Centro de Investigación en Matemáticas A.C.

Problemas de reparto del costo de un servidor

T E S I S

Que para obtener el grado de

Maestro en ciencias

con Orientación en

Matemáticas Aplicadas

P R E S E N T A:

Oliver Antonio Juárez Romero

Director de Tesis:

Dr. Francisco Sánchez Sánchez

GUANAJUATO, GTO JULIO 2012

Centro de Investigación en Matemáticas A.C.

Problemas de reparto del costo de un servidor

T E S I S

Que para obtener el grado de

Maestro en Ciencias

con Orientación en

Matemáticas Aplicadas

P R E S E N T A:

Oliver Antonio Juárez Romero

Comité de Evaluación:

Dr. José Ignácio Barradas Bribiesca
(Presidente)

Dr. Armando Sánchez Nungaray
(Secretario)

Dr. Francisco Sánchez Sánchez
(Vocal y Director de Tesis)

GUANAJUATO, GTO JULIO 2012

Dedicatoria

Dedico este trabajo a mis padres Francisco Juárez y Rosa Romero por su invaluable apoyo en cada una de las etapas de éste y de todos los proyectos que hemos alcanzado; su ejemplo de perseverancia está aquí reflejado.

A mi esposa Ruth Solorzano, por motivar y alegrar con su amor, sabiduría y paciencia cada uno de mis planes que ahora también son de ella.

Agradecimientos

Quisiera aprovechar esta oportunidad para manifestar mi agradecimiento a las personas e instituciones sin las cuales esta trabajo no hubiera sido posible:

- A Dios por darme la vida, salud, paciencia y sabiduría para poder concluir esta tesis.
- A mi madre que me ha dado la vida, Rosa Romero, quien siempre ha confiado en mí; gracias, éste es también un logro tuyo.
- A mi esposa, que llena mi vida de alegría, Ruth Solorzano, por su apoyo y comprensión.
- Al director de tesis, el Dr. Francisco Sańchez Sańchez, por su tiempo y trabajo dedicado a esta investigación. Muchas gracias por todo.
- A los doctores Armando Sánchez Nungaray e Ignacio Barradas por aceptar ser parte del comite de evaluación, y por el tiempo dedicado a revisar este trabajo de investigación.
- Al Consejo Nacional de Ciencia y Tecnología (CONACyT) por el apoyo económico otorgado durante los dos años que duró la maestría.
- A mis amigos, en especial a William Olvera, por sus valiosas aportaciones y correcciones hechas a este trabajo, y a Saúl Diaz por sus constantes consejos y ayuda en la utilización del Latex.
- Al doctor Luis Hernandez Lamoneda por hacer posible este sueño de estudiar en CIMAT.
- A mi compañero de aventuras y hermano Jony Alexander Rojas Rojas por acompañarme y apoyarme desde que nos conocimos en el 2002.

Índice general

Introducción

La gran mayoría de los procesos relacionados con el consumo de recursos involucran la generación de algún tipo de costo. Esto porque, en general, los recursos no están a total disposición de los consumidores o porque se necesita un gran capital tanto económico como humano para generarlos. Podemos encontrar ejemplos de esta situación en diversos contextos; en las compañias manufactureras, empresas telefónicas y universidades. Cuando un solo agente es el responsable de este consumo, él es el único que tiene que pagar los costos consecuentes. La problemática inicia cuando se tiene un conjunto de agentes como los responsables de dicho consumo. Con ello surgen las siguientes interrogantes: ¿Cómo se puede repartir este costo entre los agentes? ¿Qué factores deben tomarse en cuenta en la repartición del costo?

Por ejemplo en las empresas manufactureras es necesario distribuir ciertos gastos generales entre los productos y las divisiones; si varias ciudades usan un mismo sistema de distribución de agua, entonces deben llegar a un acuerdo sobre cómo distribuir los costos administrativos y de operación. Un ejemplo más surge cuando dos personas que comparten departamento necesitan repartir los costos de la renta y servicios básicos. Con estas situaciones, podemos concluir que los factores a considerar en la repartición dependerán fuertemente de las condiciones en las que los costos se generan.

Aun así, es posible plantear soluciones generales para resolver estas situaciones. Una solución salomónica podría ser el hecho de que "todos paguen lo mismo". Como es de esperarse, esta situación acarrearía serias discusiones entre los agentes, ya que no necesariamente el consumo de los recursos se hace de manera igualitaria. Por ello, surge la idea de utilizar teorías matemáticas para establecer los preceptos bajo los cuales debe hacerse la repartición de los costos. Una de esas disciplinas es la teoría de juegos. El inicio de esta teoría se remonta al año de 1944 con la publicación del Libro "Game Theory and Economic Behavior" de Von Neumann y Morgenstern.

Utilizando las técnicas de la teoría de juegos, los costos se reparten usando juegos cooperativos. Se introduce el concepto de ***juegos de costo*** como un par (N, c) donde N es el conjunto de agentes y $c : 2^N \to \mathbb{R}$ es la función de costos con $c(\emptyset) = 0$ (aqui 2^N denota el conjunto potencia de N). Un grupo de agentes $T \subseteq N$ se llama una coalición y $c(T)$ se denomina el costo en el que incurre esta coalición; así, los mecanismos de reparto se obtienen tomando en cuenta conceptos de solución en los juegos de costos asociados, como por ejemplo el bien conocido valor de Shapley [4]. También se pueden plantear otras situaciones donde se consideran las demandas de los agentes; así, un problema queda determinado por una terna (N, m, c) donde m es el vector de demandas. Estas ideas han sido trabajadas por Young [12], Moulin [13], entre otros.

En el presente trabajo se estudiará el problema de repartir el costo de un servidor, entre un conjunto de usuarios en base al tiempo en el que estos utilizan el servicio brindado por el servidor [1]. Mediante las técnicas de la teoría de colas, y bajo supuestos adicionales, es posible determinar la fracción del tiempo en la que cada usuario necesita del servicio. La idea fundamental es utilizar esta información como base para realizar la repartición del costo.

La teoría de colas es el estudio matemático de las líneas de espera. Su objetivo principal es el análisis de varios procesos, tales como la llegada de los usuarios al final de la cola, la espera en la cola, etc. El matemático danés A. K. Erlang, publicó el primer artículo sobre la teoría de colas en 1909, específicamente se preocupó del estudio del problema de dimensionamiento de líneas y centrales de conmutación telefónica para el servicio de llamadas.

En la literatura existen ciertos trabajos que se relacionan con nuestro problema. Uno de ellos se debe a Maniquet [1], donde el autor reparte el costo total de espera entre los usuarios, utilizando un concepto de transferencia. En su trabajo, se propone resolver este problema utilizando el valor de Shapley [4] de un cierto juego denominado juego de colas, definiendo el valor de una coalición como la suma de los costos de espera de sus miembros como si ellos fueran los primeros en arribar al sistema de colas y pudieran formarse de manera "óptima", bajo algún contexto. El mecanismo resultante de estas consideraciones es la llamada ***regla de tranferencia mínima***. Por otro lado, Youngsub [6] utiliza otra solución bien conocida para juegos cooperativos, el nucleolo [9] del juego de colas, obteniendo sorprendentemente, la misma regla obtenida por Maniquet; la razón fundamental es que el valor de Shapley y el nucleolo coinciden para los juegos de colas.

El estudio que aquí proponemos se divide en tres capítulos, de los que a continuación se presenta un breve resumen.

El primero contiene una introducción a los conceptos básicos de la teoría de colas, haciendo especial énfasis en la técnica necesaria para determinar la fracción del tiempo en la que el sistema[2] tiene un preestablecido número de usuarios, esta técnica utiliza el proceso de nacimiento y muerte unidimensional. También se aborda la teoría de juegos cooperativos, en la cual, nuestro interés radica en el procedimiento que se utiliza para resolver un conjunto de problemas de manera única. El contenido de este capítulo no es original y su inclusión se justifica por la pretención de unificar en lo posible la notación, así como de lograr una coherencia en el contenido del trabajo.

[1] Por servidor entiéndase cualquier agente que brinda un servicio; máquinas, personas o una combinación de éstos.

[2] Entiéndase sistema al lugar donde opera el servidor.

En el segundo capítulo, se modela la situación a considerar: se define formalmente un problema de colas como

$$(N, \lambda, \mu, c),$$

donde N es el conjunto de usuarios, λ es el vector de tasas de arribo, el cual se interpreta como la necesidad por utilizar el servicio, μ es el vector de tasas de servicio, del cual se deriva el tiempo que tarda el servidor en servir a los usuarios y c es el costo del servicio brindado por el servidor, que es la cantidad que estamos interesados en repartir. Al problema de colas (N, λ, μ, c) lo identificamos con N, entendiendo que están dados los vectores λ, μ y el número c. Además, se define lo que entenderemos por solución a un problema, la cual es una función

$$\varphi : Q \to \mathbb{R}^{|N|},$$

donde Q es el conjunto de todos los problemas de colas. φ asocia a cada problema de colas $N \in Q$, un vector

$$\varphi(N) := (\varphi_i(N)_{i \in N}) \in \mathbb{R}^{|N|},$$

donde

$$\varphi_i(N)$$

indica lo que debe pagar el usuario i en el problema de colas N. Se establecen las propiedades razonables que posea una solución, por ejemplo, ***eficiencia***, es decir, que se reparta todo el costo entre los usuarios. Luego se presenta una generalización del proceso de nacimiento y muerte unidimensional, esto con el propósito de poder determinar la fracción del tiempo que el sistema tiene un número preestablecido de usuarios.

Dadas estas fracciones de tiempo se presentan dos soluciónes a un problema de colas N. Una de ellas es

$$\varphi_i(N) = \left[\frac{P(0, \ldots, 0)}{|N|} + f_i \left[1 - P(0, \ldots, 0)\right]\right] c \qquad \text{para todo } i \in N, \tag{1}$$

donde

$$f_i = \frac{\frac{1}{\mu_i}}{\sum_{j \in N} \frac{1}{\mu_j}}.$$

Esta solución reparte la fracción del tiempo en la que el sistema está vacío, $P(0, \ldots, 0)$, en partes iguales y la fracción en la que el sistema es utilizado por al menos un usuario, $[1 - P(0, \ldots, 0)]$, de manera proporcional al tiempo en que los usuarios utilizan el sistema.

La otra solución es

$$\psi_i(N) = f_i c, \qquad \text{para todo } i \in N, \tag{2}$$

donde f_i es la fracción del tiempo en la que el usuario $i \in N$ utiliza el sistema. Para una explicación de cómo se determina estas fracciones, refiérase a la Sección 2.3.

Básicamente lo que esta solución hace es repartir el costo utilizando los siguientes criterios:

- La fracción del tiempo en la que el sistema está vacío $P(0,\ldots,0)$ deben pagarla todos los usuarios en igual proporción,
- La fracción del tiempo en la que el sistema es utilizado por un grupo de usuarios deben, pagarla en forma proporcional al tiempo en que son servidos.

También en este segundo capítulo se preparan las condiciones para resolver la siguiente situación, que nombramos como de ***abandono***; supongamos que hemos repartido el costo del servicio entre un conjunto M de usuarios, mediante alguna solución ψ; sin embargo, un grupo de los usuarios, $N^c \subset M$, decide no participar de la repartición del costo; entonces estamos interesados en determinar una nueva solución Ψ que reparta lo que pagaban los usuarios en N^c entre aquellos que decidieron quedarse, de tal manera que la nueva solución sea única en cierto sentido.

En el tercer capítulo presentamos los principales resultados de este trabajo de investigación. Como primer resultado mencionamos el siguiente teorema:

Teorema 1. *Dado un problema de colas N y el conjunto de constantes $D = \{d_{ij}\}_{i,j\in N}$ donde*

$$d_{ij} = \left[\frac{\frac{1}{\mu_i} - \frac{1}{\mu_j}}{\sum_{k\in N}\frac{1}{\mu_k}}\right][1 - P(0,\ldots,0)]\,c,$$

entonces la solución dada en (1) es la única solución eficiente y justa que preserva diferencias.

Para una explicación e interpretación de lo que significa que una solución preserve diferencias, refiérase a la Sección 3.1.

En este capítulo se resuelve la situación de abandono, utilizando la solución

$$\Psi_i(N) = \tilde{f}_i c \qquad \text{para todo } i \in N, \tag{3}$$

donde

$$\tilde{f}_i = f_i + \left[\sum_{j\in N^c} f_j\right]\frac{f_i}{\sum_{k\in N} f_k}. \tag{4}$$

Así, nuestro segundo resultado es el siguiente teorema:

Teorema 2. *Sean M, N dos problemas de colas tales que $N \subsetneq M$, $|M| = m \geq 4$, $f = (f_1,\ldots,f_m)$ el vector de fracciones de tiempo de utilización del servicio, ψ la solución para M dado en (2) y φ una solución para N eficiente tal que*

$$\varphi_i(N) = \hat{f}_i c \qquad \textit{para todo } i \in N,$$

donde $\hat{f}$ es una regla de revisión que satisface la propiedad de independencia de trayectoria. Si φ es igual a la solución dada en (3) para todo N tal que $|N| = n$ con $2 \leq n < m$, entonces φ es igual a la solución dada en (3) para todo problema de colas R tal que $m > |R| > n$.

