Centro de Investigación en Matemáticas, A.C.

Juegos cooperativos, gráficas y división justa

T E S I S

Que para obtener el grado de

Doctor en Ciencias
con Orientación en

Matemáticas Aplicadas

P R E S E N T A :

William José Olvera López

Director de Tesis:

Dr. Francisco Sánchez Sánchez

GUANAJUATO, GTO 2012

Este trabajo está dedicado
a la persona más importante
en mi vida

Mi madre.

Agradecimientos

Antes que todo quisiera agradecerle a una gran persona, ya que gracias a su apoyo y consejos he llegado a realizar una de mis grandes metas, lo cual constituye la herencia más valiosa que pudiera recibir. No alcanzará el tiempo para darle las gracias por el cariño y soporte que siempre he recibido de su parte; todo lo que soy se lo debo a ella; atribuyo todos mis éxitos en la vida a la enseñanza moral, intelectual y física que recibí de ella: muchas gracias mamá.

De igual manera, quiero expresar mi gratitud al director de esta tesis, mi profesor y amigo el Dr. Francisco Sánchez Sánchez, por su tiempo y dedicación a este trabajo de investigación. Muchas gracias por todo.

También quisiera agradecer de manera muy especial a los revisores de este documento, Dr. Francisco Solís, Dr. Luis Hernández Lamoneda, Dr. Elvio Accinelli y Dr. Leobardo Plata por sus comentarios, sugerencias y observaciones, las cuales ayudaron a mejorar la calidad del escrito correspondiente.

Igualmente quisiera extender mi agradecimiento al Consejo Nacional de Ciencia y Tecnología (CONACyT) por haber aportado el financiamiento necesario para la realización de mis estudios doctorales, los cuales culminan con la elaboración del presente documento.

No podría faltar el agradecimiento sincero y cálido hacia la profesora Stephanie Dunbar, por sus innumerables aportaciones en la realización de documentos relacionados con la presentación de este trabajo en congresos y ponencias, así como en revistas de divulgación. En realidad hizo una labor excepcional.

Importante es realizar también un reconocimiento a los compañeros, amigos y familiares de los que tanto se aprende y con los que tantos momentos gratos pude disfrutar: Anita, José, Ale (gran parte de este éxito pertenece a ustedes), Julio Macías, Imelda Trejo, Luis Benitez, Iván Téllez... y sobre todo a una gran familia que me arropó como si fuera un miembro más de ella, y a los cuales llevaré siempre conmigo como parte importante en mi vida, la estupenda familia Barba Moreno... ¡qué suerte tuve de cruzarme en su camino!

De igual manera agradezco a todas aquellas personas que durante la realización de mis estudios doctorales ayudaron de alguna u otra manera a que esta etapa fuera un tanto más llevadera: Janet, Lolita, Lourdes, Toquina y demás personal administrativo de este grandioso centro de investigación que es CIMAT.

Índice general

Introducción

Los conflictos de intereses y todo lo que rodea al proceso de toma de decisiones están presentes en la totalidad de las actividades humanas: en economía, sociología, política y en un gran número de actividades diversas se presentan situaciones de competencia entre los agentes que intervienen que a la vez necesitan de la cooperación entre los mismos para poder alcanzar sus objetivos. La relación competencia-cooperación se muestra indivisible al momento de tratar de explicar las relaciones entre esos agentes, sean individuos de una colectividad, empresas o incluso países.

En general, los problemas que se refieren a conflictos de intereses se caracterizan por la existencia de un grupo de personas que se encuentran en una situación que puede tener más de un desenlace, respecto a cada uno de los cuales cada individuo tiene una cierta preferencia. Además, cada uno de los individuos controla alguna de las variables que determina el resultado final, aunque no controla la totalidad de dicho resultado. Cada una de estas situaciones se conoce como un *juego*, en una idea muy intuitiva. Así, un juego puede representar situaciones tan diversas como un juego de cartas o la negociación de acuerdos internacionales entre países.

El inicio de la teoría matemática que estudia los conflictos de intereses se conoce como Teoría de Juegos, y se establece en el año de 1944 a raíz de la publicación del libro "Game Theory and Economic Behavior" de John Von Neumann y Oskar Morgenstern, aunque ya existía constancia de trabajos previos, como el de Von Neumann en 1944 donde se demuestra el teorema minimax en el contexto de los juegos bipersonales finitos de suma cero; cincuenta años más tarde, el gran impacto que la teoría de juegos ha tenido en el desarrollo de la economía moderna queda oficialmente reconocido al serle concedido el Premio Nobel de Economía a tres teóricos de esta disciplina: John Nash, Reinhard Selten y John Harsanyi. Desde sus inicios, la teoría de juegos ha evolucionado ampliamente, y los modelos que implica, se aplican principalmente a la economía y a la política, así como a otras ciencias sociales como la filosofía o psicología, ya que se ajustan muy bien al estudio de la conducta humana.

En general ha de suponerse que existe un número concreto de jugadores, que se conocen, que están determinados todos los posibles resultados del juego y que el objetivo de cada jugador es maximizar su utilidad tras el fin del juego. En el caso en que pueda haber comunicación entre los jugadores de manera que puedan negociar o establecer acuerdos que permitan la formación de coaliciones, la situación se abarca dentro de los llamados *juegos cooperativos*. En estas situaciones, se considera como información básica la utilidad que cada coalición puede obtener coordinando las estrategias de sus integrantes, con independencia de la actuación del resto de los individuos del juego. Así, los acuerdos entre los miembros de cada coalición se encaminan a coordinar sus actuaciones o a redistribuir los pagos o ganancias obtenidas.

La teoría clásica de los juegos cooperativos, como se mencionó anteriormente, considera que cuando se forman las coaliciones *todos* los jugadores cooperan *de la misma manera* para logran un fin común. Éste es un principio que puede resultar controversial en diversos contextos: no necesariamente el hecho de formar una coalición tiene que implicar que la cooperación se lleve a cabo de la misma manera entre los jugadores que la formaron. O incluso este modelo riguroso no captura las situaciones en donde, por causas exógenas o personales, el nivel de esfuerzo de los jugadores en las coaliciones no es el mismo. Por ello, han surgido modificaciones al modelo clásico como la que será nuestro objeto de estudio en esta tesis. Por ejemplo, para la primera modificación mencionada en este párrafo se han introducido las *estructuras de cooperación* entre los jugadores, donde la forma más común de modelarlas es mediante gráficas. Esto ha contribuido a unificar gran parte de los conceptos de teoría de gráficas con teoría de juegos, ampliando fuertemente las aplicaciones de esta última. Para el caso donde la cooperación entre los agentes no necesariamente es al mismo nivel, se han introducido con bastante éxito los *juegos cooperativos de elección múltiple*.

En esta tesis trabajaremos con situaciones cooperativas donde se encuentran involucradas, de alguna manera, a las gráficas. Cabe mencionar que no necesariamente éstas representarán estructuras de cooperación. El estudio que se lleva a cabo en el presente trabajo de investigación se divide en seis capítulos, de los que a continuación se presenta un breve resumen:

- Primeramente se presentarán los conceptos básicos de juegos cooperativos. Se tendrá una sección para los *juegos de unanimidad*, que es un tipo de juegos que usaremos (al menos sus principios) en gran parte de las demostraciones de los capítulos posteriores. También presentamos una sección para el *valor de Shapley*, solución bastante conocida y aceptada en teoría de juegos. A su vez, presentaremos las nociones de los juegos cooperativos con estructuras de cooperación así como algunos ejemplos de otras situaciones cooperativas en donde las gráficas puedan verse involucradas.
- En este capítulo tratamos un tipo de juegos cooperativos donde la función característica se define sobre el conjunto de ciclos que existen en una digráfica completa. Esta función característica indica la valía que se obtiene cuando se recorren los nodos que forman un ciclo en el orden dado por

el mismo. Estamos proponiendo una solución para este tipo de juegos, la cual, para cualquier juego q en los ciclos de una digráfica, se da con la siguiente formulación

$$\phi_i(q) = \sum_{\substack{T \in \mathcal{C}(N) \\ n(T) \ni i}} \frac{(n-|T|)!}{n!}[q(T) - q(T_{-i})], \qquad \forall\, i \in N.$$

Para información relacionada con la notación de la solución anterior refiérase a la Sección 2.2. Para obtener la solución anterior nos estamos basando en los axiomas propuestos por Shapley [35], donde la principal modificación ocurre en el axioma de eficiencia: nosotros proponemos un axioma de eficiencia promedio, dado que existe más de una manera en la que puede visitarse a todos los nodos, y junto con nuestras versiones de nulidad, simetría y aditividad caracterizamos la solución unívocamente. Para más detalles véase la Sección 2.3. También mostramos que esta solución equivale al valor de Shapley para dos juegos específicos en forma de función característica. Luego, proponemos una primera modificación al modelo considerando que existe un monto fijo a repartir r entre los jugadores: con ello, el axioma de eficiencia cambia a un llamado axioma de r-eficiencia, donde se considera que este monto r se reparte en su totalidad entre todos los jugadores. El teorema que mostramos es

Existe una única solución $\varphi : F_g \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$ que satisface los axiomas de linealidad, simetría, r-eficiencia y r-nulidad. Aún más, esta solución está dada por

$$\phi_i(q, r) = \frac{r - \eta(q, N)}{n} + \sum_{\substack{T \in \mathcal{C}(N) \\ n(T) \ni i}} \frac{(n-|T|)!}{n!}[q(T) - q(T_{-i})]$$

para todo $i \in N$, $q \in F_g$ y $r \in \mathbb{R}$.

Para mayor detalles consúltese la Sección 2.4. Para finalizar el estudio de estos juegos suponemos que los jugadores se encuentran organizados de acuerdo a una estructura coalicional. Nos basamos en los axiomas propuestos por Owen [32] para mostrar el siguiente teorema:

Existe una única solución que satisface los axiomas de linealidad en F_g, nulidad, eficiencia coalicional promedio, nodos sustitutos y coaliciones sustitutas. Aún más, esta solución está dada por

$$\phi_i(q, B) = \sum_{\substack{S \subseteq B_k \\ \bar{S} \ni i}} \sum_{T \in \mathcal{C}_B^S(N)} \frac{(|B_k| - s)!(s-1)!}{|B_k|!} \cdot \frac{(m - |B(S)_T|)!}{m!} \left(\frac{1}{\pi(B(S)_T)} \right) [q(T) - q(T_{-i})]$$

para todo nodo $i \in N$ con $i \in B_k \in B$ y $q \in F_g$.

Para mayores detalles sobre los axiomas utilizados, la notación utilizada y la forma de obtención de esta solución refiérase a la Sección 2.5.

Cabe mencionar que los resultados obtenidos en este capítulo han sido aceptados para su publicación en la revista *International Game Theory Review*.

- Esta sección trata de los juegos con estructuras de cooperación estudiados por Myerson [27] pero en el caso específico donde las gráficas que representan a dichas estructuras son árboles. Estamos proponiendo una generalización del axioma de justicia por componentes propuesta por Herings et al. [16] y junto con el axioma de eficiencia por componentes mostramos que existe una familia de soluciones que satisfacen estos dos axiomas, la cual viene dada por

$$\varphi_i(g) = \left(1 - \sum_{\{i,h\}\in g} \frac{\alpha_{hi}}{\alpha_{ih} + \alpha_{hi}}\right) v(N_i) + \sum_{\{i,h\}\in g} \left[\frac{\alpha_{hi} v(N_{ih}) - \alpha_{ih} v(N_{hi})}{\alpha_{hi} + \alpha_{ih}}\right].$$

  para todo $i \in N$. Véase la Sección 3.3 para detalles sobre la notación utilizada. Como puede verse, la solución anterior depende de unas constantes α_{ij} relacionada con cada posible componente que puede formarse al eliminar una arista de la gráfica. A lo largo del capítulo proponemos axiomas que conllevan ya determinadas estas constantes, y con ello obtenemos soluciones caracterizadas unívocamente: recuperamos la solución conocida como el *valor de posición* y una nueva solución basada en los grados de los nodos. Finalmente, terminamos este capítulo verificando que para juegos superaditivos, cualquier miembro de la familia de soluciones se encuentra en el núcleo del juego.

- En este capítulo tratamos un problema de decisión multi-agente: en este tipo de situaciones, se tiene un conjunto finito de alternativas y un conjunto finito de agentes. Cada agente obtiene un beneficio por tomar cada alternativa, y cada uno de ellos puede preferir ciertas alternativas sobre otras: el problema surge cuando solamente una de ellas es la que se realizará. ¿Cómo deben ponerse de acuerdo los agentes para elegir la opción que se llevará a cabo? ¿Cómo deben ser los beneficios que reciban los agentes por, posiblemente, llevar a cabo una decisión que no es favorable para ellos? Nosotros proponemos una solución basándonos en compensaciones: un agente aceptará una decisión que *no es de su agrado* si es compensado de alguna manera *razonable*. Para calcular dichas compensaciones, proponemos que éstas sean el valor de Shapley del siguiente juego cooperativo:

$$v_j(S) = \begin{cases} D^{j^*}(S) - D^j(S) & \text{para cada } S \subsetneq N; \\ 0 & \text{si } S = N. \end{cases}$$

Para una explicación de los elementos que intervienen en este juego, refiérase a la Sección 4.3. Básicamente, el juego anterior modela el monto máximo que un subconjunto de jugadores puede exigir por el hecho de aceptar una alternativa dada: si ellos en realidad prefieren esta alternativa sobre todas las demás, entonces en ese juego cooperativo se les asigna un valor de cero. El valor de la gran coalición se establece como cero porque se desea que las compensaciones se realicen entre los agentes mismos, esto es, que no haya beneficios adicionales dados de manera exógena en la modelación. Entonces, si se establece como regla que "las compensaciones serán calculadas como el valor de Shapley del juego anterior", mostramos que, dada la racionalidad de los agentes, todos ellos estarán de acuerdo en elegir una alternativa dada (en realidad puede haber un conjunto de ellas, pero ellos serán indiferentes entre cualquiera de ese conjunto), lo que elimina el posible problema de no estar de acuerdo con la alternativa que se llevará a cabo. Además, mostramos que en dicha alternativa el valor obtenido por cada agente es máximo. Conforme se avanza en el capítulo, también mostramos que el monto que obtendrán los agentes por aceptar esta decisión unánime resultado de la regla para las compensaciones que proponemos puede ser calculada utilizando el valor de Shapley de un juego cooperativo dado. Finalmente, basándonos en un enfoque no-cooperativo, demostramos que nuestra solución equivale a una situación de equilibrio.

Los resultados obtenidos en este capítulo han sido sometidos para su publicación en la revista *Games and Economic Behavior.*

- En el Capítulo 5 trabajamos con el problema de repartición de estímulos: consideramos que un conjunto N de agentes tiene un *ranking* dentro de un conjunto M de actividades. Se tiene un monto a repartir, el cual debe distribuirse tomando en cuenta este ranqueo entre los agentes. Llamamos a este problema un *problema de incentivos.* Considerando los axiomas de aditividad, tratamiento igualitario y eficiencia mostramos que existe toda una familia de soluciones que satisfacen estas propiedades, a saber

$$\varphi_j(X,r) = \frac{r}{n} + \sum_{k\in M} \beta_k \left(x_{kj} - \overline{X_k}\right) \qquad \forall\ j \in N$$

para un conjunto de constantes $\beta_k \in \mathbb{R}$. Esta solución reparte el monto r tomando en cuenta la diferencia entre la calificación de cada agente y la calificación promedio de los agentes, en cada actividad. Aquel agente que tenga un desempeño más alto que el promedio recibe un monto adicional a su reparto inicial y si tiene un desempeño menor, se le quita un monto. El resultado final es el que se muestra en la fórmula anterior. Proporcionando otros axiomas, como el de simetría de categorías y el de división trivial, logramos casos más específicos de la solución anterior, e incluso una solución única (caso en el que todas las constantes $\beta_k = 1$). Estudiamos dos propiedades deseables para las soluciones de estos problemas, como son la proporcionalidad de los valores asignados y la reducción de un conjunto de agentes en un único agente, y vemos que dichas propiedades se satisfacen para nuestra solución. Vemos también que puede plantearse la situación de tener un conjunto de precios por cada unidad de actividad. Finalizamos el estudio de los problemas de incentivos mediante un enfoque basado en la teoría clásica de negociación: planteamos un problema de negociación apropiado y aplicamos las soluciones de Nash, Yu y Kalai-Smorodinsky a nuestro problema.

Los resultados obtenidos en este capítulo se encuentran publicados en la revista *Applied Mathematical Sciences*.

- En este último capítulo trabajamos en un problema de división justa. Queremos encontrar una solución a un problema sobre cómo repartir m bienes continuamente divisibles entre n agentes donde queremos que el agente que obtiene el menor monto posible esté obteniendo el mayor monto que puede asegurar. Suponemos que cada agente tiene una valoración positiva sobre cada bien. Esto lo representamos en una matriz A de $m \times n$. Además, estamos suponiendo que la suma de las valoraciones de cada agente sobre el conjunto de bienes es el mismo. Para solucionar este problema planteamos un problema de programación lineal de la siguiente manera:

$$\text{Max} \quad z \quad \text{sujeto a}$$

$$\begin{aligned} \sum_{i \in M} a_{ij} x_{ij} \geq z & \qquad \forall j \in N \\ \sum_{j \in N} x_{ij} = 1 & \qquad \forall i \in M \\ x_{ij} \geq 0 & \qquad \forall i \in M, \forall j \in N. \end{aligned}$$

En el primer conjunto de restricciones modelamos que el monto que cada agente obtiene sea por lo menos un valor z, y queremos que este valor sea lo máximo posible. En las segundas restricciones requerimos que cada bien se reparta en su totalidad. Para resolver este problema de programación lienal, planteamos el problema dual correspondiente como sigue:

$$\text{Min} \quad w = \sum_{i \in M} v_i \quad \text{sujeto a}$$

$$\begin{aligned} v_i \geq a_{ij} u_j & \qquad\qquad \forall i \in M, \forall j \in N \\ \sum_{j \in N} u_j = 1 & \\ u_j \geq 0 & \qquad\qquad \forall j \in N \end{aligned}$$

Primeramente introducimos el concepto de *vectores duales* relacionados con el problema dual y asociamos una gráfica bipartita a cada par de vectores y viceversa. En este gráfico los nodos representan a los bienes y a los agentes y las aristas corresponden a las primeras desigualdades del problema dual que se cumplen con igualdad estricta de acuerdo con el valor de las variables duales. Esto es, habrá una arista entre los nodo i y j si $v_i = a_{ij}u_j$. Entonces, reformulamos el problema de encontrar la solución al problema de programación lineal como el problema de encontrar una gráfica que represente un conjunto de variables duales óptimas. Para ello verificamos que existe al menos una gráfica óptima debe satisfacer algunas propiedades, como ser un árbol y que todos los nodos deben estar conectados. Con base en estas propiedades, proponemos la versión general del algoritmo que encuentra la gráfica óptima:

Entrada: Un problema de distribución $A \in \mathbb{M}_{mn}$
Salida: La mayor solución igualitaria X

1. Encontrar una gráfica factible completa para A con vectores duales u y v.
2. Suponga que $z = w = \sum_{i \in M} v_i$
3. Encontrar el valor de la variables primales X. Si X es una solución primal factible, el algoritmo termina.
4. Sino, encontrar una nueva gráfica completa factible y regresar al Paso 2

Iniciamos el algoritmo encontrando una gráfica que represente un conjunto de variables duales factibles. Enseguida suponemos que dichas variables son las óptimas, por lo que debe cumplirse que el valor de la función objetivo de los problemas primal y dual deben coincidir. La estructura del árbol permite encontrar de manera relativamente sencilla los valores de las variables primales asociadas con las variables duales propuestas como óptimas: proponemos un algoritmo para encontrarlas, siendo posible que algunas de ellas tengan valores negativos. Esto nos indica que las variables primales no son factibles y por lo tanto, las variables propuestas duales no son óptimas. En el cuarto paso del algoritmo proponemos una manera de cómo cambiar la gráfica para que represente un nuevo conjunto de variables duales factibles, y regresemos a probar si estas nuevas variables son las óptimas, y así sucesivamente hasta haber encontrado variables primales factibles. Las explicaciones referentes a estos pasos del algoritmo pueden consultarse en las secciones 6.4.1, 6.4.2 y 6.4.3. Finalmente verificamos que el algoritmo propuesto converge hacia una solución óptima.

