Centro de Investigación en Matemáticas, A.C.

Existencia de soluciones globales y no globales de una ecuación semilineal estocástica

Tesina

Que para obtener el Grado de:

Maestro en Ciencias con Especialidad en Probabilidad y Estadística

P R E S E N T A:

Biviana Marcela Suárez Sierra

Director:

Dr. José Alfredo López Mimbela

Guanajuato, Guanajuato, México

8 de Diciembre de 2012

Integrantes del Jurado.

Presidente: Dr. Antonio Murillo Salas
Secretario: Dr. José Villa Morales
Vocal y director de tesis: Dr. José Alfredo López Mimbela

Asesor:

Dr. José Alfredo López Mimbela

Sustentante:

M. Sc. Biviana Marcela Suárez Sierra.

Dedicatoria

A Dios por derramar en mi vida tantas bendiciones, como la que ahora recibo.

A Rey, por ser mi equipo, mi motivación, mi compañero y aún más por haber tenido palabras de aliento para que yo no desfalleciera.

A mis amigos méxicanos por su apoyo, especialmente a la familia Romero, a mi amiga Jannet, y a mi mamá mexicana Mary.

A mi familia, por siempre estar conmigo y apoyarme desde lejos.

Agradecimientos

Gracias al Dr. José Alfredo López por enseñarme tanto y por su empeño de que yo obtuviera el mejor aprendizaje posible.

Agradezco el apoyo económico recibido del proyecto Conacyt No. 157772 "Sistemas Estocásticos No Lineales"dirigido por el Dr. José Alfredo López Mimbela y de CIMAT.

Índice general

Capítulo 1

INTRODUCCIÓN

La existencia y no-existencia de soluciones globales de ecuaciones semilineales fue investigada inicialmente por Fujita [4], quien demostró que si $D \subset R^d$ es un dominio acotado con frontera suave, la solución de la ecuación

$$\frac{\partial u(t,x)}{\partial t} = \Delta u(t,x) + u^{1+\beta} u(t,x), \quad x \in D,$$

con condición de Dirichlet en la frontera de D, donde $\beta > 1$, explota en tiempo finito para todos los valores iniciales $0 < u(0,x) \in L^2(D)$ que cumplan la condición

$$\int_D u(0,x)\psi(x)\, dx > \lambda_1^{1/\beta}.$$

Aquí $\lambda_1 > 0$ es el primer valor propio del Laplaciano Δ en D y ψ es la función propia correspondiente, normalizada de forma que $\|\psi\|_{L^1} = 1$.
Sea $\{W_t, t \geq 0\}$ un movimiento browniano estándar unidimensional, iniciando en 0, definido en un espacio de probabilidad filtrado $(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}, \mathrm{P})$. En este trabajo se estudian propiedades de explosión en tiempo finito, similares a las investigadas por Fujita, de ecuaciones diferenciales parciales estocásticas del prototipo

$$\begin{aligned} du(t,x) &= [\Delta u(t,x) + u^{1+\beta}(t,x)]\, dt + \kappa u(t,x)\, dW_t, \quad t > 0 \qquad (1.1)\\ u(0,x) &= f(x) \geq 0, \quad x \in D, \\ u(t,x) &= 0, \ t \geq 0, \quad x \in \partial D, \end{aligned}$$

donde $\kappa > 0$ es constante. Esta clase de ecuaciones diferenciales aparecen como modelos en muchas áreas aplicadas, tales como mecánica cuántica [5], de fluídos [18] y conducción del calor [6].
El objetivo de esta tesina es determinar, en función de los parámetros de (1.1), cotas para la probabilidad de que las soluciones de la ecuación exploten en tiempo finito, o bien que éstas sean globales. A grandes rasgos, estas cotas se obtienen generando sub- y super-soluciones apropiadas de una ecuación diferencial parcial aleatoria, determinada por (1.1). Como un caso especial, tomando $\kappa = 0$, se recuperará el resultado clásico de Fujita citado arriba.
Asimismo, se determinarán tiempos aleatorios τ_*, τ^* tales que

$$\tau_* \leq \tau \leq \tau^*,$$

donde τ es el tiempo de explosión de (1.1). Una peculiaridad relevante de las variables aleatorias τ_* y τ^*, es que su distribución está determinada por un funcional del movimiento browniano $\{W_t\}$ de la forma

$$\int_0^\infty \exp\{W_t - \mu t\}dt, \tag{1.2}$$

donde $\mu > 0$ es una contante. Este tipo de funcionales han sido investigados recientemente por muchos probabilistas, incluyendo a Dufresne, Yor, Salminen, Matsumoto y otros. En el caso de (1.2) es posible conocer su distribución explícitamente, ver [12] y [19], lo cual será de mucha utilidad en esta tesina.
La exposición de esta temática está basada en el artículo reciente de M. Dozzi y J.A. López-Mimbela [10], donde se discuten enfoques alternativos y se incluyen referencias adicionales.
La tesina está organizada de la siguiente manera. En el Capítulo 2 se señalarán algunos conceptos y resultados básicos, necesarios para explicar los resultados y sus demostraciones. En el Capítulo 3 se presentan algunas consideraciones antes de mostrar cómo se obtiene la cota superior τ^*, del tiempo de explosión de la solución $u(t,x)$ de (1.1), y de una ecuación un poco más general dada por la expresión (2.3), abajo. En el Capítulo 4 se obtiene la cota inferior τ_* del tiempo de explosión de la solución $u(t,x)$ de (1.1). En el Capítulo 5 se presentan algunos comentarios finales.

Capítulo 2

NOCIONES PRELIMINARES

En esta sección daremos definiciones y conceptos que utilizaremos en los capítulos posteriores, señalando donde se consiguen los resultados y su prueba respectiva.

2.1. Un funcional exponencial del browniano

Un resultado importante de D. Dufresne citado en [19] y utilizado en el presente trabajo, para establecer la probabilidad de explosión en tiempo finito de la solución de la ecuación diferencial (2.3) dice lo siguiente

Teorema 1. *Sea $v > 0$. Entonces, siendo $\{B_t, t \geqslant 0\}$ un movimiento browniano real valuado empezando en 0, se tiene:*

$$\int_0^\infty ds \exp 2(B_s - vs) \overset{ley}{=} \frac{1}{2Z_v}, \tag{2.1}$$

donde Z_v está distribuido gamma con parámetro v, es decir,

$$P(Z_v \in du) = \frac{e^{-u} u^{v-1} du}{\Gamma(v)}.$$

Cabe mencionar que en [12] se encuentra una expresión para la función de distribución de $\frac{1}{2Z_v}$, y además Marc Yor en [19] y otros han desarrollado la teoría sobre este tipo de funcionales del browniano y procesos relacionados, los cuales han sido de interés en diversas investigaciones en matemática financiera.

2.2. Eigenvalores del operador de Laplace en un dominio acotado

En los Capítulos 4 y 5 se hará referencia a las eigenfunciones y eigenvalores del operador de Laplace y su relación con el semigrupo del browniano matado en un dominio acotado $D \subset \mathbb{R}^d$.
Consideramos el siguiente problema,

$$\Delta\varphi + \lambda\varphi = 0 \text{ en } D, \quad \varphi|_{\partial D} = 0. \tag{2.2}$$

Definición 1. Sea $\{B_t\}$ el movimiento browniano d-dimensional y $D \subset \mathbb{R}^d$ un conjunto abierto, conexo y acotado. Definimos

$$X_t = \begin{cases} B_t & si \quad t < \tau_D, \\ x & si \quad t \geq \tau_D, \end{cases}$$

donde x es un punto cementerio, y

$$\tau_D = \text{ínf}\{t > 0 : B(t) \in \partial D\}.$$

Al proceso $\{X_t\}$ se le llama movimiento browniano matado en la frontera de D.

