

Un método iterativo monótono para la
solución numérica de ecuaciones diferenciales
fraccionarias

Edgar Alejandro Guerrero Arroyo

24 de septiembre de 2012

CIMAT

”Desear algo es sólo anhelar. Querer conseguirlo es desearlo y estar dispuesto a hacer lo necesario. Si realmente quieres conseguir algo, encontrarás la manera. Si no, encontrarás el pretexto.”

Índice

1. Introducción	5
2. Nociones de Cálculo Fraccionario	9
2.1. Aplicaciones	9
2.1.1. Ecuación fraccional de Schrödinger	9
2.1.2. Ecuación integral de Abel	10
2.1.3. Propagación de ondas ultrasónicas en huesos esponjosos	11
2.1.4. Control lateral y longitudinal de vehículos autónomos .	11
2.1.5. Mecánica de fluídos	11
2.2. Integral de Riemann-Liouville	11
2.2.1. Propiedades básicas	12
2.3. Derivada Fraccional de Riemann-Liouville	12
2.3.1. No localidad	15
2.3.2. Derivada de una función constante	16
2.3.3. Funciones con derivada fraccional nula	16
2.4. Otras derivadas	17
3. Aproximación numérica de la función de Mittag-Leffler	19
3.1. La función de Mittag-Leffler	19
3.2. División del plano complejo	20
3.3. Zona \mathbb{G}_0	21
3.4. Zona \mathbb{G}_1	22
3.5. Zona \mathbb{G}_2	24
3.6. Cuadratura de Gauss-Laguerre	28
3.7. Observaciones	29
4. Solución numérica de una EDF	30
4.1. Aspectos teóricos de EDFs	30
4.2. Una discretización y aproximación numérica del método ite- rativo monótono continuo	33
4.3. Aproximación numérica de la integral singular	36
5. Resultados numéricos	38
5.1. Ejemplo 1	38
5.2. Ejemplo 2	40
5.3. Ejemplo 3	41
5.4. Ejemplo 4	43
5.5. Ejemplo 5	45
5.6. Observaciones	46

6. Estimación del orden de la derivada y sistemas Lotka-Volterra	48
6.1. Estimación del orden de derivación en EDFs	48
6.1.1. Formulación del problema inverso	48
6.1.2. Algoritmo Levenberg-Marquardt	48
6.1.3. Algoritmo BFGS	49
6.1.4. Resultados	50
6.2. Sistema fraccional Lotka-Volterra	52
6.2.1. Sub y súper soluciones del sistema	53
6.2.2. Iteración del sistema	54
6.2.3. Resultados	54
7. Conclusiones	57

1. Introducción

Las ecuaciones diferenciales fraccionales, **EDFs**, han ganado una considerable importancia debido a su variedad de aplicaciones en varios campos de ciencias aplicadas e ingeniería, [11]. Se ha encontrado que el comportamiento de muchos sistemas físicos puede ser propiamente descrito mediante el uso de la teoría de sistemas de orden fraccional.

Las derivadas fraccionales proporcionan un excelente instrumento para la descripción de propiedades de materiales y procesos, tales como la memoria o la herencia. Las ventajas reales de los sistemas de orden fraccional son que tenemos más grados de libertad en el modelo y que una "memoria" de estados anteriores es incluida en dicho modelo.

En décadas recientes el campo del cálculo fraccional ha atraído el interés de investigadores en varias áreas incluyendo matemáticas, física, química, ingeniería e incluso finanzas y ciencias sociales. Pero, ¿porqué es tan importante el cálculo fraccional? Como se comenta en [12], hasta hace tiempos recientes, el cálculo fraccional era considerado una mera teoría esotérica sin aplicaciones, pero en la última década(s) ha habido una explosión de actividades de investigación en la aplicación del cálculo fraccional a muchos campos científicos diversos que van desde la física del fenómeno de difusión y advección, el control de sistemas hasta finanzas y economía. De hecho, en el presente, aplicaciones y/o actividades relacionadas con el cálculo fraccional han aparecido en por lo menos los siguientes campos:

- Control fraccional de sistemas de ingeniería.
- Avances en el cálculo de variaciones y el control óptimo de sistemas dinámicos fraccionales.
- Desarrollo de técnicas y herramientas analíticas y numéricas.
- Exploraciones fundamentales de las relaciones constitutivas mecánicas, eléctricas y térmicas, entre otras, de varios materiales de ingeniería tales como polímeros viscoelásticos, geles, hule espuma y tejidos animales, así como sus aplicaciones en ciencia e ingeniería.
- Entendimiento fundamental de los fenómenos de onda y difusión, sus medidas y verificaciones, incluyendo aplicaciones a la física de plasma (tal como en la difusión en un Tokamak).
- Aplicaciones en bioingeniería y biomedicina.
- Modelación térmica de sistemas de ingeniería tales como frenos y partes de diversas maquinarias.

- Procesamiento de imágenes y señales.

Como se menciona en [11], son muchos los esquemas numéricos para resolver EDFs que han sido introducidos en diversas publicaciones. Recientemente, un gran esfuerzo se ha destinado a tratar de encontrar métodos robustos, tanto analíticos como numéricos, para resolver EDFs de interés físico.

En la década pasada, el desarrollo de métodos numéricos para la solución de ecuaciones que contienen derivada e integrales de orden fraccional se han convertido en un tema “caliente”. Varios algoritmos simples han sido publicados, produciendo soluciones aproximadas para EDFs. De hecho, en la experiencia de [13], expertos en aplicaciones generalmente prefieren aplicar alguno de los esquemas numéricos ahí considerados en vez de cualquier otro esquema disponible de orden superior. De este modo se consideran usualmente los siguiente métodos:

- El método de la cuadratura implícita, introducido por Diethelm.
- El método de predictor-corrector, ampliamente discutido por Diethelm, Ford y Freed.
- El método aproximado de Mittag-Leffler, considerado por Diethelm y Luchko.
- Un método de colocación, descrito por Blank.
- El método de diferencias finitas, discutido por Gorenflo.

Es conocido que la solución numérica de EDFs es un problema muy costoso computacionalmente debido a la naturaleza de los operadores diferenciales fraccionales. En [7], el autor Diethelm demuestra que la paralelización puede ser utilizada para superar esas dificultades. Para este fin, se propone la implementación de una versión fraccional de segundo orden del método de Adams-Bashforth-Moulton en una computadora en paralelo.

Tal y como menciona Domenico Delbosco en [6], son muchas las publicaciones y libros sobre cálculo fraccional que han aparecido recientemente. La mayoría de ellos son dedicados a la solución de EDFs lineales en términos de funciones especiales. No existen contribuciones, al menos bien conocidas, concernientes a EDFs no lineales de la forma

$$\mathbb{D}^\alpha u = f(t, u),$$

donde $0 < \alpha < 1$ y \mathbb{D}^α es la derivada fraccional estándar de Riemann-Liouville, considerada en \mathbb{R}^+ o en el intervalo $(0, T]$ con $T > 0$.

En principio, uno puede reducir dicha ecuación a una ecuación integral con una singularidad débil y aplicar a ésta técnicas básicas de análisis no lineal (teoremas de puntos fijos, teoría de Leray-Schauder). En la práctica, para obtener resultados explícitos, uno debe tomar en cuenta la peculiaridad del kernel.

En este trabajo consideraremos la existencia y unicidad de la solución de un problema de condiciones iniciales para una EDF, usando el método de sub y súper soluciones y su iterativo monótono asociado. Dicha técnica monótona iterativa, combinada con el método de sub y súper soluciones, es una herramienta poderosa para probar la existencia de soluciones de EDFs no lineales. La técnica mencionada se reduce a calcular una secuencia iterativa donde se deben resolver EDFs lineales no homogéneas en cada iteración. La solución depende de la evaluación de la función especial de Mittag-Leffler. En este trabajo se implementa una adaptación del algoritmo descrito en [2]. Dicho algoritmo consiste en dividir el plano complejo en zonas disjuntas donde se aproximará el valor de la función de una manera apropiada en cada una de estas para evitar inestabilidades numéricas en su aproximación.

Mostraremos soluciones de ejemplos en la literatura de EDFs no lineales. De este modo observaremos como nuestro método se autovalida al iniciar nuestra secuencia iterativa con una sub y una súper solución.

En el capítulo 2 revisaremos algunos conceptos de cálculo fraccional que nos serán de utilidad más adelante. Mostraremos algunas aplicaciones reales de cálculo fraccional y revisaremos el concepto de derivada fraccional así como algunas definiciones de ésta. Pondremos especial énfasis en la definición de Riemann-Liouville y mostraremos algunas de sus propiedades.

En el capítulo 3 expondremos la aproximación de la función de Mittag-Leffler que implementamos. Describiremos la función y veremos algunas de sus propiedades. De igual manera explicaremos cómo dividimos el dominio de la función en zonas y explicaremos como aproximamos la función en cada una de dichas zonas. De manera complementaria, mostraremos algoritmos de la implementación que realizamos en cada una.

En el capítulo 4 analizaremos la solución numérica de una EDF. Veremos los aspectos teóricos detrás del método propuesto así como la solución de EDFs lineales y la construcción de la secuencia iterativa que nos permitirá resolver EDFs no lineales. Mostraremos los detalles de implementación utilizados.

En el capítulo 5 ilustraremos el uso de nuestro método con diversos ejemplos de la literatura. Explicaremos la selección de sub y súper soluciones apropiadas para cada caso. De igual manera mostraremos como la sub y la súper solución convergen a la solución real de cada problema.

En el capítulo 6 expondremos la importancia de la estimación del orden

de la derivada en una EDF. De igual manera se analizará el uso de nuestro método iterativo monótono en la solución de un sistema simple de EDFs del tipo Lotka-Volterra. Se mostrarán resultados numéricos en ambos casos.

Finalmente remarcaremos conclusiones generales de nuestro trabajo en el capítulo 7.

2. Nociones de Cálculo Fraccionario

El concepto de cálculo fraccionario ha sido popularizado últimamente por su practicidad al modelar sistemas con memoria”. A pesar de esto, no es un tema completamente nuevo. Se tienen evidencias de que en 1695 *L’Hopital* se cuestionó sobre el significado de $\frac{d^n y}{dx^n}$ para $n = \frac{1}{2}$. En ese entonces, *Leibniz* expresó una respuesta para $y = x$, véase (1). A continuación daremos una breve introducción sobre el concepto de derivada fraccional y algunas de sus aplicaciones.

2.1. Aplicaciones

Además de las ya mencionadas, mostramos aquí algunas aplicaciones más del cálculo fraccionario y de las EDFs. Dichas aplicaciones fueron tomadas de [10]. Más aplicaciones pueden ser consultadas en dicho artículo y en [4].

2.1.1. Ecuación fraccional de Schrödinger

La mecánica cuántica estandar puede ser estudiada a través de 3 enfoques distintos:

- **Matrices mecánicas.** Formulada por Werner Heisenberg, Max Born y Pascual Jordan en 1925. Fue la primer formulación de la mecánica cuántica. Es una extensión del modelo de Bohr que describe como ocurre un salto cuántico.
- **Ecuación de Schrödinger.** Describe como el estado cuántico de un sistema físico cambia con respecto al tiempo. Fue formulado en 1925 por Erwin Schrödinger. La forma de la ecuación de Schrödinger depende de la situación física en cuestión. En particular la ecuación dependiente del tiempo no relativista de una sola partícula tiene la forma

$$i\hbar \frac{d}{dt} \Psi(\mathbf{r}, t) = -\frac{\hbar^2}{2m} \Delta \Psi(\mathbf{r}, t) + V(\mathbf{r}, t) \Psi(\mathbf{r}, t),$$

donde m es la masa de la partícula, V es su energía potencial, Δ es el operador Laplaciano, Ψ es la función de onda de posición-espacio y \hbar es la constante de Planck. Esta ecuación modela la energía total del sistema como la suma de la energía cinética y la potencial de la partícula. Es el enfoque análogo a los sistemas mecánicos de las ecuaciones de movimiento de la 2da ley de Newton en mecánica clásica. Las soluciones de la ecuación de Schrödinger no sólo describen sistemas moleculares, atómicos y subatómicos, sino también sistemas macroscópicos.

- **Camino integral de Feynman.** En mecánica cuántica, la formulación del camino integral generaliza el principio de acción de la mecánica clásica. Dicho enfoque reemplaza la noción clásica de una única trayectoria de una partícula por un sistema con una infinidad de posibles trayectorias para calcular la amplitud cuántica. La idea básica fue formulada por Norbert Wiener pero el método completo fue desarrollado por Richard Feynman en 1948. El camino integral de Feynman es el camino integral sobre los caminos mecánico-cuánticos Brownianos.

