TESIS

Costos de recuperación de procesos de riesgo clásicos y modelos con inflación estocástica.

Eréndira Cortés Ruiz

Director de Tesis: Dra. Ekaterina Todorova Kolkovska

17 de Mayo de 2005

Contenido

Agradecimientos

Agradezco a CIMAT por haberme otorgado beca en el período Febrero 2002 - Julio 2002 y a CONACyT por la beca recibida de Agosto 2002 a Enero 2004 (beca número 166557).

Introducción

El presente trabajo consta de dos partes. En la primera, se estudian propiedades trayectoriales del proceso de riesgo, tales como la duración total del tiempo, durante el cual el proceso se encuentra en un intervalo dado. Hay una gran cantidad de trabajos en teoria de riesgo, que han sido dedicados al estudio del comportamiento del proceso de riesgo hasta el momento de ruina, es decir hasta el el primer tiempo en el cual la compañía de seguros tiene capital (surplus) negativo. Sin embargo, si el valor absoluto del capital al tiempo de ruina no es muy grande, en muchas ocasiones las compañías aseguradoras no dejan de funcionar, debido al hecho de que ellas se recuperan pronto en el futuro. Con esta suposición, varios autores como Dickson y dos Reis, Gerber y Picard, estudian la duración y la distribución de las épocas de tiempo, durante las cuales el surplus es negativo, así como los costos de recuperación de estos procesos. En el trabajo de Kolkovska et al.[9], se estudia un problema más general: ¿Cuál el la cantidad de tiempo antes de un horizionte de tiempo T, durante la cual los procesos clásicos de riesgo permanecen en un intervalo fijo $[a, b], -\infty \leq a < b \leq +\infty$?. Además, si se define el costo esperado de recuperación durante este período como en Picard [11], ¿cómo se puede calcular este costo? Para responder a estas preguntas para varios casos de procesos clásicos de riesgo, los autores usan herramientas tales como tiempos locales y medidas de ocupación del proceso. En el primer capítulo de la tesis, se exponen los conceptos básicos y demostraciones de varios resultados relevantes de los autores arriba mencionados. En la última sección se presentan un algorítmo y resultados numéricos para el calculo de tiempos locales y costos de recuperación de un caso particular de procesos clásicos de riesgo, donde las reclamaciones son de distribución exponencial.

En el segundo capítulo de la tesis se estudia el efecto de la inflación estocástica sobre algunos casos particulares de procesos de riesgo a tiempo discreto. Taylor y Waters estudian procesos de riesgo Poisson-compuestos a tiempo continuo y discreto, respectivamente, y demuestran que si la inflación ocurre a una razón constante determinista, entonces se tiene ruina con probabilidad uno, independientemente de que tan grande es el capital inicial, y de que tan grande es la prima que recibe la compañía para compensar las reclamaciones. En la tesis se considera la siguiente extensión del trabajo de Waters. Sea Y_n una sucesión de variables aleatorias, independientes e idénticamente distribuidas, con media finita, que representan el monto de capital que llega a una compañía de seguros durante el n-ésimo período de tiempo. Sea Λ una variable aleatoria independiente de $Y_n, n = 1, 2, ...$ tal que $P(\Lambda > 1) = 1$. La variable Λ^n modela el factor de inflación en el n-ésimo período de tiempo. Entonces, si U es el capital inicial de la compañía, el proceso de riesgo al tiempo n esta dado por

$$Z_n = U + \sum_{j=1}^{n} \Lambda_j Y_j.$$

Demostraremos, que si $E(\frac{\Lambda}{\Lambda-1}) < \infty$, y $P(Y_1 < 0) > 0$, entonces la compañía se va a arruinar con probabilidad 1, más aún, demostramos el siguiente hecho: $P(Z_n < 0$ ocurre un número infinito de veces$) = 1$. Para probar este resultado construiremos una cadena de Markov con probabilidades de transición estacionarias, y demostraremos que bajo nuestras condiciones esta cadena tiene una distribución invariante μ, y que es persistente para los intervalos abiertos $(a+\varepsilon, b-\varepsilon)$ con $\mu(a, b) > 0$. Este hecho implicara la ruina segura de la compañía. Al final se presentan simulaciones para distintas distribuciones para Λ que satisfacen nuestras condiciones.

Capítulo 1

Surplus negativo, medidas de ocupación y tiempo local de procesos de riesgo

1.1 Notación

Introduciremos los conceptos básicos de los procesos de riesgo clásicos y de renovación. Sea $(\Omega, \mathcal{F}, P, \mathcal{F}_t))$ un espacio de probabilidad filtrado, donde $\mathcal{F}_t$ es el $\sigma-$ álgebra que representa la información hasta el instante t. Supongamos que una compañía de seguros inicia con capital u, y recibe de parte de sus clientes una cantidad de dinero $c > 0$ por unidad de tiempo, llamada prima. Las reclamaciones X_i llegan según un proceso de Poisson N_t, con media λt, es decir los tiempos entre llegadas de reclamaciones son variables aleatorias independientes e idénticamente disribuidas con distribución exponencial de media λ. Supongamos que $X_i, i = 1, 2, \ldots,$ son variables aleatorias independientes e idénticamente distribuidas, independientes del proceso N_t.
El proceso **clásico de riesgo** esta dado por,

$$U_t = u + ct - \sum_{i=1}^{N_t} X_i, \tag{1.1}$$

A U_t también se le llama el surplus de la compañía al tiempo t. En el caso más general, cuando los tiempos entre llegada de reclamaciones son variables aleatorias independientes e idénticamente distribuidas, el proceso descrito por (1.1) se llama **proceso de riesgo de renovación.**

Denotamos $S_t = \sum_{i=1}^{N_t} X_i$, y sea F la función de distribución común de las reclamaciones, con $F(0) = 0$, con media μ, función generadora de momentos m y denotaremos el k-ésimo momento de las X_i por $p_k, k = 1, 2, \ldots$. En consecuencia, $E\left[ct - \sum_{i=1}^{N_t} X_i\right] = (c - \lambda\mu)\,t$. El parámetro $\rho := (c - \lambda\mu)/\lambda\mu$ se llama coeficiente de seguridad y suprondremos que $c - \lambda\mu > 0$, esto es, consideramos los modelos para los cuales la cantidad promedio de surplus por unidad de tiempo es menor que las primas recibidas por unidad de tiempo. Bajo esta condición U_t tiende a $+\infty$ casi seguramente (Proposición 3.1.2 de [1]), lo cual indicaremos diciendo de U_t tiene un *drift* a $+\infty$. Supondremos que $c = (1 + \rho)\lambda\mu$. Sabemos que en este caso la probabilidad de ruina del proceso de riesgo es estrictamente menor que 1 (ver por ejemplo [12]).

1.2 Función generadora de momentos de $\widetilde{T}$

Por simplicidad, en esta sección consideraremos $c = 1$, capital inicial $u = u_0 = 0$ y $\lambda\mu < 1$.

Para $y \in \mathbb{R}$, denotemos por $\widetilde{T}$ el tiempo en el que el proceso de riesgo alcanza por primera vez el nivel y: $\widetilde{T} = \inf\{t : U_t = y\}$. Debido a que $\lim_{t\to\infty} U_t = +\infty$ (ver teorema 6.3.1 de [12]), y que U_t crece linealmente entre saltos, cualquier nivel positivo y, será alcanzado al menos una vez.

Presentamos los resultados de Gerber [8], cuyas demostraciones no realiza el autor, pero que fueron realizadas para mostrarlos con mayor claridad, para ello usamos teoría de martingalas.

Proposición 1.1. *Para el proceso clásico de riesgo con capital inicial* 0 *y constantes arbitrarias* $r, s \in \mathbb{R}$, *se tiene*

$$E\left[\exp\{-rU_t + st\}\right] = \exp\{-rt + \lambda t[m(r) - 1] + st\}. \tag{1.2}$$

Demostración.

$$
\begin{aligned}
&E\left[\exp\{-rU_t + st\}\right] \\
&\quad = E\left[\exp\{-r(t - S_t) + st\}\right] \\
&\quad = \exp\{-rt + st\}\, E\left[\exp\{rS_t\}\right] \\
&\quad = \exp\{-rt + st\}\, E\left[E\left[\exp\{rS_t\} \mid N(t)\right]\right] \\
&\quad = \exp\{-rt + st\} \sum_n E\left[\exp\left\{r \sum_{i=1}^{N(t)} X_i\right\} \mid N(t) = n\right] P(N(t) = n) \\
&\quad = \exp\{-rt + st\} \sum_n E\left[\exp\left\{r \sum_{i=1}^{n} X_i\right\} \mid N(t) = n\right] P(N(t) = n) \\
&\quad = \exp\{-rt + st\} \sum_n E\left[\exp\left\{r \sum_{i=1}^{n} X_i\right\}\right] P(N(t) = n) \text{ (por independencia)} \\
&\quad = \exp\{-rt + st\} \sum_n \left[m(r)\right]^n P(N(t) = n) \text{ (por independencia)} \\
&\quad = \exp\{-rt + st\} \exp\{\lambda t\left[m(r) - 1\right]\} \\
&\quad = \exp\{-rt + \lambda t\left[m(r) - 1\right] + st\}. \qquad (1.3)
\end{aligned}
$$

Sea

$$s = s(r) = r - \lambda\left[m(r) - 1\right], \qquad (1.4)$$

Proposición 1.2. *Para capital inicial* 0, $r \geq 0$ *y* $s(r)$ *dado por (1.4), el proceso* $\{\exp[-rU_t + s(r)t], t \geq 0\}$ *es una martingala.*

Demostración.

Para $k \leq t$

$$
\begin{aligned}
&E\left[\exp\{-rU_t + s(r)t\} \mid \mathcal{F}_k\right] \\
&\quad = E\left[\exp\{-r\left(U_t + U_k - U_k\right) + s(r)t\} \mid \mathcal{F}_k\right] \\
&\quad = \exp\left\{-rU_k\right\} E\left[\exp\left\{-r\left(U_t - U_k\right) + s(r)t\right\} \mid \mathcal{F}_k\right] \\
&\quad = \exp\left\{-rU_k + s(r)t\right\} E\left[\exp\left\{-r\left(U_t - U_k\right)\right\} \mid \mathcal{F}_t\right] \\
&\quad = \exp\left\{-rU_k + \left(r - \lambda\left[m\left(r\right) - 1\right]\right)t\right\} E\left[\exp\left\{-r\left(U_t - U_k\right)\right\} \mid \mathcal{F}_k\right] \\
&\quad = \exp\left\{-rU_k + \left(r - \lambda\left[m\left(r\right) - 1\right]\right)t\right\} E\left[\exp\left\{-r\left(t - k - \sum_{i=N(k)+1}^{N(t)} X_i\right)\right\} \mid \mathcal{F}_k\right] \\
&\quad = \exp\left\{-rU_k + \left(r - \lambda\left[m\left(r\right) - 1\right]\right)t - rt + rk\right\} E\left[\exp\left\{r\sum_{i=N(k)+1}^{N(t)} X_i\right\} \mid \mathcal{F}_k\right] \\
&\quad = \exp\left\{-rU_k + \left(r - \lambda\left[m\left(r\right) - 1\right]\right)t - rt + rk\right\} E\left[\exp\left\{r\sum_{i=N(k)+1}^{N(t)} X_i\right\}\right] \\
&\quad = \exp\left\{-rU_k + \left(r - \lambda\left[m\left(r\right) - 1\right]\right)t - rt + rk\right\} \exp\left\{\lambda\left(t - k\right)\left[m\left(r\right) - 1\right]\right\} \\
&\quad = \exp\left\{-rU_k + k\left(r - \lambda\left[m\left(r\right) - 1\right]\right)\right\} \\
&\quad = \exp\left\{-rU_k + ks\right\},
\end{aligned}
$$

donde en la séptima igualdad usamos independencia.

Proposición 1.3. *La función generadora de momentos de $\widetilde{T}$, para $s \leq 0$, y empezando con capital inicial* 0*, está dada por*

$$
E\left[\exp\left\{s(r)\widetilde{T}\right\}\right] = \exp\left\{s(r)y\right\}, \tag{1.5}
$$

donde $s(r)$ es la solución de (1.4).

Demostración. Sea $s \leq 0$ y $r \leq 0$, con $s(r)$ solución de (1.4), para $t \leq \widetilde{T}$, la martingala $\{\exp\left\{-rU_t + s(r)t\right\}\}$, esta acotada por la constante $\exp\left\{-s(r)y\right\}$. Usando el teorema de paro óptimo para martingalas uniformemente acotadas,

$$
E\left[\exp\left\{-rU_{\widetilde{T}} + s(r)\widetilde{T}\right\}\right] = E\left[\exp\left\{-rU_0\right\}\right] = 1,
$$

de donde se sigue

$$
E\left[\exp\left\{-rU_{\widetilde{T}} + s(r)\widetilde{T}\right\}\right] = E\left[\exp\left\{-ry + s(r)\widetilde{T}\right\}\right] = \exp\left\{-ry\right\} E\left[\exp\left\{s(r)\widetilde{T}\right\}\right] = 1,
$$

por lo tanto,

$$
E\left[\exp\left\{s(r)\widetilde{T}\right\}\right] = \exp\left\{ry\right\}.
$$

A continuación calcularemos algunos momentos importantes de $\widetilde{T}$, el primer tiempo de llegada a nivel y, empezando con capital inicial 0. Denotemos **el logarítmo de la función generadora de momentos acumulativa de $\widetilde{T}$,** por $\phi(s) = \ln E\left[\exp\left\{s\widetilde{T}\right\}\right] = ry$ (Proposición 1.3). Derivando $\phi(s)$ obtenemos

$$\phi'(s) = y\frac{dr}{ds} = y\frac{1}{\frac{ds}{dr}} = y\frac{1}{1-\lambda m'(r)}.$$

Sustituyendo $s = r = 0$,

$$E\left(\widetilde{T}\right) = \phi'(0) = \frac{y}{1-\lambda m'(0)} = \frac{y}{1-\lambda\mu}, \tag{1.6}$$

y de manera similar,

$$\begin{aligned}
\phi''(s) &= \frac{d}{dr}\left(\frac{d\phi(s)}{ds}\right)\frac{dr}{ds} \\
&= \frac{1}{s'(r)}\frac{d\phi_r'(s)}{ds} \\
&= \frac{y\lambda m''(r)}{(1-\lambda m'(r))^3},
\end{aligned}$$

de donde

$$Var\left(\widetilde{T}\right) = \phi''(0) = \frac{y\lambda p_2}{(1-\lambda\mu)^3}. \tag{1.7}$$

Finalmente,

$$\begin{aligned}
\phi'''(s) &= \frac{1}{s'(r)}\frac{d\left(\phi''(s)\right)}{dr} \\
&= \frac{1}{(1-\lambda m'(r))}\frac{y\lambda m'''(r)(1-\lambda m'(r))^3 - 3y\lambda m''(r)(1-\lambda m(r))^2(-\lambda m''(r))}{(1-\lambda m'(r))^6} \\
&= \frac{y\lambda m''(r)}{(1-\lambda\mu)^4} + \frac{3y\lambda^2 p_2^2}{(1-\lambda\mu)^5},
\end{aligned}$$

y

$$E\left[\left(\widetilde{T}-\mu\right)^3\right] = \frac{y\lambda p_3}{(1-\lambda\mu)^4} + \frac{3y\lambda p_2^2}{(1-\lambda\mu)^5}. \tag{1.8}$$

1.3 Surplus negativo

En esta sección, estudiaremos la duración de períodos del surplus negativo, así como la duración total del surplus negativo. También se daran expresiones para la función generadora de momentos y el número de épocas (duración) del surplus negativo. Los resultados de esta sección fueron extraídos de Dickson et al. [4] y Egidio dos Reis [6], algunas demostraciones de estos autores fueron completadas. Sea T **el tiempo de ruina**: $T = \inf\{t : U_t < 0\}$, donde por definición $\inf \emptyset = \infty$. Sea $\psi(u)$ **la probabilidad de ruina iniciando con capital** u:

$$\psi(u) = \Pr(T < \infty \mid U(0) = u)$$

y $\delta(u) = 1 - \psi(u)$ la probabilidad de sobrevivencia. Sea $Y = |U_T|$ **el déficit del proceso al tiempo de la ruina**, denotemos por $G(u, y)$ la distribución de Y comenzando con capital inicial u:

$$G(u, y) = \Pr(T < \infty, U(T) \geq -y \mid U(0) = u).$$

Denotemos la densidad de $G(u, y)$ con $g(u, y)$. De [3] tenemos,

$$g(0, y) = \frac{\lambda}{c}(1 - F(y)), \tag{1.9}$$

y

$$G(0, y) = \frac{\lambda}{c}\int_0^y (1 - F(x))\,dx, \tag{1.10}$$

de donde se sigue

$$\psi(0) = G(0, \infty) = \frac{\lambda}{c}p_1. \tag{1.11}$$

Denotaremos la función de distribución condicional de Y, el déficit al tiempo de la ruina dado que $T < \infty$, por $H(u, y) = \frac{G(u,y)}{\psi(u)}$, y su correspondiente densidad por $h(u, y)$.