Sea $\{Q_t^D\}$ el semigrupo de transición de $\{X_t\}$, esto es:

$$Q_t^D f(x) = \mathbb{E}^x[f(X_t), t < \tau_D], \quad x \in D.$$

Se ha probado en [**?**] que existe una sucesión $\{\lambda_j\}$ de eigenvalores de Δ tales que $0 < \lambda_1 < \lambda_2 \leq \cdots \leq \lambda_n \to \infty$ y un conjunto completo ortonormal de eigenfunciones $\{\varphi_j\}$ tal que la serie $\sum_{j=1}^{\infty} e^{-\lambda_j t}\varphi_j(x)\varphi_j(y)$ converge absolutamente y

$$Q_t^D f(x) = \sum_n e^{-\lambda_n t}\varphi_n(x) \int_D \varphi_n(y) f(y) m(dy),$$

para cada $f \in \mathcal{L}^2(D)$.
El operador de Laplace Δ con condición de Dirichlet en la frontera del dominio D es el generador del semigrupo Q_t^D, para el cual el primer eigenvalor $\lambda_0 > 0$ tiene una eigenfunción asociada φ, la cual es positiva y ortonormal al resto de eigenfunciones del operador Δ; ver [**?**].
Otros conceptos importantes para el desarrollo del presente trabajo son los siguientes.

2.3. Soluciones débiles de EDES

Sea $D \subset \mathbb{R}^d$ una bola abierta. Consideremos la ecuación diferencial estocástica semilineal (EDES)

$$\begin{aligned} du(t,x) &= [\Delta u(t,x) + G(u(t,x))]dt + \kappa u(t,x)dW_t, \quad t > 0 \\ u(0,x) &= f(x) \geqslant 0, \quad x \in D, \\ u(t,x) &= 0, \quad t \geqslant 0, \quad x \in \partial D, \end{aligned} \tag{2.3}$$

donde $f \in C^2(D)$ es no negativa, G es localmente Lipschitz, convexa, $\{W_t, t \geqslant 0\}$ es un movimiento browniano estándar unidimensional, iniciando en 0, definido en un espacio de probabilidad filtrado $(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_t)_{t\geqslant 0}, \mathrm{P})$, y

$$G(z) \geqslant Cz^{1+\beta}, \quad z > 0, \quad con \ \ constantes \quad C > 0, \quad \beta > 0, \tag{2.4}$$

y $\kappa > 0$.

Definición 2. Solución débil. Sea τ un tiempo de paro. Un campo $\mathcal{F}_t$-adaptado, continuo $u = \{u(t,x), t \geqslant 0, x \in D\}$ es una solución débil de (2.3) sobre el intervalo $(0,\tau)$, si $\forall\ \varphi \in C^2(D)$ tal que $\varphi\,|_{\partial\Omega} = 0$, se cumple

$$\begin{aligned}\textstyle\int_D u(t,x)\varphi(x)dx \quad &= \textstyle\int_D f(x)\varphi(x)dx \\ &+ \textstyle\int_0^t \int_D [u(s,x)\Delta\varphi(x) \\ &+ G(u(s,x))\varphi(x)]dxds \\ &+ \kappa \textstyle\int_0^t \int_D u(s,x)\varphi(x)dxdW_s \quad P-c.s. \quad \forall t \in [0,\tau).\end{aligned} \tag{2.5}$$

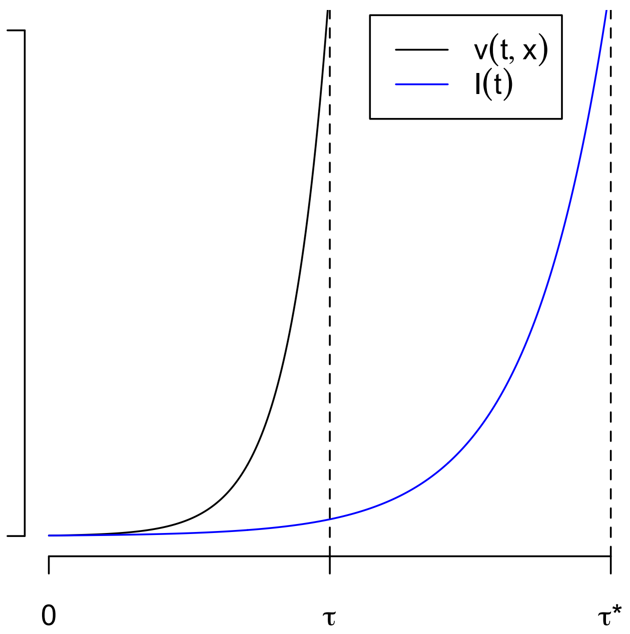
Definición 3. Tiempo de explosión. Sea u una solución débil de (2.3). Un tiempo aleatorio τ es llamado tiempo de explosión de u si

$$\text{lím}_{t\to\tau} \sup\nolimits_{x\in D} |u(t,x)| = +\infty \quad P-c.s. \ \text{ sobre } \{\tau < +\infty\} \tag{2.6}$$

Capítulo 3

COTA SUPERIOR τ^*

Como se mencionó en la introducción, en el presente capítulo se encontrará una cota superior τ^* del tiempo de explosión de la solución de la ecuación (2.3). Se analiza el comportamiento de $v(t,x) = e^{-\kappa W_t} u(t,x)$ donde u es solución débil de (2.3), y por medio del cálculo de Itô mostramos que $v(t,x)$ satisface (3.1) abajo. Teniendo lo anterior, la igualdad (2.2) reescrita como en (3.7) y que $G(z) \geqslant z^{1+\beta}$, para todo $z > 0$, se consigue una subsolución $I(t)$, en el sentido de que $I(t) \leq v(t,x)$, $x \in D$ y $t \geq 0$, y que explota en un tiempo $\tau^* > 0$. A τ^* lo llamamos tiempo de explosión de $I(t)$ τ^* y al tiempo de explosión de $v(t,x)$ lo llamaremos τ, así que $\tau \leq \tau^*$. De esta manera hallamos una cota superior para τ. Pasa lo que se representa gráficamente a continuación.



3.1. Una ecuación diferencial parcial no lineal relacionada

A continuación se analizará la siguiente ecuación diferencial parcial aleatoria

$$\begin{aligned} \frac{\partial v}{\partial t}(t,x) &= \Delta v(t,x) - \frac{\kappa^2}{2} v(t,x) + e^{-\kappa W_t} G(e^{-\kappa W_t} v(t,x)), \quad t>0, x\in D. \\ v(0,x) &= f(x), \quad x\in D. \\ v(t,x) &= 0, \quad x \in \partial D. \end{aligned} \tag{3.1}$$

donde f, D, G y κ son como en (2.3)

Proposición 2. *Sea u una solución débil de (2.3). Entonces la función $v(t,x) = e^{-\kappa W_t} u(t,x)$, $t \geqslant 0$, $x \in D$, es solución débil de (3.1).*

Demostración. De la fórmula de Itô para el movimiento browniano y tomando $h(x) = e^{-\kappa x}$, la cual tiene derivadas continuas se sigue que

$$h(W_t) = h(W_0) + \int_0^t h^{'}(W_s) dW_s + \frac{1}{2}\int_0^t h^{''}(W_s) ds, \tag{3.2}$$

es decir,

$$e^{-\kappa W_t} = 1 - \kappa \int_0^t e^{-\kappa W_s} dW_s + \frac{\kappa^2}{2}\int_0^t e^{-\kappa W_s} ds. \tag{3.3}$$

Sea φ una función de clase C^2 con soporte compacto contenido en D. Escribamos $v(t,\varphi) = \int_D v(t,x)\varphi(x)dx$. Por definición, una solución débil u de (2.3) cumple

$$u(t,\varphi) = u(0,\varphi) + \int_0^t u(s,\Delta\varphi) ds + \int_0^t G(u)(s,\varphi) ds + \kappa \int_0^t u(s,\varphi) dW_s. \tag{3.4}$$