El concepto de mecánica cuántica fraccional resulta de una generalización de la mecánica cuántica estandar. Dicho concepto fue introducido por Nick Laskin en 1999 como resultado de expandir el camino integral de Feynman, del camino mecánico-cuántico Browniano a un camino mecánico-cuántico de Lévy. Un camino integral sobre un camino mecánico-cuántico de Lévy resulta en una generalización de la mecánica cuántica. La ecuación fraccional de Schrödinger es una ecuación fundamental en mecánica cuántica fraccional. Esta ecuación tiene la forma

$$i\hbar \frac{d}{dt} \Psi(\mathbf{r}, t) = \mathbb{D}^\alpha (-\hbar^2 \Delta)^{\frac{\alpha}{2}} \Psi(\mathbf{r}, t) + V(\mathbf{r}, t) \Psi(\mathbf{r}, t).$$

2.1.2. Ecuación integral de Abel

Una de las primeras aplicaciones conocidas de la derivada fraccional fue hecha por Abel en 1823, la cual consiste en encontrar la solución de una ecuación integral deducida a partir de resolver el problema de la curva tautócrona. Este problema intenta determinar la forma de una curva plana donde no hay fricción tal que una partícula situada en dicha curva cae por efecto de la gravedad en un tiempo fijo T que es independiente de su posición inicial. La ecuación integral de Abel es

$$\sqrt{2gT} = \int_0^\eta (\eta - y)^{-0,5} f'(y) dy,$$

donde g es la aceleración gravitacional, (ξ, η) es la posición inicial y $s = f(y)$ es la ecuación de la curva buscada. Dicha ecuación es equivalente a la ecuación integral fraccionaria

$$\sqrt{2gT} = \Gamma(0,5) D^{-0,5} f'(\eta).$$

2.1.3. Propagación de ondas ultrasónicas en huesos esponjosos

El cálculo fraccional es usado para modelar la interacción de viscosidad entre fluidos y una estructura sólida. Resultados experimentales son comparados con predicciones teóricas para ondas lentas y rápidas transmitidas a través de muestras de huesos esponjosos humanos.

2.1.4. Control lateral y longitudinal de vehículos autónomos

Esta aplicación utiliza controladores de orden fraccionarios (FOC), aplicados al problema de *path-tracking* en automóviles eléctricos autónomos. Un modelo de dinámica lateral de vehículos industriales ha sido tomado en cuenta para implementar controladores convencionales y FOC. Varios esquemas de control con dichos controladores han sido simulados y comparados.

2.1.5. Mecánica de fluidos

El cálculo fraccional también ha sido utilizado en la solución de problemas de dinámica de fluidos de difusión viscosa dependientes del tiempo. Como ya hemos señalado con anterioridad, la derivada fraccional modela de manera natural este tipo de fenómenos físicos. Adicionalmente, también se ha utilizado dicha derivada para modelar el problema de advección-difusión en fluidos. Esto puede describir el movimiento de fluidos de diversas densidades a través de otro fluido o medio poroso. Esto sirve para simular la difusión de contaminantes en el agua o para el movimiento de petróleo a través de las capas del subsuelo, las cuales suelen ser no homogéneas.

2.2. Integral de Riemann-Liouville

Denotemos como $C^0(\mathbb{R}^+)$ el espacio de todas las funciones reales continuas definidas en $\mathbb{R}^+ = \{x \in \mathbb{R}, x > 0\}$ y sea $L^1_{loc}(\mathbb{R}^+)$ el espacio de todas las funciones reales definidas en \mathbb{R}^+ tales que son Lebesgue integrables en cada subintervalo acotado de \mathbb{R}^+ . Consideremos también el espacio $C^0(\mathbb{R}_0^+)$ de todas las funciones reales continuas en $\mathbb{R}_0 = \{x \in \mathbb{R}, x \geq 0\}$. Consideremos las siguientes definiciones.

Definición. La primitiva fraccional de orden $\alpha > 0$ de una función $q : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}$ está dada por

$$\mathbb{I}^\alpha q(t) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^t (t-s)^{\alpha-1} q(s) ds,$$

cuando el lado derecho está definido en cada punto en \mathbb{R}^+ .

Por ejemplo, $\mathbb{I}^\alpha q$ existe para todo $\alpha > 0$, si $q \in C^0(\mathbb{R}^+) \cap L^1_{loc}(\mathbb{R}^+)$; Notar también que cuando $q \in C^0(\mathbb{R}_0^+)$ entonces $\mathbb{I}^\alpha q \in C^0(\mathbb{R}_0^+)$ y más aún $\mathbb{I}^\alpha q(0) = 0$.

Observación. Si $\mathbb{I}^{\alpha_2} q \in \text{Dom}(\mathbb{I}^{\alpha_1})$, entonces la igualdad

$$\mathbb{I}^{\alpha_1} \mathbb{I}^{\alpha_2} q = \mathbb{I}^{\alpha_1 + \alpha_2} q,$$

se cumple para todo $\alpha_1, \alpha_2 > 0$.

Algunas propiedades básicas de esta integral se mencionan a continuación.

2.2.1. Propiedades básicas

Fijemos un intervalo (a, b) . Para cada función integrable q en (a, b) el operador \mathbb{I}^α también es integrable en (a, b) , convirtiéndolo en un operador lineal en $L^1(a, b)$. \mathbb{I}^α resulta ser continuo respecto a la estructura de espacios de Banach en L^1 . Sea $1 \leq p < \alpha$. En general, si $q \in L^p(a, b)$, entonces $\mathbb{I}^\alpha q \in L^p(a, b)$ y se satisface la desigualdad

$$\|\mathbb{I}^\alpha q\|_p \leq \frac{|b-a|^{\alpha/p}}{\alpha \Gamma(\alpha)} \|q\|_p.$$

Otra propiedad interesante de \mathbb{I}^α es que su transformada de Laplace queda expresada de una manera particularmente simple

$$(\mathcal{L}\mathbb{I}^\alpha q)(t) = t^{-\alpha} Q(t),$$

donde Q denota la transformada de Laplace de q . De este modo \mathbb{I}^α es un multiplicador de Fourier.

2.3. Derivada Fraccional de Riemann-Liouville

Supongamos

$$f(t) = t^k. \tag{1}$$

Si tomamos la primera derivada de nuestra función obtenemos

$$\frac{d}{dt} t^k = k t^{k-1}.$$

Si repetimos este proceso tenemos en general que

$$\frac{d^\alpha}{dt^\alpha} t^k = \frac{k!}{(k-\alpha)!} t^{k-\alpha}.$$

Generalizando el factorial como la función Γ podemos definir la α -ésima derivada de f para valores de α no necesariamente enteros de la siguiente manera

$$\frac{d^\alpha}{dt^\alpha} t^k = \frac{\Gamma(k+1)}{\Gamma(k-\alpha+1)} t^{k-\alpha}.$$

Si tomamos $k = 1$ y $\alpha = \frac{1}{2}$ obtenemos que

$$\frac{d^{\frac{1}{2}}}{dt^{\frac{1}{2}}} t = \frac{\Gamma(1+1)}{\Gamma(1-\frac{1}{2}+1)} t^{1-\frac{1}{2}} = \frac{1}{\Gamma(\frac{3}{2})} t^{\frac{1}{2}},$$

dándonos una expresión para la derivada de orden $\frac{1}{2}$ de $f(t) = t$. Si nuevamente derivamos como antes obtenemos que

$$\frac{d^{\frac{1}{2}}}{dt^{\frac{1}{2}}} \frac{1}{\Gamma(\frac{3}{2})} t^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{\Gamma(\frac{3}{2})} \frac{d^{\frac{1}{2}}}{dt^{\frac{1}{2}}} t^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{\Gamma(\frac{3}{2})} \frac{\Gamma(1+\frac{1}{2})}{\Gamma(\frac{1}{2}-\frac{1}{2}+1)} t^{\frac{1}{2}-\frac{1}{2}} = 1,$$

conduciendo al resultado clásico conocido de

$$\frac{d^{\frac{1}{2}}}{dt^{\frac{1}{2}}} \frac{d^{\frac{1}{2}}}{dt^{\frac{1}{2}}} t = \frac{d}{dt} t = 1.$$

En las figuras 1 a 3 se muestran derivadas de distintos órdenes fraccionarios para algunas funciones conocidas.

Figura 1: Derivada fraccional de diversos órdenes para la función $f(t) = t$ donde $\frac{d^\alpha t}{dt^\alpha} = \frac{t^{1-\alpha}}{\Gamma(2-\alpha)}$. Imagen tomada de [10].

Figura 2: Derivada fraccional de diversos órdenes para la función $f(t) = e^t$ donde $\frac{d^\alpha e^t}{dt^\alpha} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^{k-\alpha}}{\Gamma(k-\alpha+1)}$. Imagen tomada de [10].

Figura 3: Derivada fraccional de diversos órdenes para la función $f(t) = \sin(t)$ donde $\frac{d^\alpha \sin(t)}{dt^\alpha} = \sin(t + \frac{\alpha\pi}{2})$. Imagen tomada de [10].

En la literatura existen diversas definiciones de lo que representa una derivada fraccional. Quizás la definición de derivada fraccional más ampliamente conocida es la de *Riemann-Liouville*, **RL**, expresada como se muestra en la siguiente definición.

Definición. La derivada fraccional de Riemann-Liouville de orden $0 < \alpha < 1$ de una función continua $u : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}$ está dada por

$$\mathbb{D}^\alpha u(t) = \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \frac{d}{dt} \int_0^t (t-s)^{-\alpha} u(s) ds, \quad (2)$$

asumiendo que el lado derecho está definida en cada punto sobre \mathbb{R}^+ .

Tenemos que

$$\mathbb{D}^\alpha \mathbb{I}^\alpha q = q, \quad \forall q \in C^0(\mathbb{R}^+) \cap L_{loc}^1(\mathbb{R}).$$

De la definición y el ejemplo arriba mencionados obtenemos el siguiente lema.

Lema. Sea $0 < \alpha < 1$. Si $q \in C^0(\mathbb{R}^+) \cap L_{loc}^1(\mathbb{R}^+)$, entonces la EDF

$$\mathbb{D}^\alpha q = 0,$$

tiene $q(t) = ct^{\alpha-1}$, $c \in \mathbb{R}$, como únicas soluciones.

De este lema deducimos la siguiente ley de composición.

Proposición. Supóngase que $q \in C^0(\mathbb{R}^+) \cap L_{loc}^1(\mathbb{R}^+)$ con derivada fraccional de orden $0 < \alpha < 1$ que pertenece a $C^0(\mathbb{R}^+) \cap L_{loc}^1(\mathbb{R}^+)$. Entonces

$$\mathbb{I}^\alpha \mathbb{D}^\alpha q(t) = q(t) + ct^{\alpha-1},$$

para algún $c \in \mathbb{R}$. Cuando la función q está en $C^0(\mathbb{R}_0^+)$, entonces $c = 0$.

La definición de derivada fraccional de RL generaliza los ejemplos arriba mostrados de manera natural.

Como mencionamos anteriormente, hay ciertas propiedades conocidas de las derivadas de orden entero que ya no se cumplen cuando el orden de derivación es fraccionario. Algunas de estas propiedades se indican a continuación para el caso $0 < \alpha < 1$. En general se considera sólo el caso en el intervalo $(0, 1)$ pues para otros intervalos, los resultados se puede representar en términos del intervalo antes mencionado.

2.3.1. No localidad

En general, para conocer la el valor de dicha derivada en un momento t se necesita conocer las evaluaciones de $\mathbb{I}^\alpha q$ en todos los tiempos anteriores. Esto ocurre incluso para el esquema propuesto de diferencias finitas (7). En general, el número de términos utilizados aumenta conforme t lo hace.

Esto representa un problema al calcular la derivada para tiempos grandes mediante aproximaciones numéricas. Una manera de disminuir el tiempo de cómputo utilizado es utilizar estrategias de cómputo paralelo. En particular, podemos consultar [7] donde se explica una estrategia en paralelo para reducir el tiempo de cómputo de nuestro método iterativo.

2.3.2. Derivada de una función constante

Recordemos que en cálculo clásico tenemos que la derivada de una función constante es 0. Veamos qué pasa si derivamos una función constante con (2). Vemos que

$$\begin{aligned}
\mathbb{D}^\alpha k &= \frac{k}{\Gamma(1-\alpha)} \frac{d}{dt} \int_0^t (t-s)^{-\alpha} ds \\
&= \frac{k}{\Gamma(1-\alpha)} \frac{d}{dt} \left(-\frac{(t-s)^{1-\alpha}}{1-\alpha} \Big|_0^t \right) \\
&= \frac{k}{\Gamma(1-\alpha)} \frac{d}{dt} \left(\frac{t^{1-\alpha}}{1-\alpha} \right) \\
&= \frac{k}{\Gamma(1-\alpha)} t^{-\alpha}.
\end{aligned} \tag{3}$$

Como vemos, la derivada fraccional de una función constante k es 0 y en general depende de t . Notamos también que no está definida en $t = 0$.

2.3.3. Funciones con derivada fraccional nula

Como vimos anteriormente, la derivada de una función constante no es necesariamente 0. Propongamos funciones del tipo $u(t) = t^{\alpha-k}$. Vemos que

$$\mathbb{D}^\alpha t^{\alpha-k} = \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \frac{d}{dt} \int_0^t (t-s)^{-\alpha} t^{\alpha-k} ds.$$

Recordando el siguiente resultado de integración

$$\int_h^t (t-s)^{M-1} (s-h)^{N-1} ds = \frac{\Gamma(M)\Gamma(N)}{\Gamma(M+N)} (t-h)^{M+N-1}, \quad M, N > 0,$$

tenemos que

$$\mathbb{D}^\alpha t^{\alpha-k} = \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \frac{d}{dt} \frac{\Gamma(1-\alpha)\Gamma(1+\alpha-k)}{\Gamma(2-k)} t^{1-k}$$

$$= \frac{\Gamma(1 + \alpha - k)}{\Gamma(2 - k)}(1 - k)t^{-k}. \quad (4)$$

En particular observamos que lo obtenido bajo $k = \alpha$ coincide con (3) con constante 1 y que $\mathbb{D}^\alpha t^\alpha = \Gamma(1 + \alpha)$ es constante. Adicionalmente, vemos $\mathbb{D}^\alpha t^{\alpha-1} = 0$. De lo que hemos discutido anteriormente no es difícil ver que, en general

$$\mathbb{D}^\alpha ct^{\alpha-k} = \frac{c\Gamma(1 + \alpha - k)}{\Gamma(2 - k)}(1 - k)t^{-k}.$$

El conocer derivadas fraccionales de funciones particulares será útil al momento de construir el punto de partida de nuestro algoritmo iterativo.