Notemos que podemos escribir (1.6) y (1.7) como,

$$E\left[\widetilde{T}\right] = \frac{y}{\frac{c(c-\lambda p_1)}{c}} = \frac{y}{c\delta(0)}, \tag{1.12}$$

$$Var\left[\widetilde{T}\right] = \frac{y\lambda p_2}{(c\delta(0))^3} \tag{1.13}$$

donde $\delta(0)$ es la probabilidad de sobrevivencia con capital inicial 0. Denotaremos por $\widetilde{T}_i$, $i = 1, 2, \ldots$ las épocas durante las cuales el proceso U_t esta por debajo de cero.

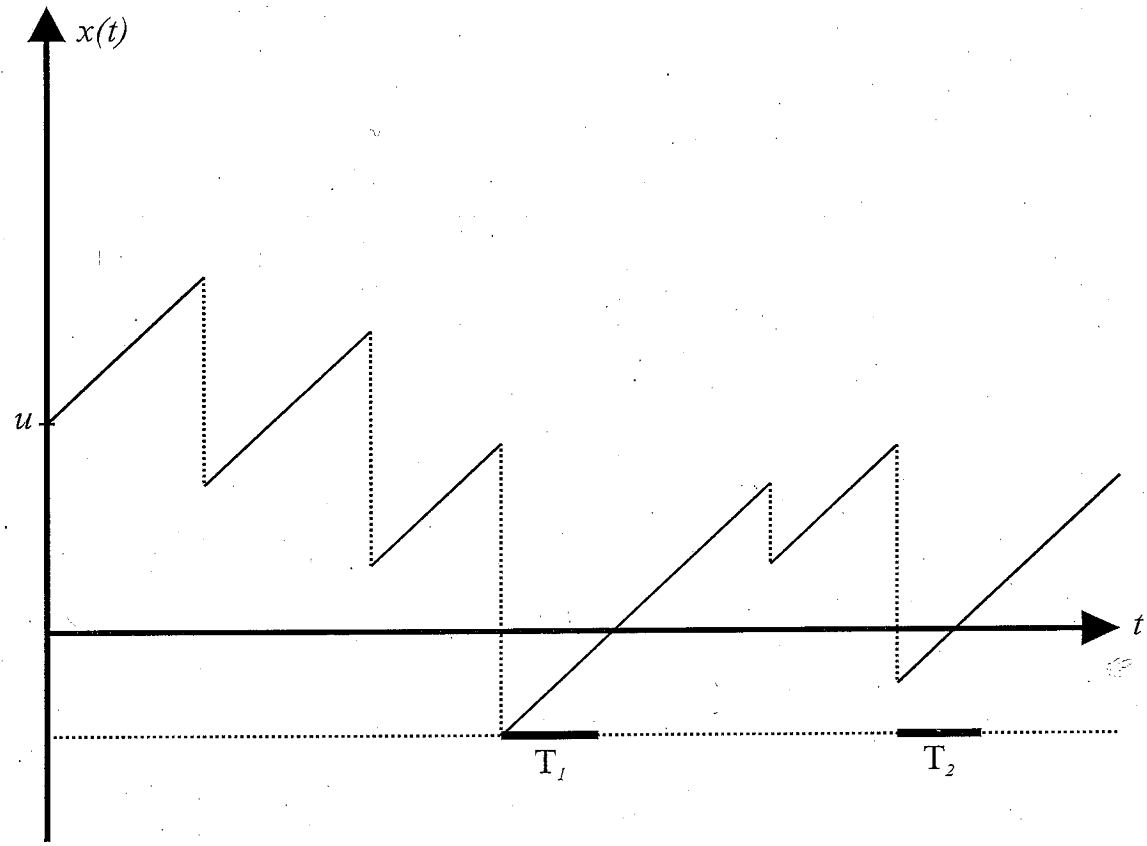


Figura 1.1: Tiempos para los cuales el proceso es negativo

1.3.1 Duración del período del primer surplus negativo

Observemos que la duración del primer surplus negativo dependera de la severidad de la ruina, lo cual significa que necesitamos la distribución $H(u,y)$ de Y. Adicionalmente, es necesario calcular la probabilidad de ruina $\psi(u)$. Desafortunadamente en general no es posible encontrar soluciones explícitas para $H(u,y)$ o $\psi(u)$. Sin embargo, presentaremos una fórmula para la f.g.m. de la duración de la época del primer surplus negativo $\widetilde{T}_1$.

Consideramos el caso general $u \geq 0$, y sea $y \geq 0$. Una vez que la ruina ha ocurrido al tiempo T y la severidad de la ruina es $Y = y$, el proceso cruzara el nivel cero por primera vez al tiempo $\left(T + \widetilde{T}_1\right)$, por lo tanto estamos interesados en la duración de $\widetilde{T}_1$. Debido a que U_t es proceso de Markov fuerte, podemos pensar que el proceso comienza de nuevo al tiempo T, con surplus $U_T = -y$, e investigar cuando cruzará el nivel 0. Debido a que el proceso es estacionario, esto es equivalente a considerar que $U(T) = 0$ y calcular cuando alcanzará el nivel y.

De (1.5), tomando esperanza sobre Y, obtenemos la función generadora de momentos de $\widetilde{T}_1$

$$M_{\widetilde{T}_1}(s,u) = E\left[\exp\{s(r)Y\} \mid U_0 = u\right] = M_Y(s(r),u), \tag{1.14}$$

De (1.12) y (1.13) podemos calcular los momentos $E\left[\widetilde{T}_1 \mid U_0 = u\right]$ y $Var\left[\widetilde{T}_1 \mid U_0 = u\right]$, usando esperanza condicional. Tenemos

$$E\left[\widetilde{T}_1 \mid u\right] = E\left[E\left[\widetilde{T}_1 \mid Y\right]\right] = \frac{E[Y \mid u]}{c\delta(0)}. \tag{1.15}$$

Proposición 1.4. *Sean X y Y variables aleatorias entonces*

$$Var[Y] = E[Var[Y \mid X]] + Var[E[Y \mid X]].$$

Demostración.

$$\begin{aligned}
&Var[Y] \\
&= E\left[\{Y - EY\}^2\right] = E\left[E\{Y - EY\}^2 \mid X\right] \text{ (definición)} \\
&= E\left[E\{Y + E[Y \mid X] - E[Y \mid X] - EY\}^2 \mid X\right] \\
&E\left[E\left\{(Y - E[Y \mid X])^2 + (E[Y \mid X] - EY)^2\right\} \mid X\right] \\
&= E\left[E\left[(Y - E[Y \mid X])^2\right] + E\left[(E[Y \mid X] - EY)^2\right] \mid X\right] \\
&= E[Var[Y \mid X]] + Var[E[Y \mid X]].
\end{aligned}$$

Usando la proposición anterior, tenemos

$$\begin{aligned} Var\left[\widetilde{T_1} \mid u\right] &= E\left[Var\left[\widetilde{T_1} \mid Y\right]\right] + Var\left[E\left[\widetilde{T_1} \mid Y\right]\right] \\ &= \frac{E\left[Y \mid u\right]\lambda p_2}{\left(c\delta\left(0\right)\right)^3} + \frac{Var\left[Y \mid u\right]}{\left(c\delta\left(0\right)\right)^2}. \end{aligned} \tag{1.16}$$

La función generadora de momentos de $\widetilde{T}_1$ se puede considerar como función de la función generadora de momentos de la severidad de la ruina.

1.3.2 Duración de cualquier otro período de surplus negativo

Debido a que el proceso de Poisson tiene incrementos independientes y estacionarios, podemos ver al proceso U_t como si comenzara de nuevo al tiempo $T + \widetilde{T}_1$, esta vez con capital inicial 0. Así, dado que el primer surplus negativo ha ocurrido, el segundo surplus negativo ocurrira con probabilidad $\psi\left(0\right)$. Debido a la propiedad fuerte de Markov, la probabilidad de que otro surplus negativo surja y sea el último es $\psi\left(0\right)\delta\left(0\right)$.

Como se ha mencionado antes, no tenemos una expresión explícita para la distribución de la severidad de la ruina, sin embargo podemos calcular todos sus momentos.

De (1.9), tenemos

$$\begin{aligned} E\left[Y^k \mid u = 0\right] &= \frac{1}{p_1}\int_0^\infty y^k\left[1 - F\left(y\right)\right]dy \\ &= \frac{1}{p_1}\int_0^\infty y^k\left[\int_y^\infty f\left(x\right)dx\right]dy, \end{aligned}$$

de donde, cambiando el orden de integración,

$$\begin{aligned} E\left[Y^k \mid u = 0\right] &= \frac{1}{p_1}\int_0^\infty [\int_0^x y^k dy] f\left(x\right)dx \\ &= \frac{1}{p_1}\int_0^\infty \frac{x^{k+1}}{k+1} f\left(x\right)dx \\ &= \frac{1}{\left(k+1\right)p_1}\int_0^\infty x^{k+1} f\left(x\right)dx \\ &= \frac{p_{k+1}}{\left(k+1\right)p_1}. \end{aligned}$$

Así, sí p_{k+1} existe, también existe el k-ésimo momento de la severidad de la ruina cuando $u = 0$, y en particular

$$E\left[Y \mid u=0\right]=\frac{p_2}{2p_1},$$
$$E\left[Y^2 \mid u=0\right]=\frac{p_3}{3p_1},$$

$$\begin{aligned}
Var\left[Y \mid u=0\right] &= E\left[Y^2 \mid u=0\right]-E^2\left[Y \mid u=0\right]\\
&=\frac{p_3}{3p_1}-\left(\frac{p_2}{2p_1}\right)^2=\frac{4p_3p_1-3p_2^2}{12p_1^2}.
\end{aligned}$$

De igual forma, se obtienen expresiones similares para $\widetilde{T}_i$, $i=2,\ldots$, tomando en cuenta que el surplus inicial es cero:

$$M_{\widetilde{T}_i}(s,0)=M_Y(r),0),$$

$$E\left[\widetilde{T}_i \mid u=0\right]=\frac{E\left[Y \mid u=0\right]}{c\delta(0)},$$

$$Var\left[\widetilde{T}_i \mid u=0\right]=\frac{E\left[Y \mid u=0\right]\lambda p_2}{\left(c\delta(0)\right)^3}+\frac{Var\left[Y \mid u=0\right]}{\left(c\delta(0)\right)^2}.$$

Análogamente, podemos expresar la función generadora de momentos de Y, dado $u=0$ como función de $m(z)$:

$$\begin{aligned}
E\left[\exp\{zY\} \mid u=0\right] &= \frac{1}{p_1}\int_0^\infty \exp\{zy\}\left[1-F(y)\right]dy\\
&=\frac{1}{p_1}\int_0^\infty \exp\{zy\}\int_y^\infty f(x)\,dxdy\\
&=\frac{1}{p_1}\int_0^\infty\int_0^x \exp\{zy\} f(x)\,dydx\\
&=\frac{1}{zp_1}\int_0^\infty f(x)\left(\exp\{zx\}-1\right)dx\\
&=\frac{1}{zp_1}\left[m(z)-1\right],
\end{aligned}$$

por lo tanto

$$M_{\widetilde{T}_i}(s,0)=\frac{1}{p_1 s(r)}\left[m(r)-1\right].$$

sustituyendo $c=(1+\rho)\lambda p_1$, en (1.4), obtenemos

$$m(r) - 1 = r(1+\rho)p_1 - \frac{s}{\lambda},$$

por lo tanto

$$M_{\widetilde{T}_i}(s,0) = (1+\rho) - \frac{s}{\lambda p_1 r}.$$

1.3.3 Duración total del período de surplus negativo

Sea $S = \widetilde{T}_1 + \widetilde{T}_2 + \ldots + \widetilde{T}_N$ el tiempo total durante el cual U_t está por debajo de cero; aquí denotamos con N **el número de períodos de surplus negativos.** Primero consideremos el caso particular $u = 0$, donde obtendremos fórmulas explícitas para los momentos de S.

- Caso $u = 0$
  Nótese que el número de surplus negativos N es una variable aleatoria con distribución geométrica, dada por

$$\Pr(N = n \mid u = 0) = [\psi(0)^n][1-\psi(0)], n = 0, 1, \ldots$$

de donde

$$E[N = n \mid u = 0] = \psi(0)\,\delta(0),$$

y

$$Var[N = n \mid u = 0] = \frac{\psi(0)}{(\delta(0))^2}.$$

Debido a que $u = 0$, las $\widetilde{T}_i$, $i = 1, 2, \ldots$ son independientes e idénticamente distribuidas, de esta manera S tiene distribución geométrica compuesta cuya función generadora de momentos es

$$M_N(t, u = 0) = \frac{1-\psi(0)}{1-\psi(0)\exp\{t\}}.$$

Por lo tanto, obtenemos

$$M_S(s,0) = M_N[\ln M_Y(r,0)].$$

Como consecuencia,

$$
\begin{aligned}
E\left[S \mid u=0\right] &= \frac{\psi\left(0\right)}{\delta\left(0\right)}\frac{E\left[Y \mid u=0\right]}{c\delta\left(0\right)} \\
&= E\left[N \mid u=0\right] E\left[\widetilde{T}_i \mid u=0\right] \\
&= \frac{\lambda p_2}{2\left(c\delta\left(0\right)\right)^2},
\end{aligned}
$$

y

$$
\begin{aligned}
Var\left[S \mid u=0\right] &= \frac{\psi\left(0\right)}{\delta\left(0\right)} Var\left[\widetilde{T}_i \mid u=0\right] + \frac{\psi\left(0\right)}{\delta\left(0\right)^2} E^2\left[\widetilde{T}_i \mid u=0\right] \\
&= \frac{\psi\left(0\right)}{c^2\delta\left(0\right)^4}\left(\frac{\lambda}{c} p_2 E\left[Y \mid u=0\right] + \delta\left(0\right) Var\left[Y \mid u=0\right] + E^2\left[Y \mid u=0\right]\right) \\
&= \frac{\psi\left(0\right)}{c^2\delta\left(0\right)^3}\left(\frac{3\psi\left(0\right) p_2^2}{4\delta\left(0\right) p_1^2} + \frac{p_3}{3p_1}\right).
\end{aligned}
$$

Por lo tanto

$$
E\left[S^2 \mid u=0\right] = \frac{\psi\left(0\right)}{c^2\delta\left(0\right)^3}\left(\frac{\psi\left(0\right) p_2^2}{\delta\left(0\right) p_1^2} + \frac{p_3}{3p_1}\right).
$$

Ahora consideramos el caso general.

