

CIMAT

Centro de Investigación en Matemáticas A.C.

---

**Teoremas tipo Helly  
y teoremas coloreados**

**T E S I S**

que para obtener el grado de

**Doctor en Ciencias**

con orientación en

**Matemáticas Básicas**

P R E S E N T A:

**Jesús Jerónimo Castro**

DIRECTOR DE TESIS:

**Dr. Vladimir G. Boltyanski**

CODIRECTOR DE TESIS:

**Dr. Vladimir L. Dolnikov**

Septiembre 23 de 2006

Guanajuato, Gto. México

# Índice general

Agradecimientos	5
Notación básica	7
Introducción	9
1. Resultados Coloreados	17
1.1. Grünbaum Coloreado . . . . .	17
1.1.1. Introducción . . . . .	17
1.1.2. Resultados para Planos de Minkowski . . . . .	21
1.1.3. Un resultado para el Plano Euclidiano . . . . .	27
1.1.4. Cubriendo conjuntos convexos . . . . .	31
1.2. Jung para $H$ -convexos . . . . .	32
1.2.1. Introducción y notación . . . . .	32
1.2.2. Demostraciones y Corolarios . . . . .	35

1.3. Steinitz Coloreado . . . . .	36
1.3.1. Introducción . . . . .	36
1.3.2. Demostraciones y Corolarios . . . . .	37
<b>2. Proyecciones y Secciones de Cuerpos Convexos</b>	<b>39</b>
2.1. Caracterizaciones de Simetría Central . . . . .	39
2.1.1. Introducción . . . . .	39
2.1.2. Demostraciones y Corolarios . . . . .	41
2.2. Proyecciones de cuerpos convexos . . . . .	46
2.2.1. Introducción . . . . .	46
2.2.2. Cuerpos homotéticos . . . . .	46
2.2.3. Demostraciones . . . . .	49
2.3. Dos caracterizaciones de la bola Euclidiana . . . . .	52
2.3.1. Introducción . . . . .	52
2.3.2. Resultados . . . . .	54
<b>3. Transversales Geométricas</b>	<b>57</b>
3.1. Introducción . . . . .	57
3.2. Algunos resultados sobre transversales . . . . .	59

---

<b>4. Conjuntos en Posición Independiente</b>	<b>75</b>
4.1. Introducción y notación . . . . .	75
4.2. Demostraciones y Corolarios . . . . .	78
4.2.1. Hiperplanos transversales . . . . .	78
4.2.2. Esferas transversales . . . . .	82
 <b>Conclusiones y comentarios finales</b>	 <b>87</b>
 <b>Bibliografía</b>	 <b>91</b>

# Agradecimientos

Quiero comenzar pidiendo una disculpa a aquéllas personas que, por mi falta de una buena memoria, pueda yo omitir en estos agradecimientos. Sin embargo, les agradezco profundamente todo su apoyo, paciencia y comprensión que han tenido conmigo en estos últimos años. Sin duda, esto fué un ingrediente importante para poder conseguir esta meta, la cual debo decir, es sólo el principio.

Ahora sí, creo que las siguientes personas tienen mi agradecimiento más profundo y mi cariño sincero, pues sin ellos realmente habría sido imposible conseguir mi meta, de hecho, quizá nunca habría iniciado mis estudios de doctorado:

A mis padres, por darme la vida e impulsarme y motivarme a seguir adelante siempre.

A mi esposa Esperanza y a mis hermanos: Fabio, Tania, Melina, Maritza y Erick. Pues siempre me dieron su cariño y hasta me llegaron a *jalar las orejas* cuando me faltaba la valentía.

A mi amigo y maestro: Dagoberto Cruz y su esposa Olivia. Quienes siempre creyeron en mi y me motivaron a nunca detenerme en el camino. Incluso, su apoyo económico me ayudó a salir adelante cuando más necesitaba.

A mis amigos: Rafa, Yee, Saracho, Pepe, Verónica, Graciela, Sandra quienes siempre me han brindado su amistad incondicional y algunos hasta me han financiado.

---

A mis asesores de tesis, Vladimir Dolnikov y Vladimir Boltyanski. El primero de ellos por iniciarme en el mundo de la Geometría Combinatoria y por el tiempo que dedicó a escucharme. Al segundo, por aceptar continuar con mi proyecto y por sus sabios consejos.

A mis colegas: Luis Montejano y Efrén Morales. Sus comentarios me ayudaron a enriquecer mi trabajo de tesis.

Al CIMAT y toda su gente, especialmente a Manuel, Ricardo, Licha, Lolita, Berenice y José.

Y finalmente, al CONACYT. Gracias a la beca que me otorgaron (número de registro 158725) pude vivir de manera decorosa y dedicarme de tiempo completo a mis estudios.

## Notación básica

$\mathbb{R}^n$	espacio euclidiano $n$ -dimensional
$S^n$	esfera unitaria $n$ -dimensional
$(\mathbb{R}^n, \ \cdot\ _B)$	espacio de Minkowski $n$ -dimensional
$\ \cdot\ $	norma euclidiana
$\ \cdot\ _B$	norma de Minkowski con bola unitaria $B$
$d(x, y)$	distancia euclidiana entre $x$ e $y$
$d_B(x, y)$	distancia de Minkowski entre $x$ e $y$
$\text{diam}_B$	diámetro de Minkowski
$\text{conv } K$	la envolvente convexa de $K$
$\text{int } K$	el interior de $K$
$\text{relint } K$	el interior relativo de $K$
$\text{bd } K$	la frontera de $K$ ; i.e., $\text{cl } K \setminus \text{int } K$
$\text{vol}(K)$	volumen de $K$
$o$	el origen en $\mathbb{R}^n$
$ X $	cardinalidad del conjunto $X$
$\overrightarrow{ab}$	el rayo con origen en $a$
$[a, b]$	el segmento de vértices $a$ y $b$
$ab$	el segmento de vértices $a$ y $b$
$\ ab\ $	longitud del segmento de $ab$

# Introducción

Uno de los resultados más importantes en Geometría Combinatoria es el Teorema de Helly. A través de los años, éste ha demostrado ser una herramienta muy útil en la demostración de diversos resultados. El teorema se debe al matemático austriaco Eduard Helly (1913) y su enunciado es el siguiente:

*Sean  $\mathcal{F}$  una familia finita de conjuntos convexos en  $\mathbb{R}^d$ , con al menos  $d+2$  miembros.*

*Si cada subfamilia de  $\mathcal{F}$  con  $d+1$  miembros tiene intersección no vacía, entonces*

$$\bigcap_{M \in \mathcal{F}} M \neq \emptyset.$$

Como suele suceder comúnmente, este teorema fué descubierto por Helly en 1913 y comunicado por él a su amigo y colega J. Radon, quien publicó una primer demostración de éste en 1921. La importancia de este teorema es tal que se acostumbra nombrar *teorema tipo Helly* a todo resultado de la forma siguiente:

*Una familia de conjuntos (o un conjunto de puntos) posee cierta propiedad  $P$  si cada una de sus subfamilias (subconjuntos), con cierto número fijo de miembros, posee la propiedad  $P$ .*

En los cuatro capítulos que comprenden este trabajo de tesis se obtienen resultados tipo Helly. Algunos de estos son extensiones de resultados tipo Helly clásicos, otros, son obtenidos mediante aplicaciones de las extensiones obtenidas o simplemente mediante aplicaciones de resultados clásicos.



En el Capítulo 1 se establece una generalización del siguiente teorema de B. Grünbaum:

*Todo conjunto  $P \subset (\mathbb{R}^2, \|\cdot\|_B)$  de un Plano de Minkowski cuya bola unitaria no sea un paralelogramo, puede ser cubierto por la unión de tres bolas de diámetro menor que  $\text{diam}_B P$ .*

La generalización de este teorema es dada en el espíritu de la siguiente generalización del Teorema de Helly debida al matemático húngaro L. Lovász:

*Sean  $\mathcal{F}_1, \mathcal{F}_2, \dots, \mathcal{F}_{d+1}$  familias no vacías de conjuntos compactos convexos de  $\mathbb{R}^d$ . Supongamos que para toda elección  $K_1 \in \mathcal{F}_1, K_2 \in \mathcal{F}_2, \dots, K_{d+1} \in \mathcal{F}_{d+1}$ , la intersección  $\bigcap_{i=1}^{d+1} K_i \neq \emptyset$ . Entonces, para alguna  $i \in [d+1]$  la intersección  $\bigcap_{K \in \mathcal{F}_i} K \neq \emptyset$ .*

Actualmente, se denomina a este tipo de resultados como *teoremas coloreados*. Bajo estos términos, en este capítulo se da una versión coloreada del Teorema de Grünbaum. Para esto, se establecen algunos lemas para Planos de Minkowski y se obtiene además, un resultado más fuerte cuando el plano es Euclidiano.

También se establece una versión coloreada de un teorema de V. Boltyanski y V. Dol'nikov, para conjuntos  $H$ -convexos. Esto se logra mediante una aplicación de un teorema de Danzer, la extensión de V. Boltyanski del Teorema de Helly para conjuntos  $H$ -convexos y el Teorema de Lovász.

En la última sección de este capítulo se establece la versión coloreada de un teorema de Steinitz, además, se obtienen versiones coloreadas de algunos resultados clásicos (por ejemplo, el teorema de L. Dines y N. McCoy (1933)) mediante una aplicación directa de la versión coloreada de Steinitz.

En el Capítulo 2 se establecen condiciones necesarias y suficientes bajo las cuales un cuerpo convexo es centralmente simétrico, una bola euclidiana o un cuerpo de ancho constante. De manera más específica, en el Capítulo 2 se tiene lo siguiente:

En la sección 2.1 se dan algunas condiciones necesarias y suficientes bajo las cuales un conjunto compacto dado contiene a otro. Estas condiciones son del tipo dado por Chakerian y Klamkin (2004) en el siguiente teorema:

*Dado un conjunto compacto  $S \subset \mathbb{R}^d$ , si para cada subconjunto con tres puntos,  $T = \{x_1, x_2, x_3\}$ , de  $S$  existe un trasladado del conjunto  $-T$  el cual es también un subconjunto de  $S$ , entonces  $S$  es centralmente simétrico.*

Es decir, las condiciones dependen de las propiedades de subconjuntos de tres puntos. Más aún, usaremos esta caracterización de contención para dar algunas caracterizaciones más de simetría central. También se aplica un teorema tipo Helly para dar una prueba distinta del siguiente teorema de E. Lutwak (1998):

*Sean  $K$  y  $L$  cuerpos convexos en  $\mathbb{R}^d$ . Si cada simplejo  $d$ -dimensional que contiene a  $K$  también contiene a un trasladado de  $L$ , entonces  $K$  contiene a un trasladado de  $L$ .*

Mediante una aplicación del Teorema de Lutwak se demuestra el siguiente resultado y se obtiene como corolario de éste, la versión dual del Teorema de Chakerian y Klamkin para cuerpos convexos:

*Sea  $M \subset \mathbb{R}^d$  un conjunto compacto convexo tal que para todo simplejo  $d$ -dimensional,  $T$ , el cual contiene a  $M$ , existe un trasladado de  $-T$  el cual también contiene a  $M$ . Entonces  $M$  es centralmente simétrico.*

Combinando estos resultados y un teorema de Rogers, se establecen algunas caracterizaciones más de simetría central.

En la sección 2.2 se establece la siguiente generalización de un Teorema de Rogers (1965):

*Sean  $M_1, M_2 \subset \mathbb{R}^d$  cuerpos convexos y sea  $\Gamma$  un subespacio  $k$ -dimensional de  $\mathbb{R}^d$ ,  $1 \leq k \leq d - 2$ . Denotemos por  $N$  al complemento ortogonal de  $\Gamma$ . El cuerpo  $M_2$  es*

homotético a (un trasladado de)  $M_1$  si y sólo si

- (1) existe un hiperplano  $H \supset N$  tal que cada uno de los dos hiperplanos soporte de  $M_1$ , paralelos a  $H$ , tiene solamente un punto común con  $M$ ;
- (2) para cada subespacio  $(k + 1)$ -dimensional  $L \supset \Gamma$ ,  $\pi_L(M)$  es homotético a (un trasladado de)  $\pi_L(M_1)$ .

Además, se utiliza esta generalización para extender, en el mismo espíritu, algunos teoremas que establecen condiciones necesarias y suficientes bajo las cuales un cuerpo convexo es centralmente simétrico, una bola euclidiana o un cuerpo de ancho constante.

En la sección 2.3 se establece el teorema dual a un teorema de V. Soltan, demostrando lo siguiente:

*Para dos cuerpos convexos  $K, L \subset \mathbb{R}^d$ , con  $d \geq 2$ , la unión de cualesquiera dos de sus trasladados  $K + x, L + y$ , tiene envolvente convexa centralmente simétrica si y sólo si  $K$  y  $L$  son imágenes simétricas una de la otra con respecto a algún punto.*

Utilizando este teorema y el Teorema de Soltan, respectivamente, se establecen la siguientes dos caracterizaciones de la bola Euclidiana:

- (1) *Sea  $K \in \mathbb{R}^d$  un cuerpo convexo con la siguiente propiedad: la envolvente convexa de la unión de  $K$  y cualesquier copia congruente de  $K$  es centralmente simétrica. Entonces  $K$  es una bola Euclidiana  $d$ -dimensional.*
- (2) *Sea  $K \subset \mathbb{R}^d$  un cuerpo convexo tal que la intersección de  $K$  con cualesquiera de sus copias congruentes es un conjunto centralmente simétrico. Entonces  $K$  es una bola Euclidiana  $d$ -dimensional.*

En el Capítulo 3 se establecen algunos teoremas sobre líneas transversales a familias de conjuntos convexos en el plano.

Consideremos la siguiente notación: sea  $\mathcal{F}$  una familia de figuras convexas en el plano. Decimos que  $\mathcal{F}$  posee la propiedad  $T$  si existe una línea que intersecta a cada miembro de  $\mathcal{F}$ . También decimos  $\mathcal{F}$  posee la propiedad  $T(k)$  si cada subfamilia de  $\mathcal{F}$  con  $k$  miembros posee la propiedad  $T$ .

En 1964, B. Grünbaum propuso el siguiente problema:

Sea  $C$  una figura centralmente simétrica y sea  $\mathcal{F} = \{x_i + C\}$  una familia finita de trasladados de  $C$  la cual posee la propiedad  $T(m)$ . ¿Cuál es el menor número entero positivo,  $\lambda = \lambda(C, m)$ , tal que para cada familia  $\mathcal{F}$  con la propiedad mencionada, la familia  $\mathcal{F}' = \{x_i + \lambda C\}$  tiene la propiedad  $T$ ?

Un primer resultado, en la dirección del problema de Grünbaum, fué dado por J. Eckhoff (1972):

*Sea  $\mathcal{F}$  una familia finita de trasladados de  $C$  la cual posee la propiedad  $T(3)$ . Entonces existe una banda paralela de  $C$ -ancho 1 la cual intersecta a cada miembro de  $\mathcal{F}$ .*

Más de 30 años después, A. Heppes (2005) demostró el resultado siguiente para el caso en que  $C$  es un círculo:

*Sea  $\mathcal{F}$  una familia finita de traslados, disjuntos por pares, de un disco de diámetro 1 la cual tiene la propiedad  $T(3)$ . Entonces existe una banda paralela de ancho  $< 0,65$  la cual intersecta a cada miembro de  $\mathcal{F}$ .*

En este capítulo se establecen algunos resultados en la dirección del problema de Grünbaum. Primeramente, se analizan algunos casos particulares para ilustrar algunas técnicas las cuales resultan ser útiles en la demostración de resultados sobre *Transversales Geométricas* en el plano. Después, se establece el siguiente lema el cual demuestra parcialmente una conjetura propuesta de manera independiente por J. Eckhoff (1969) y V.L. Dol'nikov (1972):

*Sea  $\mathcal{F}$  una familia finita de discos unitarios en el plano la cual posee la propiedad*

$T(3)$ , y sea  $\Delta x_1 x_2 x_3$  un triángulo de centros el cual tiene área máxima. Si  $\Delta x_1 x_2 x_3$  tiene dos alturas de longitud  $\leq 2$ , entonces existe una banda de ancho  $1 + \sqrt{5}$  la cual contiene al conjunto de centros.

Además, reemplazando la propiedad  $T(3)$  por  $T(4)$ , se demuestra el siguiente resultado el cual fué conjeturado por J. Eckhoff (1969):

Sea  $\mathcal{F}$  una familia finita de discos unitarios en el plano. Si  $\mathcal{F}$  tiene la propiedad  $T(4)$  entonces existe una banda de ancho  $1 + \sqrt{5}$  la cual contiene al conjunto de centros.

Finalmente en este capítulo, se establece el siguiente resultado considerando la propiedad  $T(5)$ :

Sea  $\mathcal{F}$  una familia finita de discos unitarios en el plano la cual tiene la propiedad  $T(5)$ . Entonces existe una banda de ancho  $2\sqrt{2}$  la cual contiene al conjunto de centros.

La motivación principal para el trabajo hecho en el Capítulo 4 es el siguiente resultado clásico de geometría elemental:

Dados  $d + 1$  puntos en posición general en  $\mathbb{R}^d$ , existe una única esfera la cual pasa a través de ellos.

Inmediatamente surge la pregunta siguiente:

¿Qué sucede si en lugar de puntos consideramos conjuntos convexos?

El primer resultado en esta dirección fué dado por H. Kramer y A.B. Németh (1973), quienes mediante una elegante aplicación del Teorema de Brouwer del punto fijo probaron lo siguiente:

Sea  $\mathcal{F}$  una familia de  $d + 1$  conjuntos compactos convexos en posición general en  $\mathbb{R}^d$ . Entonces, existe una única esfera euclidiana la cual toca a cada conjunto y cuyo interior es disjunto de cada miembro de  $\mathcal{F}$ .

Una familia  $\mathcal{F}$  de conjuntos en  $\mathbb{R}^d$  se dice *bien separada* (o *en posición general*), si para cada  $d + 1$  miembros  $K_1, \dots, K_{d+1}$  de  $\mathcal{F}$  y cualesquier elección de puntos  $x_i \in K_i$ , para  $i \in [d + 1]$ , el conjunto  $\text{conv}\{x_1, \dots, x_{d+1}\}$  es un simplejo  $n$ -dimensional (no degenerado).

Denotemos por  $B(x, r)$ , respectivamente  $S(x, r)$ , a la bola Euclidiana y la esfera Euclidiana de radio  $r$  y centro  $x$ . Diremos que la esfera  $S(x, r)$  *soporta* a un conjunto compacto  $K$  si  $S(x, r) \cap K \neq \emptyset$  y ya sea que  $K \subset B(x, r)$  ó  $K \cap \text{int} B(x, r) = \emptyset$ . En este contexto, V. Klee, T. Lewis y B. Von Hohenbalken (1997) demostraron el siguiente resultado:

*Sea  $\mathcal{F} = \{K_0, K_1, \dots, K_d\}$  una familia de conjuntos compactos convexos en posición general en  $\mathbb{R}^d$  y sea  $(I, J)$  una partición del conjunto de índices. Entonces existe una única esfera Euclidiana  $S(x, r)$  la cual soporta a cada elemento de  $\mathcal{F}$  de tal manera que  $K_i \subset B(x, r)$  si  $i \in I$  y  $K_j \cap \text{int} B(x, r) = \emptyset$  si  $j \in J$ .*

Por otro lado, S.E. Cappell, J.E. Goodman, J. Pach, R. Pollack, M. Sharir y R. Wenger (1994) probaron un teorema similar para el caso de hiperplanos soporte, los cuales en cierto sentido pueden ser vistos como esferas de radio infinito.

En este capítulo se demostrarán los siguientes resultados, los cuales generalizan el Teorema de Capell et al. y el Teorema de Klee et al., respectivamente:

*Sea  $\mathcal{F} = \{K_1, \dots, K_d\}$  una familia de cuerpos convexos bien separados en  $\mathbb{R}^d$ , y sean  $\alpha_1, \dots, \alpha_d$  números dados tales que  $0 \leq \alpha_i \leq 1$ , para cada  $i \in [d]$ . Entonces existe un único hiperplano orientado transversal a  $\mathcal{F}$ ,  $H(v = t)$ , para el cual se cumple que*

$$\text{vol}(K_i(v \leq t)) = \alpha_i \cdot \text{vol}(K_i)$$

*para cada  $i \in [d]$ .*

*Sea  $\mathcal{F} = \{K_1, \dots, K_{d+1}\}$  una familia de cuerpos convexos bien separados en  $\mathbb{R}^d$ , y sean  $\alpha_1, \dots, \alpha_{d+1}$  números dados tales que  $0 \leq \alpha_i \leq 1$ , para cada  $i \in [d+1]$ . Entonces existe*

una única esfera Euclidiana transversal  $S(x, r)$  tal que  $\text{vol}(B(x, r) \cap K_i) = \alpha_i \cdot \text{vol}(K_i)$  para cada  $i \in [d + 1]$ .

Además, se extiende el primero de estos resultados considerando *medidas buenas* en lugar del volumen. También, se da una demostración más simple (y substancialmente más corta) de una versión un poco más general del Teorema de Klee et al.

# Capítulo 1

## Resultados Coloreados

### 1.1. Grünbaum Coloreado

#### 1.1.1. Introducción

En 1932, K. Borsuk [10] demostró lo siguiente: *Si la bola euclidiana  $d$ -dimensional de diámetro 1 es dividida en  $d$  partes, entonces al menos una de éstas tiene diámetro 1.* Este hecho, entre otros, llevó a Borsuk [11] a formular uno de los más importantes problemas en Geometría Combinatoria:

*¿Es posible dividir todo conjunto acotado  $K$  en  $\mathbb{R}^d$  en  $d + 1$  conjuntos, cada uno de los cuales tenga diámetro menor que el diámetro de  $K$ ?*

Este problema tiene respuesta afirmativa para dimensiones 2 y 3 así como para conjuntos con frontera lisa, sin embargo, hasta el momento está demostrado que para dimensiones mayores o iguales que 321 la conjetura es falsa.

Por otro lado, Grünbaum consideró un problema análogo en espacios normados reales



de dimensión 2 y demostró lo siguiente:

*Todo conjunto  $A$  de diámetro 1 puede ser dividido en tres subconjuntos de diámetro menor que 1, siempre y cuando la bola unitaria no sea un paralelogramo.*

Más aún, bajo las mismas hipótesis, él demostró que  $A$  puede ser cubierto por tres bolas de diámetro menor que 1.

Claramente, el resultado de Grünbaum es más fuerte que el resultado de Borsuk para dimensión 2, ya que no sólo nos dice que el conjunto  $A$  puede ser cubierto por tres conjuntos de diámetro menor que 1, más allá, nos dice que puede ser cubierto por tres bolas (de acuerdo a la métrica del espacio) de diámetro menor que 1.

Otro resultado muy importante en Geometría Combinatoria, el cual ha demostrado ser una herramienta muy útil en la demostración de diversos resultados, se debe al matemático austriaco Eduard Helly (1913):

**Teorema H.** *Sean  $\mathcal{F}$  una familia finita de conjuntos convexos en  $\mathbb{R}^d$ , con al menos  $d + 2$  miembros. Si cada subfamilia de  $\mathcal{F}$  con  $d + 1$  miembros tiene intersección no vacía, entonces  $\bigcap_{M \in \mathcal{F}} M \neq \emptyset$ .*

Como suele suceder comúnmente, este teorema fué descubierto por Helly en 1913 y comunicado por él a su amigo y colega J. Radon, quien publicó una primer demostración de éste en 1921 [40]. Es importante notar que se puede extender este resultado a familias infinitas de conjuntos convexos, siempre y cuando al menos uno sus elementos sea un conjunto compacto. La importancia de este teorema es tal que se acostumbra nombrar *teorema tipo Helly* a todo resultado de la forma siguiente:

*Una familia de conjuntos (o un conjunto de puntos) posee cierta propiedad  $P$  si cada una de sus subfamilias (subconjuntos), con cierto número fijo de miembros, posee la propiedad  $P$ .*

La siguiente generalización del Teorema de Helly se debe al matemático húngaro L. Lovász:

**Teorema L.** Sean  $\mathcal{F}_1, \mathcal{F}_2, \dots, \mathcal{F}_{d+1}$  familias no vacías de conjuntos compactos convexos de  $\mathbb{R}^d$ . Supongamos que para toda elección  $K_1 \in \mathcal{F}_1, K_2 \in \mathcal{F}_2, \dots, K_{d+1} \in \mathcal{F}_{d+1}$ , la intersección  $\bigcap_{i=1}^{d+1} K_i \neq \emptyset$ . Entonces, para alguna  $i \in [d+1]$  la intersección  $\bigcap_{K \in \mathcal{F}_i} K \neq \emptyset$ .

Notemos que si consideramos  $\mathcal{F}_1 = \mathcal{F}_2 = \dots = \mathcal{F}_{d+1}$  obtenemos la versión clásica del Teorema de Helly.