2.4. Otras derivadas

A manera de complemento podemos citar otras definiciones de derivada fraccional de la literatura que también son utilizadas. Una en particular es la definición de *M. Caputo* dada por

$$\mathbb{D}^\alpha u(t) = \frac{1}{\Gamma(\alpha - n)} \int_a^t \frac{u(\tau)d\tau}{(t - \tau)^{\alpha+1-n}}, \quad n - 1 < \alpha < n. \quad (5)$$

Usualmente es la segunda definición más popular de derivada fraccional.

En la literatura también aparece la definición de derivada fraccional de *Canavati* de orden v dada por

$$D_v^\alpha u(t) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \frac{d}{dt} \int_0^t (t - s)^{\alpha-1} \frac{d^{(n)}}{dt^{(n)}} u(s) ds, \quad t \in (0, T], \quad (6)$$

donde $v > 0$, n es la parte entera de v y $\alpha = v - n$. Esta derivada procede de las propiedades de la integral de Riemann-Liouville. De hecho, es precisamente la inversa de dicho operador integral.

También hay un esquema de diferencias finitas conocido como la definición de *Grünwald-Letnikove* dada por

$$\mathbb{D}^\alpha u(t) = \lim_{h \rightarrow 0} h^{-\alpha} \sum_{j=0}^{\lfloor \frac{t-\alpha}{h} \rfloor} (-1)^j \binom{\alpha}{j} u(t - jh). \quad (7)$$

El método iterativo monótono que desarrollamos está basado en un teorema que parte de la definición de RL. Por tanto, utilizaremos dicha definición para tener resultados teóricos en los cuales apoyarnos. Aun así, el método numérico tiene potencial de aplicación a las demás definiciones de derivadas

fraccionales. Más definiciones de la derivada fraccional pueden ser consultadas en [10].

3. Aproximación numérica de la función de Mittag-Leffler

La función (generalizada) de Mittag-Leffler $E_{\alpha,\beta}(z)$ es una función entera con dos parámetros $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$, [2]. La función $E_{\alpha,1}$ lleva el nombre de Mittag-Leffler, quien la introdujera en 1903 en una publicación en integrales de Laplace-Abel. Poco después de su introducción dicha función fue generalizada por Wiman.

La función generalizada de ML con un parámetro α no negativo es monótona si y sólo si $0 < \alpha \leq 1$, $Re(\beta) \geq \alpha$. Esta función juega un papel central en cálculo fraccional y en sus aplicaciones pues está íntimamente relacionada con la función propia del operador de derivación fraccional.

El avance en este campo requiere del cálculo de los valores numéricos de la función generalizada de ML para argumentos complejos arbitrarios, así como el estudio de sus propiedades.

La función de ML muestra comportamientos muy diferentes en el plano complejo con respecto a los parámetros α y β , por lo que se deben utilizar diferentes aproximaciones para diversas regiones en el plano. En [2] se presenta un método numérico estable basado en relaciones de recursión, asíntotas mejoradas exponencialmente, y representaciones integrales para calcular la función generalizada de ML para parámetros reales $\alpha > 0$ y β , y argumentos complejos arbitrarios z .

En sección repasamos la función de ML y mostramos su implementación para un dominio real. Dividiremos el eje real en zonas donde aproximaremos numéricamente y de manera apropiada la ML en cada zona basados en [2].

3.1. La función de Mittag-Leffler

La función de ML es una función compleja con 2 parámetros, $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$. Cuando $Re(\alpha) > 0$ podemos definir dicha función mediante la siguiente serie de potencias

$$E_{\alpha,\beta}(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{\Gamma(\alpha k + \beta)}. \quad (8)$$

En este caso la serie converge $\forall z \in \mathbb{C}$ por lo cual $E_{\alpha,\beta}$ es una función entera.

En particular tenemos que si $\alpha = \beta = 1$, entonces

$$E_{1,1}(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{\Gamma(k+1)} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{k!} = e^z, \quad (9)$$

que es la función exponencial compleja. Por otro lado, si consideramos la EDF más simple

$$\mathbb{D}^\alpha u = u,$$

entonces sabemos de [3] que para $\beta = 0$ la solución queda expresada como

$$u(t) = t^{\alpha-1} E_{\alpha,\alpha}(t).$$

Observamos una similitud al caso entero donde $\frac{d}{dt}e^t = e^t$. En este sentido, la ML es una generalización de la exponencial. Resulta de especial interés para aplicaciones en física el caso donde $\beta = 1$ donde la solución queda como $u(t) = E_{\alpha,1}(t)$.

3.2. División del plano complejo

Para nuestros fines suponemos $z \in \mathbb{R}$ y $\alpha = \beta \in (0, 1)$. Para aproximar la función de ML dividimos el eje real en secciones donde la función muestra diferentes comportamientos de estabilidad. Luego entonces, se deben de utilizar diferentes esquemas de aproximación para las diferentes particiones del mismo.

Denotemos la bola abierta de radio r centrado en el origen y su cerradura correspondiente como

$$\mathbb{D}(r) = \{z \in \mathbb{R} : |z| < r\}$$

y

$$\overline{\mathbb{D}(r)} = \{z \in \mathbb{R} : |z| \leq r\},$$

respectivamente. De este modo dividiremos el eje real en 3 zonas disjuntas en las cuales la ML será aproximada de manera distinta. Esto para procurar una estabilidad numérica que nos permita obtener una aproximación aceptable de la función en cada una de las zonas.

La primer zona la denotaremos por $\mathbb{G}_0 = \overline{\mathbb{D}(r_0)}$ para un $r_0 < 1$. La zona 2 la denotaremos por \mathbb{G}_1 como la unión de 2 subzonas, \mathbb{G}_1^+ y \mathbb{G}_1^- , definidas respectivamente por

$$\mathbb{G}_1^+ = \{z \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{D}(r_1) : z > 0\},$$

$$\mathbb{G}_1^- = \{z \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{D}(r_1) : z < 0\},$$

para un $r_1 > r_0$. Finalmente, la tercer zona, denotada por \mathbb{G}_2 , corresponde a la zona entre \mathbb{G}_0 y \mathbb{G}_1 y la definiremos como la unión de dos subzonas \mathbb{G}_2^+ y \mathbb{G}_2^- definidas por

$$\mathbb{G}_2^+ = \{z \in \mathbb{D}(r_1) \setminus \mathbb{G}_0 : z > 0\},$$

$$\mathbb{G}_2^- = \{z \in \mathbb{D}(r_1) \setminus \mathbb{G}_0 : z < 0\}.$$

A continuación daremos un “paseo” a través de cada una de las zonas en cuestión para dar detalles sobre la aproximación utilizada según sea el caso así como algoritmos para realizar dicha aproximación.

3.3. Zona \mathbb{G}_0

En esta zona la aproximación de ML por medio de series de potencias

$$E_{\alpha,\alpha}(z) = \sum_{k=0}^{M-1} \frac{z^k}{\Gamma(\alpha(k+1))}, \quad (10)$$

resulta adecuada. Para el algoritmo optamos por tomar $r_0 = 0,95$ basándonos en [2]. El error cometido al aproximar ML por (10) lo podemos controlar mediante el siguiente teorema.

Teorema. *Sea $\epsilon > 0$ y $z \in \mathbb{C}$. Si $|z| < 1$ y*

$$M \geq \max \left\{ \left\lceil \frac{2-\beta}{\alpha} \right\rceil + 1, \left\lceil \frac{\ln(\epsilon(1-|z|))}{\ln(|z|)} \right\rceil + 1 \right\},$$

entonces el error cometido queda acotado como

$$R_{\mathbb{G}_0}(z) = \left| \sum_{k=M}^{\infty} \frac{z^k}{\Gamma(\alpha k + \beta)} \right| \leq \epsilon,$$

donde $[a]$ denota el mínimo entero mayor que a . Tomamos un valor de $\epsilon = 1e^{-8}$ al momento de acotar el error. El algoritmo 1 refleja como realizar dicha aproximación en \mathbb{G}_0 .

En las figuras 4 y 5 se muestran las aproximaciones de la ML en \mathbb{G}_0 usando el algoritmo 1 para $r_0 = 0,95$ y varios valores de α .

Algorithm 1 Aproximando la ML en \mathbb{G}_0

Require: $z \in \mathbb{G}_0; \alpha, \beta \in (0, 1), \epsilon > 0$.

Ensure: $\text{approx} = E_{\alpha, \beta}(z)$ con precisión ϵ .

$$M \leftarrow \max \left\{ \left\lceil \frac{2-\beta}{\alpha} \right\rceil + 1, \left\lceil \frac{\ln(\epsilon(1-|z|))}{\ln(|z|)} \right\rceil + 1 \right\}$$

$\text{approx} = 0$

for $k = 0 \rightarrow M$ **do**

$$\text{approx} \leftarrow \text{approx} + \frac{z^k}{\Gamma(\alpha k + \beta)}$$

end for

return approx

(b)
 $\alpha =$
 $0, \mathfrak{J}$

Figura 4: Aproximaciones de la ML en \mathbb{G}_0 .

(b)
 $\alpha =$
 $0, \mathfrak{J}$

Figura 5: Aproximaciones de la ML en \mathbb{G}_0 .

3.4. Zona \mathbb{G}_1

Definimos la notación

$$A(z, \alpha, \beta, x) = \frac{1}{\alpha} z^{\frac{1-\beta}{\alpha}} \exp \left(z^{\frac{1}{\alpha}} \cos \frac{x}{\alpha} \right).$$

Luego entonces, aproximaremos la ML en esta zona mediante asíntotas exponencialmente mejoradas donde, para $z \in \mathbb{G}_1$, tendremos que

$$E_{\alpha, \beta}(z) = \begin{cases} -\sum_{k=1}^{M-1} \frac{z^{-k}}{\Gamma(\beta - \alpha k)} & z \in \mathbb{G}_1^- \\ A(z, \alpha, \beta, 0) - \sum_{k=1}^{M-1} \frac{z^{-k}}{\Gamma(\beta - \alpha k)} & z \in \mathbb{G}_1^+. \end{cases} \quad (11)$$

El error al aproximar así la ML está controlado por el siguiente teorema

Teorema. Sea $\alpha \in (0, 1), \epsilon > 0$ y $z \in \mathbb{C}$. Para $M \approx \frac{1}{\alpha} |z|^{\frac{1}{\alpha}}$ y $|z| \geq (-2 \log \frac{\epsilon}{C})^\alpha$

el error cometido por (11) satisfice

$$R_{\mathbb{G}_1}(z) = \left| E_{\alpha,\beta}(z) - \left(- \sum_{k=1}^{M-1} \frac{z^{-k}}{\Gamma(\beta - \alpha k)} \right) \right| \leq \epsilon,$$

donde C es una constante que solo depende de α y β .

Dicha constante es aproximada como

$$C \approx \frac{1}{\pi \sin(\pi\alpha)}. \quad (12)$$

Para nuestro algoritmo tomamos, basados en el teorema anterior

$$M = \left\lceil \frac{1}{\alpha} |z|^{\frac{1}{\alpha}} \right\rceil + 1, \quad r_1 = \left(-2 \log \frac{\epsilon}{C} \right)^\alpha, \quad (13)$$

donde $[x]$ denota el mínimo entero mayor que x . El algoritmo 2 refleja como realizar dicha aproximación en \mathbb{G}_1 .

Algorithm 2 Aproximando la ML en \mathbb{G}_1

Require: $z \in \mathbb{G}_1; \alpha, \beta \in (0, 1), \epsilon > 0$.

Ensure: $approx = E_{\alpha,\beta}(z)$ con precisión ϵ .

$M \leftarrow \left\lceil \frac{1}{\alpha} |z|^{\frac{1}{\alpha}} \right\rceil + 1$

$C \leftarrow \frac{1}{\pi \sin(\pi\alpha)}$

$r_1 \leftarrow \left(-2 \log \frac{\epsilon}{C} \right)^\alpha$

$approx = 0$

for $k = 1 \rightarrow M$ **do**

$approx \leftarrow approx - \frac{z^{-k}}{\Gamma(\beta - \alpha k)}$

end for

if $z \in \mathbb{G}_1^+$ **then**

$approx \leftarrow approx + A(z, \alpha, \beta, 0)$

end if

return $approx$

En las figuras 6 y 7 se muestran las aproximaciones de la ML en \mathbb{G}_1^- mientras que en 8 y 9 se muestran aproximaciones en \mathbb{G}_1^+ usando (2) para $r_0 = 0,95$ y varios valores de α . Acotamos los valores extremos de z dependiendo del valor de α pues de este último depende el tamaño de r_1 . Dicho límite se menciona en las figuras correspondientes.

$$\begin{aligned}
& \text{(b)} \\
& -30 \leq \\
& z \leq \\
& -r_1, \alpha = \\
& 0, \mathfrak{B}
\end{aligned}$$

Figura 6: Aproximaciones de la ML en \mathbb{G}_1^- .

$$\begin{aligned}
& \text{(b)} \\
& -25 \leq \\
& z \leq \\
& -r_1, \alpha = \\
& 0, \mathfrak{B}
\end{aligned}$$

Figura 7: Aproximaciones de la ML en \mathbb{G}_1^- .

$$\begin{aligned}
& \text{(b)} \\
& r_1 \leq \\
& z \leq \\
& 30, \alpha = \\
& 0, \mathfrak{B}
\end{aligned}$$

Figura 8: Aproximaciones de la ML en \mathbb{G}_1^+ .

$$\begin{aligned}
& \text{(b)} \\
& r_1 \leq \\
& z \leq \\
& 25, \alpha = \\
& 0, \mathfrak{B}
\end{aligned}$$

Figura 9: Aproximaciones de la ML en \mathbb{G}_1^+ .