Para una explicación e interpretación de la definición de regla de revisión y de la propiedad de independencia de trayectoria refiérase a la Sección 2.4.

El objetivo genérico que motiva el presente trabajo de investigación es repartir el costo de un ***servidor*** entre los ***usuarios*** de éste, encontrando una serie de principios (axiomas) que determinen lógicamente estas reparticiones. De entre los objetivos específicos, pueden destacarse los siguientes:

- Generalizar el proceso de nacimiento y muerte donde la definición natural de estado requiere más de una variable, para determinar la fracción del tiempo en la que en el sistema hay una determinado número de usuarios.
- Resolver problemas de repartición de costos con base a la fracción del tiempo en la que los usuarios utilizan el sistema.
- Proporcionar soluciones que satisfagan una serie de axiomas determinados para problemas de colas y con ellos, lograr su caracterización.

Capítulo 1

Preliminares y definiciones

Este capítulo contiene una introducción a los conceptos básicos de la teoría de colas, haciendo especial énfasis en la forma en la cual se determina la fracción del tiempo en la que un sistema tiene un determinado número de usuarios. Para lograr esto, utilizamos el denominado ***proceso de nacimiento y muerte***; este se basa en un principio que establece que la tasa media de entrada a un estado debe ser igual a la tasa media de salida. La utilización de este principio genera un sistema de ecuaciones en el cual las variables son las fracciones del tiempo mencionadas anteriormente. Además, se examinan los conceptos relacionados a la teoría de juegos cooperativos destacando la técnica utilizada para caracterizar soluciones para un conjunto de problemas; puede verse un ejemplo de esta técnica en [4], en el cual se caracteriza una solución bien conocida, el valor de Shapley, utilizando los axiomas de eficiencia, aditividad, simetría y nulidad. También se abordará un enfoque probabilístico para la caracterización de dicho valor donde se demuestra que una solución es el valor esperado de un proceso aleatorio.

1.1. Conceptos básicos de teoría de colas

En esta sección se recogen todos aquellos conceptos y resultados básicos de la teoría de colas que son empleados a lo largo de este trabajo. Para un estudio más extenso remitimos a [2].

Una cola es una línea de espera y la teoría de colas es una colección de modelos matemáticos que describen sistemas de líneas de espera particulares.

Las fórmulas para cada modelo indican cuál debe ser el desempeño del sistema correspondiente y señalan la cantidad promedio de tiempo de espera, en una gama de circunstancias. Por lo tanto, estos modelos son muy útiles para determinar cómo opera un sistema de colas de manera más efectiva, encontrando un balance adecuado entre el costo de servicio y la cantidad de tiempo de espera.

El **proceso básico** supuesto por la mayor parte de los modelos de colas es el siguiente: los usuarios que requieren un servicio provienen de una ***fuente de entrada***; estos usuarios entran al ***sistema*** y se unen a una ***cola***, donde esperan para ser servidos. El usuario que será servido se selecciona mediante alguna regla conocida como ***disciplina de servicio***; luego, se lleva a cabo el servicio requerido por el usuario en un ***mecanismo de servicio***, y después el cliente sale del sistema.

En la Figura 1.1 se esquematiza este proceso.

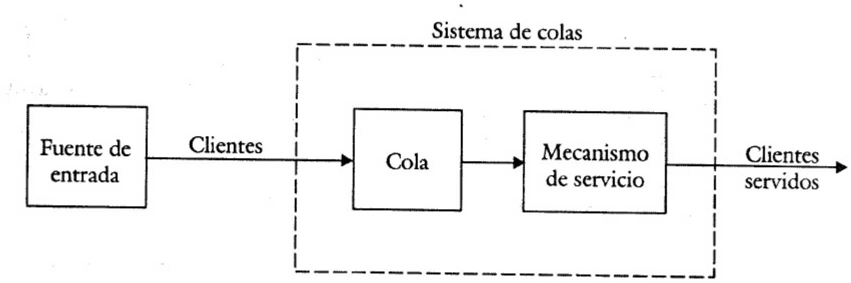

Figura 1.1: Proceso básico de un modelo de colas.

En la siguiente sección presentaremos una explicación sobre los diferentes elementos que intervienen en un modelo de colas.

1.1.1. Elementos básicos de los modelos de colas

Una característica de la **fuente de entrada** es su ***tamaño*** . El tamaño es el número total de usuarios que pueden requerir del servicio en un determinado momento, es decir, el número total de usuarios potenciales distintos. Esta población, de la cual surgen los usuarios, se conoce como ***población de entrada***. Puede suponerse que el tamaño es ***infinito*** o ***finito***. También se debe especificar el patrón estadístico mediante el cual se generan los usuarios en el tiempo. La suposición normal es que se generan de acuerdo a un ***proceso Poisson***, es decir, el número de usuarios que llegan hasta un tiempo específico tiene una distribución Poisson.

La **cola** es donde los usuarios esperan ***antes*** de ser servidos. Una cola se caracteriza por el número máximo permisible de usuarios que puede admitir. Las colas pueden ser ***finitas o infinitas***, según si este número es finito o infinito.

La **disciplina de servicio** se refiere al orden en el que se seleccionan los usuarios para recibir el servicio; por ejemplo, puede ser:

1. **First In, First Out (FIFO):** según la cual se atiende primero al cliente que haya llegado primero.

2. **Last In, First Out (LIFO):** también conocida como *pila.* Consiste en atender primero al cliente que ha llegado de último.

3. **Random Selection of Service (RSS):** selecciona al usuario que será atendido de manera aleatoria, de acuerdo a algún procedimiento de prioridad o algún orden.

El **mecanismo de servicio** consiste en una o más instalaciones de servicio , cada una de ellas con uno o más canales paralelos de servicio, llamados ***servidores***.

En una instalación dada, el usuario entra en uno de estos canales y el ***servidor*** le presta el servicio completo. Un modelo de colas debe especificar el arreglo de las instalaciones y el número de servidores en cada una. Los modelos más elementales suponen una instalación, ya sea con un servidor o con un número finito de servidores.

El tiempo que transcurre desde el inicio del servicio hasta su terminación en una instalación se llama ***tiempo de servicio***. Un modelo de un sistema de colas debe especificar la distribución de probabilidad de los tiempos de servicio para cada servidor (y tal vez para distintos usuarios) aunque es común suponer la misma distribución para todos los servidores.

1.1.2. Un proceso de colas elemental

El proceso de colas que más prevalece es el siguiente: una sola línea de espera (que a veces puede estar vacía) se forma frente a una instalación de servicio, dentro de la cual se encuentran uno o más servidores. En la Figura 1.2 se da un esquema del sistema de colas del que se está hablando.

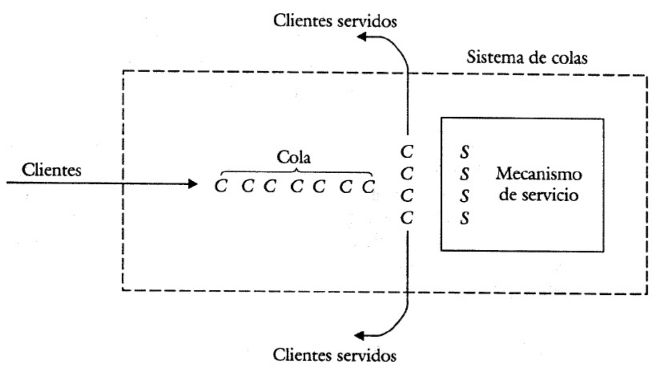

Figura 1.2: Sistema de colas elemental.

Cada usuario generado por una fuente de entrada recibe el servicio de uno de los servidores, quizá después de esperar un poco en la cola. Estos modelos suponen de que los tiempos entre llegadas y los tiempos de servicios están idénticamente distribuidos.

Por convención, los modelos de colas se etiquetan como sigue:

$$a/b/c/d/e/f,$$

donde los símbolos a, b, c, d, e y f representan elementos básicos del modelo en la forma siguiente:

a = Distribución de llegadas
b = Distribución del tiempo de servicio
c = Número de servidores
d = Disciplina de servicio
e = Número máximo de usuarios admitidos en el sistema (en línea de espera más en servicio)
f = Tamaño de la fuente de entrada.

Por ejemplo, el modelo

$$M/M/s/FIFO/\infty/N,$$

que consideraremos en este trabajo, supone que tanto los tiempos entre entradas como los de servicio tienen distribución exponencial (representada por M), el número de servidores es s, la disciplina de servicio es $FIFO$, el sistema puede alojar un número infinito de usuarios y el tamaño de la población es N.

1.1.3. Terminología y notación

A menos que se establezca otra cosa, se utilizará la siguiente terminología:

E = Número de usuarios en el sistema.
P_n = Probabilidad de que exactamente n usuarios estén en el sistema.
s = Número de servidores en el sistema de colas.
λ_n = Tasa media de llegadas (número esperado de llegadas por unidad de tiempo) de nuevos usuarios cuando hay n usuarios en el sistema.
μ_n = Tasa media de servicio para todo el sistema (número esperado de usuarios que completan su servicio por unidad de tiempo) cuando hay n usuarios en el sistema.

Cuando λ_n es constante para toda n, esta constante se denota por λ. Cuando la tasa media de servicio es constante para toda $n \geqq 1$, esta constante se denota por μ.

En estas cirscuntancias,

$$\frac{1}{\lambda}$$

y

$$\frac{1}{\mu}$$

son los tiempos esperados entre llegadas y los tiempos esperados de servicio, respectivamente.

Así mismo,

$$\rho = \frac{\lambda}{s\mu}$$

es el factor de utilización de los servidores, es decir, la fracción de tiempo esperada en que los servidores están ocupados.

En la siguiente sección abordaremos la técnica necesaria para determinar la fracción del tiempo en la que el sistema tiene un determinado número de usuarios, la cual se basa en el proceso de nacimiento y muerte.

1.1.4. Proceso de nacimiento y muerte

La mayor parte de los modelos elementales de colas suponen que las entradas (llegada de los usuarios) y las salidas (usuarios que se van) del sistema ocurren de acuerdo a un proceso de nacimiento y muerte. En este contexto, el término **nacimiento** se refiere a la ***llegada*** de un nuevo usuario al sistema de colas y el término **muerte** a la ***salida*** del usuario servido.

El ***estado*** del sistema, denotado por E, es el número de usuarios que hay en el sistema de colas. El proceso de nacimiento y muerte describe en ***términos probabilísticos*** cómo cambian los estados del sistema. En la Figura 1.3 se muestra un diagrama de tasas.

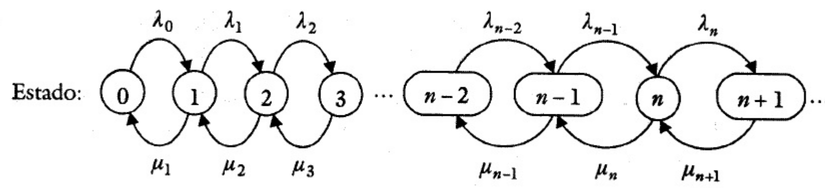

Figura 1.3: Diagramas de tasas para el proceso de nacimiento y muerte.

En general, el proceso afirma que los nacimientos y muertes ***individuales*** ocurren de manera ***aleatoria***, donde sus tasas medias de ocurrencia dependen del estado actual del sistema.

Para analizar este proceso se realizan estudios después de haber alcanzado una condición de estado estable[1], utilizando el siguiente principio.

Para cualquier estado del sistema:

la tasa media de entrada debe ser igual a la tasa media de salida.

La ecuación que expresa este tipo de principio se llama ***ecuación de balance***.

[1] para mas detalles de esta propiedad del proceso de nacimiento y muerte ver [2]

1.1.5. Utilización de las ecuaciones de balance

Después de construir las ecuaciones de balance para todos los estados en términos de las probabilidades P_n ***desconocidas***, se puede resolver este sistema de ecuaciones (más una ecuación que establezca que las probabilidades deben sumar 1) para encontrarlas.