Los resultados que se obtuvieron en este capítulo se encuentran en el proceso de arbitraje para su publicación en la revista *Operations Research: An International Journal*.

El objetivo general que motiva el presente trabajo de investigación es contribuir al desarrollo de problemas de teoría de juegos en donde las gráficas juegan un papel tanto en la modelación del problema como en su solución. De entre los objetivos específicos pueden destacarse los siguientes:

- Definir nuevos juegos cooperativos en donde las relaciones de interacción entre los agentes estén representadas mediante gráficas. Así mismo, encontrar soluciones para estos juegos y estudiar propiedades de dichas soluciones.
- Continuar el estudio de situaciones cooperativas en donde se tienen estructuras de cooperación representadas por gráficas, proporcionando axiomas y propiedades alternativas a las soluciones ya existentes o bien proponiendo nuevas características. En la medida de lo posible, presentar soluciones caracterizadas unívocamente.
- Estudiar y resolver problemas en donde las gráficas sean herramienta importante para el planteamiento de las soluciones, en particular los problemas relacionados con enrutamientos y repartos de bienes entre agentes.

Capítulo 1

Conceptos básicos de juegos cooperativos

Supóngase la siguiente situación: Ana y Beatriz pretenden guardar sus ahorros, \$80000 y \$60000 respectivamente, en cuentas bancarias; la tasa de interés ofrecida por el banco Z donde lo guardarán es de $10\,\%$ para cantidades menores a \$100000 y del $15\,\%$ para aquellas mayores o iguales a \$100000. Si cada una de ellas deposita su dinero por separado sólo obtienen, respectivamente, \$8000 y \$6000; pero si deciden abrir una única cuenta entre las dos juntando el capital con el que cuentan, obtendrían \$21000, lo cual es mayor a lo obtenido si actúan individualmente. Conclusión: la cooperación resulta conveniente en muchas ocasiones para quienes la llevan a cabo. Pero eso plantea un nuevo tipo de problema: encontrar la manera en la que se repartirá la utilidad obtenida gracias a la cooperación.

Es este capítulo primeramente se abordan conceptos básicos acerca de la teoría de juegos cooperativos, haciendo especial énfasis en los juegos de unanimidad, ampliamente utilizados en demostraciones de teoremas y axiomatizaciones de valores que cumplen la propiedad de linealidad; enseguida, se tratan las explicaciones y caracterizaciones de algunos de los principales valores conocidos dentro de los juegos cooperativos. El objetivo de tratar estos temas es preparar el campo para abarcar el estudio de juegos cooperativos donde se encuentran involucrados de alguna manera las gráficas para representar relaciones entre los jugadores.

1.1. Conceptos básicos

Sea un conjunto $N = \{1, 2, ..., n\}$ de jugadores. A todo $S \subseteq N$ tal que S sea no vacío se le llamará *coalición*. Denótese por $\mathcal{C}$ al conjunto potencia de N, esto es, al conjunto de subconjuntos de N y la idea es que $\mathcal{C}$ represente a todas las coaliciones que se puedan formar.

Definición 1.1. *Un juego cooperativo de n jugadores será una pareja* (N, ν) *en donde* N *es el conjunto de jugadores y* ν *una función real sobre los subconjuntos de* N *tal que* $\nu(\emptyset) = 0$

$$\nu : \mathcal{C} \to \mathbb{R}.$$

Si se tiene una coalición $S \in \mathcal{C}$, la interpretación que se le da al juego es que los jugadores pertenecientes a S juegan unidos, y como tal, consiguen una valía conjunta $\nu(S)$. Como resultado del juego, se tiene un vector de pagos $x \in \mathbb{R}^n$, en donde x_i representa el valor asignado al jugador i en el correspondiente juego. De ahí que el problema principal de los juegos cooperativos sea encontrar un vector de pagos que sea *justo* dadas las condiciones en que se llevó a cabo el juego.

Definición 1.2. *Un vector de pagos* x *es un elemento de* $\mathbb{R}^n$ *cuya i-ésima coordenada representa el pago correspondiente en el juego cooperativo al i-ésimo jugador. Se denotará como* $x(S)$ *a*

$$x(S) = \sum_{i \in S} x_i \qquad \forall\ S \subseteq N.$$

Se dice que un vector de pagos tiene *racionalidad individual* sí y sólo si $x_i \geq \nu(\{i\})$ para todo $i \in N$. A su vez, se dice que la racionalidad es *de grupo* sí y sólo si $x(S) \geq \nu(S)$ para toda $S \in \mathcal{C}$. Así mismo, se dirá que un vector de pagos x es *eficiente* sí y sólo si $x(N) = \nu(N)$. Entonces, con un vector de pagos individualmente racional, cada jugador obtiene por lo menos lo que está garantizado si juega solo, mientras que en un vector con racionalidad de grupo, cada una de las coaliciones consigue al menos lo que ella garantiza si todos sus miembros jugaran como una sóla unidad.

A continuación se muestran definiciones concernientes a diversas modalidades de juegos cooperativos:

Definición 1.3. *Se dice que un juego* (N, ν) *es superaditivo sí y sólo si* $\nu(S \cup T) \geq \nu(S) + \nu(T)$ *siempre que* $S \cap T = \emptyset$*, con* $S, T \subset N$

Definición 1.4. *Se dice que un juego es simple sí y sólo si* $\nu(S) = 0$ *ó 1 para toda* $S \subset N$ *y* $\nu(N) = 1$.

Definición 1.5. *Se dirá que un jugador i es nulo en* ν *sí y sólo si* $\nu(S \cup \{i\}) = \nu(S)$ *para toda* $S \subseteq N \backslash \{i\}$.

Otro concepto que será importante definir será el de *permutación de jugadores.* Denótese como

$$\Theta(N) = \{\theta : N \to N \mid \theta \text{ es biyectiva}\}.$$

Puede verse que $\Theta(N)$ contiene a todos los órdenes que son posibles definir sobre el conjunto N, o sea, a todas las permutaciones de los n jugadores. De tal forma, $\theta \in \Theta(N)$ se interpretará como un intercambio de papeles en el juego. Esto es, el jugador i pasará a tomar el papel del jugador $\theta(i)$. Así mismo, se denotará

$$\theta(S) = \{\theta(i) \mid i \in S\}.$$

1.2. Juegos de unanimidad

Tomése a G como el conjunto de todos los juegos superaditivos de n jugadores. Es fácil ver que G es un espacio vectorial sobre el campo de los números reales si se definen la suma y el producto escalar sobre G de la siguiente manera:

1. $(\nu + \omega)(S) = \nu(S) + \omega(S)$ para todo $\nu, \omega \in G$.
2. $(c\nu)(S) = c\nu(S)$ para todo $\nu \in G$ y $c \in \mathbb{R}$.

Para $S \subseteq N$ y $S \neq \emptyset$ el *juego de unanimidad* (N, u_S) se define como

$$u_S(T) = \begin{cases} 1, & \text{si } S \subseteq T \\ 0, & \text{en otro caso} \end{cases}$$

para todo $T \subseteq N$.

Los juegos de unanimidad $\{(N, u_S) \mid S \in 2^N \backslash \{\emptyset\}\}$ forman una base para los juegos cooperativos con n jugadores, en especial para G. La única descomposición lineal de la función característica v en términos de juegos de unanimidad viene dada por

$$v = \sum_{S \in 2^N \backslash \{\emptyset\}} c_S u_S$$

siendo $\{c_S\}$ números reales que representan los coeficientes de la combinación lineal, conocidos como *coordenadas de unanimidad* o *coeficientes de Harsanyi*, los cuales vienen dados por

$$c_S = \sum_{T \subseteq S} (-1)^{|S|-|T|} v(T)$$

donde se representa a la cardinalidad de una coalición $S \subseteq N$ como $|S|$.

Existe otro punto de vista para ver a las coordenadas de unanimidad. Defínase la aplicación $\delta : \Omega \to \mathbb{R}$, donde $\Omega \subset 2^N$ con $\{\emptyset\} \in \Omega$, de la siguiente manera:

$$\delta(S) = \begin{cases} 0 & \text{si } S = \{\emptyset\} \\ v(S) - \sum_{T \subsetneq S} \delta(T) & \text{si } S \in \Omega \backslash \emptyset. \end{cases} \tag{1.1}$$

Puede interpretarse a $\delta(S)$ como los dividendos adicionales que la coalición S obtiene en caso de que ésta se forme, tomando en cuenta que todas las subcoaliciones de S ya han sido formadas. Con ello, se tiene que los coeficientes de la combinación lineal de un juego (N, v) utilizando como base a los juegos de unanimidad son precisamente estos dividendos, esto es

$$c_S = \delta(S); \text{ y con esto se tiene } v = \sum_{S \in 2^N \backslash \{\emptyset\}} \delta(S) u_S$$

1.3. Valores para juegos cooperativos

Intuitivamente, una solución al juego (N, ν) puede verse como un vector de pagos, o alternativamente, un conjunto de vectores de pago asociados al juego (N, ν). El problema de encontrar soluciones puede enfocarse tomando a G como al conjunto de todos los juegos superaditivos de n jugadores y definiendo un operador $\varphi : G \to \mathbb{R}^n$ que resuelva a todos los juegos de G; ahora sólamente bastará con definir *de buena manera* al operador φ, añadiéndole propiedades *deseables* (las cuales se considerarán como axiomas) y demostrar que existe un único operador que posee dichas propiedades.

Esta metodología convierte al problema de repartir el monto que consigue cada coalición al de si los jugadores aceptan o no los supuestos y características de la solución, y desde luego, los jugadores deben aceptar los resultados que de ellos se desprenden.

Con el fin de simplificar la notación, se dirá en lo sucesivo que $\varphi(\nu) = (\varphi_i(N, \nu))_{i \in N}$ es una solución asociada al juego (N, ν). De igual forma, cuando se tenga un juego (N, ν) fijo y un subconjunto $S \subseteq N$, se escribirá $\varphi(\nu_S)$ para denotar $\varphi(S, \nu_S)$, en donde (S, ν_S) es el subjuego obtenido restringiendo a ν a los subconjuntos de S. Así mismo, se utilizarán las correspondientes letras minúsculas para referirse a la cardinalidad de las coaliciones (salvo en algunas ocasiones), las cuales se representarán con letras mayúsculas.

Axioma 1.1. (Aditividad). Para todo (N, ν) y $(N, \omega) \in G$

$$\varphi(\nu + \omega) = \varphi(\nu) + \varphi(\omega)$$

en donde el juego suma $(N, \nu + \omega)$ *se define en la Sección 1.2.*

Este axioma puede interpretarse de la siguiente manera: la manera de repartir costos en dos procesos de negociación no cambia si se hace de manera conjunta o separadamente. Entonces, resulta natural pedir que lo que obtenga cada jugador en el juego suma sea exactamente la suma de lo que se obtenga en cada uno de los juegos individuales.

Para introducir el siguiente axioma se necesitan algunas definiciones. Para cada par $(\theta, \nu) \in \Theta \times G$ se define un nuevo juego $\theta^*\nu$ como

$$(\theta^*\nu)(S) = \nu(\theta^{-1}(S)).$$

Esto es, lo que se quiere es que $\theta^*\nu$ represente un nuevo juego en donde los jugadores hayan cambiado papeles de acuerdo a la permutación θ; entonces, como los jugadores en $\theta(S)$ suplantan a los que están en S, el monto que puede conseguir $\theta(S)$ en $\theta^*\nu$ debe ser el mismo que podía conseguir S en ν. De la misma manera, para cada pareja $(\theta, x) \in \Theta \times \mathbb{R}^n$ defínase un nuevo vector $\theta^*x \in \mathbb{R}^n$, donde su i-ésima coordenada está dada por

$$(\theta^*x)_i = x_{\theta(i)}.$$

Esto indica que el pago que recibe el jugador $\theta(i)$ con $\theta^* x$ es el mismo que recibía i con x.

Axioma 1.2. (Simetría). Para todo $(\theta, \nu) \in \Theta \times G$, se tiene

$$\varphi(\theta^* \nu) = \theta^* \varphi(\nu).$$

En resumen, lo que pide este axioma es que la solución no dependa de las características personales del jugador. Por lo tanto, si los jugadores cambian roles durante el juego y cada coalición logra obtener exactamente la misma valía que la coalición a la que suplanta, entonces cada jugador en el nuevo juego debe obtener exactamente lo mismo que el jugador al cual suplanta.

Axioma 1.3. (Eficiencia). Para todo $(N, \nu) \in G$ se tiene

$$\sum_{i \in N} \varphi_i(\nu) = \nu(N).$$

Lo que esta axioma está pidiendo que se cumpla es que el monto que se reparte entre todos los jugadores sea exactamente el monto que puede conseguir la gran coalición.

Axioma 1.4. (Nulidad). Si i es un jugador nulo en (N, ν), entonces

$$\varphi_i(\nu) = 0.$$

Este axioma establece que a alguien quien funge únicamente como observador dentro del juego no debe corresponderle pago alguno.

Teorema 1. *Existe un único valor φ sobre G, conocido como Valor de Shapley, que satisface los cuatro axiomas anteriores y que viene dado por la siguiente expresión:*

$$\varphi_i(\nu) = \sum_{S \subseteq N \backslash \{i\}} \frac{s!(n-s-1)!}{n!} \big[\nu(S \cup \{i\}) - \nu(S)\big] \qquad \forall\ i \in N. \tag{1.2}$$

Para comprender mejor el significado del valor de Shapley, considérese la siguiente metodología: elíjase la cardinalidad de una coalición que no contenga al jugador i-ésimo de acuerdo a una distribución uniforme sobre el conjunto $\{0, \cdots, n-1\}$ (puede hacerse de n maneras), para luego elegir de manera aleatoria a una coalición $S \subseteq N \backslash \{i\}$ con la cardinalidad dada, también de acuerdo a una distribución uniforme sobre las coaliciones disponibles (es posible hacerlo de $\binom{n-1}{s}$ formas). En base al proceso anterior, si se le da al jugador i la contribución marginal que aporta al incorporarse a S, es decir, $\nu(S \cup \{i\}) - \nu(S)$, entonces el pago esperado para el i-ésimo jugador será el valor de Shapley.

También es posible ver al valor de Shapley según la siguiente expresión:

$$\varphi_i(\nu) = \frac{1}{n!} \sum_{\mathcal{R}} (\nu(\mathcal{P}_i^{\mathcal{R}} \cup \{i\}) - \nu(\mathcal{P}_i^{\mathcal{R}})) \tag{1.3}$$

donde $\mathcal{P}_i^{\mathcal{R}}$ es el conjunto de todos los jugadores que preceden al jugador i en el orden $\mathcal{R}$. Con esta expresión, se elige al azar un orden $\mathcal{R}$ de N con una distribución uniforme sobre los $n!$ órdenes posibles y si se le da al jugador i la utilidad marginal que aporta cuando se incorpora a los jugadores que lo preceden, $\nu(\mathcal{P}_i^{\mathcal{R}} \cup \{i\}) - \nu(\mathcal{P}_i^{\mathcal{R}})$, entonces el pago esperado que obtiene es el valor de Shapley.

1.4. Juegos cooperativos y gráficas

En las secciones anteriores hemos tratado con situaciones en donde la cooperación se da de manera total entre los jugadores (lo que conlleva a la formación de la gran coalición) y se considera que ellos pueden formar subgrupos de cooperación (las coaliciones) donde el comportamiento de la coalición es absoluto: todos cooperan. En muchas situaciones esta modelación no es posible de aplicar: por ejemplo, puede ser que un jugador sirva de intermediario para lograr la cooperación o que la interacción entre algunos subconjuntos de jugadores no exista, lo que conlleva la formación de las llamadas *estructuras de cooperación*. Estas estructuras generalmente se representan mediante una gráfica, donde los jugadores se representan mediante nodos y las relaciones de cooperación se indican mediante las aristas. La gráfica puede ser dirigida o no dirigida, lo que puede interpretarse como que la cooperación no necesariamente se da de manera bidireccional. Un ejemplo de estructura de cooperación se da en la siguiente figura:

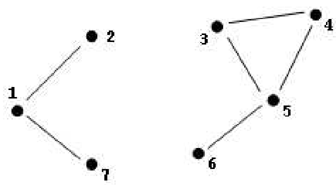

Figura 1.1: Ejemplo de una estructura de cooperación.

De acuerdo con la estructura de la figura anterior, la cooperación entre los agentes 2 y 7 se da teniendo al jugador 1 como intermediario. Así, si se decide formar la coalición $\{2, 7\}$, dado que no existe cooperación entre ellos, tiene sentido considerar que $v(\{2, 7\}) = v(\{2\}) + v(\{7\})$ para algún juego cooperativo (N, v).

Los juegos con estructura de cooperación fueron estudiados primeramente por Myerson [27], y él realiza un estudio axiomático para encontrar soluciones para juegos con estas características. Uno de los resultados más conocidos en este tema es el llamado *valor de Myerson*, y reconociendo su importancia, presentamos la axiomatización de éste. Para ello, se considera que las relaciones de cooperación están dadas por una gráfica no dirigida expresada como un subconjunto de la gráfica completa $g^N = \{i : j \mid i, j \in N, i \neq j\}$ y que es así como se llevará a cabo el juego (N, v). El conjunto de todas las posibles gráficas no dirigidas se representa como $GR = \{g \mid g \subseteq g^N\}$.

