* 1.8 *es* $[E; 100, 200, 300]$ *para tres posibles casos de E. Con* $E = 100$ *tenemos que* $E = 100 < 3c_1/2 = 150$*, por lo que, según la generalización de* $P1$*, al aplicar iguales ganancias*

$$\alpha([100; 100, 200, 300]) = (33\,1/3,\ 33\,1/3,\ 33\,1/3).$$

Si $E = 200$ *entonces* $3c_1/2 = 150 < E < c - 3c_1/2 = 450$*, por lo que, al aplicar* $P1$ *dos veces se tiene que*

$$\alpha([200; 100, 200, 300]) = (50,\ 75,\ 75). \tag{2.8}$$

De forma similar al caso anterior, por la doble aplicación de $P1$*, se tiene que*

$$\alpha([300; 100, 200, 300]) = (50,\ 100,\ 150).$$

Hemos revisado la forma en que se puede generalzar $P1$ y además mostramos que la generalización de este principio nos da la solución sugerida por los pasajes del Talmud al problema de la herencia en el ejemplo 1.8.

Además, se puede demostrar [10, 22] que

$$\alpha([E; c]) = \begin{cases} \gamma([E; 1/2\, c]), & E \leq 1/2C; \\ 1/2\, c + \pi([E - 1/2\, C; 1/2\, c]), & E > 1/2C. \end{cases} \tag{2.9}$$

En esta expresión es notable la simetría de la solución α con respecto a $E = 1/2C$. Una familia de soluciones que preservan esta simetría con respecto al estado $E = \theta C$, con $\theta \in [0, 1]$, puede verse en [8].

2.3. Consistencia

Para caracterizar a la solución α que generaliza a $P1$ veamos que la asignación dada por (2.8) satisface la siguiente propiedad. A la coalición $\{1, 2\}$ se le asignó 125, si reasignamos este monto conforme a $P1$ encontramos que

$$\alpha([125; 100, 200]) = (50, 75).$$

Lo mismo sucede para las coaliciones $\{1, 3\}$ y $\{2, 3\}$,

$$\alpha([125; 100, 300]) = (50, 75), \qquad \text{y} \qquad \alpha([150; 200, 300]) = (75, 75).$$

Es decir, el vector (50, 75, 75) posee la propiedad de que sus coordenadas, como soluciones de todos sus subproblemas bipersonales, se preservan de acuerdo a $P1$.

Definición 2.1. *Decimos que la solución a problemas de bancarrota ϕ es consistente con el principio de la prenda en disputa (c.p.p.d., por brevedad), si para todo $[E; c] \in B_N$ se tiene que*

$$\phi([\phi_i([E; c]) + \phi_j([E; c]); c_i, c_j]) = (\phi_i([E; c]),\, \phi_j([E; c])), \qquad i,\, j \in N.$$

Esta característica que acabamos de observar es suficiente para caracterizar a la generalización de $P1$.

Teorema 2.2 (Aumann y Mashler, 1985)**.** *La solución ϕ es consistente con el principio de la prenda en disputa si y sólo si $\phi = \alpha$.*

Demostración. Primero mostraremos que la solución α dada por (2.9) es c.p.p.d. Si $E \leq C/2$ entonces existe un único t tal que

$$\alpha_i([E; c]) = \gamma_i([E; c/2]) = \text{mín}\{c_i/2, t\},$$

con $\text{mín}\{c_1/2, t\} + \cdots + \text{mín}\{c_n/2, t\} = E$. Además para problemas bipersonales se tiene que

$$\alpha_i([E; c_i, c_j]) = \frac{1}{2}\left(E + (E - c_j)_+ - (E - c_i)_+\right) \tag{2.10}$$

y

$$\alpha_j([E; c_i, c_j]) = \frac{1}{2}\left(E + (E - c_i)_+ - (E - c_j)_+\right). \tag{2.11}$$

Sin pérdida de generalidad, si $c_i \leq c_j$ entonces

$$\alpha_i([E; c]) + \alpha_j([E; c]) = \begin{cases} 2t, & t \leq c_i/2 \leq c_j/2; \\ c_i/2 + t, & c_i/2 \leq t \leq c_j/2; \\ c_i/2 + c_j/2, & c_i/2 \leq c_j/2 \leq t, \end{cases}$$

de donde, al sustituir cada una de estas expresiones por E en (2.10) y (2.11), se sigue que

$$\alpha([\alpha_i([E; c]) + \alpha_j([E; c]); c_i, c_j]) = (\alpha_i([E; c]),\, \alpha_j([E; c])),$$

de forma análoga se obtiene la expresión anterior cuando $E > C/2$.

Antes de mostrar que α es única, observemos que es una solución monótona respecto a E. Si $E_1 \leq E_2$ y

$$\alpha_i([E_1; c]) > \alpha_i([E_2; c]),$$

entonces por consistencia

$$\alpha_i([E_1; c_i,\, c_j]) > \alpha_i([E_2; c_i,\, c_j]), \qquad j \in N,$$

de donde, al usar (2.10)

$$E_1 - E_2 + (E_1 - c_j)_+ - (E_2 - c_j)_+ + (E_2 - c_i)_+ - (E_1 - c_i)_+ > 0,$$

lo cual es imposible por la monotonicidad de la función θ_+.

Si existen dos soluciones, x, y, c.p.p.d. entonces existen i, $j \in N$ tales que $y_i > x_i$, $y_j < x_j$ y $y_i + y_j \geq x_i + x_j$. Consistencia implica que (2.11) asigna x_j a j cuando $E = x_i + x_j$ y y_j cuando $E = y_i + y_j$. Como $y_i + y_j \geq x_i + x_j$ la monotonicidad recién mostrada indica que $y_j \geq x_j$, lo cual es imposible. □

Una de las cosas que mostramos es que la generalización de $P2$, la solución β, es el valor de Shapley del juego (2.7). Para la generalización de $P1$, la solución α, también se cumple algo análogo [3].

Teorema 2.3 (Aumann y Maschler, 1985). *Si* $[E; c] \in B_N$ *y el juego* w *se define mediante*

$$w(S) = \max\{0, E - c(N \setminus S)\} \tag{2.12}$$

entonces el nucleolo de w *es la solución* α *c.p.p.d. que generaliza a* $P1$.

Comentario. La demostración de este teorema se basa en el hecho de que la solución α está contenida en el conjunto denominado el kernel[3] de w y además para este juego dicho conjunto consiste de un solo punto. Como el nucleolo de un juego cooperativo es una asignación de su kernel se tiene que α es el nucleolo de w.

Una consecuencia del Teorema 2.3 es que (2.9) es una fórmula explícita para encontrar el nucleolo de todos los juegos de la forma (2.12), lo cual es un logro teórico importante.

Ejemplo 2.4. *Se sabe que el nucleolo es estándar para juegos bipersonales, es decir, que para todo juego* $v \in G$ *donde* $|N| = 2$ *se tiene que*

$$\nu_i(v) = v(i) + \frac{1}{2}(v(12) - v(1) - v(2)).$$

Por lo que en el caso $v = w$ *se tiene que*

$$\begin{aligned}
\nu_i(v) &= (E - c_{3-i})_+ + \frac{1}{2}(E - (E - c_1)_+ - (E - c_2)_+) \\
&= \frac{1}{2}(E + (E - c_{3-i})_+ - (E - c_i)_+) \\
&= \alpha_i([E; c_1, c_2]),
\end{aligned}$$

según (2.10) *y* (2.11). *Verificando el Teorema* 2.3 *para juegos bipersonales.*

[3] Véase [3], página 209.

Cuando uno desea obtener la solución (2.9) para un problema de bancarrota, los cálculos no son tan directos como cuando se determina (2.2), ya que es el nucleolo de un juego. Esta dificultad nos lleva a pensar que la recomendación del Talmud a la solución del problema de la herencia incompleta no está relacionada del todo con la solución α.

Sin embargo, en [7] se puede consultar un ingenioso método que Mashler ideó para explicar de forma sencilla como obtener la solución α para cualquier problema de bancarrota. Tal procedimiento no requiere de ningún concepto de teoría de juegos.

Capítulo 3

Dos nuevas soluciones a juegos cooperativos

En el presente capítulo se determinan dos nuevas soluciones a juegos cooperativos basados en el principio de la prenda en disputa para problemas bipersonales. En tales soluciones las dos partes en conflicto son coaliciones.

Las dos soluciones que proponemos, cuando los juegos son superaditivos, pertenecen a una clase de soluciones que estudiamos brevemente.