Luego, tenemos que:

Estado	**Tasa de entrada**	=	**Tasa de salida**
0	$\mu_1 P_1$	=	$\lambda_0 P_0$
1	$\lambda_0 P_0 + \mu_2 P_2$	=	$(\lambda_1 + \mu_1) P_1$
2	$\lambda_1 P_1 + \mu_3 P_3$	=	$(\lambda_2 + \mu_2) P_2$
$\vdots$		$\vdots$	
n	$\lambda_{n-1} P_{n-1} + \mu_{n+1} P_{n+1}$	=	$(\lambda_n + \mu_n) P_n.$

Despejando los valores de las diferentes probabilidades se obtiene:

Estado			
1	P_1	=	$\frac{\lambda_0}{\mu_1} P_0$
2	P_2	=	$\frac{\lambda_o(\lambda_1+\mu_1)}{\mu_1\mu_2} P_0 - \frac{\lambda_0}{\mu_2} P_0 = P_0 \frac{\lambda_1\lambda_0}{\mu_2\mu_1}$
$\vdots$		$\vdots$	
k	P_k	=	$\prod_{i=0}^{k-1} \frac{\lambda_i}{\mu_{i+1}} P_0 = P_{k-1} \frac{\lambda_i}{\mu_{i+1}}$

y, como se estableció anteriormente, debe cumplirse

$$\sum_{k=0}^{n} P_k = 1,$$

o, lo que es lo mismo,

$$P_0 + \sum_{k=1}^{n} P_k = 1.$$

Por lo tanto,

$$P_0 + \sum_{k=1}^{n} \prod_{i=0}^{k-1} \frac{\lambda_i}{\mu_{i+1}} P_0 = 1$$

$$P_0 (1 + \sum_{k=1}^{n} \prod_{i=0}^{k-1} \frac{\lambda_i}{\mu_{i+1}}) = 1$$

$$P_0 = \frac{1}{1 + \sum_{k=1}^{n} \prod_{i=0}^{k-1} \frac{\lambda_i}{\mu_{i+1}}}.$$

Dado que se conoce la expresión de P_0, se puede obtener fácilmente el valor de P_k.

Para finalizar esta sección presentaremos el modelo de colas que se ajusta a nuestro trabajo de investigación.

1.1.6. El modelo $M/M/s/FIFO/\infty/N$

Supongamos que la ***fuente de entrada*** está ***limitada***; es decir, que el tamaño de la ***población potencial*** es ***finito***. Para este caso, sea N el tamaño de esa población. Cuando el número de usuarios en el sistema de colas es n ($n = 0, 1, \ldots, N$) existen sólo ($N - n$) usuarios ***potenciales*** restantes en la fuente de entrada. La aplicación más importante de este modelo es el problema de reparación de máquinas, en el que se asigna a uno o más técnicos o personas, la responsabilidad de mantener en operación cierto grupo de N máquinas dando servicio a cada una de las que se descomponen.

Este modelo supone que el ***tiempo fuera*** de cada usuario (esto es, el tiempo que pasa desde que deja el sistema hasta que regresa) tiene una ***distribución exponencial*** con parámetro λ.

Cuando n usuarios están ***dentro*** y, por supuesto, $N - n$ están ***fuera***, la distribución de probabilidad actual del tiempo ***que falta*** para la próxima llegada al sistema es la distribución del ***mínimo*** de los ***tiempos restantes fuera*** para esos $N-n$ usuarios. Según las propiedades de la distribución exponencial, esta distribución debe ser exponencial con parámetro $\lambda_n = (N-n)\lambda$.

Cuando $s = 1$, para este modelo se tiene que:

$$P_0 = \frac{1}{\sum_{n=0}^{N}[\frac{N!}{(N-n)!}(\frac{\lambda}{\mu})^n]},$$

$$P_n = \frac{N!}{(N-n)!}(\frac{\lambda}{\mu})^n P_0 \text{ para } n = 1, 2, \ldots, N.$$

A continuación presentaremos el procedimiento que se utiliza en la teoría de juegos cooperativos para resolver un conjunto de problemas de manera única.

1.2. Conceptos básicos de juegos cooperativos

En esta sección se recogen todos aquellos conceptos y resultados básicos de la teoría de juegos cooperativos con utilidad transferible que son empleados a lo largo de esta memoria. Para un estudio más extenso remitimos a [10].

La teoría de juegos es un área de la matemática aplicada que utiliza modelos para estudiar interacciones en estructuras formalizadas de incentivos (llamados ***juegos***) y llevar a cabo procesos de decisión.

Un juego cooperativo es una situación en el cual dos o más agentes (llamados ***jugadores***) no compiten entre ellos, sino más bien se esfuerzan por conseguir el mismo objetivo y, por lo tanto, ganan o pierden como un grupo. En otras palabras, es una situación en donde grupos de jugadores (***coaliciones***) pueden tener comportamientos cooperativos.

Algunos de los objetivos de la teoría de juegos cooperativos son determinar:

1. Cuáles soluciones son admisibles de acuerdo a ciertos criterios.

2. Qué coaliciones se forman o se deberían formar.

3. Cuánto está dispuesto a dar o recibir cada jugador en cada coalición a cambio de su cooperación.

4. En caso de que se forme una coalición S, cómo se reparte el monto que pueden conseguir entre los miembros de S.

Definición 1.1. *Un juego cooperativo es un par* (N, υ) *formado por un conjunto finito* $N = \{1, 2, \ldots, n\}$ *y una función*

$$\upsilon : \mathcal{P}(N) \to \mathbb{R},$$

que asigna a cada subconjunto S *de* N*, que está en* $\mathcal{P}(N)$*, un número real* $\upsilon(S)$ *con la condición de que* $\upsilon(\emptyset) = 0$*.*

Cada elemento del conjunto N es un ***jugador*** y cada subconjunto de N es una ***coalición***. La función υ se llama ***función característica*** del juego. La interpretación que se le da al juego es que los jugadores pertenecientes a S juegan unidos y consiguen una utilidad conjunta $\upsilon(S)$.

Ejemplo 1.1. *Para cierta industria, Juan provee la maquinaria para realizar un producto. A su vez, se tienen 2 trabajadores (Carlos y Pedro), que utlizando las máquinas de Juan, pueden elaborar cada una de ellos un producto, que al venderlo, significa una ganancia de 5 unidades.*

La situación se plantea como un juego cooperativo en donde $N = \{1, 2, 3\}$ $(1 = Juan,\ 2 = Carlos$ *y* $3 = Pedro)$ *y donde, para todo* $S \subseteq N$*,* $\upsilon(S)$ *representa el monto obtenido al vender el producto cuando los jugadores en* S *intervienen en la producción, y se muestra en la siguiente tabla:*

S	{1}	{2}	{3}	{1,2}	{1,3}	{2,3}	{1,2,3}
$\upsilon(S)$	0	0	0	5	5	0	10

Sea G^N el conjunto de todos los juegos definidos sobre el conjunto de jugadores N.

Es fácil ver que G^N es un espacio vectorial sobre el campo de los números reales si se definen la suma y el producto escalar sobre G^N de la siguiente manera:

1. $(\upsilon + \omega)(S) = \upsilon(S) + \omega(S)$ para todo $\upsilon, \omega \in G^N$ y para todo $S \subseteq N$.

2. $(k\upsilon)(S) = k\upsilon(S)$ para todo $\upsilon \in G$, para todo $S \subseteq N$ y para todo $k \in \mathbb{R}$.

La base del espacio vectorial G^N está formada por los ***juegos de unanimidad***

$$\{u_S\}_{\emptyset \neq S \subseteq N}.$$

cuya función característica se define por:

$$u_S(T) = \begin{cases} 1, & \text{si } S \subseteq T \\ 0, & \text{en otro caso} \end{cases}$$

para todo $T \subseteq N$.

Así, para todo $v \in G^N$ tenemos que

$$v = \sum_{\emptyset \neq S \subseteq N} c_S u_S.$$

siendo $\{c_S\}_{\emptyset \neq S \subseteq N}$ números reales que representan los coeficientes de la combinación lineal, conocidos como ***coordenadas de unanimidad*** o ***coeficientes de Harsanyi***, para más detalles ver [15].

1.3. Soluciones para juegos cooperativos

El problema principal que se aborda en juegos cooperativos es la distribución de ganancias conjuntas o el reparto de costos comunes. La teoría más conocida que actualmente da una respuesta categórica a estos problemas es la de valores en juegos cooperativos. En ella se agrupan problemas, se definen soluciones concebibles y se pide que una solución satisfaga un conjunto de axiomas que la determinen unívocamente. Para empezar a precisar esta idea, se define a continuación el concepto de solución.

Definición 1.2. *Una solución es un operador*

$$\varphi : G^N \to \mathbb{R}^n, \tag{1.1}$$

que asocia a cada juego $v \in G^N$ *un vector*

$$\varphi(v) := (\varphi_i(v))_{i \in N} \in \mathbb{R}^n \tag{1.2}$$

donde $\varphi_i(v)$ *es lo que le corresponde al jugador* i *en el juego* v.

En las siguientes secciones se abordan los enfoques que permitirán la caracterización de las soluciones que propondemos para los problemas de colas.

1.3.1. Enfoque axiomático

El problema de encontrar soluciones a juegos cooperativos puede enfocarse tomando a G^N como el conjunto de todos los juegos de n jugadores y definiendo un operador $\varphi : G^N \to \mathbb{R}^n$ que resuelva a todos los juegos; ahora sólamente bastará con definir *de buena manera* al operador φ, añadiéndole propiedades *deseables* (las cuales se considerarán como axiomas) y demostrar que existe un único operador que posee dichas propiedades. El avance que se obtiene con esto es sustancial; se aceptan o se eliminan soluciones para toda una clase de problemas con sólo aceptar o no simples supuestos generales; como ejemplo de esta técnica tenemos al valor de Shapley.

En 1953, Lloyd S. Shapley [4], establece una solución φ para juegos cooperativos que satisfaga los siguientes axiomas:

Axioma 1.1. (Aditividad). Para todo υ y $\omega \in G^N$

$$\varphi(\upsilon + \omega) = \varphi(\upsilon) + \varphi(\omega)$$

Nótese que, como se definió $\upsilon + \omega$, lo que obtiene cada coalición es exactamente la suma de lo que obtiene en cada uno de los juegos originales y por lo tanto los jugadores no pueden obtener ventaja adicional por jugar los dos juegos en serie. Resulta natural pedir que lo que deba obtener cada jugador en el juego suma, sea exactamente la suma de lo que obtengan en los juegos originales.

Otra característica razonable que debería tener una solución es que no dependa de los atributos personales de los jugadores; en otras palabras, que sea ***anónima***. Consideremos el conjunto $S_n = \{\theta : N \to N \quad | \quad \theta \quad \text{es biyectiva}\}$, el grupo de permutaciones del conjunto de jugadores. Para cada $\theta \in S_n$ y cada $\upsilon \in G^N$ definimos el juego $\theta\upsilon$ como:

$$\theta\upsilon(S) = \upsilon(\theta^{-1}(S)) \qquad \text{para todo } S \subseteq N.$$

Axioma 1.2. (Simetría). Para todo juego $\upsilon \in G^N$ y toda permutación $\theta \in S_n$ se cumple que

$$\varphi_i(\theta\upsilon) = \varphi_{\theta(i)}(\upsilon).$$

Así, si los jugadores intercambian papeles en el juego y además cada coalición logra hacer exactamente lo mismo que la coalición a la que suplanta, entonces lo que debe obtener cada jugador en el nuevo juego es lo que obtenía el jugador al cual suplanta.

Dado (N, υ) y $S \subseteq N$, denotemos por:

$$\varphi(\upsilon)(S) = \sum_{i \in S} \varphi_i(\upsilon);$$

esto es, $\varphi(\upsilon)(S)$ es el monto que la coalición S obtiene con la solución φ.

Axioma 1.3. (Eficiencia). Para todo $\upsilon \in G^N$ se tiene

$$\sum_{i \in N} \varphi_i(\upsilon) = \upsilon(N).$$

En otras palabras, el monto que se reparte entre todos los jugadores bajo φ es exactamente el monto $\upsilon(N)$ que puede conseguir la gran coalición.

Por último:

Definición 1.3. *Se dirá que $i \in N$ es un jugador nulo en v si y sólo si*

$$v(S \cup \{i\}) = v(S),$$

para toda $S \subseteq N$.

Axioma 1.4. (Nulidad). Si i es un jugador nulo en v, entonces

$$\varphi_i(v) = 0.$$

El axioma de nulidad requiere que cada jugador nulo en v obtenga un pago de cero, dado que no contribuye de ninguna manera a cualquier coalición a la que se une.

Teorema 3 (Shapley, 1953)**.** *Existe un único valor φ sobre G^N que satisface los cuatro axiomas anteriores y que viene dado por la siguiente expresión:*

$$\varphi_i(v) = \sum_{S \subseteq N \setminus \{i\}} \frac{s!(n-s-1)!}{n!} \big[v(S \cup \{i\}) - v(S)\big], \tag{1.3}$$

para todo $i \in N$ y para todo $v \in G^N$.

Para la demostración de este teorema ver [4].

Ejemplo 1.2. *Para el juego definido en el Ejemplo 1.1 el valor de Shapley está dado en la siguiente tabla:*

i	1	2	3
$Sh_i(v)$	5	2.5	2.5

Como era de esperarse, el valor de Shapley atribuye mayor importancia a Juan por ser el dueño de las máquinas y a los trabajores les paga de manera igual, esto es por el axioma de simetría.