Se denotará como

$$S/g := \{\{i \mid i \text{ y } j \text{ están conectados en } g\} \mid j \in S\ \}$$

a los subconjuntos de jugadores en S que están conectados de acuerdo a $g \in GR$.

Axioma 1.5. (Regla de asignación) *Para un juego cooperativo* (N, v) *con estructura de cooperación* g*, se dirá que una solución* $\varphi : GR \to \mathbb{R}^n$ *es una regla de asignación si*

$$\forall S \in N/g, \quad \sum_{i \in S} \varphi_i(g) = v(S).$$

Este axioma considera que, en una regla de asignación, cada componente en la gráfica reparte su valía total entre los nodos que la forman.

Axioma 1.6. (Justicia) *Para un juego cooperativo* (N, v) *con estructura de cooperación* g*, se dirá que una solución* $\varphi : GR \to \mathbb{R}^n$ *es justa si*

$$\forall i : j \in g, \quad \varphi_i(g) - \varphi_i(g \backslash i : j) = \varphi_j(g) - \varphi_j(g \backslash i : j).$$

El axioma de justicia establece que cuando se rompe un acuerdo de cooperación entre dos jugadores, ambos se ven beneficiados o perjudicados de la misma manera, en el sentido de que el monto que pierden o ganan con esta ruptura es igual para ambos.

Para establecer el valor de Myerson necesitamos una definición más. Dado un juego en forma de función característica (N, v) y una estructura de cooperación g, definimos el juego $(N, v/g)$ como

$$\forall S \subseteq N \quad (v/g)(S) = \sum_{T \in S/g} v(T).$$

Este juego puede interpretarse como si se tomaran en cuenta únicamente la cooperación existente entre los nodos de S de acuerdo con g, en lugar de considerar que todos ellos se encuentran cooperando. Con ello, presentamos el valor de Myerson:

Teorema 2. *Dado un juego* (N, v)*, existe una única regla de asignación justa* φ*. Aún más, dicha regla puede escribirse como*

$$\varphi(g) = Sh(v/g), \qquad \forall g \in GR$$

donde Sh es el valor de Shapley.

Los gráficas dirigidas se utilizan regularmente para formar juegos cooperativos donde la función característica se define sobre las diferentes gráficas que pueden formarse. Esto es, se considera que cada posible configuración de la gráfica tiene asociado un valor, lo que se interpreta como la valía que obtienen los jugadores cuando se encuentran organizados de acuerdo a esa gráfica. Esto dio lugar a los llamados *juegos en redes* (*network games*) estudiados principalmente por Jackson [17], y donde se han considerado variantes como los mecanismos de formación de redes, otros conceptos de soluciones en teoría de juegos como el núcleo, nucleolo y conjuntos estables así como sus propiedades en problemas diversos, como la modelación del tráfico.

A su vez, se han derivado tipos de juegos cooperativos específicos dependiendo del problema y del tipo de gráfica: así se tienen los *juegos de árbol con mínimo costo* [21], *juegos con estructuras permutativas* [8] o los *juegos en gráficas libres de ciclos* [16]. Algunos ejemplos de estos juegos se muestran en la Figura 1.2

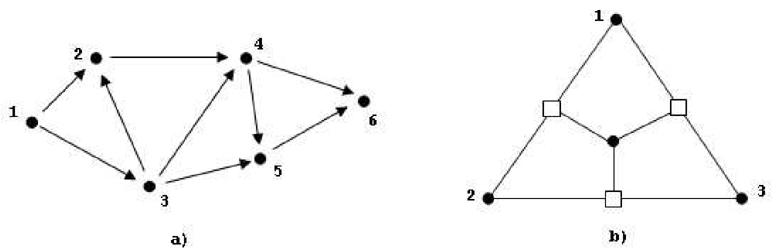

Figura 1.2: Gráficas utilizadas en juegos cooperativos. En *a)* se tiene una gráfica dirigida utilizada en problemas de transporte y en juegos de redes. En *b)*, se tiene una estructura utilizada en juegos de árbol de mínimo costo.

Cae fuera del contexto de esta tesis presentar un análisis detallado de *todos* los tipos de juegos cooperativos que puedan tratarse cuando se tiene involucrada una estructura gráfica en el modelo. Como se menciona en la introducción de este trabajo, nosotros trabajamos con un tipo especial de juegos redes donde consideramos a los ciclos de una digráfica como las organizaciones que pueden tomar los jugadores y también con las gráficas libres de ciclos. Las demás aportaciones son problemas específicos donde la unión de las gráficas con los juegos cooperativos (junto con otras técnicas, como la programación lineal) resultó en la herramienta que nos permitió presentar una solución a los problemas.

Capítulo 2

Juegos cooperativos en los ciclos de digráficas

En este capítulo introducimos un tipo especial de juegos cooperativos donde la función característica se define sobre los ciclos de una digráfica. Presentamos un modelo matemático de esta situación y una solución caracterizada axiomáticamente para este tipo de juegos. Esta solución se presenta como un método para medir la importancia de los nodos de una digráfica cuando el factor de interés son los ciclos que ellos pueden formar. Además, dicha solución está relacionada con el valor de Shapley de un cierto juego en forma de función característica. También presentamos una extensión del modelo añadiendo la organización de los nodos en estructuras coalicionales y mostramos soluciones r-eficientes para estos juegos, donde se considera que el monto a repartir es un número real r. Mostramos soluciones axiomáticas para ambos casos.

Como se mencionó anteriormente, los resultados obtenidos en el presente capítulo se encuentran aceptados para su publicación en la revista *International Game Theory Review*.

2.1. Introducción

Existen problemas relacionados con los caminos que pueden formarse en una digráfica en los cuales es necesario cuantificar la importancia que tienen los nodos en dichos caminos para poder determinar la contribución de cada uno de ellos. Dada esta importancia, es posible realizar comparaciones entre los nodos, establecer un *ranking* o simplemente determinar su importancia dentro de algún proceso. En este capítulo restringimos los caminos de interés a únicamente ciclos. Esto lo hacemos basándonos en el problema de *ciclos de razón mínima costo-tiempo* formulado por Dantzig en Lawler [23]: un barco mercante puede escoger los puertos que visitará en su ruta y el orden en que lo hará; el viaje del puerto i al puerto j le proporciona un beneficio de a_{ij} unidades pero se toma un tiempo t_{ij} en realizarlo. Dantzig plantea el problema de encontrar una ruta óptima que minimice la razón costo-tiempo, y él lo resuelve demostrando que dicha ruta es un ciclo y proporciona un algoritmo para encontrarlo. Nosotros estamos proponiendo un método para medir la importancia que cada puerto tiene para el barco mercante basándonos en técnicas de juegos cooperativos.

Adicionalmente, consideremos un par de problemas en donde tener una medida de la importancia de los agentes involucrados puede ayudar a encontrar una solución. El primer problema se refiere a la *redistribución en una cadena de tiendas*. En algunas cadenas de tiendas (como librerías o farmacias) es necesario hacer una redistribución de los productos entre las diferentes sucursales. En el momento en que los requerimientos alcanzan cierto nivel, un repartidor sale de la sucursal para hacer la redistribución de acuerdo con las prioridades de los requerimientos. El costo de estas redistribuciones necesita repartirse entre las diferentes sucursales al final de un cierto período de tiempo. Al segundo problema nos referiremos como el *problema de manufactura*. Una industria manufacturera recibe órdenes de manera continua y son procesadas de acuerdo al orden de arribo. Las órdenes se procesan por lotes y éstos son heterogéneos en volumen. La máquina involucrada en el proceso necesita ser ajustada antes de iniciar un proceso, y el tiempo gastado en este ajuste depende directamente del proceso anterior y el proceso que se ejecutará. Este tiempo ocioso representa un costo para la industria, y es necesario distribuirlo entre las diferentes órdenes. Además, la industria no conoce el orden de arribo de las órdenes. Este problema es una versión simplificada de un problema real proveniente de la industria zapatera de León, Guanajuato.

La estructura de este capítulo es de la siguiente manera: primero presentaremos el modelo propuesto así como la notación que usaremos en su desarrollo. Luego, propondremos una solución axiomática basándonos en la caracterización de Shapley [35] de una solución para juegos cooperativos en forma de función característica. Como una segunda modificación, consideraremos que el monto a dividir entre los jugadores (el costo de mantener el proceso detenido, en el ejemplo de la industria zapatera) es un monto fijo. Luego, adaptaremos el modelo considerando la organización de los jugadores en estructuras coalicionales.

2.2. Notación y preliminares

Sea $N = \{1, \ldots, n\}$ un conjunto finito de nodos. La gráfica dirigida completa con conjunto de nodos N, o simplemente una *digráfica*, se representa por la pareja (N, E^N) donde $E^N = N \times N$ es el conjunto de aristas. Para $T \subseteq E^N$, el conjunto $n(T)$ representa el conjunto de nodos que forman las aristas en T. Nótese que $n(T) \subseteq N$ para todo $T \subseteq E^N$, T es un conjunto de pares ordenados y $(n(T), T)$ puede interpretarse como una subdigráfica con conjunto de nodos $n(T)$. Diremos que $T \subseteq E^N$ es una *camino dirigido* si para una secuencia de nodos $\{x_i\}_{i=0}^{k}$ se cumple que $T = \{(x_i, x_{i+1})\}_{i=0}^{k-1}$. También diremos que $T \subseteq E^N$

es un *lazo* si $T = \{(i, i)\}$ con $i \in N$. Con estos conceptos, un camino dirigido T se denotará como un *ciclo* si $x_0 = x_k$ y $x_i \neq x_j$ en otro caso. Consideraremos al conjunto vacío como un ciclo, el ciclo vacío.

Denotamos al conjunto de ciclos en una digráfica completa con conjunto de nodos N como $\mathcal{C}(N) := \{T \subseteq E^N \mid T \text{ es un ciclo}\}$. Con ello, definimos un *juego cooperativo en los ciclos de una digráfica* como una función $q : \mathcal{C}(N) \to \mathbb{R}$ con $q(\emptyset) = 0$. Para utilizar una notación más simplificada, denotaremos a q como un c-juego. Para cada $T \in \mathcal{C}(N)$, $q(T)$ representa el beneficio que representa el haber visitado los nodos en $n(T)$ en el orden indicado por T. El conjunto de c-juegos $F_g := \{q \mid q : \mathcal{C}(N) \to \mathbb{R} \text{ con } q(\emptyset) = 0\}$ es un espacio vectorial con las operaciones de suma y multiplicación por un escalar definidas de la manera usual: para $q_1, q_2 \in F_g$ y $\lambda \in \mathbb{R}$, $(q_1 + q_2)(T) := q_1(T) + q_2(T)$ y $(\lambda q_1)(T) := \lambda q_1(T)$ para todo $T \in \mathcal{C}(N)$. La longitud de un ciclo $T \in \mathcal{C}(N)$ estará dada por el número de nodos en el ciclo, y se denotará como $|T|$. Para $S \subseteq N$, el conjunto $\mathcal{C}_S(N) := \{T \in \mathcal{C}(N) \mid n(T) = S\}$ representa el conjunto de ciclos que visitan únicamente los nodos en S.

Una solución para c-juegos es una función $\varphi : F_g \to \mathbb{R}^n$, donde $\varphi_i(q)$ representa la importancia del nodo i dentro del c-juego $q \in F_g$.

En el ejemplo relacionado con la distribución en una cadena de tiendas, cada sucursal puede considerarse como un nodo. Podemos formar una digráfica completa g que represente el conjunto de posibles rutas de comunicación entre las diferentes sucursales. Como estamos considerando que cada posible ruta puede formarse, y además, como éstas son cíclicas, podemos crear un c-juego q, donde $q(C)$ denota el costo debido a la redistribución representada por el ciclo $C \in C(g)$. Una solución $\varphi_i(q)$ indicará cómo cada sucursal i contribuye al costo total.

En el problema de manufactura, los diferentes tipos de órdenes pueden representarse por nodos. En aras de ser justos, consideraremos que después de procesar el último lote, la máquina se ajustará como si el primer lote fuera el siguiente a ser procesado. Así, consideramos que los lotes son procesados de manera cíclica. Con ello, podemos definir un c-juego q donde $q(C)$ denota el costo resultante por el tiempo ocioso resultante del procesamiento de los lotes de acuerdo con el orden dado por el ciclo C. Así, una solución $\varphi_i(q)$ indica la contribución por procesar el lote i al costo total debido al tiempo ocioso.

2.3. Caracterización

Ahora presentamos la caracterización de una solución $\varphi : F_g \to \mathbb{R}^n$.

Axioma 2.1. (Linealidad) *Una solución φ es una solución lineal si*

$$\varphi(\lambda_1 q_1 + \lambda_2 q_2) = \lambda_1 \varphi(q_1) + \lambda_2 \varphi(q_2)$$

para $q_1, q_2 \in F_g$ *y* $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$.

Axioma 2.2. (Simetría) *Una solución* φ *es simétrica si*

$$\varphi_i(q) = \varphi_{\theta(i)}(q \circ \theta) \qquad \forall i \in N$$

donde $(q \circ \theta)(T) = q(\theta^{-1}(T))$ *y* $\theta^{-1}(T) = \{(\theta^{-1}(x),\ \theta^{-1}(y)) \mid (x, y) \in T\}$ *para todo* $T \in \mathcal{C}(N)$, $\theta \in S_n$, $q \in F_g$ *y donde* S_n *es el grupo de permutaciones de* N.

Los axiomas anteriores tienen la misma interpretación que para juegos en forma de función característica.

Sea $T \in \mathcal{C}(N)$ un ciclo con longitud mayor o igual a 2, $i, x, y \in n(T)$, con $(x, i), (i, y) \in T$. Entonces, definimos

$$T_{-i} := T \backslash \{(x, i), (i, y)\} \cup \{(x, y)\}.$$

Más aún, para cada $T \in \mathcal{C}(N)$ tal que T es un lazo y $i \in n(T)$, $T_{-i} = \emptyset$. T_{-i} representa el ciclo que se obtiene después de remover el nodo i del ciclo T y preservando el orden de visita de T. También, denotamos por T_S al ciclo obtenido después de remover los nodos en $n(T)\backslash S$ de T.

Decimos que $i \in N$ es un *nodo nulo* en un c-juego q si $q(T) = q(T_{-i})$ para todo $T \in \mathcal{C}(N)$ tal que $i \in n(T)$.

Axioma 2.3. (Nulidad) *Una solución* φ *es una solución nula si*

$$\varphi_i(q) = 0$$

para cada nodo nulo $i \in N$.

De acuerdo al Axioma 2.3, si un nodo $i \in N$ no contribuye de ninguna manera a cualquier ciclo, entonces su importancia debe ser igual a cero.

Dado un c-juego $q \in F_g$, definimos *la valía promedio en* q *de los nodos en* $S \subseteq N$, $\eta(q, S)$, como

$$\eta(q, S) := \frac{1}{|\mathcal{C}_S(N)|} \sum_{T \in \mathcal{C}_S(N)} q(T)$$

y representa la valía promedio que el subconjunto $S \subseteq N$ puede obtener cuando se visitan sus nodos únicamente y esto se hace de cualquier manera posible.

Axioma 2.4. (Eficiencia promedio) *Una solución* φ *es una solución eficiente promedio si*

$$\sum_{i \in N} \varphi_i(q) = \eta(q, N)$$

para todo $q \in F_g$.

Este axioma está estableciendo un monto a repartir: éste debe ser la valía promedio de los ciclos que visitan a todos los nodos. Si queremos visitar todos los nodos en forma cíclica, existen $(n-1)!$ formas de hacerlo. En promedio, formar este ciclo representa una valía de $\eta(q, N)$. Si hacemos una comparación con los juegos en forma de función característica, en ellos existe una única forma donde todos los agentes puedan cooperar: la gran coalición. En c-juegos, la cooperación de todos los agentes puede representarse de $(n-1)!$ formas.

Otras propuestas de montos a repartir pueden surgir de manera natural, aunque algunas de ellas tienen serias desventajas. Por ejemplo, consideremos que queremos repartir entre los nodos la máxima valía de un ciclo que visite a todos los nodos. Esto es, podríamos requerir una solución $\varphi : F_g \to \mathbb{R}^n$ tal que

$$\sum_{i\in N} \varphi_i(q) = q(C^*), \quad \text{donde } C^* = \operatorname*{argmax}_{C\in\mathcal{C}_N(N)} \{q(C)\}$$

para todo $q \in F_g$. Pero no existe ninguna solución que satisfaga este tipo de eficiencia y el axioma de simetría para todo c-juego q porque

$$\sum_{i\in N} \varphi_i(q\circ\theta) = (q\circ\theta)(C^*) = q(\theta^{-1}(C^*))$$

y

$$\sum_{i\in N} \varphi_i(q\circ\theta) = \sum_{i\in N} \varphi_i(q) = q(C^*).$$

Teorema 3. *Existe una única solución lineal, simétrica, nula y eficiente promedio $\phi : F_g \to \mathbb{R}^n$ para c-juegos. Más aún, esta solución está dada por*

$$\phi_i(q) = \sum_{\substack{T\in\mathcal{C}(N)\\ n(T)\ni i}} \frac{(n-|T|)!}{n!}[q(T) - q(T_{-i})], \qquad \forall\ i \in N. \tag{2.1}$$

Para la prueba del teorema anterior definimos, para cada $T \in \mathcal{C}(N)$, un c-juego estándar $\mathcal{U}_T$ como $\mathcal{U}_T(S) = 1$ si $T = S$ y cero en otro caso, para cada $S \in \mathcal{C}(N)$. En el c-juego estándar $\mathcal{U}_T$ existe un único ciclo con valía diferente de cero, el ciclo T.

Lema 1. *Sean S, T ciclos con $|S| = |T|$ y $\phi : F_g \to \mathbb{R}^n$ una solución simétrica; entonces*

$$\phi_i(\mathcal{U}_S) = \phi_j(\mathcal{U}_T)$$

para todo $i \in n(S), j \in n(T)$. Esta igualdad también se preserva si $i \notin n(S), j \notin n(T)$.