De ahí, para φ fija y aplicando la fórmula de integración por partes conseguimos

$$v(t,\varphi) = v(0,\varphi) + \int_0^t e^{-\kappa W_s} du(s,\varphi) + \int_0^t u(s,\varphi) d(e^{-\kappa W_s}) + [e^{-\kappa W_\cdot}, u(\cdot,\varphi)]_t.$$

donde $[W,Z]_t$. es la variación cuadrática entre Z y W al tiempo t.
Reemplazando en lo anterior (3.3) y la forma diferencial de (3.4) se tiene que

$$\begin{aligned} v(t,\varphi) &= v(0,\varphi) + \int_0^t e^{-\kappa W_s} \left[\left(\Delta u(t,\varphi) + G(u(t,\varphi)) \right) ds + \kappa u(s,\varphi) dW_s \right] \\ &+ \int_0^t u(s,\varphi) \left[-\kappa e^{-\kappa W_s} dW_s + \frac{\kappa^2}{2} e^{-\kappa W_s} ds \right] + [e^{-\kappa W_\cdot}, u(\cdot,\varphi)]_t. \end{aligned}$$

Simplificando términos semejantes y utilizando que

$$v(s,\Delta\varphi) = \int_D v(s,x)\Delta\varphi(x) dx = \int_D \Delta v(s,x)\varphi(x) dx = \Delta v(s,\varphi),$$

lo cual se sigue del hecho de que $\varphi(x) = 0$ para $x \in \partial D$, se llega a que

$$\begin{aligned}
v(t,\varphi) &= v(0,\varphi) + \int_0^t e^{-\kappa W_s}[u(s,\Delta\varphi) + G(u(s,\varphi))]ds \\
&+ \kappa \int_0^t e^{-\kappa W_s} u(s,\varphi) dW_s - \kappa \int_0^t e^{-\kappa W_s} u(s,\varphi) dW_s \\
&+ \frac{\kappa^2}{2} \int_0^t e^{-\kappa W_s} u(s,\varphi) ds + [e^{-\kappa W_\cdot}, u(\cdot,x)]_t. \\
&= v(0,\varphi) + \int_0^t e^{-\kappa W_s}[u(s,\Delta\varphi) + G(u(s,\varphi))]ds \\
&+ \frac{\kappa^2}{2} \int_0^t e^{-\kappa W_s} u(s,\varphi) ds + [e^{-\kappa W_\cdot}, u(\cdot,x)]_t. \qquad (3.5)
\end{aligned}$$

Ahora, como las integrales en $(0,t)$ de una función de variación finita con respecto a la medida de Lebesgue son funciones de variación finita también, entonces tienen variación cuadrática nula. De ahí que

$$\begin{aligned}
[e^{-\kappa W_\cdot}, u(\cdot,\varphi)]_t &= \Big[1 - \kappa \int_0^\cdot e^{-\kappa W_s} dW_s + \frac{\kappa^2}{2} \int_0^\cdot e^{-\kappa W_s} ds \\
&\quad , u(0,\varphi) + \int_0^\cdot u(s,\Delta\varphi) ds + \int_0^\cdot G(u)(s,\varphi) ds + \kappa \int_0^\cdot u(s,\varphi) dW_s \Big]_t \\
&= \left[-\kappa \int_0^\cdot e^{-\kappa W_s} dW_s, \kappa \int_0^\cdot u(s,\varphi) dW_s \right]_t \\
&= -\kappa^2 \left[\int_0^\cdot e^{-\kappa W_s} dW_s, \int_0^\cdot u(s,\varphi) dW_s \right]_t \\
&= -\kappa^2 \int_0^t e^{-\kappa W_s} u(s,\varphi) d[W]_s \\
&= -\kappa^2 \int_0^t e^{-\kappa W_s} u(s,\varphi) ds, \qquad t \geqslant 0. \qquad (3.6)
\end{aligned}$$

Reemplazando (3.6) en (3.5) se tiene que

$$\begin{aligned}
v(t,\varphi) =& v(0,\varphi) + \int_0^t e^{-\kappa W_s}[u(s,\Delta\varphi) + G(u(s,\varphi))]ds \\
&+ \frac{\kappa^2}{2} \int_0^t e^{-\kappa W_s} u(s,\varphi) ds - \kappa^2 \int_0^t e^{-\kappa W_s} u(s,\varphi) ds \\
=& v(0,\varphi) + \int_0^t e^{-\kappa W_s} u(s,\Delta\varphi) + e^{-\kappa W_s} G(u(s,\varphi)) ds \\
&- \frac{\kappa^2}{2} \int_0^t e^{-\kappa W_s} u(s,\varphi) ds \\
=& v(0,\varphi) + \int_0^t \left[v(s,\Delta\varphi) + e^{-\kappa W_s} G(e^{\kappa W} v)(s,\varphi) - \frac{\kappa^2}{2} v(s,\varphi) \right] ds.
\end{aligned}$$

La última igualdad se sigue de que $v(s,\varphi) = e^{-\kappa W_s} u(s,\varphi)$ y que $G(u(s,\varphi)) = G(e^{\kappa W} v)(s,\varphi)$. Entonces v es una solución débil de (3.1).

3.2. Existencia de la cota superior τ^*

Dado que $G_1 = \frac{G}{C}$ satisface que $G_1(z) \geqslant z^{1+\beta}$, para todo $z > 0$, sin pérdida de generalidad podemos tomar $C = 1$ en (2.4).
Sea ψ la eigenfunción correspondiente al primer eigenvalor λ_1 del Laplaciano sobre D, normalizada por $\int_D \psi(x)dx = 1$. Se conoce que ψ es estrictamente positiva sobre D. De la Proposición 2 tenemos que

$$v(t,\psi) = v(0,\psi) + \int_0^t \left[v(s,\Delta\psi) - \frac{\kappa^2}{2} v(s,\psi) \right] ds + \int_0^t e^{-\kappa W_s} G(e^{\kappa W} v)(s,\psi) ds.$$

Además

$$v(s,\Delta\psi) = -\lambda_1 v(s,\psi) \tag{3.7}$$

y debido a (2.4)

$$G(e^{\kappa W_s} v(s,x)) \geqslant [e^{\kappa W_s} v(s,x)]^{1+\beta} = e^{\kappa W_s} v(s,x) e^{\kappa\beta W_s} v(s,x)^{\beta}.$$

Se sigue que

$$\int_D e^{-\kappa W_s} G(e^{\kappa W_s} v(s,x))\psi(x)dx \geqslant e^{\kappa\beta W_s} \int_D v(s,x)^{1+\beta}\psi(x)dx. \tag{3.8}$$

Por la desigualdad de Jensen

$$\int_D v(s,x)^{1+\beta}\psi(x)dx \geqslant \left[\int_D v(s,x)\psi(x)dx \right]^{1+\beta} = v(s,\psi)^{1+\beta}, \tag{3.9}$$

por lo tanto

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} v(t,\psi) &= v(t,\Delta\psi) + e^{-\kappa W_t} G(e^{\kappa W_t} v)(t,\psi) - \frac{\kappa^2}{2} v(t,\psi) \\ &\geqslant -\lambda_1 v(t,\psi) - \frac{\kappa^2}{2} v(t,\psi) + e^{\kappa\beta W_t} v(s,x)^{1+\beta}. \end{aligned}$$

Entonces por un teorema de comparación como se puede ver en [**?**] se tiene que $v(t,\psi) \geqslant I(t)$, para todo $t \geqslant 0$, donde $I(t)$ es la solución de

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} I(t) &= -\left(\lambda_1 + \frac{\kappa^2}{2} \right) I(t) + e^{\kappa\beta W_t} I(t)^{1+\beta}, \\ I(0) &= v(0,\psi), \end{aligned}$$

y está dada por

$$I(t) = e^{-\left(\lambda_1 + \frac{\kappa^2}{2}\right)t} \left[v(0,\psi)^{-\beta} - \beta \int_0^t e^{-\left(\lambda_1 + \frac{\kappa^2}{2}\right)\beta_s + \kappa\beta W_s} ds \right]^{-\frac{1}{\beta}}, \quad 0 \leqslant t < \tau^*,$$

con

$$\tau^* = \text{ínf}\left\{ t \geqslant 0 : \int_0^t e^{-\left(\lambda_1+\frac{\kappa^2}{2}\right)\beta s+\kappa\beta W_s} ds \geqslant \frac{1}{\beta} v(0,\psi)^{-\beta} \right\}. \tag{3.10}$$

Se sigue que I exhibe explosión en tiempo finito sobre el evento $\{\tau^* < \infty\}$. Como $I \leqslant v(\cdot,\psi)$, τ^* es una cota superior para el tiempo de explosión de $v(\cdot,\psi)$ y de ahí para el tiempo de explosión de u.