1.3.2. Enfoque probabilístico

Para comprender mejor el significado del valor de Shapley, considérese el siguiente proceso aleatorio:

a) Elíjase la cardinalidad de una coalición que no contenga al jugador i-ésimo de acuerdo a una distribución uniforme sobre el conjunto $\{0, \cdots, n-1\}$ (puede hacerse de n maneras).

b) Elegir de manera aleatoria a una coalición $S \subseteq N \setminus \{i\}$ con la cardinalidad dada, de acuerdo a una distribución uniforme sobre las coaliciones disponibles (es posible hacerlo de $\binom{n-1}{s}$ formas).

c) Se le da al jugador i la contribución marginal que aporta al incorporarse a S, es decir, $v(S \cup \{i\}) - v(S)$.

Entonces, el pago esperado para el i-ésimo jugador será el valor de Shapley.

1.4. Conclusiones

Hasta ahora hemos presentado los principales resultados de las teorías de colas y de juegos cooperativos, haciendo hincapié en la forma de cómo determinar la fracción del tiempo en la que un número de usuarios está en el sistema, así como en los enfoques que se pueden utilizar para caracterizar soluciones a ciertos problemas.

Con este capítulo se pretende tener las bases necesarias para abordar el problema de repartir el costo de un servidor entre los usuarios de éste utilizando la técnica de teoría de colas, el cual se abordará en los siguientes capítulos.

Capítulo 2

Problemas de colas

En este capítulo estableceremos una forma de cómo asignar el costo de un servidor entre un conjunto de usuarios. Una primera aproximación podría ser utilizar un **reparto igualitario**, donde el costo se reparte en partes iguales entre el número de usuarios; sin embargo, esta solución acarrearía serias discusiones entre los usuarios, ya que no necesariamente el consumo de los recursos se hace de manera igualitaria. Otra alternativa puede ser un **reparto proporcional**, donde cada usuario tiene que pagar una parte del costo total que es proporcional al tiempo en que es servido.

El propósito de este capítulo es proponer el modelo que utilizaremos para resolver nuestro problema; presentaremos una generalización del proceso de nacimiento y muerte, con el fin de poder determinar la fracción del tiempo en la que el sistema se encuentra vacío, así como en la que se está dando servicio a un grupo de usuarios. A partir de esto proponemos una solución con la idea de justificar tal repartición.

En la parte final del capítulo trataremos el problema cuando algunos de los usuarios han decidido no participar en la repartición del costo; así nos enfrentamos a la situación de repartir lo que pagaban los usuarios que se fueron entre los que han decicido quedarse. El propósito es caracterizar esta nueva forma de repartir.

2.1. El modelo

Supongamos que para cada uno de los usuarios conocemos en qué proporción necesita del servicio y además cuánto tiempo va a requerir para ser servido. Utilizando la notación de teoría de colas, estos datos se interpretan como tasa de arribo promedio al sistema ($\lambda_i \in \mathbb{R}_+$) y tasa promedio de servicio ($\mu_i \in \mathbb{R}_+$) para cada usuario i, respectivamente.

Así, dado el conjunto de usuarios $N = \{1, 2, \ldots, n\}$ tenemos los vectores

$$\lambda, \mu \in \mathbb{R}_+^N.$$

Esta situación se ajusta al modelo $M/M/1/FIFO/\infty/N$, ampliamente estudiado en teoría de colas y el cual abordamos en el Capítulo 1.

Definición 2.1. *Un problema de colas está definido por una cuaterna*

$$(N, \lambda, \mu, c) \in Q = 2^{|N|} \times \mathbb{R}_+^{|N|} \times \mathbb{R}_+^{|N|} \times \mathbb{R}_+, \tag{2.1}$$

donde Q es el conjunto de todos los problemas de colas con N usuarios, λ el vector de tasas de arribo, μ el vector de tasas de servicio y c el costo del servicio.

Al problema (N, λ, μ, c) lo identificaremos con N, entendiendo que están dados los vectores λ, μ y el número c.

Ejemplo 2.1. *Considere el estaf de cómputo que debe mantener las computadoras del CIMAT en condiciones de operación. Suponga que las computadoras son agrupadas en tres tipos. Los tiempos que trabajan las máquinas antes de descomponerse tienen distribuciones exponenciales con medias de $2, 3$ y 2 días, respectivamente. Los tiempos que tarda el estaf en reparar cada máquina tienen distribuciones exponenciales con medias de $3, 4$ y 3 días, respectivamente. Supongamos que el costo del servicio del estaf es de $4,569$ pesos al día y se desea distribuir entre los usuarios el costo de mantener el estaf . Así, el problema se modela como:*

$$N = \{1, 2, 3\}, \quad \lambda = (2, 3, 2), \quad \mu = (3, 4, 3) \ y \quad c = 4,569.$$

Dado un problema de colas, estamos interesados en determinar una manera de repartir el costo del servicio entre los usuarios. A esta manera de repartir le llamaremos una ***solución al problema de colas***.

Definición 2.2. *Una solución para un problema de colas (N, λ, μ, c) es una función*

$$\varphi : Q \to \mathbb{R}^{|N|},$$

que asocia a cada $N \in Q$, un vector

$$\varphi(N) := (\varphi_i(N)_{i \in N}) \in \mathbb{R}^{|N|},$$

donde $\varphi_i(N)$ representa lo que debe pagar el usuario i en el problema N.

Ejemplo 2.2. *Una solución natural para un problema de colas N es repartir el costo en partes iguales, es decir,*

$$\varphi_i(N) := \frac{c}{|N|}, \tag{2.2}$$

para todo $i \in N$. Así, para el Ejemplo 2.1 los responsables de las máquinas deben pagar $1,523$ pesos.

Sin embargo, esta solución no considera que los usuarios pueden necesitar del servicio en diferentes proporciones; así, una solución deseable es aquella que obligue a pagar una cantidad mayor a aquellos usuarios que necesiten el servicio en mayor proporción.

Ahora centramos nuestra atención en el concepto de solución, estableciendo propiedades deseables que deben poseer las formas de repartir el costo. Una característica importante de una solución es que debe repartir el costo entre todos los usuarios del servicio; es decir, debe ser ***eficiente*** en el siguiente sentido:

Definición 2.3. *Dado un problema N, una solución $\varphi(N) \in \mathbb{R}^{|N|}$ es eficiente si y sólo si*

$$\sum_{i=1}^{|N|} \varphi_i(N) = c. \tag{2.3}$$

Ejemplo 2.3. *Dado un problema (N, λ, μ, c) la solución que reparte el costo en partes iguales, considerada en el Ejemplo 2.2, es una solución eficiente.*

Otra propiedad deseable para una solución es que sea ***justa*** en el siguiente sentido:

Definición 2.4. *Dado un problema N, una solución $\varphi(N) \in \mathbb{R}^{|N|}$ es* ***justa*** *si y sólo si para todo $i, j \in N$ $(i \neq j)$ tales que $\mu_j \geq \mu_i$ se tiene que*

$$\varphi_i(N) \geq \varphi_j(N). \tag{2.4}$$

Ejemplo 2.4. *La solución que reparte el costo en partes iguales no cumple la condición de justicia, ya que para los datos del Ejemplo 2.1 a los usuarios 2 y 3 les está obligando a pagar lo mismo, y ellos están necesitando del servicio en diferentes proporciones.*

De la teoría de colas sabemos que P_n es la probabilidad de que exactamente n clientes estén en el sistema; sin embargo, este caso no se ajusta al modelo en consideración, ya que para determinar P_n se supone que para todo $i \in N$ se tiene que $\lambda_i = \lambda$, es decir, la tasa de arribo es constante. Por lo cual utilizaremos otro método para determinar esas probabilidades.

2.2. Proceso de nacimiento y muerte multidimensional

En esta sección discutiremos un método para analizar modelos de colas para los cuales la definición natural de un estado requiere más de una variable. Para un estudio más extenso remitimos a [2]

En la Sección 1.1.4 estudiamos el proceso de nacimiento y muerte unidimensional con el propósito de obtener las probabilidades P_n desconocidas (es decir $P(E = n)$), las cuales se pueden interpretar como la fracción del tiempo en la que el sistema tiene n usuarios. Esto lo lográbamos construyendo y resolviendo un sistema de ecuaciones.

Supongamos que $N = \{1, 2\}$, $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2)$, $\mu = (\mu_1, \mu_2)$. Sea x_i una variable aleatoria tal que:

$$x_i = \begin{cases} 1 & \text{si el usuario } i \text{ está en el sistema} \\ 0 & \text{en caso contrario.} \end{cases} \tag{2.5}$$

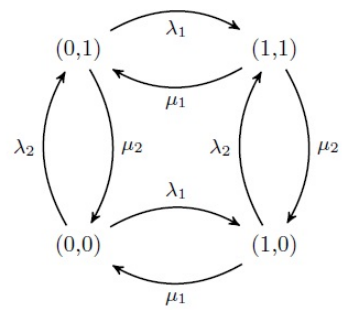

Figura 2.1: Diagrama de tasas para un sistema de colas con dos usuarios.

Luego, el estado del sistema E es un vector en el conjunto

$$\{(0,0),(1,0),(0,1),(1,1)\}.$$

Así, estamos interesados en determinar

$$P(E=(x_1,x_2))=P(x_1,x_2).$$

La Figura 2.1 muestra el diagrama de tasas. Utilizando el mismo principio de la Sección 1.1.4, construimos el siguiente sistema:

$$\begin{cases}(\lambda_1+\lambda_2)P(0,0)=\mu_1P(1,0)+\mu_2P(0,1)\\(\lambda_1+\mu_2)P(0,1)=\lambda_2P(0,0)+\mu_1P(1,1)\\(\mu_1+\mu_2)P(1,1)=\lambda_1P(0,1)+\lambda_2P(1,0)\\(\lambda_2+\mu_1)P(1,0)=\lambda_1P(0,0)+\mu_2P(1,1)\\P(0,0)+P(1,0)+P(0,1)+P(1,1)=1.\end{cases} \tag{2.6}$$

Resolviendo el sistema tenemos que

$$P(0,0)=\frac{\mu_1\mu_2}{\mu_1\mu_2+\lambda_1\mu_2+\mu_1\lambda_2+\lambda_1\lambda_2},$$

$$P(1,0)=\frac{\lambda_1\mu_2}{\mu_1\mu_2+\lambda_1\mu_2+\mu_1\lambda_2+\lambda_1\lambda_2},$$

$$P(0,1)=\frac{\mu_1\lambda_2}{\mu_1\mu_2+\lambda_1\mu_2+\mu_1\lambda_2+\lambda_1\lambda_2},$$

$$P(1,1)=\frac{\lambda_1\lambda_2}{\mu_1\mu_2+\lambda_1\mu_2+\mu_1\lambda_2+\lambda_1\lambda_2}.$$

Obsérvese que se tienen las siguientes relaciones:

$$P(1,0)=\frac{\lambda_1}{\mu_1}P(0,0),$$

$$P(0,1) = \frac{\lambda_2}{\mu_2} P(0,0),$$
$$P(1,1) = \frac{\lambda_1 \lambda_2}{\mu_1 \mu_2} P(0,0)$$

para el caso de dos usuarios.

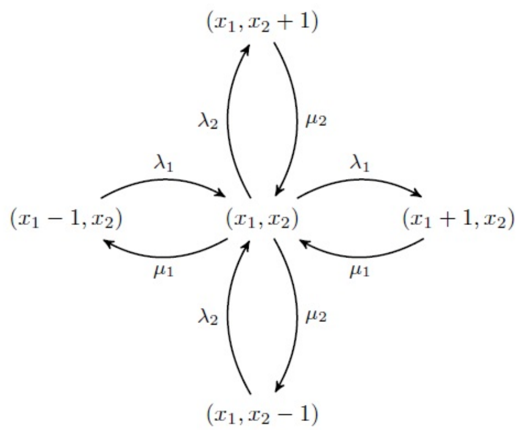

Figura 2.2: Diagrama de tasas para un estado del sistema de colas con dos usuarios.

Existe una manera más compacta de generar el sistema, así como de resolverlo. Consideremos el diagrama dado en la Figura 2.2 que refleja los cambios que se dan en un estado determinado. Así, el sistema anterior lo podemos escribir como:

$$\begin{cases} (\acute{\lambda}_1 + \acute{\lambda}_2 + \acute{\mu}_1 + \acute{\mu}_2) P(x_1, x_2) = \lambda_1 P(x_1 - 1, x_2) + \mu_2 P(x_1, x_2 + 1) \\ \quad + \mu_1 P(x_1 + 1, x_2) + \lambda_2 P(x_1, x_2 - 1) \\ \sum_{(x_1, x_2) \in \{0,1\}^2} P(x_1, x_2) = 1 \end{cases} \tag{2.7}$$

donde

$$\acute{\mu}_i = \begin{cases} 0 & \text{si } x_i < 1, \\ \mu_i & \text{en caso contrario,} \end{cases} \tag{2.8}$$

$$\acute{\lambda}_i = \begin{cases} 0 & \text{si } x_i \geq 1, \\ \lambda_i & \text{en caso contrario,} \end{cases} \tag{2.9}$$

y

$$P(-1, x_2) = P(x_1, -1) = P(2, x_2), P(x_1, 2) = 0. \tag{2.10}$$

Cada una de las primeras cuatro ecuaciones del sistema 2.6 se obtienen utilizando la ecuación

$$(\acute{\lambda_1} + \acute{\lambda_2} + \acute{\mu_1} + \acute{\mu_2})P(x_1, x_2) = \lambda_1 P(x_1 - 1, x_2) + \mu_2 P(x_1, x_2 + 1) \\ + \mu_1 P(x_1 + 1, x_2) + \lambda_2 P(x_1, x_2 - 1) \tag{2.11}$$

aplicada a cada uno de los estados del sistema dados en la Figura 2.3 y considerando las condiciones dadas en (2.10).