Dado que en ésta sección daremos algunos resultados sobre conjuntos convexos, en *Espacios de Minkowski* 2-dimensionales, introduciremos algunas definiciones y notación:

Sea  $B \subset \mathbb{R}^d$  un cuerpo convexo centralmente simétrico con centro en el origen  $o$ . Dado  $x \in \mathbb{R}^d$  definimos

$$\|\cdot\|_B : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}$$

como  $\|x\|_B = \inf\{\lambda : x \in \lambda B\}$ , en otras palabras, si  $y$  es el punto donde el rayo  $\overrightarrow{ox}$  interseca a la frontera de  $B$ , entonces  $\|x\|_B = \frac{|ox|}{|oy|}$  (ver Figura 1).

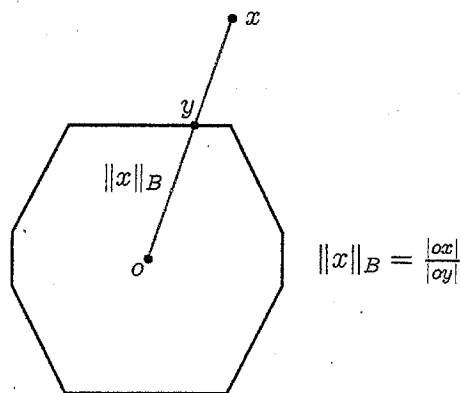


Figura 1

Es fácil ver que esta función define una norma en  $\mathbb{R}^d$  y  $(\mathbb{R}^d, \|\cdot\|_B)$  será llamado *Espacio de Minkowski* con  $B$ -bola unitaria  $B$ . Además, si  $B$  es un conjunto estrictamente convexo (no contiene segmentos de línea en su frontera) diremos que  $(\mathbb{R}^d, \|\cdot\|_B)$  es estrictamente convexo. También podemos ver que esta norma induce una métrica de la manera usual:  $\forall x, y \in (\mathbb{R}^d, \|\cdot\|_B)$  definiremos la distancia entre los puntos  $x$  e  $y$  como  $d_B(x, y) = \|x - y\|_B$ . También, dado un conjunto acotado de puntos  $P \subset (\mathbb{R}^d, \|\cdot\|_B)$ , definiremos el  $B$ -diámetro de  $P$  como

$$\text{diam}_B P = \sup\{\|x - y\|_B : x, y \in P\}.$$

De manera similar, dados  $k$  conjuntos compactos de puntos  $P_1, P_2, \dots, P_k$  definiremos el  $B$ -diámetro de la familia  $\{P_1, \dots, P_k\}$  como

$$\text{diam}_B (P_1, \dots, P_k) = \sup_{i, j \in [k], \text{ con } i \neq j} \left\{ \sup_{x \in P_i, y \in P_j} \{\|x - y\|_B\} \right\}.$$

Bajo estos términos, el Teorema de Grünbaum puede ser enunciado como sigue:

**Teorema G.** *Sea  $P \subset (\mathbb{R}^2, \|\cdot\|_B)$  un conjunto compacto de puntos de un Plano de Minkowski, con  $\text{diam}_B P = 2$ . Asumamos que  $B$  no es un paralelogramo, entonces  $P$  puede ser cubierto por la unión de tres  $B$ -bolas de  $B$ -diámetro menor que 2.*

El propósito principal en ésta sección será demostrar la siguiente generalización del Teorema de Grünbaum:

**Teorema 1.** *Sea  $(\mathbb{R}^2, \|\cdot\|_B)$  un Plano de Minkowski estrictamente convexo y sean  $P_1, P_2, P_3 \subset (\mathbb{R}^2, \|\cdot\|_B)$  conjuntos compactos de puntos tales  $\text{diam}_B (P_1, P_2, P_3) \leq 2$ . Entonces, para alguna  $i \in [3]$ ,  $P_i$  puede ser cubierto por la unión de tres bolas de  $B$ -diámetro menor que 2.*

### 1.1.2. Resultados para Planos de Minkowski

De aquí en adelante, a menos que se indique lo contrario,  $B$  denotará un cuerpo convexo centralmente simétrico que no es un paralelotopo. Dado un Espacio de Minkowski  $(\mathbb{R}^d, \|\cdot\|_B)$  definiremos como la *constante de Jung*,  $J_B$ , al menor número positivo tal que todo conjunto de diámetro 2 puede ser cubierto por una bola de radio  $J_B$ . De manera particular, cuando  $B$  es una bola Euclidiana, tenemos que  $J_B = \sqrt{\frac{2d}{d+1}}$ , el cual es un resultado clásico debido a H.W.E. Jung [32].

Además, por el Teorema de Helly podemos restringirnos a considerar conjuntos de a lo más  $d + 1$  puntos en la definición anterior. Es claro que  $J_B \geq 1$ , dándose la igualdad cuando  $B$  es un *paralelotopo*. Por otro lado, Bohnenblust [6] demostró que  $J_B \leq \frac{2d}{d+1}$ , donde  $d$  es la dimensión del espacio de Minkowski con bola unitaria  $B$ . También se sabe que la cota  $\frac{2d}{d+1}$  se alcanza cuando  $B$  es un *cuerpo de Leichtweiss*. Ahora, utilizando esta definición y el Teorema de Lovász podemos probar la siguiente:

**Lema 1.** Sean  $P_1, P_2, \dots, P_{d+1} \subset (\mathbb{R}^d, \|\cdot\|_B)$  conjuntos compactos de puntos tales que  $\text{diam}_B(P_1, \dots, P_{d+1}) \leq 2$ . Entonces, para alguna  $i \in [d+1]$ ,  $P_i$  está contenido en una bola de radio  $J_B$ .

*Demostración.* Consideremos una elección de puntos  $x_1 \in P_1, \dots, x_{d+1} \in P_{d+1}$ . Tenemos que la condición  $\text{diam}_B(P_1, \dots, P_{d+1}) \leq 2$  implica que el conjunto  $\{x_1, \dots, x_{d+1}\}$  tiene  $B$ -diámetro menor o igual a 2. De aquí obtenemos que existe una bola de radio  $J_B$  la cual contiene a  $\{x_1, \dots, x_{d+1}\}$ . Sea  $z$  el centro de esta bola. Tenemos que las bolas de radio  $J_B$  centradas en cada uno de los puntos  $x_1, \dots, x_{d+1}$  contienen al punto  $z$ , esto es,  $\bigcap_{i=1}^{d+1} (x_i + J_B B) \supset \{z\} \neq \emptyset$ . Como tenemos que para toda elección  $x_1 \in P_1, \dots, x_{d+1} \in P_{d+1}$  se cumple que  $\bigcap_{i=1}^{d+1} (x_i + J_B B) \neq \emptyset$ , entonces por el Teorema L obtenemos que para alguna  $i \in [d+1]$ ,  $\bigcap_{x \in P_i} (x + J_B B) \neq \emptyset$ . Sea  $y \in \bigcap_{x \in P_i} (x + J_B B)$ , concluimos que  $(y + J_B B) \supset P_i$ .  $\square$

Dado un conjunto acotado  $K \in (\mathbb{R}^d, \|\cdot\|_B)$ , denotaremos por  $R(K)$  el radio de la  $B$ -bola circunscrita a  $K$ , es decir,  $R(K)$  es el menor número positivo tal que  $K$  está contenido en una  $B$ -bola de radio  $R(K)$ . Además, dada una copia homotética de  $B$ , nos referiremos a la frontera de ésta como *círculo*, para  $d = 2$ , y *esfera* para  $d > 2$ .

Por otro lado, si consideramos dos bolas  $B_1$  y  $B_2$  de radios no necesariamente distintos, tenemos el siguiente bien conocido resultado [37]:

$bd B_1 \cap bd B_2$  es representable en la forma  $A_1 \cup A_2$ , donde cada  $A_i$ ,  $i = 1, 2$ , es un segmento, un punto, o un conjunto vacío. Supongamos además que esta intersección consiste de dos componentes conexas no vacías  $A_1, A_2$ . Entonces el centro de homotecia está fuera de  $B_1 \cup B_2$  y las dos líneas de homotecia las cuales soportan  $B_1 \cap B_2$ , intersectan a  $B_1 \cap B_2$  en exactamente  $A_1$  y  $A_2$ . Escogemos un punto  $a_i$  de cada componente  $A_i$  y consideremos  $T : B_1 \rightarrow B_2$  la homotecia positiva que lleva  $B_1$  en  $B_2$ . Sean  $c_i = T^{-1}a_i$  y  $c'_i = Ta_i$  para  $i = 1, 2$ . Sea  $\alpha_1$  ( $\alpha_2$ ) la parte de  $bd B_1$  que está en el mismo lado (lado opuesto) de la línea  $a_1a_2$  que  $c_1$  y  $c_2$ ; de manera semejante definimos  $\beta_1$  y  $\beta_2$  para  $B_2$ . Entonces  $\alpha_2 \subseteq \text{conv } \beta_2$  y  $\beta_1 \subseteq \text{conv } \alpha_1$ .

Utilizando este resultado es posible demostrar el siguiente lema:

**Lema 2.** *Sea  $S \subset (\mathbb{R}^2, \|\cdot\|_B)$  un triángulo no equilátero tal que  $\text{diam}_B S = 1$ . Entonces, existe un triángulo equilátero  $T$ , con  $\text{diam}_B T = 1$ , tal que su bola circunscrita contiene a  $S$  y se cumple que  $R(T) \geq R(S)$ . Más aún, si  $(\mathbb{R}^2, \|\cdot\|_B)$  es estrictamente convexo, entonces  $R(T) > R(S)$ .*

*Demostración.* Sean  $a, b$ , y  $c$  los vértices de  $S$ . Sin pérdida de generalidad podemos asumir que  $1 = d_B(a, b) \geq d_B(b, c) \geq d_B(c, a)$ . Consideremos las  $B$ -bolas  $a + B, b + B$  de radio 1 centradas en los puntos  $a, b$ , respectivamente. Sea  $c' \in bd(a + B) \cap bd(b + B)$  de tal manera que  $c$  y  $c'$  están en el mismo semiplano el cual está acotado por la línea  $ab$ . Sea  $A = (a + B) \cap (b + B) \cap (c' + B)$  y denotemos por  $B_A$  a la bola circunscrita al triángulo equilátero (en el plano de Minkowski)  $\triangle abc'$  (ver Figura 2). De acuerdo

al resultado antes mencionado, es fácil ver que  $B_A \supset A \supset S$ . Con esto, tenemos que  $R(S) \leq R(B_A)$ . Además, por el Teorema de Bohnenblust tenemos que

$$R(B_A) \leq \frac{2}{3} < 1 = R(a+B) = R(b+B) = R(c'+B).$$

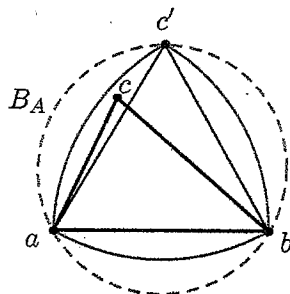


Figura 2

Por otro lado, si  $B$  es estrictamente convexo, tenemos que  $c' \in \text{int } B_A$  lo cual significa que mediante una traslación adecuada de  $S$  es posible obtener un triángulo congruente a  $S$ , pero de tal manera que sus tres vértices pertenezcan al interior de  $B_A$ . Se sigue que existe una  $B$ -bola de radio menor que  $R(B_A)$  la cual contiene a  $S$ , esto es,  $R(S) < R(B_A)$ .  $\square$

De acuerdo al Lema 2, podemos ver que el número  $J_B$  es el menor número positivo tal que todo triángulo equilátero de lado 2 está contenido en una bola de radio  $J_B$ . Además, dado un espacio de Minkowski  $d$ -dimensional con bola unitaria  $B$  tenemos lo siguiente:

- (1)  $B$  tiene frontera lisa si y sólo si cada  $d$ -simplejo está inscrito en alguna esfera (Kalish y Straus [33], Gromov [22]).
- (2) Un plano de Minkowski es estrictamente convexo si y sólo si por cada tres puntos no colineales pasa a lo más un círculo (Mayer 1935, Kalish y Straus [33]).

Observemos que si la bola unitaria  $B$  de un plano de Minkowski tiene frontera regular, entonces por cada tres puntos no colineales pasa exactamente un círculo. Sin embargo, si  $\triangle abc$  es un triángulo equilátero en  $(\mathbb{R}^2, \|\cdot\|_B)$ , entonces siempre existe un círculo el

cual pasa por los puntos  $a, b$  y  $c$ . Es decir, si el triángulo es equilátero entonces no es necesario imponer hipótesis extras a nuestra bola unitaria para asegurar la existencia de la esfera circunscrita. Más formalmente, tenemos el siguiente:

**Lema 3.** *Sea  $T = \triangle abc$  un triángulo equilátero en  $(\mathbb{R}^2, \|\cdot\|_B)$ , entonces existe un círculo el cual pasa por los puntos  $a, b$  y  $c$ .*

*Demostración.* Sea  $B_T$  la  $B$ -bola circunscrita a  $T$  y sea  $R$  su radio. Claramente,  $\text{diam}_B T < R$ . Supongamos que no existe un círculo el cual pase a través de los vértices de  $T$ , entonces existe un vértice de  $T$  el cual está contenido en el interior de  $B_T$ . Esto a su vez implica que existe una traslación de  $B_T$ , de tal manera que los tres vértices de  $T$  están contenidos en el interior de la copia trasladada de  $B_T$ . Se sigue que existe una  $B$ -bola la cual contiene a  $T$  y la cual tiene radio menor que  $R$ . Esto contradice que  $B_T$  sea la  $B$ -bola circunscrita a  $T$ , por lo tanto, los tres vértices de  $T$  pertenecen a la frontera de  $B_T$ .  $\square$

**Observación 1.** Notemos que este lema sigue siendo válido si reemplazamos la condición de que  $T$  sea equilátero por la condición de que  $\text{diam}_B T$  sea menor que el diámetro de la  $B$ -bola circunscrita a  $T$ .

Ahora, podemos demostrar el siguiente lema el cual fué observado por Grünbaum [24]:

**Lema 4.** *Sea  $(\mathbb{R}^2, \|\cdot\|_B)$  un plano de Minkowski. De entre todos los triángulos equiláteros inscritos en  $B$ , sea  $\Delta$  el que tiene longitud de su lado mínima y sea  $\alpha$  esa longitud. Entonces  $J_B = \frac{2}{\alpha}$ .*

*Demostración.* Por el Lema 4, sabemos que cualquier triángulo equilátero de lado 2 posee un círculo circunscrito. Recordemos que la constante de Jung  $J_B$  es el menor número positivo tal que todo triángulo equilátero de lado 2 está contenido en una bola de radio  $J_B$ . De manera equivalente, si consideramos un círculo de radio y centro fijos, el problema de encontrar el número  $J_B$  es equivalente a encontrar el triángulo

equilátero inscrito de lado mínimo. Considerando la bola de radio 1 centrada en el origen, es fácil concluir de aquí la afirmación  $J_B = \frac{2}{\alpha}$ .  $\square$

El siguiente resultado fué demostrado por Grünbaum [23], sin embargo, daremos una demostración distinta utilizando los lemas establecidos previamente:

**Lema 5.**  $J_B B$  puede ser cubierto por la unión de tres  $B$ -bolas de  $B$ -diámetro igual a 2.

*Demostración.* Sea  $\Delta = \Delta a_1 a_2 a_3$  el triángulo equilátero inscrito en el círculo de radio  $J_B$ , con centro en el origen, el cual tiene longitud de sus lados mínima y denotemos por  $\Omega_1$  a la intersección de  $J_B B$  con el semiplano cerrado que tiene como frontera a la línea  $a_2 a_3$  y el cual no contiene al punto  $a_1$ . De manera análoga definimos  $\Omega_2$  y  $\Omega_3$ . Por el Lema 4 sabemos que  $d_B(a_i, a_j) = 2$ , para  $i, j \in [3]$  distintas. Sean  $b_1, b_2, b_3$  los puntos medios de los segmentos  $a_2 a_3, a_1 a_3, a_1 a_2$ , respectivamente. Consideremos la bola  $b_1 + B$ . Dado que  $d_B(b_1, a_2) = d_B(b_1, b_3) = d_B(b_1, b_2) = d_B(b_1, a_3) = 1$ , tenemos que  $\text{conv}\{a_2, b_3, b_2, a_3\} \subset b_1 + B$ . Además, sabemos que  $b_1 + B \supset \Omega_1$ , entonces  $b_1 + B \supset \Omega_1 \cup \text{conv}\{a_2, b_3, b_2, a_3\}$ . Análogamente, probamos que  $b_2 + B \supset \Omega_2 \cup \text{conv}\{a_3, b_1, b_3, a_1\}$  y  $b_3 + B \supset \Omega_3 \cup \text{conv}\{a_1, b_2, b_1, a_2\}$ . Por lo tanto,  $\bigcup_{i=1}^3 (b_i + B) \supset J_B B$ .  $\square$

*Demostración del Teorema 1.* Supongamos que para toda elección  $x_1 \in P_1, x_2 \in P_2, x_3 \in P_3$  el radio de la bola circunscrita a  $\Delta x_1 x_2 x_3$  es menor que  $J_B$ . Entonces, por un argumento estándar de compacidad, tenemos que existe un número positivo  $\lambda < J_B$  tal que  $\bigcap_{i=1}^3 (x_i + \lambda B) \neq \emptyset$ . Aplicamos el Teorema L y obtenemos que para alguna  $i \in [3]$ ,  $\bigcap_{x \in P_i} (x + \lambda B) \neq \emptyset$ . De aquí se sigue que  $P_i$  está contenido en una  $B$ -bola de radio  $\lambda$ , y por el Lema 5 tenemos que esta  $B$ -bola puede ser cubierta por la unión de tres  $B$ -bolas de radio  $\frac{\lambda}{J_B} < 1$ .

Supongamos ahora que existen  $x_1 \in P_1, x_2 \in P_2, x_3 \in P_3$ , tales que la  $B$ -bola circunscrita a  $\Delta x_1 x_2 x_3$  tiene radio igual a  $J_B$ . Por los lemas 2 y 4 tenemos que



$\Delta x_1 x_2 x_3$  es equilátero y de lado 2. Ahora, por el Lema 1, tenemos que para alguna  $i \in [3]$  el conjunto  $P_i$  está contenido en una  $B$ -bola de radio  $J_B$ . Sin pérdida de generalidad, podemos asumir que este conjunto es  $P_1$  y que el centro de su  $B$ -bola circunscrita es el origen  $o$ . Como también  $P_1 \subset (x_2 + 2B) \cap (x_3 + 2B)$ , entonces  $P_1 \subset A = (x_2 + 2B) \cap (x_3 + 2B) \cap J_B B$ . Ahora, sea  $\Delta abc$  un triángulo equilátero de lado 2 inscrito en  $J_B B$ . Dado que  $B$  es estrictamente convexo y  $P_1 \subset A$  tenemos que alguno de los puntos  $a, -a, b, -b, c, -c$  no pertenece al conjunto  $A$ . Sin pérdida de generalidad podemos asumir que  $a \notin A$ , y como  $A$  es un conjunto compacto, tenemos que existe una vecindad del punto  $a$  la cual no interseca a  $A$ . De aquí obtenemos que existe un punto  $x$  tal que los puntos  $x + a, x + b$  y  $x + c$  no pertenecen a  $A$  y tal que

$$P_1 \subset A \subset \text{int} \left( \left( x + \frac{a+b}{2} + B \right) \cup \left( x + \frac{a+c}{2} + B \right) \cup \left( x + \frac{b+c}{2} + B \right) \right).$$

Esto implica que existe un número  $\alpha \in (0, 1)$  tal que

$$A \subset \left( \left( x + \frac{a+b}{2} + \alpha B \right) \cup \left( x + \frac{a+c}{2} + \alpha B \right) \cup \left( x + \frac{b+c}{2} + \alpha B \right) \right),$$

es decir,  $P_1$  puede ser cubierto por la unión de tres  $B$ -bolas de radio  $\alpha < 1$ .  $\square$

**Observación 2.** Cuando  $P_1 = P_2 = P_3$  obtenemos el Teorema de Grünbaum para el caso de planos de Minkowski estrictamente convexos.

**Observación 3.** Consideremos el siguiente resultado de V.L. Dolnikov:

*Sean  $\mathcal{P}_1$  y  $\mathcal{P}_2$  dos familias de rectángulos paralelos tales que para cada elección  $P_1 \in \mathcal{P}_1, P_2 \in \mathcal{P}_2$ , se cumple  $P_1 \cap P_2 \neq \emptyset$ . Entonces, existe un par de líneas perpendiculares tales que una de ellas interseca a todos los miembros de  $\mathcal{P}_1$  y la otra interseca a todos los miembros de  $\mathcal{P}_2$ .*

Utilizando este resultado y las mismas ideas que en la prueba del Teorema 1, es posible obtener la siguiente generalización del Teorema G:

**Proposición 1.** *Sea  $(\mathbb{R}^2, \|\cdot\|_B)$  un plano de Minkowski, cuya bola unitaria no es un paralelogramo, y sean  $P_1, P_2, P_3, P_4 \subset (\mathbb{R}^2, \|\cdot\|_B)$  conjuntos compactos de puntos*

tales que  $\text{diam}_B(P_1, P_2, P_3, P_4) \leq 2$ . Entonces, para alguna  $i \in [4]$ , el conjunto  $P_i$  puede ser cubierto por la unión de tres  $B$ -bolas de  $B$ -diámetro menor que 2.

### 1.1.3. Un resultado para el Plano Euclidiano

Si nos restringimos al plano Euclidiano es posible probar aún más que lo demostrado en la sección anterior:

**Teorema 2.** Sean  $P_1, P_2, \dots, P_k$  conjuntos compactos de puntos en el plano Euclidiano, con  $k \geq 2$ , tales que  $\text{diam}_B(P_1, \dots, P_k) \leq 1$ . Entonces, para alguna  $i \in [k]$ ,  $\bigcup_{j \neq i} P_j$  puede ser cubierto por la unión de tres bolas de diámetro menor que 1.

*Demostración.* Dada una línea horizontal  $xy$  denotamos por  $\Gamma^{xy}$  al semiplano superior que está acotado por la línea  $xy$  y por  $\Gamma_{xy}$  al semiplano inferior, además, para todo  $x \in \mathbb{R}^2$  denotaremos por  $B_x$  a la bola euclidiana unitaria centrada en el punto  $x$ . Sin pérdida de generalidad, asumimos que  $\text{diam} P_1 \geq \text{diam} P_j$ , para toda  $j \in \{2, 3, \dots, k\}$ . Sean  $x_1, y_1 \in P_1$  tales que  $d = d(x_1, y_1) = \text{diam} P_1$  y supongamos que  $x_1 y_1$  es horizontal. También, denotemos por  $A(d) = B_x \cap B_y$ , con  $xy$  paralelo a  $x_1 y_1$  y  $d(x, y) = d$ . La demostración se divide en dos casos principales:

(1)  $d \geq 1$ . Aquí tenemos dos subcasos:

(1a)  $\frac{2}{\sqrt{3}} \leq d < 2$ . Primero, tenemos que  $\bigcup_{i=2}^k P_i \subset B_{x_1} \cap B_{y_1}$ , además, tenemos que  $B_{x_1} \cap B_{y_1}$  puede ser cubierto por tres bolas de diámetro menor que 1 (ver Figura 3).

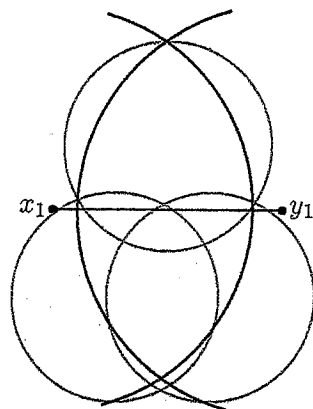


Figura 3

(1b)  $1 \leq d < \frac{2}{\sqrt{3}}$ . Dado que para toda  $d > 1$  tenemos que  $A(d) \subset A(1)$ , analizaremos el caso  $d = 1$  y el resto de la demostración para este subcaso se deduce fácilmente. Sabemos que  $\bigcup_{i=2}^k P_i \subset A(1) = B_{x_1} \cap B_{y_1}$ . Consideremos los segmentos  $ab$  y  $cd$  paralelos al segmento  $x_1y_1$ , de tal manera que la distancia entre los segmentos  $ab$  y  $x_1y_1$  es igual a  $\frac{1}{2}$  y que la distancia entre  $ab$  y  $cd$  es igual a  $\frac{2}{\sqrt{3}}$ . Claramente,  $\Gamma^{cd} \cap B_{x_1} \cap B_{y_1}$  puede ser cubierto por tres bolas de diámetro 1 (ver Figura 4).

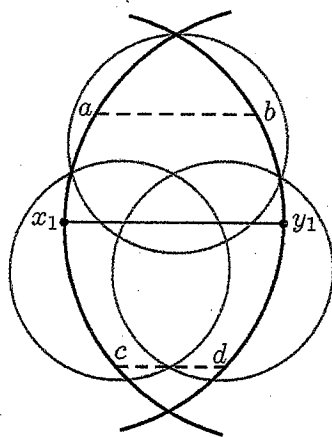


Figura 4

Sea  $z \in \bigcup_{i=2}^k P_i$  un punto tal que la distancia entre  $z$  y la línea  $cd$  es máxima. Supongamos que

$$z \in D = \Gamma^{ab} \cap B_{x_1} \cap B_{y_1},$$

en caso contrario, tenemos que  $\bigcup_{i=2}^k P_i \subset F = \Gamma_{ab} \cap B_{x_1} \cap B_{y_1}$ , y claramente,  $F$  puede ser cubierto por tres bolas de diámetro menor que 1 (ver Figura 5).