Demostración. Sean $i \in n(S)$, $j \in n(T)$. Escójase $\theta \in S_n$ tal que $\theta(i) = j$ y $\theta(S) = T$. Dado que $\mathcal{U}_T = \mathcal{U}_{\theta(S)} = \mathcal{U}_S \circ \theta$ y por el axioma de simetría, tenemos

$$\phi_i(\mathcal{U}_S) = \phi_{\theta^{-1}(j)}(\mathcal{U}_S) = \phi_j(\mathcal{U}_S\circ\theta) = \phi_j(\mathcal{U}_T).$$

De manera similar, podemos concluir que $\phi_i(\mathcal{U}_S) = \phi_j(\mathcal{U}_T)$ si $|S| = |T|$, $i \notin n(S), j \notin n(T)$. □

Prueba del teorema. Para probar la existencia de la solución necesitamos verificar que (2.1) satisface los axiomas mencionados. La verificación de los axiomas de linealidad, simetría y nulidad puede hacerse de una manera directa, por lo que las omitimos. Entonces, mostraremos que (2.1) satisface el axioma de eficiencia promedio. Podemos escribir

$$\sum_{i\in N}\phi_i(q)=\sum_{i\in N}\sum_{\substack{T\in\mathcal{C}(N)\\ n(T)\ni i}}\frac{(n-|T|)!}{n!}q(T)-\sum_{i\in N}\sum_{\substack{T\in\mathcal{C}(N)\\ n(T)\ni i}}\frac{(n-|T|)!}{n!}q(T_{-i}). \tag{2.2}$$

Del primer término de la ecuación anterior tenemos

$$\sum_{i\in N}\sum_{\substack{T\in\mathcal{C}(N)\\ n(T)\ni i}}\frac{(n-|T|)!}{n!}q(T)=\sum_{T\in\mathcal{C}(N)}\frac{|T|(n-|T|)!}{n!}q(T)$$

y para el segundo término tenemos

$$\begin{aligned}\sum_{i\in N}\sum_{\substack{T\in\mathcal{C}(N)\\ n(T)\ni i}}\frac{(n-|T|)!}{n!}q(T_{-i}) &= \sum_{i\in N}\sum_{\substack{T\in\mathcal{C}(N)\\ n(T)\not\ni i}}\frac{|T|(n-|T|-1)!}{n!}q(T)\\ &= \sum_{\substack{T\in\mathcal{C}(N)\\ n(T)\neq N}}\frac{|T|(n-|T|)!}{n!}q(T).\end{aligned}$$

Ahora, sustituyendo en (2.2) tenemos que

$$\sum_{i\in N}\phi_i(q)=\frac{1}{(n-1)!}\sum_{\substack{T\in\mathcal{C}(N)\\ n(T)=N}}q(T)=\eta(q,N)$$

y esto prueba que (2.1) en una solución eficiente promedio.

Ahora necesitamos probar unicidad. Lo haremos adaptando el procedimiento utilizado por Ruiz, Valenciano y Zarzuelo en [34] a nuestro contexto para obtener una familia de soluciones lineales, simétricas y eficientes promedio para c-juegos. Consideremos una solución $\phi: F_g\to\mathbb{R}^n$ que satisfaga los axiomas mencionados en el enunciado del teorema. Los c-juegos estándar $\mathcal{U}_T$ forman una base para el espacio vectorial de c-juegos. Así, aplicando el axioma de linealidad tenemos que

$$\phi_i(q)=\sum_{T\in\mathcal{C}(N)}q(T)\phi_i(\mathcal{U}_T)$$

donde

$$q=\sum_{T\in\mathcal{C}(N)}q(T)\mathcal{U}_T.$$

en todo c-juego q. Aplicando el Lema 1 obtenemos

$$\phi_i(\mathcal{U}_T) = \begin{cases} \lambda_{|T|}, & \text{si } i \in n(T) \\ \mu_{|T|}, & \text{si } i \notin n(T) \end{cases}$$

para cada $i \in N$. Por el axioma de eficiencia promedio obtenemos, para cada $T \in \mathcal{C}(N)$ tal que $n(T) = N$

$$\sum_{i \in n(T)} \phi_i(\mathcal{U}_T) = \frac{1}{(n-1)!} = n\lambda_n$$

y

$$\sum_{i \in n(T)} \phi_i(\mathcal{U}_T) = 0 = |T|\lambda_{|T|} + (n - |T|)\mu_{|T|}$$

en otro caso. De estas ecuaciones obtenemos $\lambda_n = 1/n!$ y $|T|\lambda_{|T|} = -(n-|T|)\mu_{|T|}$ con $|T| \in \{1, \dots, n-1\}$. Haciendo el cambio de variable $|T|\lambda_{|T|} = \beta_{|T|}$ obtenemos

$$\phi_i(q) = \frac{\eta(q,N)}{n} + \sum_{\substack{T \in \mathcal{C}(N) \\ n(T) \neq N \\ n(T) \ni i}} \beta_{|T|} \frac{q(T)}{|T|} - \sum_{\substack{T \in \mathcal{C}(N) \\ n(T) \not\ni i}} \beta_{|T|} \frac{q(T)}{n - |T|} \tag{2.3}$$

donde $\{\beta_{|T|}\}_{|T|=1}^{n-1} \in \mathbb{R}$. Esta es la fórmula análoga para nuestra problema del trabajo de Ruiz, Valenciano y Zarzuelo.

Con manipulación algebraica obtenemos

$$\sum_{\substack{T \in \mathcal{C}(N) \\ n(T) \not\ni i}} \beta_{|T|} \frac{q(T)}{n - |T|} = \sum_{\substack{T \in \mathcal{C}(N) \\ n(T) \ni i}} \beta_{|T|-1} \frac{q(T_{-i})}{(n - |T| + 1)(|T| - 1)}.$$

La solución (2.3) se cumple para cualquier c-juego y para todo tipo de nodos. Consideraremos un c-juego $q \in F_g$ tal que el jugador $i \in N$ es un nodo nulo. Por ello, de la expresión anterior tenemos que

$$\varphi_i(q) = \frac{\eta(q,N)}{n} + \sum_{\substack{T \in \mathcal{C}(N) \\ n(T) \neq N \\ n(T) \ni i}} \beta_{|T|} \frac{q(T)}{|T|} - \sum_{\substack{T \in \mathcal{C}(N) \\ n(T) \ni i}} \beta_{|T|-1} \frac{q(T)}{(n - |T| + 1)(|T| - 1)} = 0.$$

De nuevo, aplicando manipulación algebraica

$$\varphi_i(q) = \sum_{\substack{T \in \mathcal{C}(N) \\ n(T) = N}} \frac{q(T)}{n} \left(\frac{1}{(n-1)!} - \beta_n \right) + \sum_{\substack{T \in \mathcal{C}(N) \\ n(T) \ni i}} \left(\frac{\beta_{|T|}}{|T|} - \frac{\beta_{|T|-1}}{(n - |T| + 1)(|T| - 1)} \right) q(T) = 0$$

lo cual implica que

$$\frac{1}{(n-1)!} - \beta_n = 0 \text{ y } \frac{\beta_{|T|}}{|T|} - \frac{\beta_{|T|-1}}{(n - |T| + 1)(|T| - 1)} = 0 \quad \forall |T| \in \{1, ..., n-1\}.$$

Supondremos que $\beta_{|T|} = |T|(n-|T|)!/n!$ y haremos la prueba por inducción. Para las ecuaciones anteriores la asunción es verdadera cuando $|T| = n$. Ahora supondremos que es cierta para $|T| = s$, $s \in \{2,\ldots,n\}$ y lo probaremos para $|T| = s-1$. De las ecuaciones anteriores tenemos que

$$\beta_{|T|-1} = \frac{\beta_{|T|}(n-|T|+1)(|T|-1)}{|T|} = \frac{(n-(|T|-1))!(|T|-1)}{n!}.$$

Con ello, hemos probado la unicidad. □

De la misma manera en que lo hicieron Ruiz, Valenciano y Zarzuelo en [34], podemos obtener una familia de soluciones que satisfaga un subconjunto de los axiomas anteriores.

Proposición 1. *Una solución $\varphi : F_g \to \mathbb{R}^n$ para c-juegos satisface los axiomas de linealidad, simetría y eficiencia promedio sí y sólo si, para todo $i \in N$*

$$\varphi_i(q) = \frac{\eta(q,N)}{n} + \sum_{\substack{T\in\mathcal{C}(N)\\ n(T)\neq N\\ n(T)\ni i}} \beta_{|T|}\frac{q(T)}{|T|} - \sum_{\substack{T\in\mathcal{C}(N)\\ n(T)\not\ni i}} \beta_{|T|}\frac{q(T)}{n-|T|} \tag{2.4}$$

con $\{\beta_{|T|}\}_{|T|=1}^{n-1} \in \mathbb{R}$.

Demostración. Refiérase a la prueba del Teorema 3. □

La solución dada en (2.1) es un caso específico de (2.4) donde

$$\beta_{|T|} = \frac{|T|(n-|T|)!}{n!}.$$

De manera similar al valor de Shapley, la solución propuesta en (2.1) tiene una interpretación probabilística. Elijamos un ciclo $T \in \mathcal{C}(N)$ de manera aleatoria mediante el siguiente procedimiento: primero, elijamos la longitud $|T|$ de un ciclo con distribución uniforme entre todas las posibles longitudes, excluyendo la longitud cero (puede hacerse de 1 a n maneras). Luego, escojamos un ciclo $T \in \mathcal{C}(N)$ con la longitud elegida anteriormente $|T|$ que contenga al nodo i, de nuevo utilizando una distribución uniforme entre todos los posibles ciclos que satisfagan esta condición. Luego, asignamos como la importancia del nodo i su contribución a este ciclo formado $(q(T) - q(T_{-i}))$. Entonces, el valor esperado que el nodo i obtiene con este proceso es igual a la solución dada al nodo i de acuerdo al teorema anterior.

La solución (2.1) tiene otra interpretación pero considerando un proceso aleatorio de formación de un ciclo. Primero, elijamos una permutación de los nodos (con distribución uniforme) de entre todas las posibles. En la siguiente discusión, consideraremos a los nodos como personas. Supongamos que los nodos arriban aleatoriamente a una mesa; el primer nodo se sienta en una silla cualquiera. Cuando otro nodo llega a la mesa, se sienta en la silla a la derecha del último nodo sentado. Este proceso genera una secuencia de ciclos alrededor de la mesa en contra de las manecillas del reloj. Esto es, dado un orden $\mathcal{R} \in S_n$ de los nodos, $\mathcal{R} = j_1\ j_2\ \ldots\ j_{k-1}\ i\ j_{k+1}\ \ldots\ j_{n-1}\ j_n$, definimos $\mathcal{P}_i^{\mathcal{R}} = \{(j_1, j_2), \ldots, (j_{k-1}, i), (i, j_1)\}$, el ciclo formado por los predecesores del nodo i, incluyéndolo, en contra de las manecillas del reloj. Asignamos como importancia del nodo i su contribución marginal al ciclo $\mathcal{P}_i^{\mathcal{R}}$. El valor esperado que el nodo i obtiene de acuerdo a este proceso aleatorio corresponde con la solución dada por (2.1). Por ello, la solución (2.1) puede escribirse como

$$\phi_i(q) = \frac{1}{n!}\left(\sum_{\mathcal{R}\in S_n} [q(\mathcal{P}_i^{\mathcal{R}}) - q((\mathcal{P}_i^{\mathcal{R}})_{-i})]\right) \tag{2.5}$$

porque $|\{\mathcal{R} \in S_n \mid \mathcal{P}_i^{\mathcal{R}} = T\}| = (n - |T|)!$ para todo $T \in \mathcal{C}(N)$.

La solución dada en (2.1) puede derivarse del valor de Shapley de cierto juego en forma de función característica. Sea $q \in F_g$ un c-juego; sea $v^q : 2^N \to \mathbb{R}$ un juego con función característica definida, para cada $S \subseteq N$, como

$$v^q(S) = \eta(q, S).$$

Este juego representa, para cada $S \subseteq N$, la valía promedio que se obtiene si se visitan únicamente los nodos en S de cualquier manera posible. Con este juego, formulamos la siguiente proposición:

Proposición 2. *Sea $\varphi : F_g \to \mathbb{R}^n$ una solución lineal, simétrica, eficiente promedio y nula para c-juegos; entonces*

$$\varphi_i(q) = Sh_i(v^q), \qquad \forall\ i \in N \tag{2.6}$$

para todo $q \in F_g$, donde Sh es el valor de Shapley.

Demostración. Debido a la definición de v^q y a la expresión del valor de Shapley, obtenemos, para todo $S \subseteq N$

$$Sh_i(v^q) = \sum_{S\ni i} \frac{(s-1)!(n-s)!}{n!}\ [\eta(q,S) - \eta(q, S\backslash\{i\})]$$

donde $s = |S|$. Si sustituimos la definición de η obtenemos

$$\sum_{S\ni i} \frac{(s-1)!(n-s)!}{n!}\ \eta(q,S) = \sum_{\substack{T\in\mathcal{C}(N)\\ n(T)\ni i}} \frac{(n-|T|)!}{n!} q(T)$$

y

$$\begin{aligned}\sum_{S\ni i} \frac{(s-1)!(n-s)!}{n!} \eta(q, S\backslash\{i\}) &= \sum_{\substack{T\in\mathcal{C}(N)\\ n(T)\not\ni i}} \frac{|T|(n-|T|-1)!}{n!} q(T)\\ &= \sum_{\substack{T\in\mathcal{C}(N)\\ n(T)\ni i}} \frac{(n-|T|)!}{n!} q(T_{-i})\end{aligned}$$

donde la última desigualdad se obtiene usando el hecho de que

$$q(T) = \frac{1}{|T|} \sum_{\substack{C \in \mathcal{C}(N) \\ n(C)\setminus\{i\}=n(T)}} q(C_{-i})$$

para todo $T \in \mathcal{C}(N)$ tal que $n(T) \not\ni i$ (por la definición de T_{-i}). Sustituyendo la expresión anterior en la fórmula del valor de Shapley obtenemos el resultado. □

La última proposición nos está proporcionando una propiedad importante de (2.1): esta solución es equivalente a un "juego promedio" en forma de función característica en el cual la valía de cada coalición $S \subseteq N$ es la valía promedio obtenida cuando los nodos en S forman un ciclo donde únicamente éstos nodos son visitados.

Para cada $T \in \mathcal{C}(N)$ podemos formar un juego $(n(T), v_T)$ en forma de función característica de la siguiente manera:

$$v_T(S) = q(T_S) \qquad \forall S \subseteq n(T).$$

Este es un juego restringido al ciclo T. Ahora, formulamos el siguiente resultado:

Proposición 3. *Sea $q \in F_g$ un c-juego. Para cada $T \in \mathcal{C}(N)$ formamos un juego en forma de función característica $(n(T), v_T)$ dado por $v_T(S) = q(T_S)$ para todo $S \subseteq n(T)$. Si $\varphi : F_g \to \mathbb{R}^n$ satisface los axiomas de linealidad, simetría, nulidad y eficiencia promedio entonces*

$$\varphi_i(q) = \frac{1}{(n-1)!} \sum_{T \in \mathcal{C}_N(N)} Sh_i(v_T) \qquad \forall i \in N. \tag{2.7}$$

Demostración. Probaremos esta última proposición mostrando que (2.7) satisface los cuatro axiomas que caracterizan la solución (2.1). Primero, probaremos que se satisface el axioma de eficiencia promedio. El valor de Shapley es eficiente por lo que tenemos, para cada $T \in \mathcal{C}_N(N)$

$$\sum_{i \in N} \mathrm{Sh}_i(v_T) = q(T)$$

y como $|\mathcal{C}(N)| = (n-1)!$ entonces, esta expresión es eficiente promedio. Los otros axiomas pueden probarse de manera directa, por lo que la prueba termina. □

La Proposición 3 muestra otro proceso probabilístico que puede usarse para obtener la solución (2.1): Escogemos un ciclo $T \in \mathcal{C}(N)$ que contenga a todos los nodos con distribución uniforme entre todas las posibles opciones. Luego, medimos su importancia (usando el valor de Shapley) en el juego restringido $(n(T), v_T)$. El valor esperado de esta importancia bajo este proceso equivale a la solución dada en (2.1).

Ejemplo 2.1. *Consideremos una problema de redistribución en una cadena de tiendas con tres sucursales, (b_1, b_2 y b_3). Los costos de transportación entre la sucursal i (un renglón) y la sucursal j (una columna), se esquematiza en la siguiente tabla:*

	b_1	b_2	b_3
b_1	0	12	14
b_2	12	0	18
b_3	16	16	0

Con esta información, podemos formar el correspondiente c-juego que indica el costo por visitar las sucursaes en el orden dado por los ciclos de la siguiente manera:

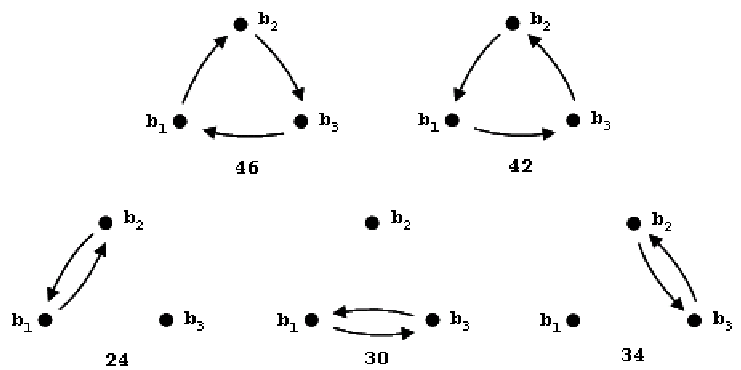

Figura 2.1: El conjunto de ciclos posibles si las sucursales son los nodos de una digráfica completa. Debajo de cada ciclo se indica el valor $q(C)$ de cada ciclo C.

Ahora, calculando la solución dada en (2.1) (la sucursal b_i se corresponde con el nodo i) obtenemos

$$\varphi(q) = (37/3, 43/3, 52/3). \tag{2.8}$$

De acuerdo con esta solución, la sucursal b_3 debe pagar un valor más alto que las otras sucursales. También, b_2 debe pagar más que b_1. La solución (2.8) denota una medida de cómo cada sucursal contribuye a los costos debido a las redistribuciones.

2.4. Soluciones r-eficientes

Ahora estudiaremos el problema de tener un monto fijo previamente establecido para repartir entre los nodos de una digráfica si debe tomarse en cuenta su importancia dentro de un c-juego. Por ejemplo, puede ser necesario distribuir ciertos costos administrativos fijos entre las diferentes sucursales del problema de la cadena de tiendas. Así, el problema se define como una pareja (q, r) donde $q \in F_g$ y $r \in \mathbb{R}$ denotan un c-juego con monto a repartir r. Entonces, es necesario modificar el modelo original. En esta sección mostraremos la caracterización de una solución $\varphi : F_g \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$, donde $\varphi_i(q, r)$ representa el pago para el nodo i en un c-juego donde el monto a repartir es $r \in \mathbb{R}$.