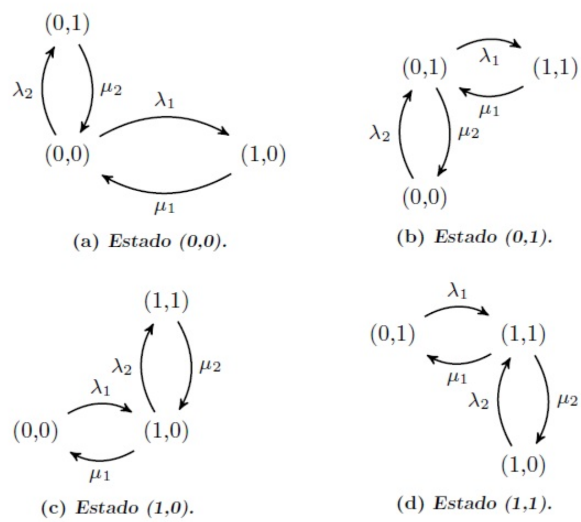

Figura 2.3: Estados de sistema de colas con dos usuarios.

Dado un estado $(x_1, x_2) \in \{0, 1\}^2$ definimos $S(x_1, x_2) = \{i \in \{1, 2\} \mid x_i = 1\}$; así, de la observación dada anteriormente afirmamos que

$$P(x_1, x_2) = \prod_{i \in S(x_1, x_2)} (\frac{\lambda_i}{\mu_i}) P(\emptyset),$$

donde $P(0, 0)$, se obtiene mediante la ecuación

$$\sum_{(x_1, x_2) \in \{0,1\}^2} P(x_1, x_2) = 1. \tag{2.12}$$

Para el caso general, supongamos que tenemos las siguientes condiciones,

$$\begin{array}{rcll} N & = & \{1, \ldots, n\} & \text{conjunto de usuarios,} \\ \lambda & = & (\lambda_1, \ldots, \lambda_n) & \text{vector de tasas de arribo,} \\ \mu & = & (\mu_1, \ldots, \mu_n) & \text{vector de tasas de servicio.} \end{array}$$

Sea x_i la variable aleatoria definida en (2.5); luego, el estado del sistema E es un vector en el conjunto $\{0,1\}^n$.

Así, estamos interesados en determinar

$$P(E = (x_1, \ldots, x_n)) = P(x_1, \ldots, x_n).$$

Utilizando el principio mencionado con anterioridad, formamos el siguiente sistema:

$$\begin{cases} \sum_{i=1}^{n} \{\acute{\lambda_i} + \acute{\mu_i}\} P(X) = \sum_{i=1}^{n} [\mu_i P(x_1, \ldots, x_i + 1, \ldots, x_n) \\ +\lambda_i P(x_1, \ldots, x_i - 1, \ldots, x_n)] \\ \sum_{X \in \{0,1\}^n} P(X) = 1 \end{cases} \tag{2.13}$$

donde $\acute{\mu_i}$ está dado en (2.8) y $\acute{\lambda_i}$ en (2.9).

Por otro lado, se generalizan los requerimientos dados en (2.10), es decir, para todo $i \in N$

$$P(x_1, \ldots, -1, \ldots, x_n) = P(x_1, \ldots, 2, \ldots, x_n) = 0.$$

Teorema 4. *La solución al sistema 2.13 es*

$$P(x_1, \ldots, x_n) = \prod_{i \in S(x_1, \ldots, x_n)} (\frac{\lambda_i}{\mu_i}) P(0, \ldots, 0), \tag{2.14}$$

donde $P(0, \ldots, 0)$ se obtiene mediante la ecuación

$$\sum_{X \in \{0,1\}^n} P(x_1, \ldots, x_n) = 1. \tag{2.15}$$

Demostración. Primero observemos que usando (2.14) tenemos que

$$P(x_1, \ldots, x_i + 1, \ldots, x_n) = \frac{\lambda_i}{\mu_i} P(X)$$

y

$$P(x_1, \ldots, x_i - 1, \ldots, x_n) = \frac{\mu_i}{\lambda_i} P(X)$$

luego

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^{n} [\mu_i P(x_1, \ldots, x_i + 1, \ldots, x_n) & \\ +\lambda_i P(x_1, \ldots, x_i - 1, \ldots, x_n)] &= \sum_{i=1}^{n} [\mu_i \frac{\lambda_i}{\mu_i} P(X) + \lambda_i \frac{\mu_i}{\lambda_i} P(X)] \\ &= \sum_{i=1}^{n} \{\lambda_i + \mu_i\} P(X) \end{aligned}$$

Por otro lado, de la ecuación 2.14 tenemos que

$$P(0,\ldots,0)=\frac{1}{\sum_{X\in\{0,1\}^n}\prod_{i\in S(x_1,\ldots,x_n)}(\frac{\lambda_i}{\mu_i})}, \tag{2.16}$$

luego

$$\begin{aligned}\sum_{X\in\{0,1\}^n} P(x_1,\ldots,x_n) \sum_{X\in\{0,1\}^n}\prod_{i\in S(x_1,\ldots,x_n)}(\frac{\lambda_i}{\mu_i})P(0,\ldots,0) &= \\ = \sum_{X\in\{0,1\}^n}\prod_{i\in S(x_1,\ldots,x_n)}(\frac{\lambda_i}{\mu_i})(\frac{1}{\sum_{X\in\{0,1\}^n}\prod_{i\in S(x_1,\ldots,x_n)}(\frac{\lambda_i}{\mu_i})}) & \\ &= 1.\end{aligned}$$

□

Ejemplo 2.5. *Considere el Ejemplo 2.1. Luego, los valores de $P(x_1,x_2,x_3)$ están dados en la siguiente tabla :*

P(0,0,0)	$\frac{27}{175}$	*P(0,1,1)*	$\frac{24}{175}$	*P(1,1,0)*	$\frac{12}{175}$
P(0,0,1)	$\frac{36}{175}$	*P(1,0,0)*	$\frac{18}{175}$	*P(1,1,1)*	$\frac{16}{175}$
P(0,1,0)	$\frac{18}{175}$	*P(1,0,1)*	$\frac{24}{175}$		

2.3. Soluciones al problema de colas

Esta sección tiene por propósito presentar dos soluciones que nos permitirán repartir el costo del servicio entre los usuarios.

Definición 2.5. *Sea un problema N. Una solución a este problema es $\varphi : Q \to \mathbb{R}^n$ tal que*

$$\varphi_i(N)=\left[\frac{P(0,\ldots,0)}{|N|}+f_i\left[1-P(0,\ldots,0)\right]\right]c, \qquad \text{para todo } i\in N \tag{2.17}$$

donde

$$f_i=\frac{\frac{1}{\mu_i}}{\sum_{j\in N}\frac{1}{\mu_j}}. \tag{2.18}$$

Básicamente lo que esta función hace es repartir la fracción del tiempo en la que el sistema está vacío, $P(0,\ldots,0)$, en partes iguales; además, reparte la fracción del tiempo en la que el sistema es utilizado, $[1-P(0,\ldots,0)]$, de manera proporcional al tiempo en que los usuarios utilizan el sistema.

Ejemplo 2.6. *Considere el Ejemplo 2.1. Luego, la solución φ está dada en la siguiente tabla:*

i	*1*	2	3
$\varphi_i(N)$	\$1640.1	\$1288.9	\$1640.1

Esta solución posee dos características importantes que se mencionan en el siguiente lema.

Lema 1. *Dado un problema N, la solución dada en (2.17) es eficiente y justa.*

DEMOSTRACIÓN. **1. Eficiencia**

$$\begin{aligned}
\sum_{i\in N}\varphi_i(N) &= \sum_{i\in N}\left[\frac{P(0,\ldots,0)}{|N|}+f_i\left[1-P(0,\ldots,0)\right]\right]c\\
&= \sum_{i\in N}\frac{P(0,\ldots,0)c}{|N|}+\sum_{i\in N}f_i\left[1-P(0,\ldots,0)\right]c\\
&= |N|\frac{P(0,\ldots,0)c}{|N|}+\left[1-P(0,\ldots,0)\right]\\
&= P(0,\ldots,0)c+c-P(0,\ldots,0)c\\
&= c.
\end{aligned}$$

2. Justicia Consideremos $i,j\in N$ $(i\neq j)$ tales que $\mu_j\geq\mu_i$; así, se tiene que $\frac{1}{\mu_i}\geq\frac{1}{\mu_j}$, de donde

$$\begin{aligned}
\frac{1}{\mu_i}\geq\frac{1}{\mu_j} &\Longrightarrow f_i\geq f_j\\
&\Longrightarrow f_i\left[1-P(0,\ldots,0)\right]\geq f_j\left[1-P(0,\ldots,0)\right]\\
&\Longrightarrow \frac{P(0,\ldots,0)}{|N|}+f_i\left[1-P(0,\ldots,0)\right]\\
&\geq \frac{P(0,\ldots,0)}{|N|}+f_j\left[1-P(0,\ldots,0)\right]\\
&\Longrightarrow \left[\frac{P(0,\ldots,0)}{|N|}+f_i\left[1-P(0,\ldots,0)\right]\right]c\\
&\geq \left[\frac{P(0,\ldots,0)}{|N|}+f_j\left[1-P(0,\ldots,0)\right]\right]c\\
&\Longrightarrow \varphi_i(N)\geq\varphi_j(N).
\end{aligned}$$

□

Dado que podemos determinar la fracción del tiempo en la que el sistema se encuentra en el estado E, es decir,

$$P(x_1,\ldots,x_n),$$

estamos interesados en determinar la fracción de tiempo en ese estado en la que un usuario es servido. Para lograr esto, consideramos la siguiente función de repartición.

Definición 2.6. *Sea $i\in N$ y $X\in\{0,1\}^n$ un estado del sistema. Una función de repartición es una función $\alpha:\{0,1\}^n\to\mathbb{R}^n$ tal que*

$$\alpha_i(X) = \begin{cases} \frac{1}{|N|}; & si\ S(X) = \emptyset, \\ \\ 0; & si\ i \notin S(X)\ y\ S(X) \neq \emptyset, \\ \\ \dfrac{\dfrac{1}{\mu_i}}{\sum_{j \in S(X)} \dfrac{1}{\mu_j}}; & de\ otra\ manera, \end{cases} \tag{2.19}$$

donde

$$S(X) = \{i \in N \mid x_i = 1\}.$$

Así,

$$\alpha_i(X)P(X) \tag{2.20}$$

indica la fracción del tiempo en la que el usuario i es servido en el estado X.

Lema 2. *Sea $X \in \{0,1\}^n$ un estado del sistema. Luego*

$$\sum_{i \in N} \alpha_i(X) = 1. \tag{2.21}$$

Demostración. Si $X = (0, \dots, 0)$, $S(X) = \emptyset$; así

$$\begin{aligned} \sum_{i \in N} \alpha_i(X) &= \sum_{i \in N} \frac{1}{|N|} \\ &= |N|(\frac{1}{|N|}) \\ &= 1. \end{aligned}$$

Supongamos que $X \neq (0, \dots, 0)$. Luego, si $S(X) = \{i\}$, entonces $\alpha_j(X) = 0$ para todo $j \neq i$, de donde

$$\begin{aligned} \sum_{i \in N} \alpha_i(X) &= \frac{\dfrac{1}{\mu_i}}{\dfrac{1}{\mu_i}} \\ &= 1. \end{aligned}$$

Si $S(X) = \{i, j\}$, entonces $\alpha_k(X) = 0$ para todo $k \in N \setminus \{i, j\}$ de donde

$$\begin{aligned} \sum_{i \in N} \alpha_i(X) &= \frac{\frac{1}{\mu_i} + \frac{1}{\mu_j}}{\frac{1}{\mu_i} + \frac{1}{\mu_j}} \\ &= 1. \end{aligned}$$

Usando el mismo argumento tenemos que para un determinado $X \neq (0, \dots, 0)$

$$\begin{aligned}\sum_{i\in N}\alpha_i(X) &= \sum_{i\in S(X)}\frac{\frac{1}{\mu_i}}{\sum_{j\in S(X)}\dfrac{1}{\mu_j}}\\ &= 1.\end{aligned}$$

□

De lo anterior tenemos que

Definición 2.7. *La fracción del tiempo en la que un usuario $i \in N$ utiliza el servicio es:*

$$f_i = \sum_X \alpha_i(X)P(X). \tag{2.22}$$

Ejemplo 2.7. *Considere el Ejemplo 2.1. Luego, la fracción del tiempo f_i en la que un usuario $i \in N$ utiliza el servicio, está dada en la siguiente tabla:*

f_1	f_2	f_3
0.29	0.42	0.29

Ahora ya estamos en condiciones de proponer otra solución para un problema de colas N.