3.5. Zona \mathbb{G}_2

Introducimos las siguientes notaciones

$$\omega(x, y, \alpha, \beta) = x^{\frac{1}{\alpha}} \sin \frac{y}{\alpha} + y \left(1 + \frac{1 - \beta}{\alpha}\right),$$

$$B(r, \alpha, \beta, z, \phi) = \frac{1}{\pi} A(r, \alpha, \beta, \phi) \frac{r \sin[\omega(r, \phi, \alpha, \beta) - \phi] - z \sin[\omega(r, \phi, \alpha, \beta)]}{r^2 - 2rz \cos \phi + z^2}.$$

Luego entonces, aproximaremos ML en \mathbb{G}_2 mediante las siguientes repre-

sentaciones integrales

$$E_{\alpha,\beta}(z) = \begin{cases} \int_0^\infty B(r, \alpha, \beta, z, \frac{2\pi\alpha}{3})dr & z \in \mathbb{G}_2^- \\ A(z, \alpha, \beta, 0) + \int_0^\infty B(r, \alpha, \beta, z, \pi\alpha)dr & z \in \mathbb{G}_2^+. \end{cases} \quad (14)$$

El error cometido al aproximar la ML con (14) queda acotado por

$$R_{\mathbb{G}_2}(R_{max}, \alpha, \beta, z, \phi) \leq \left| \int_{R_{max}}^\infty B(r; \alpha, \beta, z, \phi)dr \right| < \epsilon,$$

que claramente depende de la elección de R_{max} . De [2] sabemos que

$$R_{max} \geq \begin{cases} \max\{2^\alpha, 2|z|, (-2 \ln \frac{\pi 2^\beta \epsilon}{12})^\alpha\} & z \in \mathbb{G}_2^- \\ \max\{1, 2|z|, (-\ln \frac{\pi \epsilon}{6})^\alpha\} & z \in \mathbb{G}_2^+, \end{cases} \quad (15)$$

para $0 \leq \beta \leq 1$. La evaluación numérica de la parte integral sugerida en [2] es Gauss-Kronrod o Gauss-Lobatto. Sin embargo, para nuestros propósitos requerimos evaluar ML muchas veces y rápidamente por lo cual optamos por utilizar una cuadratura de Gaussiana con nodos de Gauss-Laguerre ¹ que resulta más apropiada en nuestro caso. En la siguiente sección veremos esta cuadratura un poco más a detalle.

El algoritmo 3 refleja como realizar dicha aproximación en \mathbb{G}_2 . En nuestro caso aproximamos la integral utilizando 15 nodos de Laguerre y definimos $\psi(r) = f(r)e^r$ para tener $f(r) = \psi(r)e^{-r}$.

Algorithm 3 Aproximando la ML en \mathbb{G}_2

Require: $z \in \mathbb{G}_2; \alpha, \beta \in (0, 1), \epsilon > 0$.

Ensure: $approx = E_{\alpha,\beta}(z)$ con precisión ϵ .

if $z \in \mathbb{G}_2^-$ **then**

$approx \leftarrow \int_0^\infty B(r, \alpha, \beta, z, \frac{2\pi\alpha}{3})dr$ {Integrando con Gauss-Laguerre}

else

$approx \leftarrow A(z, \alpha, \beta, 0) + \int_0^\infty B(r, \alpha, \beta, z, \pi\alpha)dr$

end if

return $approx$

En las figuras 10 y 11 se muestran las aproximaciones de la ML en \mathbb{G}_2^- mientras que en 12 y 13 se muestran aproximaciones en \mathbb{G}_2^+ usando (2) para $r_0 = 0.95$, r_1 como en (13) y varios valores de α .

¹Ver [15]

(b)
 $\alpha =$
0,3

Figura 10: Aproximaciones de la ML en \mathbb{G}_2^- .

(b)
 $\alpha =$
0,7

Figura 11: Aproximaciones de la ML en \mathbb{G}_2^- .

(b)
 $\alpha =$
0,3

Figura 12: Aproximaciones de la ML en \mathbb{G}_2^+ .

(b)
 $\alpha =$
0,7

Figura 13: Aproximaciones de la ML en \mathbb{G}_2^+ .

3.6. Cuadratura de Gauss-Laguerre

Los polinomios ortogonales juegan un papel crucial en la elaboración de fórmulas de cuadratura de máximo grado de exactitud. Sean x_0, \dots, x_n puntos distintos en el intervalo $[-1, 1]$. Para la aproximación de la integral pesada $I_w(q) = \int_{-1}^1 q(t)w(t)dt$, siendo $q \in C^0([-1, 1])$, consideramos una regla de cuadratura del tipo

$$I_{n,m}(q) = \sum_{k=0}^n w_k q(x_k), \quad (16)$$

donde los *pesos* w_k son coeficientes por determinar de un modo apropiado y x_k son los *nodos* donde se evaluará la función que no son más que los ceros de los polinomios ortogonales en el intervalo $[-1, 1]$ de la cuadratura utilizada.

De [15] obtenemos el siguiente resultado.

Lema. *El máximo grado de exactitud de la fórmula de cuadratura (16) es $2n+1$.*

Nótese que podemos mapear los nodos y pesos en $[-1, 1]$ a un intervalo arbitrario $[a, b]$ mediante

$$t = \Phi(\xi) = \frac{a+b}{2}\xi + \frac{b-a}{2},$$

obteniendo de este modo que

$$\int_a^b q(t)dt = \frac{a+b}{2} \int_{-1}^1 (q \circ \Phi)(\xi)d\xi.$$

Luego entonces, podemos usar la cuadratura con pesos $w'_k = \frac{a+b}{2}w_i$ y nodos $x'_i = \Phi(x_i)$ en el intervalo $[a, b]$. Notar que esta fórmula mantiene en el intervalo $[a, b]$ el mismo grado de exactitud que el de la fórmula generada en $[-1, 1]$.

Sin embargo, en nuestro caso el intervalo no está acotado superiormente. Para este caso utilizamos una fórmula de cuadratura Gaussiana cuyos nodos son ceros de los polinomios ortogonales de Laguerre. Estos polinomios, ortogonales en el intervalo $[0, +\infty)$ con respecto a la función de peso $w(t) = e^{-t}$, están definidos como

$$L_n(t) = e^t \frac{d^n}{dt^n}(e^{-t}t^n), \quad n \geq 0,$$

y satisfacen la relación de recursividad

$$\begin{cases} L_{n+1}(t) = (2n+1-t)L_n(t) - n^2L_{n-1}(t), & n \geq 0, \\ L_{-1} = 0, & L_0 = 1. \end{cases}$$

Para cualquier función q , definimos $\phi(t) = q(t)e^t$. Entonces, $I(q) = \int_0^\infty q(t)dt = \int_0^\infty e^{-t}\phi(t)dt$, obteniendo de este modo que

$$I(q) = \sum_{k=1}^n w_k \phi(x_k) + \frac{(n!)^2}{(2n!)} \phi^{(2n)}(\xi), \quad 0 < \xi < +\infty. \quad (17)$$

Denotemos por \mathbb{P}_{2n-1} el espacio de polinomios de grado $2n-1$. De la ecuación anterior uno concluye que la fórmula de cuadratura de Gauss-Laguerre es exacta para funciones q del tipo ϕe^{-t} , donde $\phi \in \mathbb{P}_{2n-1}$. En un sentido generalizado, podemos decir que se tiene un grado óptimo de exactitud de $2n-1$.

3.7. Observaciones

Al implementar la ML en el eje real notamos que hay algunas discontinuidades numéricas al pasar de una zona a otra. Dichas discontinuidades

varían en base a diversos factores como son el número de nodos de Laguerre tomados y la manera de construir la ψ en \mathbb{G}_2 así como el valor que toma α . Sin embargo dichas discontinuidades no representan una fuente considerable de error por lo cual aproximaremos la ML del modo descrito en esta sección. También notamos que para valores de α cercanos a 0 se requieren más sumandos para aproximar las series de potencias en \mathbb{G}_0 y \mathbb{G}_1 . Análogamente, el número requerido de dichos sumandos disminuye al tener α cercano a 1. Con esta sección damos por sentado la aproximación numérica de la ML para valores reales de z y $\alpha = \beta \in (0, 1)$.

4. Solución numérica de una EDF

En este capítulo introduciremos la teoría necesaria para desarrollar nuestro método iterativo monótono, también estableceremos dicho método en el caso continuo, su discretización y detallaremos su implementación. La demostración de los resultados puede ser consultada en [1].

4.1. Aspectos teóricos de EDFs

Nos enfocaremos en considerar la existencia y unicidad de la solución del siguiente problema de valores iniciales para una EDF, usando el método de sub y súper soluciones y su método monótono iterativo asociado

$$\begin{cases} \mathbb{D}^\alpha u(t) = f(t, u), & t \in (0, T]. \\ t^{1-\alpha} u(t)|_{t=0} = u_0, \end{cases} \quad (18)$$

donde $0 < T < +\infty$ y \mathbb{D}^α representa la derivada fraccional de Riemann-Liouville de orden $0 < \alpha < 1$.

EDFs aparecen frecuentemente en diferentes áreas de investigación e ingeniería, tales como química, física, control de sistemas dinámicos etc. Recientemente, mucha gente ha puesto atención en el resultado de existencia de la solución del problema de valores iniciales para EDFs. A continuación enlistaremos algunos resultados importantes.

Observación. *El problema de valores iniciales*

$$\begin{cases} \mathbb{D}^\alpha u(t) = f(u), & t \in (0, T]. \\ u(a) = u_0, \end{cases}$$

donde $0 < a < T$, tiene sentido.

Observación. *Sea $0 < \alpha < 1$. Asumamos $f(x) \in C(\mathbb{R}^+) \cap L_{loc}^1(\mathbb{R}^+)$. Entonces para todo $(a, b) \in \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}$, el problema de valores iniciales*

$$\begin{cases} \mathbb{D}^\alpha u(x) = f(x) \\ u(a) = b, \end{cases}$$

tiene una única solución en $C(\mathbb{R}^+) \cap L_{loc}^1(\mathbb{R}^+)$ dada por

$$u(x) = \left(b - \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^a (a-t)^{\alpha-1} f(t) dt \right) \frac{x^{\alpha-1}}{a^{\alpha-1}} + \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^x (x-t)^{\alpha-1} f(t) dt.$$

Observación. Sea $C_{1-\alpha}([0, T]) = \{u \in C(0, T]; t^{1-\alpha}u \in C([0, T])\}$. Supongamos $0 < \alpha < 1$ y $y(x) \in C_{1-\alpha}([0, b])$.

(a) Si

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} [x^{1-\alpha}y(x)] = c, \quad c \in \mathbb{R},$$

entonces

$$\mathbb{I}^{1-\alpha}y(0+) := \lim_{x \rightarrow 0^+} \mathbb{I}^{1-\alpha}y(x) = c\Gamma(\alpha).$$

(b) Si

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \mathbb{I}^{1-\alpha}y(x) = b, \quad b \in \mathbb{R}$$

y existe el límite $\lim_{x \rightarrow 0^+} [x^{1-\alpha}y(x)]$, entonces

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} [x^{1-\alpha}y(x)] = \frac{b}{\Gamma(\alpha)}.$$

Definición. Llamaremos a una función $u(t)$ una solución clásica del problema (18), si:

(i) $u(t)$ es continua en $(0, T]$, $t^{1-\alpha}u(t)$ es continua en $[0, T]$, y si la integral fraccional $\mathbb{I}^{1-\alpha}u(t)$ es continuamente diferenciable para $t \in (0, T]$;

(ii) $u(t)$ satisface (18).

Para el problema (18), tenemos las siguientes definiciones de sub y súper soluciones.

Definición. Una función $\bar{u} \in C_{1-\alpha}([0, T])$ es llamada una **súper solución** del problema (18), si satisface

$$\begin{cases} \mathbb{D}^\alpha \bar{u}(t) \geq f(t, \bar{u}), & t \in (0, T]. \\ t^{1-\alpha} \bar{u}(t)|_{t=0} \geq u_0. \end{cases} \quad (19)$$

Definición. Una función $\underline{u} \in C_{1-\alpha}([0, T])$ es llamada una **sub solución** del problema (18), si satisface

$$\begin{cases} \mathbb{D}^\alpha \underline{u}(t) \leq f(t, \underline{u}), & t \in (0, T]. \\ t^{1-\alpha} \underline{u}(t)|_{t=0} \leq u_0. \end{cases} \quad (20)$$

De aquí en adelante, supondremos que

$$\bar{u}(t) \geq \underline{u}(t), \quad t \in (0, T]; \quad t^{1-\alpha} \bar{u}(t)|_{t=0} \geq t^{1-\alpha} \underline{u}(t)|_{t=0}, \quad (21)$$

y definimos el sector

$$\langle \underline{u}, \bar{u} \rangle = \langle u \in C_{1-\alpha}([0, T]); \bar{u}(t) \geq u(t) \geq \underline{u}(t), t \in (0, T],$$

$$t^{1-\alpha} \bar{u}(t)|_{t=0} \geq t^{1-\alpha} u(t)|_{t=0} \geq t^{1-\alpha} \underline{u}(t)|_{t=0} \rangle.$$

El siguiente es un resultado de existencia de la solución para el problema lineal de valores iniciales para EDFs y una propiedad de la definición de Riemann-Liouville de cálculo fraccional, los cuales son importantes para obtener resultados de existencia y unicidad de las soluciones del problema (18).