Dados $T \in \mathcal{C}(N), q_1, q_2 \in F_g$ y $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ definimos $(q_1, r)(T) = q_1(T)$ y

$$(q_1, \alpha)(T) + (q_2, \beta)(T) = (q_1 + q_2, \alpha + \beta)(T).$$

Axioma 2.5. (Linealidad) *Una solución φ es lineal si para todo c-juego $q_1, q_2 \in F_g$ y $\alpha, \beta, \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$*

$$\lambda_1\varphi(q_1, \alpha) + \lambda_2\varphi(q_2, \beta) = \varphi(\lambda_1 q_1 + \lambda_2 q_2, \lambda_1\alpha + \lambda_2\beta).$$

Este axioma establece que la suma de los pagos para dos c-juegos con diferente monto a repartir debe ser igual al pago de la suma de los respectivos c-juegos con un monto a repartir igual a la suma de los montos de cada juego individual.

Axioma 2.6. (Simetría) *Una solución φ es simétrica si*

$$\varphi_i(q, r) = \varphi_{\theta(i)}(q \circ \theta, r)$$

para todo $q \in F_g$, $r \in \mathbb{R}$ y $\theta \in S_n$.

Axioma 2.7. (r-eficiencia) *Una solución φ es una solución r-eficiente si*

$$\sum_{i \in N} \varphi_i(q, r) = r$$

para todo $q \in F_g$ y $r \in \mathbb{R}$.

Este último axioma representa la principal diferencia en comparación con los c-juegos presentados en la Sección 2.3: el monto que se reparte debe ser el número real r. Este número puede representar la valía máxima de un ciclo, la valía de un ciclo fijo o un monto a repartir determinado exógenamente por un agente regulador, por ejemplo.

Axioma 2.8. (r-nulidad) *Una solución φ es una solución r-nula si, para todo $i \in N$ tal que i es un nolo nudo y $r = \eta(q, N)$*

$$\varphi_i(q, r) = 0$$

para todo $q \in F_g$ y $r \in \mathbb{R}$.

De acuerdo con este axioma, un nodo nulo recibirá un pago de cero sólo si el monto a repartir r es exactamente igual a la valía promedio de los ciclos que visitan a todos los nodos. Si esta situación pasa, el problema puede formularse como un c-juego estándar presentado en la sección anterior.

Teorema 4. *Existe una única solución $\varphi : F_g \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$ que satisface los axiomas de linealidad, simetría, r-eficiencia y r-nulidad. Aún más, esta solución está dada por*

$$\phi_i(q, r) = \frac{r - \eta(q, N)}{n} + \sum_{\substack{T \in \mathcal{C}(N) \\ n(T) \ni i}} \frac{(n - |T|)!}{n!} [q(T) - q(T_{-i})] \tag{2.9}$$

para todo $i \in N$, $q \in F_g$ y $r \in \mathbb{R}$.

Demostración. La prueba de que (2.9) satisface los axiomas mencionados puede hacerse de manera directa, por la que la omitimos. Esto prueba la existencia de la solución. Para probar la unicidad consideraremos una solución $\varphi : F_g \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$. Si φ satisface el axioma de linealidad, entonces

$$\varphi_i(q, r) = \varphi_i(q_0, r) + \varphi_i(q, 0) \qquad \forall i \in N, q \in F_g, r \in \mathbb{R} \tag{2.10}$$

donde $q_0 : \mathcal{C}(N) \to \mathbb{R}$ es un c-juego que asigna una valía de cero a cualquier ciclo. Entonces, aplicando los axiomas de simetría y r-eficiencia obtenemos

$$\varphi_i(q_0, r) = \frac{r}{n}.$$

Por el axioma de linealidad tenemos que

$$\varphi_i(q, 0) = \sum_{T \in \mathcal{C}(N)} q(T) \varphi(\mathcal{U}_T, 0).$$

Aplicando el Lema 1

$$\varphi_i(\mathcal{U}_T, 0) = \begin{cases} \lambda_{|T|}, & \text{si } i \in n(T) \\ \mu_{|T|}, & \text{si } i \notin n(T). \end{cases}$$

Por el axioma de r-eficiencia obtenemos, para cada $T \in \mathcal{C}(N)$ tal que $n(T) = N$

$$\sum_{i \in n(T)} \phi_i(\mathcal{U}_T, 0) = n\lambda_n = 0$$

y

$$\sum_{i \in n(T)} \phi_i(\mathcal{U}_T, 0) = 0 = |T|\lambda_{|T|} + (n - |T|)\mu_{|T|}$$

en otro caso. Con estas expresiones, obtenemos que $\lambda_n = 0$. Esta es la principal diferencia con la prueba del Teorema 3. De aquí en adelante la prueba sigue la misma línea. Así, obtenemos

$$\varphi_i(q, 0) = \sum_{\substack{T \in \mathcal{C}(N) \\ n(T) \neq N \\ n(T) \ni i}} \beta_{|T|} \frac{q(T)}{|T|} - \sum_{\substack{T \in \mathcal{C}(N) \\ n(T) \not\ni i}} \beta_t \frac{q(T)}{n - |T|}$$

con $\{\beta_{|T|}\}_{|T|=1}^{n-1} \in \mathbb{R}$. Más aún, si sustituimos las dos expresiones anteriores en (2.10) y suponemos que φ satisface el axioma de r-nulidad, se obtiene que $\beta_{|T|} = |T|(n-|T|)!/n!$, aplicando el mismo procedimiento que el utilizado en la prueba del Teorema 3. De nuevo, con manipulación algebraica, obtenemos (2.9), y por lo tanto, la prueba termina. □

En la solución anterior podemos apreciar cómo se lleva a cabo el proceso de repartición: Primero, se le paga a cada nodo su importancia en la digráfica de acuerdo a (2.1). Luego es necesario distribuir el exceso o el faltante debido a que el monto a repartir r está fijo, i.e. $r - \eta(q, N)$. Este remanente (o excedente) se reparte de manera equitativa entre todos los nodos.

2.5. Estructuras coalicionales

Siguiendo con el ejemplo de motivación propuesto por Dantzig en [23], tiene sentido considerar que los puertos pueden estar agrupados en estructuras fijas de acuerdo a sus características e intereses, por ejemplo, en países o sindicatos. Por ello, en esta sección extendemos el modelo introduciendo conceptos relacionados con estructuras coalicionales a los c-juegos, por lo que será necesario proveer un nuevo conjunto de axiomas que nos permitan obtener la caracterización de una solución.

Sea $B = \{B_1, B_2, \ldots, B_m\}$ una partición del conjunto de nodos en m grupos. Diremos que B es una *estructura coalicional de* N si $B_i \cap B_j = \emptyset$ para todo $i, j \in \{1, \ldots, m\}$, $i \neq j$ y $\bigcup_{i=1}^m B_i = N$. Supondremos que los nodos están organizados de acuerdo a una estructura coalicional B, y denotaremos por $\mathfrak{B}_N$ al conjunto de todas las posibles estructuras coalicionales de N. Un c-juego $q \in F_g$ donde los nodos están organizados de acuerdo a $B \in \mathfrak{B}_N$ se representa por una pareja (q, B) donde $(q, B)(T) = q(T)$ para cada $T \in \mathcal{C}(N)$. Con ello, nosotros caracterizaremos soluciones $\varphi : F_g \times \mathfrak{B}_N \to \mathbb{R}^n$, donde $\varphi_i(q, B)$ representa la importancia del nodo $i \in N$ en el c-juego q donde los los nodos se encuentran organizados acorde a $B \in \mathfrak{B}_N$.

La caracterización que mostramos se basa en la modificación de los axiomas presentados en la sección anterior, así como en el trabajo de Owen en [32]; sea φ una solución para c-juegos con estructura coalicional $B \in \mathfrak{B}_N$:

Axioma 2.9. (Linealidad en F_g) *Una solución φ es una solución lineal en el espacio de c-juegos si*

$$\varphi(\alpha q_1 + \beta q_2, B) = \alpha\varphi(q_1, B) + \beta\varphi(q_2, B)$$

para todo $q_1, q_2 \in F_g, \alpha, \beta \in \mathbb{R}$.

Axioma 2.10. (Nulidad) *Una solución φ es una solución nula si, para todo nodo nulo $i \in N$ en $q \in F_g$*

$$\varphi_i(q, B) = 0.$$

Dada una estructura coalicional $B \in \mathfrak{B}_N$ podemos formar una digráfica $(B, B \times B)$ donde los nodos sean las coaliciones en B. Para cada $T \in \mathcal{C}(N)$ definimos

$$\zeta_T := \{(B_i, B_j) \mid \exists (x, y) \in T \text{ con } x \in B_i, y \in B_j, B_i \neq B_j\}$$

si $n(T) \nsubseteq B_k$ para algún $B_k \in B$ y $\zeta_T := \{(B_k, B_k)\}$ en otro caso. Nótese que ζ_T no es necesariamente un ciclo.

Diremos que $T \in \mathcal{C}(N)$ induce un ciclo en la estructura coalicional B si $\zeta_T \in \mathcal{C}(B)$. El conjunto de ciclos en la digráfica con conjunto de nodos N que inducen ciclos en $(B, B \times B)$ lo representamos como $\mathcal{C}^B(N) := \{T \in \mathcal{C}(N) \mid \zeta_T \in \mathcal{C}(B)\}$. Para todo $S \subseteq N$, el conjunto $\mathcal{C}^B_S(N) := \{T \in \mathcal{C}^B(N) \mid n(T) = S\}$ representa el subconjunto de ciclos que inducen ciclos en $(B, B \times B)$ que contienen únicamente nodos de S.

Axioma 2.11. (Eficiencia coalicional promedio) *Una solución φ es una solución eficiente coalicional promedio si*

$$\sum_{i=1}^{n} \varphi_i(q, B) = \left(\frac{1}{|\mathcal{C}^B_N(N)|}\right) \sum_{T \in \mathcal{C}_N(B)} q(T).$$

De acuerdo con el axioma anterior, el monto a repartir entre los nodos será la valía promedio de los ciclos que inducen ciclos en la estructura coalicional B que visitan a todos los nodos de todas las maneras posibles. Este axioma tiene una motivación similar al Axioma 2.4: si se quiere un ciclo que incluya a todos los nodos que tome en cuenta la organización de éstos en B existen $|\mathcal{C}_N(B)|$ maneras de que éste se forme.

Sea $\theta \in S_n$ una transposición entre i y j; i.e., $\theta(i) = j, \theta(j) = i$ y $\theta(h) = h$ para todo $h \in N \backslash \{i, j\}$ donde $\{i, j\} \subseteq B_k \in B$. Diremos que $i, j \in B_k$ son *nodos sustitutos* en un c-juego q si para todo $T \in \mathcal{C}^B(N)$ tal que $i \in n(T)$ y $j \notin n(T)$, $q(T) = q(\theta(T))$.

Axioma 2.12. (Nodos sustitutos) *Una solución φ satisface el axioma de nodos sustitutos si para cada par de nodos sustitutos $\{i, j\} \subseteq B_k \in B$ en el c-juego q*

$$\varphi_i(q, B) = \varphi_j(q, B).$$

Este axioma puede interpretarse de la siguiente manera: para dos nodos $i, j \in B_k$, si la valía de cada ciclo $T \in \mathcal{C}^B(N)$ que contenga al nodo i (pero no al nodo j) es igual a la valía del ciclo cuando el nodo j sustituye al nodo i, entonces los nodos i,j tienen la misma importancia en el c-juego.

Sean $\{B_p, B_r\}$ coaliciones en B. Si para todo $S \subseteq B \backslash \{B_p, B_r\}$ se cumple que

$$\frac{1}{|\mathcal{C}^B_{N^p_S}(N)|} \sum_{T \in \mathcal{C}^B_{N^r_S}(N)} q(T) = \frac{1}{|\mathcal{C}^B_{N^r_S}(N)|} \sum_{T \in \mathcal{C}^B_{N^p_S}(N)} q(T) \quad \text{con } A^S = \bigcup_{B_k \in S} B_k$$

y $N^p_S = A_S \cup B_p, N^r_S = A_S \cup B_r$ se cumple para un c-juego q, entonces B_p, B_r son *coaliciones sustitutas* en q.

Axioma 2.13. (Coaliciones sustitutas) *Una solución φ satisface el axioma de coaliciones sustitutas si para todo par de coaliciones sustitutas $\{B_p, B_r\} \subset B$ en un c-juego q*

$$\sum_{i \in B_p} \varphi_i(q, B) = \sum_{i \in B_r} \varphi_i(q, B)$$

para todo $B \in \mathfrak{B}_N$.

El axioma anterior tiene una interpretación similar al Axioma 2.12, pero considerando cada coalición de la estructura coalicional como un nodo.

Para el siguiente resultado es necesario introducir nueva notación. Sea $B \in \mathfrak{B}_N$ una estructura coalicional y $T \in \mathcal{C}(N)$.

- $B_T := \{B_k \in B \mid B_k \cap n(T) \neq \emptyset\}$, el conjunto de coaliciones en B que son visitadas por el ciclo T. La cardinalidad de B_T se denota como $|B_T|$.
- $\pi(B_T) := \prod_{B_k \in B_T} |B_k|!$, el número de ciclos en $\mathcal{C}(N)$ que visitan todos los nodos en cada coalición de B_T y que inducen un ciclo $\zeta_T \in \mathcal{C}(B)$.
- Para todo $S \subseteq B_k \in B$, $B(S) := \{B_1, ..., B_{k-1}, S, B_{k+1}, ..., B_m\}$ representa la estructura coalicional formada cuando el subconjunto S representa a la coalición B_k.
- $\mathcal{C}^S_B(N) := \{T \in \mathcal{C}(N) \mid \zeta_T \in \mathcal{C}(B(S))$ y $B_k \subseteq n(T)\ \forall B_k \in B_T\}$, el subconjunto de ciclos en $(N, N \times N)$ que inducen un ciclo en la estructura coalicional $B(S)$ y que visitan a todos los nodos de cada coalición en $B(S)$.

Teorema 5. *Existe una única solución que satisface los axiomas de linealidad en F_g, nulidad, eficiencia coalicional promedio, nodos sustitutos y coaliciones sustitutas. Aún más, esta solución está dada por*

$$\phi_i(q, B) = \sum_{\substack{S \subseteq B_k \\ S \ni i}} \sum_{T \in \mathcal{C}^S_B(N)} \frac{(|B_k| - s)!(s-1)!}{|B_k|!} \cdot \frac{(m - |B(S)_T|)!}{m!} \left(\frac{1}{\pi(B(S)_T)} \right) [q(T) - q(T_{-i})] \tag{2.11}$$

para todo nodo $i \in N$ con $i \in B_k \in B$ y $q \in F_g$.

Demostración. Primero probaremos la unicidad. Dados $S, T \in \mathcal{C}(N)$, diremos que S es un ciclo reducido de T, y lo denotaremos como $S \sqsubseteq T$, si existe un subconjunto $P \subseteq n(T)$ tal que $S = T_{-P}$. Con ello, dada la estructura coalicional B, para $T \in \mathcal{C}(N)$ definimos el c-juego de unanimidad $(\mathcal{W}_T, B)$ como $(\mathcal{W}_T, B)(S) = 1$ si $T \sqsubseteq S$ y $(\mathcal{W}_T, B)(S) = 0$ para los otros casos, para cada $S \in \mathcal{C}(N)$. Este juego forma una base para el espacio vectorial de c-juegos. Sea $\varphi : F_g \times \mathfrak{B}_N \to \mathbb{R}^n$ una solución para c-juegos con estructura coalicional; aplicando el axioma de linealidad obtenemos, para cada $i \in N$

$$\varphi_i(q, B) = \sum_{T \in \mathcal{C}(N)} \lambda_T \varphi_i(\mathcal{W}_T, B)$$

con $\lambda_T \in \mathbb{R}$ para cada $T \in \mathcal{C}(N)$. Con esta expresión, es necesario solamente probar la unicidad en cada c-juego de unanimidad. Para cada $T \in \mathcal{C}^B(N)$, si $i \notin n(T)$ entonces i es un nodo nulo y entonces $\varphi_i(\mathcal{W}_T, B) = 0$; aplicando el axioma de nodos sustitutos obtenemos $\varphi_i(\mathcal{W}_T, B) = \varphi_j(\mathcal{W}_T, B)$ para todo $i, j \in B_k \in B$ con $i, j \in n(T)$ porque $\{i, j\}$ son nodos sustitutos en $\mathcal{W}_T$; con el axioma de coaliciones sustitutas obtenemos

$$\sum_{i \in B_r} \varphi_i(\mathcal{W}_T, B) = \sum_{i \in B_s} \varphi_i(\mathcal{W}_T, B) \qquad \forall B_r, B_s \in B_T.$$

Finalmente, por el axioma de eficiencia coalicional promedio se obtiene $\varphi_i(\mathcal{W}_T, B) = 0$ si $T \notin \mathcal{C}^B(N)$ y

$$\varphi_i(\mathcal{W}_T, B) = \begin{cases} \dfrac{1}{|B_T| \cdot (n(T) \cap B_k)} & \text{si } i \in n(T) \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

donde $i \in B_k \in B$.

La solución (2.11) puede describirse en un proceso de dos pasos: Para cada $S \subseteq B_k \in B$ definimos una digráfica $(B(S), B(S) \times B(S))$. Con esta nueva estructura, definimos un c-juego en sus ciclos, $q_S^B(T)$, donde para todo $T \in \mathcal{C}(B(S))$

$$q_S^B(T) = \frac{1}{|\mathcal{C}_T(N, B(S))|} \sum_{C \in \mathcal{C}_T(N, B(S))} q(C)$$

donde $\mathcal{C}_T(g, B(S)) := \{C \in \mathcal{C}_B^S(N) \mid \zeta_C = T\}$ representa el subconjunto de ciclos que inducen el ciclo $T \in \mathcal{C}(B(S))$. Ahora, formamos un juego para cada grupo, $v_B : 2^{B_k} \to \mathbb{R}$, de la siguiente manera:

$$v_B(S) = \sum_{i \in S} \phi_i(q_S^B) \qquad \forall S \subseteq B_k \in B$$

donde ϕ corresponde a (2.1). Ahora, calculamos el valor de Shapley al juego v_B, y con manipulación algebraica obtenemos

$$Sh(v_B) = \phi(q, B).$$

Con esta última expresión podemos verificar, debido a las propiedades de (2.1) y a las propiedades del valor de Shapley, que (2.11) satisface el conjunto de axiomas requerido por el teorema. Con ello, se tiene la prueba de la existencia de la solución, con lo que la prueba se termina. $\square$

2.6. Conclusiones

En este capítulo hemos trabajado en un juego cooperativo donde la función característica se encuentra definida sobre los ciclos de una digráfica y donde los jugadores son los nodos de la misma. Como mostramos en la introducción, este tipo de juegos puede tener aplicaciones en procesos industriales y de planificación. Por ello, estamos proponiendo una solución caracterizada axiomáticamente. Luego, extendimos el modelo original tomando en cuenta que debe repartirse un monto fijo entre los jugadores (los nodos). Así mismo, trabajamos el caso cuando los nodos se encuentran organizados de acuerdo a estructuras coalicionales. Con ello concluimos el estudio de estas situaciones, aclarando que muchos de los conceptos relacionados con la teoría de juegos cooperativos, como otros conceptos de solución y el núcleo, son posible de aplicar a estas situaciones.