- Caso $u \geq 0$
  Debido a que el primer surplus negativo ocurre con probabilidad $\psi\left(u\right)$, por el argumento anterior el número N de épocas de surplus negativos tiene función de distribución,

$$
\Pr\left(N=n \mid u\right) = \begin{cases} \psi\left(u\right)\left[\psi\left(0\right)\right]^{n-1}\left(1-\psi\left(0\right)\right) & \text{para} \quad n=1,2,\ldots \\ 1-\psi\left(u\right) & \text{para} \quad n=0. \end{cases}
$$

Por lo tanto, para cualquier función ϕ, para la cual existe $E\phi\left(N\right)$ se obtiene

$$
\begin{aligned}
E\left[\phi\left(N\right) \mid u\right] &= \phi\left(0\right)\delta\left(u\right) + \sum_{n=1}^{\infty}\phi\left(n\right)\psi\left(u\right)\psi\left(0\right)^{n-1}\delta\left(0\right) \\
&= \phi\left(0\right)\delta\left(u\right) + \frac{\psi\left(u\right)}{\psi\left(0\right)}\sum_{n=1}^{\infty}\phi\left(n\right)\psi\left(0\right)^{n}\delta\left(0\right).
\end{aligned}
$$

Entonces,

$$E\left[\phi\left(N\right)\mid u\right]=\phi\left(0\right)\delta\left(u\right)+\frac{\psi\left(u\right)}{\psi\left(0\right)}\left\{E\left[\phi\left(N\right)\mid u=0\right]-\phi\left(0\right)\delta\left(0\right)\right\}, \quad (1.17)$$

De dos Reis [6], se sigue que:

$$E\left[N\mid u\right]=\frac{\psi\left(u\right)}{\psi\left(0\right)}E\left[N\mid u=0\right]=\frac{\psi\left(u\right)}{\delta\left(0\right)},$$

$$E\left[N^{2}\mid u\right]=\frac{\psi\left(u\right)}{\psi\left(0\right)}E\left[N^{2}\mid u=0\right]=\frac{\psi\left(u\right)\left[1+\psi\left(0\right)\right]}{\delta\left(0\right)^{2}},$$

$$Var\left[N\mid u\right]=\frac{\psi\left(u\right)\left[\delta\left(u\right)+\psi\left(0\right)\right]}{\delta\left(0\right)^{2}}.$$

y la función generadora de momentos de N:

$$M_{N}\left(t,u\right)=E\left[\exp\left\{sS\right\}\right]=E\left[E\left[\exp\left\{sS\right\}\mid N\right]\right]=E\left[M_{S}\left(s,u\right)\mid N\right].$$

Para determinar la función generadora de momentos de S, usaremos que $\widetilde{T}_i$, $i=2,\ldots$ son i.i.d., por lo tanto, $\widetilde{T}_1$ puede tener distribución diferente y depende de u. Usando esperanza condicional,

$$\begin{aligned}
E\left[\exp\left\{sS\right\}\mid N\right]&=E\left[\exp\left\{s\widetilde{T}_{1}+s\sum_{i=2}^{n}\widetilde{T}_{i}\right\}\right]\\
&=E\left[\exp\left\{s\widetilde{T}_{1}\right\}\right]E\left[\exp\left\{s\widetilde{T}_{2}\right\}\right]^{n-1}\\
&=M_{\widetilde{T}_{1}}\left(s\right)\left[M_{\widetilde{T}_{2}}\left(s\right)\right]^{n-1}\\
&=M_{Y}\left(r,u\right)\left[M_{Y}\left(r,0\right)\right]^{n-1},n=1,2,\ldots
\end{aligned}$$

de donde

$$E\left[\exp\left\{sS\right\}\mid N\right]=\begin{cases}M_{Y}\left(r,u\right)\left[M_{Y}\left(r,0\right)\right]^{n-1} & \text{para} \quad n=1,2,\ldots\\ 1 & \text{para} \quad n=0.\end{cases}$$

Tomando esperanza sobre N, obtenemos

$$\begin{aligned} M_S(s,u) &= \sum_{n=0}^{\infty} E\left[\exp\{sS\} \mid N\right] \Pr(N=n) \\ &= \Pr(N=0) + M_Y(r,u) \sum_{n=1}^{\infty} \left[M_Y(f(s),0)\right]^{n-1} \Pr(N=n) \\ &= \delta(u) + M_Y(r,u) \sum_{n=1}^{\infty} \left[M_Y(r,0)\right]^{n-1} \psi(u)\,\psi(0)^{n-1}\,\delta(0) \\ &= \delta(u) + \psi(u)\,\delta(0)\,M_Y(r,u) \sum_{n=1}^{\infty} \left[M_Y(r,0)\,\psi(0)\right]^{n-1} \\ &= \delta(u) + \frac{\psi(u)\,\delta(0)\,M_Y(r,u)}{1-\psi(0)\,M_Y(r,0)}. \end{aligned}$$

La última expresión se puede escribir en la forma

$$M_S(s,u) = \delta(u) + \psi(u)\,M_Y(r,u)\,M_S(s,0).$$

1.3.4 La distribución de la duración total de los períodos de surplus negativo

El propósito de esta sección es presentar los resultados de Dickson y dos Reis [4] sobre la duración del surplus negativo, para los períodos simples y para la duración total. Dickson y dos Reis [4] obtienen fórmulas integrales para estas distribuciones.

Denotemos por $F(x,t)$ y $f(x,t)$ la función de distribución y de densidad de las reclamaciones agregadas al tiempo t respectivamente. Sea $Y(u)$ el déficit al tiempo de la ruina iniciando con capital u, con función de distribución $\widetilde{G}(u,y)$ y función de densidad $\widetilde{g}(u,y)$. De ley de probabilidad total,

$$G(u,y) = \widetilde{G}(u,y)\,\psi(u),$$

y derivando esta expresión con respecto a y,

$$g(u,y) = \widetilde{g}(u,y)\,\psi(u),$$

por lo que,

$$\widetilde{G}(u,y) = \frac{G(u,y)}{\psi(u)},$$

$$\widetilde{g}(u,y) = \frac{g(u,y)}{\psi(u)}.$$

Recordemos que T_x es el tiempo de la primera vez que el surplus pasa por el nivel $x \geq 0$ y sean $H(t,x)$ y $h(t,x)$ la función de distribución y de densidad de T_x.

De Dickson y dos Reis [4], tenemos

$$H\left(\frac{x}{c},x\right) = \Pr\left(T_x = \frac{x}{c}\right) = \exp\left\{\frac{\lambda x}{c}\right\},$$

y

$$h(t,x) = \frac{x}{t} f(ct-x,t), t > \frac{x}{c}.$$

Sean, $K(t) = \Pr(S \leq t)$, $A(t) = \Pr(T_1 \leq t)$, $D(t) = \Pr(T_i \leq t)$ para $i = 2,\ldots$ y sean $k(t)$, $a(t)$ y $d(t)$ las densidades correspondientes, denotemos por $\widetilde{K}(t)$ la distribución condicional de S dado que la ruina ocurre. Finalmente, definamos $a * d^{(n-1)*}(t)$ la densidad (la $n-1$-ésima convolución de d con a) de $\sum_{i=1}^{n} T_i$ para $n = 1,2,\ldots$

Al calcular $K(t)$ hay que considerar tres casos:

1. $u = 0$, en este caso N tiene distribución geométrica y S tiene distribución geométrica compuesta,

2. $u > 0$, y la distribución de T_1 es la misma que la de T_i para $i = 2,3,\ldots$

3. $u > 0$ y la distribución de T_1 es diferente que la de T_i para $i = 2,3,\ldots$

Caso $u = 0$.

Nótese que en este caso $A(t) = D(t)$, y se puede ver de Dickson et al. [4] que T_1 y $T \mid T < \infty$ tienen la misma distribución, por lo tanto

$$A(t) = \frac{\psi(0,t)}{\psi(0)}$$

Caso $u > 0$.

Teorema 1.5. *Tenemos que $K(0) = \delta(u)$,*

$$k(0) = \psi(u)\,\delta(0)\,a(t) + \psi(0)\int_0^t d(s)\,k(t-s)\,ds, t > 0, \tag{1.18}$$

y

$$K(t) = \delta(u) + \psi(u)\,\delta(0)\,A(t) + \psi(0)\int_0^t d(s)\,K(t-s)\,ds, t > 0. \tag{1.19}$$

Demostración.

Como $S=0$ es equivalente a $N=0$, tenemos que $K(0)=\delta(u)$. Denotemos por $q_n=\Pr(N=n)$ y sea d^{n*} la n-ésima convolución de d. Entonces,

$$\begin{aligned} q_n &= \psi(u)\left[\psi(0)\right]^{n-1}\delta(0) \\ &= \psi(0)\, q_{n-1},\ n=2,3,\ldots \end{aligned}$$

por lo tanto para $t>0$,

$$\begin{aligned} k(t) &= \sum_{n=1}^{\infty} q_n d^{n*}(t) \\ &= q_1 a(t) + \sum_{n=2}^{\infty} q_n d^{n*}(t) \\ &= q_1 a(t) + \sum_{n=2}^{\infty} \psi(0)\, q_{n-1} d^{n*}(t) \\ &= \psi(u)\,\delta(0)\, a(t) + \psi(0) \sum_{n=2}^{\infty} q_{n-1} \int_0^t d(s)\, d^{(n-1)*}(t-s)\, ds \\ &= \psi(u)\,\delta(0)\, a(t) + \psi(0) \int_0^t d(s) \sum_{n=2}^{\infty} q_{n-1} d^{(n-1)*}(t-s)\, ds \\ &= \psi(u)\,\delta(0)\, a(t) + \psi(0) \int_0^t d(s)\, k(t-s)\, ds. \end{aligned}$$

Para calcular $a(t)$ y $A(t)$ consideramos el déficit al tiempo de la ruina y la densidad de la primera vez que el surplus pasa a través de un nivel fijo, mayor que u,

$$A(t)) = \int_0^{ct} \widetilde{g}(u,y)\, H(t,y)\, dy.$$

De la fórmula de Leibntz se sigue

$$\begin{aligned} a(t) &= \widetilde{g}(u,ct)\, H(t,ct) - \widetilde{g}(u,0)\, H(t,0) + \int_0^{ct} \widetilde{g}(u,y)\, h(t,y)\, dy \\ &= \widetilde{g}(u,ct)\, H(t,ct) + \int_0^{ct} \widetilde{g}(u,y)\, h(t,y)\, dy. \end{aligned}$$

1.4 Definiciones y resultados básicos

Esta sección y la siguiente se basan totalmente en el trabajo de Kolkovska et al. [9], muchas de las demostraciones se trasladaron integramente, salvo algunos calculos de la parte final y a diferencia de Kolkovska et al. [9] describe el método de simulación. Aquí definiremos los conceptos básicos que vamos a necesitar en las siguientes secciones. Recordemos que **el proceso clásico de riesgo** esta definido por

$$X_t = u + ct - \sum_{k=1}^{N_t} R_k, \tag{1.20}$$

donde $u \geq 0$ es el capital inicial, $c \geq 0$ es la prima recibida por unidad de tiempo, y R_k es el monto de la k-ésima reclamación. ($\{R_k\}$ es una sucesión de variables aleatorias no negativas independientes e idénticamente distribuídas) y $N := \{N_t, t \geq 0\}$ es un proceso de Poisson homogéneo, que representa el número de las llegadas S_i de reclamaciones antes de tiempo t, el cual es independiente de $\{R_k\}$.

Mas generalmente, un **proceso de riesgo de renovación** es de la forma (1.20), con tiempos de llegada de reclamaciones $W_i = S_1 + \ldots + S_i, i = 1, 2, \ldots$ donde $S_1, S_2, \ldots$ son variables aleatorias no negativas, independientes e idénticamente distribuidas cuya función de distribución H satisface $H(0) = 0$ y $E[S_1] = \lambda < \infty$ (ver Figura 1.2). Además supongamos que las reclamaciones tienen función de distribución continua G con media finita μ, y $c = (1+\rho)\lambda\mu$, donde $\rho > 0$ es la carga de seguridad.

Definición 1.6. La medida de ocupación de un proceso $\{Z_s, s \geq 0\}$ *cadlag* sobre el conjunto B en el intervalo de tiempo $[0, t]$ se define como,

$$Y_t(B) := \int_0^t 1_B(Z_s)\, ds, 0 \leq t \leq \infty, B \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$$

donde $\mathcal{B}(\mathbb{R})$ denota la σ-álgebra de Borel en la línea recta. Llamaremos a t horizonte del tiempo de ocupación.

La medida de ocupación es la cantidad de tiempo en $[0, t]$ durante el cual el surplus está en un conjunto dado.

El tiempo local L_t^x de $Z_s, s \geq 0$, cuando existe, puede ser definido como el límite en probabilidad de

$$\frac{1}{2\eta} \int_0^t 1_{(x-\eta, x+\eta)}(Z_s)\, ds$$

cuando η tiende a cero, y es igual casi seguramente a la densidad dY_t/dx del tiempo de ocupación con respecto a la medida de Lebesgue dx.

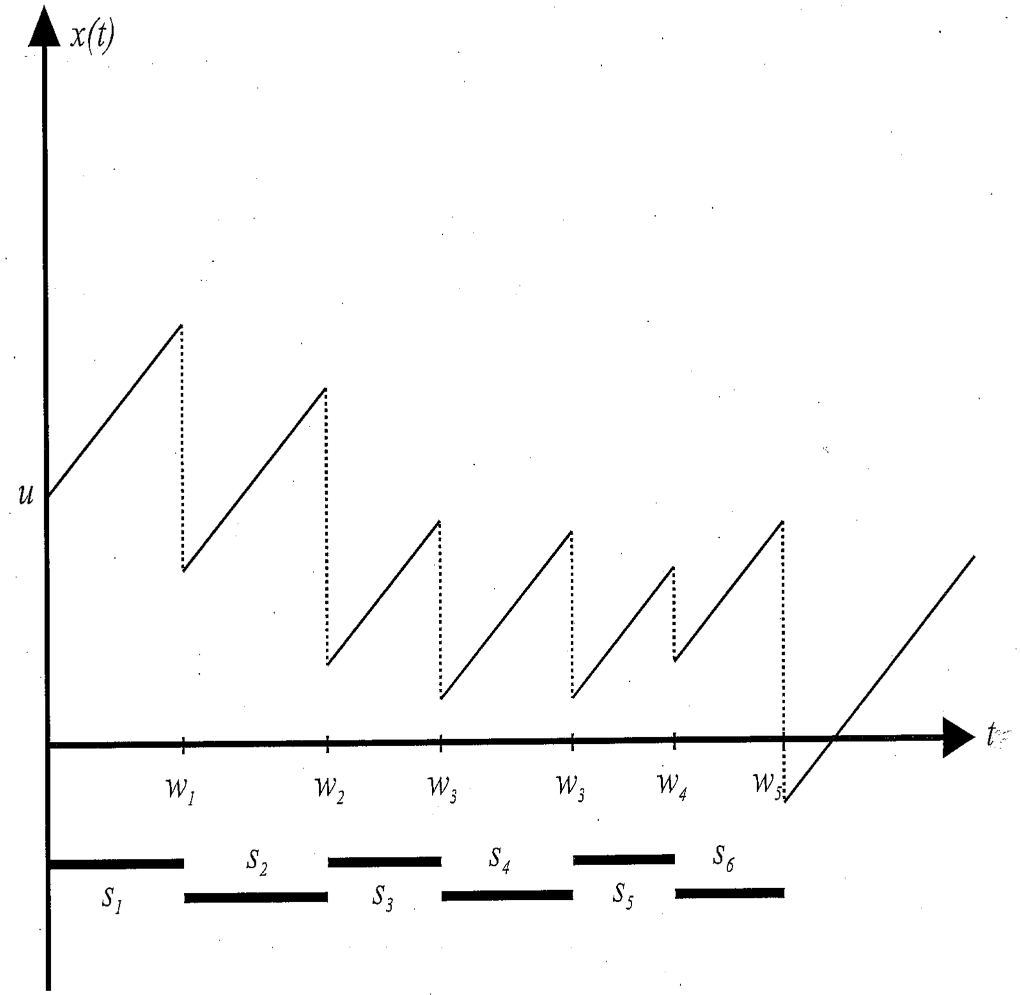


Figura 1.2: Proceso clásico de riesgo

Corolario 1.6. Para cualquier función medible y acotada φ, se tiene:

$$Y_t(\varphi) := \int_0^t \varphi(Z_s)\, ds = \int_R \varphi(x)\, L_t^x dx. \tag{1.21}$$

Definición 1.7. Denotemos por N_t^x el número de cruzamientos desde abajo del surplús $X(\omega)$ en el nivel $x \in \mathbb{R}$ antes del tiempo t iniciando con un capital u. Definimos el tiempo local aproximante en el nivel x, $L_{\eta,t}^x$ para $t \geq 0$ por,

$$L_{\eta,t}^x := \frac{1}{2\eta} \int_0^t 1_{(x-\eta,x+\eta)}(X_s)\, ds,$$

Notemos que el número de cruzamientos de abajo hacia arriba es diferente al número de cruzamientos de arriba hacia abajo, como se muestra en la siguiente figura.

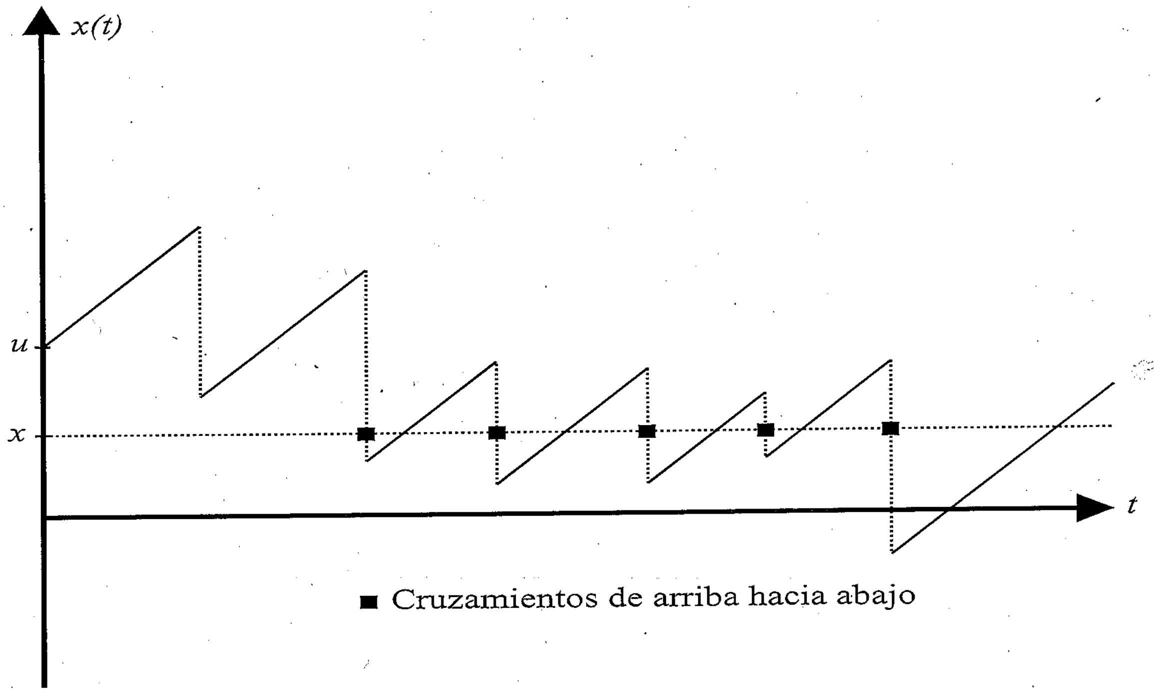


Figura 1.3: Cruzamientos del surplus en x.