Lema. *El problema lineal de valores iniciales*

$$\begin{cases} \mathbb{D}^\alpha u + \gamma u = q(t), & t \in (0, T], \\ t^{1-\alpha} u(t)|_{t=0} = u_0, \end{cases} \quad (22)$$

donde γ es una constante y $q \in C([0, T] \times \mathbb{R})$ tiene por solución la siguiente representación integral

$$u(t) = \Gamma(\alpha) u_0 t^{\alpha-1} E_{\alpha, \alpha}(-\gamma t^\alpha) + \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} E_{\alpha, \alpha}(-\gamma(t-s)^\alpha) q(s) ds, \quad (23)$$

donde $E_{\alpha, \alpha}$ denota la función de ML. En particular, cuando $\gamma = 0$, el problema de valores iniciales (22) tiene por solución

$$u(t) = u_0 t^{\alpha-1} + \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} q(s) ds.$$

El siguiente resultado desempeña un papel muy importante en nuestro análisis restante.

Lema. *Si $w \in C_{1-\alpha}([0, T])$ y satisface las relaciones*

$$\begin{cases} \mathbb{D}^\alpha w + \gamma_0 w \geq 0, & t \in (0, T], \\ t^{1-\alpha} w(t)|_{t=0} \geq 0, \end{cases}$$

donde $\gamma_0 > -\frac{\Gamma(1+\alpha)}{T^\alpha}$ es una constante. Entonces $w \geq 0$ para $t \in (0, T]$.

Suponemos que f satisface la siguiente condición.

$$f(t, u_1) - f(t, u_2) \geq -\underline{\gamma}(u_1 - u_2), \quad \underline{u} \leq u_1 \leq u_2 \leq \bar{u}, \quad (24)$$

donde $\underline{\gamma} > -\frac{\Gamma(1+\alpha)}{T^\alpha}$ es una constante y $\underline{u}, \bar{u} \in C_{1-\alpha}([0, T])$ son respectivamente sub y súper soluciones de (18). Claramente, esta condición se satisface con

$\underline{\gamma} = 0$, cuando f es monótona no decreciente en u . En términos de (24), la función

$$F(t, u) = \underline{\gamma}u + f(t, u) \quad (25)$$

es monótona no decreciente en u para $u \in \langle \underline{u}, \bar{u} \rangle$.

Suponemos también la existencia de una constante $\frac{\Gamma(1+\alpha)}{T^\alpha} > \bar{\gamma} \geq -\underline{\gamma}$, tal que

$$f(t, u_1) - f(t, u_2) \leq \bar{\gamma}(u_1 - u_2), \quad \underline{u} \leq u_1 \leq u_2 \leq \bar{u}, \quad (26)$$

donde $\underline{u}, \bar{u} \in C_{1-\alpha}([0, T])$ son respectivamente sub y súper soluciones de (18).

El siguiente es un teorema de existencia y unicidad de la solución del problema (18).

Teorema. *Supongamos que $\underline{u}, \bar{u} \in C_{1-\alpha}([0, T])$ son respectivamente sub y súper soluciones de (18), tales que (21) se cumple, $f \in C([0, T] \times \mathbb{R})$, y (24) se satisface. Entonces el problema (18) tiene una solución en el sector $\langle \underline{u}, \bar{u} \rangle$. Adicionalmente, si (26) se satisface, entonces el problema (18) tiene una única solución en el sector $\langle \underline{u}, \bar{u} \rangle$.*

El siguiente corolario se desprende de los resultados anteriores.

Corolario 1. *Sea $Lip_\gamma(\langle \underline{u}, \bar{u} \rangle)$ el espacio de las funciones f que satisfacen la condición $|f(t, u_1) - f(t, u_2)| \leq \gamma|u_1 - u_2|$, $u_1, u_2 \in \langle \underline{u}, \bar{u} \rangle$. Si $f \in Lip_\gamma(\langle \underline{u}, \bar{u} \rangle)$ satisface*

$$0 < \gamma < \frac{\Gamma(1 + \alpha)}{T^\alpha}, \quad (27)$$

entonces (18) tiene una única solución en el sector $\langle \underline{u}, \bar{u} \rangle$.

4.2. Una discretización y aproximación numérica del método iterativo monótono continuo

Partiendo de la demostración del teorema de existencia y unicidad anterior de Zhang Shuqin en [1] podemos ver que el problema (18) es equivalente al siguiente problema

$$\begin{cases} \mathbb{D}^\alpha v + \gamma v = \gamma v + f(t, v), & t \in (0, T]. \\ t^{1-\alpha} v(t)|_{t=0} = u_0, \end{cases} \quad (28)$$

donde γ es una constante conocida.

Para poder aplicar nuestro método de sub y súper soluciones y su asociado monótono iterativo para considerar la existencia de la solución del problema

(18), añadimos $\underline{\gamma}$ ($\underline{\gamma}$ es la constante de (24)) en ambos lados de la EDF del problema (18), y escogemos un iterando adecuado $v^{(0)}$; construimos la secuencia $\{v^{(k)}\}$, $k = 1, 2, \dots$, del siguiente proceso iterativo

$$\begin{cases} \mathbb{D}^\alpha v^{(k)} + \underline{\gamma}v^{(k)} = \underline{\gamma}v^{(k-1)} + f(t, v^{(k-1)}), & t \in (0, T]. \\ t^{1-\alpha}v^{(k)}(t)|_{t=0} = u_0. \end{cases} \quad (29)$$

Como para cada k el lado derecho de (29) es conocido, el lema (23) implica que la secuencia $\{v^{(k)}\}$ está bien definida. Resulta de particular interés la secuencia obtenida de (29) con una sub o súper solución del problema (18) como iteración inicial. Denotemos la secuencia con la iteración inicial $v^{(0)} = \bar{u}$ como $\{\bar{v}^{(k)}\}$ y la secuencia con $v^{(0)} = \underline{u}$ como $\{\underline{v}^{(k)}\}$. Las secuencias $\{\bar{v}^{(k)}\}$ y $\{\underline{v}^{(k)}\}$ construidas con (29) mantienen las propiedades de monotonía

$$\underline{u} \leq \underline{v}^{(k)} \leq \underline{v}^{(k+1)} \leq \bar{v}^{(k+1)} \leq \bar{v}^{(k)} \leq \bar{u}, \quad t \in (0, T], \quad (30)$$

para todo $k = 1, 2, \dots$. De hecho, sea $r = \bar{v}^{(0)} - \bar{v}^{(1)}$. De (21), (19) y (29), y $\bar{v}^{(0)} = \bar{u}$, tenemos que

$$\begin{aligned} \mathbb{D}^\alpha r + \underline{\gamma}r &= (\mathbb{D}^\alpha \bar{u} + \underline{\gamma}\bar{u}) - (\underline{\gamma}\bar{v}^{(0)} + f(t, \bar{v}^{(0)})) \\ &= \mathbb{D}^\alpha \bar{u} - f(t, \bar{u}) \geq 0, \quad t \in (0, T], \\ t^{1-\alpha}r(t)|_{t=0} &\geq u_0 - u_0 = 0. \end{aligned}$$

En vista del lema (4.1), $r \geq 0$ para $t \in (0, T]$, lo que implica que $\bar{v}^{(1)} \leq \bar{v}^{(0)} = \bar{u}$, $t \in (0, T]$. Un argumento similar usando la propiedad de sub solución del problema (18) conduce a que $\underline{v}^{(1)} \geq \underline{v}^{(0)} = \underline{u}$, $t \in (0, T]$. Sea $r^{(1)} = \bar{v}^{(1)} - \underline{v}^{(1)}$. Por (24), (25) y (21), tenemos que

$$\begin{aligned} \mathbb{D}^\alpha r^{(1)} + \underline{\gamma}r^{(1)} &= \underline{\gamma}\bar{v}^{(0)} + f(t, \bar{v}^{(0)}) - (\underline{\gamma}\underline{v}^{(0)} + f(t, \underline{v}^{(0)})) \\ &= \underline{\gamma}(\bar{u} - \underline{u}) + f(t, \bar{u}) - f(t, \underline{u}) \\ &\geq 0, \quad t \in (0, T], \end{aligned}$$

$$t^{1-\alpha}r^{(1)}(t)|_{t=0} = \bar{v}^{(1)}(0) - \underline{v}^{(1)}(0) = 0.$$

De nuevo, por el lema (4.1), $r^{(1)} \geq 0$ para $t \in (0, T]$, la conclusión de arriba muestra que

$$\underline{u} = \underline{v}^{(0)} \leq \underline{v}^{(1)} \leq \bar{v}^{(1)} \leq \bar{v}^{(0)} = \bar{u}, \quad t \in (0, T].$$

Supongamos, por inducción

$$\underline{u} \leq \underline{v}^{(k-1)} \leq \underline{v}^{(k)} \leq \bar{v}^{(k)} \leq \bar{v}^{(k-1)} \leq \bar{u}, \quad t \in (0, T]. \quad (31)$$

Entonces por (29), (25), (26) y (31), la función $r^{(k)} = \bar{v}^{(k)} - \bar{v}^{(k+1)}$ satisface las relaciones

$$\begin{aligned} \mathbb{D}^\alpha r^{(k)} + \underline{\gamma} r^{(k)} &= \underline{\gamma} \bar{v}^{(k-1)} + f(t, \bar{v}^{(k-1)}) - (\underline{\gamma} \bar{v}^{(k)} + f(t, \bar{v}^{(k)})) \\ &\geq 0, \quad t \in (0, T], \end{aligned}$$

$$t^{1-\alpha} r^{(k)}(t)|_{t=0} = 0.$$

Por el lema (4.1), $r^{(k)} \geq 0$, esto es $\bar{v}^{(k+1)} \leq \bar{v}^{(k)}$ para $t \in (0, T]$. Un razonamiento similar conlleva a $\underline{v}^{(k)} \leq \underline{v}^{(k+1)}$ y $\underline{v}^{(k+1)} \leq \bar{v}^{(k+1)}$ para $t \in (0, T]$. Así, la propiedad de monotonía (30) continua por el principio de inducción.

De este modo podemos resolver una EDF no lineal mediante el método monótono iterativo partiendo de una sub o súper solución del problema (18). En cada iteración el lado derecho de (29) es conocido por lo cual podemos utilizar el resultado (23) para resolver la EDF lineal asociada. En este contexto, nos resta mencionar como podemos construir sub y súper soluciones adecuadas del problema (18) para comenzar nuestro proceso iterativo. Para este fin el siguiente corolario será de gran utilidad.

Corolario 2. *Supongamos que el corolario 1 se cumple y que*

$$f(t, 0) \geq 0, \quad u_0 \geq 0. \quad (32)$$

Supongamos que existe una constante $\rho > 0$ tal que

$$f(t, \rho) \leq \frac{\rho t^{-\alpha}}{\Gamma(1-\alpha)}, \quad t \in (0, T], \quad u_0 \leq 0. \quad (33)$$

Luego entonces, el problema (18) tiene una única solución $u \in \langle 0, \rho \rangle$.

Con esto en mente podemos construir sub y súper soluciones de (18) constantes de manera relativamente simple para tiempos $t \in (0, T]$ adecuados. Computacionalmente, lo más trascendente de calcular en la solución del caso lineal es la evaluación numérica de la función de ML y aproximación de la integral singular en (23). Luego entonces, nos resta realizar un análisis de esta última.

4.3. Aproximación numérica de la integral singular

La parte integral en la solución de (23) debe ser tratada con cuidado pues contiene una singularidad en el límite de integración superior. En este caso un cambio de variable es usualmente la solución. Partimos de

$$\psi(s)ds = (t-s)^{\alpha-1}E_{\alpha,\alpha}(-d(t-s)^\alpha)q(s)ds. \quad (34)$$

Denotemos por $\varphi(s) = E_{\alpha,\alpha}(-d(t-s)^\alpha)q(s)$. Realizando un cambio de variable del tipo

$$s = t - x^{\frac{1}{\alpha}}, \quad (35)$$

tenemos que

$$\begin{aligned} \int_0^t \psi(s)ds &= \int_0^t (t-s)^{\alpha-1}\varphi(s)ds = \frac{1}{\alpha} \int_0^{t^\alpha} x^{\frac{1-\alpha}{\alpha}} (t-t+x^{\frac{1}{\alpha}})^{\alpha-1}\varphi(t-x^{\frac{1}{\alpha}})dx \\ &= \frac{1}{\alpha} \int_0^{t^\alpha} \varphi(t-x^{\frac{1}{\alpha}})dx = \frac{1}{\alpha} \int_0^{t^\alpha} E_{\alpha,\alpha}(-d(t-t+x^{\frac{1}{\alpha}})^\alpha)q(t-x^{\frac{1}{\alpha}})dx \\ &= \frac{1}{\alpha} \int_0^{t^\alpha} E_{\alpha,\alpha}(-dx)q(t-x^{\frac{1}{\alpha}})dx = \frac{1}{\alpha} \int_0^{t^\alpha} \psi'(x)dx. \end{aligned}$$

De este modo obtenemos una integral no singular. La idea del cambio de variable se puede analizar más a detalle en [16]. Para aproximar esta última integral optamos por una cuadratura con nodos de Gauss-Legendre. De este modo, la aproximación de dicha integral queda expresada como

$$\int_0^t \psi(s)ds = \frac{1}{\alpha} \sum_i w_i \psi'(x_i), \quad (36)$$

siendo w_i y x_i los pesos y nodos de la cuadratura. Para mayor detalle de las cuadraturas se puede consultar [15]. De este modo, ya estamos en condiciones de calcular (23).