Definición 2.8. *Dado un problema N, una solución $\psi : Q \to \mathbb{R}^n$ que depende de los estados es*

$$\psi_i(N) = f_i c. \tag{2.23}$$

Ejemplo 2.8. *Considere el Ejemplo 2.1. Luego, la solución ψ dada en (2.23), para este problema, se muestra en la siguiente tabla:*

i	*1*	2	3
$\psi_i(N)$	\$1314.1	\$1940.8	\$1314.1

Esta solución reparte el costo del servicio de manera proporcional al tiempo en la que los usuarios son servidos. Una característica fundamental que verifica esta solución es la siguiente:

Lema 3. *La solución dada en (2.23) es eficiente.*

Demostración. En efecto,

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{|N|}\varphi_i(N) &= \sum_{i=1}^{|N|} f_i c\\ &= \sum_{i=1}^{|N|}\sum_X \alpha_i(X)P(X)c\\ &= \sum_X\sum_{i=1}^{|N|}\alpha_i(X)P(X)c;\end{aligned}$$

luego, usando

$$\sum_{X\in\{0,1\}^n} P(X) = 1,$$

y del Lema 2 se obtiene el resultado. $\square$

2.4. Situación de abandono

Dado un problema de colas $M = \{1,\dots,m\}$, calculamos una solución ψ para M; luego, suponemos que un subconjunto $N^c \subsetneq M$ de usuarios decide no participar del problema M y, por lo tanto, de la repartición del costo, obteniendo un nuevo problema N; entonces, calculamos una nueva solución φ para N. Así, estamos interesados en determinar la relación existente entre las soluciones ψ y φ, para todo $i \in N$.

Por otro lado, en nuestro trabajo de investigación estamos considerando soluciones que dependen de los estados del sistema, es decir, que utilizan la fracción del tiempo en la que un usuario $i \in N$ es servido. Luego, básicamente lo que necesitamos repartir entre los usuarios que se quedaron es

$$\sum_{j\in N^c} f_j,$$

que es la fracción del tiempo en la que los usuario de N^c utilizan del servicio. Para lograr tal propósito utilizaremos las siguientes definiciones. Para un estudio más extenso de su utilización remitimos al lector a [11] donde se caracteriza la ***regla de Bayes***.

Definición 2.9. *Sean M, N dos problemas de colas tales que $M = \{1,\dots,m\}$, $N \subseteq M$ y $f = (f_1,\dots,f_m)$ el vector de fracciones de tiempo de utilización del servicio. Una repartición $\hat{f}$, es una* **regla de revisión** *si existe $\phi^N : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ tal que*

$$\hat{f}_i(N, M, f) = f_i + \phi_i^N(f) \qquad \textit{para todo } i \in N, \tag{2.24}$$

donde $\hat{f}_i(N, M, f)$ indica la fracción del tiempo de utilización del servicio del usuario $i \in N \subsetneq M$ en el problema de colas N, tomando en cuenta las fracciones de tiempo f del problema original M, dado que los usuarios en N^c no participan en el problema.

Observación 2: El superindice N en ϕ^N, indica que ϕ reparte $f(N^c)$ entre los usuarios de N.

Definición 2.10. (**Independencia de trayectoria**) Sean M, N y R tres problemas de colas tales que $N \subseteq R \subseteq M$ y $f = (f_1,\dots,f_m)$ el vector de fracciones de tiempo de utilización del servicio. Una reparticion $\hat{f}$ satisface la propiedad de independencia de trayectoria si y sólo si

$$\hat{f}(N, R, \hat{f}(R, M, f)) = \hat{f}(N, M, f).$$

La propiedad de independencia de trayectoria es un requerimiento de consistencia; éste implica que el orden en el que se retiran los usuarios no importa. Este axioma es ilustrado en el siguente ejemplo.

Ejemplo 2.9. *Considere M, N y R tres problemas de colas tales que $M = \{1, 2, 3, 4\}$, $R = \{1, 2, 3\}$, $N = \{1, 2\}$ y $f = (f_1, f_2, f_3, f_4)$.*

Suponga que R^c ha decidido no participar de la repartición del costo. Así, tenemos que repartir f_4 entre los usuarios que se quedaron, es decir, $R = \{1, 2, 3\}$. Así, aplicando la repartición $\hat{f}$ tenemos que

$$\hat{f}(R, M, f) = (\hat{f}_1, \hat{f}_2, \hat{f}_3),$$

Ahora suponga que en el problema R, $N^c = \{3\}$ ha decidido no participar de la repartición del costo; así, necesitamos repartir $\hat{f}_3$ entre los usuarios que se quedaron, es decir, $N = \{1, 2\}$. Utilizando nuevamente la repartición $\hat{f}$ obtenemos

$$\hat{f}(N, R, \hat{f}(N, R, f)). \tag{2.25}$$

Luego, si la repartición $\hat{f}$ satisface independencia de trayectoria; el vector dado en (2.25) puede obtenerse suponiendo que se tiene el problema $M = \{1, 2, 3, 4\}$ y que los usuarios en $N^C = \{3, 4\}$ decidieron no participar de la repartición del costo, es decir, si repartimos $f_3 + f_4$ entre los usuarios que se quedaron, $N = \{1, 2\}$.

2.5. Conclusiones

En el presente capítulo abordamos la definición de un problema de colas; además, definimos soluciónes a tales problemas. Luego, generalizamos el proceso de nacimiento y muerte unidimensional, con el propósito de poder determinar la fracción del tiempo en la que el sistema tiene un número determinado de usuarios y así poder establecer soluciones que involucren esta información. Dadas estas fracciones de tiempo propusimos dos soluciones, las cuales serán caracterizadas en el capítulo siguiente. También preparamos las condiciones para resolver una situación de abandono.

Capítulo 3

Resultados principales

En cada uno de los capítulos anteriores presentamos los fundamentos para el desarrollo de nuestro trabajo. En el presente capítulo mostramos dos de nuestros resultados principales. Primeramente caracterizamos la solución 2.17 utilizando un conjunto de constantes que recogen las diferencias "deseadas" que deben tener los pagos entre los usuarios del servicio. Esta idea está basada en el trabajo de Hart. y Mas-Colell [8] sobre el ***potencial*** de un juego cooperativo.

El segundo resultado establece una única forma de resolver la situación de abandono planteada con anterioridad. En el trabajo de Dipjyoti [11] se utilizan ideas similares para caracterizar la ***regla de Bayes***.

3.1. Caracterización de las soluciones propuestas

El propósito de esta sección es caracterizar la solución 2.17 y resolver la situación de abandono; para lograr esto, definamos lo que es un conjunto de constantes compatibles.

Definición 3.1. *Un conjunto de constantes $D = \{d_{ij}\}_{i,j \in N}$ es compatible si y sólo si*

1. $d_{ii} = 0$,

2. $d_{ij} = -d_{ji}$,

3. $d_{ij} + d_{jk} = d_{ik}$.

Ejemplo 3.1. *Dado un problema de colas N, el conjunto de constantes $D = \{d_{ij}\}_{i,j \in N}$ dado por*

$$d_{ij} = [f_i - f_j]\,[1 - P(0, \ldots, 0)]\,c, \tag{3.1}$$

donde

$$f_i = \frac{\frac{1}{\mu_i}}{\sum_{j \in N} \frac{1}{\mu_j}} \tag{3.2}$$

es un conjunto de constantes compatible. En efecto,

$$\begin{aligned} d_{ii} &= [f_i - f_i]\,[1 - P(0, \ldots, 0)]\,c \\ &= 0. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} d_{ij} &= [f_i - f_j]\,[1 - P(0, \ldots, 0)]\,c, \\ &= -\,[f_j - f_i]\,[1 - P(0, \ldots, 0)]\,c, \\ &= -d_{ji}. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} d_{ij} + d_{jk} &= [f_i - f_j]\,[1 - P(0, \ldots, 0)]\,c + [f_j - f_k]\,[1 - P(0, \ldots, 0)]\,c, \\ &= [f_i - f_j + f_j - f_k]\,[1 - P(0, \ldots, 0)]\,c, \\ &= [f_i - f_k]\,[1 - P(0, \ldots, 0)]\,c \\ &= d_{ik}. \end{aligned}$$

Observación 3. Dado un conjunto D de constantes compatible es fácil verificar que la suma de todas estas constantes es igual a cero, es decir;

$$\sum_{i \in N} \sum_{j \in N} d_{ij} = 0.$$

En efecto, sean $i, j \in N$. Luego, $d_{ij}, d_{ji} \in D$ un conjunto de constantes compatible; así, tenemos que $d_{ij} = -d_{ji}$, de donde

$$d_{ij} + d_{ji} = -d_{ji} + d_{ji} = 0,$$

por lo tanto

$$\sum_{i \in N} \sum_{j \in N} d_{ij} = 0.$$

Definición 3.2. *Sean un problema de colas N, $\varphi(N) \in \mathbb{R}^n$ una solución y $D = \{d_{ij}\}_{i,j \in N}$ un conjunto de constantes compatible; $\varphi(N) \in \mathbb{R}^n$ preserva diferencias si y sólo si*

$$\varphi_i(N) - \varphi_j(N) = d_{ij}.$$

Ejemplo 3.2. *Sean un problema de colas N y $D = \{d_{ij}\}_{i,j \in N}$ el conjunto de constantes compatible dado en (3.1). La solución dada en (2.2) no preserva diferencias. En efecto,*

$$\begin{aligned}
\varphi_i(N) - \varphi_j(N) &= \frac{c}{|N|} - \frac{c}{|N|} \\
&= 0 \\
&\neq d_{ij}.
\end{aligned}$$

El siguiente es el resultado que nos permite caracterizar la solución 2.17. Para un estudio más extenso de su utilización remitimos al lector al trabajo de Hart y Mas-Colell [8].

Lema 4. *Dado un problema de colas N y un conjunto de constantes compatible $D = \{d_{ij}\}_{i,j\in N}$, existe una única solución al problema de colas $\Phi(N) \in \mathbb{R}^n$ que es eficiente y preserva las diferencias en D. Además*

$$\Phi_i(N) = \frac{1}{|N|}\left[c + \sum_{j\in N} d_{ij}\right].$$

Demostración. Para probar la existencia mostraremos que la solución anterior es la única solución para un problema de colas que satisface eficiencia y que preserva diferencias.

1. Eficiencia

$$\begin{aligned}
\sum_{i\in N}\Phi_i(N) &= \sum_{i\in N}\left[\frac{1}{|N|}\left[c + \sum_{j\in N} d_{ij}\right]\right] \\
&= \sum_{i\in N}\frac{c}{|N|} + \sum_{i\in N}\sum_{j\in N} d_{ij} \\
&= |N|\left(\frac{c}{|N|}\right) \\
&= c.
\end{aligned}$$

2. Preserva diferencias

Sean $i, j \in N$ fijos, luego

$$\Phi_i(N) = \frac{1}{|N|}\left[c + \sum_{k\in N\setminus\{i\}} d_{ik}\right],$$

$$\Phi_j(N) = \frac{1}{|N|}\left[c + \sum_{k\in N\setminus\{j\}} d_{jk}\right].$$

Así,

$$\Phi_i(N) = \frac{1}{|N|}\left[c + d_{ij} + \sum_{k\in N\setminus\{i,j\}} d_{ik}\right],$$

$$\Phi_j(N) = \frac{1}{|N|}\left[c + d_{ij} + \sum_{k\in N\setminus\{i,j\}} d_{jk}\right];$$

luego

$$\begin{aligned}
\Phi_i(N) - \Phi_j(N) &= \frac{c}{|N|} + \frac{d_{ij}}{|N|} + \frac{1}{|N|} \sum_{k \in N\setminus\{i,j\}} d_{ik} \\
&\quad -\frac{c}{|N|} - \frac{d_{ji}}{|N|} - \frac{1}{|N|} \sum_{k \in N\setminus\{i,j\}} d_{jk} \\
&= \frac{d_{ij}}{|N|} + \frac{1}{|N|} \sum_{k \in N\setminus\{i,j\}} d_{ik} + \frac{d_{ij}}{|N|} + \frac{1}{|N|} \sum_{k \in N\setminus\{i,j\}} d_{kj} \\
&= \frac{2d_{ij}}{|N|} + \frac{1}{|N|} \sum_{k \in N\setminus\{i,j\}} [d_{ik} + d_{kj}] \\
&= \frac{2d_{ij}}{|N|} + \frac{1}{|N|} \sum_{k \in N\setminus\{i,j\}} d_{ij} \\
&= \frac{2d_{ij}}{|N|} + \frac{1}{|N|}(|N|-2)d_{ij} \\
&= \frac{2d_{ij}}{|N|} + d_{ij} - \frac{2d_{ij}}{|N|} \\
&= d_{ij}.
\end{aligned}$$

3. Unicidad

Sea $\phi \in \mathbb{R}^n$ una solución que es eficiente y que preserva diferencias, es decir;

a. $\sum_{i \in N} \phi_i(N) = c$,

b. $\phi_i(N) - \phi_j(N) = d_{ij}$.