3.3. Probabilidad de que v no explote

Ahora obtendremos una estimación para la probabilidad de explosión en tiempo finito de v. De (3.10) se sigue que

$$\begin{aligned} P[\tau^* = +\infty] &= P\left[\int_0^t \exp\left(-\left(\lambda_1 + \tfrac{\kappa^2}{2}\right)\beta s + \kappa\beta W_s \right) ds < \tfrac{1}{\beta} v(0,\psi)^{-\beta}, \forall t > 0 \right] \\ &= P\left[\int_0^\infty \exp\left(-\left(\lambda_1 + \tfrac{\kappa^2}{2}\right)\beta s + \kappa\beta W_s \right) ds \leqslant \tfrac{1}{\beta} v(0,\psi)^{-\beta} \right]. \end{aligned} \tag{3.11}$$

Denotando

$$\begin{aligned} W_s^{(\mu)} &:= \mu s + W_s, \\ \mu &:= -(\lambda_1 + \kappa^2/2)/\kappa, \\ \hat{\beta} &:= \kappa\beta/2, \end{aligned} \tag{3.12}$$

se tiene que

$$\begin{aligned} P[\tau^* = +\infty] &= P\left[\int_0^\infty \exp(2\hat{\beta} W_s^{(\mu)}) ds \leqslant \frac{1}{\beta} v(0,\psi)^{-\beta} \right] \\ &= P\left[\int_0^\infty \exp(2\hat{\beta}(W_s + \mu s) ds \leqslant \frac{1}{\beta} v(0,\psi)^{-\beta} \right] \\ &= P\left[\int_0^\infty \exp(2(\hat{\beta} W_s + \hat{\beta}\mu s)) ds \leqslant \frac{1}{\beta} v(0,\psi)^{-\beta} \right] \\ &= P\left[\int_0^\infty \exp(2(W_{\hat{\beta}^2 s} + \hat{\beta}\mu s)) ds \leqslant \frac{1}{\beta} v(0,\psi)^{-\beta} \right] \\ &= P\left[\frac{1}{\hat{\beta}^2} \int_0^\infty \exp\left(2\left(W_z + \frac{\mu z}{\hat{\beta}} \right) \right) dz \leqslant \frac{1}{\beta} v(0,\psi)^{-\beta} \right] \\ &= P\left[\frac{1}{\hat{\beta}^2} \int_0^\infty \exp\left(2\left(W_z - rz \right) \right) dz \leqslant \frac{1}{\beta} v(0,\psi)^{-\beta} \right], \end{aligned}$$

con $z = \hat{\beta}^2 s$ y $r = -\frac{\mu}{\hat{\beta}}$, cumpliéndose las condiciones del teorema (1) y obteniendo

$$\int_0^\infty \exp 2(B_z - rz) dz \overset{ley}{=} \frac{1}{2Z_r}, \tag{3.13}$$

donde Z_r es una variable aleatoria con distribución gamma de parámetro r, $\Gamma(r)$, es decir

$$P(Z_r \in dy) = \frac{1}{\Gamma(r)} e^{-y} y^{r-1} dy. \tag{3.14}$$

Se consigue de ahí que

$$\begin{aligned}
P(\tau^* = +\infty) &= P\left[\int_0^\infty \exp\left(2\left(W_z - rz\right)\right) dz \leqslant \frac{\hat{\beta}^2}{\beta} v(0,\psi)^{-\beta}\right] \\
&= P\left[\int_0^\infty \exp\left(2\left(W_z - rz\right)\right) dz \leqslant \frac{\kappa^2\beta}{4} v(0,\psi)^{-\beta}\right] \\
&= P\left[\frac{1}{2Z_r} \leqslant \frac{\kappa^2\beta}{4} v(0,\psi)^{-\beta}\right] \\
&= P\left[Z_r \geqslant \frac{2}{\kappa^2\beta} v(0,\psi)^{\beta}\right] \\
&= \int_{\frac{2}{\kappa^2\beta} v(0,\psi)^\beta}^\infty \frac{1}{\Gamma(r)} e^{-y} y^{r-1} dy.
\end{aligned}$$

Realizamos el cambio de variable $y = \frac{2}{\kappa^2\beta^2 z}$, con lo cual: $dy = -\frac{2}{\kappa^2\beta^2} z^{-2} dz$ y

$$\begin{aligned}
P(\tau^* = +\infty) &= -\int_0^{\frac{1}{\beta} v(0,\psi)^{-\beta}} \frac{1}{\Gamma(r)} \exp\left(-\frac{2}{\kappa^2\beta^2 z}\right) \left(\frac{2}{\kappa^2\beta^2 z}\right)^r \left(\frac{\kappa^2\beta^2 z}{2}\right) \left(-\frac{2}{\kappa^2\beta^2} z^{-2}\right) dz \\
&= \int_0^{\frac{1}{\beta} v(0,\psi)^{-\beta}} h(z) dz,
\end{aligned}$$

donde

$$h(z) = \frac{1}{z\Gamma(r)} \exp\left(-\frac{2}{\kappa^2\beta^2 z}\right) \left(\frac{\kappa^2\beta^2 z}{2}\right)^{-r}.$$

Con lo anterior se probó que

Proposición 3. *La probabilidad de que la solución de (2.3) explote en tiempo finito es acotada por abajo por* $\int_{\frac{1}{\beta} v(0,\psi)^{-\beta}}^{+\infty} h(y) dy$.

Observación 4. Poniendo $\kappa = 0$ en la Proposición 2 conseguimos que $v = u$ y más aún, de la segunda igualdad de (3.11) y de que $u(t,\varphi) = \int_D u(t,x)\varphi(x)dx$, obtenemos que

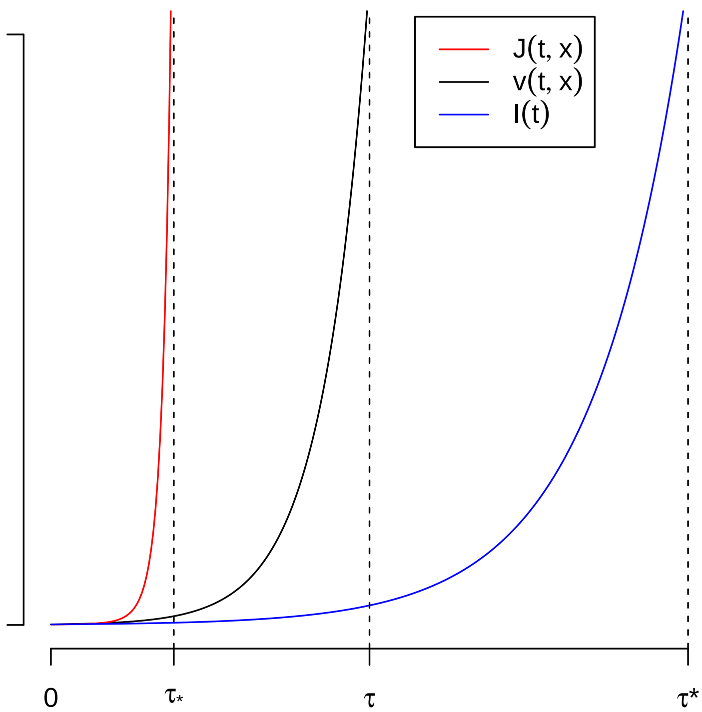
$$\begin{aligned}
P[\tau^* = +\infty] &= P\left[\textstyle\int_0^\infty \exp\left(-\lambda_1 \beta s\right) ds \leqslant \frac{1}{\beta} v(0,\psi)^{-\beta}\right] \\
&= P\left[\tfrac{1}{\lambda_1\beta} \leqslant \tfrac{1}{\beta} v(0,\psi)^{-\beta}\right] \\
&= P\left[v(0,\psi) \leqslant \lambda_1^{\frac{1}{\beta}}\right] \\
&= P\left[\textstyle\int_D u(0,x)\psi(x)dx \leqslant \lambda_1^{\frac{1}{\beta}}\right] \\
&= P\left[\textstyle\int_D f(x)\psi(x)dx \leqslant \lambda_1^{\frac{1}{\beta}}\right].
\end{aligned} \tag{3.15}$$

De ahí que $P[\tau^* = +\infty] = 0$ ó 1 según que $\int_D f(x)\psi(x)dx > \lambda_1^{\frac{1}{\beta}}$ ó $\int_D f(x)\psi(x)dx \leqslant \lambda_1^{\frac{1}{\beta}}$. De aquí se sigue uno de los resultados de Fujita en [4].