Con esto tenemos el camino libre para calcular la solución de una EDF no lineal de manera numérica. Partiendo de una sub o súper solución de (18) conocida podemos calcular la secuencia (29) numéricamente. Para ilustrar esto mostramos el algoritmo 4 para la solución de una EDF no lineal. En este algoritmo suponemos $f \in Lip_\gamma(\langle \underline{u}, \bar{u} \rangle)$ por lo que la solución es única en el sector. Por el momento asumiremos que conocemos una sub o súper solución de (18). También conocemos el intervalo de tiempo $(0, T]$ y el grado de

discretización $Prec$ de las funciones. En este último punto, $Prec$ denotará la cantidad de subtiempos entre dos unidades de tiempo. Posteriormente, ilustraremos en la siguiente sección el proceso completo con varios ejemplos.

Algorithm 4 Aproximando la solución de una EDF no lineal

Require: Sub o súper solución v^0 de (18), $\alpha \in (0, 1)$, tiempo de calculo T , Tamaño de la discretización $Prec$, condición inicial u_0 , constante Lipschitz γ de f en el sector, número máximo de iteraciones permitidas $maxiter$.

Ensure: Discretización de $u(t)$.

Obtener una discretización de tamaño $Prec$ de v^0 .

for $k = 1 : maxiter$ **do**

Obtener v^{k+1} de solucionar el problema lineal

$$\begin{cases} \mathbb{D}^\alpha v^{(k)} + \gamma v^{(k)} = \gamma v^{(k-1)} + f(t, v^{(k-1)}), & t \in (0, T]. \\ t^{1-\alpha} v^{(k)}(t)|_{t=0} = u_0. \end{cases}$$

end for

return $u = v^k$.

Para obtener una aproximación a la solución de una EDF lineal podemos utilizar el algoritmo 5.

Algorithm 5 Aproximando la solución de una EDF lineal

Require: $\alpha \in (0, 1)$, tiempo de cálculo T , Tamaño de la discretización $Prec$, condición inicial u_0 , constante Lipschitz γ de f en el sector, discretización de v^{k-1} .

Ensure: Discretización de v^k .

Obtener una discretización de tamaño $Prec$ de $q(t) = \gamma v^{(k-1)} + f(t, v^{(k-1)})$.

for $t \in (0, T]$ **do**

Calcular la solución v_k dada por (23) utilizando (36) y aproximando $E_{\alpha, \alpha}$ como se ilustró anteriormente.

end for

return v^k .

Con esto en mente estamos en condiciones de pasar a ilustrar nuestro método con ejemplos prácticos.

5. Resultados numéricos

A continuación ilustramos el uso de nuestro método con varios ejemplos de EDF no lineales. En dichos ejemplos se muestra a detalle la selección de sub y súper soluciones y demás consideraciones pertinentes.

5.1. Ejemplo 1

Sea $f(t, u)$ dada por

$$f(t, u) = \frac{\epsilon}{2}u^2, \quad u_0 = 0, \quad t \in (0, 100], \quad (37)$$

donde $\epsilon > 0$ es una constante. Podemos verificar las hipótesis necesarias para utilizar el corolario 2. Inicialmente vemos que (32) se cumple pues $f(t, 0) = 0$. Para no tener conflictos con (33) asumimos $u_0 = 0$. Fijemos la constante $\rho = 1$ para tener el sector $\langle 0, 1 \rangle$. Es simple verificar que $f \in Lip_\epsilon(\langle 0, 1 \rangle)$ pues $\forall u_1, u_2 \in \langle 0, 1 \rangle$

$$\left| \frac{\epsilon}{2}u_1^2 - \frac{\epsilon}{2}u_2^2 \right| = \frac{\epsilon}{2}|u_1 - u_2||u_1 + u_2|$$

$$\frac{\epsilon}{2}|u_1 + u_2| \leq \frac{\epsilon}{2}2 = \epsilon.$$

Obtenemos que $f \in Lip_\epsilon(\langle 0, 1 \rangle)$. Para encontrar una constante ϵ apropiada consideremos que se deben satisfacer (27) y (33). Para esta última debe pasar que

$$\frac{\epsilon}{2} \leq \frac{t^{-\alpha}}{\Gamma(1 - \alpha)}, \quad t \in (0, 100].$$

Si t es cercano a 0, entonces (33) se cumple sin problemas. Si $t = T$, entonces debe pasar que

$$\frac{\epsilon}{2} \leq \frac{1}{\Gamma(1 - \alpha)T^\alpha},$$

por lo que tomamos

$$\epsilon = \frac{1}{\Gamma(1 - \alpha)T^\alpha}.$$

Esta elección de ϵ satisface (27) pues

$$0 < \epsilon = \frac{1}{\Gamma(1 - \alpha)T^\alpha} \leq \frac{\Gamma(1 + \alpha)}{T^\alpha} \iff$$

$$\frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \leq \Gamma(1+\alpha).$$

Esta última condición se cumple para varios valores de $\alpha \in (0, 1)$. En particular para $\alpha = 0,5$. En este ejemplo tomaremos este valor.

Habiendo cumplido las hipótesis del corolario 1 tenemos que $\underline{u} = 0$ y $\bar{u} = 1$ son respectivamente sub y súper soluciones de (18). En las figuras 14 y 15 mostramos algunas iteraciones de (29) para las sub y súper soluciones arriba citadas.

(b)
Ite
0

Figura 14: Secuencia iterativa (iteraciones 0-2) para la sub y súper soluciones de (37).

(b)
Ite
3

Figura 15: Secuencia iterativa (iteraciones 3-5) para la sub y súper soluciones de (37).

Notemos cómo la escala de las figuras cambia conforme itera nuestro método; en la iteración 0 la escala es de $1e^2$ mientras que en la iteración 5 es de $1e^{-5}$. En la tabla siguiente mostramos cómo decae la norma entre las discretizaciones de $\underline{u}(t)$ y $\bar{u}(t)$ denotadas respectivamente como $\underline{u}[t]$ y $\bar{u}[t]$ dada por $||\underline{u}[t] - \bar{u}[t]||$.

Iteración	$ \underline{u}[t] - \bar{u}[t] $
0	71009.253
1	152.2688
2	8.2745
3	0.41154
4	0.018951
5	0.00081568

Notamos una rápida convergencia al obtener un error no significativo en tan sólo 5 iteraciones del algoritmo. Esto refleja la pronta convergencia entre sub y súper soluciones a la solución real, que en este caso es $u(t) = 0$.

5.2. Ejemplo 2

Variando ligeramente la función del ejemplo anterior obtenemos

$$f(t, u) = \frac{\epsilon}{2}u^2 + t, \quad u_0 = 0, \quad t \in (0, 4]. \quad (38)$$

Al igual que antes tomamos $\epsilon = \gamma$. Usando el corolario 2 como en el ejemplo anterior, variamos el valor de la súper solución a $\rho = 25\Gamma(1 - \alpha)$. En este contexto, y de manera similar al ejemplo (37), tenemos que $f \in Lip_\gamma(\langle 0, \rho \rangle)$. Tomamos $\epsilon = \gamma = \frac{2}{\rho^2}$. Variando la subsolución, vemos que $\underline{u} = -1$ es sub solución de (18) para el ejemplo (38), pues satisface (23). Tomando $\alpha = 0,5$ mostramos el comportamiento de la secuencia iterativa (29) del problema (38) para unas cuantas iteraciones en las figuras 16 y 17.

(b)
Ite
0

Figura 16: Secuencia iterativa (iteraciones 0-2) para la sub y súper soluciones de (38).

(b)
Ite
3

Figura 17: Secuencia iterativa (iteraciones 3-5) para la sub y súper soluciones de (38).

Igual que antes, mostramos como decae la norma $\|\underline{u}[t] - \bar{u}[t]\|$ en la siguiente tabla comparativa.

Iteración	$\ \underline{u}[t] - \bar{u}[t]\ $
0	2865.7412
1	6.9772
2	0.015409
3	$3,0645e^{-5}$
4	$5,562e^{-8}$
5	$9,3318e^{-11}$

5.3. Ejemplo 3

Tratemos un ejemplo un poco más complicado tomado de [5]. Consideremos

$$f(t, u) = \frac{40320}{\Gamma(9 - \alpha)} t^{8-\alpha} - 3 \frac{\Gamma(5 - \frac{\alpha}{2})}{\Gamma(5 + \frac{\alpha}{2})} t^{4-\frac{\alpha}{2}} + 2,25\Gamma(1 + \alpha) + (1,5t^{\frac{\alpha}{2}} - t^4)^3 - u^{\frac{3}{2}}, \quad (39)$$

para $t \in (0, \frac{1}{20}]$, $u_0 = 0$. Buscando satisfacer las hipótesis del corolario 2 tomamos $\rho = 1$. Nos interesa que $f \in Lip_\gamma(\langle 0, 1 \rangle)$. Para encontrar un γ apropiado utilizamos el teorema del valor medio para obtener que $\gamma = \sup\{|\frac{d}{du}f(t, u)|_{(0,1)}\}$. Luego entonces

$$\gamma = \sup\left\{\left|\frac{d}{du}f(t, u)\right|_{(0,1)}\right\} = \sup\left\{\left|\frac{3}{2}u^{\frac{1}{2}}\right|_{(0,1)}\right\} = \frac{3}{2}.$$

No es difícil ver que $f(t, 0) \geq$, por lo que (32) se cumple. El tiempo máximo $T = \frac{1}{20}$ fue escogido para satisfacer las hipótesis restantes más fácilmente. Para el mismo fin tomaremos $\alpha = 0,5$. Claramente vemos que

$$0 < \frac{3}{2} < \frac{\Gamma(1 + \alpha)}{T^\alpha} = \frac{\Gamma(1,5)}{\frac{1}{\sqrt{20}}} = \sqrt{20} \Gamma(1,5) \approx 3,9633,$$

por lo cual se satisface (27). Finalmente vemos que

$$f(t, 1) = \frac{40320}{\Gamma(9 - \alpha)} t^{8-\alpha} - 3 \frac{\Gamma(5 - \frac{\alpha}{2})}{\Gamma(5 + \frac{\alpha}{2})} t^{4-\frac{\alpha}{2}} + 2,25\Gamma(1 + \alpha) - 1 + (1,5t^{\frac{\alpha}{2}} - t^4)^3.$$

No es complicado de observar numéricamente que para el valor escogido de α se cumple (33) en el intervalo $(0, T]$. Mostramos el comportamiento de la secuencia iterativa (29) del problema (39) para unas cuantas iteraciones en las figuras 18 y 19.

(b)
Ite
0

Figura 18: Secuencia iterativa (iteraciones 0-2) para la sub y súper soluciones de (39).

En la tabla siguiente mostramos como decae la norma $\|u[t] - \bar{u}[t]\|$.

(b)
Ite
3

Figura 19: Secuencia iterativa (iteraciones 3-5) para la sub y súper soluciones de (39).

Iteración	$ \underline{u}[t] - \bar{u}[t] $
0	7.0711
1	0.51222
2	0.042302
3	0.0032694
4	$2,3627e^{-4}$
5	$1,6553e^{-5}$

5.4. Ejemplo 4

Consideremos la función tomada de [6] dada por

$$f(t, u) = \frac{Mt^\alpha}{\pi^\alpha}(u + M)^2, \quad M > 0, \quad u_0 = 0, \quad t \in (0, 1]. \quad (40)$$

Supongamos que $M = \frac{1}{4}$ y $\alpha = 0,5$. De nueva cuenta utilizaremos el corolario 2 para obtener sub y súper soluciones de (18) para (40). Tomemos nuevamente $\rho = 1$. Utilizando el teorema del valor medio obtenemos que

$$\begin{aligned} \gamma &= \sup \left\{ \left| \frac{d}{du} f(t, u) \right|_{(0,1)} \right\} = \sup \left\{ \left| \frac{2Mt^\alpha}{\pi^\alpha}(u + M) \right|_{(0,1)} \right\} \\ &= \frac{2M(M + 1)T^\alpha}{\pi^\alpha} = \frac{5T^\alpha}{8\pi^\alpha}. \end{aligned}$$

Vemos que

$$0 < \frac{5T^\alpha}{8\pi^\alpha} \approx 0,3526 < \frac{\Gamma(1 + \alpha)}{T^\alpha} \approx 0,8862,$$

por lo que se cumple (27). Por otro lado, observamos que

$$f(t, 0) = \frac{M^3t^\alpha}{\pi^\alpha} > 0 \quad \forall t \in (0, T],$$

por lo que (32) se satisface. Finalmente, no es difícil ver que numéricamente

$$f(t, 1) = \frac{25t^\alpha}{64\pi^\alpha} < \frac{t^\alpha}{\Gamma(1 - \alpha)} \quad \forall t \in (0, T],$$

por lo cual se satisface (33). En las figuras 20 y 21 mostramos el comportamiento de la secuencia iterativa (29) para el problema (40).