Supongamos otra solución eficiente y que preserva diferencias, $\Phi(N)$, tal que $\Phi(N) \neq \phi(N)$, es decir que existe $j \in N$ tal que

$$\Phi_j(N) \neq \phi_j(N).$$

Sin pérdida de generalidad, supongamos que $\Phi_j(N) > \phi_j(N)$; así

$$-\Phi_j(N) < -\phi_j(N),$$

$$\Phi_i(N) - \Phi_j(N) < \Phi_i(N) - \phi_j(N) \text{ para todo } i \in N \setminus \{j\},$$

pero

$$\Phi_i(N) - \Phi_j(N) = d_{ij} = \phi_i(N) - \phi_j(N) \text{ para todo } i \in N \setminus \{j\};$$

luego,

$$\phi_i(N) - \phi_j(N) < \Phi_i(N) - \phi_j(N)$$

de donde

$$\phi_i(N) < \Phi_i(N) \text{ para todo } i \in N \setminus \{j\}.$$

De lo anterior tenemos que, para todo $i \in N$,

$$\phi_i(N) < \Phi_i(N).$$

Así,

$$c = \sum_{i \in N} \phi_i(N) < \sum_{i \in N} \Phi_i(N) = c,$$

lo cual es una contradicción. □

Hart y Mas-Colell [8] introducen el concepto de ***potencial***, propuesto como una aplicación que asigna un número real a cada coalición de N de modo tal que cada jugador reciba su contribución marginal a la gran coalición calculada de acuerdo a esta función potencial, y lo caracterizan de manera única utilizando una versión del lema anterior. El concepto de potencial puede verse como una caracterización alterna del valor de Shapley.

El siguiente teorema es nuestro primer resultado, en el cual se caracteriza la solución 2.17 utilizando un conjunto de constantes que denotan las diferencias deseadas que deben tener los pagos entre los usuarios del servicio.

Teorema 5. *Dados un problema de colas N y el conjunto de constantes $D = \{d_{ij}\}_{i,j \in N}$ dadas en (3.1), la solución dada en (2.17) es la única solución eficiente y justa que preserva las diferencias en D.*

DEMOSTRACIÓN. El Lema 4 prueba la existencia, unicidad, eficiencia y preservación de diferencias, así lo que debemos probar es que

$$\varphi_i(N) = \Phi_i(N),$$

para todo $i \in N$. Se tiene que

$$\begin{aligned} \Phi_i(N) &= \frac{1}{|N|}\left[c + \sum_{j \in N} d_{ij}\right] \\ &= \frac{1}{|N|}\left[c + \sum_{j \in N} [f_i - f_j]\,[1 - P(0,\ldots,0)]\right] c; \end{aligned}$$

donde

$$f_i = \frac{\frac{1}{\mu_i}}{\sum_{j \in N} \frac{1}{\mu_j}}.$$

Luego

$$
\begin{aligned}
\Phi_i(N) &= \frac{1}{|N|}\left[c + \sum_{j\in N}\left[\frac{\frac{1}{\mu_i}}{\sum_{k\in N}\frac{1}{\mu_k}} - \frac{\frac{1}{\mu_j}}{\sum_{k\in N}\frac{1}{\mu_k}}\right][1-P(0,\ldots,0)]\,c\right] \\
&= \frac{1}{|N|}\left[c + \frac{\sum_{j\in N}[\frac{1}{\mu_i}-\frac{1}{\mu_j}]}{\sum_{k\in N}\frac{1}{\mu_k}}\right][1-P(0,\ldots,0)]\,c \\
&= \frac{1}{|N|}\left[c + \frac{\sum_{j\in N}\frac{1}{\mu_i}}{\sum_{j\in N}\frac{1}{\mu_j}} - 1\right][1-P(0,\ldots,0)]\,c \\
&= \frac{1}{|N|}\left[c + \frac{|N|\frac{1}{\mu_i}}{\sum_{j\in N}\frac{1}{\mu_j}} - 1\right][1-P(0,\ldots,0)]\,c \\
&= \frac{1}{|N|}\left[c + |N| f_i - 1\right][1-P(0,\ldots,0)]\,c \\
&= \frac{c}{|N|} + f_i\,[1-P(0,\ldots,0)]\,c - \frac{1}{|N|}[1-P(0,\ldots,0)]\,c \\
&= \frac{c}{|N|} + f_i\,[1-P(0,\ldots,0)]\,c - \frac{c}{|N|} + \frac{P(0,\ldots,0)}{|N|}c \\
&= \frac{P(0,\ldots,0)}{|N|}c + f_i\,[1-P(0,\ldots,0)]\,c \\
&= \left[\frac{P(0,\ldots,0)}{|N|} + f_i\,[1-P(0,\ldots,0)]\right]c \\
&= \varphi_i(N).
\end{aligned}
$$

□

La utilización del conjunto de constantes compatible D dado en (3.1) se justifica porque estas constantes reflejan las diferencias que tienen dos usuarios en relación a la utilización del servicio y por lo tanto; la solución dada en (2.17) utiliza esta información para repartir el costo. Además, la importancia de esta solución se refleja en sus características principales: repartir la fracción del tiempo en la que el sistema está vacío, en partes iguales, repartir la fracción del tiempo en la que el sistema es utilizado de manera proporcional al tiempo en que utilizan el sistema y ser una solución es ***justa***; en el sentido de que obliga a pagar más al que más utiliza del servicio.

En lo que resta de este capítulo consideraremos la siguiente situación; supongamos que hemos repartido el costo del servicio entre un conjunto M de usuarios, usando la solución ψ dada en (2.23); luego de realizar esto, un grupo de usuarios $N^c \subset M$ deciden no participar de la repartición del costo; entonces, estamos interesados en determinar una nueva forma de repartir el excedente, es decir, una solución que redistribuya

$$\sum_{j\in N^c} \psi_j(M),$$

entre los usuarios en N.

Dado que la solución (2.23) requiere de la fracción del tiempo f_i en la que un usuario $i \in N$ utiliza el servicio, para resolver la situación de abandono necesitamos redistribuir

$$\sum_{j \in N^c} f_j, \tag{3.3}$$

que es la fracción del tiempo en la que los usuarios en N^c utilizan el servicio.

Lema 5. *Sean M, N dos problemas de colas tales que $N \subseteq M$, $f = (f_1, \ldots, f_m)$ el vector de fracciones de tiempo de utilización del servicio, $X \in \{0,1\}^n$ un estado del sistema y*

$$\alpha : \{0,1\}^n \to \mathbb{R}^n$$

la función de repartición dada en (2.19). Luego, si para $i \in N$,

$$\tilde{f}_i := \frac{\sum_X \alpha_i(X) P(X)}{\sum_X \left[\sum_j \alpha_j(X)\right] P(X)}, \tag{3.4}$$

entonces $\tilde{f}$ es una regla de revisión.

Demostración.

$$\begin{aligned}
\tilde{f}_i &= \frac{\sum_X \alpha_i(X) P(X)}{\sum_X \left[\sum_{j \in N} \alpha_j(X)\right] P(X)} \\
&= \frac{\sum_X \alpha_i(X) P(X)}{\sum_X \left[\sum_{j \in N} \alpha_j(X)\right] P(X)} \left[\sum_{j \in N} \sum_X \alpha_j(X) P(X) + \sum_{k \notin N} \sum_X \alpha_k(X) P(X)\right] \\
&= \sum_X \alpha_i(X) P(X) \left[1 + \frac{\sum_{k \notin N} \sum_X \alpha_k(X) P(X)}{\sum_X (\sum_{j \in N} \alpha_j(X)) P(X)}\right] \\
&= f_i \left[1 + \frac{\sum_{j \in N^c}}{\sum_{k \in N} f_k}\right] \\
&= f_i + \left[\sum_{j \in N^c} f_j\right] \frac{f_i}{\sum_{k \in N} f_k}.
\end{aligned}$$

□

La expresión (3.4) redistribuye

$$\sum_{j \in N^c} f_j$$

entre los usuarios que se quedaron, de manera proporcional a la fracción del tiempo en la que los usuarios en N utilizan del servicio. A continuación daremos una solución a una situación de abandono donde se ha utilizado la solución dada en (2.23).

Definición 3.3. *Sean M, N dos problemas de colas tales que $N \subseteq M$ y $f = (f_1, \ldots, f_m)$ el vector de fracciones de tiempo de utilización del servicio. Considere que los usuarios en N^c han decidido no participar de la repartición del costo. Una solución a esta problemática está dada por*

$$\Psi_i(N) = \tilde{f}_i c \qquad \text{para todo } i \in N, \tag{3.5}$$

donde

$$\tilde{f}_i = f_i + \left[\sum_{j \in N^c} f_j \right] \frac{f_i}{\sum_{k \in N} f_k}. \tag{3.6}$$

Ejemplo 3.3. *Considere el Ejemplo 2.8 y suponga que el usuario 3 ha decidido no participar en la repartición del costo. Luego, los $\tilde{f}_i$, están dados en la siguiente tabla:*

$\tilde{f}_1$	$\tilde{f}_2$
0.41	0.59

Luego, la solución Ψ está dada por:

$$\Psi_1(N) = \$1873.3$$

$$\Psi_2(N) = \$2695.7$$

El siguiente axioma es una forma de resolver la situación de abandono, sin embargo, es deseable que la nueva solución tenga esa propiedad inherente.

Axioma 3.1. (**Proporcionalidad**) Sean M, N dos problemas de colas tales que $M = \{1, \ldots, n\}$, $N \subseteq M$, $f = (f_1, \ldots, f_m)$ el vector de fracciones de tiempo de utilización del servicio y ψ una solución al problema M. Una solución φ al problema N satisface el axioma de proporcionalidad si y sólo si

$$\varphi_i(N) = \frac{\psi_i(M)}{\sum_{j \in N} \psi_j(M)} c.$$

para todo $i \in N$.

Así.

Lema 6. *Sean M, N dos problemas de colas tales que $N \subseteq M$, $f = (f_1, \ldots, f_m)$ el vector de fracciones de tiempo de utilización del servicio y ψ una solución para M. La solución dada en (3.5) para el problema N cumple el axioma de proporcionalidad.*

Demostración. En efecto

$$\begin{aligned}
\Psi_i(N) &= \tilde{f}_i c \\
&= \left[f_i + \left[\sum_{j\in N^c} f_j \right] \frac{f_i}{\sum_{k\in N} f_k} \right] c \\
&= f_i c + \left[\sum_{j\in N^c} f_j c \right] \frac{f_i c}{\sum_{k\in N} \psi_k(M) c} \\
&= f_i c + \left[\sum_{j\in N^c} f_j c \right] \frac{f_i c}{\sum_{k\in N} f_k c} \\
&= \psi_i(M) + \left[\sum_{j\in N^c} \psi_j(M) \right] \frac{\psi_i(M)}{\sum_{k\in N} \psi_k(M)}
\end{aligned}$$

de donde

$$\Psi_i(N) = \psi_i(M) + \left[\sum_{j\in N^c} \psi_j(M) \right] \frac{\psi_i(M)}{\sum_{k\in N} \psi_k(M)}; \tag{3.7}$$

luego

$$\begin{aligned}
\Psi_i(N) &= \psi_i(M) \left[1 + \frac{\sum_{j\in N^c} \psi_j(M)}{\sum_{k\in N} \psi_k(M)} \right] \\
&= \psi_i(M) \left[1 + \frac{\sum_{j\in N^c} \psi_j(M)}{c - \sum_{j\in N^c} \psi_j(M)} \right] \\
&= \psi_i(M) \left[\frac{c - \sum_{j\in N^c} \psi_j(M) + \sum_{j\in N^c} \psi_j(M)}{c - \psi(M)(N^c)} \right] \\
&= \psi_i(M) \left[\frac{c}{c - \sum_{j\in N^c} \psi_j(M)} \right] \\
&= \psi_i(M) \left[\frac{c}{\sum_{k\in N} \psi_k(M)} \right] \\
&= \frac{\psi_i(M)}{\sum_{k\in N} \psi_k(M)} c.
\end{aligned}$$

□

Algunas de las ideas que se presentan a continuación son reformuladas a partir del trabajo de Dipjyoti [11] donde el autor caracteriza la ***regla de Bayes***.