1.5 Medida de ocupación y tiempo local del proceso de riesgo de renovación

La herramienta que se usará para demostrar la existencia del tiempo local, será el número de cruzamientos desde abajo o visitas realizados por el surplus al nivel x, hasta el tiempo t.

Teorema 1.8. *Sean $x, u \in \mathbb{R}$ y X es el proceso de riesgo de renovación, con la función de distribución de las reclamaciones G continua. Entonces para toda $\theta > 0$,*

$$\lim_{\eta \to 0} \Pr\left[\left|L^x_{\eta,t}(u) - \frac{1}{c}\left(\frac{1}{2}\delta_{x,u} + N^x_t\right)\right| > \theta\right] = 0, \tag{1.22}$$

donde $\delta_{x,u}$ es la delta de Kronecker. Entonces el tiempo local L^x_t existe c.s. y $L^x_t = \frac{1}{c}\left(\frac{1}{2}\delta_{x,u} + N^x_t\right)$ c.s.

Demostración. Demostraremos el caso $u > x$, los otros dos casos $u < x$ y $u = x$, se demuestran de manera análoga.

Usando ley de probabilidad total,

$$\begin{aligned}
&\Pr\left[\left|L^x_{\eta,t}(u) - \frac{1}{c}N^x_t\right| > \theta\right] \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} \Pr[N_t = n] \Pr\left[\left|L^x_{\eta,t}(u) - \frac{1}{c}N^x_t\right| > \theta \mid N_t = n\right] \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} \Pr[N_t = n] \int_{\{s_1 + \ldots + s_n \le t\}} \Pr[S_1 \in ds_1, \ldots, S_n \in ds_n \mid N_t = n] \\
&\cdot \Pr\left[\left|L^x_{\eta,t}(u) - \frac{1}{c}N^x_t\right| > \theta \mid N_t = n, S_1 = s_1, \ldots, S_n = s_n\right].
\end{aligned} \tag{1.23}$$

Notemos que, entre saltos la trayectoria de X es una línea recta con pendiente c, tenemos

$$\int_0^t 1_{(x-\eta, x+\eta)}(X_s)\, ds = \int_0^t \sum_{I \in C(\eta)} 1_I(s)\, ds,$$

donde $C(\eta)$ es la colección formada por aquellos intervalos $I \subset [0;t]$ tales que $X(I) \subset (x-\eta, x+\eta)$ y que son maximales, en el sentido que si $J \subset [0,t]$, $I \subset J$, y $X(J) \subset (x-\eta, x+\eta)$, entonces $J = I$. Nótese que $C(\eta)$ tiene casi seguramente un número finito de elementos.

Consideremos la siguiente partición de $C(\eta)$:

$$\mathcal{E}(\eta) = \{I \in C(\eta) : x \in Ex(X(I))\},$$

$$\mathcal{I}(\eta) = \left\{I \in C(\eta) : x \in (X(I))^0\right\},$$

$$\mathcal{F}(\eta) = \{I \in C(\eta) : x \in \partial(X(I))\}.$$

con $Ex(A), A^0, \partial(A)$ denotan el conjunto del exterior, interior y la frontera de los puntos de un conjunto de Borel A.

De está manera,

$$\int_0^t 1_{(x-\eta,x+\eta)}(X_s)\,ds = \sum_{I\in\mathcal{E}(\eta)} l(I) + \sum_{I\in\mathcal{I}(\eta)} l(I) + \sum_{I\in\mathcal{F}(\eta)} l(I).$$

donde $l(I)$ denota la longitud de I. Recordemos que nos interesan los cruzamientos en el punto x, para tal efecto hemos tomado un intervalo de la forma $(x-\eta, x+\eta)$, y deseamos calcular, el límite cuando $\eta \to 0$. Primero, fijemos $\eta = 1$, y definimos los siguientes números,

$$e_1 := \min\left\{\bigcup_{I\in\mathcal{E}(1)^+} X(I)\right\},$$

$$e_2 := \max\left\{\bigcup_{I\in\mathcal{E}(1)^-} X(I)\right\},$$

$$e_3 := \max\left\{\bigcap_{I\in\mathcal{I}(1)} X(I)\right\},$$

$$e_4 := \min\left\{\bigcap_{I\in\mathcal{I}(1)} X(I)\right\},$$

donde

$$\mathcal{E}^+(1) := \{I \in \mathcal{E}(1) : \min\{X(I) > x\}\},$$
$$\mathcal{E}^-(1) := \{I \in \mathcal{E}(1) : \max\{X(I) < x\}\}.$$

En la figura 1.4 se observan las diferentes trayectorias del proceso en el intervalo $(x-1, x+1)$, así mismo, se identifican los números e_1, e_2, e_3 y e_4

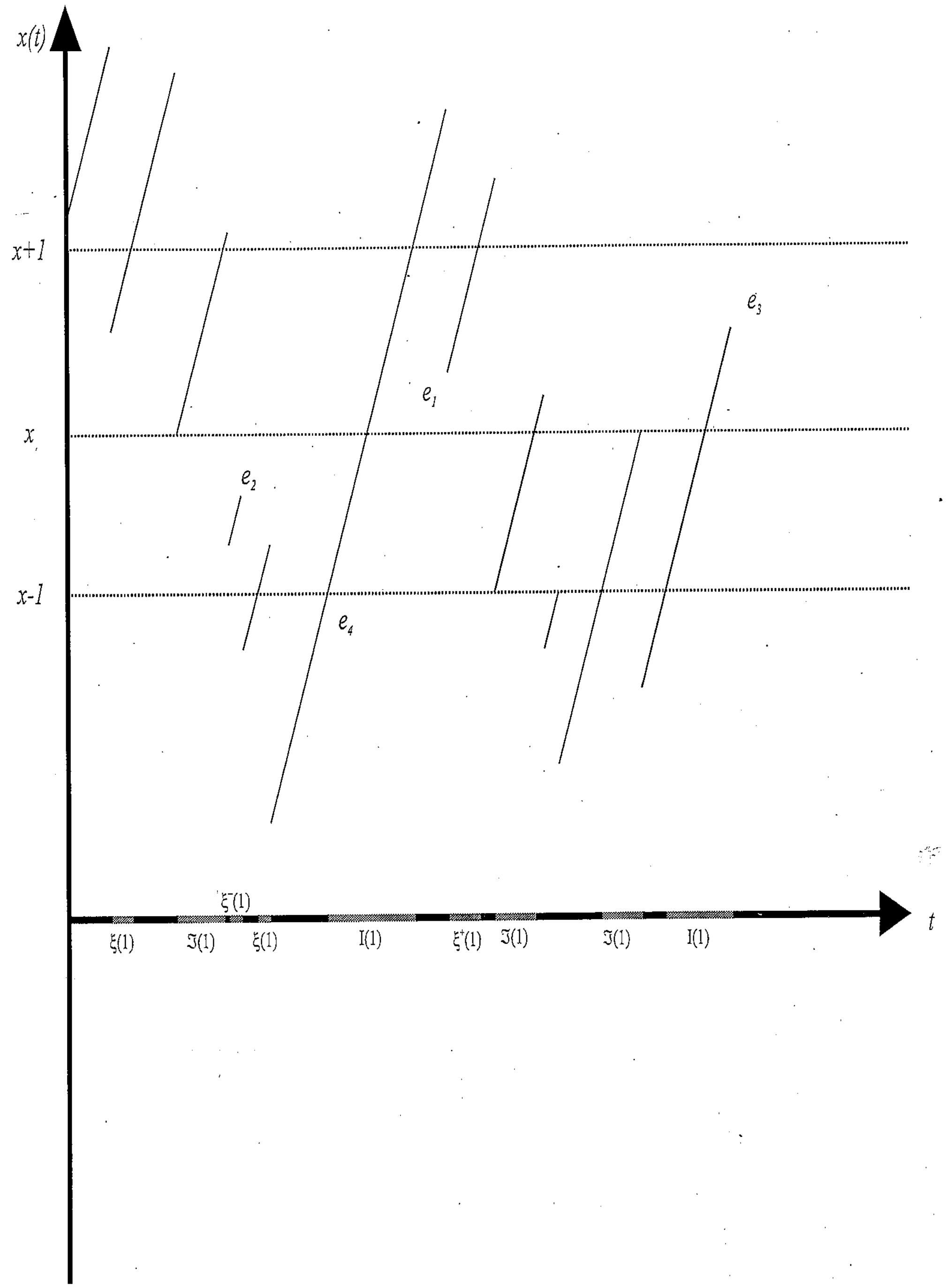


Figura 1.4: Diferentes tipos de trayectorias del proceso de riesgo en el intervalo $(x-1, x+1)$

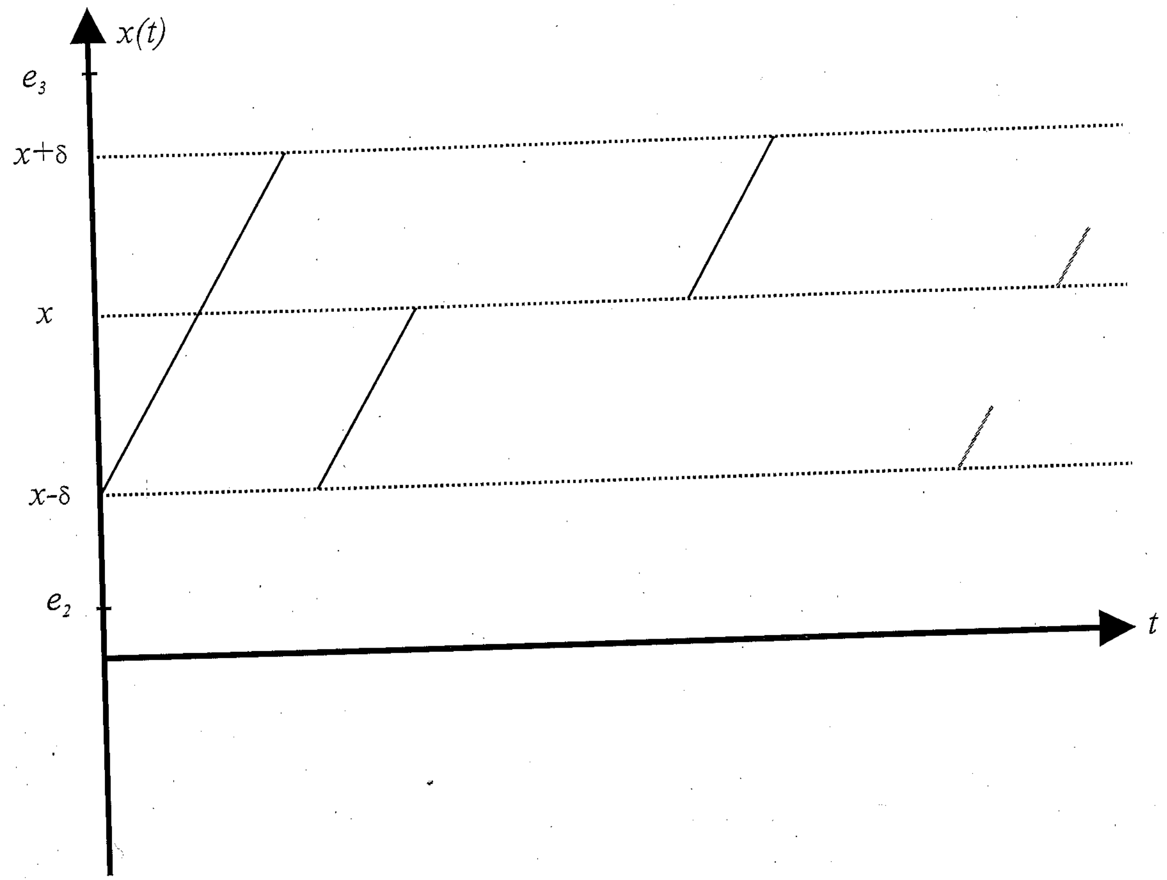


Figura 1.5: Cruzamientos en $(x-\delta, x+\delta)$

Sea $\delta := \min\{|e_i - x|, i = 1, 2, 3, 4\}$. Para $\eta < \delta$, observemos que el tipo de trayectorias que tenemos (Figura 1.5), son aquellas que se encuentran en el interior y en la frontera de $C(\eta)$, las líneas gruesas de la figura 1.5. Otro tipo de trayectoria (las líneas delgadas) no están en $(x-1, x+1)$. Recordando que el proceso tiene trayectorias con pendiente c, y notando que para el interior tiene medida 2η y la frontera η se sigue que,

$$\begin{aligned} L_{\eta,t}^{x} &= \frac{1}{2\eta}\left\{\sum_{I\in\mathcal{I}(\eta)} l\left(I\right) + \sum_{I\in\mathcal{F}(\eta)} l\left(I\right)\right\} \\ &= \frac{1}{2\eta}\left\{\sum_{I\in I(\eta)} \frac{2\eta}{c} + \sum_{I\in F(\eta)} \frac{\eta}{c}\right\}. \end{aligned} \tag{1.24}$$

Notando que $\sum\limits_{I\in I(\eta)} 1 = N_t^x$, se sigue

$$\begin{aligned} &\Pr\left[\left|L_{\eta,t}^{x}\left(u\right) - \frac{1}{c}N_t^x\right| > \theta \mid N_t = n, S_1 = s_1, \ldots, S_n = s_n\right] \\ &\quad = \Pr\left[\frac{1}{2\eta}\sum_{I\in\mathcal{F}(\eta)} l\left(I\right) > \theta \mid N_t = n, S_1 = s_1, \ldots, S_n = s_n\right]. \end{aligned} \tag{1.25}$$

Denotemos por $\Pr^*$ la probabilidad condicional $\Pr^*[\cdot] := \Pr[\cdot \mid N_t = n, S_1 = s_1, \ldots, S_n = s_n]$
Observemos que se cumple,
$\{\mathcal{F}(\eta) \neq \varnothing\} = \{\text{para algún } i \in \{1, \ldots, n\}, X(s_i) = x \text{ o } X(s_i-) = x\}$. Además,

$$\begin{aligned} &\overset{*}{\Pr}\left[\{\mathcal{F}(\eta) \neq \varnothing\}\right] \\ &\quad = \overset{*}{\Pr}\left[\{\text{para algún } i \in \{1, \ldots, n\}, X(s_i) = x \text{ o } X(s_i-) = x\}\right] \\ &\quad \leq \sum_{i=1}^{n}\left(\overset{*}{\Pr}\left[X(s_i) = x\right] + \overset{*}{\Pr}\left[X(s_i-) = x\right]\right). \end{aligned} \tag{1.26}$$

Basta demostrar que $\Pr^*[X(s_i) = x]$ y $\Pr^*[X(s_i-) = x]$ son cero. Usando ley de probabilidad total,

$$\begin{aligned} &\overset{*}{\Pr}\left[X(s_i) = x\right] \\ &\quad = \int \overset{*}{\Pr}\left[X(s_i) = x \mid X(s_i-) = y\right] \overset{*}{\Pr}\left[X(s_i-) \in dy\right] \\ &\quad = \int \overset{*}{\Pr}\left[R_1 = y - x\right] \overset{*}{\Pr}\left[X(s_i-) \in dy\right] \\ &\quad = \int \Pr\left[R_1 = y - x\right] \overset{*}{\Pr}\left[X(s_i-) \in dy\right] \;\; (R_1 \text{ es indep. de } N_t) \\ &\quad = 0 \;\; (R_1 \text{ es continua}), \end{aligned} \tag{1.27}$$

y

$$\overset{*}{\Pr}\left[X\left(s_{i}-\right)=x\right]=\int \overset{*}{\Pr}\left[R_{1}=y-\left(x-cw_{i}\right)\right]\overset{*}{\Pr}\left[X\left(s_{i-1}-\right)\in dy, W_{i}=w_{i}\right]=0. \tag{1.28}$$

De esta manera, se tiene que,

$$\overset{*}{\Pr}\left[\{\mathcal{F}(\eta)\neq\varnothing\}\right]=0,$$

de donde se sigue que

$$\Pr\left[\frac{1}{2\eta}\sum_{I\in\mathcal{F}(\eta)} l\left(I\right)>\theta\mid N_{t}=n, S_{1}=s_{1},\ldots,S_{n}=s_{n}\right]=0$$

de esta última igualdad obtenemos (1.22).