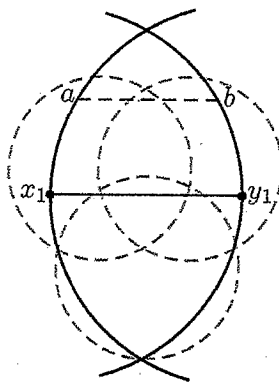


Figura 5

Entonces, consideremos una cuerda de  $D$ ,  $c'd'$ , paralela a  $ab$ , tal que la distancia entre  $z$  y  $c'd'$  es igual a  $d$ . De aquí se sigue que la distancia entre  $ab$  y  $c'd'$  es menor que  $\frac{2}{\sqrt{3}}$  y que  $\bigcup_{i=2}^k P_i \subset E = \Gamma_{c'd'} \cap B_{x_1} \cap B_{y_1}$ . En este caso, es posible cubrir  $E$  con tres bolas de diámetro menor que 1 (ver Figura 6).

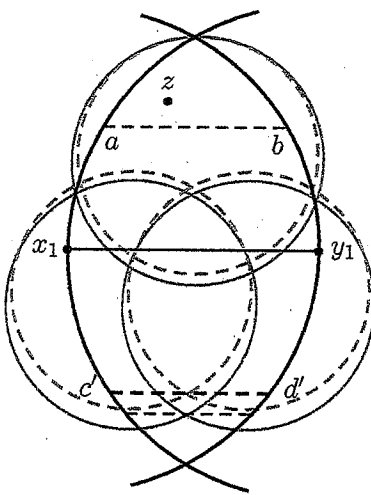


Figura 6

(2)  $d < 1$ . Entonces  $\text{diam} \bigcup_{i=1}^k P_i < 1$ , y por el Lema 1 tenemos que  $\bigcup_{i=1}^k P_i$  está contenido

en una bola de diámetro menor que  $\frac{2}{\sqrt{3}}$ , la cual puede ser cubierta por tres bolas de diámetro menor que 1.  $\square$

**Observación 4.** Si  $k \geq 3$  entonces, por el Lema 1, tenemos que al menos uno de los conjuntos  $P_i$  está contenido en una bola de diámetro  $\frac{2}{\sqrt{3}}$ . De aquí se sigue que éste tiene diámetro menor o igual que  $\frac{2}{\sqrt{3}}$ . Sin embargo, cuando  $k = 2$ , esto no es cierto. De hecho, lo que podemos decir es que uno de los conjuntos tiene diámetro menor o igual que  $\sqrt{2}$ : Consideremos los vértices de un cuadrado de lado 1,  $P_1$  como un par de sus puntos diagonales y  $P_2$  como el otro par de puntos diagonales. La distancia entre cualesquier punto de  $P_1$  y cualesquier punto de  $P_2$  es exactamente 1, sin embargo, tenemos que  $\text{diam } P_1 = \text{diam } P_2 = \sqrt{2}$ .

Sea  $\mathcal{F}$  una familia de conjuntos convexos de  $\mathbb{R}^d$ . Para todo  $2 \leq j \leq d+1$ , diremos que la familia posee la propiedad  $\mathcal{D}_j$ , y escribiremos  $\mathcal{F} \in \mathcal{D}_j$ , si cualesquiera  $j$  miembros de la familia tienen intersección no vacía. Con esto, es posible definir nuevas constantes de Jung como sigue:

Sea  $X \subset \mathbb{R}^d$  un conjunto de puntos tal que la familia  $\mathcal{F}_X = \{x + B : x \in X\}$  posee la propiedad  $\mathcal{D}_j$ , es decir,  $\mathcal{F}_X \in \mathcal{D}_j$ . Sea  $\lambda_X$  el menor número positivo tal que  $X$  está contenido en una bola de radio  $\lambda_X$ . Definimos

$$J_B^j = \sup_{X \in \mathbb{R}^d} \{\lambda_X : \mathcal{F}_X \in \mathcal{D}_j\}.$$

De acuerdo a un manuscrito no publicado de Danzer, tenemos que

$$J_B^j = \sqrt{\frac{dj}{(d+1)(j-1)}}$$

para  $2 \leq j \leq d+1$ . Con esto, podemos probar el siguiente resultado:

**Proposición 2.** Sean  $P_1, P_2, \dots, P_{d+1} \subset \mathbb{R}^d$  conjuntos compactos de puntos tales que para toda elección  $x_1 \in P_1, x_2 \in P_2, \dots, x_{d+1} \in P_{d+1}$  se cumple que la familia  $\{x_1 + B, x_2 + B, \dots, x_{d+1} + B\}$  posee la propiedad  $\mathcal{D}_j$ . Entonces, para alguna  $i \in [d+1]$ ,  $P_i$  está contenido en una bola de radio  $J_B^j$ .

*Demostración.* Dada la elección  $x_1 \in P_1, \dots, x_{d+1} \in P_{d+1}$ , tenemos que  $\bigcap_{i=1}^{d+1} (x_i + J_B^j B) \neq \emptyset$ . Aplicando el Teorema L tenemos que para alguna  $i \in [d+1]$  se cumple que  $\bigcap_{x \in P_i} (x + J_B^j B) \neq \emptyset$ . Sea  $y \in \bigcap_{x \in P_i} (x + J_B^j B)$ , entonces  $(y + J_B^j B) \supset P_i$ .  $\square$

#### 1.1.4. Cubriendo conjuntos convexos

En esta sección veremos algunos teoremas sobre cubiertas con bolas para conjuntos convexos que cumplen ciertas propiedades. Primero, tenemos el siguiente resultado de V. Dol'nikov:

Sea  $P \subset (\mathbb{R}^d, \|\cdot\|_B)$  un conjunto convexo tal que para cualesquiera tres puntos  $x_1, x_2, x_3 \in P$  se cumple que existen  $i, j \in [3]$  distintos con  $d_B(x_i, x_j) \leq 1$ . Entonces existe una  $B$ -bola de radio 1 la cual contiene a  $P$ .

Ahora, demostraremos el siguiente resultado:

**Proposición 2.** Sean  $P_1, P_2, \dots, P_k \subset (\mathbb{R}^n, \|\cdot\|_B)$  conjuntos compactos convexos de puntos, con  $k \geq 3$ . Si para todo subconjunto  $\{i_1, i_2, i_3\} \subset [k]$  y para toda elección  $x_{i_1} \in P_{i_1}, x_{i_2} \in P_{i_2}, x_{i_3} \in P_{i_3}$  se cumple que existen  $j, l \in [3]$ , distintos, tales que  $d_B(x_{i_j}, x_{i_l}) \leq 1$ , entonces sucede alguna de las dos siguientes:

(a) Existe al menos una  $i \in [k]$  tal que  $P_i$  puede ser cubierto por una  $B$ -bola de radio 1.

(b) El conjunto  $\bigcup_{i=1}^k P_i$  puede ser cubierto por una  $B$ -bola de radio  $J_B$ .

*Demostración.* La demostración se divide en dos casos:

(1) Alguno de los conjuntos tiene diámetro mayor que 2. Sin pérdida de generalidad, supongamos que  $\text{diam}_B P_1 > 2$ . Entonces, existen  $x, y \in P_1$  tales que  $d_B(x, y) = \text{diam}_B P_1$ .

(1a) Si existe  $z \in P_j$ , para alguna  $j \in \{2, 3, \dots, k\}$ , tal que  $z \in (B_x \cup B_y)^c$ , tenemos entonces que  $\forall i \in \{2, \dots, k\} \setminus \{j\}$  se cumple que  $P_i \subset B_x$ . De no ser así, obtendríamos una terna de puntos que contradicen las hipótesis.

(1b) Para toda  $i \in \{2, \dots, k\}$  tenemos que  $P_i \subset (B_x \cup B_y)$ , más aún, debido a que cada  $P_i$  es convexo tenemos que  $P_i \subset B_x$  ó  $P_i \subset B_y$ .

(2)  $\text{diam}_B P_i \leq 2, \forall i \in [k]$ .

(2a) Supongamos, sin pérdida de generalidad que existen  $x \in P_1$  e  $y \in P_2$  tales que  $d(x, y) > 2$ . Esto implica que  $P_i \subset B_x$  ó  $P_i \subset B_y \forall i \in \{3, \dots, k\}$ .

(2b) Supongamos que  $\text{diam}_B \bigcup_{i=1}^k P_i \leq 2$ , en este caso tenemos que  $\text{diam}_B \bigcup_{i=1}^k P_i$  puede ser cubierto por una  $B$ -bola de radio igual a  $J_B$ .  $\square$

## 1.2. Jung para $H$ -convexos

### 1.2.1. Introducción y notación

Una de las generalizaciones, más natural, de la noción usual de convexidad es la noción de  $H$ -convexidad. En un artículo muy reciente, V. Boltyanski y V.L. Dolnikov [8] dieron una generalización del bien conocido Teorema de Jung usando la noción de  $H$ -convexidad. En esta sección, daremos una generalización más del Teorema de Jung para conjuntos  $H$ -convexos y daremos una prueba para la versión coloreada del Teorema de Steinitz.

Empezaremos introduciendo algunas definiciones y notación. Sea  $H$  un subconjunto de la esfera Euclidiana unitaria  $S^{d-1}$  el cual es no unilateral, esto es, no existe una semiesfera cerrada en  $S^{d-1}$  la cual contenga a  $H$ . Por  $\text{md } H$  denotamos al mayor entero positivo  $m$  tal que existen vectores  $a_0, a_1, \dots, a_m \in H$  con las siguientes dos

propiedades:

- (1) los vectores son positivamente dependientes, esto es, existen números positivos  $\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_m$  tales que  $\alpha_0 a_0 + \dots + \alpha_m a_m = 0$ ,
- (2) cada  $m$  de ellos son linealmente independientes.

Claramente, el significado geométrico de  $\text{md } H$  es el siguiente:  $\text{md } H$  es el mayor entero positivo  $m$  tal que existen vectores  $a_0, a_1, \dots, a_m \in H$  cuya envolvente convexa  $\text{conv}\{a_0, a_1, \dots, a_m\}$  es un simplejo  $m$ -dimensional con el origen en su interior relativo. Se sigue que  $1 \leq \text{md } H \leq d$  para cualquier subconjunto  $H$  de  $\mathbb{S}^{d-1}$  que es no unilateral.

Sea  $H$  un subconjunto arbitrario de  $\mathbb{S}^{d-1}$  el cual es no unilateral. Entonces cada semiespacio cerrado  $\{x : \langle f, x \rangle \leq \lambda\}$ ,  $f \in H$ ,  $\lambda \in \mathbb{R}$ , se dice ser  $H$ -convexo y cada conjunto representable como la intersección de una familia de semiespacios  $H$ -convexos será llamado un conjunto  $H$ -convexo. Más aún, siempre existe al menos un conjunto  $H$ -convexo el cual es compacto, esto es, la intersección  $U_H(x, r)$  de todos los semiespacios  $H$ -convexos los cuales contiene la bola euclidiana  $B(x, r)$  de radio  $r$  y centro  $x$ . El conjunto  $H$ -convexo  $U_H(x, r)$  es llamado la  $H$ -bola de radio  $r$  y centro  $x$ .

Ahora, sea  $\mathcal{F}$  una familia infinita de conjuntos convexos. Definimos la *dimensión de Helly* de una familia  $\mathcal{F}$ ,  $\text{him } \mathcal{F}$ , como el menor entero positivo  $m$  tal que para toda subfamilia  $\{M_1, \dots, M_s\}$  de  $\mathcal{F}$ ,  $s > m + 1$ , se cumple la siguiente propiedad: si cada  $m + 1$  miembros de esta subfamilia tienen intersección no vacía, entonces  $M_1 \cap \dots \cap M_s \neq \emptyset$ . Además, existe una relación entre la dimensión de Helly y el funcional  $\text{md}$  de Boltyanski la cual está dada por la siguiente generalización del Teorema de Helly [7]:

**Teorema B.** *Sea  $H \subset \mathbb{S}^{d-1}$  un conjunto no unilateral. La dimensión de Helly de la familia  $\mathcal{C}_H$  de todos los conjuntos  $H$ -convexos es igual a  $\text{md } H$ .*



Utilizando el Teorema B, V. Boltyanski y V.L. Dolnikov [8] dieron (entre otros resultados) una prueba de la siguiente generalización del Teorema de Jung:

**Teorema BD.** *Sea  $H \subset \mathbb{S}^{d-1}$  un conjunto no unilateral tal que  $\text{md } H = m$ . Entonces cada conjunto  $P \in \mathbb{R}^d$  de diámetro 2 está contenido en una  $H$ -bola de radio*

$$\sqrt{\frac{2m}{m+1}}.$$

Denotemos por  $\mathbb{G}_i^d$  la variedad Grassmaniana de subespacios  $i$ -dimensionales de  $\mathbb{R}^d$ , esto es,  $\mathbb{G}_i^d$  es el subconjunto que consiste de todos los subespacios  $i$ -dimensionales de  $\mathbb{R}^d$ . Dado un conjunto compacto convexo  $K \subset \mathbb{R}^d$  y  $L \in \mathbb{G}_i^d$ , denotamos por  $K|L$  a la proyección ortogonal de  $K$  sobre  $L$ . Definimos  $R_\pi^i(K) := \max_{L \in \mathbb{G}_i^d} R(K|L)$ . Usando esta definición podemos enunciar el Teorema de Jung como sigue:

*Sea  $K$  un conjunto compacto en  $\mathbb{R}^d$ . Entonces*

$$R_\pi^d(K) \leq \sqrt{\frac{2d}{d+1}} R_\pi^1(K),$$

*donde la igualdad se da si y sólo si  $K$  contiene un simplejo regular  $d$ -dimensional de lado  $\text{diam } K$ .*

Notemos que  $R_\pi^1(K)$  es justo el diámetro,  $\text{diam } K$ , de  $K$ . El siguiente teorema, debido a M. Henk [27], relaciona los circunradios de proyecciones de un conjunto compacto convexo sobre planos de diferente dimensión:

**Teorema H.** *Sea  $K \in \mathbb{R}^d$  un conjunto compacto convexo. Entonces*

$$R_\pi^i(K) \leq \sqrt{\frac{i(j+1)}{j(i+1)}} R_\pi^j(K),$$

*donde la igualdad se alcanza si y sólo si la proyección ortogonal de  $K$  sobre un subespacio  $i$ -dimensional contiene un simplejo regular  $i$ -dimensional con arista de longitud  $R_\pi^j(K) \sqrt{\frac{2(j+1)}{j}}$ .*

### 1.2.2. Demostraciones y Corolarios

**Teorema 3.** Sea  $H \subset \mathbb{S}^{d-1}$  un conjunto no unilateral con  $\text{md } H = m$  y sea  $P \in \mathbb{R}^d$  un conjunto compacto de puntos tal que  $\mathcal{F}_P \in \mathcal{D}_j$  para un número  $j \in \{2, \dots, m+1\}$ . Entonces,  $P$  está contenido en una  $H$ -bola de radio

$$\sqrt{\frac{mj}{(m+1)(j-1)}}.$$

*Demostración.* Consideremos un conjunto de  $m+1$  puntos  $\{x_0, \dots, x_m\} \subset P$ . Sea  $T = \text{conv}\{x_0, \dots, x_m\}$ . Dado que cada  $m+1$  puntos están contenidos en un subespacio  $m$ -dimensional, tenemos por el Teorema de Danzer que  $T$  está contenido en alguna bola euclidiana  $m$ -dimensional de radio  $\sqrt{\frac{mj}{(m+1)(j-1)}}$ . Se sigue que  $T$  está contenido en una bola euclidiana  $d$ -dimensional de radio  $\sqrt{\frac{mj}{(m+1)(j-1)}}$ . Notemos que si un punto  $x$  pertenece a  $U_H(y, r)$ , entonces  $y$  pertenece a  $U_{-H}(x, r)$ . Como cada  $m+1$  puntos de  $P$  están contenidos en una bola euclidiana  $d$ -dimensional de radio  $r = \sqrt{\frac{mj}{(m+1)(j-1)}}$ , obtenemos que cada  $m+1$  puntos de  $P$  están contenidos en una  $H$ -bola de radio  $r$ . De aquí se sigue que cada  $m+1$   $(-H)$ -bolas de radio  $r$ , centradas en puntos de  $P$ , tienen un punto común  $q$ . Por lo tanto,  $U_H(q, r)$  contiene a  $P$ .  $\square$

Usando el Teorema L y el Teorema B, podemos probar el siguiente resultado coloreado:

**Corolario 1.** Sea  $H \subset \mathbb{S}^{d-1}$  un conjunto no unilateral con  $\text{md } H = m$  y sean  $P_1, \dots, P_{n+1}$  conjuntos de puntos en  $\mathbb{R}^d$ . Asumimos que para cada elección  $x_1 \in P_1, x_2 \in P_2, \dots, x_{d+1} \in P_{d+1}$ , la familia  $\{x_1 + B, x_2 + B, \dots, x_{d+1} + B\}$  posee la propiedad  $\mathcal{D}_j$ , para algún  $j \in \{2, 3, \dots, m+1\}$ . Entonces, para alguna  $i \in [d+1]$  el conjunto  $P_i$  está contenido en una  $H$ -bola de radio  $\sqrt{\frac{mj}{(m+1)(j-1)}}$ .

*Demostración.* Consideremos la elección de puntos  $x_1 \in P_1, x_2 \in P_2, \dots, x_{d+1} \in P_{d+1}$ . Como la familia  $\{x_1 + B, \dots, x_{d+1} + B\} \in \mathcal{D}_j$ , entonces por el Teorema 3 tenemos que  $\{x_1, \dots, x_{d+1}\}$  está contenido en una  $H$ -bola de radio  $r = \sqrt{\frac{mj}{(m+1)(j-1)}}$ . Esto

implica que las  $(-H)$ -bolas de radio  $r$ , centradas en los puntos  $\{x_1, \dots, x_{d+1}\}$ , tienen intersección no vacía. Dado que esto se cumple para cada elección  $x_1 \in P_1, x_2 \in P_2, \dots, x_{d+1} \in P_{d+1}$ , tenemos por el Teorema L que para alguna  $i \in [d+1]$

$$\bigcap_{x \in P_i} (x + (-H)) \neq \emptyset.$$

Sea  $x_0$  un punto en esta intersección. Como se demostró anteriormente,  $U_H(x_0, r)$  contiene al conjunto de centros de las  $(-H)$ -bolas, esto es,  $U_H(x, r)$  contiene a  $P_i$ .  $\square$

### 1.3. Steinitz Coloreado

#### 1.3.1. Introducción

Por un resultado clásico, debido a Caratheódory ([13], [14]), sabemos que dado un conjunto  $X$  en  $\mathbb{R}^d$ , si un punto  $x$  pertenece a  $\text{conv } X$ , entonces  $x \in \text{conv } Y$  para algún subconjunto  $Y$  de  $X$  con a lo más  $d+1$  puntos.

Un poco después, E. Steinitz [44] demostró un resultado análogo para el caso cuando  $x$  pertenece al interior de la envolvente convexa del conjunto  $X$ :

**Teorema S.** *Sea  $X \in \mathbb{R}^d$  un conjunto de puntos y sea  $p \in \text{int conv } X$ . Entonces  $p \in \text{int conv } Y$  para algún subconjunto  $Y \subset X$  con a lo más  $2d$  puntos.*

Como se mencionó anteriormente, daremos la demostración de la versión coloreada del Teorema S, el cual dice lo siguiente:

**Teorema 4.** *Sean  $M_1, \dots, M_{2d}$  conjuntos de puntos en  $\mathbb{R}^d$ , y asumamos que  $p \in \text{int conv } M_i$  para cada  $i = 1, \dots, 2d$ . Entonces, existen puntos  $x_i \in M_i$ , para cada  $i = 1, \dots, 2d$ , tales que  $p \in \text{int conv } \{x_1, \dots, x_{2d}\}$ .*

Parece ser que este resultado fué observado por Dančs [2], sin embargo, hasta donde

sabemos no existe una prueba publicada de este teorema.

### 1.3.2. Demostraciones y Corolarios

Para demostrar el Teorema 4 necesitaremos el siguiente lema debido a I. Bárány [2]:

**Lema Ba** Sea  $M_1, \dots, M_d$  conjuntos de puntos en  $\mathbb{R}^d$ , y sea  $a \in \text{conv } M_i$  para cada  $i = 1, \dots, d$ . Sea  $v_0$  un punto arbitrario en  $\mathbb{R}^d$ . Entonces, existen puntos  $v_i \in M_i$ , para  $i = 1, \dots, d$ , tales que  $a \in \text{conv } \{v_0, v_1, \dots, v_d\}$ .

*Demostración del Teorema 4.* Sin pérdida de generalidad, podemos asumir que  $p$  es el origen  $o$ . Por el Teorema S tenemos que existen conjuntos  $V_i = \{y_i^1, \dots, y_i^{r_i}\} \subset M_i$  tales que  $r_i \leq 2d$  y  $o \in \text{int conv } V_i$ , para cada  $i = 1, \dots, 2d$ . Denotemos por  $M$  al conjunto de todas las combinaciones lineales de  $n - 1$  o menos puntos de  $\bigcup_{i=1}^{2d} V_i$ . Dado que  $M \neq \mathbb{R}^d$ , existe una línea  $L$  a través de  $o$  tal que  $L \cap M = \{o\}$ . Como  $o \in \text{int conv } V_i$  para cada  $i = 1, \dots, 2d$ , entonces  $\epsilon B \subset \text{int conv } V_i$  para un número positivo  $\epsilon$  suficientemente pequeño. Sean  $a_1$  y  $a_2$  puntos de  $L$  los cuales están en la frontera de  $\epsilon B$ . Por el Lema Ba, existen puntos  $x_i \in V_i$ , para  $i = 1, \dots, 2d$  tales que  $a_1 \in \text{conv } \{o, x_1, \dots, x_d\}$  y  $a_2 \in \text{conv } \{o, x_{d+1}, \dots, x_{2d}\}$ . Por la elección de  $L$ , tanto  $a_1$  como  $a_2$  no pueden ser expresados como una combinación lineal de menos de  $d$  vectores. Se sigue que tanto  $a_1$  como  $a_2$  deben estar en el interior relativo de algunas caras  $n - 1$ -dimensionales de  $\text{conv } \{o, x_1, \dots, x_d\}$  y  $\text{conv } \{o, x_{d+1}, \dots, x_{2d}\}$ , respectivamente. Finalmente, como  $o$  está contenido en el interior relativo del segmento  $[a_1, a_2]$ , concluimos que  $o \in \text{int conv } \{x_1, \dots, x_{2d}\}$ .  $\square$

Los siguientes dos corolarios se derivan fácilmente del Teorema 4:

**Corolario 2.** Sean  $H_1, \dots, H_{2d} \subset \mathbb{S}^{d-1}$  conjuntos no unilaterales. Entonces, existe puntos  $v_1 \in H_1, v_2 \in H_2, \dots, v_{2d} \in H_{2d}$ , tales que el conjunto  $\{v_1, v_2, \dots, v_{2d}\}$  es no unilaterial.

**Corolario 3.** Sean  $\mathcal{F}_1, \dots, \mathcal{F}_{2d}$  familias no vacías de semiesferas cerradas en  $\mathbb{S}^{d-1}$ . Asumamos que para cada elección  $M_1 \in \mathcal{F}_1, \dots, M_{2d} \in \mathcal{F}_{2d}$  tenemos que  $\bigcap_{k=1}^{2d} M_k \neq \emptyset$ . Entonces, para alguna  $i \in [2d]$ ,  $\bigcap_{M \in \mathcal{F}_i} M \neq \emptyset$ .

Finalmente, daremos una demostración de la siguiente versión coloreada de un teorema de Dines and McCoy [17]:

**Corolario 4.** Sean  $\mathcal{F}_i = \{L_i : i \in A_i\}$ , para cada  $i = 1, \dots, 2d$ , familias no vacías de semiespacios cerrados en  $\mathbb{R}^d$ , cada uno de los cuales contiene al origen o sobre su frontera. Asumimos que para cada elección  $L_1 \in \mathcal{F}_1, \dots, L_{2d} \in \mathcal{F}_{2d}$ , la intersección  $\bigcap_{k=1}^{2d} L_k$  contiene un rayo con vértice en el origen. Entonces, para alguna  $i \in [2d]$ , la intersección  $\bigcap_{i \in A_i} L_i$  contiene un rayo con vértice en el origen.