Capítulo 4

COTA INFERIOR τ_*

Como se mencionó en la introducción, en el presente capítulo se encontrará una cota inferior τ_* del tiempo de explosión de la solución de la ecuación (2.3). Para esto, comenzaremos probando el Teorema (5), que permitirá tener una condición suficiente para que exista una supersolución $J(t,x)$, es decir $v(t,x) \leq J(t,x)$. De lo anterior si $J(t,x)$ explota al tiempo τ_*, lo hará primero que $v(t,x)$ que explota al tiempo τ, es decir $\tau_* \leq \tau$. Hasta aquí habríamos hallado las dos cotas de τ, $\tau_* \leq \tau \leq \tau^*$ como se ilustra a continuación. Posteriormente se obtiene la probabilidad de explosión en tiempo finito de $J(t,x)$, es decir $P[\tau_* < +\infty]$.



4.1. Existencia de la cota inferior τ_*

Se considera de nuevo la ecuación (3.1), suponiendo que $\kappa \neq 0$ y que $G : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ es tal que $G(0) = 0$, con $G(z)/z$ creciente y

$$G(z) \leq \Lambda z^{1+\beta} \quad \forall\ z > 0, \tag{4.1}$$

donde Λ y β son números positivos. Reescribiendo (3.1) en forma integral se tiene que

$$v(t,x) = e^{-\kappa^2 t/2} S_t f(x) + \int_0^t e^{-\kappa^2 (t-r)/2} S_{t-r} \left(e^{-\kappa W_r} G\left(e^{\kappa W_r} v(r,\cdot)\right)\right)(x)\, dr, \tag{4.2}$$

donde $\{S_t,\, t \geq 0\}$ denota el semigrupo del movimiento Browniano d-dimensional matado en la frontera de D. Ahora se dará una condición suficiente para la existencia de una solución global de (3.1).

Teorema 5. *Si $f \geqslant 0$ es tal que*

$$\Lambda\beta \int_0^\infty e^{\kappa\beta W_r} \| e^{-\kappa^2 r/2} S_r f\|_\infty^\beta \, dr < 1, \tag{4.3}$$

entonces la ecuación (3.1) admite una solución global $v(t,x)$ que satisface

$$0 \leq v(t,x) \leq \frac{e^{-\kappa^2 t/2} S_t f(x)}{\left(1 - \Lambda\beta \int_0^t e^{\kappa\beta W_r} \| e^{-\kappa^2 r/2} S_r f\|_\infty^\beta \, dr\right)^{\frac{1}{\beta}}}, \qquad t \geq 0. \tag{4.4}$$

Demostración. Definiendo

$$B(t) = \left(1 - \Lambda\beta \int_0^t e^{\kappa\beta W_r} \| e^{-\kappa^2 r/2} S_r f\|_\infty^\beta \, dr\right)^{-\frac{1}{\beta}}, \quad t \geq 0,$$

implica que $B(0) = 1$ y

$$\begin{aligned}
\frac{dB}{dt}(t) =& \frac{1}{\beta}\left(1 - \Lambda\beta \int_0^t e^{\kappa\beta W_r} \| e^{-\kappa^2 r/2} S_r f\|_\infty^\beta \, dr\right)^{-\frac{1}{\beta}(1+\beta)} \Lambda\beta e^{\kappa\beta W_t} \| e^{-\kappa^2 t/2} S_t f\|_\infty^\beta \\
=& \left(\left(1 - \Lambda\beta \int_0^t e^{\kappa\beta W_r} \| e^{-\kappa^2 r/2} S_r f\|_\infty^\beta \, dr\right)^{-\frac{1}{\beta}}\right)^{(1+\beta)} e^{\kappa\beta W_t} \| e^{-\kappa^2 t/2} S_t f\|_\infty^\beta \\
=& B^{(1+\beta)}(t) \Lambda e^{\kappa\beta W_t} \| e^{-\kappa^2 t/2} S_t f\|_\infty^\beta,
\end{aligned} \tag{4.5}$$

he integrando en $[0,t]$ resulta que $B(t)$ cumple la ecuación integral

$$B(t) = 1 + \Lambda \int_0^t e^{\kappa\beta W_r} \| e^{-\kappa^2 r/2} S_r f\|_\infty^\beta B^{1+\beta}(r)\, dr.$$

Sea $V : [0,\infty) \times D \mapsto \mathbb{R}$ una función continua no negativa tal que $V_t(\cdot)$ es continua sobre D, $t \geq 0$, y

$$e^{-\kappa^2 t/2} S_t f(x) \leq V_t(x) \leq B(t) e^{-\kappa^2 t/2} S_t f(x), \quad t \geq 0, \quad x \in D. \tag{4.6}$$

Poniendo

$$R(V)(t,x) := e^{-\kappa^2 t/2} S_t f(x) + \int_0^t e^{-\kappa W_r} e^{-\kappa^2 (t-r)/2} S_{t-r} \left(G(e^{\kappa W_r} V_r(\cdot)) \right)(x) dr,$$

entonces

$$R(V)(t,x) = e^{-\kappa^2 t/2} S_t f(x) + \int_0^t e^{-\kappa W_r} e^{-\kappa^2 (t-r)/2} S_{t-r} \left(\frac{G(e^{\kappa W_r} V_r(\cdot))}{V_r(\cdot)} V_r(\cdot) \right)(x)\, dr.$$

Ahora por (4.6) y el hecho de que $G(z)/z$ es creciente, se tiene que

$$R(V)(t,x) \leq \; e^{-\kappa^2 t/2} S_t f(x) + \int_0^t e^{-\kappa W_r} e^{-\kappa^2 (t-r)/2} S_{t-r} \left(\frac{G(e^{\kappa W_r} B(r) \| e^{-\kappa^2 r/2} S_r f \|_\infty)}{B(r) \| e^{-\kappa^2 r/2} S_r f \|_\infty} V(r) \right)(x)\, dr,$$

y como $G(z) \leqslant \Lambda z^{1+\beta}$, entonces

$$\begin{aligned} & R(V)(t,x) \\ \leq \; & e^{-\kappa^2 t/2} S_t f(x) + \int_0^t e^{-\kappa W_r} e^{-\kappa^2 (t-r)/2} && (4.7) \\ \cdot \; & S_{t-r} \left(\frac{\Lambda \left(e^{\kappa W_r} B(r) \| e^{-\kappa^2 r/2} S_r f \|_\infty \right)^{1+\beta}}{B(r) \| e^{-\kappa^2 r/2} S_r f \|_\infty} V(r) \right)(x)\, dr, \\ = \; & e^{-\kappa^2 t/2} S_t f(x) + \Lambda \int_0^t e^{-\kappa W_r} e^{-\kappa^2 (t-r)/2} && (4.8) \\ \cdot \; & S_{t-r} \left(\frac{(e^{\kappa W_r})^{1+\beta} B^{1+\beta}(r) \| e^{-\kappa^2 r/2} S_r f \|_\infty^{1+\beta}}{B(r) \| e^{-\kappa^2 r/2} S_r f \|_\infty} V(r) \right)(x)\, dr, \end{aligned}$$