Capítulo 3

Juegos con estructuras de cooperación libres de ciclos

En este capítulo realizaremos un estudio sobre un tipo de juegos cooperativos donde la cooperación entre los jugadores se modela con un gráfico libre de ciclos (*cycle free graph games*). Mostraremos una familia de soluciones para dichos juegos basándonos en un axioma de justicia entre componentes y en el axioma de eficiencia. También mostramos que una de las soluciones bien conocidas para este tipo de situaciones, la solución del árbol promedio (*average tree solution*), es un caso particular de la familia de soluciones. Además, mostraremos que para la subclase de juegos de gráficas libres de ciclos superaditivos, la familia de soluciones está en el núcleo del juego, junto con otras propiedades.

3.1. Introducción

En este capítulo estudiamos juegos cooperativos donde la cooperación entre los jugadores se encuentra limitada. Esta limitación la modelamos, al igual que Myerson en [27], utilizando una gráfica no dirigida. Cada nodo en esta gráfica representa a un jugador y las aristas representan la cooperación entre los jugadores. Bajo este modelo, los jugadores pueden cooperar sólo si se encuentran conectados. Con estas consideraciones, se conoce como *juegos de gráficas* a los juegos cooperativos en forma de función característica mas una estructura de cooperación, modelada por una gráfica, entre los jugadores.

Más específicamente, estudiaremos juegos de gráficas donde la estructura de cooperación viene dada por una gráfica libre de ciclos: puede ser un bosque o un árbol. Herings et al. en [16] caracterizan la solución del árbol promedio, usando los axiomas de eficiencia y justicia de componentes. Nosotros estamos proponiendo una generalización de este axioma, y junto con el axioma de eficiencia, estamos presentando una familia de soluciones. En nuestro axioma generalizado, proponemos que los cambios que ocurren en los pagos de las componentes que resultan al eliminar una arista en una gráfica libre de ciclos debe ser proporcional a los cambios en ciertas características de los componentes, no únicamente en el número de nodos de éstas, como lo hace Herings et al. en [16] Alternativamente, proponemos una interpretación de cómo se realizan los pagos de acuerdo a la familia de soluciones. Además, proponemos valores específicos para ciertas constantes contempladas en el modelo para generar soluciones caracterizadas unívocamente. Así mismo, estudiamos algunas propiedades de esta solución, como el hecho de que para juegos cooperativos superaditivos, las soluciones expresadas por la familia pertenecen al núcleo del juego.

Este capítulo está formado de la siguiente manera: primero presentaremos los preliminares del problema junto con la notación que usaremos. Luego, mostraremos la caracterización de Herings et al. [16] así como la generalización del axioma que ellos están proponiendo, para posteriormente presentar nuestra familia de soluciones. Además, proporcionando el valor de determinadas constantes, recuperaremos ciertas soluciones conocidas como casos específicos de nuestra familia. Luego, trabajaremos propiedades adicionales de las soluciones.

3.2. Notación y preliminares

Dada un conjunto de nodos N, una gráfica de N se define como un conjunto de pares no-ordenados de elementos distintos de N. Nos referiremos a cada uno de estos pares no-ordenados como una arista. Denotaremos a una gráfica completa de N como $g^N = \{\{i,j\} \mid i,j,\in N, i \neq j\}$ y el conjunto de todas las posibles gráficas de N nodos como $GR := \{g \mid g \subseteq g^N\}$. Para $g \in GR$, $n(g)$ representa en conjunto de nodos que forman las aristas de g y $|n(g)|$ la cardinalidad de este conjunto.

Dada una gráfica $g \in GR$, un *camino* en g es una secuencia de nodos $i_1, \ldots, i_k$ tal que $\{\{i_j, i_{j+1}\}\}_{j=1}^{k-1} \subseteq g$. Un camino se llama un *ciclo* si todos los nodos del camino son diferentes, excepto $i_1 = i_k$. Dos nodos i, j están conectados en g si $i = j$ o existe un camino en g donde $i_1 = i, i_k = j$. Un nodo es *aislado* si no está conectado con ningún otro nodo excepto con él mismo. El conjunto de nodos aislados en g lo denotamos como $I(g)$. Con ello, se dirá que g es *conexa* si cualesquiera dos nodos en $n(g)$ están conectados. Todo nodo aislado se considerará conexo. Una gráfica $g' \in GR$ se conoce como una *subgráfica* de g si $g' \subseteq g$. Una subgráfica g' de g se conoce como *componente* de g si g' es conexa y cada par de nodos $i \in n(g'), j \in n(g) \backslash n(g')$ no están conectados. El conjunto de componentes de g se denotará como $C(g)$, y C_i denota a la componente en $C(g)$ que contiene al nodo $i \in N$. Más aún, el conjunto de nodos en la misma subgráfica que i se representará como $N_i = n(C_i)$. El conjunto de todas las subgráficas conexas en g se denotará por $\widehat{C}(g)$.

Una gráfica $g \in GR$ se conoce como un *árbol* si g es conexa y sin ciclos. El conjunto de todas las gráficas en g que son conexas y sin ciclos se denotará como

$T(N)$. Hay que hacer notar que $T(N) \subset GR$. Si dada una gráfica $g \in GR$, cada $g' \in C(g)$ es un árbol, entonces g se conoce como un *bosque* o una gráfica libre de ciclos. El conjunto de todas las gráficas libres de ciclos la denotaremos como $F(N)$.

Sea (N, v) un juego cooperativo en forma de función característica. Si existe una gráfica $g \in GR$ que represente una estructura de cooperación entre los jugadores, entonces el juego (N, v) se conocerá como un *juego de gráfica*. En este caso, cada arista en g representa una relación de comunicación bidireccional entre dos jugadores. En un juego de gráfica, sólo las coaliciones conectadas son capaces de cooperar.

Nosotros consideraremos que la estructura de cooperación entre los jugadores es una gráfica libre de ciclos, por lo que en realidad nos estamos restringiendo a juegos de gráficas sin ciclos. Con ello, nuestro objetivo principal es proveer una solución para un juego cooperativo cuando la estructura de cooperación entre los jugadores no contiene ciclos. Por eso, una solución será un operador $\varphi : F(N) \to \mathbb{R}^n$. La i-ésima componente $\varphi_i(g)$ de la solución representa el pago para el jugador $i \in N$ en el juego (N, v), el cual consideraremos fijo a partir de este momento, dada la estructura de cooperación $g \in F(N)$.

3.3. Una familia de soluciones

En esta sección presentaremos una generalización del axioma de justicia por componentes propuesto por Herings et al. [16] y con él, más el axioma de eficiencia por componentes, mostraremos una expresión para una familia de soluciones que satisface estas dos propiedades.

Myerson en [27] caracterizó una solución para juegos de gráfica en general, no únicamente gráficas sin ciclos. Él propuso un axioma de eficiencia por componentes (en realidad él lo llamó *regla de asignación*), el cual, adaptado a nuestro contexto, puede formularse de la siguiente manera:

Axioma 3.1. (Eficiencia por componentes) *Dado (N, v), una solución $\varphi : F(N) \to \mathbb{R}^n$ es eficiente por componentes si para cualquier $g \in F(N)$*

$$\sum_{i \in n(C)} \varphi_i(g) = v(n(C)) \quad \forall C \in C(g).$$

Este axioma requiere que, para cada componente $C \in C(g)$, la solución reparta el monto $v(n(C))$ entre los jugadores en C.

Axioma 3.2. (Justicia) *Dado (N, v), una solución $\varphi : F(N) \to \mathbb{R}^n$ es justa si para cualquier $g \in F(N)$*

$$\varphi_i(g) - \varphi_i(g') = \varphi_j(g) - \varphi_j(g').$$

donde $g' = g \backslash \{i, j\}$, para cada $\{i, j\} \in g$.

Pueden existir situaciones donde esta última propiedad puede ser controversial. Considérese la estructura de cooperación dada en la Figura (3.1):

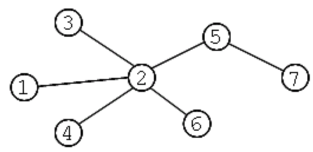

Figura 3.1: Un ejemplo de estructura de cooperación.

No es claro el porqué remover la arista $\{1,2\}$ deba producir el mismo cambio en los pagos de los jugadores 1 y 2. Esta operación pareciera ser más perjudicial para el jugador 1 que para el jugador 2, porque él se vuelve un jugador aislado en $g\backslash\{1,2\}$ (ya no coopera con ningún otro jugador), mientras que el jugador 2 aún mantiene cooperación con otros agentes. Este tipo de situaciones no se consideran como tal en el axioma de justicia. Para tratar de mejorar el alcance de este axioma, pudiese ser útil introducir pesos que indiquen ciertos factores que debiesen tomarse en cuenta en el cambio de los pagos de cada jugador.

Dada una gráfica $g \in F(N)$, cada componente de g es un árbol. Eliminar la arista $\{i,j\} \in g$ produce que la componente $C \in C(G)$ tal que $\{i,j\} \in C$ se divida en dos árboles. Para una arista $\{i,j\} \in g$, denotamos por C_{ij} a la componente en $g\backslash\{i,j\}$ que contiene al nodo i; esto es, $C_{ij} := \{C \in C(g\backslash\{i,j\}) \mid i \in n(C)\}$. También, definimos $N_{ij} := n(C_{ij})$, el conjunto de nodos en la misma subgráfica que el nodo i después de remover la arista $\{i,j\}$.

Herings et al. [16] proponen el siguiente axioma:

Axioma 3.3. (Justicia por componentes) *Dado (N,v), una solución $\varphi : F(N) \to \mathbb{R}^n$ satisface el axioma de eficiencia por componentes si para cualquier $g \in F(N)$ y para cualquier arista $\{i,j\} \in g$ se cumple que*

$$\frac{1}{|N_{ij}|}\sum_{h\in N_{ij}}\left[\varphi_h(g)-\varphi_h(g')\right] = \frac{1}{|N_{ji}|}\sum_{h\in N_{ji}}\left[\varphi_h(g)-\varphi_h(g')\right].$$

donde $g' = g\backslash\{i,j\}$.

Este axioma establece que si eliminamos la arista $\{i,j\}$ de g, la pérdida (o ganancia) promedio en los pagos para los jugadores en N_{ij} y N_{ji} deben ser iguales. Esta propiedad toma en cuenta que desconectar dos componentes debe afectar el pago de los nodos de ambos componentes, no solo el pago de los nodos conectados. Herings et al. [16] prueban que hay una única solución para juegos de gráficas libres de ciclos que satisface los axiomas de eficiencia por componentes y de justicia por componentes. Así mismo, ellos proponen un método para calcular su solución basándose en gráficas dirigidas.

Nosotros hacemos una modificación a este último axioma para proponer la siguiente propiedad. Representamos al conjunto de los número reales estrictamente mayores a cero como $\mathbb{R}^{++}$.

Axioma 3.4. (Justicia generalizada por componentes) *Dado (N, v), una solución $\varphi : F(N) \to \mathbb{R}^n$ satisface el axioma de justicia generalizada por componentes si para cualquier $g \in F(N)$, la siguiente expresión se cumple:*

$$\frac{1}{\alpha_{ij}} \sum_{h \in N_{ij}} [\varphi_h(g) - \varphi_h(g')] = \frac{1}{\alpha_{ji}} \sum_{h \in N_{ji}} [\varphi_h(g) - \varphi_h(g')]$$

donde $g' = g \backslash \{i, j\}$ y $\alpha_{ij}, \alpha_{ji} \in \mathbb{R}^{++}$ para todo $\{i, j\} \in g$.

Cuando una arista $\{i, j\}$ se elimina de una gráfica g sin ciclos, dos nuevos árboles se forman. La constante α_{ij} se asocia con el árbol que contiene al nodo i después de remover la arista, y α_{ji} se relaciona con la componente que contiene al nodo j. Estas constantes indican cómo debe ser la ponderación de cada componente a la hora de indicar el cambio en los pagos de los nodos debido a la remoción de esa arista. En el axioma de justicia por componentes propuesto por Herings et al. [16], esta ponderación es igual al número de nodos en cada componente.

Teorema 6. *Dado el juego (N, v), para cualquier $g \in GR$ y $\{\alpha_{ij}, \alpha_{ji}\} \in \mathbb{R}^{++}$ para cada $\{i, j\} \in g$, existe una única solución para juegos de gráficas sin ciclos que satisface los axiomas de eficiencia por componentes y de justicia generalizada por componentes.*

Demostración. Supóngase una gráfica sin ciclos g y $\varphi : F(N) \to \mathbb{R}^n$ una solución que satisface los axiomas de eficiencia por componentes y de justicia generalizada por componentes. Sea $\{i, j\}$ una arista de g. Aplicando los axiomas anteriores tenemos que

$$\alpha_{ji} \left[\sum_{h \in N_{ij}} \varphi_h(g) - v(N_{ij}) \right] = \alpha_{ij} \left[\sum_{h \in N_{ji}} \varphi_h(g) - v(N_{ji}) \right].$$

Con un poco de manipulación algebraica obtenemos

$$\sum_{h \in N_{ij}} \varphi_h(g) = \frac{\alpha_{ij}}{\alpha_{ij} + \alpha_{ij}} v(N_i) + \left[\frac{\alpha_{ji} v(N_{ij}) - \alpha_{ij} v(N_{ji})}{\alpha_{ij} + \alpha_{ij}} \right]. \tag{3.1}$$

La expresión anterior nos indica la suma de las soluciones para todos los jugadores N_{ij}. Podemos remover las otras aristas que inciden al nodo i, $\{h, i\} \in g$, $h \neq j$, y obtendremos expresiones similares para cada uno de los nodos en N_{hi}. Ahora, podemos restar esas expresiones de (3.1) y obtenemos

$$\varphi_i(g) = \left(\frac{\alpha_{ij}}{\alpha_{ij} + \alpha_{ij}} - \sum_{\substack{\{i,h\} \in g \\ h \neq j}} \frac{\alpha_{hi}}{\alpha_{ih} + \alpha_{hi}} \right) v(N_i) + \sum_{\{i,h\} \in g} \left[\frac{\alpha_{hi} v(N_{ih}) - \alpha_{ih} v(N_{hi})}{\alpha_{ih} + \alpha_{hi}} \right].$$

De nuevo, mediante operaciones algebraicas obtenemos

$$\varphi_i(g) = \left(1 - \sum_{\{i,h\}\in g} \frac{\alpha_{hi}}{\alpha_{ih} + \alpha_{hi}}\right) v(N_i) + \sum_{\{i,h\}\in g} \left[\frac{\alpha_{hi} v(N_{ih}) - \alpha_{ih} v(N_{hi})}{\alpha_{hi} + \alpha_{ih}}\right]. \tag{3.2}$$

Dado un conjunto de constantes $\alpha_{ij}, \alpha_{ji} \in \mathbb{R}^{++}$, para cada $\{i, j\} \in g$, la solución está determinada unívocamente. Con ello, la existencia y unicidad de la solución está probada y la prueba termina. □

3.4. Casos particulares

El axioma de justicia por componentes propuesto por Herings et al. [16] es un caso particular del Axioma 3.4, donde $\alpha_{ij} = |N_{ij}|$. Sustituyendo estas constantes en el Axioma 3.4 y en (3.2), recobramos la solución del árbol promedio pero con un formulación alternativa:

Teorema 7. *Dado (N, v), existe una única solución $\phi : F(N) \to \mathbb{R}^n$ que satisface los axiomas de eficiencia por componentes y de justicia por componentes. Más aún, esta solución está dada por*

$$\phi_i(g) = \frac{v(N_i)}{|N_i|} + \sum_{\{i,j\}\in g} \left[\frac{|N_{ji}|v(N_{ij}) - |N_{ij}|v(N_{ji})}{|N_i|}\right] \tag{3.3}$$

para todo $i \in N$, $g \in GR$.

Demostración. La unicidad se satisface porque el axioma de justicia por componentes es una caso particular del Axioma 3.4 con $\alpha_{ij} = |N_{ij}|$ para cada arista $\{i, j\} \in g$. Entonces, podemos aplicar los resultados obtenidos en el en Teorema 6. Para probar existencia, es necesario verificar que (3.3) satisface los axiomas mencionados en el enunciado del teorema. Primero, probaremos la eficiencia por componentes. Podemos notar que para cada $C \in C(g)$,

$$\sum_{i\in n(C)} \sum_{\{i,j\}\in g} \frac{|N_{ji}|v(N_{ij}) - |N_{ij}|v(N_{ji})}{|N_i|} = 0$$

y sustituyendo este resultado en $\sum_{i\in C} \phi_i(g)$ obtenemos la conclusión deseada. Para nodos aislados la prueba es trivial. Para probar que la solución satisface el axioma de justicia por componentes tomaremos una arista $\{i, j\} \in g$ y entonces

$$\sum_{h\in N_{ij}} \phi_h(g) = \frac{|N_{ij}|v(N_i)}{|N_{ij}| + |N_{ji}|} + \frac{|N_{ji}|v(N_{ij}) - |N_{ij}|v(N_{ji})}{|N_{ij}| + |N_{ji}|}. \tag{3.4}$$

Debido al axioma de eficiencia por componentes tenemos que

$$v(N_i) = \sum_{h\in N_{ij}} \phi_h(g) + \sum_{h\in N_{ji}} \phi_h(g).$$

Reemplazando la última expresión en (3.4), y aplicando manipulación algebraica, obtenemos el resultado. Con ello, la prueba termina. □

La expresión (3.3) proporciona una manera alternativa del resultado obtenido por Herings et al. [16] para calcular la solución del árbol promedio. En nuestra expresión se observa cómo se asignan los pagos para los jugadores: Primero, dividimos la valía de cada componente entre los nodos que la forman de manera igualitaria. Luego, realizamos transferencias entre cada par de nodos conectados: Para un jugador $i \in N$, y considerando que $|N_i| \neq 1$, removemos la arista $\{i, j\}$; el jugador j le da $|N_{ij}|/|N_i|$ de la valía de su componente resultante, $v(N_{ji})$, al jugador i. Luego, el jugador i le da $|N_{ji}|/|N_i|$ de $v(N_{ij})$ al jugador j. Repetimos este proceso por cada arista que contenga al nodo i. El pago dado en (3.3) es el resultado de este proceso.