3.1. Soluciones no nulas

A partir de los axiomas que caracterizan al valor de Shapley, se obtiene que éste es una solución única. Si uno considera aquellas soluciones que satisfacen sólo los axiomas de aditividad, simetría y eficiencia, y no necesariamente el axioma de nulidad, entonces la unicidad mencionada se pierde y lo que se tiene es una familia de soluciones.

Tal familia de soluciones tiene una expresión explícita [9] y es resultado del siguiente

Teorema 3.1. *Una solución ϕ satisface los axiomas de aditividad, simetría y eficiencia si y sólo si es de la forma*

$$\phi_i(v) = \frac{v(N)}{n} + \sum_{\substack{S \ni i \\ S \neq N}} (n-s)[\lambda_s v(S) - \lambda_{n-s} v(N \setminus S)] \tag{3.1}$$

con $\lambda_1, \ldots, \lambda_{n-1}$ arbitrarios.

Demostración. Es sencillo verificar que si una solución es de la forma (3.1) entonces es aditiva, simétrica y eficiente.

Para demostrar la otra dirección observemos que la solución continua ϕ es lineal en G si y sólo es aditiva.

Para cada $S \subseteq N$, sea χ_S el juego definido por

$$\chi_S(T) = \begin{cases} 1 & T = S; \\ 0 & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

Puesto que los juegos χ_S son una base de G; la aditividad de ϕ y la observación anterior implican que, con $\rho_S^i = \phi_i(\chi_S)$, para cada $i \in N$

$$\phi_i(v) = \sum_{S \subseteq N} v(S)\rho_S^i.$$

Sean P, Q coaliciones de la misma cardinalidad con $i \in P$, $j \in Q$ y $\sigma \in S_n$ tal que $\sigma(P) = Q$, $\sigma(i) = j$, $\sigma(j) = i$. Por simetría

$$\phi_i(\chi_P) = \phi_{\sigma(j)}(\chi_P) = \phi_j(\sigma\chi_P) = \phi_j(\chi_Q),$$

luego $\rho_P^i = \rho_Q^j$ si $|P| = |Q|$ y $i \in P$, $j \in Q$. Lo mismo se tiene, usando un argumento similar, si $|P| = |Q|$ y $i \notin P$, $j \notin Q$. Luego, la solución ϕ puede ser escrita como

$$\phi_i(v) = \sum_{S \ni i} \rho_s v(S) + \sum_{S \not\ni i} \widetilde{\rho_s} v(S)$$

para algunas constantes $\{\rho_s\}_{s=1}^n \cup \{\widetilde{\rho_s}\}_{s=0}^{n-1}$.

Además, por eficiencia, se tiene que si $S \subsetneq N$

$$\sum_{i \in N} \phi_i(\chi_S) = s\rho_s + (n-s)\widetilde{\rho_s} = 0$$

y

$$\sum_{i \in N} \phi_i(\chi_N) = n\rho_n = 1,$$

de donde $\widetilde{\rho_s} = -s\rho_s/(n-s)$ y $\rho_n = 1/n$ y, por tanto,

$$\begin{aligned}\phi_i(v) &= \sum_{S \ni i} \rho_s v(S) + \sum_{S \not\ni i} \frac{s}{n-s} \rho_s v(S) \\ &= \sum_{S \ni i} \rho_s v(S) + \sum_{S \ni i} \frac{n-s}{s} \rho_s v(S).\end{aligned}$$

Finalmente, reemplazando $\lambda_s = \rho_s/(n-s)$ en la expresión anterior obtenemos

$$\phi_i(v) = \frac{v(N)}{n} + \sum_{\substack{S \ni i \\ S \neq N}} (n-s)\left(\lambda_s v(S) - \lambda_{n-s} v(N \setminus S)\right).$$

□

Naturalmente el valor de Shapley es una de las soluciones (3.1), sus coeficientes son

$$\lambda_s = \frac{(s-1)!(n-s-1)!}{n!}. \tag{3.2}$$

También el denominado *valor de solidaridad*

$$\zeta_i(v) = \sum_{S \ni i} \frac{(n-s)!(s-1)!}{n!} A^v(S),$$

donde

$$A^v(S) = \frac{1}{s}\sum_{k\in S}(v(S) - v(S\setminus k)),$$

ya que es una solución que satisface los axiomas de aditividad, simetría y eficiencia [15]. Los coeficientes del Teorema 3.1 para esta solución son

$$\lambda_s = \frac{(s-1)!(n-s-1)!}{(s+1)n!}.$$

Insertando éstos en (3.1) se obtiene la siguiente expresión alternativa para el valor de solidaridad

$$\zeta_i(v) = \frac{v(N)}{n} + \sum_{\substack{S\ni i\\ S\neq N}} \frac{(n-s)!(n-1)!}{n!}\left[\frac{v(S)}{s+1} - \frac{v(N\setminus S)}{n-s+1}\right].$$

Esta es una solución razonable en algunos juegos, por ejemplo, considérese la siguiente situación.

Ejemplo 3.1 (Tres hermanos)**.** *Los jugadores* 1, 2 *y* 3 *son hermanos y viven juntos. Los jugadores* 1 *y* 2 *pueden conseguir un ingreso de una unidad trabajando juntos, pero por separado no consiguen nada. El jugador* 3 *está inválido y no puede contribuir nada a ninguna coalición. Por lo que* $v(1,2,3) = v(1,2) = 1$ *y* $v(1,3) = v(2,3) = v(i) = 0$*.*

Notemos que el juego v *que modela esta situación es el juego de unanimidad* $u_{\{1,2\}}$ *y su valor de Shapley es*

$$\varphi(u_{\{1,2\}}) = (1/2, 1/2, 0).$$

Con el analísis anterior ¿se podría concluir que el tercer hermano debe abandonar la familia? Si los jugadores 1 *y* 2 *toman la responsabilidad de su hermano (el jugador 3), entonces el valor de solidaridad es*

$$\zeta(u_{\{1,2\}}) = (7/18, 7/18, 4/18).$$

Esta es una "mejor"solución a esta situación, puesto que el jugador 3 *no tiene posibilidad de contribuir. Véase* [15]*.*

Otro caso particular de esta clase de soluciones es el *valor de consenso*

$$\kappa_i(v) = \frac{1}{2}\varphi_i(v) + \frac{1}{2}\left(v(i) + \frac{v(N) - \sum_{i\in N} v(i)}{n}\right) \tag{3.3}$$

que resulta ser el promedio del valor de Shapley y el valor de *iguales ganancias* [11]. Los coeficientes del Teorema 3.1 para esta solución son

$$\lambda_1 = \frac{1}{2(n-1)} \qquad \text{y} \qquad \lambda_s = \frac{(s-1)!(n-s-1)!}{2n!}, \quad s = 2, \ldots, n-1.$$

Un ejemplo en el cual esta solución es razonable es el siguiente.

Ejemplo 3.2. *Considere el juego de los guantes en el ejemplo* 1.4*. Su valor de Shapley es*

$$\varphi(v) = \left(\frac{n-1}{n}, \frac{1}{n(n-1)}, \ldots, \frac{1}{n(n-1)}\right);$$

mientras que el valor de iguales ganancias es $\phi_i(v) = 1/n$ *para todo* $i \in N$*, luego*

$$\kappa_i(v) = \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2(n-1)}, \ldots, \frac{1}{2(n-1)}\right).$$

Por un lado el valor de Shapley parece resaltar la importancia que tiene el jugador 1 *en el juego, mientras que el valor de consenso trata por igual a las partes "derecha" e "izquierda" ya que le asigna la mitad de la utilidad a cada una y luego reparte igualitariamente esta utilidad entre cada uno de sus miembros.*

3.2. Un valor esperado que involucra al principio de la prenda en disputa

Dado un juego $v \in G$, consideremos el siguiente problema. Las coaliciones no vacías S y $N \setminus S$, reclaman $v(S)$ y $v(N \setminus S)$, respectivamente sobre el estado $E = v(N)$.

Sin considerar que tenemos un problema de bancarrota $[v(N); v(S), v(N \setminus S)]$, puesto que para ello se debe satisfacer $v(S) + v(N \setminus S) > v(N)$ y en general no es éste el punto de vista que queremos adoptar, la solución que recomiendan los principios $P1$ y $P2$, del capítulo anterior, es pagar

$$\phi_S = \frac{1}{2}\left(v(N) + (v(N) - v(N \setminus S))_+ - (v(N) - v(S))_+\right)$$

a S y $v(N) - \phi_S$ a la coalición $N \setminus S$. En partícular, si el juego es superaditivo, los pagos son

$$\phi_S = \frac{1}{2}(v(N) + v(S) - v(N \setminus S))$$

para S y $v(N) - \phi_S$ para la coalición $N \setminus S$.