*Demostración.* Dado un semiespacio  $L_j$ , denotamos por  $v_j$  al vector unitario normal a la frontera de  $L_j$  el cual está contenido en  $L_j$ . Asumamos que para ninguna de las familias  $\mathcal{F}_i$  la intersección de sus miembros contiene un rayo común. Observemos que en este caso, para cada vector unitario  $v$  existen semiespacios  $L_i \in \mathcal{F}_i$ , para cada  $i = 1, \dots, 2d$ , tales que  $\angle(v_i, v) > \pi/2$ . Aplicando esta observación a cada par de vectores  $v$  y  $-v$ , se sigue que no existe hiperplano a través de  $o$  el cual acote a cada  $H_i = \bigcup_{j \in A_i} v_j$ , para  $i = 1, \dots, 2d$ . Esto significa que los conjuntos  $H_1, \dots, H_{2d}$  son no unilaterales. Entonces, por el Teorema 4 tenemos que existen vectores unitarios  $v_1 \in H_1, \dots, v_{2d} \in H_{2d}$ , tales que el conjunto  $\{v_1, \dots, v_{2d}\}$  es no unilateral. Sin embargo, los correspondientes semiespacios cerrados  $L_1, \dots, L_{2d}$  no tienen vector unitario en común. Por ende, no tienen rayo en común, lo cual es una contradicción a lo asumido en el corolario. Por lo tanto, para alguna  $i \in [2d]$  se cumple que la intersección  $\bigcap_{i \in A_i} L_i$  contiene un rayo con vértice en  $o$ .  $\square$

## Capítulo 2

# Proyecciones y Secciones de Cuerpos Convexos

### 2.1. Caracterizaciones de Simetría Central

#### 2.1.1. Introducción

Sea  $M \subset \mathbb{R}^d$  un conjunto y sea  $q \in \mathbb{R}^d$  un punto. El conjunto  $M' = 2q - M$  se dice ser *centralmente simétrico a  $M$  con respecto al centro  $q$* . En otras palabras,  $M'$  es centralmente simétrico a  $M$  con respecto al centro  $q$  si y sólo si para cada punto  $x \in M$  hay un punto  $x' \in M'$  tal que  $\frac{1}{2}(x + x') = q$  y para cada  $y' \in M'$  hay un punto  $y \in M$  tal que  $\frac{1}{2}(y + y') = q$ .

Utilizando la definición anterior, diremos que un conjunto  $M$  en  $\mathbb{R}^d$  es *centralmente simétrico* si existe un punto  $q \in \mathbb{R}^d$  tal que  $M$  es centralmente simétrico a si mismo con respecto a  $q$ . Además, diremos que el punto  $q$  es el *centro de simetría* para  $M$ .

Notemos que si un conjunto compacto es centralmente simétrico, entonces el centro

de simetría está determinado de manera única.

Sea  $K$  un conjunto en  $\mathbb{R}^d$ . Es un hecho bien conocido que si  $K$  es centralmente simétrico entonces para cada subconjunto con tres puntos,  $S$ , contenido en  $K$  existe un trasladado del conjunto  $-S$  el cual también está contenido en  $K$ . En [15], G.D. Chakerian y M.S. Klamkin demostraron la afirmación inversa, esto es, ellos demostraron la siguiente caracterización de simetría central para conjuntos compactos:

**Teorema CK.** *Sea  $S$  un conjunto compacto de  $\mathbb{R}^d$ . Si para cada subconjunto con tres puntos,  $T = \{x_1, x_2, x_3\}$ , de  $S$  existe un trasladado del conjunto  $-T$  el cual es también un subconjunto de  $S$ , entonces  $S$  es centralmente simétrico.*

Cabe mencionar que J.A. Wieacker [49] demostró la afirmación anterior para el caso cuando  $K$  es un cuerpo convexo, esto es, él demostró este resultado para el caso cuando  $K$  es un conjunto compacto convexo con interior no vacío en  $\mathbb{R}^d$ .

Ahora, consideremos la siguiente propiedad de un conjunto centralmente simétrico  $K$ : Si un simplejo  $n$ -dimensional  $T$  contiene a  $K$ , entonces algún trasladado de  $-T$  también contiene a  $K$ . ¿Qué sucede si consideramos la afirmación inversa?, ¿es ésta verdadera?

La respuesta es afirmativa. Recientemente, V. Boltyanski y J. Jerónimo [9] demostraron el siguiente resultado por medio de una aplicación de un teorema de E. Lutwak:

**Teorema BJ.** *Sea  $M \subset \mathbb{R}^d$  un conjunto compacto convexo tal que para todo simplejo  $d$ -dimensional,  $T$ , el cual contiene a  $M$ , existe un trasladado de  $-T$  el cual también contiene a  $M$ . Entonces  $M$  es centralmente simétrico.*

El propósito principal en ésta sección es dar algunas condiciones necesarias y suficientes bajo las cuales un conjunto compacto dado contiene a otro. Estas condiciones son del tipo dado por Chakerian y Klamkin en su teorema, es decir, son condiciones que dependen de las propiedades de subconjuntos de tres puntos. Más aún, usaremos

esta caracterización de contención para dar algunas caracterizaciones más de simetría central. También usaremos un teorema tipo Helly para dar una prueba distinta del siguiente teorema de E. Lutwak [36]:

**Teorema Lu.** *Sean  $K$  y  $L$  cuerpos convexos en  $\mathbb{R}^d$ . Si cada simplejo  $d$ -dimensional que contiene a  $K$  también contiene a un trasladado de  $L$ , entonces  $K$  contiene a un trasladado de  $L$ .*

### 2.1.2. Demostraciones y Corolarios

Como primer resultado tenemos el siguiente teorema, por medio del cual el Teorema CK puede ser deducido fácilmente:

**Teorema 2.** *Sean  $K$  y  $L$  conjuntos compactos del mismo diámetro en  $\mathbb{R}^d$ . Asumamos que para cada subconjunto de tres puntos,  $T = \{x_1, x_2, x_3\}$ , contenido en  $K$ , existe un trasladado de  $T$  el cual está también contenido en  $L$ . Entonces  $L$  contiene a un trasladado de  $K$ .*

*Demostración.* Sean  $a$  y  $b$  puntos en  $K$  tales que el segmento  $[a, b]$  es un diámetro de  $K$ . Consideremos un punto  $c \in K$  diferente de  $a$  y  $b$ . Dado que un trasladado de  $\{a, b, c\}$  está contenido en  $L$ , entonces existe  $x \in \mathbb{R}^d$  tal que  $\{x+a, x+b, x+c\} \subset L$ . Claramente,  $[x+a, x+b]$  es un diámetro de  $L$ . Consideremos ahora, otro punto  $e \in K$ , diferente de  $a, b$  y  $c$ . Tenemos que existe  $y \in \mathbb{R}^d$  tal que  $\{y+a, y+b, y+e\} \subset L$ . Supongamos que  $y$  es diferente de  $x$ , entonces alguno de los segmentos  $[y+a, x+b]$  ó  $[y+b, x+a]$  tiene longitud mayor que la de  $[x+a, x+b]$ . Esto contradice que  $[x+a, x+b]$  es un diámetro de  $L$ , y de aquí obtenemos que  $y = x$ . Concluimos que  $x+K \subset L$ .  $\square$

Los siguientes dos resultados se deducen mediante una aplicación directa del Teorema CK:



**Corolario 1.** Sea  $M \subset \mathbb{R}^d$  un conjunto compacto y  $x \in \mathbb{R}^d$  un punto fijo. Si existe un entero  $k$ , con  $3 \leq k \leq d - 1$ , tal que para cada subespacio  $k$ -dimensional  $L \subset \mathbb{R}^d$  la intersección  $(x + L) \cap M$  es centralmente simétrica, entonces  $M$  es también centralmente simétrico.

*Demostración.* Sea  $S = \{a, b, c\} \subset M$  un conjunto con tres puntos. Consideremos un subespacio  $k$ -dimensional  $L \subset \mathbb{R}^d$  el cual contiene los puntos  $a - x$ ,  $b - x$  y  $c - x$ , esto es,  $S \subset (x + L) \cap M$ . Por las hipótesis,  $(x + L) \cap M$  es centralmente simétrico. Sea  $q$  su centro de simetría. Entonces el conjunto  $S'$  simétrico a  $S$  con respecto a  $q$  está contenido en  $(x + L) \cap M$ , esto es,  $S' \subset M$ . Por el Teorema CK, tenemos que  $M$  es centralmente simétrico.  $\square$

**Corolario 2.** Sea  $M \subset \mathbb{R}^d$  un conjunto compacto. Si existe un entero  $k$ , con  $1 \leq k \leq d - 4$ , y un subespacio  $k$ -dimensional  $L \subset \mathbb{R}^d$  tal que para cada subespacio  $(k + 3)$ -dimensional,  $\Gamma \subset \mathbb{R}^d$ , el cual contiene a  $L$ , la intersección  $\Gamma \cap M$  es centralmente simétrica, entonces  $M$  es también centralmente simétrico.

*Demostración.* Sea  $S = \{a, b, c\} \subset M$  un conjunto con tres puntos. Consideremos un subespacio  $(k + 3)$ -dimensional  $\Gamma \subset \mathbb{R}^d$  el cual contiene a  $L \cup S$ . Dado que  $\Gamma \supset L$ , el conjunto  $\Gamma \cap M$  es centralmente simétrico. Sea  $q$  su centro de simetría. Entonces el conjunto  $S'$  simétrico a  $S$  con respecto a  $q$  está contenido en  $\Gamma \cap M$ , esto es,  $S' \subset M$ . Por el Teorema CK, tenemos que  $M$  es centralmente simétrico.  $\square$

En [41], C.A. Rogers estableció teoremas que muestran como las propiedades de un cuerpo convexo están determinadas por las propiedades de sus secciones 2-dimensionales o de sus proyecciones ortogonales 2-dimensionales. En particular, estamos interesados en el siguiente teorema:

**Teorema R.** Si todas las proyecciones de un cuerpo convexo  $K_2$ , sobre planos 2-dimensionales, son directamente homotéticas a (trasladados de) las correspondientes proyecciones de un cuerpo convexo  $K_1$ , entonces  $K_2$  es directamente homotético a (un

trasladado de)  $K_1$ .

De ahora en adelante, si  $H$  es un subespacio 2-dimensional de  $\mathbb{R}^d$  y  $M$  es un conjunto en  $\mathbb{R}^d$ , denotaremos por  $\pi_H(M)$  a la proyección ortogonal de  $M$  sobre  $H$ . Como una aplicación de su teorema, Rogers dió una demostración más del siguiente teorema de W. Blaschke and G. Hesseberg [5]:

**Teorema BH.** *Sea  $K \subset \mathbb{R}^d$  un cuerpo convexo. Si para cada subespacio 2-dimensional  $H \subset \mathbb{R}^d$  tenemos que  $\pi_H(K)$  es centralmente simétrico, entonces  $K$  es centralmente simétrico.*

Sean  $T \subset \mathbb{R}^d$  un simplejo  $k$ -dimensional,  $2 \leq k \leq d-1$ , y  $N \subset \mathbb{R}^d$  el complemento ortogonal de su envolvente afín  $\text{aff } T$ . Llamaremos una  $k$ -viga a la suma vectorial  $B = T \oplus N$  en  $\mathbb{R}^d$ . Con más detalle,  $B$  es la  $k$ -viga en  $\mathbb{R}^d$  con base  $T$ .

Aplicando el Teorema BH y el Teorema BJ obtenemos el siguiente teorema el cual es la versión dual del Teorema CK:

**Teorema 3.** *Sea  $M \subset \mathbb{R}^d$  un conjunto compacto convexo. El conjunto  $M$  es centralmente simétrico si y sólo si para cada 2-viga  $B \subset \mathbb{R}^d$ , la cual contiene a  $M$ , existe un punto  $q \in \mathbb{R}^d$  tal que la 2-viga  $B'$  simétrica a  $B$  con respecto a  $q$  también contiene a  $M$ .*

*Demostración.* La necesidad de la afirmación es evidente. Demostraremos sólo la suficiencia. Asumamos que  $M$  es centralmente simétrico. Sean  $H \subset \mathbb{R}^d$  un subespacio 2-dimensional,  $T \subset H$  un triángulo y  $B = T \oplus N$  la correspondiente 2-viga, donde  $N$  es el complemento ortogonal de  $L$ . Supongamos que  $B \supset M$ . Por las hipótesis, existe un punto  $q \in \mathbb{R}^d$  tal que la 2-viga  $B'$  simétrica a  $B$  con respecto a  $q$  también contiene a  $M$ . Sin pérdida de generalidad, podemos asumir que  $q \in H$ . Entonces  $B' = T' \oplus N$  donde  $T' \subset H$  es el triángulo simétrico a  $T$  con respecto a  $q$ . Que  $M \subset B'$  es equivalente a que  $\pi_H(M) \subset T'$ . Entonces para cada triángulo  $T$  con  $\pi_H(M) \subset T$  existe un punto  $q \in H$  tal que  $\pi_H(M) \subset T'$ . Por el Teorema BJ tenemos que  $\pi_H(M) \subset H$  es

centralmente simétrico. Dado que esto es válido para cada subespacio 2-dimensional  $H \subset \mathbb{R}^d$ , concluimos por el Teorema BH que  $M$  es centralmente simétrico.

**Ejemplo 1.** Sea  $L \subset \mathbb{R}^d$  un subespacio 2-dimensional y sean  $P_1, P_2, P_3$  semiespacios cerrados de  $L$ . La intersección  $P_1 \cap P_2 \cap P_3$  (si ésta es 2-dimensional) puede ser un triángulo o un conjunto no acotado. Se puede demostrar fácilmente que si en la definición de una 2-viga sustituimos el triángulo  $T$  por el conjunto no acotado  $P_1 \cap P_2 \cap P_3$ , entonces el Teorema 3 no es válido. De hecho, supongamos que  $\text{bd}P_1 \cap \text{bd}P_3$  no está contenido en  $P_2$  y  $M \subset P_1 \cap P_2 \cap P_3$ . Denotemos por  $b$  al eje de simetría de  $P_1 \cap P_3$ , concluimos que para cada punto  $q \in b \cap P_1 \cap P_2 \cap P_3$  suficientemente lejos de  $\text{bd}P_2$ , el conjunto simétrico a  $P_1 \cap P_2 \cap P_3$  con respecto a  $q$  contiene a  $M$ , independientemente de la simetría central de  $M$ .

Denotemos por  $T$  un conjunto de tres líneas paralelas y sea  $M$  un conjunto compacto en  $\mathbb{R}^d$ . Diremos que  $T$  es una 3-línea transversal a  $M$  si cada una de las líneas de  $T$  interseca a  $M$ . Combinando el Teorema R y el Teorema 2 obtenemos el siguiente resultado:

**Corolario 3.** Sean  $K$  y  $L$  cuerpos convexos en  $\mathbb{R}^d$ . Asumamos que para cada 3-línea transversal,  $T$ , a alguno de ellos, existe un trasladado de  $T$  el cual es también una 3-línea transversal al otro. Entonces  $L$  es un trasladado de  $K$ .

*Demostración.* Claramente,  $\pi_H(K)$  y  $\pi_H(L)$  tienen diámetros de la misma longitud para cualquier subespacio 2-dimensional  $H$ . Consideremos una 3-línea transversal  $T$  a  $K$  (arbitraria), la cual es ortogonal a  $H$  e interseca a  $\pi_H(K)$  en el conjunto de puntos  $\{a, b, c\}$ . Como existe un trasladado de  $T$  el cual es también una 3-línea transversal a  $L$ , tenemos que para alguna  $x \in \mathbb{R}^d$  se cumple  $\{x + a, x + b, x + c\} \subset \pi_H(L)$ . De aquí se sigue, por el Teorema 2, que  $\pi_H(L)$  contiene a algún trasladado de  $\pi_H(K)$ . Análogamente, probamos que  $\pi_H(K)$  contiene algún trasladado de  $\pi_H(L)$ . Entonces,  $\pi_H(L)$  es un trasladado de  $\pi_H(K)$  para cada subespacio 2-dimensional  $H$ . Aplicando el Teorema R obtenemos que  $L$  es un trasladado de  $K$ .  $\square$

Así como Rogers utilizó su teorema para demostrar el Teorema de Blaschke y Hesse, podemos usar el Corolario 1 para producir el siguiente:

**Corolario 4.** *Sea  $M$  un cuerpo convexo en  $\mathbb{R}^d$ . Asumamos que para cada 3-línea transversal  $T$  a  $M$  existe un trasladado de  $-T$  el cual es también una 3-línea transversal a  $M$ . Entonces  $M$  es centralmente simétrico.*

Ahora, dada una familia  $\mathcal{F}$  de conjuntos en  $\mathbb{R}^d$ , denotamos por  $\pi\mathcal{F}$  a la intersección de todos sus miembros. Para demostrar el Teorema Lu usaremos el siguiente teorema tipo Helly dado por L. Danzer, B. Grünbaum, y V. Klee [16]:

**Teorema DGK.** *Sea  $\mathcal{F}$  una familia de semiespacios cerrados en  $\mathbb{R}^d$  la cual tiene intersección acotada. Si para cada subfamilia con  $(d+1)$  miembros,  $\mathcal{P}$ , la intersección  $\pi\mathcal{P}$  contiene a algún trasladado de un cuerpo convexo  $C$ , entonces  $\pi\mathcal{F}$  contiene a algún trasladado de  $C$ .*

Sabemos que todo conjunto compacto convexo  $M$  en  $\mathbb{R}^d$  es la intersección de todos sus semiespacios soporte cerrados. Utilizando esta observación y el Teorema DGK podemos probar el Teorema Lu:

*Demostración del Teorema Lu.* Sea  $\mathcal{H}$  la familia que consiste de todos los semiespacios soporte cerrados de  $K$ . Sea  $S$  una subfamilia de  $\mathcal{H}$  con  $d+1$  miembros y sea  $T = \pi S$ . Tenemos que  $T$  es un simplejo  $d$ -dimensional o es un conjunto no acotado. En ambos casos existe un trasladado de  $L$  el cual está contenido en  $T$ , y dado que  $\pi\mathcal{H} = K$  es acotado, entonces por el Teorema DGK tenemos que  $K$  contiene a algún trasladado de  $L$ .  $\square$

**Observación 1.** Podemos demostrar el Teorema BJ para el caso cuando  $M$  es un cuerpo convexo de la manera siguiente: aplicamos el Teorema Lu pero reemplazando  $K$  por  $M$  y  $L$  por  $-M$  y obtenemos que  $M$  contiene a algún trasladado de  $-M$ , digamos  $y - M$ . Ahora, para demostrar la otra contención, supongamos que existe un punto  $x \in M$  tal que  $x \notin y - M$ . Entonces, dado que  $y - M$  es un cuerpo convexo,

podemos separar estrictamente  $x$  de  $y - M$  por medio de una línea  $l$ . Sea  $u$  el vector unitario normal a  $l$ . Hemos obtenido que, en la dirección  $u$ , el ancho de  $y - M$  es menor que el ancho de  $M$ . Esto es una contradicción, por lo tanto,  $y - M \supset M$ . Concluimos entonces que  $M = y - M$  y por ende  $M$  es centralmente simétrico.

## 2.2. Proyecciones de cuerpos convexos

### 2.2.1. Introducción

En esta sección generalizaremos el teorema de C.A. Rogers visto en la sección anterior (Teorema R) y obtendremos, aplicando esta generalización, algunos teoremas los cuales establecen condiciones necesarias y suficientes bajo las cuales un cuerpo convexo es centralmente simétrico, una bola euclidiana, ó un cuerpo de ancho constante.

### 2.2.2. Cuerpos homotéticos

Primeramente, recordemos el enunciado del Teorema de Rogers:

**Teorema R.** *Si todas las proyecciones de un cuerpo convexo  $K_2$ , sobre planos 2-dimensionales, son directamente homotéticas a (trasladados de) las correspondientes proyecciones de un cuerpo convexo  $K_1$ , entonces  $K_2$  es directamente homotético a (un trasladado de)  $K_1$ .*

Notemos que si los cuerpos convexos  $K_1$  y  $K_2$  son directamente homotéticos entonces es claro que sus correspondientes proyecciones 2-dimensionales son homotéticas.

La siguiente caracterización de simetría central se debe a V. Boltyanski y J. Jerónimo [9]:

**Teorema BJ2.** Sea  $M \subset \mathbb{R}^d$  un cuerpo convexo y sea  $\Gamma$  un subespacio  $k$ -dimensional de  $\mathbb{R}^d$ ,  $1 \leq k \leq n - 2$ . Denotemos por  $N$  al complemento ortogonal de  $\Gamma$ . El cuerpo  $M$  es centralmente simétrico si y sólo si

- (1) existe un hiperplano  $H \supset N$  tal que cada uno de los dos hiperplanos soporte de  $M$ , paralelos a  $H$ , tiene solamente un punto común con  $M$ ;
- (2) para cada subespacio  $(k+1)$ -dimensional  $L \supset \Gamma$ ,  $\pi_L(M)$  es un cuerpo centralmente simétrico en  $L$ .

Como se mencionó anteriormente, el propósito principal será demostrar el siguiente resultado siguiendo el mismo espíritu del Teorema BJ2:

**Teorema 4.** Sean  $M_1, M_2 \subset \mathbb{R}^d$  cuerpos convexos y sea  $\Gamma$  un subespacio  $k$ -dimensional de  $\mathbb{R}^d$ ,  $1 \leq k \leq d - 2$ . Denotemos por  $N$  al complemento ortogonal de  $\Gamma$ . El cuerpo  $M_2$  es homotético a (un trasladado de)  $M_1$  si y sólo si

- (1) existe un hiperplano  $H \supset N$  tal que cada uno de los dos hiperplanos soporte de  $M_1$ , paralelos a  $H$ , tiene solamente un punto común con  $M_1$ ;
- (2) para cada subespacio  $(k + 1)$ -dimensional  $L \supset \Gamma$ ,  $\pi_L(M_2)$  es homotético a (un trasladado de)  $\pi_L(M_1)$ .

**Ejemplo 2.** Sean  $H \subset \mathbb{R}^3$  un subespacio 2-dimensional,  $B \subset H$  un disco de diámetro 1 y  $Q \subset H$  una figura de ancho constante 1. Denotemos por  $N \subset \mathbb{R}^3$  el complemento ortogonal de  $H$ . Consideremos los cilindros  $\mathcal{B} = B \times [0, 1]$  y  $\mathcal{Q} = Q \times [0, 1]$ . Tenemos que para cada subespacio 2-dimensional  $L \subset \mathbb{R}^3$  con  $L \supset N$ , se cumple que  $\pi_L(\mathcal{P})$  es un trasladado de  $\pi_L(\mathcal{Q})$ , sin embargo,  $\mathcal{P}$  no es un trasladado de  $\mathcal{Q}$ . Esto muestra que en cierto sentido el Teorema 4 es óptimo.

Es importante mencionar que H. Groemer [21] estableció previamente un resultado similar y lo utilizó para dar condiciones necesarias y suficientes bajo las cuales un cuerpo convexo es centralmente simétrico, una esfera sólida o un cuerpo de ancho constante. De manera semejante a las aplicaciones de Groemer, estableceremos los siguientes resultados obtenidos mediante una aplicación del Teorema 4:

**Corolario 5.** Sea  $M \subset \mathbb{R}^d$  un cuerpo convexo y sea  $\Gamma$  un subespacio  $k$ -dimensional de  $\mathbb{R}^d$ ,  $1 \leq k \leq d-2$ . El cuerpo  $M$  es una esfera sólida si y sólo si para cada subespacio  $(k+1)$ -dimensional  $L$  de  $\mathbb{R}^d$ ,  $L \supset \Gamma$ ,  $\pi_L(M)$  es una esfera sólida en  $L$ .

**Corolario 6.** Sea  $M \subset \mathbb{R}^d$  un cuerpo convexo y sea  $\Gamma$  un subespacio  $k$ -dimensional de  $\mathbb{R}^d$ ,  $1 \leq k \leq d-2$ . El cuerpo  $M$  es de ancho constante si y sólo si para cada subespacio  $(k+1)$ -dimensional  $L$  de  $\mathbb{R}^d$ ,  $L \supset \Gamma$ ,  $\pi_L(M)$  es un cuerpo convexo de ancho constante en  $L$ .

Para enunciar el siguiente resultado introduciremos algunas definiciones más. Una caja en  $\mathbb{R}^d$  es un paralelepípedo rectangular  $n$ -dimensional. Sea  $2 \leq k \leq d-1$  un entero. Diremos que una caja  $P$  tiene base en un subespacio  $k$ -dimensional  $L$  de  $\mathbb{R}^d$ , si el hiperplano soporte de alguna cara de  $P$  es paralelo a  $L$ . También diremos que una caja  $P$ , circunscrita a un cuerpo convexo  $M$ , tiene la propiedad (I) si los centros de las caras de  $P$  pertenecen a  $M$ .

En [20], H. Groemer estableció el siguiente teorema el cual caracteriza la esfera sólida:

*Si para toda caja circunscrita a un cuerpo convexo  $M \subset \mathbb{R}^d$  los centros de sus caras pertenecen a  $M$ , entonces  $M$  es una esfera sólida.*

De nuevo, damos la siguiente generalización del Teorema de Groemer en el espíritu del Teorema BJ2:

**Corolario 7.** Sea  $M \subset \mathbb{R}^d$  un cuerpo convexo y sea  $\Gamma$  un subespacio  $k$ -dimensional de  $\mathbb{R}^d$ ,  $1 \leq k \leq d-2$ . El cuerpo  $M$  es una esfera sólida si y sólo si para cada subespacio  $(k+1)$ -dimensional  $L$  de  $\mathbb{R}^d$ ,  $L \supset \Gamma$ , cualquier caja con base en  $L$  tiene la propiedad (I).