Teorema 6. *Sean M, N dos problemas de colas tales que $N \subseteq M$, $|M| = m \geq 4$, $f = (f_1, \ldots, f_m)$ el vector de fracciones de tiempo de utilización del servicio, ψ una solución para M y φ una solución para N eficiente tal que*

$$\varphi_i(N) = \hat{f}_i c \qquad \textit{para todo } i \in N,$$

donde $\hat{f}$ es una regla de revisión que satisface la propiedad de independencia de trayectoria. Si φ es igual a la solución dada en (3.5) para todo N talque $|N| = n$ con $2 \leq n < m$, entonces φ es igual a la solución dada en (3.5) para todo problemas de colas R tal que $m > |R| > n$.

Demostración. Supongamos que φ es igual a la solución dada en (3.5) para todo N tal que $|N| = n$ con $2 \leq n < m$. Sea $f = (f_1, \ldots, f_m)$ tal que $f_i > 0$ para todo $i \in M$. Consideremos N y R tales que

$$R = N \cup \{\acute{j}\}, \acute{j} \in M \setminus N.$$

Sea $i \in N$ fijo. Luego, dado que $\hat{f}$ es una regla de revisión, tenemos que

$$\hat{f}_i(N, R, f) = f_i + \phi_i^N(f),$$

para todo $i \in N$ y, dado que satisaface la propiedad de independencia de trayectoria, se sigue que

$$\hat{f}(N, M, f) = \hat{f}(N, R, \hat{f}(R, M, f));$$

lo anterior implica que

$$\begin{aligned} f_i + \phi_i^N(f) &= f_i + \phi_i^R(f) + \phi_i^N((f_j + \phi_j^R(f))_{j \in R}), \\ \phi_i^N(f) &= \phi_i^R(f) + \phi_i^N(\left[f_j + \phi_j^R(f)\right]_{j \in R}). \end{aligned}$$

Luego, tenemos que

$$\phi_i^N(f)c = \phi_i^R(f)c + \phi_i^N(\left[f_j + \phi_j^R(f)\right]_{j \in R})c$$

de donde, por ser φ igual a la solución 3.5, tenemos que

$$\phi_i^R(f)c + \left[\psi_{\acute{j}}(M) + \phi_{\acute{j}}^R(f)c\right] \frac{\psi_i(M) + \phi_i^R(f)c}{\sum_{k \in N} \psi_k(M) + \phi_k^R(f)c} = \left[\sum_{k \notin N} \psi_k(M)\right] \frac{\psi_i(M)}{\sum_{k \in N} \psi_k(M)}. \tag{3.8}$$

Por eficiencia de φ, tenemos que

$$\sum_{k \in N} \psi_k(M) + \phi_k^R(f)c = c - \psi_{\acute{j}}(M) - \phi_{\acute{j}}^R(f)c.$$

Tomando

$$A = \psi_{\acute{j}}(M) + \phi_{\acute{j}}^R(f)c$$

y

$$\frac{\sum_{k\notin N}\psi_k(M)}{\sum_{k\in N}\psi_k(M)}=t$$

la ecuación 3.8 puede escribirse como

$$\begin{aligned}
\phi_i^R(f)c+A\frac{\psi_i(M)+\phi_i^R(f)c}{c-A} &= t\psi_i(M)\\
\frac{\phi_i^R(f)c(c-A)+A(\psi_i(M)+\phi_i^R(f)c)}{(c-A)\psi_i(M)} &= t\\
\frac{\phi_i^R(f)c^2-A\phi_i^R(f)c+A\psi_i(M)+A\phi_i^R(f)c}{(c-A)\psi_i(M)} &= t\\
\frac{\phi_i^R(f)c^2+A\psi_i(M)}{(c-A)\psi_i(M)} &= t.
\end{aligned}$$

Observar que la última expresión es válida para cualquier $i\in N$. Luego, tomemos $i,j\in N$ con $j\neq i$; así,

$$\begin{aligned}
\frac{\phi_j^R(f)c^2+A\psi_j(M)}{(c-A)\psi_j(M)} &= \frac{\phi_i^R(f)c^2+A\psi_i(M)}{(c-A)\psi_i(M)}\\
\phi_j^R(f)c^2+A\psi_j(M)c &= \frac{\psi_j(M)}{\psi_i(M)}(\phi_i^R(f)c^2+A\psi_i(M))\\
\phi_j^R(f)c^2+A\psi_j(M)c &= \frac{\psi_j(M)}{\psi_i(M)}\phi_i^R(f)c^2+A\psi_j(M)c\\
\phi_j^R(f)c &= \frac{\psi_j(M)}{\psi_i(M)}\phi_i^R(f)c.
\end{aligned} \tag{3.9}$$

Sea $i\in N$ fijo y consideremos $\acute{N}$ en el cual $j\in N\setminus\{i\}$ es reemplazado por el usuario $\acute{j}$. Así, $\acute{N}=N\cup\{\acute{j}\}$. Por el razonamiento anterior tenemos que

$$\phi_{\acute{j}}^R(f)c=\frac{\psi_{\acute{j}}(M)}{\psi_i(M)}\phi_i^R(f)c.$$

Por otro lado

$$\sum_{i\notin R}\psi_i(M)=\sum_{j\in R}\phi_j^R(f)c.$$

Así

$$\sum_{i\notin R}\psi_i(M)=\sum_{j\in R}\frac{\psi_j(M)}{\psi_i(M)}\phi_i^R(f)c.$$

La ecuación anterior implica que

$$\phi_i^R(f)c=\frac{\sum_{i\notin R}\psi_i(M)}{\sum_{j\in R}\psi_j(M)}\psi_i(M)c.$$

Así, hemos probado que si φ es igual a la solución dada en (3.5) para todo N tal que $|N| = n$ con $2 \leq n < m$, se tiene que esta solución es igual a la dada en (3.5) cuando

$$R = N \cup \{j\}, j \in M \setminus N.$$

Supongamos que se tiene la igualdad para cualquier R tal que $n < |R| \leq r < m$. Considerando $\acute{R} = R \cup \{\acute{j}\}$, donde $\acute{j} \in M \setminus R$ y aplicando el procedimiento anterior tenemos que las soluciones siguen siendo iguales; luego, se obtiene el resultado deseado. □

La importancia de este teorema radica en que nos permite resolver una situación de abandono y además, si utilizamos una solución en la que las fracciones de tiempo del problema N se obtienen con una repartición $\hat{f}$ que sea una regla de revisión y que cumpla el axioma de independencia de caminos obtenemos siempre la solución dada en (3.5), esto nos hace pensar que considerando el axioma de proporcionalidad y añadiendo probablemente otros axiomas la solución dada en (3.5) se puede caracterizar de manera única.

3.2. Conclusiones

A lo largo de este capítulo presentamos dos soluciones para un problema de colas N. Ambas soluciones utilizan la fracción del tiempo en la que un usuario requiere el servicio. Además proponemos una caracaterización de solución dada en 2.17. También caracterizamos la solución dada en (2.17) utilizando un conjunto de constantes compatible, el cual se justifica por qué estas constantes reflejan la diferencias que tienen dos usuarios en relación a la utilización del servicio y por lo tanto la solución dada en (2.17) utiliza esta información para repartir el costo. Por otro lado, resolvimos una situación de abandono, estableciendo un criterio sobre la repartición de las fracciones de tiempo en la que ciertos usuarios que abandonaron el sistema utilizaban el servicio. Si esta repartición cumple con ser una regla de revisión y satisface la propiedad de independencia de trayectoria se obtiene la solución dada en (3.5).

Capítulo 4

Conclusiones generales

Cada uno de los capítulos anteriores contiene una discusión sobre las conclusiones más importantes de los mismos, por lo que debiera remitirse a cada uno de ellos para más detalles (secciones 1.4, 2.5, y 3.2). En este capítulo se comentan los resultados de forma general y se resume el trabajo.

Se han presentado los fundamentos teóricos de los sistemas de colas y de los juegos cooperativos a lo largo del Capítulo 1; en el Capítulo 2 se define un problema de colas. Luego, generalizámos el proceso de nacimiento y muerte unidimensional, con el fin de poder determinar la fracción del tiempo en la que el sistema tiene un número determinado de usuarios y así poder establecer soluciones que involucren esta información. Dadas estas fracciones de tiempo se propusieron dos soluciones las cuales caracterizamos en el Capítulo 3. Tambien en ese capítulo resolvemos la situación de abandono definida con anterioridad.

A continuación se presentan los resultados más importantes desarrollados a lo largo de esta investigación:

1. Determinamos una distribución de probabalidad sobre los estados de un sistema, utilizando las ideas del proceso de nacimiento y muerte unidimensional. A partir de este resultado se pudo calcular la fracción de tiempo de utilización del servicio para cada uno de los usuarios.

2. Propusimos dos soluciones, dadas en (2.17) y (2.23), para un problema de colas. Estas soluciones utilizan los estados del sistema para realizar una repartición del costo.

3. Caracterizamos la solución dada en (2.17) como la única solución eficiente que preserva ciertas diferencias; por otro lado podemos ver que la solución dada en (2.23) es el valor esperado de la función dada en (2.19).

4. Resolvimos la situación de abandono estableciendo una nueva solución dada en (3.5) y se probó que ésta coincide con cualquier solución donde las fracciones de tiempo se reparten

utilizando una regla de revisión que satisface el axioma de independencia del camino. Además se probó que ésta solución satisface el axioma de proporcionalidad.

Así mismo, es posible dar algunas recomendaciones sobre la utilización de las soluciones propuestas:

1. Estableciendo ciertos criterios sobre la repartición en cada uno de los estados es posible determinar otro tipo de soluciones.
2. Dado que se tiene una solución al problemas de colas, es posible proponer una solución a una situación de abandono utilizando la expresión del axioma de proporcionalidad; sin embargo, es deseable que la nueva solución tenga esta propiedad inherente.

Partiendo de las conclusiones y las recomendaciones anteriores, pueden tenerse varias líneas de estudio para trabajos futuros:

1. Dado que en el caso unidimensional, considerando las tasas de arribo y de servicio constantes, se determino una función de distribución de probabilidad sobre los estados del sistema, es posible determinar una función de distribución sobre los estados del sistema donde las tasas de arribo y servicio no sean constantes.
2. Dado que la solución en (2.23) es el valor esperado de la función en (2.19), es posible que esta solución sea una solución de un juego cooperativo, en el cual se involucre la repartición del costo.
3. Dado que a partir del conjunto de constantes compatible D dado en (3.1) se demostro que la solución dada en (2.17) es la única eficiente que preserva diferencias, ¿existirá un conjunto de constantes compatibles de tal forma que la solución dada en (2.23) es la única eficiente que preserva ciertas diferencias?
4. En todo el el trabajo se supone que el servicio es proporcionado por un solo servidor; la teoría de colas nos proporcionó la tećnica necesaria para poder determinar la fracción de tiempo en la que un usuario utiliza el servicio, la cual, está íntimamente relacionada con el hecho de que solo hay un servidor; así, es posible generalizar los resultados a dos o más servidores.
5. Es deseable obtener una caracterización a la situación de abandono; por ejemplo, poder establecer un teorema donde la solución dada sea la única que satisfaga el axioma de proporcionalidad y añadiendo probablemente otros axiomas.

Referencias

[1] F. Maniquet, *A characterization of de Shapley value in queueing problems.* Journal of Economic Theory **109** (2003), 90-103.

[2] R. B. Cooper (1981), *Introduction to Queueing Theory.* Cambridge University Express, ISBN 0521553903.

[3] Sánchez F. *Introducción a la matemática de los juegos.* Editores Siglo veintiuno. 99-121

[4] Shapley, L.S. *A value for n-person games.* Annals of Mathematics Studies (28):307-317.

[5] Y. Chun, *A note on Maniquet's characterizations of the Shapley value in queueing problems*

[6] Y. Chun,T. Hokari, *On the Coincidence of the Shapley Value and the Nucleolus in Queueing Problems.* Seoul Journal of Economics 20 (No. 2 2007): 223-238

[7] Driessen T.S.H, Tijs S,H *The τ-value. The core and semiconvex Games.* International Journal of Game Theory, Vol 14, núm 4, 1985 pp. 229-248.

[8] Hart. S, Mas-Colell. *A potential, value and consistency.* Econometrika, Vol 57, núm 3, pp. 586-614.

[9] Owen G. *A note on the nucleolus.* International Journal of Game Theory, Vol 3, núm 2, 1975 pp. 101-113.

[10] Owen, G. *Game Theory.* Academic Press. 3rd ed. 1995.

[11] Dipjyoti M. *An Axiomatic characterization of Bayes Rule.* Mathematical Social Sciences Volume 47, Issue 3, May 2004, Pages 261273

[12] Young, P. *Cost allocation: Methods, Principles, Applications.* North- Holland, Amsterdan.1985.

[13] Moulin H., Schenker S. *Serial Cost Sharing.* Econometrika, Vol 60, 1009 - 1037.

[14] von Neumann, J., 0. Morgenstern. *Theory of Games and Economic Behavior* Princeton: Princeton University Press. Second Ed. 1944.

[15] Harsanyi J.C. *A bargaining model for the cooperative n-person game.* In: Tucker AW, Luce RD (eds) Contributions to the theory of games, vol IV. Princeton University Press, Princeton. 1959 pp 325355

Índice alfabético