(b)
Ite
0

Figura 20: Secuencia iterativa (iteraciones 0-2) para la sub y súper soluciones de (40).

(b)
Ite
5

Figura 21: Secuencia iterativa (iteraciones 3-5) para la sub y súper soluciones de (40).

En la tabla siguiente mostramos como decae la norma $\|\underline{u}[t] - \bar{u}[t]\|$.

Iteración	$\ \underline{u}[t] - \bar{u}[t]\ $
0	10
1	3.1218
2	0.18166
3	0.0071331
4	0.00022292
5	$5,8087e^{-6}$

5.5. Ejemplo 5

Consideremos la función no lineal f dada por

$$f(t, u) = au - bu^2, \quad u_0 = 1, \quad t \in (0, 200]. \quad (41)$$

Consideremos los valores constantes de $a = 0,1$ y $b = 1e^{-4}$. Esta ecuación modela el crecimiento de una especie en el caso de derivadas enteras y su solución es representada por la función logística. Dicha función resulta estar asintóticamente acotada por 0 y $\frac{a}{b}$. De este modo tomaremos un $\alpha = 0,95$

para mostrar el comportamiento parecido al caso clásico. Al saber esto de antemano, podemos proponer $\underline{u}(t) = 0$ y $\bar{u}(t) = \frac{a}{b} = 1000$. Utilizamos $\gamma = 0,05$.

En las figuras 22 y 23 mostramos el comportamiento de la secuencia iterativa(29) para el problema (40).

(b)
Ite
0

Figura 22: Secuencia iterativa (iteraciones 0-2) para la sub y súper soluciones de (41).

(b)
Ite
30

Figura 23: Secuencia iterativa (iteraciones 3-5) para la sub y súper soluciones de (41).

En la tabla siguiente mostramos como decae la norma $\|\underline{u}[t] - \bar{u}[t]\|$.

Iteración	$\ \underline{u}[t] - \bar{u}[t]\ $
0	141421.3562
6	119054.6834
9	60967.4806
15	12119.3008
20	1804.0748
25	0.52813

Notamos como requerimos de más iteraciones en este caso al utilizar tiempos grandes. Como fue pronosticado, la cota superior de la solución es $\frac{a}{b}$. Otros experimentos realizados muestran como la curva solución se modifica en escala al disminuir el parámetro α . En general, observamos que mientras α disminuye, la cota superior disminuye también mientras que el tiempo requerido para obtener la solución debe aumentar. Por citar un ejemplo, para $\alpha = 0,5$ la cota superior es de 820 y se requiere calcular la solución para $T = 2200$.

5.6. Observaciones

El método iterativo propuesto aproxima una solución de manera rápida al comenzar a iterar con una sub o una súper solución del problema. Esto refleja la rapidez y robustez del método propuesto en la solución de EDFs no lineales.

Un inconveniente al momento de implementar este algoritmo es el tiempo elevado de cómputo utilizado. Sin embargo, este puede ser dramáticamente reducido sin necesidad de paralelizar el algoritmo. Notemos primero que el mayor tiempo de cómputo se dedica a calcular la aproximación de la ML. Los puntos a evaluar en dicha función cambian al momento de cambiar el intervalo de tiempo. Sin embargo, también notamos que en cada iteración los puntos a evaluar son exactamente los mismos para cada iteración pues la ML sólo depende del tiempo actual de cálculo el cual se repite en cada iteración. De este modo podemos ahorrar bastante tiempo al guardar los valores calculados de la ML durante la primera iteración para no volver a calcularlos en las iteraciones restantes. Así, solamente la primera iteración calculará los valores de la ML que usaremos a lo largo de todas las iteraciones.

Otro detalle que nos permite ahorrar tiempo es el de usar pocos nodos de Legendre y de Laguerre en la aproximación de (36) y de la ML respectivamente. En nuestro caso usamos sólo 15 sumandos lo cual nos da una precisión bastante aceptable para prácticamente cualquier fin. También es bueno que dichos valores de los sitios y pesos de la cuadratura sean precalculados una sola vez y solamente ser leídos durante su uso en el programa.

6. Estimación del orden de la derivada y sistemas Lotka-Volterra

En este capítulo exploramos la sensibilidad de EDFs al orden fraccional de diferenciación y la aplicabilidad del método iterativo monótono a sistemas de segundo orden del tipo Lotka-Volterra.

6.1. Estimación del orden de derivación en EDFs

En contraste con modelos clásicos, se puede suponer que un modelo es fraccional aunque se desconozca el orden de la derivada. Luego entonces, de manera natural hay que estimarlo. En este contexto surgen dos problemas. En primer lugar la sensibilidad de la solución de una EDF al orden de derivación fraccional asociado y en segundo lugar la factibilidad de estimar dicho orden. Un problema inverso natural en este contexto es el utilizar la función f y estimaciones de \hat{u} obtenidas con nuestro método para estimar el coeficiente fraccionario de derivación utilizado. A continuación describiremos el problema a detalle y mostraremos algunos resultados numéricos.

6.1.1. Formulación del problema inverso

Para este problema generaremos datos sintéticos \hat{u} para una f y α dados. Podemos notar que este problema inverso carece de solución única por lo que tendremos que conformarnos con la de norma mínima. Denotemos por $\mathcal{F}(\alpha)$ el operador de nuestro método iterativo para resolver (18) con el α y f dados. De este modo $\mathcal{F}(\alpha) = \hat{u}$. Podemos aproximar la solución a nuestro problema inverso al minimizar la siguiente función

$$f(\alpha) = \frac{1}{2} \sum_{k=1} (\hat{u}_k - \mathcal{F}_k(\alpha))^2. \quad (42)$$

Para minimizar f compararemos los métodos BFGS y *Levenberg-Marquardt*, (LM). El primero fue elegido por ser un método iterativo muy robusto. La estructura de la función a minimizar nos exige aprovechar la estructura de mínimos cuadrados por lo que el LM fue elegido también.

6.1.2. Algoritmo Levenberg-Marquardt

El LM es un algoritmo de optimización que provee una solución numérica al problema de minimizar una función, generalmente no lineal, dentro de un espacio de parámetros de la función. Dichos problemas de minimización aparecen especialmente al ajustar mínimos cuadrados lineales y no lineales.

El LM interpola entre el algoritmo de *Gauss-Newton*, **GN**, y un descenso de gradiente. LM es más robusto que el GN en general por esta modificación al momento de resolver las ecuaciones normales. Esencialmente, el algoritmo se comporta como un descenso de gradiente lejos de la solución y como un GN cerca de ésta. El secreto del LM es alterar la diagonal de la matriz cuadrada del producto de Jacobianos en las ecuaciones normales del GN. Hay varias maneras de resolver las ecuaciones normales. Podemos usar Cholesky si $\text{cond}(J^T)$ no es muy grande pues en otro caso el sistema será mal condicionado conduciendo a errores numéricos en la solución sin mencionar que el Jacobiano puede tener muchas escalas. También podemos utilizar QR que es más estable que Cholesky en este sentido. Idealmente usaríamos SVD pero la complejidad de programación de este último nos orilló a optar por QR. Adicionalmente es una buena idea comprobar que la solución de las ecuaciones normales sí mejora el punto donde nos encontramos. Si no es así, entonces podemos hacer un backtracking sobre el parámetro que multiplica a la identidad hasta que obtengamos una mejora. El algoritmo del LM se puede encontrar en [17].

6.1.3. Algoritmo BFGS

El algoritmo BFGS es un método para resolver problemas de optimización no lineal. Este método aproxima el método de Newton por lo cual puede no converger a menos que la función sea cuadrática en su expansión de Taylor alrededor del punto óptimo. Este método utiliza solamente el gradiente de la función.

La idea del algoritmo se puede sintetizar en lo siguiente: partiendo de un punto inicial x_0 obtenemos la evaluación del gradiente en dicho punto $\nabla f(x_0) := \nabla f_0$. Inicializamos una matriz H_0 como una matriz simétrica y definida positiva. Luego calculamos la dirección de Newton $p_k = -H_0 \nabla f_0$. Usando dicha dirección calculamos un valor α que satisfaga suficiente descenso. Luego actualizamos $x_1 = x_0 + \alpha p_0$. Posteriormente comenzamos a iterar como se muestra a continuación en el algoritmo 6.

Podemos utilizar un esquema de diferencias finitas para calcular el gradiente numérico de la función. Como condición de suficiente descenso podemos usar la condición de Armijo utilizando backtracking para encontrar el α_k . Al inicializar H_0 se pueden considerar las siguientes opciones:

- $H_0 = \nabla^2 f_0$.
- $H_0 = J_0^T J_0 + \tau I$ (Levenberg-Marquardt).
- $H_0 = I$.

Algorithm 6 Algoritmo del BFGS

Require: $x_0 \in \mathbb{R}^n, f \in C^2, \text{tol} \in \mathbb{R};$

$k = 0;$

while $\nabla f_k > \text{tol}$ **do**

$s_k = x_k - x_{k-1};$

$y_k = \nabla f_k - \nabla f_{k-1};$

$s_k = x_k - x_{k-1};$

$\rho_k = \frac{1}{y_k^T s_k};$

$H_k = (I - \rho_k s_k y_k^T) H_{k-1} (I - \rho_k y_k s_k^T) + \rho_k s_k s_k^T;$

$p_k = -H_k \nabla f_k;$

 Calculamos α_k tal que satisfaga suficiente descenso en $p_k;$

$x_{k+1} = x_k + \alpha_k p_k;$

end while

Resaltamos en particular la tercer opción pues no tenemos que calcular segundas derivadas (como en la primera) y tampoco tenemos que preocuparnos por un posible número de condición grande del Jacobiano J_0 (como en la segunda) además de lucir más simple e intuitivo.

6.1.4. Resultados

Para ejemplificar nuestro análisis utilizaremos la función dada en (39) y un valor de $\alpha = 0,5$. En las siguientes tablas mostramos los resultados obtenidos.

BFGS		
Iteración	α	$f(\alpha)$
0	0.8	1.60717
1	0.578122	0.367011
2	0.469005	0.0855874
3	0.532405	0.0741657
4	0.510856	0.00899683
5	0.494708	0.00226772
6	0.500661	$3.46344e^{-5}$
7	0.500038	$1.14161e^{-7}$
8	0.5	$6.19775e^{-12}$
9	0.5	$6.19775e^{-12}$

LM		
Iteración	α	$f(\alpha)$
0	0.8	1.60717
1	0.738178	9.70465
2	0.656725	7.29619
3	0.503453	0.211426
4	0.500205	0.0126457
5	0.500014	0.000851371
6	0.500001	$5.76922e^{-5}$
7	0.5	$3.91115e^{-6}$
8	0.5	$2.65157e^{-7}$

LM vs BFGS								
$\alpha = 0.1$	BFGS	LM	$\alpha = 0.2$	BFGS	LM	$\alpha = 0.3$	BFGS	LM
Iters	-	-	Iters	-	9	Iters	-	8
Time	-	-	T	-	17.4	T	-	15
$\alpha = 0.4$	BFGS	LM	$\alpha = 0.45$	BFGS	LM	$\alpha = 0.55$	BFGS	LM
Iters	-	7	Iters	7	7	Iters	6	7
T	-	14	T	28.2	13.	T	23.6	13.8
$\alpha = 0.6$	BFGS	LM	$\alpha = 0.7$	BFGS	LM	$\alpha = 0.75$	BFGS	LM
Iters	8	8	Iters	9	8	Iters	-	9
T	29.95	15.8	T	71.1	15.1	T	-	17.3
$\alpha = 0.8$	BFGS	LM	$\alpha = 0.9$	BFGS	LM	$\alpha = 0.99$	BFGS	LM
Iters	-	8	Iters	-	8	Iters	-	-
T	-	15.5	T	-	16.4	T	-	-

Apreciamos como el LM resulta ser más robusto para los puntos iniciales utilizados a lo largo de todo el dominio de α , además de ser más rápido también que el BFGS. Esto último se debe a que el BFGS requiere de más evaluaciones de función por las aproximaciones de las derivadas y por el backtracking que contiene. Mientras α está más cercano a 0, el cálculo de la Mittag-Leffler es más costoso.

Resulta interesante el conocer como es la dependencia de α y $\mathcal{F}(\alpha)$. Para este fin mostramos dicha gráfica para varios valores de α en (0,1) en la figura 24. En dicho intervalo, variamos el tamaño de la discretización utilizada.

(b)
30
pun-
tos

Figura 24: Gráfica de α vs $\mathcal{F}(\alpha)$ para distintos tamaños de discretización.

Al graficar α vs $\mathcal{F}(\alpha)$ notamos que el comportamiento engañosamente estable de solo utilizar una discretización de 10 puntos en (0,1) se desenmascara si aumentamos el número de puntos. Aunado a esto está el hecho de que $\mathcal{F}(\alpha)$ se dispara cuando α se aproxima a 0. Este comportamiento se ilustra en la figura anteriormente mencionada.