### 2.2.3. Demostraciones

Dado un vector  $v \in \mathbb{S}^{n-1}$  y un cuerpo convexo  $M$  denotamos por  $\Pi(v)$  al semiespacio soporte cerrado de  $M$  con normal exterior  $v$ , i.e,  $\Pi(v)$  es un semiespacio cerrado con normal exterior  $v$  tal que  $\Pi(v) \supset M$  y  $\text{bd}\Pi(v)$  es un hiperplano soporte de  $M$ .

**Observación 2.** La *necesidad* del Teorema 4 y de los Corolarios 5, 6 y 7 es evidente. Nos restringiremos entonces a probar solo la *suficiencia*.

*Demostración del Teorema 4.* Consideremos primeramente el caso  $k = 1$ . En este caso  $\Gamma$  es una línea y  $N$  es su complemento ortogonal. Asumamos que cada uno de los dos hiperplanos soporte de  $M_1$ , paralelos a  $H = N$ , tiene sólo un punto en común con  $M_1$ . Denotemos por  $v_0$  al vector unitario ortogonal a  $H$ . Sean  $\{a_1\} = M_1 \cap \text{bd}\Pi(v_0)$  y  $\{b_1\} = M_1 \cap \text{bd}\Pi(-v_0)$ . Sin pérdida de generalidad, podemos asumir que  $b_1 = 0$  y  $a_1 = (1, 0, \dots, 0)$ . Después de trasladar  $M_2$ , podemos asumir que éste está soportado por el hiperplano  $\text{bd}\Pi(-v_0)$  en 0. Consideremos que  $M_2$  interseca a su segundo hiperplano soporte (paralelo a  $H$ ) en un punto  $a'_2$ , con coordenadas  $(\lambda', \alpha_2, \dots, \alpha_n)$  digamos, y  $\lambda' > 0$ . Sea  $a_2 = (\lambda, 0, \dots, 0)$  un punto sobre la línea  $0a_1$  de tal manera que  $a_2a'_2$  es paralela a  $H$ . Sea  $v_1 \in \mathbb{S}^{n-1}$  un vector unitario distinto de  $\pm v_0$ , y sea  $L$  el subespacio 2-dimensional generado por  $v_0$  y  $v_1$ . Las proyecciones  $\pi_L(M_1)$  y  $\pi_L(M_2)$  están soportadas en 0 por la línea  $l = L \cap \text{bd}\Pi(-v_0)$ . También, 0 es el único punto de intersección de  $l$  con  $\pi_L(M_1)$ . Dado que  $\pi_L(M_2)$  es homotético a  $\pi_L(M_1)$  se sigue que  $l$  interseca a  $\pi_L(M_2)$  en un sólo punto. Tal punto es 0 y a su vez es el centro de similitud entre  $\pi_L(M_1)$  y  $\pi_L(M_2)$ . Más aún, como las líneas soporte de  $\pi_L(M_1)$  y  $\pi_L(M_2)$ , las cuales son paralelas a  $l$ , pasan a través de los puntos  $a_1 = (1, 0, \dots, 0)$  y  $a_2 = (\lambda, 0, \dots, 0)$ , se sigue que el factor de dilatación  $\lambda$  y  $\pi_L(M_2) = \lambda\pi_L(M_1)$ . Tenemos que

$$\pi_L(M_2) \times L^\perp = \lambda\pi_L(M_1) \times L^\perp.$$

Dado que  $\text{bd}\Pi(v_1)$  es un hiperplano soporte de  $M_1$  se sigue que  $\text{bd}\Pi(v_1)$  es un



hiperplano soporte del cilindro  $\pi_L(M_1) \times L^\perp$ . De aquí tenemos que

$$M_1 = \bigcap_L \pi_L(M_1) \times L^\perp,$$

y de manera semejante

$$M_2 = \bigcap_L \pi_L(M_2) \times L^\perp.$$

Por lo tanto,  $M_2 = \lambda M_1$  y  $M_2$  es homotético a  $M_1$ .

Supongamos ahora que  $k > 1$ , entonces  $\dim N < n - 1$ . Por hipótesis existe un hiperplano  $H \supset N$  tal que cada uno de los dos hiperplanos soporte de  $M_1$ , paralelos a  $H$ , tiene solamente un punto en común con  $M_1$ . Denotemos por  $v_0$  al vector unitario ortogonal a  $H$  y por  $m$  al complemento ortogonal de  $H$ . Entonces, para cada subespacio 2-dimensional  $Q$  el cual contiene a  $m$ , tenemos que  $L = Q + \Gamma$  es o bien  $(k + 1)$ -dimensional ó  $L = \Gamma$  (en el caso cuando  $Q \subset \Gamma$ ). En el primer caso tenemos que  $\pi_L(M_2)$  es homotético a  $\pi_L(M_1)$ , se sigue que  $\pi_Q(\pi_L(M_2))$  es homotético a  $\pi_Q(\pi_L(M_1))$ , i.e.,  $\pi_Q(M_2)$  es homotético a  $\pi_Q(M_1)$ . En el segundo caso podemos considerar un subespacio  $(k + 1)$ -dimensional,  $T$ , el cual contiene a  $\Gamma$  y por hipótesis tenemos que  $\pi_T(M_2)$  es homotético a  $\pi_T(M_1)$ . Obtenemos que  $\pi_Q(M_2)$  es homotético a  $\pi_Q(M_1)$ . Por lo tanto, por el caso  $k = 1$  tenemos que  $M_2$  es homotético a  $M_1$ .

Finalmente, para el caso cuando las proyecciones son trasladados tenemos que  $\lambda = 1$  y por lo tanto  $M_2$  es un trasladado de  $M_1$ .  $\square$

*Demostración del Teorema BJ2.* Consideremos  $M_1 = M$  y  $M_2 = -M$ . Sea  $k$  un entero,  $1 \leq k \leq n - 2$ , y sea  $\Gamma$  un subespacio  $k$ -dimensional. Asumamos que existe un hiperplano  $H \supset N$  tal que cada uno de los dos hiperplanos soporte de  $M_1 = M$  paralelos a  $H$  tiene sólo un punto en común con  $M_1$ . Dado que para cada subespacio  $(k + 1)$ -dimensional  $L \supset \Gamma$ , se tiene que  $\pi_L(M_2) = -\pi_L(M_1)$  y como  $\pi_L(M_1)$  es centralmente simétrico, tenemos que  $\pi_L(M_2)$  es un trasladado de  $\pi_L(M_1)$ . Por el Teorem 4,  $M_2 = -M$  es un trasladado de  $M_1 = M$ , por lo tanto  $M$  es centralmente simétrico.  $\square$

*Demostración del Corolario 5.* La demostración es muy semejante a la demostración del Corolario 4. Entonces, es necesario solamente considerar  $M_1 = B$  y  $M_2 = M$ , donde  $B$  denota a la bola unitaria euclidiana  $n$ -dimensional. La condición (1) del Teorema 4 se verifica directamente. Sea  $\Gamma$  un subespacio  $k$ -dimensional y sea  $L$  un subespacio  $(k+1)$ -dimensional tal que  $L \supset \Gamma$ . Por las hipótesis tenemos que  $\pi_L(M_2)$  es homotético a  $\pi_L(M_1)$ , entonces  $M_2$  es homotético a  $M_1$ . Concluimos (de nuevo por el Teorema 4) que  $M$  es homotético a  $B$ , y por lo tanto éste debe ser una bola unitaria euclidiana  $n$ -dimensional.  $\square$

*Demostración del Corolario 6.* Primero consideraremos el caso  $k = 1$ . En este caso  $\Gamma$  es una línea y  $N$  es su complemento ortogonal. Denotemos por  $v_0$  al vector unitario ortogonal a  $N$ . Sea  $v_1 \in \mathbb{S}^{n-1}$  un vector unitario distinto de  $\pm v_0$  y sea  $L$  el subespacio 2-dimensional generado por los vectores  $v_0$  y  $v_1$ . Es claro que  $L \supset \Gamma$ . Como  $\pi_L(M)$  es de ancho constante para cada tal plano  $L$ , obtenemos que cada uno de los dos hiperplanos soporte de  $M$ , paralelos a  $N$ , intersecta a  $M$  en un sólo punto. Sean  $\{a\} = M \cap \text{bd } \Pi(v_0)$ ,  $\{b\} = M \cap \text{bd } \Pi(-v_0)$  y  $d = \|a - b\|$ . Se sigue que  $\pi_L(\text{bd } \Pi(v_0))$  y  $\pi_L(\text{bd } \Pi(-v_0))$  son las líneas soporte de  $\pi_L(M)$  en los puntos  $\pi_L(a)$  y  $\pi_L(b)$ , respectivamente. También, como  $\pi_L(M)$  es de ancho constante tenemos que  $[\pi_L(a), \pi_L(b)]$  es una binormal de  $\pi_L(M)$  para cada tal  $L$ , entonces se sigue que  $[a, b]$  es una binormal de  $M$ . Con esto tenemos que  $\pi_L(M)$  tiene ancho igual a  $\|\pi_L(a) - \pi_L(b)\| = \|a - b\| = d$ , de donde obtenemos que la distancia entre  $\text{bd } \Pi(v_1)$  y  $\text{bd } \Pi(-v_1)$  es también  $d$ . Se sigue que el ancho de  $M$  en cualquier dirección es  $d$ , por lo tanto,  $M$  es de ancho constante  $d$ .

Para  $k > 1$  la prueba es muy semejante a la prueba del caso  $k > 1$  del Teorema 4.  $\square$

*Demostración del Corolario 7.* Demostraremos solamente el caso  $k = 1$ . De nuevo, la demostración del caso  $k > 1$  es muy semejante a la demostración del caso  $k > 1$  del Teorema 4.

En este caso  $\Gamma$  es una línea y  $N$  es su complemento ortogonal. Denotemos por  $v_0$

al vector unitario ortogonal a  $N$ . Sea  $v_1 \in \mathbb{S}^{n-1}$  un vector unitario distinto de  $\pm v_0$ . Sea  $L$  el subespacio 2-dimensional generado por los vectores  $v_0$  y  $v_1$ , es claro que  $L \supset \Gamma$ . Por las hipótesis tenemos que cada caja  $P$  que circunscribe a  $M$ , con base en  $L$  tiene la propiedad (I), entonces  $\pi_L(P)$  es una caja 2-dimensional circunscrita a  $\pi_L(M)$ . Como también  $\pi_L(P)$  tiene la propiedad (I) para cada tal  $P$ , entonces  $\pi_L(M)$  es de ancho constante (dado que es bien sabido que ésta propiedad caracteriza a los cuerpos convexos de ancho constante en dimensión 2). Se sigue del Corolario 6 que  $M$  es de ancho constante y por ende  $M$  es estrictamente convexo.

Ahora, sea  $H$  el hiperplano soporte de  $P$  tal que  $H$  es paralelo a  $L$ , y sea  $H'$  el otro hiperplano soporte de  $M$  paralelo a  $H$ . Dado que  $M$  es estrictamente convexo,  $H$  y  $H'$  tiene cada uno un sólo punto de contacto con  $M$ . Sean  $\{a\} = M \cap H$  y  $\{b\} = M \cap H'$ . Como cada caja  $P$ , con base en  $L$ , tiene la propiedad (I) obtenemos que cada par de lados paralelos de  $\pi_L(P)$  equidista del punto  $\pi_L(\{a, b\})$ . Se sigue que  $\pi_L(M)$  es centralmente simétrico y como es de ancho constante entonces  $\pi_L(M)$  es una bola 2-dimensional. Por lo tanto, por el Teorema 4, concluimos que  $M$  es una bola euclidiana.  $\square$

## 2.3. Dos caracterizaciones de la bola Euclidiana

### 2.3.1. Introducción

En la sección anterior se mencionó una caracterización de la bola Euclidiana dada por Groemer. En esta sección se establecerán dos caracterizaciones más. La primera de éstas se obtiene como corolario de un teorema debido a V. Soltan, la segunda se obtiene como corolario de un teorema dado por J. Jerónimo y E. Makai [31].

Empezaremos enunciando el Teorema de Soltan, pero primero introduciremos la siguiente definición:

Dos paralelotos  $P$  y  $P'$  en  $\mathbb{R}^d$ , ambos de dimensión  $k$  ( $1 \leq k \leq d$ ), son llamados *isotéticos* si estos pueden ser representados de manera similar como sumas directas

$$P = P_1 \oplus \dots \oplus P_k, \quad P' = P'_1 \oplus \dots \oplus P'_k$$

donde  $P_i$  y  $P'_i$  son segmentos paralelos para cada  $i = 1, \dots, k$ .

Ahora, tenemos el siguiente Teorema de V. Soltan [43]:

**Teorema S.** *Para un par de cuerpos convexos  $K$  y  $K'$  en  $\mathbb{R}^d$ , las siguientes tres condiciones son equivalentes:*

- (1) *Todas las intersecciones no vacías  $K \cap (x + K')$ ,  $x \in \mathbb{R}^d$ , son centralmente simétricas.*
- (2) *Todas las intersecciones  $d$ -dimensionales  $K \cap (x + K')$ ,  $x \in \mathbb{R}^d$ , son centralmente simétricas.*
- (3)  *$K$  y  $K'$  son representados de manera similar como sumas directas*

$$K = R \oplus P \quad \text{y} \quad K' = R' \oplus P'$$

*tales que las condiciones (i) y (ii) abajo, se satisfacen:*

- (i)  *$R$  es un conjunto compacto convexo de dimensión  $m$ ,  $0 \leq m \leq d$ , y  $R' = z - R$  para algún vector  $z \in \mathbb{R}^d$ ,*
- (ii)  *$P$  y  $P'$  son paralelotos isotéticos, ambos de dimensión  $d - m$ .*

Motivados por el Teorema de Soltan, especulamos sobre la cuestión dual. Sean  $K, L \subset \mathbb{R}^d$  cuerpos convexos tales que la envolvente convexa de la unión de cualesquiera dos trasladados,  $K + x, L + y$ , es centralmente simétrica, ¿se sigue de esto que  $K$  y  $L$  son imágenes uno del otro por simetría con respecto a un punto?

En la siguiente sección se dará una respuesta afirmativa para ésta pregunta, además, se darán dos caracterizaciones más de la bola Euclidiana.

### 2.3.2. Resultados

Primeramente, establecemos la siguiente caracterización de la bola Euclidiana:

**Corolario 8.** *Sea  $K \subset \mathbb{R}^d$  un cuerpo convexo tal que la intersección de  $K$  con cualesquiera de sus copias congruentes es un conjunto centralmente simétrico. Entonces  $K$  es una bola Euclidiana  $d$ -dimensional.*

*Demostración.* Primeramente demostraremos que  $K$  es estrictamente convexo y después aplicaremos el Teorema S para obtener la conclusión deseada.

Supongamos que  $K$  no es estrictamente convexo. Sea  $\Gamma$  un hiperplano soporte de  $K$  el cual intersecta  $K$  en un solo punto (el cual es bien sabido que tal  $\Gamma$  existe). Dado que  $K$  no es estrictamente convexo existe un hiperplano soporte,  $\Pi$ , el cual intersecta a  $K$  en un conjunto el cual contiene un segmento  $\mathcal{P}$  de longitud  $\delta$ . Ahora, escogemos un número positivo  $\epsilon \leq \delta$  tal que existe una cuerda,  $\mathcal{L}$ , de  $K$  paralela a  $\Gamma$  y cuya longitud es  $\epsilon$ . Sea  $T : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}^d$  la isometría tal que  $T(\mathcal{L}) \subset \mathcal{P}$ ,  $T(\Gamma)$  es paralelo a  $\Pi$  y la banda acotada por  $T(\Gamma)$  y  $\Pi$  contiene  $K \cap T(K)$ . De aquí se sigue que  $T(\Gamma)$  y  $\Pi$  son hiperplanos soporte paralelos los cuales intersectan  $K \cap T(K)$  en dos conjuntos no congruentes. Esto es una contradicción ya que  $K \cap T(K)$  es centralmente simétrico, por lo tanto,  $K$  debe ser estrictamente convexo.

Ahora, sea  $K'$  una copia congruente de  $K$ . Por las hipótesis del teorema y por el Teorema S,  $K$  y  $K'$  están representados de manera similar como

$$K = R \oplus P \text{ y } K' = R' \oplus P'$$

tales que  $R$  y  $R'$  son simétricos con respecto a un punto  $z \in \mathbb{R}^d$ , y  $P$  y  $P'$  son paralelotos isotéticos. Dado que  $K$  es estrictamente convexo, tenemos que la dimensión de  $P$  y de  $P'$  es 0. Se sigue que  $K$  y  $K'$  son simétricos con respecto a  $z$ . Dado que esto es cierto para cualesquier copia  $K'$ , tenemos que  $K$  debe ser una bola Euclidiana  $d$ -dimensional.  $\square$

**Teorema 5.** Sean  $K, L \subset \mathbb{R}^d$  cuerpos convexos tales que la envolvente convexa de la unión de cualesquiera dos trasladados,  $K + x, L + y$ , es centralmente simétrica. Entonces  $K$  y  $L$  son imágenes uno del otro por simetría con respecto a un punto.

*Demostración.* Por el Teorema R tenemos que es suficiente demostrar el teorema para el caso 2-dimensional, ya que las propiedades de  $K$  y  $L$  quedan determinadas por las propiedades de sus proyecciones sobre planos de dimensión 2.

Supongamos  $K$  y  $L$  son cuerpos convexos 2-dimensionales y que el diámetro de  $K$  es mayor o igual al diámetro de  $L$ . Sin pérdida de generalidad, supongamos que el diámetro de  $K$  es el segmento  $[(0, -1), (0, 1)]$ . Entonces, las líneas definidas por  $y = -1$  y  $y = 1$ , son líneas soporte de  $K$  y lo tocan solamente en los puntos  $(0, -1)$  y  $(0, 1)$ .

Sea  $w$  el ancho de la banda horizontal la cual soporta a  $L$ . Supongamos que  $w < 2$ . Entonces podemos trasladar a  $L$  por un vector  $v_1$  de tal manera que  $L + v_1$  está contenido en la banda cerrada  $-1 \leq y \leq 1$ ,  $L + v_1$  está contenido en el semiplano abierto izquierdo,  $L + v_1$  es disjunto de  $K$  y la línea soporte izquierda de  $L + v_1$  es de la forma  $x = a$ , con  $a < \sqrt{3}$ . Entonces,  $\text{conv}(K \cup (L + v_1))$  contiene solamente un trasladado del segmento  $[(0, -1), (0, 1)]$ , esto es, al segmento  $[(0, -1), (0, 1)]$ . Por la simetría de  $\text{conv}(K \cup (L + v_1))$ , tenemos que este segmento es su propia imagen bajo esta simetría central. Esto es, el centro de simetría es el origen. Observemos que la parte de  $K$  en el semiplano cerrado derecho está contenida en la intersección de los círculos con centros  $(0, -1)$ ,  $(0, 1)$  y radio igual a 2. Se sigue que  $K$  está contenido en el semiplano  $x \leq \sqrt{3}$ . Por la simetría de  $\text{conv}(K \cup (L + v_1))$ , tenemos que está contenido en el semiplano cerrado derecho  $x \geq -\sqrt{3}$ . Pero entonces también  $L + v_1$  está contenido en el mismo semiplano, lo cual contradice que  $a < \sqrt{3}$ .

Esta contradicción demuestra que  $2 \leq w \leq \text{diam } L \leq \text{diam } K = 2$ . Entonces,  $L + v_1$  tiene como líneas soporte horizontales a  $y = -1$  y  $y = 1$ , y tiene con cada una de ellas solamente un punto en común. De nuevo, por la simetría de  $\text{conv}(K \cup (L + v_1))$ , tenemos que el arco izquierdo de  $L + v_1$  es congruente al arco derecho de  $K$ . Ahora,

intercambiando el rol de izquierdo y derecho, tenemos que el arco derecho de  $L + v_1$  es congruente al arco izquierdo de  $K$ . Por lo tanto  $K$  y  $L$  son simétricos con respecto a un punto. Con esto queda demostrado el caso 2-dimensional.  $\square$

Claramente, como en el caso en el que consideramos intersecciones, también aquí tenemos un corolario:

**Corolario 9.** *Sea  $K \in \mathbb{R}^d$  un cuerpo convexo con la siguiente propiedad: la envolvente convexa de la unión de  $K$  y cualesquier copia congruente de  $K$  es centralmente simétrica. Entonces  $K$  es una bola Euclidiana  $d$ -dimensional.*

## Capítulo 3

# Transversales Geométricas

### 3.1. Introducción

Sea  $\mathcal{F}$  una familia de figuras convexas en el plano. Diremos que  $\mathcal{F}$  posee la propiedad  $T$  si existe una línea que intersecta a cada miembro de  $\mathcal{F}$ . También diremos que la familia  $\mathcal{F}$  posee la propiedad  $T(k)$  si cada subfamilia de  $\mathcal{F}$  con  $k$  miembros posee la propiedad  $T$ .

Por varias décadas, se ha dedicado una cantidad considerable de esfuerzo para encontrar condiciones sobre la familia  $\mathcal{F}$ , de tal manera que la propiedad  $T(k)$  implique la propiedad  $T$ . Este problema fué propuesto originalmente por P. Vincensini [47] y el primer resultado en esta dirección se debe a L. Santaló [42]:

**Teorema de Santaló.** *Sea  $\mathcal{F}$  una familia de paralelotos en  $\mathbb{E}^n$ , los cuales tienen sus lados paralelos a los ejes de coordenadas. Si  $\mathcal{F}$  posee la propiedad  $T(2^{n-1}(2n-1))$  entonces  $\mathcal{F}$  posee la propiedad  $T$ .*

En 1964, B. Grünbaum [25] propuso el siguiente problema:



Sea  $C$  una figura centralmente simétrica y sea  $\mathcal{F} = \{x_i + C\}$  una familia finita de trasladados de  $C$  la cual posee la propiedad  $T(m)$ . ¿Cuál es el menor número entero positivo,  $\lambda = \lambda(C, m)$ , tal que para cada familia  $\mathcal{F}$  con la propiedad mencionada, la familia  $\mathcal{F}' = \{x_i + \lambda C\}$  tiene la propiedad  $T$ ?

Un primer resultado, en la dirección del problema de Grünbaum, fué dado por J. Eckhoff [19]:

**Teorema de Eckhoff.** *Sea  $\mathcal{F}$  una familia finita de trasladados de  $C$  la cual posee la propiedad  $T(3)$ . Entonces existe una banda paralela de  $C$ -ancho 1 la cual interseca a cada miembro de  $\mathcal{F}$ .*

Aquí, por el  $C$ -ancho de un conjunto  $X$  en la dirección de un vector  $u$ , denotaremos a la razón entre el ancho de  $X$  y el ancho de  $C$ , ambos considerados en la dirección del vector  $u$ .

Más de 30 años después, A. Heppes [28] probó el resultado siguiente para el caso en que  $C$  es un círculo:

**Teorema de Heppes.** *Sea  $\mathcal{F}$  una familia finita de traslados, disjuntos por pares, de un disco de diámetro 1 la cual tiene la propiedad  $T(3)$ . Entonces existe una banda paralela de ancho  $< 0,65$  la cual interseca a cada miembro de  $\mathcal{F}$ .*

Es importante notar que Heppes ha agregado la hipótesis de que los elementos de la familia  $\mathcal{F}$  sean disjuntos por pares.

Denotemos por  $B$  al disco unitario centrado en el origen. El resultado principal de este capítulo es el siguiente:

*Sea  $\mathcal{F} = \{x_i + B : i \in I\}$  una familia finita de trasladados de  $B$  la cual posee la propiedad  $T(4)$ . Entonces, la familia  $\mathcal{F}' = \{x_i + \lambda B : i \in I\}$ , donde  $\lambda = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$  (la razón dorada), posee la propiedad  $T$ .*

### 3.2. Algunos resultados sobre transversales

Empezaremos esta sección con algunas observaciones:

Que tres trasladados del círculo unitario (euclidiano),  $x_i + B$  ( $i = 1, 2, 3$ ), tengan una línea transversal común es equivalente a decir lo siguiente: al menos una altura del triángulo  $\Delta x_1 x_2 x_3$  tiene longitud menor o igual a 2 (ver Figura 1).

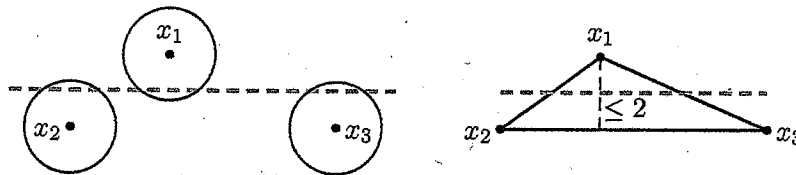


Figura 1

De esta manera podemos establecer el problema de Grünbaum, para el caso de círculos unitarios, en la siguiente forma:

Sea  $X$  un conjunto finito de puntos en el plano de tal manera que cualesquiera tres de ellos están contenidos en una banda de ancho 2. ¿Cuál es el menor número positivo,  $\alpha$ , tal que cada conjunto  $X$  con la propiedad mencionada está contenido en una banda de ancho  $\alpha$ ?