Estos pagos junto con el siguiente proceso aleatorio, sirven para obtener nuestra primera solución a juegos superaditivos.

1. Empleando la distribución uniforme se elige un cardinalidad s sobre el conjunto $\{1, \ldots, n-1\}$.

2. Se elige aleatoriamente una coalición cuya cardinalidad sea s, con distribución uniforme sobre las $\binom{n}{s}$ coaliciones posibles.

3. A cada jugador $i \in S$ se le paga

$$\frac{v(N) + v(S) - v(N \setminus S)}{2s},$$

   es decir, ϕ_S/s.

Proponemos como solución, ψ, al juego superaditivo v, el pago esperado del jugador i respecto al proceso aleatorio descrito anteriormente. Como i puede estar en S ó en $N \setminus S$ tenemos que

$$
\begin{aligned}
E_i(\phi_S/s) &= \sum_{S \ni i} \frac{v(N)+v(S)-v(N \setminus S)}{2s(n-1)\binom{n}{s}} + \sum_{N \setminus S \ni i} \frac{v(N)+v(S)-v(N \setminus S)}{2(n-s)(n-1)\binom{n}{n-s}} \\
&= \sum_{S \ni i} \frac{v(N)+v(S)-v(N \setminus S)}{s(n-1)\binom{n}{s}} \\
&= \frac{v(N)}{n} + \sum_{\substack{S \ni i \\ S \neq N}} \frac{(s-1)!(n-s)!}{(n-1)n!}(v(S)-v(N \setminus S)) \\
&= \psi_i(v).
\end{aligned}
$$

Note que esta solución es un caso particular de (3.1) con los coeficientes

$$
\lambda_s = \frac{(s-1)!(n-s-1)!}{(n-1)n!}, \qquad s = 1, \ldots, n-1,
$$

por lo que ψ es una solución aditiva, simétrica y eficiente según el Teorema 3.1.

Ejemplo 3.3. *La remodelación de una casa es pagada si se termina a tiempo; para esta tarea el contratista requiere de dos ayudantes. El primer día de trabajo uno de ellos sufre una lesión y queda incapacitado, así que los otros dos trabajadores deciden terminar el trabajo laborando horas extras.*

Si consideramos a 3 como el jugador incapacitado y que el valor de la coalición S es el indicador del pago por el trabajo completo tenemos que $v(1,2) = v(1,2,3) = 1$ y $v(S) = 0$ en otro caso.

El juego v es el juego de unanimidad $u_{\{1,2\}}$ y su valor de Shapley es

$$
\varphi(u_{\{1,2\}}) = (1/2,\, 1/2,\, 0),
$$

la pregunta que hacemos es, otra vez, en el sentido del ejemplo de los tres hermanos: ¿merece este pago el jugador 3 si ya estaba contratado?

La solución ψ a este juego es

$$
\psi(u_{\{1,2\}}) = (5/12,\, 5/12,\, 1/6),
$$

lo cual da evidencia de que ψ puede ser interpretada como una solución de solidaridad.

Ahora calculemos la solución ψ para los problemas de costos de los ejemplos 1.1 y 1.6. Para hacer más sencillos los cálculos notemos que insertando los coeficientes (3.2) en (3.1) tenemos que

$$\begin{aligned}\varphi_i(v) &= \frac{v(N)}{n} + \sum_{\substack{S\ni i\\ S\neq N}} \frac{(n-1)!(n-s)!}{n!}(v(S)-v(N\setminus S))\\ &= \frac{v(N)}{n} + (n-1)\left(\psi_i(v) - \frac{v(N)}{n}\right),\end{aligned}$$

de donde

$$\psi_i(v) = \left(\frac{n-2}{n-1}\right)\frac{v(N)}{n} + \left(\frac{1}{n-1}\right)\varphi_i(v). \tag{3.4}$$

Esta ecuación indica que, al igual que el valor de consenso (3.3), la solución ψ es una combinación convexa de dos soluciones eficientes: el valor de Shapley y la solución igualitaria

$$\iota(v) = (v(N)/n, \ldots, v(N)/n).$$

Ahora, si u es el juego de costos (2.5) tenemos que el valor de Shapley es

$$\varphi_i(u) = \sum_{j=1}^{i} \frac{c_j - c_{j-1}}{n-j+1}$$

y por (3.4), se tiene que

$$\begin{aligned}\psi_i(u) &= \frac{(n-2)c_n}{n(n-1)} + \frac{1}{n-1}\sum_{j=1}^{i}\frac{c_j-c_{j-1}}{n-j+1},\\ &\leq \frac{(n-2)c_n}{n(n-1)} + \frac{c_i}{n-1}\\ &\leq \frac{2c_n}{n}.\end{aligned}$$

Lo cual indica que si $n > 2$ y $c_i > 2c_n/n$, entonces ψ_i es una buena opción a cosiderar en los juegos de costos, ya que en este caso, $\psi_i(v) \leq c_i$.

Ejemplo 3.4. *Según lo expuesto arriba, la solución ψ al juego u del ejemplo* 1.1 es

$$\psi(u) = (15, 20, 25).$$

Este ejemplo y (3.4) nos permiten intuir que, cuando n es grande, la asignación $\psi(v)$ está cerca de $\iota(v)$. Muestra de ello es el siguiente ejemplo donde se considera un juego particular *del gran jefe*. Véase [13].

Ejemplo 3.5. *Sea v el juego del ejemplo* 1.2. *Según el ejemplo* 1.3 *su valor de Shapley es*

$$\varphi_i(v) = \begin{cases} pm/2 & i = 1;\\ p/2 & i \neq 1,\end{cases}$$

de donde, al hacer uso de (3.4),

$$\psi_i(v) = \begin{cases} \dfrac{p(3m-1)}{2(m+1)}, & i = 1;\\[2ex] \dfrac{p(2m^2-m+1)}{2m(m+1)}, & i \neq 1.\end{cases}$$

Notemos que si $i \neq 1$ entonces $\psi_1(v) > \psi_i(v)$ para todo $m > 1$ y, son iguales si y sólo si $m = 1$. Esto indica que el dueño de las máquinas gana más que cada uno de los obreros, sin importar cuantos trabajadores emplee.

Además, observamos que

$$\lim_{m\to\infty} \frac{\psi_1}{\psi_i} = \frac{3}{2}$$

para todo $i \neq 1$, sin embargo el porcentaje de sus ganancias es

$$\rho_i = \frac{\psi_i(v)}{pm} = \begin{cases} \dfrac{(3m-1)}{2m(m+1)}, & i = 1; \\ \\ \dfrac{(2m^2 - m + 1)}{2m^2(m+1)}, & i \neq 1, \end{cases}$$

el cual tiende a cero para todo i, cuando m tiende a infinito. Esto no pasa con el valor de Shapley puesto que

$$\varphi_1(v)/pm = 1/2$$

para todo m, es decir, no importa cuantos empleados haya, el jugador 1 tendrá la mitad de las ganacias siempre.

Los argumentos anteriores muestran que la solución ψ es más apropiada en sociedades donde, si el trabajo y las inversiones se valoran por igual, entonces las ganancias deberían ser repartidas por igual entre los que las generan.

Uno puede verificar que la solución $\psi(v)$ del ejemplo anterior es un elemento del núcleo del juego; esta es una propiedad general de la solución ψ.

Proposición 3.1. *Si $v \in G$ es un juego convexo tal que la solución igualitaria está en el núcleo de v entonces $\psi(v) \in C(v)$.*

Demostración. Por el Teorema 1.2, $C(v) \neq \varnothing$ y $\varphi(v) \in C(v)$. Usando (3.4) se tiene que ψ es una combinación convexa del valor de Shapley y la solución igualitaria. El resultado se sigue por la convexidad del núcleo de v. □

Para terminar esta sección resaltamos el hecho de que, aparte de (3.4), el valor de Shapley también es un valor esperado. Considere el siguiente proceso aleatorio.