1.6 Tiempo local con horizonte infinito

Proposición 1.9. *Sea X un proceso de riesgo de renovación con reclamaciones con distribución absolutamente continua. Entonces, para cada $x\in\mathbb{R}$ y $t\geq 0$,*

$$E\left[L_{t}^{x}\right]=\int_{0}^{t} f\left(u+cs-x,s\right)ds, \tag{1.29}$$

donde $f\left(x,s\right)$ es la densidad de la distribución compuesta $\sum_{k=1}^{N_s} R_k$.

Demostración. Del teorema anterior, sabemos que el tiempo local de X existe, más aún,

$$\begin{aligned}
E\left[L_{t}^{x}\right]&=E\left[\lim_{\eta\to 0}\frac{1}{2\eta}\int_{0}^{t}1_{(x-\eta,x+\eta)}\left(X_{s}\right)ds\right]\\
&=\lim_{\eta\to 0}\frac{1}{2\eta}\int_{0}^{t}E\left[1_{(x-\eta,x+\eta)}\left(X_{s}\right)\right]ds \text{ (Fubini)}\\
&=\lim_{\eta\to 0}\frac{1}{2\eta}\int_{0}^{t}\Pr\left[u+cs-x-\eta<\sum_{k=1}^{N_s}R_{k}<u+cs-x+\eta\right]ds\\
&=\int_{0}^{t}\left(\lim_{\eta\to 0}\frac{1}{2\eta}\int_{u+cs-x-\eta}^{u+cs-x+\eta}f\left(y,s\right)dy\right)ds \text{ (T. de Lebesgue)}\\
&=\int_{0}^{t}f\left(u+cs-x,s\right)ds.
\end{aligned} \tag{1.30}$$

Teorema 1.10. *Sea X el proceso de riesgo clásico, cuya distribución de las reclamaciones es continua y sea $x \in \mathbb{R}$. Entonces*

a) $u \geq x$,

$$\Pr\left[N_{\infty}^{x}(u) = n\right] = \begin{cases} 1 - \psi(u-x) & \text{para} \quad n = 0 \\ \psi(u-x)(c - \lambda\mu)\lambda^{n-1}\mu^{n-1}/c^{n} & \text{para} \quad n = 1, 2, \ldots \end{cases}$$

b) $u < x$,

$$\Pr\left[N_{\infty}^{x}(u) = n\right] = (c - \lambda\mu)\lambda^{n-1}\mu^{n-1}/c^{n}, n = 1, 2, \ldots$$

Demostración. Trabajaremos el caso $x \geq u$. La demostración para el caso $u < x$ es similar. Nótese que, debido a que el proceso X es estacionario en el tiempo,

$$\Pr\left[N_{\infty}^{x}(u) = n\right] = \Pr\left[N_{\infty}^{0}(u-x) = n\right], x \geq u, n = 0, 1, \ldots$$

Por lo tanto, para demostrar el teorema es suficiente encontrar la distribución del número de cruzamientos desde abajo al nivel 0, iniciando con capital $u - x$. Este número es el mismo que el número de épocas negativas del proceso X. Entonces,

$$\Pr\left[N_{\infty}^{0}(u-x) = 0\right] = 1 - \psi(u-x).$$

Sí $m = 1$, entonces $\Pr\left[N_{\infty}^{0}(u-x) = 1\right]$ es igual a la probabilidad de que haya ruina iniciando con capital $u - x$, multiplicada por la probabilidad de que ya no haya ruina, después del primer momento T en el cual $X_t = 0$. Puesto que X tiene incrementos independientes y estacionarios, podemos suponer que el proceso inicia de nuevo en este tiempo t en el que $X_t = 0$, y después ya no hay ruina. Así,

$$\Pr\left[N_{\infty}^{0}(u-x) = 1\right] = \psi(u-x)(1 - \psi(0)).$$

sabemos que $\psi(0) = \lambda\mu/c$. De igual forma procedemos para $m \geq 2$, obteniendo

$$\Pr\left[N_{\infty}^{0}(u-x) = n\right] = \psi(u-x)(1 - \psi(0))(\psi(0))^{n-1}$$

Proposición 1.11. *Para $t < \ln\left(\frac{c}{\lambda\mu}\right)$, la transformada de Laplace de $N_{\infty}^{x}(u)$ esta dada por*

$$E\left[\exp\left\{tN_{\infty}^{x}(u)\right\}\right]=\begin{cases}(1-\psi(u-x))+\frac{\psi(u-x)(c-\lambda\mu)\exp\{t\}}{c-\lambda\mu e^{t}} & \text{para} \quad u\geq x\\ \frac{\exp\{t\}(c-\lambda\mu)}{c-\lambda\mu\exp\{t\}} & \text{para} \quad u<x.\end{cases} \tag{1.31}$$

Por lo tanto,

$$E\left[N_{\infty}^{x}(u)\right]=\begin{cases}\frac{c\psi(u-x)}{c-\lambda\mu} & \text{para} \quad u\geq x\\ \frac{c}{c-\lambda\mu} & \text{para} \quad u<x.\end{cases} \tag{1.32}$$

y

$$E\left[N_{\infty}^{x}(u)^{2}\right]=\begin{cases}\frac{c(c+\lambda\mu)\psi(u-x)}{(c-\lambda\mu)^{2}} & \text{para} \quad u\geq x\\ \frac{c(c+\lambda\mu)}{(c-\lambda\mu)^{2}} & \text{para} \quad u<x.\end{cases} \tag{1.33}$$

Demostración. Trabajaremos el caso $u\geq x$, el otro caso se demuestra de manera similar. Por ley de probabilidad total

$$\begin{aligned}
&E\left[\exp\left\{tN_{\infty}^{x}(u)\right\}\right]\\
&=E\left[E\left[\exp\left\{tN_{\infty}^{x}(u)\right\}\mid N_{\infty}^{x}(u)=n\right]\right]\\
&=\sum_{n=0}^{\infty}\exp\{tn\}\Pr\left[N_{\infty}^{x}(u)=n\right]\\
&=\Pr\left[N_{\infty}^{x}(u)=0\right]+\sum_{n=1}^{\infty}\exp\{tn\}\Pr\left[N_{\infty}^{x}(u)=n\right]\\
&=1-\psi(u-x)+\psi(u-x)(c-\lambda\mu)\sum_{n=1}^{\infty}\exp\{tn\}\left(\frac{\lambda\mu}{c}\right)^{n}\frac{1}{\lambda\mu}\\
&=1-\psi(u-x)+\psi(u-x)(c-\lambda\mu)\frac{1}{\lambda\mu}\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{\lambda\mu e^{t}}{c}\right)^{n}\\
&=1-\psi(u-x)+\psi(u-x)(c-\lambda\mu)\frac{1}{\lambda\mu}\frac{\frac{\lambda\mu e^{t}}{c}}{1-\frac{\lambda\mu e^{t}}{c}}\\
&=1-\psi(u-x)+\frac{\psi(u-x)(c-\lambda\mu)e^{t}}{c-\lambda\mu e^{t}} \qquad (1.34)
\end{aligned}$$

Proposición 1.12. *Para $u<a<b$ y $k\geq 0$, el funcional de Laplace del tiempo de ocupación en $[a,b]$ del proceso clásico de riesgo con distribución continua de las reclamaciones esta dado por,*

$$E\left[\exp\left\{-k\int_{0}^{\infty}1_{[a,b]}(X_{s})\,ds\right\}\right]=\frac{(c-\lambda\mu)\exp\left\{-\frac{k(b-a)}{c}\right\}}{c-\lambda\mu\exp\left\{-\frac{k(b-a)}{c}\right\}}, \tag{1.35}$$

entonces,

$$E\left[\int_0^\infty 1_{[a,b]}(X_s)\,ds\right] = \frac{b-a}{c-\lambda\mu}, \tag{1.36}$$

y

$$E\left[\left(\int_0^\infty 1_{[a,b]}(X_s)\,ds\right)^2\right] = \frac{(b-a)^2(c+\lambda\mu)}{c}. \tag{1.37}$$

Demostración. Usando los resultados anteriores tenemos,

$$\begin{aligned}
&E\left[\exp\left\{-k\int_0^\infty 1_{[a,b]}(X_s)\,ds\right\}\right]\\
&= E\left[\exp\left\{-k\int_a^b L_\infty^x(u)\,dx\right\}\right] \quad (1.21)\\
&= E\left[\exp\left\{-\frac{k}{c}\int_a^b N_\infty^x(u)\,dx\right\}\right] \quad \text{(Teorema 1.8)}\\
&= \sum_{n=1}^\infty \Pr\left[N_\infty^x(u)=n\right]\exp\left\{-\frac{k}{c}\int_a^b n dx\right\}\\
&= \sum_{n=1}^\infty \exp\left\{-\frac{k}{c}n(b-a)\right\}(1-\psi(0))\,\psi(0)^{n-1} \quad \text{(Teorema 1.10)}\\
&= \frac{(1-\psi(0))}{\psi(0)}\sum_{n=1}^\infty\left(\exp\left\{-\frac{k}{c}(b-a)\right\}\psi(0)\right)^n\\
&= \frac{(c-\lambda\mu)\exp\left\{-\frac{k(b-a)}{c}\right\}}{c-\lambda\mu\exp\left\{-\frac{k(b-a)}{c}\right\}}.
\end{aligned} \tag{1.38}$$

Cuando la distribución de las reclamaciones es $\exp\left\{\frac{1}{\mu}\right\}$, se obtienen las siguientes expresiones para la media de ocupación en horizonte infinito $Y_\infty(a,b)$.

Proposición 1.13. *Sea X el proceso de riesgo clásico con distribución de las reclamaciones exponencial con media μ. Entonces,*

$$E\left[\int_0^\infty 1_{[a,b]}(X_s)\,ds\right] = \begin{cases} \frac{1}{\rho(c-\lambda\mu)}\left[\mu+\rho(b-u)-\mu\exp\left\{\frac{\rho(a-u)}{\mu(1+\rho)}\right\}\right] & \text{para} \quad a\le u\le b\\ = \frac{b-a}{(c-\lambda\mu)} & \text{para} \quad u<a\\ = \frac{\mu}{\rho(c-\lambda\mu)}\left[\exp\left\{\frac{\rho(b-u)}{\mu(1+\rho)}\right\}-\exp\left\{\frac{\rho(a-u)}{\mu(1+\rho)}\right\}\right] & \text{para} \quad u>b. \end{cases} \tag{1.39}$$

Demostración. El caso $u < a$ se sigue de la Proposición 1.12. Ahora consideremos el caso $a \leq u \leq b$,

$$
\begin{aligned}
& E\left[\int_0^\infty 1_{[a,b]}(X_s)\, ds\right] \\
& = E\left[\int_R 1_{[a,b]}(x)\, L_\infty^x dx\right] \text{ (1.21)} \\
& = E\left[\int_a^b L_\infty^x dx\right] \\
& = E\left[\int_a^b \frac{1}{c} N_\infty^x(u)\, dx\right] \text{ (Teorema 1.8)} \\
& = \frac{1}{c}\int_a^b \int N_\infty^x(u)\, dx \text{ (Fubini)} \\
& = \frac{1}{c}\int_a^b E\left[N_\infty^x(u)\right] dx \\
& = \frac{1}{c}\int_a^u \frac{c\psi(u-x)}{c-\lambda\mu} dx + \frac{1}{c}\int_u^b \frac{c}{c-\lambda\mu} dx \text{ (Prop. 1.11)} \\
& = \frac{1}{c-\lambda\mu}\int_a^u \frac{1}{1+\rho}\exp\left\{-\frac{\rho(u-x)}{\mu(1+\rho)}\right\} dx + \frac{b-u}{c-\lambda\mu} \\
& = \frac{1}{\rho(c-\lambda\mu)}\left[\mu + \rho(b-u) - \mu\exp\left\{\frac{\rho(a-u)}{\mu(1+\rho)}\right\}\right].
\end{aligned}
\tag{1.40}
$$

En el caso $u > b$,

$$
\begin{aligned}
& E\left[\int_0^\infty 1_{[a,b]}\left(X_s\right) ds\right] \\
& \quad = E\left[\int_R 1_{[a,b]}\left(x\right) L_\infty^x dx\right] \quad (1.21) \\
& \quad = E\left[\int_a^b L_\infty^x dx\right] \\
& \quad = E\left[\int_a^b \frac{1}{c} N_\infty^x\left(u\right) dx\right] \quad \text{(Teorema 1.8)} \\
& \quad = \frac{1}{c}\int_a^b \int N_\infty^x\left(u\right) dx \text{ (Fubini)} \\
& \quad = \frac{1}{c}\int_a^b E\left[N_\infty^x\left(u\right)\right] dx \\
& \quad = \frac{1}{c}\int_a^b \frac{c\psi\left(u-x\right)}{c-\lambda\mu} dx \\
& \quad = \frac{1}{c-\lambda\mu}\int_a^b \frac{1}{1+\rho}\exp\left\{-\frac{\rho\left(u-x\right)}{\mu\left(1+\rho\right)}\right\} dx \\
& \quad = \frac{\mu}{\rho\left(c-\lambda\mu\right)}\left[\exp\left\{\frac{\rho\left(-u\right)}{\mu\left(1+\rho\right)}\right\} - \exp\left\{\frac{\rho\left(a-u\right)}{\mu\left(1+\rho\right)}\right\}\right]. \qquad (1.41)
\end{aligned}
$$

1.7 El costo de recuperación

Sea X el proceso clásico de riesgo, y sea $0 \leq t \leq \infty, -\infty \leq a \leq b \leq +\infty$. Picard [11], define el **costo de recuperación** $M\left(t\right)\left(a,b\right)$ de X en $\left(a,b\right)$:

$$M\left(t\right)\left(a,b\right) := E\left[\int_0^t \left|X_s\right| \cdot 1_{\left(a,b\right)}\left(X_s\right) ds\right].$$

Más generalmente, definamos el costo de recuperación

$$Q\left(t\right)\left(a,b\right) := E\left[\int_0^t g\left(X_s\right) \cdot 1_{\left(a,b\right)}\left(X_s\right) ds\right], \qquad (1.42)$$

donde $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ es medible y acotada.
La función g podría escogerse de tal modo que dependa del tamaño de las reclamaciones que tengan más impacto; por ejemplo, si $g(x) = x^2$ las reclamaciones grandes son las que más importan. Tal información es útil, ya que generalmente, las reclamaciones grandes son las que llevan a la quiebra a las aseguradoras.

Supongamos que la distribución de las reclamaciones de X es exponencial con media μ. Entonces, para la función de distribución F de las reclamaciones agregedas al tiempo t tenemos,

$$F(x,t) = \Pr\left[\sum_{k=1}^{N_t} R_k \leq x\right] = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(\lambda t)^n}{n!} \int_0^x \frac{\mu^n}{(n-1)!} y^{n-1} \exp\{-\mu y\}\, dy.$$

Aplicando la Proposición 1.11, obtenemos

$$E\left[L_t^x\right] = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(\lambda\mu)^n}{(n-1)!n!} \int_0^t s^n (u+cs-x)^{n-1} \exp\{-\mu(u+cs-x)\}\, ds.$$

De esta última expresión y de (1.21) se obtiene el costo medio de recuperación de X :

$$\begin{aligned}
&M(t)(a,b) \\
&\quad = E\left[\int_0^t |X_s| \cdot 1_{(a,b)}(X_s)\, ds\right] \\
&\quad = \int_a^b |x|\, E\left[L_t^x\right] dx \\
&\quad = \int_a^b |x| \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(\lambda\mu)^n}{(n-1)!n!} \int_0^t s^n (u+cs-x)^{n-1} \exp\{-\mu(u+cs-x)\}\, dsdx \\
&\quad = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(\lambda\mu)^n}{(n-1)!n!} \int_0^t s^n \int_a^b |x| (u+cs-x)^{n-1} \exp\{-\mu(u+cs-x)\}\, dsdx.
\end{aligned} \tag{1.43}$$

La siguiente proposición se obtiene directamente de los resultados anteriores.

Proposición 1.14. *Sea X el proceso clásico de riesgo, cuyas reclamaciones tienen distribución continua, y sea $-\infty \leq a \leq b \leq +\infty$. Entonces, el costo medio de recuperación $M(\infty)(a,b)$ de X en horizonte infinito para el intervalo (a,b) esta dado por la fórmula*

$$M(\infty)(a,b) = \begin{cases} \frac{1}{c-\lambda\mu} \int_a^b |x|\, dx & \text{para} \quad u \leq a \\ = \frac{1}{c-\lambda\mu} \left[\int_a^u |x|\, \psi(u-x)\, dx + \int_u^b |x|\, dx\right] & \text{para} \quad a \leq u \leq b \\ = \frac{1}{c-\lambda\mu} \int_a^b |x|\, \psi(u-x)\, dx & \text{para} \quad u \geq b \end{cases} \tag{1.44}$$

Demostración.