de nuevo aplicando (4.6) se llega a que

$$\begin{aligned} & R(V)(t,x) \\ \leq \; & e^{-\kappa^2 t/2} S_t f(x) + \Lambda \textstyle\int_0^t e^{-\kappa W_r} e^{-\kappa^2 (t-r)/2} \\ \cdot \; & S_{t-r} \left(\tfrac{(e^{\kappa W_r})^{1+\beta} B^{1+\beta}(r) \| e^{-\kappa^2 r/2} S_r f \|_\infty^{\beta}}{B(r)} B(r) e^{-\kappa^2 r/2} S_r f(x) \right)(x)\, dr, \\ = \; & e^{-\kappa^2 t/2} S_t f(x) + \Lambda \textstyle\int_0^t e^{-\kappa W_r} e^{-\kappa^2 (t-r)/2} (e^{\kappa W_r})^{1+\beta} B^{1+\beta}(r) \| e^{-\kappa^2 r/2} S_r f \|_\infty^{\beta} \\ \cdot \; & S_{t-r} \left(e^{-\kappa^2 r/2} S_r f(x) \right)(x)\, dr, \\ \leq \; & e^{-\kappa^2 t/2} S_t f(x) \\ & + \Lambda \textstyle\int_0^t e^{\kappa \beta W_r} B^{1+\beta}(r) \| e^{-\kappa^2 r/2} S_r f \|_\infty^{\beta} e^{-\kappa^2 (t-r)/2} S_{t-r} (e^{-\kappa^2 r/2} S_r f)(x)\, dr \\ = \; & e^{-\kappa^2 t/2} S_t f(x) \left[1 + \Lambda \textstyle\int_0^t e^{\kappa \beta W_r} B^{1+\beta}(r) \| e^{-\kappa^2 r/2} S_r f \|_\infty^{\beta}\, dr \right] \\ = \; & e^{-\kappa^2 t/2} S_t f(x) B(t). \end{aligned}$$

Por como está definido $R(V)(t,x)$ y de lo anterior se tienen las desigualdades

$$e^{-\kappa^2 t/2} S_t f(x) \leq R(V)(t,x) \leq B(t) e^{-\kappa^2 t/2} S_t f(x), \quad t \geq 0, \quad x \in D.$$

Sea

$$v_t^0(x) := e^{-\kappa^2 t/2} S_t f(x) \quad \text{y} \quad v_t^{n+1}(x) = R(v^n)(t,x), \quad n = 0,1,2,\ldots.$$

Por lo anterior se evidencia que $v_t^0(x) \leq R(v^0)(t,x) = v_t^1(x)$. Supongamos ahora que $v_t^{n-1}(x) \leq v_t^{n+1}(x)$ para algún $n \geqslant 1$, todo $t \geqslant 0$ y $x \in D$. Ahora, del hecho de que $G(z)/z$ es creciente, se tiene que

$$\begin{aligned} G(e^{kW_r} v_r^n(\cdot)) &= \frac{G(e^{kW_r} v_r^n(\cdot))}{e^{kW_r} v_r^n(\cdot)} e^{kW_r} v_r^n(\cdot) && (4.9) \\ &\geqslant \frac{G(e^{kW_r} v_r^{n-1}(\cdot))}{e^{kW_r} v_r^{n-1}(\cdot)} e^{kW_r} v_r^{n-1}(\cdot) && (4.10) \\ &= G(e^{kW_r} v_r^{n-1}(\cdot)), && (4.11) \end{aligned}$$

por tanto, $(v_t^n)_{n=0}^{\infty}$ es una sucesión monótona creciente de funciones no negativas. De ahí, que al tomar el límite para $n \to \infty$, y debido al teorema de convergencia monótona, se llega a que para $t \geq 0$ y $x \in D$,

$$\begin{aligned} 0 &\leq v(t,x) = \lim_{n\to\infty} v_t^n(x) \leq B(t) e^{-\kappa^2 t/2} S_t f(x) \\ &= \frac{e^{-\kappa^2 t/2} S_t f(x)}{\left(1 - \Lambda\beta \int_0^t e^{\kappa\beta W_r} \|e^{-\kappa^2 r/2} S_r f\|_\infty^\beta dr\right)^{1/\beta}}. \end{aligned}$$

Lo cual implica que $v(t,x)$ es una solución global de (4.2). ■

A continuación se deriva una condición suficiente para (4.3) en términos de las densidades de transición $\{p_t(x,y),\, t > 0\}$ de $\{S_t,\, t \geq 0\}$, del primer eigenvalor λ_1 del laplaciano en D y la correspondiente eigenfunción ψ. Recordemos las siguientes cotas para $\{p_t(x,y),\, t > 0\}$, las cuales se demuestran en [13].

Teorema 6. *Sea $\psi > 0$ la primera función de Dirichlet sobre D en $\mathbb{R}^d$, y sea $p_t(x,y)$ el correspondiente núcleo del calor de Dirichlet. Existe una constante $c > 0$ tal que para todo $t > 0$,*

$$\max\left\{1, \frac{1}{c} t^{-(d+2)/2}\right\} \leq e^{\lambda_1 t} \sup_{x,y\in D} \frac{p_t(x,y)}{\psi(x)\psi(y)} \leq 1 + c(1 \wedge t)^{-(d+2)/2} e^{-(\lambda_2-\lambda_1)t},$$

donde $\lambda_2 > \lambda_1$ son los primeros dos eigenvalores del laplaciano con condición de Dirichlet.

El Teorema (6) se usa para verificar la condición (4.3). Para ello tomemos el valor inicial $f \geq 0$ de modo que

$$f(y) \leq K S_\eta \psi(y), \quad y \in D, \tag{4.12}$$

donde $\eta \geq 1$ es fija y $K > 0$ es una constante suficientemente pequeña que será especificada más tarde. Por lo tanto, $S_t f \leq K S_{t+\eta}\psi$, y para todo $t > 0$,

$$
\begin{aligned}
S_t f(x) &\leq K \int_D p_{t+\eta}(x,y)\psi(y)\,dy \\
&= K \int_D e^{\lambda_1(t+\eta)} \frac{p_{t+\eta}(x,y)}{\psi(x)\psi(y)} e^{-\lambda_1(t+\eta)} \psi(x)\psi^2(y)\,dy \\
&\leq K \left(\sup_{x\in D}\psi(x)\right)^2 \int_D e^{\lambda_1(t+\eta)} \sup_{x,y\in D} \frac{p_{t+\eta}(x,y)}{\psi(x)\psi(y)} e^{-\lambda_1(t+\eta)}\psi(y)\,dy \\
&\leq K \left(\sup_{x\in D}\psi(x)\right)^2 \\
&\quad \cdot \int_D \left(1 + c(1\wedge(t+\eta))^{-(d+2)/2} e^{-(\lambda_2-\lambda_1)(t+\eta)}\right) e^{-\lambda_1(t+\eta)}\psi(y)\,dy \\
&= K \left(\sup_{x\in D}\psi(x)\right)^2 \left(e^{-\lambda_1(t+\eta)} + ce^{-\lambda_2(t+\eta)}\right) \int_D \psi(y)\,dy \\
&\leq K(1+c)e^{-\lambda_1\eta} \left(\sup_{x\in D}\psi(x)\right)^2 e^{-\lambda_1 t} \int_D \psi(y)\,dy.
\end{aligned}
\tag{4.13}
$$

En la anterior prueba, la tercera desigualdad se obtiene haciendo uso del Teorema (6), donde $c > 0$ es una constante. De (4.13) se tiene que

$$
\begin{aligned}
\Lambda\beta \int_0^\infty e^{\kappa\beta W_r} \|e^{-\kappa^2 r/2} S_r f\|_\infty^\beta \,dr &\leq \Lambda\beta \int_0^\infty e^{\kappa\beta W_r} \Big\| e^{-\kappa^2 r/2} \\
&\quad \cdot \left[K(1+c)e^{-\lambda_1\eta}\left(\sup_{x\in D}\psi(x)\right)^2 e^{-\lambda_1 t}\int_D \psi(y)\,dy\right]\Big\|_\infty^\beta \,dr \\
&\leq \Lambda\beta \left[K(1+c)e^{-\lambda_1\eta}\left(\sup_{x\in D}\psi(x)\right)^2 \int_D \psi(y)\,dy\right]^\beta \\
&\quad \cdot \int_0^\infty dr\, e^{\kappa\beta W_r - (\lambda_1+\kappa^2/2)\beta r},
\end{aligned}
$$

lo cual es independiente de x. De ahí que la función $(t,x) \mapsto S_t f(x)$ es acotada uniformemente en x, y de la última desigualdad es claro que la condición (4.3) es satisfecha siempre que

$$
\Lambda\beta \left[K(1+c)e^{-\lambda_1\eta}\left(\sup_{x\in D}\psi(x)\right)^2 \int_D \psi(y)\,dy\right]^\beta \int_0^\infty dr\, e^{\kappa\beta W_r - (\lambda_1+\kappa^2/2)\beta r} < 1,
$$

o equivalentemente,

$$
\int_0^\infty dr\, e^{\kappa\beta W_r - (\lambda_1+\kappa^2/2)\beta r} < \frac{e^{\lambda_1\beta\eta}}{\Lambda\beta\left[K(1+c)\left(\sup_{x\in D}\psi(x)\right)^2\int_D \psi(y)\,dy\right]^\beta}, \tag{4.14}
$$

lo cual se cumple si $K > 0$ es suficientemente pequeña.