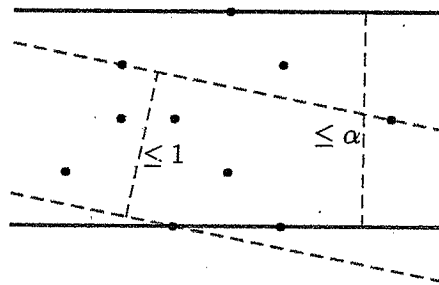


Figura 2

De manera independiente, J. Eckhoff [1] y V.L. Dolnikov (1972) conjeturaron que este número mínimo  $\alpha$  debería ser igual a  $1 + \sqrt{5}$ . Esto es equivalente a decir, en la notación de Grünbaum, que

$$\lambda(B, 3) = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}.$$

Mostraremos que si consideramos la propiedad  $T(4)$  en lugar de  $T(3)$ , el número  $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$  es el mejor posible. El que este número no pueda ser mejorado se muestra en el siguiente ejemplo clásico (el cual llamaremos *ejemplo pentagonal*), el cual consiste de círculos unitarios centrados en los vértices de un pentágono regular cuyos lados tienen longitud  $2(\sin 72^\circ)^{-1}$ :

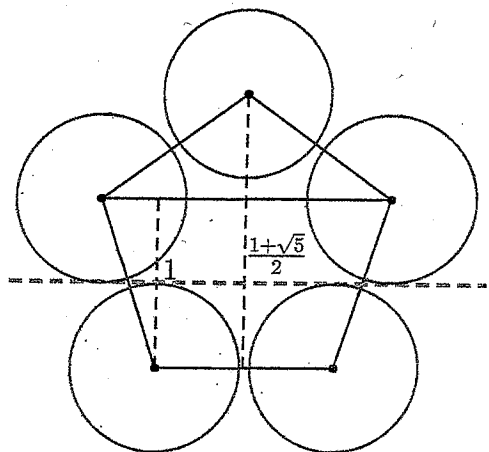


Figura 3

Además, para ilustrar la utilidad de esta reducción veamos que el Teorema de Eckhoff, para el caso particular en el que  $C$  es un círculo de diámetro unitario, puede ser probado de la manera siguiente:

Sea  $X$  el conjunto de puntos que consiste de los centros de los círculos. Como  $X$  es finito debe existir un triángulo,  $\Delta x_1 x_2 x_3$ , el cual tiene área máxima. Además, podemos suponer que  $d(x_1, x_2 x_3) \leq 1$ , donde  $d(x_1, x_2 x_3)$  denota la distancia desde el punto  $x_1$  a la línea  $x_2 x_3$ . Consideremos el triángulo  $\Delta y_1 y_2 y_3$  homotético al triángulo  $\Delta x_1 x_2 x_3$ , con centro de homotecia en el centroide de  $\Delta x_1 x_2 x_3$ , y coeficiente de homotecia  $-2$

(ver Figura 4). Claramente, el triángulo  $\Delta y_1 y_2 y_3$  contiene a  $X$ , además, para todo punto  $x \in X$  se cumple que  $d(x, x_2 x_3) \leq 1$ . Por lo tanto, la banda que tiene como fronteras a la línea  $y_2 y_3$  y a su paralela por  $y_1$ , tiene ancho 2 y contiene a  $X$ .

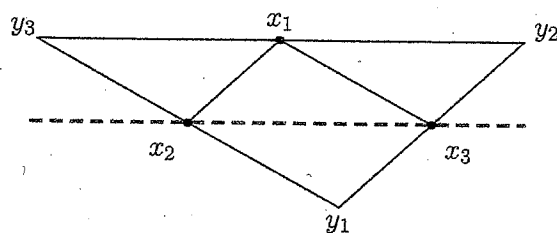


Figura 4

**Observación 1.** Notemos que el triángulo de área máxima,  $\Delta x_1 x_2 x_3$ , desempeña una papel fundamental en la demostración. Así mismo, el triángulo de área máxima será pieza clave en la demostración del Lema 1 y el Teorema 1.

Antes de demostrar el resultado principal (Teorema 1) mostraremos un resultado particular, esto con la finalidad de ilustrar una técnica la cual resulta útil para demostrar resultados sobre transversales geométricas en el plano.

**Proposición 1.** Sean  $a, b, c$  y  $d$  cuatro puntos en el plano tales que cualesquiera tres de ellos pueden ser cubiertos por una banda de ancho 1. Entonces, existe una banda de ancho  $\sqrt{2}$  la cual cubre los cuatro puntos. Más aún, si no existe una banda de ancho menor la cual cubra los puntos, entonces  $a, b, c$  y  $d$  son los vértices de un cuadrado de lado  $\sqrt{2}$ .

*Demostración.* Sin pérdida de generalidad, podemos asumir que  $\{a, b, c, d\}$  es el conjunto de vértices de un cuadrilátero convexo. Para cada lado  $xy$  de  $abcd$  consideramos un punto  $z \in \{a, b, c, d\}$ , el cual está más alejado de  $xy$ , y definimos el par  $(xy, z)$ . Tenemos que la banda acotada por la línea  $xy$  y su paralela por  $z$  contiene a  $\{a, b, c, d\}$ . Si  $\alpha = \angle xzy \geq \pi/4$  entonces  $d(z, xy) \leq \sqrt{2}$  (ver Figura 5). En caso

contrario,  $d(x, zy) = |xz| \cdot \text{Sen} \alpha > \sqrt{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = 1$ , y de manera similar,  $d(y, zx) > 1$ . Esto contradice el hecho de que  $\{x, y, z\}$  puede ser cubierto por una banda de ancho 1. Vemos entonces que será suficiente demostrar que existe un par  $(xy, z)$  tal que  $\angle xzy \geq \pi/4$ .

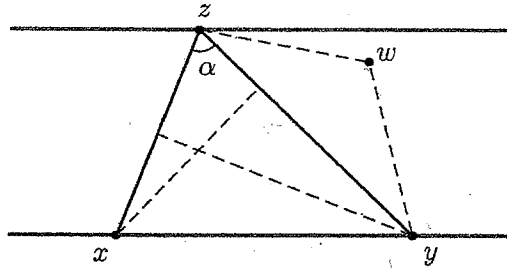


Figura 5

Tenemos dos casos posibles, dependiendo de si el cuadrilátero  $abcd$  tiene o no un par de lados opuestos que sean paralelos.

*Caso 1:* Sin pérdida de generalidad, podemos asumir que  $ad$  y  $bc$  son paralelas (ver Figura 6). Consideremos los pares  $(bc, a)$  y  $(ad, b)$ , y sean  $\alpha = \angle bac$ ,  $\beta = \angle abd$ . Ahora, podemos asumir que  $d(b, cd) \geq d(a, cd)$ . Esto nos fuerza a considerar los pares  $(cd, b)$  y  $(ab, c)$ . Sean  $\theta = \angle cbd$  y  $\gamma = \angle bca$ . Dado que  $\alpha + \beta + \theta + \gamma = \pi$ , tenemos que al menos uno de estos ángulos es  $\geq \pi/4$ .

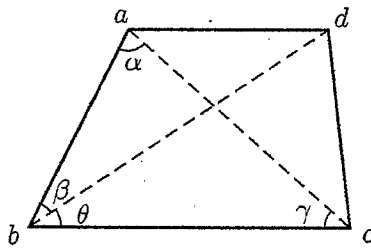


Figura 6

*Caso 2:* Asumimos que no hay un par de lados opuestos que sean paralelos. Sin pérdida de generalidad, podemos considerar que  $d(b, cd) > d(a, cd)$  (ver Figura 7).

Esto significa que debemos considerar los pares  $(ab, c)$  y  $(cd, b)$ . Sean  $\gamma = \angle bca$  y  $\theta = \angle cbd$ . Podemos asumir que  $d(a, bc) > d(d, bc)$  (el caso  $d(d, bc) > d(a, bc)$  es simétrico). Sean  $\alpha = \angle bac$  y  $\beta = \angle abd$ . Dado que  $\alpha + \beta + \theta + \gamma = \pi$ , tenemos que al menos uno de estos ángulos es  $\geq \pi/4$ .

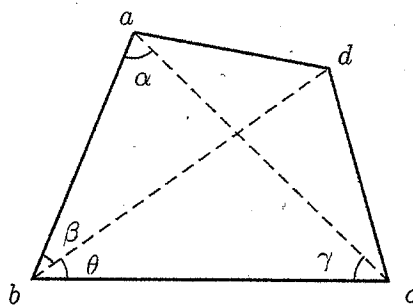


Figura 7

Hemos probado que existe una banda de ancho  $\sqrt{2}$  la cual cubre al conjunto  $\{a, b, c, d\}$ . Falta demostrar la segunda parte de la proposición.

Si no existe una banda de ancho estrictamente menor que  $\sqrt{2}$  la cual cubra al conjunto, tenemos que  $\alpha = \beta = \theta = \gamma = \pi/4$ . Esto implica (ver Figura 7) que el triángulo  $\triangle abc$  es rectángulo e isósceles con  $\angle abc = \pi/2$  y  $|ab| = |bc| = \sqrt{2}$ .

Si  $d(d, bc) < d(a, bc)$  entonces  $d(b, ad) < \sqrt{2}$ , lo cual contradice que no existe una banda de ancho menor que  $\sqrt{2}$  la cual cubra el conjunto  $\{a, b, c, d\}$  (ya que entonces la banda acotada por la líneas  $ad$  y su paralela por  $b$ , la cual cubre al conjunto, tendría ancho menor que  $\sqrt{2}$ ). Se sigue entonces que  $d(d, bc) = d(a, bc) = \sqrt{2}$ . De manera similar, tenemos  $d(d, ab) = d(c, ab) = \sqrt{2}$ . Por lo tanto,  $a, b, c$  y  $d$  son los vértices de un cuadrado de lado  $\sqrt{2}$ .  $\square$

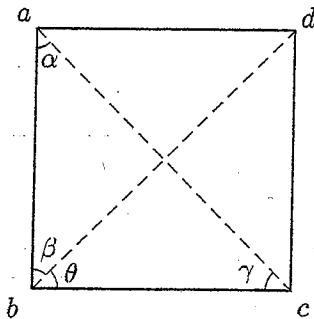


Figura 8

Usando esta misma técnica podemos obtener el resultado siguiente:

**Proposición 2.** Sea  $\mathcal{F}$  un conjunto de cinco puntos en el plano, tales que cualesquiera tres de ellos pueden ser cubiertos por una banda de ancho 1. Entonces, existe una banda de ancho  $(\text{Sen } 36^\circ)^{-1}$  la cual cubre a  $\mathcal{F}$ .

**Proposición 3.** Sea  $abcdef$  un hexágono centralmente simétrico tal que cada tres de sus vértices pueden ser cubiertos por una banda de ancho 1. Entonces, el hexágono puede ser cubierto por una banda de ancho  $\sqrt{2}$ .

*Demostración.* Si alguna de las longitudes  $|ac|$ ,  $|ce|$  ó  $|ea|$  es menor o igual que  $\sqrt{2}$  entonces la conclusión se sigue fácilmente. Asumamos, sin pérdida de generalidad, que  $|ea| \geq |ac| \geq |ce| > \sqrt{2}$ . Dado que los puntos  $a, c, e$  pueden ser cubiertos por una banda de ancho 1 y  $|c, ae| \leq |e, ac| \leq |a, ce|$ , tenemos que la banda acotada por la línea  $ae$  y su paralela a través de  $c$ , contiene a  $\{a, c, e\}$ . Más aún, dado que  $|ea| \geq |ac| \geq |ce| > \sqrt{2}$ , tenemos que  $\angle ace > 90^\circ$ .

Sin pérdida de generalidad, asumamos que  $\alpha = \angle fce \geq \angle acf > 45^\circ$ . Ahora, si  $|c, fe| > \sqrt{2}$  entonces  $|f, ce| = |fc| \cdot \sin \alpha \geq \sqrt{2} \cdot \sin 45^\circ > 1$ . De manera semejante obtenemos que  $|e, fc| > 1$ . Se sigue que el conjunto  $\{c, e, f\}$  no puede ser cubierto por una banda de ancho 1, lo cual contradice la hipótesis de que cada tres vértices del hexágono pueden ser cubiertos por una banda de ancho 1. Por lo tanto,  $|c, fe| < \sqrt{2}$ ,

la banda acotada por las líneas  $fe$  y  $bc$  tiene ancho  $< \sqrt{2}$  y contiene al hexágono.  $\square$

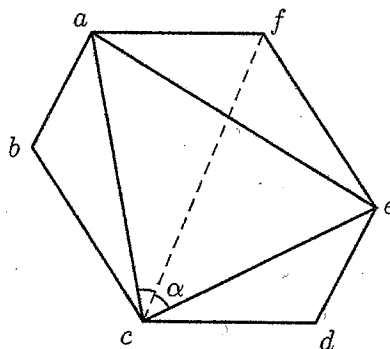


Figura 9

Si ahora consideramos, además, la hipótesis de que la distancia entre cualesquiera dos puntos sea mayor o igual que 1, tenemos gran evidencia de que la siguiente conjetura debe ser cierta:

**Conjetura.** Sea  $\mathcal{X}$  un conjunto de puntos centralmente simétrico, tal que la distancia entre cualesquiera dos puntos es al menos 1 y tal que cada tres de ellos pueden ser cubiertos por una banda de ancho 1. Entonces  $\mathcal{X}$  puede ser cubierto por una banda de ancho  $\sqrt{2}$ .

El siguiente lema ([30]) lo necesitaremos para probar el Teorema 1:

**Lema 1.** Sea  $\mathcal{F}$  una familia finita de discos unitarios en el plano la cual posee la propiedad  $T(3)$ , y sea  $\Delta x_1 x_2 x_3$  un triángulo de centros el cual tiene área máxima. Si  $\Delta x_1 x_2 x_3$  tiene dos alturas de longitud  $\leq 2$ , entonces existe una banda de ancho  $1 + \sqrt{5}$  la cual contiene al conjunto de centros.

Sean  $a, b, c$  puntos en el plano. Denotaremos por  $|ab|$  a la longitud del segmento  $[a, b]$ , además, si  $C$  es una curva convexa cerrada en el plano, denotaremos por  $|C|$  al área de su envolvente convexa. El siguiente lema se debe a E.G. Straus [45]:



**Lema de Straus.** Sea  $C$  una curva convexa cerrada en el plano. Si uno de los lados de un triángulo inscrito,  $T$ , de área máxima está sobre  $C$ , entonces la razón entre las áreas satisface  $\sqrt{5} \cdot |T| \geq |C|$ , donde la igualdad se alcanza si y solo si  $C$  es un pentágono regular afín.

En el caso en que  $C$  es la frontera de un pentágono convexo no es difícil probar que existe un triángulo,  $T$ , de área máxima, cuyos vértices son vértices del pentágono. Se sigue que uno de los lados de  $T$  está sobre  $C$  y entonces podemos aplicar el Lema de Straus.

*Demostración del Lema 1.* Obviamente, existe tal triángulo  $\Delta x_1x_2x_3$ , ya que el conjunto de centros,  $X$ , es finito. Supongamos que  $d(x_2, x_1x_3) \leq 2$  y  $d(x_3, x_1x_2) \leq 2$ . Sea  $\Delta y_1y_2y_3$  el triángulo homotético a  $\Delta x_1x_2x_3$  con centro de homotecia en el centroide de  $\Delta x_1x_2x_3$  y un coeficiente  $-2$ . Tenemos que  $X \subset \Delta y_1y_2y_3$ . En caso contrario, podemos encontrar otro triángulo con vértices en puntos de  $X$  y con área mayor.

Ahora, sea  $p: \mathbb{E}^2 \rightarrow \mathbb{E}^2$  una transformación afín tal que  $a_i = p(x_i)$ , para  $i = 1, 2, 3$ ,  $|a_1a_2| = |a_1a_3|$ ,  $\frac{|a_1a_2|}{|a_2a_3|} = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$  y  $|a_2a_3| = 2(\sin 72^\circ)^{-1}$ . Además, sea  $b_i = p(y_i)$ , para  $i = 1, 2, 3$ , y  $X' = p(X)$ . Claramente,  $\Delta a_1a_2a_3$  es un triángulo de  $X'$  de área máxima.

Sea  $mn$  una línea paralela a  $a_1a_2$  y sea  $oq$  paralela a  $a_1a_3$ , de tal manera que  $d(n, b_1b_2) = d(q, b_1b_3) = 1 + \sqrt{5}$  (ver Figura 10). Tenemos que  $X'$  debe estar contenido en el cuadrilátero  $mnb_1b_2$  o en el cuadrilátero  $qob_3b_1$ . En caso contrario, existirían puntos  $d, e \in X'$  tales que  $d(e, b_1b_3) > 1 + \sqrt{5}$  y  $d(d, b_1b_2) > 1 + \sqrt{5}$ . Esto a su vez implicaría que

$$\frac{|a_1a_2a_3|}{|a_1da_2a_3e|} < \frac{1}{\sqrt{5}},$$

lo cual contradice el Lema de Straus. Entonces, sin pérdida de generalidad, podemos asumir que  $X'$  está contenido en el cuadrilátero  $mnb_1b_2$ . Dado que la banda acotada por las líneas  $mn$  y  $b_1b_2$  contiene  $X'$ , se sigue que la banda acotada por las líneas  $p^{-1}(mn)$  y  $p^{-1}(b_1b_2)$  contiene a  $X$  y esta banda tiene ancho  $\leq 1 + \sqrt{5}$ .  $\square$

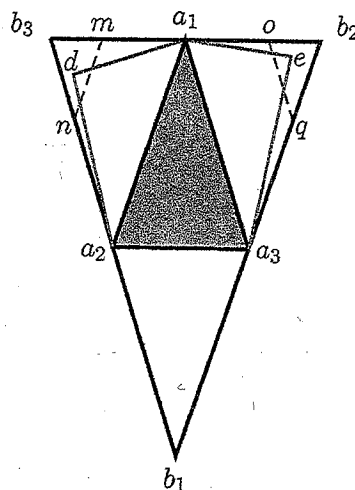


Figura 10

Ahora bien, como se dijo anteriormente, si reemplazamos  $T(3)$  por  $T(4)$  obtenemos el siguiente resultado (Jerónimo [30]), el cual fué conjeturado por J. Eckhoff [18]:

**Teorema 1.** *Sea  $\mathcal{F}$  una familia finita de discos unitarios en el plano. Si  $\mathcal{F}$  tiene la propiedad  $T(4)$  entonces existe una banda de ancho  $1 + \sqrt{5}$  la cual contiene al conjunto de centros.*

*Demostración del Teorema 1.* Sea  $\Delta x_1 x_2 x_3$ , donde  $\{x_1, x_2, x_3\} \subset X$ , un triángulo de área máxima. Por el Lema 1 podemos asumir que  $\Delta x_1 x_2 x_3$  tiene exactamente una altura  $\leq 2$ , es decir, podemos asumir que  $\frac{1+\sqrt{5}}{2} < d(x_2, x_1 x_3) \leq 2$ .

De la misma manera que en la demostración del Lema 1, tenemos que  $X \subset \Delta y_1 y_2 y_3$ , donde  $\Delta y_1 y_2 y_3$  es el triángulo homotético a  $\Delta x_1 x_2 x_3$  con centro de homotecia en el centroide de  $\Delta x_1 x_2 x_3$  y coeficiente de homotecia  $-2$ . Claramente, debe existir un  $x \in X$  con  $d(x, y_1 y_3) > 1 + \sqrt{5}$ , o en caso contrario no hay nada que hacer. Sea entonces  $e \in X$  un punto el cual maximiza esta distancia (ver Figura 11).

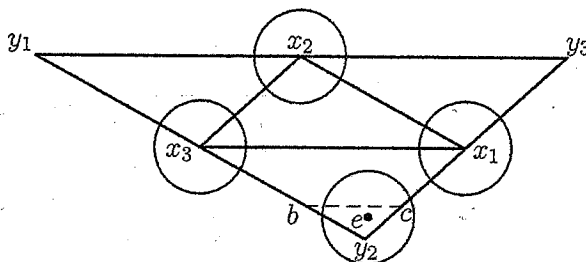


Figura 11

Dado que cada cuatro puntos de  $X$  están contenidos en una banda de ancho 2 y el triángulo  $\Delta x_1 x_2 x_3$  tiene exactamente una altura  $\leq 2$ , tenemos que  $d(x_2, x_3 e) \leq 2$  o  $d(x_2, x_1 e) \leq 2$ . Sin pérdida de generalidad, podemos asumir que  $d(x_2, x_3 e) \leq 2$ .

*Afirmación 1.* Existe una banda que contiene a  $X$ , acotada por líneas paralelas a  $x_3 e$  y cuyo ancho es menor que  $1 + \sqrt{5}$ .

*Demostración de la Afirmación 1.* Sea  $p : \mathbb{E}^2 \rightarrow \mathbb{E}^2$  una transformación afín, con  $x'_i = p(x_i)$ , para  $i = 1, 2, 3$ , tal que  $|x'_1 x'_2| = |x'_1 x'_3|$ ,  $\frac{|x'_1 x'_2|}{|x'_2 x'_3|} = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$  y  $|x'_2 x'_3| = 2(\sin 72^\circ)^{-1}$ . También, sean  $y'_i = p(y_i)$ , para  $i = 1, 2, 3$ ,  $e' = p(e)$  y  $X' = p(X)$ . Consideremos los puntos  $f \in [x'_3, y'_2]$ ,  $g \in [x'_1, y'_2]$ ,  $p \in [x'_2, y'_3]$  y  $q \in [x'_1, y'_3]$  tales que  $d(f, y'_1 y'_3) = d(g, y'_1 y'_3) = d(p, y'_1 y'_2) = d(q, y'_1 y'_2) = 1 + \sqrt{5}$  (ver Figura 10). Sean  $m \in [f, y'_2]$  y  $n \in [g, y'_2]$  puntos tales que  $mn$  es paralelo a  $y'_1 y'_3$  y  $e' \in [m, n]$ . Deducimos que  $X'$  debe estar contenido en el cuadrilátero  $mny'_3 y'_1$ . Ahora, consideremos los puntos  $r \in [x'_2, p]$ ,  $s \in [x'_1, q]$ , tales que  $rs$  es paralelo a  $y'_1 y'_2$  y  $|qs| = |gn|$ . Dado que  $\Delta x'_1 x'_2 x'_3$  es un triángulo de área máxima tenemos, por el Lema de Straus, que todo punto de  $X'$  debe estar por debajo de la línea  $rs$ . Esto implica que  $X'$  debe estar contenido en el pentágono  $y'_1 mnsr$ . Sea  $S_1$  la banda paralela acotada por las líneas  $l_1$  y  $l_2$ , con  $m \in l_1$ ,  $r \in l_2$ , y  $l_1, l_2$  paralelas a  $x'_3 e'$ . Obtenemos que  $X' \subset S_1$  lo cual implica que  $X \subset p^{-1}(S_1)$ . Ahora, basta con demostrar que  $p^{-1}(S_1)$  tiene ancho menor que  $1 + \sqrt{5}$ .

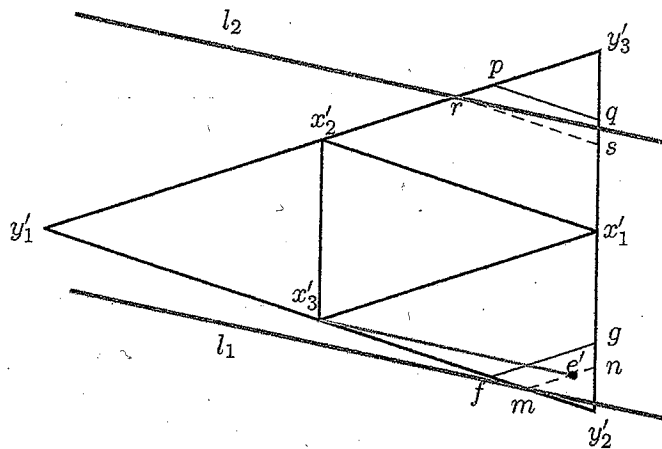


Figura 12

Para esto, sea  $t$  un punto en el segmento  $[p, q]$  de tal manera que  $|pt| = |pr| = |fm|$  (ver Figura 13). Entonces, los segmentos  $[t, m]$ ,  $[p, f]$  y  $[x'_2, x'_3]$  son paralelos. Dado que  $|x'_1 g| > \frac{1}{2}|x'_1 y'_2|$ , se sigue que  $\angle x'_1 x'_3 e' > \frac{1}{2}\angle x'_1 x'_3 y'_2 = \angle prt$ . Esto a su vez implica que  $l_2$  intersecta el interior del segmento  $[t, m]$  en un punto  $u$ . Más aún, sea  $x'_2 v$  paralelo a  $x'_3 e'$  con  $v \in [t, m]$  y sea  $w = [x'_3, e'] \cap [t, m]$ .