- $u \leq a$

$$\begin{aligned}
&M(\infty)(a,b)\\
&\quad = E\left[\int_0^{\infty} |X_s| \cdot 1_{(a,b)}(X_s)\, ds\right] \text{ (definición)}\\
&\quad = \int_a^b |x|\, E\left[L_{\infty}^x\right] dx \text{ (1.21)}\\
&\quad = \frac{1}{c}\int_a^b |x|\, E\left[N_{\infty}^x\right] dx \text{ (Teorema 1.8)}\\
&\quad = \frac{1}{c}\int_a^b |x| \frac{c}{c-\lambda\mu} dx \text{ (1.32)}\\
&\quad = \frac{1}{c-\lambda\mu}\int_a^b |x|\, dx.
\end{aligned} \tag{1.45}$$

- $a \leq u \leq b$

$$\begin{aligned}
&M(\infty)(a,b)\\
&\quad = E\left[\int_0^{\infty} |X_s| \cdot 1_{(a,b)}(X_s)\, ds\right]\\
&\quad = \int_a^b |x|\, E\left[L_{\infty}^x\right] dx\\
&\quad = \frac{1}{c}\int_a^b |x|\, E\left[N_{\infty}^x\right] dx\\
&\quad = \frac{1}{c}\int_a^u |x|\, E\left[N_{\infty}^x\right] dx + \frac{1}{c}\int_u^b |x|\, E\left[N_{\infty}^x\right] dx\\
&\quad = \frac{1}{c}\int_a^u |x| \frac{c\psi(u-x)}{c-\lambda\mu} dx + \frac{1}{c}\int_u^b |x| \frac{c}{c-\lambda\mu} dx \text{ (Prop. 1.11)}\\
&\quad = \frac{1}{c-\lambda\mu}\left[\int_a^u |x|\,\psi(u-x)\, dx + \int_u^b |x|\, dx\right],
\end{aligned} \tag{1.46}$$

- $u \geq b$

$$\begin{aligned}
&M(\infty)(a,b) \\
&= E\left[\int_0^\infty |X_s| \cdot 1_{(a,b)}(X_s)\, ds\right] \\
&= \int_a^b |x|\, E\left[L_\infty^x\right] dx \\
&= \frac{1}{c}\int_a^b |x|\, E\left[N_\infty^x\right] dx \\
&= \frac{1}{c}\int_a^b |x| \frac{c\psi(u-x)}{c-\lambda\mu} dx \text{ (Prop. 1.11)} \\
&= \frac{1}{c-\lambda\mu}\int_a^u |x|\,\psi(u-x)\, dx \qquad (1.47)
\end{aligned}$$

Finalmente, para reclamaciones que tienen distribución exponencial con media μ, la probabilidad de ruina esta dada por,

$$\psi(z) = (1+\rho)^{-1}\exp\left\{-\rho z \mu^{-1}(1+\rho)^{-1}\right\}.$$

Aplicando la proposición anterior para $0 < a \leq u \leq b$ tenemos,

$$\begin{aligned}
M(\infty)(a,b) &= \frac{\mu(1+\rho)u}{\rho} \\
&+ \mu(1+\rho)\left(\mu(1+\rho) - \frac{a}{\rho}\right)\exp\left\{-\frac{\rho(u-a)}{\mu(1+\rho)}\right\} \\
&- \frac{\mu^2(1+\rho)^2}{\rho^2} + \frac{b^2-u^2}{2(c-\lambda\mu)}, \qquad (1.48)
\end{aligned}$$

para $0 \leq b \leq u$,

$$M(\infty)(a,b) = \frac{\mu(1+\rho)b}{\rho} + \mu(1+\rho)\left(\mu(1+\rho) - \frac{a}{\rho}\right)\exp\left\{-\frac{\rho(b-a)}{\mu(1+\rho)}\right\} - \frac{\mu^2(1+\rho)^2}{\rho^2}. \qquad (1.49)$$

1.8 Ejemplos numéricos

Sin lugar a dudas la probabilidad de ruina nos brinda información relevante del comportamiento del surplus, pero en general de difícil de estimar, de esta manera una de las mejores alternativas es usar métodos numéricos que nos ayuden a calcular, aproximar o acotar (en el peor de los casos) la probabilidad de ruina.

Adicionalmente, en general la distribución de la suma de las reclamaciones no es fácil de determinar, a continuación describiremos y usaremos el método propuesto por De Vylder et al. [5] para aproximar el tiempo local esperado.

1.8.1 Algorítmo

Usamos el procedimiento dado por De Vylder y Goovaerts [5], por el cual variables aleatorias continuas G, se aproximan con variables aleatorias discretas X, de tal manera que ambas variables tienen la misma esperanza. Este método es efectivo cuando la esperanza es suficientemente grande. Sea F la función de distribución de G y f la densidad de X.

Paso 1: Para $k = 0, 1, \ldots$ las densidades $f_k = P(X = k)$ se definen recursivamente por la fórmula

$$f_0 + \ldots + f_k = \int_k^{k+1} F(x)\, dx,$$

por lo tanto

$$f_{k+1} = P(X = k+1) = \int_{k+1}^{k+2} F(x)\, dx - \int_k^{k+1} F(x)\, dx$$

Paso 2: Aplicaremos el algorítmo de Panjer (ver Teorema 4.4.2 de [12]) para calcular recursivamente la densidad de la reclamación agregada correspondiente a las reclamaciones discretas aproximantes. Tenemos

$$F_0(t) = F(0, t) = \exp\{t(f_0 - 1)\} = \exp\{-t\}$$

y

$$F_j(t) := F(j, t) = \sum_{k=1}^{j} \frac{tk}{j} f_k F_{j-k}(t), j = 1, 2, \ldots$$

Paso 3: Aplicando la proposición 1.9, aproximamos $E[L_t^x]$ como sigue,

$$\begin{aligned} &E[L_t^x] \\ &= \int_0^t F(u + cs - x, s)\, ds \\ &= \sum_{n=1}^{[t]} F(u + cn - x, n). \end{aligned} \tag{1.50}$$

1.8.2 Proceso de riesgo con reclamaciones distribuidas exponencialmente con media 20

En el caso en que las reclamaciones tienen distribución exponencial, se conoce la expresión explícita de la probabilidad de ruina y de la distribución de las reclamaciones acumuladas, de tal modo que podemos comparar los resultados de nuestra aproximación discreta al valor esperado del tiempo local con el valor exacto de la esperanza del tiempo local. A continuación se muestran los resultados obtenidos para diferentes valores de $t, c, u, (a, b)$.

$t = 5$, $c = 22$, $u = 1$:

$E[L_t^x]$	E. exacta	(a,b)
1.43912345	6	(1,5)
1.43912455	3.9	(1,4)
1.24538041	3	(2,4)
0.9454006	2.75	(4,5)

$t = 5$, $c = 30$, $u = 1$:

$E[L_t^x]$	E. exacta	(a,b)
0.85005323	1.2	(1,5)
0.79808672	0.75	(1,4)
0.69074396	0.6	(2,4)

Observamos que en la primer tabla la aproximación no es muy buena, mientras que en el segundo caso cuando $c = 30$, la proximación mejora notablemente, ésto es porque se está calculando un mayor número de f_k's

$t = 5$, $c = 30$, $u = 1$:

$E[L_t^x]$	E. exacta	(a,b)
112.2535559	128	(30,34)
79.83174594	94	(30,33)
77.2481644	64	(31,33)
73.047038	53	(33,34)

En este caso, la aproximación es buena, y nuevamente se debe a que se calcula un mayor número de probabilidades f_k.

Capítulo 2

Un modelo de riesgo con inflación estocástica

2.1 Notación y terminología

Recordemos que esta sección es una generalización del trabajo de Waters [10], de tal forma que las demostraciones de este capítulo no se encuentran en ninguna otra literatura. Trabajaremos con el siguiente modelo de riesgo. Sea $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ un espacio de probabilidad. Supongamos que $\{Y_n\}_{n=1}^{\infty}$ es una sucesión de variables aleatorias i.i.d. en $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ con función de distribución F, media finita y función característica ϕ. Denotemos por Y_n el capital que recibe la compañía (sin el factor de inflación) en el n-ésimo período de tiempo (las primas menos las reclamaciones) y sea $\{\Lambda_n\}_{n=1}^{\infty}$ una sucesión de variables aleatorias independientes en $(\Omega, \mathcal{F}, P)$, que son independientes de la sucesión $Y_n, n = 1, 2...$ y Λ_n denotan el factor de inflación en el n-ésimo período de tiempo.

Supongamos que la distribución de Λ_n coincide con la de la variable aleatoria Λ^n, donde Λ es una variable aleatoria dada tal que

$$\Pr(\Lambda > 1) = 1. \tag{2.1}$$

Sea Z_n el capital acumulado de la compañía al tiempo n y sea $U := Z_0$ el capital inicial. Entonces, el proceso de riesgo esta dado por

$$Z_n = U + \sum_{j=1}^{n} \Lambda_j Y_j. \tag{2.2}$$

Usando la teoria de cadenas de Markov, demostraremos, que bajo ciertas condiciones para Λ, tenemos ruina segura para la compañía de seguros. Este resultado es una extensión del resultado de Waters [10], para un modelo de riesgo similar con factor de inflación λ que es constante.

2.2 Probabilidad de ruina

Definimos una nueva sucesión de variables aleatorias $\{V_n\}_{n=1}^{\infty}$ como sigue,

$$V_1 = Y_1, \tag{2.3}$$

$$V_n = Y_n + \frac{V_{n-1}}{\Lambda_1} = Y_n + \sum_{j=1}^{n-1} \frac{Y_j}{\Lambda_{n-j}} \text{ para } n \geq 2. \tag{2.4}$$

Sean F_n y ϕ_n la función de distribución y la función característica de V_n. Denotaremos por $\mathcal{B}(\mathbb{R})$ la σ-álgebra de los conjuntos de Borel.

Proposición 2.1. *El proceso estocástico $\{V_n\}_{n=1}^{\infty}$ es una cadena de Markov.*

Demostración. Tomemos $A \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$, para algún n,

$$\begin{aligned}
\Pr(V_n \in A \mid V_1, \ldots, V_{n-1}) &= \Pr\left(Y_n + \frac{V_{n-1}}{\Lambda_1} \in A \mid V_1, \ldots, V_{n-1}\right) \\
&= \Pr\left(Y_n \in A \setminus \left\{\frac{V_{n-1}}{\Lambda_1}\right\} \mid V_1, \ldots, V_{n-1}\right) \\
&= \Pr\left(Y_n \in A \setminus \left\{\frac{V_{n-1}}{\Lambda_1}\right\} \mid V_{n-1}\right) \text{(indep. entre } \Lambda_1 \text{ y } V_i) \\
&= \Pr(V_n \in A \mid V_{n-1}).
\end{aligned}$$

■

Teorema 2.2. *Existe una función de distribución G tal que*

$$\lim_{n \to \infty} F_n(x) = G(x), \forall x \in (-\infty, \infty), \tag{2.5}$$

y G es continua.

Demostración. Primero recordemos que podemos escribir $\phi_n(t)$ como,

$$\begin{aligned}
\phi_n(t) &= E\left[E\left[\exp(itV_n) \mid \Lambda\right]\right] \\
&= E\left[\phi(t) \prod_{j=1}^{n-1} \phi^*\left(\frac{t}{\Lambda_j}\right)\right],
\end{aligned}$$

donde $\phi^*\left(\frac{t}{\Lambda_j}\right) = E\left[\exp\left(\frac{t}{\Lambda_j}Y\right) \mid \Lambda\right]$.

Ahora, para cualesquiera enteros positivos fijos n y m, tenemos

$$\begin{aligned}
\left|\phi_m(t) - \phi_{m+n}(t)\right| &= \left|E\left[\phi(t)\prod_{j=1}^{m-1}\phi^*\left(\frac{t}{\Lambda_j}\right) - \phi(t)\prod_{j=1}^{m+n-1}\phi^*\left(\frac{t}{\Lambda_j}\right)\right]\right| \\
&\leq E\left|\phi(t)\prod_{j=1}^{m-1}\phi^*\left(\frac{t}{\Lambda_j}\right) - \phi(t)\prod_{j=1}^{m+n-1}\phi^*\left(\frac{t}{\Lambda_j}\right)\right| \\
&\leq E\left|1 - \prod_{j=m}^{m+n-1}\phi^*\left(\frac{t}{\Lambda_j}\right)\right| \\
&\leq E\left[E\left[|V_n|\right]\Lambda^{-m}|t| \mid \Lambda\right] \\
&\leq E\left[E\left[\frac{\sum\limits_{j=1}^{n}|Y_j|}{\Lambda^{n-j}}\right]\Lambda^{-m}|t| \mid \Lambda\right] \\
&= E\left[|t|\,E|Y_1|\,\Lambda^{-m}\sum_{j=1}^{n}\frac{1}{\Lambda^{n-j}} \mid \Lambda\right] \\
&= E\left[|t|\,E|Y_1|\frac{\Lambda}{(\Lambda-1)\Lambda^m}\right] \\
&= |t|\,E|Y_1|\,E\left[\frac{\Lambda}{(\Lambda-1)\Lambda^m}\right],
\end{aligned}$$

y observemos que ésta expresión es independiente de n.

Supongamos que,

$$E\left[\frac{\Lambda}{\Lambda-1}\right] < \infty. \tag{2.6}$$

Usando el teorema de convergencia dominada,

$$\lim_{m\to\infty}\left|\phi_m(t) - \phi_{m+n}(t)\right| \to 0,$$

de donde $\{\phi_n(t)\}_{n=1}^{\infty}$ converge para todo $t \in (-\infty, \infty)$. Denotemos el límite por $\varphi(t)$. Entonces se tiene

$$
\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty} |\varphi(t) - \phi(0)| &\leq \lim_{n\to\infty} |\varphi(t) - \phi_n(t)| + \lim_{n\to\infty} |\phi_n(t) - \phi(0)| \\
&= \lim_{n\to\infty} |\phi_n(t) - 1| \\
&\leq E\left[E\left[|V_n|\right] |t| \mid \Lambda\right] \\
&\leq E\left[|t|\, E|Y_1| \sum_{j=1}^{n} \frac{1}{\Lambda_{n-1}} \mid \Lambda\right] \\
&= |t|\, E|Y_1|\, E\left[\frac{\Lambda}{\Lambda - 1}\right].
\end{aligned}
$$

Por lo anterior $\{F_n(t)\}_{n=1}^{\infty}$ converge en distribución a una función de distribución G. Demostraremos que G es continua. Usando (2.4) tenemos

$$
\Pr(V_n \leq x) = F_n(x) = \int_1^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} F\left(x - \frac{z}{\Lambda} \mid \Lambda\right) dF_n(z)\, d\Lambda(\lambda),
$$

por lo tanto $F(x)$ es continua para todo $x \in (-\infty, \infty)$.

Finalmente, por la continuidad de $F(x)$ y convergencia débil

$$
\begin{aligned}
G(x) &= \lim_{n\to\infty} F_n(x) \\
&= \lim_{n\to\infty} \int_1^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} F\left(x - \frac{z}{\Lambda} \mid \Lambda\right) dF_n(z)\, d\Lambda(\lambda) \\
&= \int_1^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} F\left(x - \frac{z}{\Lambda} \mid \Lambda\right) dG(z)\, d\Lambda(\lambda).
\end{aligned}
$$

Esta es una función continua de x, entonces $G(\cdot)$ es continua.