Observación 7. La integral del lado izquierdo de (4.14) coincide con la correspondiente integral en (3.10). El mismo tipo de cotas como en la sección 3.3 puede, por lo tanto, ser aplicado para estimar la probabilidad de existencia de una solución global positiva.

Obsérvese que si $\tau_* = \text{ínf}\left\{t \geqslant 0 : 1 \leqslant \Lambda\beta \int_0^t e^{\kappa\beta W_r} \|e^{-\kappa^2 r/2} S_r f\|_\infty\right\}$, se tiene:

Corolario 8. *Sea $J(t,x)$ dada como*

$$J(t,x) = \frac{e^{-\kappa^2 t/2} S_t f(x)}{\left(1 - \Lambda\beta \int_0^t e^{\kappa\beta W_r} \|e^{-\kappa^2 r/2} S_r f\|_\infty^\beta \, dr\right)^{\frac{1}{\beta}}}, \qquad 0 \leq t < \tau_*, \tag{4.15}$$

entonces $v(t,x) \leq J(t,x)$ y $J(t,x)$ explota en τ_*. En particular $\tau_* \leqslant \tau$.

Observación 9. En el caso en que f sea la primera eigenfunción del operador S_t, con su correspondiente eigenvalor λ_1, $S_t f = e^{-\lambda_1 t} f$ y para $\Lambda = 1$, se tiene que

$$\begin{aligned}
\tau_* &= \text{ínf}\left\{t \geqslant 0 : 1 \leq \beta \int_0^t e^{\kappa\beta W_r} \|e^{-\kappa^2 r/2} S_r f\|_\infty^\beta dr\right\} \\
&= \text{ínf}\left\{t \geqslant 0 : 1 \leq \beta \int_0^t e^{\kappa\beta W_r} \|e^{-\kappa^2 r/2} e^{-\lambda_1 r} f\|_\infty^\beta dr\right\} \\
&= \text{ínf}\left\{t \geqslant 0 : 1 \leq \beta \int_0^t e^{\kappa\beta W_r} e^{-\beta\kappa^2 r/2} e^{-\beta\lambda_1 r} \|f\|_\infty^\beta dr\right\} \\
&= \text{ínf}\left\{t \geqslant 0 : 1 \leq \beta \int_0^t e^{\kappa\beta W_r - \beta\kappa^2 r/2 - \beta\lambda_1 r} \|f\|_\infty^\beta dr\right\} \\
&= \text{ínf}\left\{t \geqslant 0 : 1 \leq \beta \int_0^t e^{\kappa\beta W_r - \beta r\left(\kappa^2/2 + \lambda_1\right)} \|f\|_\infty^\beta dr\right\} \\
&= \text{ínf}\left\{t \geqslant 0 : \frac{1}{\beta}\|f\|_\infty^{-\beta} \leq \int_0^t e^{\kappa\beta W_r - \beta r\left(\kappa^2/2 + \lambda_1\right)} dr\right\}.
\end{aligned} \tag{4.16}$$

4.2. Probabilidad de que v no explote

Ahora obtendremos una estimación para la probabilidad de explosión en tiempo finito de v. Para tal efecto consideramos el caso especial $v(0,x) = \psi(x)$, donde $\psi(x)$ es una eigenfunción de S_t. Entonces $S_t\psi(x) = e^{-\lambda_1 t}\psi(x)$. Si $\Lambda = 1$, obtenemos de (4.15) que $J(t,x)$ explota si y sólo si se cumple la siguiente igualdad

$$\int_0^t e^{\kappa\beta W_r} \left\|\exp\left(-\frac{\kappa^2 r}{2} - \lambda_1 r\right)\psi\right\|_\infty^\beta dr \leqslant \frac{1}{\beta}.$$

Por lo tanto, de manera similar al caso de la cota superior, obtenemos:

$$\begin{aligned}
P[\tau_* = +\infty] &= P\left[\int_0^t \exp\left(-\left(\lambda_1 + \tfrac{\kappa^2}{2}\right)\beta s + \kappa\beta W_s\right) ds < \tfrac{1}{\beta}\|v(0,x)\|_\infty^{-\beta}, \forall t > 0\right] \\
&= P\left[\int_0^\infty \exp\left(-\left(\lambda_1 + \tfrac{\kappa^2}{2}\right)\beta s + \kappa\beta W_s\right) ds \leqslant \tfrac{1}{\beta}\|v(0,x)\|_\infty^{-\beta}\right]
\end{aligned} \tag{4.17}$$

Haciendo un cambio de variable similar a (3.12) se consigue que

$$P(\tau_* = +\infty) = \int_0^{\frac{1}{\beta}\|v(0,x)\|_\infty^{-\beta}} h(y) dy, \tag{4.18}$$

donde

$$h(y) = \frac{(\kappa^2\beta^2 y/2)^{-(2\lambda_1+\kappa^2)/\kappa^2\beta}}{y\Gamma((2\lambda_1+\kappa^2)/(\kappa^2\beta))}\exp\left(-\frac{2}{\kappa^2\beta^2 y}\right). \tag{4.19}$$

Con lo anterior se probó que

Proposición 10. *La probabilidad de que la solución de (2.3) explote en tiempo finito es acotado por arriba por* $\int_{\frac{1}{\beta}\|v(0,x)\|_\infty^{-\beta}}^{+\infty} h(y)dy$.

Capítulo 5

COMENTARIOS FINALES

Debido a la continuidad de $W.$ y a la relación

$$v(t,x) = e^{-\kappa W_t} u(t,x),$$

v explota en tiempo finito si y sólo si u lo hace. En tal caso, ambas funciones tienen los mismos tiempos de explosión.

5.1. Conclusiones

1). Si $v(0,x) = k\psi(x)$,

$$\tau^* = \text{ínf}\left\{t \geqslant 0 : \int_0^t e^{-\left(\lambda_1 + \frac{\kappa^2}{2}\right)\beta_s + \kappa\beta W_s} ds \geqslant \frac{1}{\beta k^\beta}\left(\int \psi^2(x)d(x)\right)^{-\beta}\right\}. \tag{5.1}$$

$$\tau_* = \text{ínf}\left\{t \geqslant 0 : \int_0^t e^{-\left(\lambda_1 + \frac{\kappa^2}{2}\right)\beta_s + \kappa\beta W_s} ds \geqslant \frac{1}{\beta k^\beta}\|\psi(x)\|_\infty^{-\beta}\right\}. \tag{5.2}$$

Notemos que

$$\int_D \psi^2(x)dx \leq \int_D \|\psi\|_\infty \psi(x)dx = \|\psi\|_\infty,$$

ya que $\int_D \psi(x)dx = 1$. Sin embargo de (5.1) y (5.2), $\tau_* = \tau = \tau^*$ si y sólo si

$$\int_D \psi^2(x)d(x) = \|\psi(x)\|_\infty, \tag{5.3}$$

por tanto se podría encontrar la distribución exacta de τ.

2). Como $\tau_* \leq \tau \leq \tau^*$ entonces $P(\tau^* < +\infty) \leq P(\tau < +\infty) \leq P(\tau_* < +\infty)$, es decir también se han encontrado cotas para la probabilidad de que la solución explote en tiempo finito.