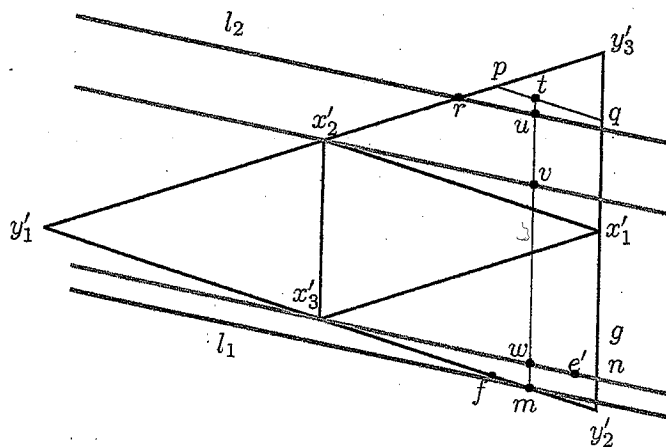


Figura 13

Sea  $S_2$  la banda acotada por las líneas  $x'_2v$  y  $x'_3w$ . Como  $|vw| = |x'_2x'_3| = |x'_1y'_2|$ ,  $|tm| = |qy'_2|$ , y  $\frac{|qy'_2|}{|x'_1y'_2|} = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ , tenemos

$$\frac{|um|}{|vw|} < \frac{|tm|}{|vw|} = \frac{|qy'_2|}{|x'_1y'_2|} = \frac{1+\sqrt{5}}{2},$$

lo que implica que la razón entre el ancho de  $S_1$  y el ancho de  $S_2$  es menor que  $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$ . Sabemos que las transformaciones afines preservan la razón entre las longitudes de segmentos paralelos, obtenemos que la razón entre el ancho de  $p^{-1}(S_1)$  y el ancho de  $p^{-1}(S_2)$  es menor que  $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$ . Como el ancho de  $p^{-1}(S_2)$  es a lo más 2 (dado que  $d(x_2, x_3e) \leq 2$ ), tenemos que el ancho de  $p^{-1}(S_1)$  es menor que  $1+\sqrt{5}$ .  $\square$  (Afirmación 1)

Por lo tanto, concluimos que existe una banda paralela de ancho menor que  $1+\sqrt{5}$  la cual contiene a  $X$ .  $\square$

**Observación 2.** Notemos que en la prueba del Teorema 1 requerimos solamente que los trasladados de  $B$  por los vectores  $x_1, x_2, x_3$  y  $e$  posean una transversal común, i.e., no es necesario que la familia completa  $\mathcal{F}$  posea la propiedad  $T(4)$ . Más aún, dado que el número  $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$  es necesario en el ejemplo pentagonal, hemos probado que  $\lambda(B, 4) = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ .

Si ahora consideramos que la familia posee la propiedad  $T(5)$  es posible obtener una mejor constante,  $2\sqrt{2}$ , aunque ésta podría ser probablemente reducida. Este resultado (Jerónimo [30]) lo obtenemos mediante una sencilla aplicación del siguiente teorema debido a H. Hadwiger y H. Debrunner [26]:

**Teorema de Hadwiger-Debrunner.** *Dada una familia de paralelogramos de aristas paralelas, tales que cada tres de ellos pueden ser intersectados por una línea ascendente, existe una línea ascendente la cual intersecta a todos los paralelogramos de la familia.*

**Teorema 2.** Sea  $\mathcal{F}$  una familia finita de discos unitarios en el plano la cual tiene la propiedad  $T(5)$ . Entonces existe una banda de ancho  $2\sqrt{2}$  la cual contiene al conjunto de centros.

*Demostración del Teorema 2.* Sean  $x_1, x_2$  puntos en el conjunto de centros,  $X$ , los cuales están a distancia máxima y sea  $o$  el punto medio del segmento  $[x_1, x_2]$ . Si  $d(x_1, x_2) \leq 2\sqrt{2}$ , entonces para cada punto  $x \in X$  tenemos que la distancia de  $x$  a la línea perpendicular a  $x_1x_2$  a través del punto  $o$  es  $\leq \sqrt{2}$ . De aquí se sigue la conclusión del teorema. Ahora, asumimos que  $d(x_1, x_2) > 2\sqrt{2}$ . Consideremos que los ejes de coordenadas pasan a través de  $o$  en tal manera que  $x_1x_2$  es la bisectriz de uno de los ángulos formado por los ejes (ver Figura 14). Ahora, a cada disco en  $\mathcal{F}$  le asociamos un cuadrado circunscrito el cual tiene lados paralelos a los ejes de coordenadas; de esta manera, obtenemos la familia  $\mathcal{F}'$ , la cual consiste de trasladados de un cuadrado de lado 2.

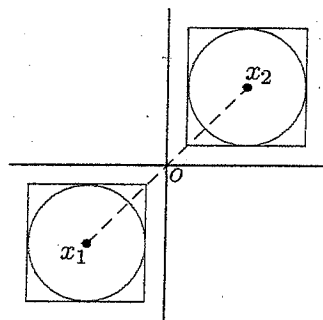


Figura 14

Como podemos ver, los cuadrados centrados en  $x_1$  y  $x_2$  tienen solamente transversales ascendentes. Más aún, dado que  $\mathcal{F}$  tiene la propiedad  $T(5)$ , y por ende también  $\mathcal{F}'$ , tenemos que cada 3 miembros de  $\mathcal{F}'$  poseen una transversal ascendente común. Se sigue, por el Teorema de Hadwiger-Debrunner, que existe una línea  $l$  la cual es una transversal común a cada miembro de  $\mathcal{F}'$ . Obtenemos que todo centro de un cuadrado que pertenece a  $\mathcal{F}'$  está a distancia a lo más  $\sqrt{2}$  de  $l$ . Finalmente, concluimos que existe una banda paralela de ancho  $2\sqrt{2}$  la cual contiene al conjunto de centros.  $\square$

**Observación 3.** Con unas pequeñas modificaciones en la prueba es posible demostrar el siguiente resultado un poco más general que el Teorema 2:

**Proposición 3.** Sea  $\mathcal{F} = \{x_i + r_i B : i \in I\}$  una familia finita de discos en el plano la cual tiene la propiedad  $T(5)$ . Entonces, la familia  $\mathcal{F}' = \{x_i + \sqrt{2}r_i B : i \in I\}$  posee una línea transversal común.

Denotemos por  $Q$  a un cuadrado de lado 2 y consideremos una familia  $\mathcal{F}$  de trasladados de  $Q$ . Si  $\mathcal{F}$  tiene la propiedad  $T(6)$ , entonces existe una línea transversal a cada miembro de esta familia, como fué probado por Santaló. Consideremos ahora que la familia posee la propiedad  $T(3)$ . Entonces obtenemos que la constante 1 en el resultado de Eckhoff es la mejor posible. El siguiente resultado fué previamente probado por Eckhoff [19], sin embargo, incluiremos aquí una prueba para éste:

**Teorema 3.** Sea  $\mathcal{F}$  una familia finita de trasladados de  $Q$  la cual tiene la propiedad  $T(3)$ . Entonces existe una banda de  $Q$ -ancho 1 la cual intersecta a cada miembro de  $\mathcal{F}$ . Más aún, esta constante no puede ser reducida, i.e.,  $\lambda(Q, 3) = 2$ .

*Demostración del Teorema 3.* Por el Teorema de Eckhoff sabemos que existe una banda paralela de  $Q$ -ancho a lo más 2 la cual contiene al conjunto de centros. Sea  $\mathcal{F} = \{P_1, P_2, P_3, P_4\}$  una familia que consiste de cuatro trasladados de  $Q$  con centros en  $x_1, x_2, x_3$  y  $x_4$ , respectivamente. Consideramos los trasladados de tal manera que  $x_1 x_2 x_3 x_4$  es un cuadrado de lado 2 y cuyos lados son paralelos a los lados de  $Q$ . Como podemos ver en la Figura 15,  $\mathcal{F}$  tiene la propiedad  $T(3)$  pero no la propiedad  $T$ , i.e., no existe una transversal común para la familia  $\mathcal{F}$ . Dado que toda banda que contenga al conjunto  $\{x_1, x_2, x_3, x_4\}$  debe contener al cuadrado  $x_1 x_2 x_3 x_4$ , ésta debe tener  $Q$ -ancho al menos 2. Por lo tanto, el número 1 dado en el teorema no puede ser reducido.  $\square$

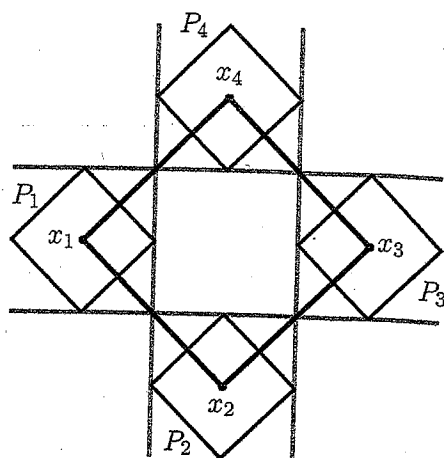


Figura 15

Observación 4. Sea  $K$  un cuerpo convexo en el plano. Lo siguiente fué observado por Eckhoff:

$$\lambda(K, 3) = 2 \text{ si y sólo si } K \text{ es un paralelogramo.}$$



## Capítulo 4

# Conjuntos en Posición Independiente

### 4.1. Introducción y notación

Un resultado clásico en geometría elemental afirma:

*Dados  $d + 1$  puntos en posición general en  $\mathbb{R}^d$ , existe una única esfera la cual pasa a través de ellos.*

Inmediatamente surge la pregunta siguiente:

¿Qué sucede si en lugar de puntos consideramos conjuntos convexos?

Este tipo de cuestionamientos son la principal motivación para el presente capítulo. El primer resultado en esta dirección fué dado por H. Kramer y A.B. Németh [35], quienes mediante una elegante aplicación del Teorema de Brouwer del punto fijo probaron lo siguiente:

**Teorema KN.** *Sea  $\mathcal{F}$  una familia de  $d + 1$  conjuntos compactos convexos en posición general en  $\mathbb{R}^d$ . Entonces, existe una única esfera euclidiana la cual toca a cada conjunto y cuyo interior es disjunto de cada miembro de  $\mathcal{F}$ .*

Una familia  $\mathcal{F}$  de conjuntos en  $\mathbb{R}^d$  se dice *bien separada* (o *en posición general*), si para cada  $d + 1$  miembros  $K_1, \dots, K_{d+1}$  de  $\mathcal{F}$  y cualesquier elección de puntos  $x_i \in K_i$ , para  $i \in [d + 1]$ , el conjunto  $\text{conv}\{x_1, \dots, x_{d+1}\}$  es un simplejo  $n$ -dimensional (no degenerado).

Ahora, denotemos por  $B(x, r)$  a la bola Euclidiana de radio  $r$  y centro  $x$  y por  $S(x, r)$  a la frontera de  $B(x, r)$ . Usando las definiciones introducidas por V. Klee, T. Lewis y B. Von Hohenbalken [4], diremos que la esfera  $S(x, r)$  *soporta* a un conjunto compacto  $K$  si  $S(x, r) \cap K \neq \emptyset$  y ya sea  $K \subset B(x, r)$  ó  $K \cap \text{int} B(x, r) = \emptyset$ . En cada caso, diremos que  $S(x, r)$  es una esfera *circun-soporte* o *in-soporte*, respectivamente. Más aún, sea  $\mathcal{F}$  una familia finita de conjuntos compactos en  $\mathbb{R}^d$ . Cuando  $(P, Q)$  es una partición de  $\mathcal{F}$  diremos que una esfera  $S$  es *P-circunscrita* y *J-inscrita* para  $\mathcal{F}$  si  $S$  es circun-soporte para cada miembro de  $P$  e in-soporte para cada miembro de  $Q$ . En este contexto, V. Klee, T. Lewis y B. Von Hohenbalken demostraron el siguiente resultado:

**Teorema KLH.** *Sea  $\mathcal{F} = \{K_0, K_1, \dots, K_d\}$  una familia de conjuntos compactos convexos en posición general en  $\mathbb{R}^d$ . Entonces, para cada partición  $(I, J)$  del conjunto de índices, existe una única esfera euclidiana *I-inscrita J-circunscrita* para  $\mathcal{F}$ .*

Por otro lado, S.E. Cappell, J.E. Goodman, J. Pach, R. Pollack, M. Sharir y R. Wenger [12] probaron un teorema similar para el caso de hiperplanos soporte, los cuales en cierto sentido pueden ser vistos como esferas de radio infinito. Antes de enunciar el Teorema de Capell et al. daremos unas cuantas definiciones más:

Un hiperplano orientado en  $\mathbb{R}^d$  puede ser especificado por un vector normal unitario y su distancia con signo desde el origen. Entonces, hay una correspondencia 1-1 entre los

hiperplanos orientados de  $\mathbb{R}^d$  y los pares  $(v, t) \in \mathbb{S}^{d-1} \times \mathbb{R}$ . Denotamos por  $H(v = t)$  el hiperplano  $\{x \in \mathbb{R}^d : \langle x, v \rangle = t\}$ . También, denotamos por

$$H(v \leq t) = \{x \in \mathbb{R}^d : \langle x, v \rangle \leq t\}$$

y por

$$H(v \geq t) = \{x \in \mathbb{R}^d : \langle x, v \rangle \geq t\}.$$

Más aún, dado un conjunto  $K \in \mathbb{R}^d$ , denotamos por

$$K(v = t) = \{x \in K : x \in H(v = t) \cap K\},$$

$$K(v \leq t) = \{x \in K : x \in H(v \leq t) \cap K\}$$

y

$$K(v \geq t) = \{x \in K : x \in H(v \geq t) \cap K\}.$$

Dada una familia  $\mathcal{F}$  de conjuntos en  $\mathbb{R}^d$ , diremos que un hiperplano  $H(v = t)$  es *transversal* a  $\mathcal{F}$  si éste intersecta a cada miembro de  $\mathcal{F}$ . De manera similar, diremos que una esfera  $S(x, r)$  es transversal si ésta intersecta a cada miembro de  $\mathcal{F}$ . Ahora, podemos enunciar el Teorema de Cappell et al.:

**Teorema C.** *Sea  $\mathcal{F} = \{K_1, \dots, K_d\}$  una familia bien separada de conjuntos compactos convexos en  $\mathbb{R}^d$  con una partición  $(I, J)$  del conjunto de índices. Entonces existe un único hiperplano orientado transversal a  $\mathcal{F}$ ,  $H(v = t)$ , tal que  $K_i(v \leq t) = K_i$  para cada  $i \in I$  y  $K_j(v \geq t) = K_j$  para cada  $j \in J$ .*

El propósito principal de este capítulo será generalizar estos resultados en diferentes maneras ([3]):

**Teorema 1.** *Sea  $\mathcal{F} = \{K_1, \dots, K_d\}$  una familia de cuerpos convexos bien separados en  $\mathbb{R}^d$ , y sean  $\alpha_1, \dots, \alpha_d$  números dados tales que  $0 \leq \alpha_i \leq 1$ , para cada  $i \in [d]$ . Entonces existe un único hiperplano orientado transversal a  $\mathcal{F}$ ,  $H(v = t)$ , para el cual se cumple que*

$$\text{vol}(K_i(v \leq t)) = \alpha_i \cdot \text{vol}(K_i)$$

para cada  $i \in [d]$ .

Aquí es importante mencionar que la existencia de tal hiperplano, cuando todos los  $\alpha_i = 1/2$ , es garantizada por el Teorema de Borsuk-Ulam, incluso sin la condición de convexidad ni la condición de que  $\mathcal{F}$  sea bien separada. Para el caso de  $\alpha_i$  general, sin embargo, es necesaria cierta condición extra, como lo muestran los siguientes dos ejemplos:

Si todos los  $K_i$  son iguales, entonces cada hiperplano orientado corta lo mismo de cada  $K_i$ , entonces  $\alpha_1 = \dots = \alpha_d$  debe cumplirse. El segundo ejemplo consiste de  $d$  bolas concéntricas con diferentes radios. Si el radio de la primera bola es muy grande, comparado con el radio de las otras, y  $\alpha_1$  es muy pequeño, entonces un hiperplano que corte una fracción  $\alpha_1$  de la primera bola no intersectará a las demás bolas. Entonces no existe hiperplano transversal que corte una fracción  $\alpha_1$  del primer conjunto.

## 4.2. Demostraciones y Corolarios

### 4.2.1. Hiperplanos transversales

Diremos que un conjunto en  $\mathbb{R}^d$  es *dimensionalmente-completo* si para cada punto  $x$  en el conjunto, hay una vecindad de  $x$  la cual intersecta el interior del conjunto. Sea  $\mu$  una medida finita de Borel la cual es absolutamente continua con respecto a la medida de Lebesgue, sea  $K$  un conjunto compacto, conexo, dimensionalmente-completo en  $\mathbb{R}^d$  y sea  $\alpha \in (0, 1)$  un número fijo. Tenemos entonces el siguiente:

**Lema 1.** Sea

$$f : \mathbb{S}^{d-1} \longrightarrow \mathbb{R}$$

la función tal que  $\mu(K(v \leq f(v))) = \alpha \cdot \mu(K)$ . Entonces  $f$  es una función continua.

*Demostración.* Sea  $v_0 \in \mathbb{S}^{d-1}$  un punto arbitrario y sea  $K' = \text{conv } K$ . Para probar la continuidad en  $v_0$ , probaremos primero que  $K'(v = f(v)) \cap K'(v_0 = f(v_0)) \neq \emptyset$ , siempre que  $v$  esté suficientemente cerca a  $v_0$ .

Obviamente,  $K'(v_0 \geq f(v_0))$  es un cuerpo convexo. Entonces, para toda vecindad de  $v_0$ , suficientemente pequeña, y para cada  $v$  en tal vecindad, el semiespacio soporte de  $K'$  con normal exterior  $v$  es también un semiespacio soporte de  $K'(v_0 \geq f(v_0))$ .

Denotemos este semiespacio por  $H(v \leq t_v)$  y sea  $H(v \geq s_v)$  el otro semiespacio soporte de  $K'(v_0 \geq f(v_0))$ . Dado que

$$K(v \leq t_v) \supset K(v_0 \leq f(v_0)) \supset K(v \leq s_v)$$

tenemos que

$$\mu(K) = \mu(K(v \leq t_v)) > \mu(K(v_0 \leq f(v_0))) = \alpha \cdot \mu(K)$$

y

$$\mu(K(v \leq s_v)) \leq \mu(K(v_0 \leq f(v_0))),$$

de aquí obtenemos  $K'(v = f(v)) \cap K'(v_0 = f(v_0)) \neq \emptyset$ .

Ahora, demostraremos que  $f(v)$  se aproxima a  $f(v_0)$  cuando  $v$  se aproxima a  $v_0$ . Sea  $p$  la proyección de  $o$  sobre el plano  $H(v_0 = f(v_0))$  y sea  $r$  la distancia máxima entre  $p$  y puntos de  $K(v_0 = f(v_0))$ , la cual es también la distancia máxima entre  $p$  y los puntos de  $K'(v_0 = f(v_0))$ . Tenemos que la bola  $(d-1)$ -dimensional,  $\mathcal{B}$ , con centro  $p$  y radio  $r$  contiene a  $K'(v_0 = f(v_0))$ . Sea  $R$  la distancia desde la frontera de  $\mathcal{B}$  al origen y sean  $\mathcal{P}$  y  $\mathcal{Q}$  los hiperplanos soporte de  $\mathcal{B}$  los cuales son ortogonales a  $v$ . Claramente,  $K'(v_0 \geq f(v_0))$  está contenido en la banda paralela acotada por los hiperplanos  $\mathcal{P}$  y  $\mathcal{Q}$ . Sean  $a, b$  y  $c$  las proyecciones de  $o$  sobre los hiperplanos  $\mathcal{P}$ ,  $\mathcal{Q}$  y  $H(v = f(v))$ , respectivamente. Consideremos el punto  $e = \mathcal{P} \cap \mathcal{B}$ . Dado que los puntos  $o, p, a$  y  $e$  están contenidos en un plano 2-dimensional y se cumple la igualdad de los ángulos  $\angle epO = \angle eaO = \frac{\pi}{2}$ , tenemos que los puntos  $o, p, a$  y  $e$  están sobre el mismo

círculo 2-dimensional (i.e., los puntos  $o, p, a$  y  $e$  son concíclicos). Usando argumentos de geometría elemental y la desigualdad del triángulo en  $\Delta opc$ , obtenemos que

$$R \cdot \text{Sen } \alpha = \|p - b\| = \|p - a\| > \|p - c\| > \left| \|c\| - \|p\| \right| = |f(v) - f(v_0)|,$$

donde  $\alpha$  es el ángulo entre los vectores  $v_0$  y  $v$ . Claramente,  $R \cdot \text{Sen } \alpha$  tiende a 0 cuando  $v$  tiende a  $v_0$ . Por lo tanto,  $f$  es continua.  $\square$

Sean  $\mu_1, \dots, \mu_d$  medidas finitas de Borel en  $\mathbb{R}^d$ , las cuales son absolutamente continuas con respecto a la medida de Lebesgue. En lugar de probar el Teorema 1, probaremos el siguiente teorema ([3]) y obtendremos el Teorema 1 como un corolario de éste:

**Teorema 2.** *Sea  $\mathcal{F} = \{K_1, \dots, K_d\}$  una familia de conjuntos compactos, conexos, dimensionalmente-completos bien separados en  $\mathbb{R}^d$ , y sean  $\alpha_1, \dots, \alpha_d$  números dados tales que  $0 \leq \alpha_i \leq 1$ , para cada  $i \in [d]$ . Entonces existe un único hiperplano orientado transversal a  $\mathcal{F}$ ,  $H(v = t)$ , tal que  $\mu_i(K_i(v \leq t)) = \alpha_i \cdot \mu_i(K_i)$ , para cada  $i \in [d]$ .*

*Demostración del Teorema 2.* La prueba de este teorema es por medio de una aplicación del Teorema de Brouwer del punto fijo. Definiremos una aplicación continua de una bola topológica en sí misma, de tal manera que un punto fijo de ésta, dé lugar a un hiperplano con las propiedades deseadas. Sea  $K'_i = \text{conv } K_i$  la envolvente convexa de  $K_i$ , para toda  $i \in [d]$ . Ahora, a cada punto  $x = (x_1, \dots, x_d) \in \mathcal{K} = K'_1 \times \dots \times K'_d$  le asignamos el hiperplano  $\text{aff}\{x_1, \dots, x_d\}$ . Dado que los puntos  $x_1, \dots, x_d$  están en posición general, tenemos que  $\text{aff}\{x_1, \dots, x_d\}$  está bien definida para cada  $x$ .

Sea  $f : \mathcal{K} \rightarrow \mathbb{S}^{d-1}$  la función tal que

$$x = (x_1, \dots, x_d) \mapsto v,$$

donde  $H(v = t) = \text{aff}\{x_1, \dots, x_d\}$ . Claramente, esta función es continua.

Primero probaremos el caso cuando  $\alpha_i \in (0, 1)$ , para cada  $i \in [d]$ , y después probaremos el caso restante construyendo una sucesión adecuada de hiperplanos.

Sea  $g_i : \mathbb{S}^{d-1} \rightarrow \mathbb{R}$  la función tal que para cada  $v \in \mathbb{S}^{d-1}$ ,  $g_i(v)$  es el número real para el cual  $\mu_i(K_i(v \leq g_i(v))) = \alpha \cdot \mu_i(K_i)$ , para toda  $i \in [d]$ . Por el Lema 1 sabemos que cada  $g_i$  es una función continua. Ahora, sea  $\bar{g}_i = H(v = g_i(v)) \cap \text{conv } K_i$  y sea  $g : \mathbb{S}^{d-1} \rightarrow \mathcal{K}$  la función que manda  $v \rightarrow (s(\bar{g}_1), \dots, s(\bar{g}_d))$ , donde  $s(\bar{g}_i)$  es el punto de Steiner de la sección  $(d-1)$ -dimensional,  $\bar{g}_i$ . Es un hecho bien conocido que una familia de secciones  $K(v = t)$  depende continuamente (de acuerdo a la métrica de Hausdorff) de la correspondiente familia de hiperplanos,  $\{H(v = t)\}$ , siempre y cuando cada sección sea  $(d-1)$ -dimensional. Claramente, éste es el caso, ya que  $\alpha_i \in (0, 1)$ . También es un hecho bien conocido que la función que asigna a un conjunto compacto convexo su punto de Steiner, es continua. De aquí obtenemos que  $g$  es una función continua.

Se sigue que

$$\mathcal{I} := g \circ f : \mathcal{K} \rightarrow \mathcal{K}$$

es una función continua, y dado que  $\mathcal{K}$  es un conjunto compacto convexo en  $\mathbb{R}^d \times \dots \times \mathbb{R}^d$ , tenemos por el Teorema de Brouwer del punto fijo que existe un punto  $x \in \mathcal{K}$  tal que  $\mathcal{I}(x) = x$ . Consideremos  $x = (x_1, \dots, x_d)$ , entonces el hiperplano  $H(v = t) = \text{aff}\{x_1, \dots, x_d\}$  posee la propiedad requerida.