6.2. Sistema fraccional Lotka-Volterra

Ejemplificaremos ahora el uso de nuestro método para aproximar la solución de un sistema tipo Lotka-Volterra de EDFs tomado de [9]. Partimos del sistema tradicional de presa-depredador de *Lotka-Volterra* dado por

$$x' = x(\mathcal{A} - \mathcal{B}x - \mathcal{C}y) \quad (43)$$

$$y' = y(-\mathcal{D} + \mathcal{E}x), \quad (44)$$

para ciertas condiciones iniciales. En este contexto, x e y son funciones de $t \in (0, T]$ y \mathcal{A} , \mathcal{B} , \mathcal{C} , \mathcal{D} , \mathcal{E} escalares. En una forma más general podemos expresar el sistema anterior en su forma fraccional como

$$\begin{cases} \mathbb{D}^{\alpha_1} x = x(\mathcal{A} - \mathcal{B}x - \mathcal{C}y) \\ t^{1-\alpha_1} x(t)|_{t=0} = x_0, \end{cases} \quad (45)$$

$$\begin{cases} \mathbb{D}^{\alpha_2} y = y(-\mathcal{D} + \mathcal{E}x) \\ t^{1-\alpha_2} y(t)|_{t=0} = y_0, \end{cases} \quad (46)$$

para $t \in (0, T]$.

Supongamos $\alpha_1 = \alpha_2 = 0,9$ y los valores escalares $\mathcal{A} = 0,12$, $\mathcal{B} = 0$, $\mathcal{C} = \mathcal{E} = 6e^{-6}$, $\mathcal{D} = 0,18$ en un intervalo de tiempo $(0, 60]$. Dichos valores son tomados para mantener una relación de 1000 a 1 entre el término lineal y el cuadrático. Esto representa un modelo realista como se ilustró en el ejemplo 5 con (41). Tomemos condiciones iniciales $x_0 = 1$ y $y_0 = 2$. De este modo nuestro sistema queda expresado como

$$\begin{cases} \mathbb{D}^{\alpha} x + \gamma_1 x = -\mathcal{E}xy \\ t^{1-\alpha} x(t)|_{t=0} = 1, \end{cases} \quad (47)$$

$$\begin{cases} \mathbb{D}^{\alpha} y + \gamma_2 y = \mathcal{E}xy \\ t^{1-\alpha} y(t)|_{t=0} = 2, \end{cases} \quad (48)$$

donde $\gamma_1 = -0,12$, $\gamma_2 = 0,18$ y $\mathcal{E} = 6e^{-6}$ ayudan a denotar los coeficientes lineales y cuadráticos respectivamente. Nos basaremos en la teoría básica conocida para tratar sistemas bajo derivadas enteras. Dicha información puede ser consultada en [14]. Para esto construiremos sub y súper soluciones del sistema. Posteriormente, partiremos de dichos sistemas iniciales e iteraremos con un predictor-corrector.

6.2.1. Sub y súper soluciones del sistema

Si de la ecuación (47) eliminamos el término cuadrático nos quedamos con la ecuación

$$\begin{cases} \mathbb{D}^{\alpha} \bar{x} + \gamma_1 \bar{x} = 0 \\ t^{1-\alpha} \bar{x}(t)|_{t=0} = 1, \end{cases}$$

la cual tiene una solución analítica dada por (23). Dicha solución queda expresada como

$$\bar{x}(t) = \Gamma(\alpha)t^{\alpha-1}E_{\alpha,\alpha}(-\gamma_1 t^\alpha). \quad (49)$$

No es difícil ver que \bar{x} es súper solución de (47) pues

$$\begin{cases} \mathbb{D}^\alpha \bar{x} + \gamma_1 \bar{x} = 0 \geq -\mathcal{E} \bar{x} y \\ t^{1-\alpha} \bar{x}(t)|_{t=0} = 1. \end{cases}$$

De este modo, podemos usar nuestro método para calcular la solución de la ecuación restante. En este caso no hace falta sumar una constante del lado derecho como se hizo anteriormente en (29). En vez de eso, podemos iterar directamente como

$$\begin{cases} \mathbb{D}^\alpha \bar{y}^{k+1} + \gamma_2 \bar{y}^{k+1} = \mathcal{E} \bar{x} y^k \\ t^{1-\alpha} \bar{y}^{k+1}(t)|_{t=0} = 2. \end{cases}$$

Luego, \bar{x} y \bar{y} son súper soluciones de nuestro sistema de ecuaciones. Del mismo modo que antes, podemos considerar la ecuación (48) sin la parte cuadrática. De este modo tenemos

$$\begin{cases} \mathbb{D}^\alpha \underline{y} + \gamma_2 \underline{y} = 0 \\ t^{1-\alpha} \underline{y}(t)|_{t=0} = 2, \end{cases}$$

la cual tiene una solución analítica expresada como

$$\underline{y}(t) = \Gamma(\alpha)t^{\alpha-1}E_{\alpha,\alpha}(-\gamma_2 t^\alpha). \quad (50)$$

Podemos notar que

$$\begin{cases} \mathbb{D}^\alpha \underline{y} + \gamma_2 \underline{y} = 0 \leq \mathcal{E} \underline{x} \underline{y} \\ t^{1-\alpha} \underline{y}(t)|_{t=0} = 2, \end{cases}$$

por lo cual \underline{y} es sub solución de (48). Utilizando nuestra propuesta iterativa podemos obtener la solución de

$$\begin{cases} \mathbb{D}^\alpha \underline{x}^{k+1} + \gamma_1 \underline{x}^{k+1} = -\mathcal{E} \underline{x}^k \underline{y} \\ t^{1-\alpha} \underline{x}^{k+1}(t)|_{t=0} = 1. \end{cases}$$

Análogamente, \underline{x} y \underline{y} son sub soluciones del sistema de ecuaciones. Este será nuestro punto de partida para poder comenzar nuestro proceso iterativo de una solución del sistema formado por (47) y (48).

6.2.2. Iteración del sistema

Reflejando nuevamente la teoría establecida para el caso con derivadas de orden entero, hacemos uso de un predictor corrector como iterador. De este modo, inicializamos x^0, y^0 con las sub o súper soluciones antes descritas y calculamos un predictor-corrector donde en cada iteración se resuelven las siguientes ecuaciones

$$\begin{cases} \mathbb{D}^\alpha X^k + \gamma_1 X^k = -\mathcal{E}x^k y^k \\ t^{1-\alpha} X^k(t)|_{t=0} = 1, \end{cases} \quad (51)$$

$$\begin{cases} \mathbb{D}^\alpha Y^k + \gamma_2 Y^k = \mathcal{E}X^k y^k \\ t^{1-\alpha} Y^k(t)|_{t=0} = 2, \end{cases} \quad (52)$$

$$\begin{cases} \mathbb{D}^\alpha x^{k+1} + \gamma_1 x^{k+1} = -\mathcal{E}X^k Y^k \\ t^{1-\alpha} x^{k+1}(t)|_{t=0} = 1, \end{cases} \quad (53)$$

$$\begin{cases} \mathbb{D}^\alpha y^{k+1} + \gamma_2 y^{k+1} = \mathcal{E}X^k Y^k \\ t^{1-\alpha} y^{k+1}(t)|_{t=0} = 2. \end{cases} \quad (54)$$

En cada iteración se resuelven 4 EDFs. Las primeras 2 sirven de predictor y las ultimas 2 de corrector. Con esto tenemos un algoritmo iterativo para resolver sistemas de este tipo.

6.2.3. Resultados

En las figuras 25 y 26 se muestran las iteraciones del sistema acorde al predictor corrector antes descrito e iniciando en las sub y súper soluciones del sistema respectivamente.

(b)
lte
0

Figura 25: Iterados de la solución del sistema de ecuaciones (47) comenzando en la sub solución del mismo.

(b)
Ite
0

Figura 26: Iterados de la solución del sistema de ecuaciones (47) comenzando en la súper solución del mismo.

Apreciamos como la convergencia del sistema es inmediata y ambos puntos iniciales conducen a la misma solución. Adicionalmente, mostramos en la figura 27 la gráfica de puntos de la forma $(x(t), y(t))$.

Figura 27: Gráfica de la solución $(x(t), y(t))$.

7. Conclusiones

Hemos demostrado como el método de solución propuesto es útil al resolver EDFs no lineales en un enfoque general y de manera robusta. Este método es eficiente y aproxima la solución esperada en un número pequeño de iteraciones (alrededor de 5). Los algoritmos mostrados para el cálculo numérico utilizado fueron implementados sin problema de manera directa. De este modo también se proporciona una guía para implementar el algoritmo propuesto sin contratiempos teniendo especial cuidado en especificar los detalles importantes al momento de realizar aproximaciones numéricas.

También se ilustró, mediante diversos ejemplos, como construir sub y súper soluciones de nuestro problema así como ciertos parámetros necesarios para comenzar a iterar con nuestro método. Se hizo particular énfasis en la utilidad del corolario 2, pues permite la construcción de sub y súper soluciones lineales de una manera relativamente simple.

Mediante el problema inverso ilustramos la relación de nuestro método con el índice fraccionario. Dicha relación arrojó resultados que reflejan un comportamiento amigable para valores cercanos a 1 y problemáticos en el extremo opuesto (valores cercanos a 0). Esto resalta la conveniencia de nuestro método para problemas prácticos pues en la mayoría de las aplicaciones reales se trabaja con índices fraccionarios en el intervalo $[0.5,1)$.

Vimos como podemos utilizar nuestro método iterativo para resolver sistemas de EDFs, en especial del tipo Lotka-Volterra. Además de mostrar la convergencia de nuestra propuesta de predictor-corrector, hemos proporcionado un algoritmo para que su implementación no tenga mayores complicaciones.

Con todo lo anterior ponemos en evidencia la robustez de nuestro método al resolver diversas EDFs no lineales, su rápida convergencia al utilizar solo pocas iteraciones para obtener las soluciones para diversos tamaños de tiempo y su rapidez al momento de ejecución de nuestro problema. Las primeras dos características resultan muy novedosas al no haber en la literatura métodos de solución para EDFs no lineales en una perspectiva general. El tercer punto resalta una característica muy deseable en este tipo de algoritmos pues es bien conocido que la mayor complicación al tratar con EDFs es su efecto de memoria lo cual se refleja en un alto tiempo de cómputo.

De este modo, esperamos que las contribuciones hechas en esta tesis sirvan para el desarrollo de mejores estrategias de solución de EDFs así como de poder contribuir a la solución real de una amplia gama de problemas reales modelados con EDFs.

Referencias

- [1] Zhang Shuqin, *Monotone iterative method for initial value problem involving Riemann-Liouville fractional derivatives*, *Nonlinear Analysis* 71 (2009), 2087-2093.
- [2] Hansjörg Seybold and Rudolf Hilfer, *Numerical algorithm for calculating the generalized Mittag-Leffler function*, *SIAM J. Number. Anal.* Vol. 47, No. 1, 69-88, 2008.
- [3] H. J. Seybold, R. Hilfer, *Numerical results for the generalized Mittag-Leffler function*, *Fractional calculus & applied analysis*, Vol 8, No 2, 2005.
- [4] Mehdi Rahimy, *Applications of Fractional Differential Equations*, *Applied Mathematical Sciences*, Vol. 4, no. 50, 2010, 2453 - 2461.
- [5] F. Farokhi, M. Haeri, M. S. Tavazoei, *Comparing Numerical Methods for Solving Nonlinear Fractional Order Differential Equations*, Springer Science+Business Media B.V. 2010.
- [6] Domenico Delbosco, Luigi Rondino, *Existence and Uniqueness for a Nonlinear Fractional Differential Equation*, *Journal of Mathematical Analysis and Applications* 204, 1996, 609-625.
- [7] Kai Diethelm, *An Efficient Parallel Algorithm for the Numerical Solution of Fractional Differential Equations*, *Fractional Calculus & Applied Analysis*, Vol 14, Num 3, 2011.
- [8] Igor Podlubny, *Fractional Differential Equations*, Academic Press, 1999.
- [9] Ivo Petrás, *An Effective Numerical Method and Its Utilization to Solution of Fractional Models Used in Bioengineering Applications*, *Advances in Differential Equations*, 2011.
- [10] Mehdi Dalir, Majid Bashour, *Applications of Fractional Calculus*, *Applied Mathematical Science*, Vol. 4, no. 21, 1021-1032, 2010.
- [11] Zaid M. Odibat, *Analytic study on linear systems of fractional differential equations*, *Computers and Mathematics with Applications* 59, 2010, 1171-1183.
- [12] J. Tenreiro Machado, Virginia Kiryakova, Francesco Mainardi, *Recent history of fractional calculus*, *Commun Nonlinear Sci Numer Simulat*, 2010.

- [13] Neville J. Ford, Joseph A. Connolly, *Comparison of numerical methods for differential equations*, Communications on Pure and Applied Analysis, Volume 5, Number 2, June 2006.
- [14] G. S. Ladde, V. Lakshmikantham, A. S. Vatsala, *Monotone Iterative Techniques for Nonlinear Differential Equations*, Pitman Advances Publishing Program, 1985.
- [15] Alfio Quarteroni, Riccardo Sacco, Fausto Saleri, *Numerical Mathematics*, Texts in Applied Mathematics 37, Springer, pag 428.
- [16] William H. Press, Brian P. Flannery, Saul A. Teukolsky, William T. Vetterling, *Numerical Recipes in C: The Art of Scientific Computing*, Second Edition, Cambridge University Press, 2002.
- [17] A Brief Description of the Levenberg-Marquardt Algorithm Implemented by levmar, Manolis I. A. Lourakis Institute of Computer Science Heraklion, Crete, GREECE February 11, 2005, www.ics.forth.gr/~lourakis/levmar/levmar.pdf.