Podemos proponer diferentes valores para las constantes α_{ij}, α_{ji} para cada $\{i, j\} \in g$ en (3.2) para obtener soluciones alternativas:

Axioma 3.5. (Igual tratamiento de componentes) *Dado (N, v), una solución $\varphi : F(N) \to \mathbb{R}^n$ satisface el axioma de igual tratamiento de componentes si para todo $g \in GR$ y para cualquier arista $\{i, j\} \in g$ se cumple que*

$$\sum_{h \in N_{ij}} [\varphi_h(g) - \varphi_h(g')] = \sum_{h \in N_{ji}} [\varphi_h(g) - \varphi_h(g')]$$

donde $g' = g \backslash \{i, j\}$.

Este axioma establece que la pérdida (o ganancia) que obtienen N_{ij} y N_{ji} debido a la remoción de la arista $\{i, j\}$, debe ser igual para cada una de ellas. La diferencia con el axioma de justicia por componentes es que en esa propiedad se considera que la pérdida (o ganancia) promedio, tomando en cuenta el número de nodos, de las componentes debe ser la misma.

Para $g \in GR$ y para cada nodo $i \in N$, definimos el *grado de i*, $\deg_i(g) := |\{j \in N \mid \{i, j\} \in g\}|$, como el número de nodos en g conectados con i.

Teorema 8. *Dado (N, v), existe una única solución $\varphi : F(N) \to \mathbb{R}^n$ que satisface los axiomas de eficiencia por componentes y de igual tratamiento de componentes. Más aún, esta solución está dada por*

$$\phi_i(g) = \left(1 - \frac{1}{2}\deg_i(g)\right) v(N_i) + \frac{1}{2} \sum_{\{i,j\} \in g} [v(N_{ij}) - v(N_{ji})] \tag{3.5}$$

para cada $i \in N$ y $g \in GR$.

Demostración. El axioma de igual tratamiento de componentes es un caso específico del Axioma 3.4, con $\alpha_{ij} = \alpha_{ji} = 1$ para todo $\{i, j\} \in g$. De acuerdo al Teorema 6, la unicidad está probada. Para probar la existencia, mostraremos que (3.5) satisface los axiomas mencionados. Para probar eficiencia por componentes, notemos que

$$\sum_{i\in n(C)} \sum_{\{i,j\}\in g} [v(N_{ij}) - v(N_{ji})] = 0$$

y

$$\sum_{i\in n(C)} \left(1 - \frac{1}{2}\deg_i(g)\right) = 1$$

para cada $C \in C(g)$. Esto es porque en una gráfica libre de ciclos que es un árbol, la suma de los grados de todos los nodos es igual a dos veces el número de aristas, y el número de aristas es igual al número de nodos menos 1. Para nodos aislados la solución es trivial. Y con ello hemos probado que la solución es eficiente por componentes. Ahora probaremos que (3.5) satisface el axioma de igual tratamiento de componentes. Para una arista $\{i,j\} \in g$ tenemos que

$$\sum_{h\in N_{ij}} \phi_h(g) = \frac{v(N_i)}{2} + \frac{1}{2}[v(N_{ij}) - v(N_{ji})]$$

porque

$$\sum_{h\in N_{ij}} \deg_h(g) = 2|N_{ij}| - 1.$$

Entonces, tenemos que

$$\sum_{h\in N_{ij}} \phi_h(g) = v(N_i) - \sum_{h\in N_{ij}} \phi_h(g) + v(N_{ij}) - v(N_{ji}). \tag{3.6}$$

Por eficiencia por componentes,

$$v(N_i) - \sum_{h\in N_{ij}} \phi_h(g) = \sum_{h\in N_{ji}} \phi_h(g)$$

y

$$v(N_{ij}) = \sum_{h\in N_{ij}} \phi_h(g'), \quad v(N_{ji}) = \sum_{h\in N_{ji}} \phi_h(g')$$

donde $g' = g\backslash\{i,j\}$. Entonces, sustituyendo la última expresión en (3.6), y reordenando términos obtenemos el resultado. Con ello, la prueba se termina. □

Al igual que en (3.3), la expresión (3.5) proporciona un proceso de asignar pagos a los jugadores en un juego de gráfica libre de ciclos. Primero, dividimos la valía de cada $C \in C(g)$ entre los nodos que la forman de acuerdo a $(1 - \deg_i(g)/2)$. Luego, se realizan una serie de transferencias entre cada pareja de jugadores conectados: el jugador i le paga $v(N_{ji})/2$ al jugador j, esto por cada $\{i,j\} \in g$. También, el jugador i recibe $v(N_{ij})/2$ del jugador j. Luego de realizarse todas las transferencias, el pago resultante es el indicado por (3.5).

3.5. Propiedades

En esta sección mostraremos que la familia de soluciones dada por (3.2) satisface otra propiedades bien conocidas dentro de la teoría de juegos cooperativos.

El conjunto G de juegos en forma de función característica es un espacio vectorial con la suma y el producto escalar definidos de la manera usual: para $v_1, v_2 \in G$ y $\lambda \in \mathbb{R}$, $(v_1 + v_2)(S) := v_1(S) + v_2(S)$ y $(\lambda v_1)(S) := \lambda v_1(S)$ para cada $S \subseteq N$. Dados un juego $v \in G$ y $\varphi : F(N) \to \mathbb{R}^n$, denotaremos como $\varphi^v(g)$ la solución para el juego v cuando la estructura de cooperación entre los jugadores está representada por la gráfica $g \in F(N)$.

Axioma 3.6. (Linealidad en G) *Una solución $\varphi : F(N) \to \mathbb{R}^n$ satisface el axioma de linealidad en G si dados $v_1, v_2 \in G$, y para cualquier $g \in F(N)$ y $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$*

$$\varphi^{v_+}(g) = \lambda_1 \varphi^{v_1}(g) + \lambda_2 \varphi^{v_2}(g).$$

donde $v_+ : 2^N \to \mathbb{R}$ se define como $v_+(S) = \lambda_1 v_1(S) + \lambda_2 v_2(S)$ para todo $S \subseteq N$.

Para cada $v \in G$ y $S \subseteq N$, definimos el juego de unanimidad $\mathcal{U}_S$ como $\mathcal{U}_S(T) = 1$ si $S \subseteq T$ y $\mathcal{U}_S(T) = 0$ en otro caso.

Axioma 3.7. (Tratamiento igualitario de jugadores vitales) *Una solución $\varphi : F(N) \to \mathbb{R}^n$ satisface el axioma de tratamiento igualitario de jugadores vitales si para cada $S \subseteq N$ tal que $S = n(C)$ para algún $C \in C(g)$ o $S = \{j\}$ para algún $j \in I(g)$, y para $\mathcal{U}_S \in G$,*

$$\varphi_i(g) = \begin{cases} 1/|S|, & \text{si } i \in S; \\ 0, & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

Supóngase que es necesaria la cooperación de todos los jugadores en una componente para obtener un monto de una unidad. De otra manera, no se obtiene nada. El axioma anterior establece que el pago para los jugadores en la componente debe ser tal que la unidad se divide equitativamente entre ellos.

Para la siguiente propiedad tenemos que definir, para cada $S \subseteq N$, el juego (S, v_S), donde $v_S : 2^S \to \mathbb{R}$ definida como $v_S(T) = v(T)$ para todo $T \subseteq N$. También, para $g \in GR$, $g_S := g \cap g^S$ denota la subgráfica en g restringida a los nodos en S.

Axioma 3.8. (Descomposición en componentes) *Dado (N, v), una solución $\varphi : F(N) \to \mathbb{R}^n$ satisface el axioma de descomposición en componentes si para cada $S \subseteq N$ tal que $S = n(C)$ para algún $C \in C(g)$, o $S = \{j\}$ para algún $j \in I(g)$*

$$\varphi_i^v(g) = \varphi_i^{v_S}(g_S)$$

para cada $i \in S$ y $g \in GR$.

Esta propiedad establece que la solución para los jugadores en una componente no depende de cómo están organizados los demás jugadores de las otras componentes.

Teorema 9. *Sea $\varphi : F(N) \to \mathbb{R}^n$ la solución dada en (3.2). Entonces, φ satisface los axiomas de (a) Linealidad en G, (b) Tratamiento igualitario de jugadores vitales y (c) Descomposición en componentes.*

Demostración.

(a) Para probar que la solución (3.2) en una solución lineal en G, necesitamos calcular la solución (3.2) sustituyendo el juego $(\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2)$ en lugar del juego $v \in G$. Luego, aplicando la definición de la suma de dos juegos, distribuyendo y arreglando términos, obtenemos el resultado.

(b) Sea g una gráfica en GR. Para $S \subseteq N$ tal que $S = n(C)$ para algún $C \in C(g)$ o $S = \{j\}$ para algún $j \in I(g)$, podemos notar que $\mathcal{U}_{\mathcal{S}}(N_{ij}) = \mathcal{U}_{\mathcal{S}}(N_{ji}) = 0$ para todo $\{i,j\} \in g$.

(c) La solución (3.2) para un jugador $i \in N$ sólo toma en cuenta a las subgráficas contenidas en la misma componente que i. Por ello, claramente podemos restringir el juego de grafica sin ciclo a esa componente y el pago para los jugadores en esa componente será el mismo.

□

Para un juego cooperativo (N, v), el *núcleo* se define como

$$C(v) = \{x \in \mathbb{R}^n \mid x(N) = v(N), x(S) \geq v(S), S \subseteq N\}.$$

Este conjunto contiene todos los vectores de pago eficientes y con racionalidad individual. Así mismo, el núcleo de un juego de gráfica se define de la siguiente manera:

$$C(v,g) := \{x \in \mathbb{R}^n \mid x(n(C)) = v(n(C)), C \in C(g), \text{ y } x(n(C)) \geq v(n(C)), S \in \widehat{C}(g)\}.$$

Teorema 10. *Dados una gráfica $g \in GR$ y un juego superaditivo $(N, v) \in G$. Entonces, la solución $\varphi(g)$ dada en (3.2) pertenece a $C(v, g)$.*

Demostración. Por el axioma de eficiencia por componentes, tenemos que $\varphi(g)(n(C)) = v(n(C))$ para todo $C \in C(g)$. Por ello, necesitamos probar que $\varphi(g)(n(C))) \geq v(n(C))$ para $C \in \widehat{C}(g)$. Consideremos una gráfica conexa con conjunto de nodos S y aristas $\{i, j\} \in g$ tales que $i \in S$, $j \in N_i \backslash S$. Aplicando la solución (3.2) obtenemos

$$\sum_{h \in N_{ij}} \varphi_h(g) = \frac{\alpha_{ij}}{\alpha_{ij} + \alpha_{ji}} v(N_i) + \left[\frac{\alpha_{ji} v(N_{ij}) - \alpha_{ij} v(N_{ji})}{\alpha_{ij} + \alpha_{ji}}\right].$$

Podemos obtener expresiones similares para N_{pq} con $q \in S$ y $p \in N_i \backslash S$, $p \neq j$. Restando estas expresiones de la última ecuación obtenemos

$$\varphi(g)(S) = \sum_{h \in S} \varphi_h(v, g) = \frac{\alpha_{ij}}{\alpha_{ij} + \alpha_{ji}} v(N_i) + \left[\frac{\alpha_{ji} v(N_{ij}) - \alpha_{ij} v(N_{ji})}{\alpha_{ij} + \alpha_{ji}} \right] -$$

$$- \sum_{\substack{\{p,q\} \in g \\ p \in N_i \backslash S \\ p \neq j, q \in S}} \left[\frac{\alpha_{pq}}{\alpha_{pq} + \alpha_{qp}} v(N_i) + \left[\frac{\alpha_{qp} v(N_{pq}) - \alpha_{pq} v(N_{qp})}{\alpha_{pq} + \alpha_{qp}} \right] \right].$$

Ahora, como v es superaditivo, tenemos que $v(n(C)) \geq v(N_{ij}) + v(N_{ji})$ para todo $\{i, j\} \in C$, $C \in C(g)$. Sustituyendo esta ecuación en la expresión anterior obtenemos

$$\varphi(g)(S) \geq v(N_{ij}) - \sum_{\substack{\{p,q\} \in g \\ p \in N_i \backslash S \\ p \neq j, q \in S}} v(N_{pq}). \tag{3.7}$$

De nuevo, por la superaditividad de v

$$v(N_{ij}) \geq v(S) + \sum_{\substack{\{p,q\} \in g \\ p \in N_i \backslash S \\ p \neq j, q \in S}} v(N_{pq}).$$

Sustituyendo en (3.7), obtenemos que $\varphi(g)(S) \geq v(S)$, por lo que la prueba termina. □

3.6. Conclusiones

Con este último resultado terminamos el estudio que hicimos sobre los juegos en gráficas sin ciclos. El resultado obtenido en (3.2) contempla la perspectiva de proponer diferentes y razonables maneras de cómo debe ser el cambio en los pagos de las componentes debido a una desconexión y con ello, tendríamos nuevas soluciones. Además, que la familia de soluciones se encuentre en el núcleo del juego puede considerarse un resultado valioso, dado que el núcleo es un conjunto de soluciones bastante aceptable, aunque el resultado lo hayamos obtenido sólo para una subclase de juegos, los superaditivos.

Capítulo 4

Problemas de decisión multiagente

En este capítulo trabajamos con un problema de decisión multiagente. En él, existe un conjunto finito de posibles decisiones que pueden tomarse, pero solamente una de ellas es la que se tomará. Cada agente obtiene un monto como resultado de tomar cada decisión, y es posible que diferentes agentes prefieren tomar diferentes alternativas. Proponemos una solución para este problema basándonos en compensaciones: los agentes negocian entre ellos sobre un monto que reclaman por tomar una alternativa que (posiblemente) no sea adecuada para ellos. Además mostramos que, si se fija como una regla que las compensaciones serán calculadas bajo este proceso, todos los agentes preferirán tomar la misma decisión, lo cual puede interpretarse como un resultado de estabilidad para el problema. Finalmente mostramos algunas propiedades adicionales de la solución propuesta.

Los resultados que se mostrarán en este capítulo han sido sometidos a la revista *Games and Economic Behavior*.

4.1. Introducción

La teoría de la decisión es una metodología diseñada para ayudar a un *tomador de decisiones* a elegir una opción entre un conjunto de alternativas basándose en los beneficios que éstas le proporcionan. Este problema fue estudiado inicialmente por White (1969) y Lee (1971). En un contexto general, la teoría de la decisión trabaja con los problemas relacionados con la elección de la *mejor* opción, en algún contexto. El tomador de decisiones conoce el conjunto de alternativas y los pagos asociados con cada una de ellas y, básicamente, la mejor decisión es aquella que maximiza su beneficio esperado. Por esta razón, la teoría de la utilidad está íntimamente relacionada con la teoría de la decisión y le ayuda a proveer bases analíticas al proceso de toma de decisiones.

En problemas de decisión *puros* se permite que una única alternativa sea la que se tome como decisión a realizar. En este capítulo trabajamos con problemas de decisión puros multi-agente. Esto es, existe un conjunto de agentes relacionados con la decisión que va a realizarse. Así, cada alternativa está asociado con un vector de pago, donde la i-ésima posición denota el beneficio para el agente i resultante de tomar dicha alternativa. Este tipo de problemas ha sido estudiado por varios autores como Stone y Veloso (1998), Gmytrasiewicz y Lisseti (2002) y Bazzan et al (2002). Claramente, el proceso de toma de decisiones multi-agente involucra una mayor complejidad que en el modelo clásico, dado que las alternativas preferidas por cada agente pueden ser muy distintas unas de las otras. Nosotros proponemos una solución para este problema introduciendo un vector de compensaciones. La idea es como sigue: asumamos que la alternativa k es la que se tomará; pueden existir agentes tales que esta decisión no representa una buena alternativa para ellos. Por ello, necesitan ser compensados (de alguna manera) por aceptar una decisión que no les conviene. Como no queremos involucrar montos externos en el problema, proponemos que estas compensaciones se realicen entre los mismos agentes. Proponemos un método para calcular estas compensaciones basándonos en un juego cooperativo y en el bien conocido *valor de Shapley*. El juego cooperativo que estamos proponiendo se basa en el máximo monto que los agentes pueden reclamar por aceptar una decisión que no necesariamente es conveniente para ellos. Con ello, el vector de compensaciones que proponemos se equivale con el valor de Shapley de ese juego. También podemos considerar al cálculo de estas compensaciones como una *regla* para escoger una alternativa. Con ello, bajo nuestra propuesta, todo los jugadores preferirán *la misma opción*. Esto es, mostramos que bajo nuestro esquema existe una alternativa donde todos los agentes obtienen el máximo monto posible, y ésta debe ser la alternativa escogida.

Consideremos el *problema de las rutas*: existe un grupo de agentes de ventas que necesitan viajar de un origen hacia un destino dados. Existen varias rutas posibles para hacer este viaje. Cada agente conoce (o por lo menos, tiene una estimación) del monto que pueden obtener, debido a sus ventas, en cada ruta. El problema es que existe un único medio de transporte para llevar a los agentes del origen hacia el destino dados. Así que, ¿Cómo puede tomarse la decisión de qué ruta seguir? Si ésta ya se eligió, ¿Cómo deben repartirse el monto que consiguieron? Si cada uno de ellos tuviera su propio vehículo, cada agente de ventas manejaría a través de su ruta más conveniente. Claramente, aquí tenemos un problema de decisión puro multi-agente y lo resolvemos, en las siguientes secciones, de acuerdo a la solución que estamos proponiendo.

Algunas aplicaciones pueden surgir en situaciones políticas. Consideremos el caso de la distribución del presupuesto de la federación entre los diferentes sectores de la sociedad: seguridad, salud, educación, medio ambiente, etc. El gobierno realiza algunas propuestas sobre cómo hacer esta distribución, y la Cámara de Diputados decide cuál de las propuestas se tomará. Cada diputado representa un estado de la nación (no necesariamente hay un único diputado por cada estado), y cada posible alternativa de distribución representa un monto de dinero que cada estado recibirá. Por ello, van a existir algunas propuestas que sean convenientes para algunos estados y para otros no. Así, ¿cómo se puede llegar a un acuerdo entre los diputados? Claramente aquí se tiene un problema de decisión multi-agente. En nuestra propuesta de solución para este tipo de problemas, el gobierno puede establecer, como una regla, nuestro método para calcular las compensaciones: debido a la racionalidad de los diputados, ellos llegarán a un acuerdo mediante la elección de una cierta alternativa que les conviene a todos.