Supongamos que existe otro hiperplano transversal  $H(u = t')$  con la propiedad requerida. Claramente,  $u$  no puede ser igual a  $v$ , ya que los hiperplanos  $H(u = t')$  y  $H(v = t)$  no pueden ser paralelos. Definimos  $\Gamma = H(v \leq t) \cap H(u \leq t')$  y  $\Pi = H(v \geq t) \cap H(u \geq t')$ . Consideremos la partición  $(I, J)$  del conjunto de índices  $[d]$  de tal manera que  $\Gamma \cap \text{int } K'_i \neq \emptyset$  para cada  $i \in I$  y  $\Gamma \cap \text{int } K'_j = \emptyset$  para cada  $j \in J$ . Definimos  $K''_i = \Gamma \cap K'_i$  para cada  $i \in I$  y  $K''_j = \Pi \cap K'_j$  para cada  $j \in J$ . Sea  $\mathcal{F}$  la familia que consiste de todos los cuerpos convexos  $K''_i$  y  $K''_j$ . Dada la partición  $(I, J)$ , existen dos hiperplanos dirigidos con la propiedad del Teorema C para la familia  $\mathcal{F}$ . Esto es una contradicción, por lo tanto  $H(u, t') = H(v, t)$ .

Para el resto de la demostración consideraremos el vector  $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_d) \in \mathbb{R}^d$  y la

sucesión  $\{\alpha^n\} \subset \mathbb{R}^d$ ,  $\alpha^n = (\alpha_1^n, \dots, \alpha_d^n)$  (definida para cada  $n \geq 2$ ), de tal manera que para cada entrada  $\alpha_i = 0$  consideramos  $\alpha_i^n = \frac{1}{n}$ , para entrada  $\alpha_j = 1$  consideramos  $\alpha_j^n = 1 - \frac{1}{n}$ , y para cada entrada  $\alpha_k \notin \{0, 1\}$  consideramos  $\alpha_k^n = \alpha_k$ . También, para cada  $n \geq 2$  consideramos el punto  $(v_n, t_n) \in \mathbb{S}^{d-1} \times \mathbb{R}^+$  tal que el hiperplano  $H(v_n, t_n)$  es transversal a  $\mathcal{F}$  y  $\mu_i(K_i(v_n \leq t_n)) = \alpha_i^n \cdot \mu_i(K_i)$ , para toda  $i \in [d]$ . Dado que el conjunto  $\mathcal{K}$  es compacto, tenemos que existe un hiperplano el cual intersecta a cada uno de los conjuntos  $\text{conv } K_i$  y el cual está a distancia mínima ( $t_{\min}$ ) del origen. De la misma manera, sabemos que existe un hiperplano transversal a distancia máxima ( $t_{\max}$ ) del origen. Dado que el conjunto  $\mathbb{S}^{d-1} \times [t_{\min}, t_{\max}]$  es compacto, y la sucesión  $\{(v_n, t_n)\} \subset \mathbb{S}^{d-1} \times [t_{\min}, t_{\max}]$ , tenemos que existe una subsucesión convergente  $\{(v_{n_k}, t_{n_k})\}$  la cual converge a un punto  $(v, t) \in \mathbb{S}^{d-1} \times [t_{\min}, t_{\max}]$ . Claramente, el hiperplano  $H(v = t)$  es tal que

$$\mu_i(K_i(v \leq t)) = \alpha_i \cdot \mu_i(K_i),$$

para toda  $i \in [d]$ . La unicidad, en este caso, puede ser probada siguiendo los mismos argumentos que el caso previo.  $\square$

*Demostración del Teorema 1.* Este es un caso particular del Teorema 2 cuando consideramos  $\mu_i(K_i) = \text{vol}(K_i)$  y cada  $K_i$  es un cuerpo convexo.  $\square$

**Observación 1.** También obtenemos que el Teorema C es un corolario del Teorema 2 cuando cada  $\mu_i$  es la función característica, cada  $K_i$  es un conjunto compacto convexo y para la partición dada  $(I, J)$ , consideramos  $\alpha_i = 1$  para cada  $i \in I$ , y  $\alpha_j = 0$  para cada  $j \in J$ .

#### 4.2.2. Esferas transversales

Para probar afirmaciones sobre esferas transversales, transformaremos el problema a un problema de hiperplanos transversales a cuerpos convexos sobre el paraboloido

$$\mathcal{P} = \{x \in \mathbb{R}^{d+1} : x = (x_1, x_2, \dots, x_d, x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_d^2)\},$$



y después aplicaremos el Teorema 1.

Sea  $p : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{P}$  la transformación tal que

$$p(x_1, x_2, \dots, x_d) = (x_1, x_2, \dots, x_d, x_1^2 + \dots + x_d^2).$$

La imagen levantada de un conjunto  $K$  la denotaremos por  $p(K)$ , y denotaremos por  $\pi : \mathbb{P} \rightarrow \mathbb{R}^d$ , a la proyección ortogonal tal que

$$\pi(x_1, x_2, \dots, x_d, x_{d+1}) = (x_1, x_2, \dots, x_d).$$

La transformación  $p$  es bien conocida en la literatura (ver por ejemplo [6]), y define una relación biyectiva entre hiperplanos *no verticales* de  $\mathbb{R}^{d+1}$  y esferas  $(d-1)$ -dimensionales de  $\mathbb{R}^d$ . No es difícil ver que  $\pi(H \cap \mathbb{P})$  es una esfera  $(d-1)$ -dimensional siempre que  $H$  es un hiperplano. Por otro lado, si  $S$  es una esfera  $(d-1)$ -dimensional en  $\mathbb{R}^d$ ,  $p(S)$  está contenido en un hiperplano no vertical de  $\mathbb{R}^{d+1}$  el cual intersecta al paraboloide, esto quiere decir que  $p(S)$  es una sección de  $\mathbb{P}$ . Estos dos hechos nos dan la aplicación biyectiva.

Como primer aplicación de este levantamiento, daremos una prueba más simple (y substancialmente más corta) de una versión un poco más general ([2]) del Teorema KLH (es decir, omitiremos la hipótesis de convexidad):

**Corolario 1.** *Sea  $\mathcal{F} = \{K_1, K_2, \dots, K_{d+1}\}$  una familia de conjuntos compactos en posición general en  $\mathbb{R}^d$ . Entonces, para cada partición  $(I, J)$  del conjunto de índices, existe una única esfera euclídiana  $I$ -inscrita  $J$ -circunscrita para  $\mathcal{F}$ .*

*Demostración.* Consideremos los conjuntos levantados  $p(K_i)$ , para cada  $i \in [d+1]$ , y denotemos por  $K'_i = \text{conv } p(K_i)$  a las envolventes convexas de  $p(K_i)$ , para cada  $i \in [d+1]$ . No es difícil ver que la familia  $\mathcal{F}' = \{K'_1, \dots, K'_{d+1}\}$  es separada en  $\mathbb{R}^{d+1}$ . Aplicamos ahora el Teorema C a esta familia, de acuerdo a la partición  $(I, J)$ , y obtenemos que existe un único hiperplano soporte orientado,  $H$ , para la familia  $\mathcal{F}'$  (en  $\mathbb{R}^{d+1}$ ). Dado que un hiperplano intersecta a un conjunto compacto si y sólo si

intersecta a su envolvente convexa, tenemos que  $H$  soporta a cada uno de los conjuntos  $p(K_1), \dots, p(K_{d+1})$ . Se sigue que la esfera  $\pi(H)$  ( $(d-1)$ -dimensional) soporta a cada uno de los conjuntos  $K_1, \dots, K_{d+1}$  de acuerdo a la partición  $(I, J)$ . Por lo tanto,  $\pi(H)$  es la única esfera  $I$ -inscrita  $J$ -circunscrita para  $\mathcal{F}$ .  $\square$

Finalmente, demostraremos el siguiente corolario [3]:

**Corolario 2.** Sea  $\mathcal{F} = \{K_1, \dots, K_{d+1}\}$  una familia de conjuntos compactos, conexos, en posición general en  $\mathbb{R}^d$ , y sea  $(I, J)$  una partición del conjunto de índices, con  $I \neq \emptyset$ . Entonces, existe un número positivo  $\epsilon_{max}$ , tal que para todo  $\epsilon \in (0, \epsilon_{max})$  existe una única esfera euclidiana  $S_\epsilon$  la cual cumple

$$K_i \cap \text{conv } S_\epsilon = \emptyset, \text{ para cada } i \in I,$$

$$K_j \subset \text{conv } S_\epsilon, \text{ para cada } j \in J$$

y

$$d(K_1, S_\epsilon) = d(K_2, S_\epsilon) = \dots = d(K_{d+1}, S_\epsilon) = \epsilon.$$

*Demostración.* Dado que los miembros de la familia  $\mathcal{F}$  están en posición independiente, para todo  $\epsilon$  suficientemente pequeño, los conjuntos  $U_\epsilon(K_i) = K_i + \epsilon B(0, 1)$ , para  $i \in [d+1]$ , permanecen en posición general. Por compacidad, existe un número positivo  $\epsilon_{max}$ , tal que para cada número positivo  $\epsilon < \epsilon_{max}$ , los conjuntos  $U_\epsilon(K_1), \dots, U_\epsilon(K_{d+1})$  están en posición general pero para  $\epsilon > \epsilon_{max}$  no lo están. Entonces, consideremos un  $\epsilon \in (0, \epsilon_{max})$ . Levantemos los conjuntos  $U_\epsilon(K_1), \dots, U_\epsilon(K_{d+1})$  sobre el paraboloides descrito antes y apliquemos el Teorema C. De esta manera obtenemos un único plano  $d$ -dimensional,  $H$ , tangente a los conjuntos levantados y de acuerdo a la partición  $(I, J)$ . Se sigue que la esfera  $\pi(H)$  es una esfera  $I$ -inscrita  $J$ -circunscrita para los conjuntos  $U_\epsilon(K_1), \dots, U_\epsilon(K_{d+1})$ . Claramente, cada  $K_i$  está a distancia  $\epsilon$  de la esfera  $\pi(H)$ .  $\square$

**Observación 2.** Utilizando el Teorema de Punto Fijo de Fan-Glicksberg-Kakutani,

M. Balaj [1] probó un resultado análogo considerando un hiperplano en lugar de una esfera:

**Teorema de Balaj.** *Sea  $\{K_1, \dots, K_{d+1}\}$  una familia de conjuntos compactos, convexos, en posición general en  $\mathbb{R}^d$ . Entonces para cada subconjunto propio  $I$  de  $\{1, 2, \dots, d+1\}$  existe exactamente un hiperplano  $H$  tal que*

*$H$  separa estrictamente los conjuntos  $\cup \{K_i : i \in I\}$  y  $\cup \{K_j : j \in I^c\}$ ,*

*y*

$$d(K_1, H) = d(K_2, H) = \dots = d(K_{d+1}, H).$$

## Conclusiones y comentarios finales

Recientemente, Karasev ha demostrado una conjetura de Grünbaum (1957), la cual enunciamos en el siguiente teorema:

**Teorema K.** *Sea  $K \subset \mathbb{R}^2$  un cuerpo convexo y sea  $\mathcal{P}$  una familia de trasladados de  $K$ . Si cualesquiera dos miembros de  $\mathcal{P}$  poseen un punto en común, entonces existe un conjunto de tres puntos  $\{x_1, x_2, x_3\} \subset \mathbb{R}^2$ , de tal manera que para cada  $M \in \mathcal{P}$ , se cumple que  $M \cap \{x_1, x_2, x_3\} \neq \emptyset$ .*

La versión coloreada de este teorema es válida para el caso en que  $K$  es centralmente simétrico, esto queda de manifiesto si aplicamos el Lema 1 y el Lema 5 del Capítulo 1. Sin embargo, es posible que la hipótesis de simetría sobre  $K$  no sea necesaria. Nos atrevemos entonces a enunciar la siguiente conjetura:

**Conjetura 1.** *Sea  $K \subset \mathbb{R}^2$  un cuerpo convexo y sean  $\mathcal{P}_1, \mathcal{P}_2$  y  $\mathcal{P}_3$ , tres familias de trasladados de  $K$ . Si cualesquiera dos miembros, que pertenecen a distinta familia, poseen un punto en común, entonces existe un conjunto de tres puntos  $\{x_1, x_2, x_3\} \subset \mathbb{R}^2$ , y un índice  $i \in [3]$ , de tal manera que para cada  $M \in \mathcal{P}_i$  se cumple que  $M \cap \{x_1, x_2, x_3\} \neq \emptyset$ .*

En cuanto a la versión coloreada del Teorema de Steinitz, es muy probable que la siguiente versión cuantitativa sea válida:

**Conjetura 2.** Sean  $M_1, \dots, M_{2d}$  conjuntos de puntos en  $\mathbb{R}^d$  tales que para cada  $i \in [2d]$ , se cumple que  $\text{conv } M_i$  contiene a la bola unitaria centrada en el origen. Entonces, existen puntos  $x_i \in M_i$ , para  $i = 1, \dots, 2d$ , y existe un número  $\alpha$  tal que  $\text{conv } \{x_1, \dots, x_{2d}\}$  contiene una bola de radio  $\alpha$  centrada en el origen.

En cuanto al trabajo desarrollado en el Capítulo 2, es importante mencionar que utilizando una versión del Teorema de Soltan para conjuntos convexos, cerrados, con interior no vacío, los cuales no contienen líneas, se pueden dar caracterizaciones de algunos conjuntos distintos de la bola euclidiana. Por ejemplo, cilindros y bandas paralelas. Además, es posible sustituir la hipótesis de simetría central, en los Corolarios 8 y 9, por la hipótesis de simetría axial y obtener resultados similares. Es decir, las conclusiones serán que el cuerpo en cuestión es una bola euclidiana.

En cuanto al trabajo desarrollado en el Capítulo 3 tenemos los siguientes comentarios:

Tenemos gran evidencia de que la siguiente conjetura debe ser cierta:

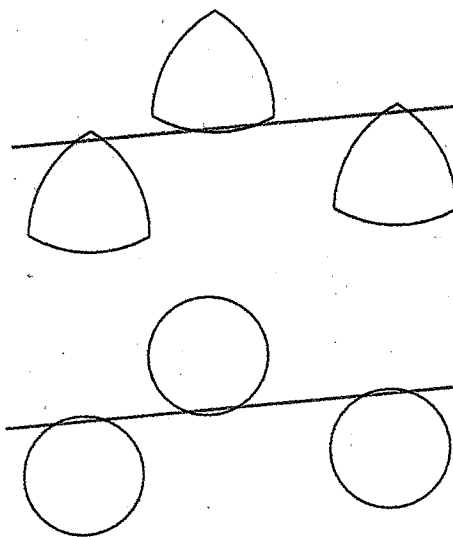
**Conjetura 3.** Sea  $\mathcal{X}$  un conjunto de puntos centralmente simétrico, tal que la distancia entre cualesquiera dos puntos es al menos 1 y tal que cada tres de ellos pueden ser cubiertos por una banda de ancho 1. Entonces  $\mathcal{X}$  puede ser cubierto por una banda de ancho  $\sqrt{2}$ .

Recientemente, hemos demostrado que si agregamos la hipótesis de que los trasladados del círculo unitario sean disjuntos por pares, entonces la conjetura de Eckhoff-Dolnikov es válida. Como corolario de este resultado, se obtiene la cota exacta  $(\frac{1+\sqrt{5}}{2})$  para el caso de familias con 5 discos. Sin embargo, para el caso general, la conjetura permanece abierta para el caso en que el triángulo de área máxima tiene solamente una altura  $\leq 2$ . Es posible que las técnicas usadas en este capítulo sean útiles para completar la demostración de esta conjetura.

Por otro lado, si consideramos a  $\mathcal{F}$  una familia finita de trasladados de una figura de ancho constante. Encontramos que el Lema 1, el Teorema 1 y el Teorema 2 se

mantienen válidos. Esto se vé de la siguiente reducción notada por H. Tverberg [8]:

Sea  $K$  un conjunto convexo y sea  $K'$  el conjunto centralmente simétrico  $K' = \frac{1}{2}(K + (-K))$ . Sea  $\mathcal{F} = \{x_i + K : i \in I\}$  una familia de trasladados de  $K$  y sea  $\mathcal{F}' = \{x_i + K' : i \in I\}$  la familia asociada que consiste de trasladados de  $K'$ . Entonces, se puede ver fácilmente que  $\mathcal{F}$  y  $\mathcal{F}'$  comparten las mismas propiedades con respecto a intersección, transversales geométricas y permutaciones geométricas (GP's). Sabemos que en el caso en que  $K$  es una figura de ancho constante,  $K'$  es un disco euclidiano, y de aquí se sigue la afirmación.



Claramente, el número  $2\sqrt{2}$  en el Teorema 2 podría ser reducido usando mejores argumentos.

Sobre el trabajo desarrollado en el Capítulo 4, tenemos el siguiente comentario:

Utilizando el Teorema 2, es posible demostrar la siguiente generalización del teorema de Klee et al.:

Sea  $\mathcal{F} = \{K_1, \dots, K_{d+1}\}$  una familia de cuerpos convexos bien separados en  $\mathbb{R}^d$ , y sean  $\alpha_1, \dots, \alpha_{d+1}$  números dados tales que  $0 \leq \alpha_i \leq 1$ , para cada  $i \in [d+1]$ . Entonces existe

una única esfera Euclidiana transversal  $S(x, r)$  tal que  $\text{vol}(B(x, r) \cap K_i) = \alpha_i \cdot \text{vol}(K_i)$  para cada  $i \in [d + 1]$ .

Y finalmente, es posible que utilizando las técnicas del Capítulo 4 se pueda demostrar la siguiente conjetura de Kramer y Németh:

**Conjetura KM.** Sea  $\mathcal{F} = \{K_1, \dots, K_n\}$  una familia de cuerpos convexos bien separados en  $\mathbb{R}^d$ ,  $n \geq d + 2$ . Si para cada  $d + 1$  miembros de  $\mathcal{F}$  existe una esfera de radio  $R$  la cual contiene y soporta a cada uno de ellos, entonces existe una esfera de radio  $R$  la cual contiene y soporta a cada miembro de  $\mathcal{F}$ .

## Bibliografía

- [1] M. Balaj (1996). *(n + 1)-Families of sets in general position*, Beiträge Algebra Geom. 37, 67 – 74.
- [2] I. Bárány (1982). *A generalization of Carathéodory's theorem*, Discrete Mathematics 40, 141 – 152.
- [3] I. Bárány, A. Hubard, and J. Jerónimo (2006). *Slicing convex sets and measures by a hyperplane*, to appear in Discrete Comput. Geom.
- [4] T. Bisztriczky (1990). *On separated families of convex bodies*, Arch. Math. 54, 193 – 199.
- [5] W. Blaschke and G. Hesse (1917). *Lehrsätze über konvexe Körper*, Jber. Deutsche Math.-Verein. 26, 215 – 220.
- [6] H. F. Bohnenblust (1938). *Convex regions and projections in Minkowski spaces*, Ann. of Math. (2) 39, 301 – 308.
- [7] V. Boltyanski (1976). *Helly's theorem for H-convex sets*, Soviet. Mat. Dokl. 17, 78 – 81.
- [8] V. Boltyanski and V.L. Dolnikov (2005). *Jung's theorem and H-convexity*, Dokl. Akad. Nauk 401, 587 – 591.



- [9] V. Boltyanski and J. Jerónimo (2005). *Centrally symmetric convex sets*, to appear in *J. Convex Anal.*
- [10] K. Borsuk (1932). *Über die zerlegung einer Euclidischen  $n$ -dimensionalen volkugel in  $n$  mengen*, Verh. Internat. Math. Kongr., Zurich, 2, 192.
- [11] K. Borsuk (1933). *Drie sätze über die  $n$ -dimensionale euklidische sphäre*, Fund. Math. 20, 177 – 190.
- [12] S.E. Cappell, J.E. Goodman, J. Pach, R. Pollack, M. Sharir, and R. Wenger (1994). *Common tangents and common transversals*, Adv. in Math. 106, 198 – 215.
- [13] C. Carathéodory (1907). *Über den variabilitätsbereich der koeffizienten von potenzreihen, die gegebene wert nicht annehmen*, Math. Ann. 64, 95 – 115.
- [14] C. Carathéodory (1911). *Über den variabilitätsbereich der Fourier'schen konstanten von positiven harmonischen funktionen*, Rend. Mat. Palermo 32, 193 – 217.
- [15] G.D. Chakerian and M.S. Klamkin (2004). *A three-point characterization of central symmetry*, Amer. Math. Mont. 111, 903 – 905.
- [16] L. Danzer, B. Grünbaum, V. Klee (1963). *Helly's theorem and its relatives*, AMS, Proc. Sympos. Pure Math. 7, 101 – 180.
- [17] L. Dines, and N. McCoy (1933). *On linear inequalities*, Trans. Roy. Soc. Canada, sec. III, 27, 37 – 70.
- [18] J. Eckhoff (1969). *Transversalenprobleme vom Gallai'schen Typ*, Dissertation, Göttingen.
- [19] J. Eckhoff (1973). *Transversalenprobleme in der Ebene*, Arch. Math. 24, 191–202.
- [20] H. Groemer (1995). *On a characterization of circles and spheres*, Beiträge Algebra Geom. 36, 211 – 218.

- [21] H. Groemer (1997). *On the determination of convex sets by translates of their projections*, *Geom. Dedicata* 66, 265 – 279.
- [22] M. L. Gromov (1969). *Simplexes inscribed on a hypersurface*, *Mat. Zametki* 5, 81 – 89. (Translation in *Math. Notes* 5, 52 – 56.
- [23] B. Grünbaum (1957). *Borsuk's partition conjecture in Minkowski planes*, *Bull. Res. Counc. of Israel* 7, 25 – 30.
- [24] B. Grünbaum (1959). *On intersection of similar sets*, *Portugaliae Math.* 18, 155–164.
- [25] B. Grünbaum (1964). *Common secants for families of polyhedra*, *Arch. Math.* 15, 76 – 80.
- [26] H. Hadwiger and H. Debrunner (1955). *Ausgewählte einzelprobleme der kombinatorischen geometrie in der ebene*, *L'enseignement mathématique* 1, 56 – 89.
- [27] M. Henk (1992). *A generalization of Jung's theorem*, *Geom. Dedicata* 42, 235 – 240.
- [28] A. Heppes (2005). *New upper bound on the transversal width of  $T(3)$ -families of discs*, *Discrete Comput. Geom.* 34, 463 – 474.
- [29] J. Jerónimo (2006). *On some colored theorems*, submitted for publication.
- [30] J. Jerónimo (2006). *Line transversals to translates of unit discs*, to appear in *Discrete. Comput. Geom.*
- [31] J. Jerónimo and E. Makai (2006). *Pairs of convex bodies with centrally symmetric convex hull*, in preparation.
- [32] H.W.E. Jung (1901). *Über die kleinste kugel, die eine räumliche figur einschliesst*, *J. Reine Angew. Math.* 123, 241 – 257.

- [33] G. K. Kalisch and E. G. Straus (1958). *On the determination of points in a Banach space by their distances from points of a given set*, Acad. Brasil. Ci. 29, 501 – 519.
- [34] V. Klee, T. Lewis, and B. Von Hohenbalken (1997). *Appollonius revisited: Supporting spheres for sundered systems*, Discrete Comput. Geom. 18, 385 – 395.
- [35] H. Kramer, and A.B. Németh (1973). *Supporting spheres for families of independent convex sets*, Arch. Math. 24, 91 – 96.
- [36] E. Lutwak (1998). *Containment and circumscribing simplices*, Discrete Comput. Geom. 19, 229 – 235.
- [37] H. Martini, K. J. Swanepoel and G. Weiß (2001). *The Geometry of Minkowski spaces - a survey. Part I*, Expo. Math. 19, 97 – 142.
- [38] J. Matoušek (2003). *Using the Borsuk-Ulam theorem*, Lectures on topological methods in combinatorics and geometry, Springer-Verlag, Berlin.
- [39] L. Montejano (1993). *Orthogonal projections of convex bodies and central symmetry*, Bol. Soc. Mat. Mex. 38, 1 – 7.
- [40] J. Radon (1921). *Mengen konvexer körper, die einen gemeinsamen punkt enthalten*, Math. Ann. 83, 113 – 115.
- [41] C.A. Rogers (1965). *Sections and projections of convex bodies*, Portugaliae Math. 24, 99 – 103.
- [42] L. Santaló (1940). *Un teorema sobre conjuntos de paralelepípedos de aristas paralelas*, Publ. Inst. Mat. Univ. Nac. Litoral 2, 49 – 60.
- [43] V. Soltan (2005). *Pairs of convex bodies with centrally symmetric intersections of translates*, Discrete Comput. Geom. 33, 605-616.
- [44] E. Steinitz (1913). *Bedingt konvergente reihen und konvexe systeme I*, J. Reine

Angew. Math. 143, 128 – 175.

[45] E.G. Straus (1978). *Some extremal problems in combinatorial geometry*, Lecture Notes in Math. 686, 308 – 312.

[46] H. Tverberg (1989). *Proof of Grünbaum's conjecture on common transversals for translates*, Discrete Comput. Geom. 4, 191 – 203.

[47] P. Vincensini (1935). *Figures convexes et variétés linéaires de l'espace euclidien à  $n$  dimensions*, Bull. Sci. Math. 59, 163 – 174.

[48] P. Vincensini (1939). *Sur une extension d'un théorème de M.J. Radon sur les ensembles de corps convexes*, Bull. Soc. Math. France 67, 115 – 119.

[49] J.A. Wieacker (1988). *Helly-type decomposition theorems for convex sets*, Arch. Math. 50, 59 – 67.