5.2. Cotas del tiempo de explosión para el caso $d = 1$

Supongamos $D = (a, b)$ es un intervalo acotado abierto. Una función ψ sobre (a, b) es una eigenfunción de Δ correspondiente al eigenvalor $\lambda > 0$ si φ es dos veces diferenciable sobre (a, b), $\varphi'' = -\lambda\varphi$ sobre (a, b) y $\varphi = 0$ sobre $\{a, b\}$. La solución general de la ecuación $\varphi'' = -\lambda\varphi$ sobre (a, b) está dada por

$$\varphi(x) = c_1 \sin(\sqrt{\lambda}(x-a)) + c_2 \cos(\sqrt{\lambda}(x-a)), \quad a < x < b. \tag{5.4}$$

Nótese que $\varphi(a) = 0$ si y sólo si $c_2 = 0$. Supongamos que $c_2 = 0$ pero φ no es idénticamente cero. Entonces $c_1 \neq 0$ y la solución se hace 0 en la frontera cuando

$$\lambda = \lambda_n = \frac{n^2\pi^2}{(b-a)^2}$$

ya que $\sin(\sqrt{\lambda}(x-a)) = 0$ si

$$\sqrt{\lambda}(x-a) = n\pi, \quad con \;\; x = b \;\; y \;\; n \in \mathbb{N}.$$

Por otro lado, necesitamos que $\|\varphi\|_1 = 1$ para esto hacemos

$$\begin{aligned}
\int_a^b c_1 \sin(\sqrt{\lambda}(x-a))dx &= c_1 \int_a^b \sin\left(\frac{n\pi}{b-a}(x-a)\right) dx \\
&= c_1 \frac{b-a}{n\pi}\left(-\cos\left(\frac{n\pi}{b-a}(x-a)\right)\right)\Big|_a^b \\
&= c_1 \frac{b-a}{n\pi}\left(-\cos(n\pi) + 1\right) \quad \forall \;\; n = 2k-1, k \in \mathbb{N}.
\end{aligned} \tag{5.5}$$

Para que (5.5) sea igual a 1,

$$c_1 = \frac{n\pi}{(b-a)(1-\cos(n\pi))}.$$

En particular si $n = 1$,

$$\varphi(x) = \frac{\pi}{2(b-a)} \sin\left(\frac{\pi}{b-a}(x-a)\right).$$

Ahora veamos en qué intervalos $\int \varphi(x)^2 dx = \|\varphi\|_\infty$.

$$\begin{aligned}
\int_a^b \varphi(x)^2 dx &= \int_a^b \left(\frac{\pi}{2(b-a)} \sin\left(\frac{\pi}{b-a}(x-a)\right)\right)^2 dx \\
&= \frac{\pi\left[(a-b)\sin\left(\frac{2\pi(a-x)}{a-b}\right) + 2\pi(x-a)\right]}{16(a-b)^2}\Big|_a^b \\
&= \frac{\pi^2(b-a)}{8(a-b)^2} \\
&= \frac{\pi^2}{8(b-a)}.
\end{aligned} \tag{5.6}$$

Luego notemos que

$$\|\varphi\|_\infty = \frac{\pi}{2(b-a)}. \tag{5.7}$$

Al igualar (5.7) y (5.6) se tiene

$$\frac{1}{4} = \frac{1}{\pi}. \tag{5.8}$$

Es decir para el caso $d = 1$ no se da (5.3). Entonces como problema abierto queda establecer éste caso para dimensiones mayores a 1.
Luego, las cotas del tiempo de explosión τ de la solución de la ecuación diferencial estocástica (2.3) para $f = \varphi$, según ((5.6)) y ((5.7)) son,

$$\tau^* = \text{ínf}\left\{t \geqslant 0 : \int_0^t e^{-\left(\lambda_1+\frac{\kappa^2}{2}\right)\beta_s+\kappa\beta W_s} ds \geqslant \frac{1}{\beta k^\beta}\left(\frac{\pi^2}{8(b-a)}\right)^{-\beta}\right\}, \tag{5.9}$$

$$\tau_* = \text{ínf}\left\{t \geqslant 0 : \int_0^t e^{-\left(\lambda_1+\frac{\kappa^2}{2}\right)\beta_s+\kappa\beta W_s} ds \geqslant \frac{1}{\beta k^\beta}\left(\frac{\pi}{2(b-a)}\right)^{-\beta}\right\}. \tag{5.10}$$

Se consigue de ahí $P(\tau^* < +\infty) < P(\tau < +\infty) < P(\tau_* < +\infty)$ donde

$$P(\tau^* < +\infty) = \int_{\frac{1}{\beta k^\beta}\left(\frac{\pi^2}{8(b-a)}\right)^{-\beta}}^{+\infty} h(y)dy, \tag{5.11}$$

y

$$P(\tau_* < +\infty) = \int_{\frac{1}{\beta k^\beta}\left(\frac{\pi}{2(b-a)}\right)^{-\beta}}^{+\infty} h(y)dy, \tag{5.12}$$

donde

$$h(y) = \frac{(\kappa^2\beta^2 y/2)^{(2\lambda_1+\kappa^2)/\kappa^2\beta}}{y\Gamma((2\lambda_1+\kappa^2)/(\kappa^2\beta))} \exp\left(-\frac{2}{\kappa^2\beta^2 y}\right). \tag{5.13}$$

Bibliografía

[1] Friedman Abner, *Partial differential equations of parabolic type*, Prentice-Hall, Inc., 1964.

[2] P. A. Vuillermot B. Bergé, I. D. Chuesshov, *On the behaviour of solutions to certain parabolic spde' s driven by wiener processes*, Stochastic Processes and their Applications (2001), no. 92, 237–263.

[3] Daniel Dufresne, *The bessel processes and a functional of brownian motion*, Centre for Actuarial Studies, University of Melbourne (2004).

[4] H. Fujita, *On some nonexistence and nonuniquenes theorems for nonlinear parabolic equations*, Nonlinear Functional Analysis (1970), 105–113.

[5] S. Goldstein, *On laminar boundary layer flow near a point of separation*, Appl. Math (1948), no. 1, 43–69.

[6] D. Eberly J. Bebernes, *Characterization of blow-up for a semilinear heat equation with a convection term*, Mechanics and applied mathematics **42** (1989), no. 3, 447–456.

[7] Z. Kadelburg and M. Marjanović, *Interchanging two limits*, The teaching of mathematics **VIII** (2005), no. I, 15–29.

[8] C. Klebaner, *Introduction to stochastic calculus with applications*, 2nd. edition ed., Imperial College Press, 2005.

[9] H. Levine, *The role of critical exponents in blowup theorems*, Society for Industrial and Applied Mathematics **32** (1990), no. 2, 262–288.

[10] J. A. López-Mimbela M. Dozzi, *Finite-time blowup and existence of global positive solutions of a semi-linear sdpe*, Stochastic Processes and their Applications (2010), no. 120, 767–776.

[11] James R. Munkres, *Topology*, second edition. ed., 2000.

[12] Salminen Paavo N. Andrei Borodin, *Handbook of brownian motion - facts and formulae*, 2nd. edition ed., Probability and its Applications, 2002.

[13] Wang Feng-Yu Ouhabaz, El Maati, *Sharp estimates for intrinsic ultracontractivity on $c^{1,\alpha}$-domains*, Manuscripta Math **122** ((2007)), no. 2, 229–244.

[14] A. Pazy, *Semigroups of linear operators and applications to partial differential equations.*, Springer-Verlag, New York, 1983., no. 44., Applied Mathematical Sciences, 1983.

[15] Shige Peng and Xuehong Zhu, *Necessary and sufficient condition for comparison theorem of 1-dimensional stochastic differential equations*, Stochastic Processes and their Applications **116** (2006), no. 3, 370 – 380.

[16] F. Riesz and B.S. Nagy, *Functional analysis*, Dover Books on Mathematics, Dover Publications, 1990.

[17] Charles J. Stone Sidney C. Port, *Brownian motion and classical potential theory*, Academic Press, 1978.

[18] B. Straughan, *Instability, nonexistence and weighted energy methods in fluid dynamics and related theories*, Notes in Math (1982), no. 74.

[19] Marc Yor, *Exponential functionals of brownian motion and related processes*, Springer Finance, Springer-Verlag , Berlin, 2001.