1. Se elige un tamaño de coalición que no contenga al jugador i, con distribución uniforme sobre el conjunto $\{0, 1, \ldots, n-1\}$.
2. Con la cardinalidad elegida en el paso anterior, se elige aleatoriamente una coalición S, con distribución uniforme, sobre las $\binom{n-1}{s}$ coaliciones posibles.
3. Se paga al jugador i la utilidad marginal que aporta al incorporarse a S, es decir, $v(S \cup i) - v(S)$.

El pago esperado del jugador i bajo este proceso aleatorio es

$$E(v(S \cup i) - v(S)) = \sum_{s \ni i} \frac{v(S \cup i) - v(S)}{n\binom{n-1}{s}} = \varphi_i(v).$$

3.3. Particiones binarias anidadas

Nuestra segunda solución a juegos cooperativos, se basa en aplicar el principio de la prenda en disputa para problemas bipersonales a un juego cooperativo; usando un concepto que introducimos en este trabajo, las *particiones binarias anidadas* del conjunto $N = \{1, 2, \ldots, n\}$.

La motivación de nuestra propuesta es la siguiente. Considere que n personas están disputando el monto $v(N)$ y no saben cómo repartirlo, sin embargo, si sólo se tratara de un problema bipersonal aplicarían el principio de la prenda en disputa para resolverlo. ¿Cómo resolver el problema n personal si sólo se tiene una regla de reparto bipersonal?

En la sección anterior vimos cómo extender esta regla bipersonal a juegos cooperativos mediante la esperanza de un proceso aleatorio. Sin embargo las partes en conflicto eran coaliciones. Ahora nuestro fin es que las partes en conflicto sean, en última instancia, los jugadores, sin dejar a un lado la estructura del juego cooperativo.

La idea es la siguiente. Consideramos que $N = S \cup (N \setminus S)$ para S y $N \setminus S$ coaliciones no vacías; como ya vimos en la sección anterior, el problema de dividir $v(N)$ entre estas dos partes con el principio de la prenda en disputa tiene por solución los pagos

$$\phi_S = \frac{1}{2}\left(v(N) + (v(N) - v(N \setminus S))_+ - (v(N) - v(S))_+\right)$$

para S y $v(N) - \phi_S$ para la coalición $N \setminus S$.

Luego S y $N \setminus S$ se dividen en dos coaliciones no vacías. Supongamos $S = S_1 \cup S_2$ y que el estado ϕ_S se reparte nuevamente conforme al principio de la prenda en disputa, obteniendo

$$\phi_1 = \frac{1}{2}\left(\phi_S + (\phi_S - v(S_2))_+ - (\phi_S - v(S_1))_+\right)$$

para S_1 y $\phi_S - \phi_1$ para S_2. Lo mismo se hace para $N \setminus S$ y se continua con el proceso hasta que las coaliciones constan de un solo jugador. Al final obtenemos un pago eficiente. Como el número de particiones que podemos hacer varía en cada paso, el pago que resulta no es único. Proponemos como solución el promedio de todos los pagos que se pueden obtener mediante el proceso descrito.

Para determinar de forma precisa nuestra solución necesitamos algunas definiciones.

Definición 3.1. *Una partición de $S \subseteq N$ es una colección de coaliciones*

$$P = \{S_1, S_2, \ldots, S_k\}$$

no vacías, disjuntas y tales que su unión es S.

Definición 3.2. *Una partición P de S es binaria si $|P| = 2$.*

Definición 3.3. *Una partición binaria anidada de N es una colección finita de particiones de N, $P_1, P_2, \ldots P_k$ tales que*

1. $P_1 = \{\{1, \ldots, n\}\}$ *y* $P_k = \{\{1\}, \ldots, \{n\}\}$.

2. *Para todo $S \in P_i$ se tiene que $S \in P_{i+1}$ si y sólo si $|S| = 1$. De otro modo P_{i+1} contiene una única partición binaria de S.*

3. $|P_i| < |P_{i+1}|$.

Al conjunto de particiones binarias anidadas lo denotamos por P_B.

En seguida determinamos la cantidad de particiones binarias anidadas distintas que se pueden generar, dado un conjunto finito N.

Proposición 3.2. *Si $N = \{1, 2, \ldots, n\}$, entonces*

$$|P_B| = \frac{(2(n-1))!}{2^{n-1}(n-1)!}.$$

Demostración. Sea $p(n) = |P_B|$. Por la definición de partición binaria anidada se tiene que $p(1) = 1$. Suponiendo que $n \geq 2$ y que $p(1), \ldots, p(n-1)$ son conocidos, notemos que hay $\binom{n}{i}$ particiones binarias $P = S \cup (N \backslash S)$ de N tales que $|S| = i$, con $1 \leq i \leq n-1$. Con cada una de tales particiones se obtienen $p(i)p(n-i)$ particiones binarias anidadas, luego

$$p(n) = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n-1}\binom{n}{i}p(i)p(n-i), \qquad n \geq 2. \tag{3.5}$$

Para terminar basta mostrar que la sucesión

$$s(n) = \frac{(2(n-1))!}{2^{n-1}(n-1)!} \tag{3.6}$$

satisface (3.5), en virtud de que $s(1) = 1$.

Derivando, obtenemos que

$$-\sqrt{1-2x} = -1 + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{s(n)}{n!}x^n, \qquad x \in (-1/2, 1/2),$$

según el Teorema de Taylor.

Por tanto, al poner $s(0) = -1$, se tiene que

$$f^2(x) = 1 - 2x = \left(\sum_{n=0}^{\infty}\frac{s(n)}{n!}x^n\right)^2 = \sum_{n=0}^{\infty}c_n x^n.$$

Igualando coeficientes en esta última expresión, $c_0 = 1$, $c_1 = -2$ y si $n \geq 2$ entonces

$$c_n = \sum_{i=0}^{n}\frac{s(i)}{i!}\frac{s(n-i)}{(n-i)!} = \frac{1}{n!}\left(-2s(n) + \sum_{i=1}^{n-1}\binom{n}{i}s(i)s(n-i)\right) = 0.$$

Al despejar $s(n)$, la sucesión (3.6) satisface (3.5) para $n \geq 2$. $\square$

Según la proposición anterior, existen

$$\frac{(2(n-1))!}{2^{n-1}(n-1)!}$$

particiones binarias anidadas, con cada una de ellas el jugador i obtiene un pago.

Definición 3.4. *Sea $P = \{P_1, \ldots, P_k\} \in P_B$ y m el entero más pequeño tal que $\{i\} \in P_m$, por la definición* 3.3 *existen m coaliciones $S_j \in P_j$, $j = 1, \ldots, m$, tales que la cadena de contenciones*

$$S_1 = \{1, 2, \ldots, n\} \supset S_2 \supset \cdots \supset S_m = \{i\}$$

es única. Iniciando con $E_1 = v(N)$, calculamos recursivamente los estados

$$E_j = \alpha_1([E_{j-1}; v(S_j), v(S_{j-1} \setminus S_j)]), \qquad j = 2, \ldots, m, \tag{3.7}$$

donde α es la solución (2.10)*, que proviene del principio de la prenda en disputa. El pago del jugador i con respecto a la partición P es*

$$\phi_i^P(v) = E_m.$$[1]

Definimos la solución

$$\eta_i(v) = \frac{2^{n-1}(n-1)!}{(2(n-1))!} \sum_{P \in P_B} \phi_i^P(v), \tag{3.8}$$

como el promedio de los pagos obtenidos por i con todas las particiones binarias anidadas.

Es pertinente señalar que una solución similar a (3.8) ya había sido propuesta por Quant et al. en [16] usando las permutaciones $\sigma \in S_n$. La expresión que estos autores deducen es completamente diferente a la que nosotros acabamos de presentar.

Para el siguiente ejemplo sea $[E; c] \in B_N$ y ϑ el juego definido por

$$\vartheta(S) = \text{mín}\{c(S), E\} \tag{3.9}$$

Ejemplo 3.6. *Consideremos el problema de bancarrota $[E; 100, 200, 300]$, para los tres estados $E \in \{100, 200, 300\}$, el cual surge del ejemplo* 1.8.