■

Sea $A \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$, denotemos por $\Pr_n(x, A)$ la probabilidad de transición en n pasos de la cadena de Markov $\{V_n\}_{n=1}^{\infty}$, esto es

$$
\begin{aligned}
\Pr_n(x, A) &:= \Pr\left[V_{m+n} \in A \mid V_m = x\right] \\
&= \int_1^{\infty} \Pr\left[V_{m+n} \in A \mid V_m = x, \Lambda\right] d\Lambda(\lambda),
\end{aligned}
$$

para cualquier entero positivo m. Denotemos por μ la medida inducida por G en $\mathcal{B}(\mathbb{R})$,

$$\mu(A) = \int_{y\in A} dG(y)$$

Teorema 2.3. *Para cualquier $A \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$, μ es una medida invariante de la cadena $\{V_n\}_{n=1}^{\infty}$, es decir,*

$$\begin{aligned}
\mu(A) &= \int_{y=-\infty}^{\infty} \Pr_n(y, A)\,\mu(dy) \\
&= \int_{y=-\infty}^{\infty} \int_{1}^{\infty} \Pr\left[V_{m+n} \in A \mid V_m = y, \Lambda\right] d\Lambda(\lambda)\,\mu(dy). \qquad (2.7)
\end{aligned}$$

Demostración. Por el teorema de clase monótona, es suficiente demostrar (2.7) cuando A es de la forma $(-\infty, x)$ para cualquier $x \in \mathbb{R}$. Notemos que,

$$\Pr_n(y, (-\infty, x)) = \int_1^{\infty} F_n\left(x - \frac{y}{\Lambda} \mid \Lambda\right) d\Lambda(\lambda),$$

y demostramos que $\{F_n(\cdot)\}_{n=1}^{\infty}$ converge en distribución a G, y para n, x, y, λ y A fijos, $\Pr_n\left(x - \frac{y}{\lambda}\right)$ es una función continua. Finalmente,

$$\begin{aligned}
\mu\{(-\infty, x)\} &= \lim_{n\to\infty} \Pr_n\left(\frac{z}{\lambda}, (-\infty, x)\right) \\
&= \lim_{n\to\infty} \int_{y=-\infty}^{\infty} \int_{1}^{\infty} \Pr\left[V_{m+n} < x \mid V_m = y, \Lambda\right] d\Lambda(\lambda)\, dF_n\left(y - \frac{z}{\lambda}\right) \\
&= \int_{y=-\infty}^{\infty} \int_{1}^{\infty} \Pr\left[V_{m+n} < x \mid V_m = y, \Lambda\right] d\Lambda(\lambda)\, dG(y) \\
&= \int_{y=-\infty}^{\infty} \int_{1}^{\infty} \Pr\left[V_{m+n} < x \mid V_m = y, \Lambda\right] d\Lambda(\lambda)\,\mu(dy).
\end{aligned}$$

■

Por conveniencia notacional, denotaremos por $\Pr_n^*(x, A)$ la probabilidad de transición en n pasos de la cadena de Markov $\{V_n\}_{n=1}^{\infty}$ dada $\Lambda(\omega) = \lambda$,

$$\Pr_n^*(x, A) = \Pr\left[V_{n+m} \in A \mid V_m = x, \Lambda(\omega) = \lambda\right].$$

Teorema 2.4. *Sea $a \in \mathbb{R}$. Sí*

$$F(a) > 0 \text{ entonces } G\left(\frac{a}{1-\lambda^{-1}}\right) > 0 \text{ c.s.}, \tag{2.8}$$

$$F(a) < 1 \text{ entonces } G\left(\frac{a}{1-\lambda^{-1}}\right) < 1 \text{ c.s.} \tag{2.9}$$

Demostración. Demostraremos (2.8), y (2.9) se demuestra de manera similar. Tomamos $b \in \mathbb{R}$ tal que $G(b) > 0$. Y sean $\varepsilon_1 > 0$, $\varepsilon_2 > 0$ y $\omega \in \Omega$, definimos una nueva variable aleatoria $N : \Omega \to \mathbb{N}$ tal que,

$$F_n(b) > G(b) - \varepsilon_1 > 0, \text{ para toda } n \geq N(\omega),$$

y

$$\underset{n}{\overset{*}{\Pr}}\left(b, \left(-\infty, a\frac{1-\lambda^{-n}}{1-\lambda^{-1}} + b\lambda^{-n}\right)\right) > 0, \text{ para toda } n \geq N(\omega).$$

La última condición se cumple porque,

$$\begin{aligned}
&\underset{n}{\overset{*}{\Pr}}\left(b, \left(-\infty, a\frac{1-\lambda^{-n}}{1-\lambda^{-1}} + b\lambda^{-n}\right)\right) \\
&= \Pr\left(V_{n+m} \leq a\frac{1-\lambda^{-n}}{1-\lambda^{-1}} + b\lambda^{-n} \mid V_m = b, \Lambda(\omega) = \lambda\right) \\
&= \Pr\left(\sum_{j=1}^{m+n} \frac{Y_j}{\Lambda^{m+n-j}} \leq a\frac{1-\lambda^{-n}}{1-\lambda^{-1}} + b\lambda^{-n} \mid V_m = b, \Lambda(\omega) = \lambda\right) \\
&= \Pr\left(\sum_{j=1}^{m} \frac{Y_j}{\Lambda^{m+n-j}} + \sum_{j=m+1}^{m+n} \frac{Y_j}{\Lambda^{m+n-j}} \leq a\frac{1-\lambda^{-n}}{1-\lambda^{-1}} + b\lambda^{-n} \mid V_m = b, \Lambda(\omega) = \lambda\right) \\
&= \Pr\left(\frac{1}{\Lambda^n}\sum_{j=1}^{m} \frac{Y_j}{\Lambda^{m-j}} + \sum_{j=1}^{n} \frac{Y_j}{\Lambda^{n-j}} \leq a\frac{1-\lambda^{-n}}{1-\lambda^{-1}} + b\lambda^{-n} \mid V_m = b, \Lambda(\omega) = \lambda\right) \\
&= \Pr\left(\frac{b}{\lambda^n} + \sum_{j=1}^{n} \frac{Y_j}{\lambda^{n-j}} \leq a\frac{1-\lambda^{-n}}{1-\lambda^{-1}} + b\lambda^{-n}\right) \\
&= \Pr\left(\sum_{j=1}^{n} \frac{Y_j}{\lambda^{n-j}} \leq a\frac{1-\lambda^{-n}}{1-\lambda^{-1}}\right) \\
&\geq \prod_{j=1}^{n} \Pr(Y_j \leq a) > 0.
\end{aligned} \tag{2.10}$$

Ahora, para algún $n \geq 2N(\omega)$ y tomando $c \in \mathbb{R}$ tal que $c < b$,

$$\begin{aligned} F_n\left(\frac{a}{1-\lambda^{-1}}+\varepsilon_2\right) &\geq \int_{-\infty}^{b}\int_{1}^{\infty} \overset{*}{\underset{n}{\Pr}}\left(c, \left(-\infty, \frac{a}{1-\lambda^{-1}}\right)\right) d\Lambda(\lambda) dF(c) \\ &\geq \int_{-\infty}^{b}\int_{1}^{\infty} \overset{*}{\Pr}\left(Y_{n-N(\omega)} \leq c\right) \overset{*}{\underset{N(w)}{\Pr}}\left(c, \left(-\infty, \frac{a}{1-\lambda^{-1}}\right)\right) d\Lambda(\lambda) dF(c) \\ &\geq (G(b)-\varepsilon_1) \prod_{j=1}^{N(w)} \Pr(Y_j \leq a). \end{aligned}$$

Así,

$$\begin{aligned} G\left(\frac{a}{1-\lambda^{-1}}+\varepsilon_2\right) &= \lim_{n\to\infty} F_n\left(\frac{a}{1-\lambda^{-1}}+\varepsilon_2\right) \\ &\geq (G(b)-\varepsilon_1) \prod_{j=1}^{N(\omega)} \Pr(Y_j \leq a). \end{aligned}$$

El resultado se sigue ya que ε_1 y ε_2 son arbitrarios y G es continua.

■

Trabajaremos con la distribución de V_n, para determinar cuando un intervalo abierto es transitorio o persistente. Por lo que el siguiente paso es dar condiciones necesarias bajo las cuales un intervalo abierto sea transitorio.

Teorema 2.5. *Para cualquier intervalo abierto* (x_1, x_2) *(posiblemente infinito), sí*
$\mu\{(x_1, x_2)\} > 0$ *entonces*

$$\Pr[V_n \in (x_1, x_2) \text{ sólo para un número finito de valores de } n] < 1, \text{ c.s.} \quad (2.11)$$

Demostración. Supongamos que,

$$\Pr[V_n \in (x_1, x_2) \text{ sólo para un número finito de valores de } n \mid \Lambda(\omega) = \lambda] = 1,$$

entonces

$$\Pr\left[\bigcap_{n=0}^{\infty} \bigcup_{m=n}^{\infty} \{V_m(x_1, x_2)\} \mid \Lambda(\omega) = \lambda\right] = 0, \quad (2.12)$$

sea $A_n = \bigcup_{m=n}^{\infty} \{V_m \in (x_1, x_2)\}$ y observemos que, A_n forma una sucesión decreciente de conjuntos,

$$A_{n+1} \subset A_n \subset A_{n-1} \cdots$$

así que podemos escribir (2.12) como,

$$\lim_{n\to\infty} \Pr\left[\bigcup_{m=n}^{\infty} \{V_m(x_1,x_2)\} \mid \Lambda(w)=\lambda\right]=0,$$

de donde

$$\lim_{n\to\infty} \Pr\left[V_n(x_1,x_2) \mid \Lambda(\omega)=\lambda\right]=0.$$

Finalmente,

$$\begin{aligned}
\mu\{(x_1,x_2)\} &= G(x_2)-G(x_1) \\
&= \lim_{n\to\infty}\left[F_n(x_2)-F_n(x_1)\right] \\
&= \lim_{n\to\infty} \Pr\left[V_n\in(x_1,x_2)\right] \\
&= \lim_{n\to\infty} \int_1^{\infty} \Pr\left[V_n\in(x_1,x_2) \mid \Lambda(w)=\lambda\right] d\Lambda(\lambda) \\
&= 0,
\end{aligned}$$

la última igualdad es una contradicción porque por hipótesis $\mu\{(x_1,x_2)\}>0$,

$$\Pr\left[V_n\in(x_1,x_2) \text{ sólo para un número finito de valores de } n\right]<1, \text{ c.s.}$$

y

$$\Pr\left[\bigcap_{n=0}^{\infty}\bigcup_{m=n}^{\infty} \{V_m(x_1,x_2)\} \mid \Lambda(\omega)=\lambda\right]>0. \tag{2.13}$$

■

Para $A\in\mathcal{B}$ definimos, $R(A)=\left\{w\in\Omega : \limsup_{n\to\infty} I_A(V_n(\omega))=1\right\}$, donde $R(A)$ es el conjunto de trayectorias para las cuales la cadena entra a A un número infinito de veces. Escribiremos $R(A)=\{\omega\in\Omega : V_n(\omega)\in A \text{ i.o.}\}$. Antes de continuar, necesitamos el siguiente lema.

Lema 2.6.

$$\lim_{n\to\infty} E\left[I_{R(A)} \mid \mathcal{F}_n\right]=I_{R(A)}, \ \textit{c.s.} \tag{2.14}$$

donde $\mathcal{F}_n=\mathcal{F}(V_1,\ldots,V_n,\Lambda)$.

Demostración. Nótese que $\left\{E\left[I_{R(A)} \mid \mathcal{F}_n\right]\right\}_{n=1}^{\infty}$ es una martingala positiva,

- $\mathcal{F}_n$ forma una sucesión creciente de conjuntos, $\mathcal{F}_{n-1}\subset\mathcal{F}_n\subset\mathcal{F}_{n+1}\cdots$
- $E\left[E\left[I_{R(A)} \mid \mathcal{F}_{n+1}\right] \mid \mathcal{F}_n\right]=E\left[I_{R(A)} \mid \mathcal{F}_n\right]$,

- $E\left[E\left[I_{R(A)} \mid \mathcal{F}_n\right]\right] = E\left[I_{R(A)}\right] = \Pr\left(R\left(A\right)\right)$

  así, $0 \leq E\left[E\left[I_{R(A)} \mid \mathcal{F}_n\right]\right] \leq 1$,

- $E\left[I_{R(A)} \mid \mathcal{F}_n\right]$ es $\mathcal{F}_n$-medible.

de donde,

$$\lim_{n\to\infty} E\left[I_{R(A)} \mid \mathcal{F}_n\right] = E\left[I_{R(A)} \mid \mathcal{F}_\infty\right]$$

con $\mathcal{F}_\infty = \mathcal{F}(\{V_n\}_{n=1}^{\infty}, \Lambda)$. Observemos que $I_{R(A)}$ es $\mathcal{F}_\infty$-medible, por lo tanto

$$\lim_{n\to\infty} E\left[I_{R(A)} \mid \mathcal{F}_n\right] = I_{R(A)}, \text{ c.s.}$$

■

Con la ayuda del lema anterior daremos condiciones bajo las cuales un intervalo abierto será persistente.

Teorema 2.7. *Para cualquier intervalo abierto* (x_1, x_2), *(posiblemente infinito) sí*
$\mu\{(x_1, x_2)\} > 0$ *entonces,*

$$\Pr\left[V_n \in (x_1, x_2) \ \ i.o. \ \right] = 1. \tag{2.15}$$

Demostración. Tomemos $\varepsilon > 0$ tal que $\mu\{(x_1+\varepsilon, x_2-\varepsilon)\} > 0$. Por (2.13) tenemos que,

$$\Pr\left[V_n \in (x_1+\varepsilon, x_2-\varepsilon) \text{ i.o. } \mid \Lambda\right] > 0, \text{ c.s..}$$

Del lema,

$$\begin{aligned}
I_{R(x_1+\varepsilon, x_2-\varepsilon)} &= \lim_{n\to\infty} E\left[I_{\{V_n\in(x_1+\varepsilon,x_2-\varepsilon)\text{ i.o.}\}} \mid V_1,\ldots,V_n,\Lambda\right] \\
&= \lim_{n\to\infty} E\left[I_{\{V_{n+m}\in(x_1+\varepsilon,x_2-\varepsilon)\text{ i.o.}\}} \mid V_1,\ldots,V_n,\Lambda\right] \ \text{(mtg.)} \\
&= \lim_{n\to\infty} E\left[I_{\{V_{n+m}\in(x_1+\varepsilon,x_2-\varepsilon)\text{ i.o.}\}} \mid V_n,\Lambda\right] \ \text{(Markov)}
\end{aligned}$$

Tomando $\omega \in R\left(x_1+\varepsilon, x_2-\varepsilon\right)$, $\delta \in (0,1)$ y definiendo $n : \Omega \to \mathbb{N}$, tal que,

$$\begin{aligned}
1-\delta &< E\left[I_{\{V_{m+n(\omega)}\in(x_1+\varepsilon,x_2-\varepsilon)\text{ i.o.}\}} \mid V_{n(\omega)},\Lambda\right](\omega)\\
&= \Pr\left[V_{m+n(\omega)}\in(x_1+\varepsilon,x_2-\varepsilon)\text{ i.o.} \mid V_{n(\omega)}=V_{n(\omega)}(\omega),\Lambda(\omega)=\lambda\right]\\
&= \Pr\left[\left(\frac{V_{n(\omega)}(\omega)}{\lambda^m}+\sum_{j=1}^{n}\frac{Y_j}{\lambda^{n-j}}\right)\in(x_1+\varepsilon,x_2-\varepsilon)\text{ i.o.}\right],
\end{aligned}$$

Para m suficientemente grande tenemos, $\left|\frac{V_{n(\omega)}(\omega)}{\lambda^m}\right|<\varepsilon$, por lo tanto

$$\begin{aligned}
1-\delta &< \Pr\left[\sum_{j=1}^{n}\frac{Y_j}{\lambda^{n-j}}\in(x_1,x_2)\text{ i.o.}\right]\\
&= \Pr\left[V_{n(\omega)}\in(x_1,x_2)\text{ i.o.} \mid \Lambda(\omega)=\lambda\right].
\end{aligned}$$

El resultado se sigue ya que δ es arbitrario.