Los valores del juego 3.9 *para $E = 200$ son*

E	$\vartheta(1)$	$\vartheta(2)$	$\vartheta(3)$	$\vartheta(12)$	$\vartheta(13)$	$\vartheta(23)$	$\vartheta(123)$
200	100	200	200	200	200	200	200

Como $n = 3$ tenemos que $|P_B| = 3$. Las particiones binarias anidadas a considearar en este caso son

$$P_1 = \{\{1, 2, 3\}, \{\{1\}, \{2, 3\}\}, \{\{1\}, \{2\}, \{3\}\}\},$$

[1] El valor de consenso (3.3) también se define recursivamente de un modo similar [11], pero usando permutaciones $\sigma \in S_n$

$$P_2 = \{\{1,2,3\}, \{\{2\}, \{1,3\}\}, \{\{1\}, \{2\}, \{3\}\}\},$$

y

$$P_3 = \{\{1,2,3\}, \{\{1,2\}, \{3\}\}, \{\{1\}, \{2\}, \{3\}\}\}.$$

Calculemos $\phi^{P_2}(\vartheta)$. Se tiene que

$$\alpha([v(123); v(2),\, v(13)]) = (100,\, 100) \quad y \quad \alpha([100; v(1),\, v(3)]) = (50,\, 50)$$

por lo que $\phi^{P_2}(\vartheta) = (50,\, 100,\, 50)$. De la misma forma

$$\phi^{P_1}(\vartheta) = (50,\, 75,\, 75) \quad y \quad \phi^{P_3}(\vartheta) = (50,\, 50,\, 100),$$

de donde, al sacar el promedio de estos tres pagos,

$$\eta(\vartheta) = (50,\, 75,\, 75).$$

Análogamente

$$\eta(\vartheta) = (33\,1/3,\, 33\,1/3,\, 33\,1/3) \quad y \quad \eta(\vartheta) = (50,\, 100,\, 150)$$

para los casos $E = 100$ y $E = 300$, respectivamente.

Comparando el ejemplo 1.8 con el ejemplo que acabamos de presentar, la coincidencia de las soluciones es en extremo interesante. Pues la solución $\eta(\vartheta)$ coincide con los pagos exactos que sugieren los pasajes del Talmud al problema de bancarrota de la herencia incompleta.

Tenemos una nueva interpretación de las soluciones que recomienda el Talmud al problema de la herencia incompleta.

Teorema 3.2. *Si ϑ es el juego definido por* (3.9) *entonces $\eta(\vartheta)$ es una solución al problema de bancarrota $[E; c]$.*

Demostración. Es claro que, del modo en que está construida la solución, cada uno de los pagos de la definición 3.4 son eficientes y, por tanto, la solución η es eficiente. Luego $\sum_{i \in N} \eta_i(\vartheta) = E$.

Si S, T son coaliciones disjuntas, entonces se verifica que

$$\vartheta(S) + \vartheta(T) \geq \vartheta(S \cup T).$$

Suponiendo $c(S) \leq c(T)$ y revisando los casos $E \leq c(S) \leq c(T)$, $c(S) \leq E \leq c(T)$ y $c(S) \leq c(T) \leq E$. El resultado también se tiene cambiando los papeles de S y T. Esto muestra que ϑ es un juego subaditivo.

De la forma recursiva (3.7) en que se construyen los pagos ϕ_i^P y por la subaditividad de ϑ se sigue que

$$0 \leq E_j \leq \vartheta(S_j) \qquad j = 1,\, \ldots,\, m, \tag{3.10}$$

en particular

$$0 \leq \phi_i^P(\vartheta) = E_m \leq \vartheta(S_m) = \vartheta(i) \leq c_i, \qquad P \in P_B,$$

de donde $\eta_i(\vartheta) \leq c_i$ $\square$

Otra propiedad que satisface η se verifica cuando v es superaditivo.

Teorema 3.3. *Sea $G' \subseteq G$ el conjunto de juegos superaditivos. Si $v \in G'$ entonces η satisaface racionalidad individual y es una solución aditiva, simétrica y eficiente sobre el conjunto G'.*

Demostración. Notemos que (3.7) y la subaditividad de ϑ nos condujo a (3.10). Si se supone que el juego $v \in G$ es superaditivo entonces la desigualdad que obtenemos es

$$E_j \geq v(S_j) \qquad j = 1, \ldots, m,$$

y por tanto $\phi_i^P \geq v(i)$, para todo $P \in P_B$, de donde $\eta_i(v) \geq v(i)$ para todo juego superaditivo $v \in G$.

Además, los estados E_j se pueden calcular recursivamente, como $E_1 = v(N)$ se tiene que

$$E_2 = \frac{1}{2}(v(N) + v(S_2) - v(N \setminus S_2)),$$

y si $|N| > 2$ entonces

$$E_m = \phi_i^P(v) = \frac{v(N) + v(S_2) - v(N \setminus S_2)}{2^{m-1}} + \sum_{k=2}^{m-1} \frac{v(S_{k+1}) - v(S_k \setminus S_{k+1})}{2^{m-k}}.$$

De esta igualdad se tiene que si $v = v_1 + v_2$, con $v_i \in G'$, entonces

$$\phi_i^P(v_1 + v_2) = \phi_i^P(v_1) + \phi_i^P(v_2),$$

luego el pago ϕ_i^P como solución a juegos superaditivos es aditivo para todo $P \in P_B$ de donde se sigue que η es una solución aditiva en G'.

Para verificar la simetría de η note que si $\sigma \in S_n$ entonces las particiones binarias anidadas de N son las mismas y los pagos $\phi_i^P(\sigma v)$ permutan las coordenadas de $\phi_i^P(v)$ de acuerdo a σ, es decir, $\phi_i^P(\sigma v) = \phi_{\sigma(i)}^P(v)$ de donde se sigue la simetría de η. La eficiencia se tiene por definición. □

Corolario 3.1. *Si v es superaditivo entonces existen constantes λ_s, $s = 1, \ldots, n-1$, tales que*

$$\eta_i(v) = \frac{v(N)}{n} + \sum_{\substack{S \ni i \\ S \neq N}} (n-s)(\lambda_s v(S) - \lambda_{n-s} v(N \setminus S)).$$

Demostración. El resultado se sigue de los teoremas 3.1 y 3.3 □

Para terminar este capítulo mostramos que la solución $\eta(\vartheta)$, no presenta el mismo problema que la solución (2.2), cuando $E = C = c_1 + c_2 + \cdots + c_n$.

Corolario 3.2. *Si en el problema de bancarrota $[E; c]$ se tiene que $E = C$ entonces*

$$\eta_i(\vartheta) = c_i.$$

Demostración. Con $E = C$, el juego (3.9) es el juego aditivo

$$\vartheta(S) = \sum_{i \in S} c_i.$$

Como todo juego aditivo es subaditivo y superaditivo, siguiendo las demostraciones de los teoremas 3.2 y 3.3 se tiene que $v(i) \leq \eta_i(\vartheta) \leq v(i) = c_i$. □

Capítulo 4

Juegos de bancarrota

Por la naturaleza del problema, al tipo de juegos que coinciden con (2.12) para ciertos reclamos c_i se les denomina *juegos de bancarrota*. Esos juegos fueron introducidos en [14] y han sido ampliamente estudiados, por ejemplo en [4] Curiel et al. proponen una nueva solución a problemas de bancarrota usando el valor τ introducido a la literatura por Tijs [23]. Esta nueva solución es denominada la *solución proporcional ajustada*.

Respecto a estos avances, notamos que el modelo (2.12) permanece fijo y lo que cambia es la solución a juegos coopertivos usada para obtener nuevas soluciones al problema de bancarrota. Nosotros proponemos un conjunto de juegos definidos mediante funciones, encontrando que el juego (2.12) pertenece a este conjunto y que es único por las características de su núcleo.

4.1. Un conjunto de juegos convexos

El Teorema 2.3 garantiza que el nucleolo del juego (2.12) es la solución que da la regla de la prenda en disputa al problema de bancarrota $[E; c]$, es decir, $\nu(w) = \alpha([E; c])$.

Recientemente, Quant et, al. [17] demostraron que los juegos a los cuales se les puede calcular el nucleolo aplicando la regla de la prenda en disputa son aquellos que son estratégicamente equivalentes[1] a un juego de bancarrota.

Es decir, los juegos que satisfacen el Teorema 2.3 son *esencialmente*[2] los juegos del tipo (2.12) que provienen de un problema de bancarrota.

Nuestra investigación sigue una dirección complementaria. Proponemos un conjunto de funciones con las cuales se *podría* modelar el problema de bancarrota y nos fijamos en el núcleo de tales juegos; el resultado es que en tal conjunto de juegos, no hay un juego aparte de (2.12), tal que su núcleo coincida con todas las asignaciones que son soluciones al problema de bancarrota original.

[1] Dos juegos v_1 y v_2 son estratégicamente equivalente si existen $\alpha > 0$ y $x \in \mathbb{R}^n$ tales que para toda coalición S, $v_1(S) = \alpha v_2(S) + x(S)$.

[2] Salvo *cambio de escala.*

En adelante usaremos la siguiente notación. Sea $[E;c] \in B_N$ un problema de bancarrota y $C = c_1 + \cdots + c_n$. Denotamos por $\mathcal{F}$ al conjunto de funciones

$$f : [0, C] \to [0, E],$$

tales que f es continua, creciente y satisface

$$f(0) = 0 \qquad \text{y} \qquad f(C) = E.$$

Definición 4.1. *La función dual de $f \in \mathcal{F}$ está definida por*

$$f^*(\tau) := f(C) - f(C - \tau).$$

La imagen de f^* es la imagen de f bajo una rotación respecto a la línea $\ell(\tau) = E\tau/C$; como se aprecia en la siguiente figura donde

$$f(\tau) = \frac{E\tau^4}{C^4} \qquad \text{y} \qquad f^*(\tau) = E - \frac{E(C-\tau)^4}{C^4}.$$

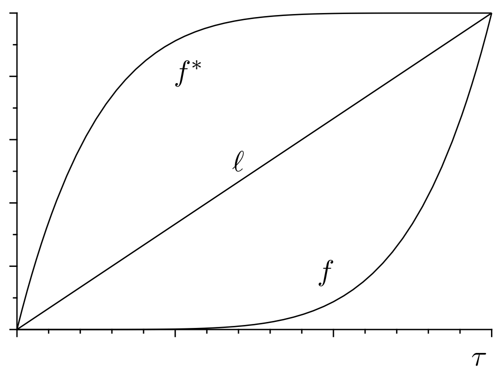

Figura 4.1: Imagen de f y f^*.

Definición 4.2. *El juego asociado a $f \in \mathcal{F}$, v_f, está definido por*

$$v_f(S) := f\left(\sum_{i \in S} c_i\right), \qquad S \subseteq N.$$

Ejemplo 4.1. *Observemos que si*

$$g(\tau) = \text{máx}\{0, E - C + \tau\},$$

entonces

$$g^*(\tau) = \text{mín}\{\tau, E\}.$$

Los juegos asociados a estas funciones son, respectivamente, (2.12) *y* (3.9)*. Como estos juegos son el dual uno del otro se sigue que*

$$v_{g^*} = \vartheta = w^* = v_g^*.$$

La igualdad de los extremos en la última ecuación sigue siendo válida con cualquier otra $f \in \mathcal{F}$.

Lema 4.1. *Si $f \in \mathcal{F}$ las siguientes propiedades se cumplen*

1. $f^* \in \mathcal{F}$ *y* $(f^*)^* = f$.
2. $v_f^* = v_{f^*}$
3. *Si f es convexa, entonces f^* es cóncava, y si f es cóncava, entonces f^* es convexa.*
4. *Si g es la función*
$$g(\tau) = \max\{0, E - C + \tau\},$$
entonces se satisfacen las desigualdades $f(\tau) \leq g(\tau)$ si y sólo si $f^*(\tau) \geq g^*(\tau)$ y $f(\tau) \geq g(\tau)$ si y sólo si $f^*(\tau) \leq g^*(\tau)$ para todo $\tau \in [0, C]$.

Demostración. Notemos que f^* es continua por ser resta de dos funciones continuas. Por la definición de f^* se tiene que $f^*(0) = 0$, $f^*(C) = E$ y si $0 \leq \tau_1 \leq \tau_2 \leq C$ tenemos que
$$f^*(\tau_1) - f^*(\tau_2) = f(C - \tau_2) - f(C - \tau_1) \leq 0,$$
por lo que f^* es creciente y en consecuencia $f^* \in F$, además se tiene que para todo $\tau \in [0, C]$
$$(f^*)^*(\tau) = f(C) - f(C - C) - f(C) + f(C - C + \tau) = f(\tau).$$
El enunciado 2 es cierto en virtud de que para todo $S \subseteq N$ se tiene que
$$v_f^*(S) = v_f(N) - v_f(N \setminus S) = f(C) - f\left(C - \sum_{i \in S} c_i\right) = f^*\left(\sum_{i \in S} c_i\right) = v_{f^*}(S).$$
Finalmente, si f es convexa se tiene que para todo $t \in [0, 1]$
$$\begin{aligned} tf^*(\tau_1) + (1-t)f^*(\tau_2) &= t(f(C) - f(C - \tau_1)) + (1-t)(f(C) - f(C - \tau_2)) \\ &= f(C) - (tf(C - \tau_1) + (1-t)f(C - \tau_2)) \\ &\leq f(C) - f(t(C - \tau_1) + (1-t)(C - \tau_2)) \\ &= f(C) - f(C - (t\tau_1 + (1-t)\tau_2)) \\ &= f^*(t\tau_1 + (1-t)\tau_2), \end{aligned}$$
por lo que f^* es cóncava. Si f es cóncava la desigualdad anterior se invierte y se obtiene la convexidad de f^*. Esto demuestra 3.

Si $f(\tau) \leq g(\tau)$, entonces
$$f^*(\tau) = f(C) - f(C - \tau) \geq g(C) - g(C - \tau) = g^*(\tau);$$
y si $f^*(\tau) \geq g^*(\tau)$ entonces $f^*(C - \tau) \geq g^*(C - \tau)$, de donde $f(C) - f(\tau) \geq g(C) - g(\tau)$. Luego $g(\tau) \geq f(\tau)$. Cambiando la desigualdad se completa la demostración del último enunciado. □

Ya que queremos tratar con el núcleo de los juegos v_f, limitemos nuestra atención a una clase de juegos que tienen núcleo no vacío.

Lema 4.2. *El juego v es convexo si y sólo si para todo $i \in N$ y todo par de coaliciones S, T tales que $S \subseteq T \subseteq N \setminus \{i\}$ se satisface la desigualdad*

$$v(T \cup i) - v(T) \geq v(S \cup i) - v(S). \tag{4.1}$$

Demostración. Si v es convexo y $S \subseteq T \subseteq N \setminus \{i\}$ entonces con $S' = S \cup \{i\}$ se tiene que

$$v(T \cup i) + v(S) = v(S' \cup T) + v(S' \cap T) \geq v(S') + v(T) = v(S \cup i) + v(T).$$

Por otro lado, si se satisface (4.1), entonces para todo $R \subseteq S \subseteq T$ se tiene que

$$v(T) - v(T \setminus R) \geq v(S) - v(S \setminus R)$$

y, al usar la igualdad $R = (S \cup T) \setminus S = T \setminus (S \cap T)$, se obtiene

$$v(S \cup T) - v(S) \geq v(T) - v(S \cap T).$$

□

Lema 4.3. *Si $f \in F$ es convexa entonces v_f es convexo.*

Demostración. Primero probamos que para todo x, y, $z \in [0, C]$ tales que $x+y+z \leq C$,

$$f(x+z) - f(x) \leq f(x+y+z) - f(x+y). \tag{4.2}$$

Con $y = 0$ se tiene la igualdad en esta ecuación. Supongamos que $y > 0$ y recordemos que si f es convexa en $[a, b]$ y $a < u_1 < u_2 < u_3 < b$ entonces

$$\frac{f(u_2) - f(u_1)}{u_2 - u_1} \leq \frac{f(u_3) - f(u_1)}{u_3 - u_1} \leq \frac{f(u_3) - f(u_2)}{u_3 - u_2}. \tag{4.3}$$

Si $z = y$ entonces $x < x+y < x+y+z$ y al hacer uso de (4.3) se tiene

$$\frac{f(x+z) - f(x)}{z} \leq \frac{f(x+y+z) - f(x+y)}{z},$$

de la misma forma si $z > y$ entonces $x < x+y < x+z < x+y+z$, luego

$$\frac{f(x+z) - f(x)}{z} \leq \frac{f(x+z) - f(x+y)}{z-y} \leq \frac{f(x+y+z) - f(x+y)}{z}$$

y si $0 < z < y$ entonces $x < x+z < x+y < x+y+z$, de donde

$$\frac{f(x+z) - f(x)}{z} \leq \frac{f(x+y) - f(x+z)}{y-z} \leq \frac{f(x+y+z) - f(x+y)}{z}.$$