Teorema Principal 2.8. Supongamos que,

$$\Pr[Y_1<0]>0, \tag{2.16}$$

entonces

$$\Pr[Z_n<0\text{ i.o.}]=1, \tag{2.17}$$

Demostración. Por (2.16), existe un $\varepsilon>0$ tal que

$$\Pr[Y_1<-\varepsilon]>0,$$

usando el teorema 2.4,

$$\mu\left\{\left(-\infty,-\frac{\varepsilon}{1-\lambda^{-1}}\right)\right\}>0,$$

y del teorema 2.7

$$\Pr\left[V_n\in\left(-\infty,-\frac{\varepsilon}{1-\lambda^{-1}}\right)\text{ i.o. } \mid \Lambda\right]=1,\ \text{c.s.} \tag{2.18}$$

Para n suficientemente grande, tenemos

$$-U\lambda^{-n}>-\frac{\varepsilon}{1-\lambda^{-1}}$$

por (2.18)

$$\Pr\left[V_n + U\lambda^{-n} \in (-\infty, 0) \text{ i.o.} \mid \Lambda\right] = 1,$$

entonces

$$\begin{aligned} \Pr\left[V_n + U\lambda^{-n} \in (-\infty, 0) \text{ i.o.}\right] &= \int_1^\infty \Pr\left[V_n + U\lambda^{-n} \in (-\infty, 0) \text{ i.o.} \mid \Lambda\right] d\Lambda(\lambda) \\ &= \int_1^\infty d\Lambda(\lambda) = 1, \end{aligned}$$

o equivalentemente

$$\Pr\left[Z_n < 0 \text{ i.o.}\right] = 1.$$

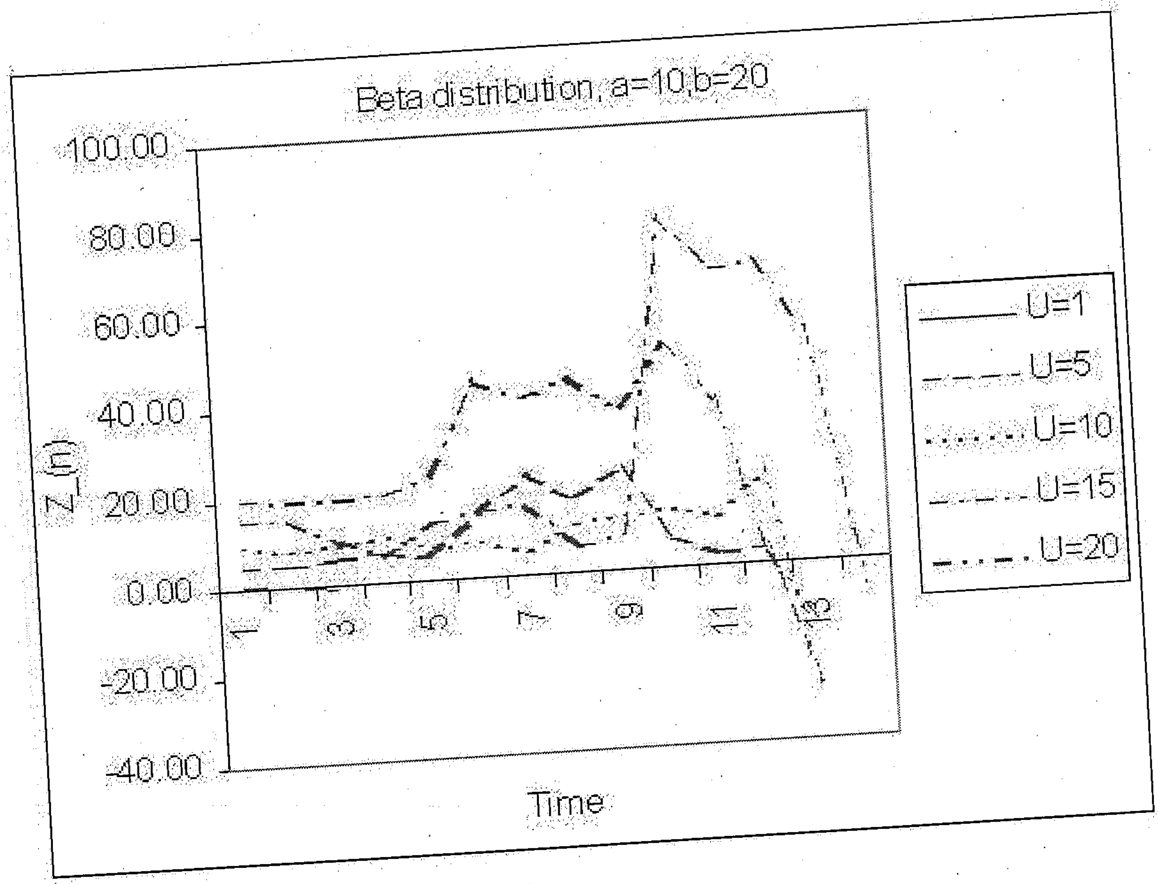
De esta manera, la probabilidad de ruina es 1, sin importar el monto del capital inicial. Interpretemos el significado de las condiciones bajo las cuales se da este resultado:

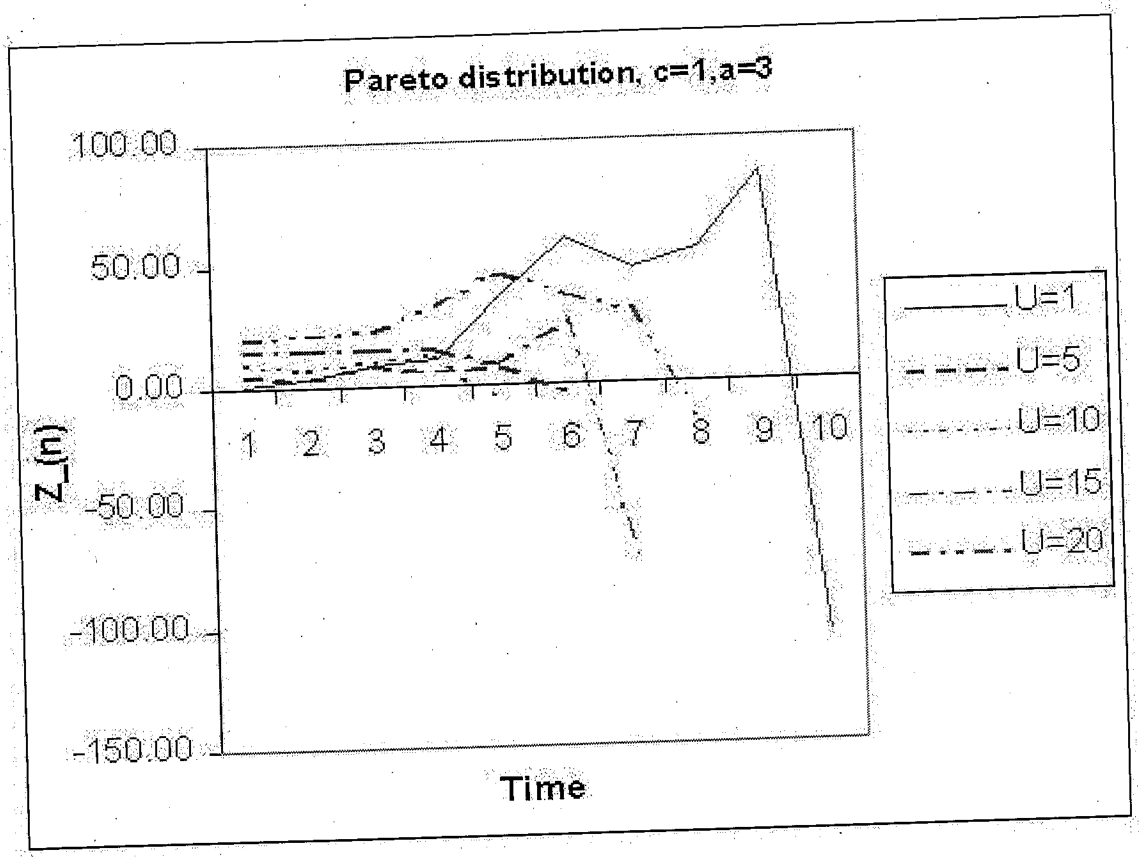
- $\Pr(Y_1 < 0) > 0$: Recordemos que Y_1 es la prima menos la reclamación, y la razón por la cual una persona adquiere un seguro es porque la prima es menor al valor del bien asegurado.
- $E(\frac{\Lambda}{\Lambda-1}) < \infty$: En todos los países hay organismos reguladores de la inflación, por ejemplo en México, es el Banco de México; de tal manera que, lo que se espera es que la proporción de cambio de la inflación respecto al incremento neto de la misma no llegue a niveles inalcanzables.

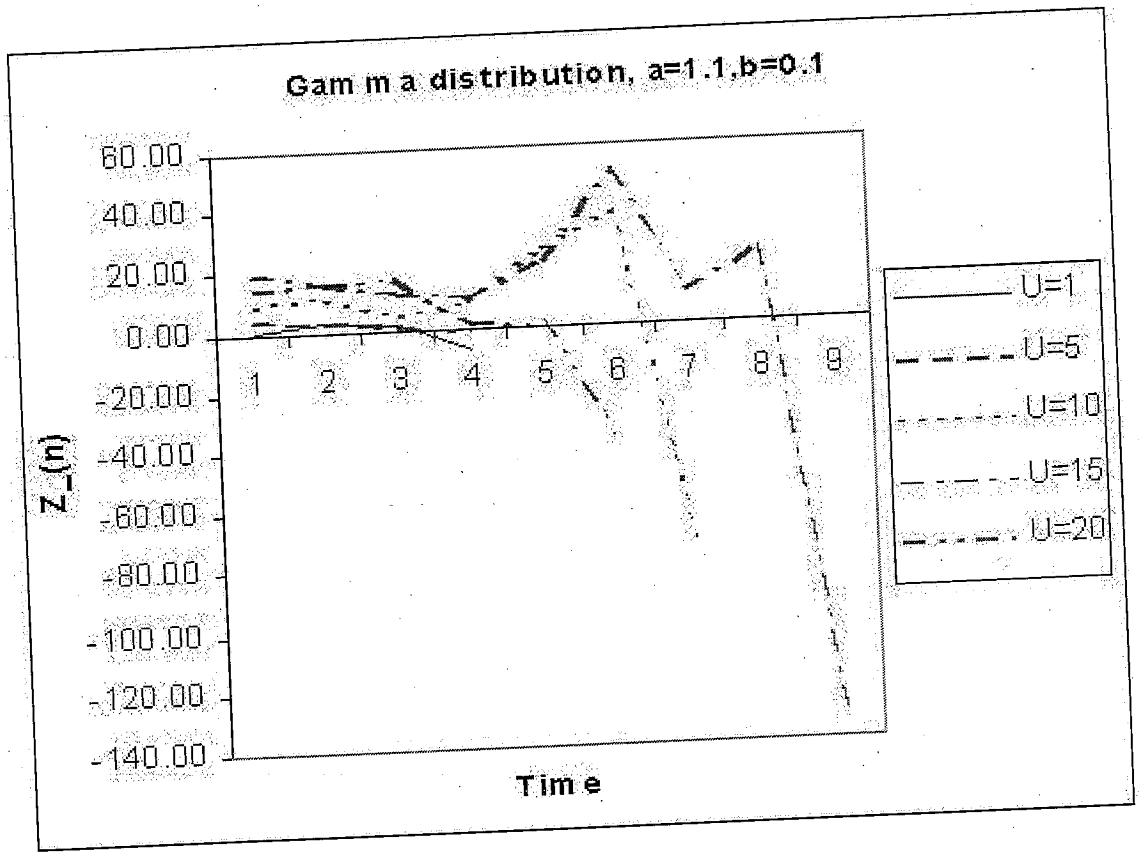
Finalmente aún queda un problema abierto: el caso en el que Λ_n no tiene la forma Λ^n; este problema se trató de resolver con las herramientas desarrolladas para el modelo estudiado en este capítulo, pero desafortunadamete fueron insuficientes.

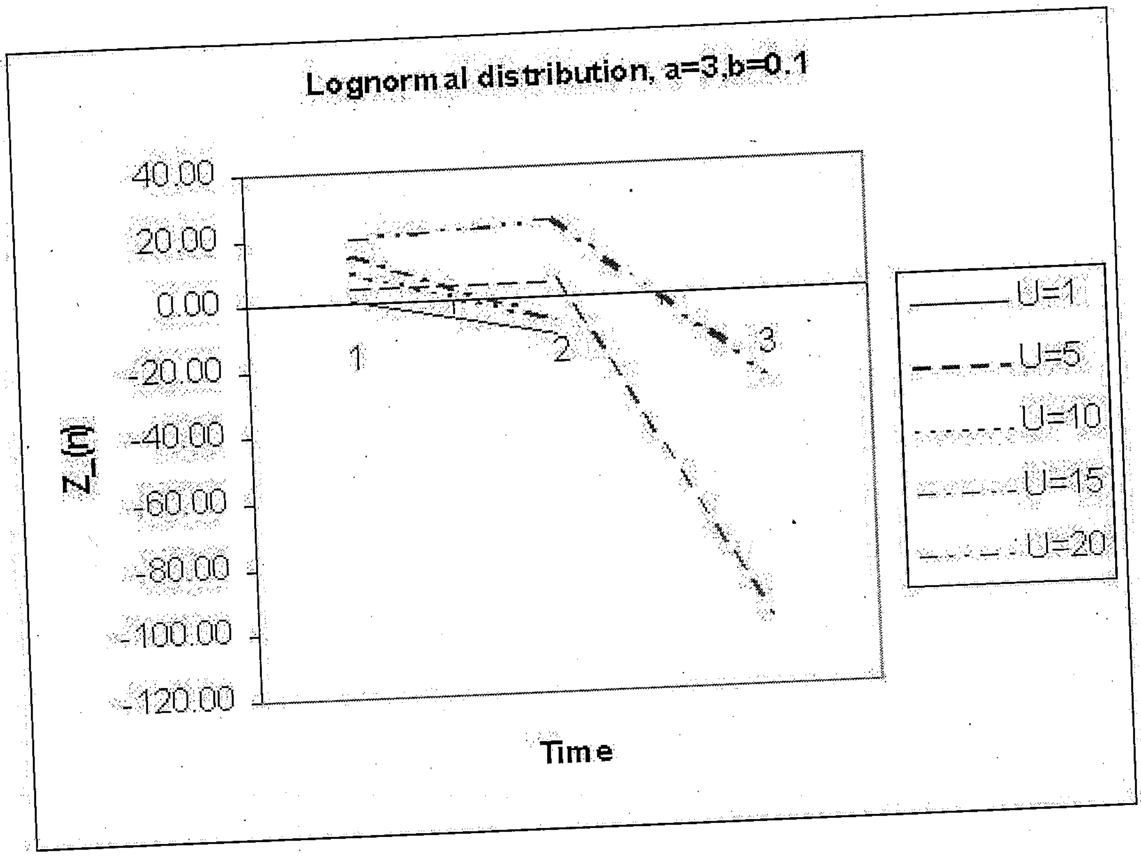
2.3 Ejemplos numéricos

En esta sección presentaremos ejemplos numéricos de algunas distribuciones de Λ que cumplen con (2.6). Para todas las simulaciones se tomaron las Y_i con distribución Normal(0,1), la elección de esta distribución fue arbitraria, ya que la única condición que se pide es $\Pr(Y_i < 0) > 0$. De igual forma, los parámetros de las distribuciones de Λ se escogieron de manera arbitraria, con la única condición (2.6), así consideramos Λ con distribución: Beta(10,20), Pareto(1,3), Gamma(1.1,0.1) y Lognormal(3, 0.1). Adicionalmente, se dieron diferentes valores para el capital inicial y se observó que en todos los casos la ruina se da sin importar cuan grande sea el capital inicial


Beta distribution, a=10,b=20
100.00
80.00
60.00
40.00
20.00
0.00
-20.00
-40.00
Z_(h)
1
3
5
7
9
11
13
Time
U=1
U=5
U=10
U=15
U=20


Pareto distribution, c=1,a=3
100.00
50.00
0.00
-50.00
-100.00
-150.00
Z_(n)
1
2
3
4
5
6
7
8
9
10
Time
U=1
U=5
U=10
U=15
U=20


Gam m a distribution, a=1.1,b=0.1
60.00
40.00
20.00
0.00
-20.00
-40.00
-60.00
-80.00
-100.00
-120.00
-140.00
Z_(n)
1
2
3
4
5
6
7
8
9
Tim e
U=1
U=5
U=10
U=15
U=20


Lognormal distribution, a=3,b=0.1
40.00
20.00
0.00
-20.00
-40.00
-60.00
-80.00
-100.00
-120.00
Z_(n)
1
2
3
Time
U=1
U=5
U=10
U=15
U=20

Bibliografía

[1] Asmussen, S. Ruin Theory, 2000, World Scientific.

[2] Bartle, R. G. (1995). *Elements of integration and lebesgue measure.* John Wiley & Sons, Inc.

[3] Bowers, N.L., Gerber, H.U. Hickman, C.J., Jones, D.A., Nesbitt C.J., (1987). Actuarial Mathematics. *Society of Actuaries, Itasca.*

[4] Dickson, D, Egído dos Reis (1996). On duration of the negative surplus. *Scandinavian Actuarial Journal*, 148-164.

[5] De Vylder, F., Goovaerts, M.J., (1988). Recursive calculation of finite-time ruin probabilities. *Insurance: Mathematics and Economics*, 7, 1-7.

[6] Egído dos Reis, A. (1993). How long is the surplus below zero? *Insurance: Mathematics and Economics*, 12, 23-38.

[7] Feller, W. (1971). *An introduction to probability theory and its applications*, Vol II. Wiley, New York.

[8] Gerber, H. U. (1990). When does the surplus reach a given target?. *Insurance: Mathematics and Economics*. 9, 115-119.

[9] Kolkovska, E., López-Mimbela, J.A., Villa, J. (2004). Occupation measure and local time of classical risk processes. *to appear in nsurance: Mathematics and Economics.*

[10] Waters, H. R. (1983). Probability of ruin for a risk process with claims cost inflation. *Scandinavian Actuarial Journal*. 148-164.

[11] Picard, P., On the measure of the severity of ruin the classical Poisson model. Insurace: Mathematics and Economics 14 (1994), 107-115.

[12] Rolski, Schmidli, Schmidt y Teugels. Stochastic processes for insurance and finance, 1999, Wiley.