Por tanto, (4.2) es cierta, en particular para $x = c(S)$, $y = c(T \setminus S)$ y $z = c_i$ donde $S \subseteq T \subseteq N \setminus i$. El resultado se sigue del lema 4.2 ya que, con estos valores, (4.2) es equivalente a

$$v_f(S \cup i) - v_f(S) \leq v_f(T \cup i) - v_f(T).$$

□

En seguida mostramos que el núcleo del juego w coincide con el conjunto de soluciones al problema de bancarrota original; para ello haremos uso del conjunto

$$\hat{C}(v) = \{x \in \mathbb{R}^n : x(N) = v(N) \text{ y } x(S) \leq v(S) \text{ para todo } S \subset N\}.$$

Proposición 4.1. *La asignación x es solución al problema $[E; c]$ si y sólo si $x \in C(w)$, donde w es el juego definido por*

$$w(S) = \max\{0, E - c(N \setminus S)\}.$$

Demostración. Primero mostraremos que $x \in C(w)$ si y sólo si $x \in \hat{C}(w^*)$. Si $x \in C(w)$, entonces $x(N) = w(N) = w^*(N)$ y

$$x(N \setminus S) \geq w(N \setminus S) = w^*(N) - w^*(S).$$

Luego,

$$w^*(S) \geq w^*(N) - x(N \setminus S) = x(S)$$

para todo $S \subset N$. Si $x \in \hat{C}(w^*)$ se tiene que

$$x(N \setminus S) \leq w^*(N \setminus S) = w(N) - w(S),$$

por lo que

$$w(S) \leq w(N) - x(N \setminus S) = x(S),$$

para todo $S \subset N$.

Ahora, si x es una solución al problema $[E; c]$, entonces para toda $S \subseteq N$ se sigue que

$$x(S) \leq x(N) = w(N) = w^*(N) = E$$

y de la desigualdad $x_i \leq c_i$ se tiene que

$$x(S) \leq c(S).$$

Por tanto

$$x(S) \leq \min\{c(S), E\} = w^*(S),$$

de donde $x \in \hat{C}(w^*)$ y por la observación inicial $x \in C(w)$.

Notemos además que si $x \in C(w)$, entonces

$$x(N \setminus i) = w(N) - x_i \geq w(N \setminus i).$$

Por lo que $x_i \leq w(N) - w(N \setminus i)$. Luego, si $x \in C(w)$ tenemos que

$$x_i \leq w(N) - w(N \setminus i) = E - \max\{0, E - c_i\} = \min\{c_i, E\} \leq c_i$$

y además $x(N) = w(N) = E$, de donde x es una solución al problema de bancarrota $[E; c]$.

$\square$

Ahora, consideremos el conjunto de funciones

$$\mathcal{F}_c = \{f \in \mathcal{F} : f \text{ es convexa}\}.$$

Mostraremos en seguida que si

$$\mathcal{V} = \{v_f : f \in \mathcal{F}_c\},$$

entonces $w \in \mathcal{V}$ es el único juego que satisface la Proposición 4.1.

Teorema 4.1. *El juego $v \in \mathcal{V}$ satisface la proposición 4.1 si y sólo si $v = w$.*

Demostración. Ya se demostró que w satisface la proposición 4.1. Si $v_f \in \mathcal{V}$ para cierta función $f \in \mathcal{F}_c$, con $v_f \neq w$, satisface la proposición 4.1, entonces existe una coalición $S \subset N$ tal que $v_f(S) \neq w(S)$.

Si $v_f(S) < w(S)$, entonces, de la definición 4.2, se tiene que

$$f(c(S)) < g(c(S))$$

y, por la monotonicidad de f, se debe tener necesariamente que

$$C - E < c(S) < C.$$

Esta desigualdad implica que existe $k \in N$ tal que $c_k < E$, ya que si $c_i \geq E$ para todo $i \in N$ entonces se tendría que $c(S) \leq c(N \setminus i) = C - c_i \leq C - E$, para todo $i \in N$ contradiciendo la desigualdad anterior. Luego, existe k tal que

$$C - E < c(S) \leq C - c_k < C$$

y por la convexidad y continuidad de f y g se sigue que $f(C - c_k) < g(C - c_k)$.

Según el Lema 4.3 v_f es convexo y por tanto $C(v_f) \neq \varnothing$; según el Teorema 1.2 todo pago marginal $m_i^\sigma(v_f)$ está en el núcleo de v_f, en particular aquel cuyo pago al jugador k es

$$x_k = v_f(N) - v_f(N \setminus k) = E - f(C - c_k) > E - g(C - c_k) = c_k.$$

Luego esta asignación no es solución al problema $[E; c]$, lo cual da una contradicción.

Por otro lado, si existe $S \subset N$ tal que

$$f(c(S)) > g(c(S)),$$

entonces por continuidad existe un intevalo abierto (α, β) donde $f(\tau) > g(\tau)$ para todo $\tau \in (\alpha, \beta)$. Esto junto con la convexidad de f implica que $C - E \in (\alpha, \beta)$.

Si

$$\alpha < c(S) \leq C - E < \beta,$$

entonces $E \leq c(N \setminus S)$, luego toda asignación donde $x_i = 0$ para $i \in S$, y $x(N \setminus S) = E$ no está en el núcleo de v_f ya que

$$v_f(S) = f(c(S)) > g(c(S)) = x(S) = 0,$$

obteniendo una contradicción.

Finalmente, si
$$\alpha < C - E < c(S) < \beta,$$
entonces $E > c(N \setminus S)$, luego toda asignación tal que $x_i = c_i$ para $i \in N \setminus S$ y $x(S) = E - c(N \setminus S)$ no está en el nucleo de v_f ya que

$$v_f(S) = f(c(S)) > g(c(S)) = E - c(N \setminus S) = x(S),$$

obteniendo una contradicción nuevamente. Por tanto, no existe un juego $v_f \in \mathcal{V}$, $v \neq w$, que satisfaga la proposición 4.1.

□

En seguida determinamos dos conjuntos de juegos convexos, en el primero de ellos los elementos de su núcleo son soluciones al problema $[E; c]$ y en el segundo tales soluciones son elementos de su núcleo.

Teorema 4.2. *Sean*

$$\mathcal{V}_1 = \{v_f \in \mathcal{V} : \ E\tau/C \geq f(\tau) \geq g(\tau), \ \tau \in [0, C]\}$$

y
$$\mathcal{V}_2 = \{v_f \in \mathcal{V} : g(\tau) \geq f(\tau), \ \tau \in [0, C]\}.$$

Si $v_f \in \mathcal{V}_1$ entonces todo elemento del núcleo de v_f es solución al problema $[E; c]$ y si $v_f \in \mathcal{V}_2$ entonces toda solución al problema $[E; c]$ está en el núcleo de v_f.

Demostración. Todo $v_f \in \mathcal{V}_i$ es convexo puesto que f es convexa. Luego tiene núcleo no vacío. Si $x \in C(v_f)$ con $v_f \in \mathcal{V}_1$, entonces $x(N) = v_f(N) = E$ y

$$0 \leq x_i \leq E - f(C - c_i) \leq E - \max\{0, E - c_i\} \leq c_i.$$

Luego x es solución al problema de bancarrota.

Si $v_2 \in \mathcal{V}_2$ y x es solución al problema de bancarrota, entonces $x(N) = E = v_f(N)$ y $x(S) \leq c(S)$ para todo $S \subset N$. De donde

$$x(S) \leq \min\{E, c(S)\} = g^*(c(S)) \leq f^*(c(S)).$$

Es decir, $x \in \hat{C}(v_{f^*}) = C(v_f^*)$ y por tanto $x \in C(v_f)$. □

El Teorema anterior tiene como aplicación sencilla la obtención de una nueva solución a problemas de bancarrota.

Dado un problema de bancarrota $[E; c]$, sea

$$\mathcal{W} = \{v_{f_\alpha} : f_\alpha(\tau) = \max\{0, E - \alpha(C - \tau)\} \ \text{ y } \ \alpha \in [E/C, 1]\};$$

notemos que, en este conjunto, $f_1 = g$ y $f_{E/C}(\tau) = E\tau/C$. Además f_α es convexa para toda $\alpha \in [E/c, 1]$ por lo que $\mathcal{W}$ es un conjunto de juegos convexos y, por tanto, todos tienen núcleo no vacío.

Si φ es una solución a juegos cooperativos tal que posee la propiedad de que $\varphi(v) \in C(v)$ para juegos convexos (e.g. el nucleolo o el valor de Shapley) se tiene que $\varphi(v_{f_\alpha}) \in C(v_{f_\alpha})$ para todo $\alpha \in [E/C, 1]$.

Luego, por el Teorema 4.2 se sigue que $\varphi(v_{f_\alpha})$ es una solución al problema $[E; c]$ para todo $\alpha \in [E/C, 1]$. Proponemos como solución al problema $[E; c]$

$$\rho_i^{\varphi}([E; c]) = \frac{1}{1 - E/C} \int_{E/C}^{1} \varphi_i(v_{f_\alpha})\, d\alpha. \tag{4.4}$$

Proposición 4.2. *La solución* (4.4) *es una solución a problemas de bancarrota.*

Demostración. Puesto que $\varphi_i(v_{f_\alpha})$ es solución al problema $[E; c]$ se tiene que

$$0 \leq \varphi_i(v_{f_\alpha}) \leq c_i, \qquad \alpha \in [E/C, 1],$$

y por la monotonía de la integral se sigue que

$$\rho_i^{\varphi}([E; c]) \leq c_i.$$

Además, como $\varphi(v_{f_\alpha}) \in C(v_{f_\alpha})$ se tiene que la suma de sus coordenadas es E y, por tanto,

$$\sum_{i=1}^{n} \rho_i^{\varphi}([E; c]) = \frac{1}{1 - E/C} \int_{E/C}^{1} \sum_{i=1}^{n} \varphi_i(v_{f_\alpha})\, d\alpha = E.$$

$\square$

Conclusiones

Desde la publicación del *Análisis de un problema de bancarrota del Talmud con teoría de juegos* de Aumann y Maschler, el estudio de los problemas que hemos considerado en este trabajo es parte del quehacer de la teoría de juegos cooperativos [1, 14].

El trabajo de Aumann y Maschler [3] constituyó una especie de piedra angular para el estudio de los problemas de bancarrota del Talmud que había iniciado con O'neill [14], pero que no había encontrado una relación directa con las soluciones que se proponían en los pasajes del Talmud y las soluciones de teoría de juegos.

Los resultados subsecuentes, al igual que como pasó con el valor de Shapley, siguieron las mismas ideas del *Análisis*. Modelar el problema de bancarrota como un juego cooperativo y obtener una nueva solución aplicando alguna solución a juegos cooperativos.

Nosotros seguimos otra dirección, complementaria a la forma clásica de abordar el problema. A partir de considerar que la regla de la prenda en disputa da solución a juegos bipersonales, hemos propuesto dos nuevas soluciones a juegos $n-$personales extendiendo con dos herramientas distintas esta solución.

Para deducir la primera solución ψ, propusimos un proceso aleatorio con el cual se elige una coalición no vacía y se paga a esta coalición usando la regla de la prenda en disputa. Luego deducimos que esta solución es aditiva, simétrica y eficiente en el espacio de juegos cooperativos G.

Además, observamos que ψ es una combinación convexa del valor de Shapley y la solución igualitaria, en consecuencia nuestra solución es una asignación del núcleo de un juego convexo cuyo núcleo contiene a la solución igualitaria. En este sentido es válido decir que, para esta clase de juegos, ψ es una buena solución si la racionalidad de grupo y la equitatividad son socialmente importantes.

La segunda solución, η, es el promedio de los pagos que resultan de usar la regla de la prenda en disputa y las *particiones binarias anidadas* de un conjunto finito, un concepto que introducimos en este escrito. La solución η es aditiva, simétrica y eficiente en el conjunto de los juegos superaditivos.

Usamos η para obtener una nueva solución a problemas de bancarrota. Encontrando que, cuando el problema de bancarrota es el problema de la herencia incompleta, se tiene que nuestra nueva solución conduce al mismo reparto que sugieren los pasajes del

Talmud. Obteniendo por tanto una nueva interpretación de esta recomendación.

Algo que siempre es deseable cuando se descubre una solución a juegos cooperativos es tener una caracterización bajo la cual sea única. Sin embargo es un trabajo que require de un tiempo considerable de reflexión. Por ello, las soluciones η y ψ sólo poseen una caracterización incompleta que puede ser mejorada en un trabajo futuro.

Para completar nuestra investigación propusimos un conjunto de juegos convexos $\mathcal{V}$ con los cuales se *podría* modelar un problema de bancarrota. Este conjunto contiene a los juegos (2.12) y (3.9) que ya habían sido considerados en resultados anteriores [2]. La conclusión a la que llegamos es que el juego (2.12) es el único juego en $\mathcal{V}$ cuyo núcleo es exactamente el conjunto de soluciones del problema de bancarrota $[E; c]$.

Nuestra contribución final es una nueva solución ρ a problemas de bancarrota que puede interpretarse como un *promedio continuo* de asignaciones que dependen de una solución φ. Al respecto, el valor de Shapley y el nucleolo no son los únicos casos a considerar, por ejemplo en [6] se estudia una solución a juegos cooperativos que tienen núcleo no vacío: *el centro del núcleo*. Un análisis que reporte cuál es la mejor φ bajo ciertas circunstancias parece ser un buen problema a considerar posteriormente.

Referencias

[1] Alcalde, J., Marco, M. del C., Silva, J. A., *Bankruptcy games and the Ibn Ezra's proposal*, Journal of Economic Theory, 26:103-114. 2005.

[2] Aumann, R., *Some non-superadditive games, and their Shapley values, in the Talmud*, International Journal of Game Theory, 39:3-10. 2010.

[3] Aumann, R., Maschler M., *Game theoretic analysis of a bankruptcy problem from the Talmud*, Journal of Economic Theory, 36-2:195-213. 1985.

[4] Curiel, I., Maschler. M., Tijs, S., *Bankruptcy games.* Mathematical Methods of Operations Research, 31:A143-A159. 1987.

[5] Driessen, T., *Cooperative games, solutions and applications.* Kluwer Academic Publishers. Dordrecht, The Netherlands. 1988.

[6] González, J., Sánchez. E., *A natural selection from the core of a TU game: the core-center.* International Journal of Game Theory, 36:27-46. 2007.

[7] Mashler, M., *Insights into game theory: An alternative mathematical experience.* Cambridge University Press. 2008.

[8] Moreno-Ternero, J., Villar, A., *The TAL-Family of Rules for bankruptcy Problems.* Social Choice and Welfare, 27-2:231-249. 2006.

[9] Hernández, L., Juárez, R., Sánchez, F., *Solutions without dummy axiom for TU cooperative games.* Economics Bulletin, Vol. 3, No. 1 pp. 1-9. 2008.

[10] Herrero, C., Villar, A., *The three musketeers: four classical solutions to bankruptcy problems.* Math Soc Sci 42:307-328. 2001.

[11] Ju, Y., Borm, P., Ruys, P. H. M., *The consensus value: A new solution concept for cooperative games.* Social Choice and Welfare, Springer, 28:685-703. 2007.

[12] Littlechind, S. C., Owen, G., *A simple expression for the Shapley value in a special case*, Manage. Sci. 20:370-372. 1973.

[13] Muto, S., Nakayama, M., *On big boss games.* The Economic Studies Quarterly. 39:303-321. 1988.

[14] O'neill, B., *A problem of rights arbitration from the Talmud*, Math. soc. Sci. 2:345-371. 1982

[15] Nowak, A. S., Radzik, T., *A solidarity value for n-person transferable utility games*, International Journal of Game Theory. 23:43-48. 1994.

[16] QUANT, M., BORM, P., MAATEN, R., *A concede-and-divide rule for Bankruptcy problems.* CentER Discussion Paper, 20, Tilburg University. 2005.

[17] QUANT, M., BORM, P., REIJNIERSE, H., VAN VELZEN B., *The core cover in relation to the nucleolus and the Weber set.* International Journal of Game Theory, 33:491-503. 2005.

[18] SCHMEIDLER, D., *The nucleolus of a characteristic function game*, SIAM J. Appl. Math. I7:1163-1170. 1969.

[19] SÁNCHEZ, F., *Valores y soluciones. Introducción a la matemática de los juegos.* Editores Siglo veintiuno. 1993.

[20] SHAPLEY, L. S., *A value for n-person games*, Annals of Mathematical Studies. 28:307-312, Princeton Univ. Press. 1953.

[21] SHAPLEY, L. S., *Cores of Convex Games*, International Journal of Game Theory, 1:11-26. 1971.

[22] THOMPSON, W., *Axiomatic and game-theoretic analysis of bankruptcy and taxation problems: a survey*, Elsevier science. 2002.

[23] TIJS, S. H., *An axiomatization of the τ-value,* , Mathematical Social Sciences, 13-2:177-181. 1987