El capítulo está organizado de la siguiente manera: en la Sección 4.2 presentamos algunas definiciones básicas del problema. También introduciremos el modelo general para un problema de decisión puro multi-agente. Luego, en la Sección 4.3 introducimos el concepto del vector de compensaciones y proponemos una manera para calcularlo, así como una caracterización del mismo. Luego, mostramos algunas de las propiedades que nuestra solución satisface. Finalmente, en la Sección 4.4, estudiamos un enfoque basado en juegos no-cooperativos.

4.2. Notación y definiciones

Sea $N = \{1, \ldots, n\}$ el *conjunto de agentes* y $K = \{1, \ldots, k\}$ el *conjunto de alternativas*. Cuando una alternativa $j \in K$ decide tomarse, cada agente obtiene un cierto monto. Con ello, $d_{ij} \in \mathbb{R}$ representará el monto obtenido por el agente i cuando la alternativa j se lleva a cabo. También, denotamos como $\mathbb{M}_{n\times k}$ al conjunto de matrices reales con n renglones y k columnas. Así, el conjunto de posibles beneficios para el conjunto de agentes se representa por una matriz $D \in \mathbb{M}_{n\times k}$. Para una alternativa $j \in K$ y para todo $S \subseteq N$, denotamos como

$$D^j(S) = \sum_{i\in S} d_{ij},$$

al monto obtenido por los agentes en la coalición S de acuerdo con la alternativa j.

Consideramos un *problema* como un conjunto finito de beneficios, para un conjunto de agentes, asociado con un conjunto finito de alternativas. Con ello, un problema será una matriz $\mathbb{M}_{n\times k}$. Una *solución* φ para un problema $D \in \mathbb{M}_{n\times k}$ será una pareja $(j, \phi^D(j))$ que indica que la alternativa que va a realizarse es $j \in K$ y que el monto recibido por el agente i es igual a $d_{ij} + \phi_i^D(j)$. La función $\phi^D : K \to \mathbb{R}^n$ modela un vector de *compensaciones* que los agentes realizan entre ellos por el hecho de tomar una cierta alternativa. La razón para considerar estas compensaciones es porque es posible que la alternativa j no representa la mejor opción para un subconjunto de agentes. Así, ellos necesitan ser compensados (de alguna manera) por realizar una acción que no es deseable para ellos. Por ello,

$\phi_i^D(j)$ representa la compensación para el agente i en el problema D por tomar la alternativa j. La idea es no introducir ninguna cantidad extra de dinero dentro del modelo. Por ello, un vector de compensaciones $\phi^D(j)$ para una alternativa $j \in K$ debe satisfacer

$$\sum_{i \in N} \phi_i^D(j) = 0.$$

Consideraremos que los agentes son racionales, i.e. si para un problema $D \in \mathbb{M}_{n\times k}$, una pareja de alternativas $j_1, j_2 \in K$ y un subconjunto de jugadores $S \subseteq N$ tal que $D^{j_1}(S) > D^{j_2}(S)$, los agentes en S prefieren j_1 a j_2 porque el monto que ellos obtienen de acuerdo con j_1 es mayor que el monto obtenido de acuerdo con j_2. Estamos considerando que los agentes en S pueden interactuar como un único agente. Además, el proceso de la toma de decisiones se considera un proceso que incumbe a todos los jugadores, por lo que ellos son los que tomen la decisión basándose en algún criterio especificado.

Ejemplo 4.1. *Consideremos un problema de los agentes viajeros con dos agentes $N = \{1, 2\}$ y cuatro posibles rutas ($K = \{1, 2, 3, 4\}$). El monto obtenido por lo agentes en cada una de estas rutas se resume en la siguiente matriz:*

$$D = \begin{pmatrix} 22 & 24 & 32 & 36 \\ 24 & 30 & 28 & 14 \end{pmatrix}$$

El agente 1 prefiere la ruta 4, dado que el monto que él obtiene, 36, es el mayor. El agente 2 prefiere tomar la ruta 2. (obtiene un monto de 30). Así, ¿cómo escoger la ruta que debe seguirse? Un ejemplo de solución sería $(4, (-6, 6))$*, que indica que la ruta 4 es la que se tomará y el vector de compensaciones es igual a* $(-6, 6)$*. El monto final que recibe cada agente de acuerdo con esta solución es* $(30, 20)$.

Para terminar esta sección presentaremos algunos conceptos básicos de juegos no-cooperativos. Un juego no-cooperativo finito con n jugadores se define como una tripleta $(N, \{S_i\}_{i=1}^n, H)$ con un conjunto finito de jugadores $N = \{1, 2, \ldots, n\}$, S_i representa el conjunto finito de estrategias puras para cada jugador $i \in N$ y $H : S = S_1 \times S_2 \times \cdots \times S_n \to \mathbb{R}^n$ representa la función de pago. La idea es que cada jugador elige la estrategia que jugará y el resultado de estas acciones (en conjunto) se asocia con un pago. Un *equilibrio en estrategias puras* se define como un perfil de acciones $s^* \in S$ tal que

$$H_i(s^*) \geq H_i(s^*/s_i) \qquad \text{para cada } s_i \in S_i \text{ y } i \in \{1, 2, \ldots, n\}$$

donde $s^*/s_i = (s_1^*, \ldots, s_i, \ldots, s_n^*)$. Entonces, en un equilibrio en estrategias puras, el pago para el jugador i no se incremente cuando él cambia su estrategia pura por alguna otra estrategia, mientras que los demás jugadores mantienen su estrategia en el equilibrio. También, un perfil de acciones s^* es un *equilibrio en estrategias dominantes* si s_i^* es una acción óptima independiente de la acción elegida por los otros jugadores, para cada $i \in N$. Esto es, si, para cada $i \in N$, la siguiente condición se cumple:

$$H_i(s/s_i^*) \geq H_i(s/s_i) \qquad \forall s_i \in S_i, \forall s \in S. \tag{4.1}$$

4.3. Compensaciones

En esta sección proponemos una manera de cómo calcular el vector de compensaciones que introducimos en la sección anterior. De aquí en adelante, consideraremos que tanto el conjunto de alternativas $K = \{1, \ldots, k\}$ como el conjunto de agentes $N = \{1, \ldots, n\}$ están dados y son fijos.

Para un subconjunto de agentes $S \subseteq N$ definimos

$$K_S^D := \{j \in K \mid D^j(S) \geq D^{j'}(S) \ \forall \ j' \in K \backslash \{j\}\}.$$

Este conjunto representa el subconjunto de alternativas que prefieren los agentes en S cuando ellos deciden actuar como un único agente. Así, $D^{j^*}(S)$, con $j^* \in K_S^D$, denota el máximo monto posible que los agentes en $S \subseteq N$ pueden obtener cuando consideramos nuevamente que los agentes están actuando como un único agente.

Asumamos que la decisión $j \in K$ se tomará. Definimos el juego cooperativo (N, v_j) con función característica

$$v_j(S) = \begin{cases} D^{j^*}(S) - D^j(S) & \text{para cada } S \subsetneq N; \\ 0 & \text{si } S = N. \end{cases} \tag{4.2}$$

con $j^* \in K_S^D$.

Este juego está modelando, para cada $S \subsetneq N$, un monto que los agentes en S pueden reclamar por tomar la alternativa j: si ellos fueran los que tomaran la decisión, ellos escogerían una alternativa j' tal que $j' \in K_S^D$, porque ellos obtendrían su máximo monto posible. Así, si $j \notin K_S^D$, ellos están obteniendo un monto menor. Entonces, $v_j(S)$ representa el máximo valor que ellos pueden reclamar por aceptar una alternativa que (posiblemente) no es buena para ellos. Si $j \in K_S^D$ entonces $v_j(S) = 0$, porque ellos están de acuerdo con la decisión tomada. Nótese que $v_j(S) \geq 0$ para cada $S \subseteq N$. El valor de la gran coalición es igual a cero porque queremos que los reclamos de los agentes sean satisfechos entre ellos, sin la necesidad de incluir ningún monto externo.

Definimos la *solución eficiente máxima* como sigue:

$$\varphi(D) = (j, \mathrm{Sh}(v_j)), \qquad \text{con} \qquad j \in K_N^D. \tag{4.3}$$

La solución anterior indica que la alternativa que se seguirá es aquella donde el monto obtenido por los agentes, considerándolos como un único agente, es máximo. Además, las compensaciones serán calculadas utilizando el valor de Shapley de (4.2).

Ejemplo 4.2. *Para el Ejemplo 4.1, construyamos el juego cooperativo* (N, v_j) *para* $j = 2$ *como sigue:*

$$v_j(\{1\}) = 12; \quad v_j(\{2\}) = 0; \quad v_j(\{1,2\}) = 0.$$

El agente 2 está satisfecho con la decisión de tomar la alternativa j *porque él está obteniendo su valor máximo posible. Esta es la razón por la que* $v(\{2\}) = 0$. *El agente 1 no está de acuerdo con tomar esta alternativa: él hubiera podido obtener 36 si se tomara la alternativa* 4. *Así, él reclama la diferencia (*$36-24 = 12$*) y con ello,* $v_j(\{1\}) = 6$. *Calculando el correspondiente vector de compensaciones de acuerdo con el valor de Shapley de (4.2) obtenemos*

$$\phi^D(j) = (6, -6)$$

y entonces, el monto total obtenido por los agentes es igual a $(30, 24)$.

Teorema 11. *Dado un problema* $D \in \mathbb{M}_{n\times k}$ *y una alternativa* $j^* \in K_N^D$

$$d_{ij^*} + Sh_i(v_{j^*}) > d_{ij} + Sh_i(v_j), \qquad \forall i \in N \tag{4.4}$$

para cada $j \in K \backslash K_N^D$ *y*

$$d_{ij^*} + Sh_i(v_{j^*}) = d_{ij} + Sh_i(v_j), \qquad \forall i \in N \tag{4.5}$$

para cada $j \in K_N^D \backslash \{j^*\}$.

Demostración. Notemos que $d_{ij^*} + \mathrm{Sh}_i(v_{j^*})$ puede escribirse como

$$d_{ij^*} + \sum_{\substack{S\subseteq N\\ S\ni i}} \frac{(s-1)!(n-s)!}{n!}\left[D^{j_1}(S) - D^{j^*}(S) - D^{j_2}(S\backslash\{i\}) + D^{j^*}(S\backslash\{i\})\right]$$
$$+ \frac{D^{j^*}(N\backslash\{i\}) - D^{j_3}(N\backslash\{i\})}{n}. \tag{4.6}$$

con $j_1 \in K_S^D$, $j_2 \in K_{S\backslash\{i\}}^D$ para cada $S \subseteq N$ tal que $S \ni i$, y $j_3 \in K_{N\backslash\{i\}}^D$.

Tenemos la misma expresión para $d_{ij} + \mathrm{Sh}_i(v_j)$, pero reemplazando j^* con j. Sustituimos (4.6) en (4.4) y, con manipulación algebraica y denotando

$$\eta_i(j^*) = d_{ij^*} + \frac{D^{j^*}(N\backslash\{i\})}{n} - \sum_{\substack{S\subseteq N\\ S\ni i}} \frac{(s-1)!(n-s)!}{n!}\left[D^{j^*}(S) - D^{j^*}(S\backslash\{i\})\right],$$

podemos escribir (4.4) de la siguiente manera:

$$\eta_i(j^*) > \eta_i(j).$$

Podemos ver que $D^j(S) - D^j(S\backslash\{i\}) = d_{ij}$ para cada $j \in K$ y cada $S \subseteq N$. Entonces,

$$\eta_i(j^*) = d_{ij^*} + \frac{D^{j^*}(N) - d_{ij^*}}{n} - \sum_{s=1}^{n-1} \frac{d_{ij^*}}{n} = \frac{D^{j^*}(N)}{n}$$

y luego, podemos escribir (4.4) como sigue:

$$D^{j^*}(N) > D^j(N),$$

pero esta expresión es verdadera porque $j \notin K_N^D$. Para probar (4.5), se siguen los mismos pasos y obtenemos una conclusión similar. Con ello, la prueba termina. $\square$

De acuerdo con el teorema anterior, si los agentes deciden calcular el vector de compensaciones utilizando el valor de Shapley de (4.2) entonces todos los agentes estarán satisfechos si la alternativa elegida es $j \in K_N^D$, porque ellos están obteniendo el máximo valor posible. Este es, bajo nuestro punto de vista, el principal resultado de este capítulo. Podemos establecer el siguiente marco de trabajo: Primero, establecemos la siguiente regla: *Las compensaciones serán calculadas utilizando el valor de Shapley de (4.2)*. Luego, preguntamos a los agentes: *¿Cuál alternativa prefieren?*. Así, debido a su racionalidad y al resultado del Teorema 11, todos elegirán una alternativa $j^* \in K_N^D$. Hay que hacer notar que no está importando cuál decisión en K_N^D es la que se hará. Así, tenemos una especie de estabilidad en el proceso de elección de la alternativa. Estudiaremos esta situación con mayor detalle en la Sección 4.4 con un enfoque basado en juegos no-cooperativos.

Ejemplo 4.3. *Para el problema del Ejemplo 4.1, notemos que* $K_N^D = \{d_3\}$. *Así, calculando el vector de compensaciones para la alternativa* 3 *obtenemos* $\phi^D(3) = (1, -1)$ *y el monto final que los agentes obtienen es igual a* $(33, 27)$. *Para las demás alternativas obtenemos* $\phi^D(1) = (4, -4)$, $\phi^D(2) = (6, -6)$ *y* $\phi^D(4) = (-8, 8)$. *Con estos vectores, los montos finales que los agentes estarían obteniendo son* $(26, 20), (30, 24)$ *y* $(28, 22)$ *con las alternativas 1,2, y 4, respectivamente. Claramente, ambos agentes prefieren la alternativa* 3.

Para cada problema $D \in \mathbb{M}_{n\times k}$, podemos construir un juego cooperativo (N, v^*) con función característica definida de la siguiente manera:

$$v^*(S) = D^j(S), \qquad \forall S \subseteq N, \text{ con } j \in K_S^D. \tag{4.7}$$

Este juego asigna, a cada coalición $S \subseteq N$, el máximo valor posible que los agentes en S pueden obtener si ellos pudieran elegir la alternativa que se tomará, considerando que están actuando como un único agente.

Teorema 12. *Para un problema* $D \in \mathbb{M}_{n\times k}$ *y una alternativa* $j \in K_N^D$, *la siguiente ecuación se cumple:*

$$Sh_i(v^*) = d_{ij} + Sh(v_j), \qquad \forall i \in N$$

con (N, v^*) *definido como en (4.7).*

Demostración. Para cada agente $i \in N$, la expresión $d_{ij} + \mathrm{Sh}_i(v_j)$, para cada $j \in K_N^D$, puede escribirse como en (4.6). Aplicando manipulación algebraica como hicimos en la prueba del Teorema 11 obtenemos

$$d_{ij}+\mathrm{Sh}_i(v_j)=\sum_{\substack{S\subseteq N\\ S\ni i}}\frac{(s-1)!(n-s)!}{n!}\left[D^{j_1}(S)-D^{j_2}(S\backslash\{i\})\right]+\frac{D^j(N)-D^{j_3}(N\backslash\{i\})}{n}.$$

con $j_1\in K_S^D$ y $j_2\in K_{S\backslash\{i\}}^D$ para cada $S\subseteq N$ con $S\ni i$ y $j_3\in K_{N\backslash\{i\}}^D$. Con ello,

$$d_{ij}+\mathrm{Sh}_i(v_j)=\sum_{S\ni i}\frac{(s-1)!(n-s)!}{n!}\left[D^{j_1}(S)-D^{j_2}(S)\right]$$

y entonces, la prueba termina. □

Así, el monto que recibe cada agente de acuerdo con (4.3) puede calcularse utilizando el valor de Shapley al juego dado en (4.7).

Ejemplo 4.4. *Construyamos el correspondiente juego cooperativo* (N,v^*) *para el problema del Ejemplo 4.1:*

$$v^*(\{1\})=36;\quad v^*(\{2\})=30;\quad v^*(\{1,2\})=60.$$

Si calculamos el valor de Shapley para este juego obtenemos Sh$(v^*)=(33,27)$*. Esta solución coincide con los resultados mostrados en el Ejemplo 4.3.*

Ahora estudiaremos propiedades adicionales de la solución propuesta. Para un problema $D\in\mathbb{M}_{n\times k}$ definimos

$$\widehat{K}:=\{j\in K\mid j\in K_S^D\ \text{ for some } S\subseteq N\}.\tag{4.8}$$

Este conjunto representa todas las posibles alternativas que son importantes para cualquier subconjunto de agentes, considerando que ellos pueden actuar como una única unidad.

Axioma 4.1. (Alternativas irrelevantes) *Para un problema* $D\in\mathbb{M}_{n\times k}$ *y* $\widehat{D}\in\mathbb{M}_{n\times\widehat{k}}$*, con* $\widehat{K}=\{1,\ldots,\widehat{k}\}$ *definido como en (4.8), una solución* φ *satisface el axioma de alternativas irrelevantes si*

$$d_{ij}+\phi_i(j)=\widehat{d}_{ij'}+\phi_i(j'),\qquad\forall i\in N$$

donde $\varphi(D)=(j,\phi(j))$ *y* $\varphi(\widehat{D})=(j',\phi(j'))$*.*

De acuerdo con este axioma, si removemos las alternativas que no le interesan a ningún subconjunto de agentes, la solución para el problema original y este nuevo problema reducido deben ser iguales.

Axioma 4.2. (Decisión unánime) *Sea* $j\in K$ *una alternativa tal que* $j\in K_S^D$ *para cada* $S\subseteq N$*. Entonces, una solución* φ *satisface el axioma de decisión unánime si*

$$\varphi(D)=(j,\bar{\mathbf{0}}),$$

donde $\bar{\mathbf{0}}$ *representa un vector con entradas todas iguales a cero.*

El axioma anterior establece que si existe una solución que todos los posibles subconjuntos de agentes prefieran entonces esta decisión debe ser la que se tome, y no debe haber compensaciones.

Proposición 4. *La solución (4.3) satisface los axiomas de alternativas irrelevantes y decisión unánime.*

DEMOSTRACIÓN. Claramente, el juego cooperativo dado en (4.7) no cambia si removemos el conjunto de alternativas irrelevantes. Así, por el Teorema 12, (4.3) satisface el axioma de alternativas irrelevantes. Por otra parte, si existe una alternativa $j \in K_S^D$ para cada $S \subseteq N$ entonces $v_j(S) = 0$ para cada $S \subseteq N$. Este hecho implica que el vector de compensaciones será $\phi(j) = \bar{\mathbf{0}}$ y entonces $v^*(S) = D^j(S)$ y $\mathrm{Sh}_i(v^*) = d_{ij}$ para cada $i \in N$. Así, (4.3) satisface el axioma de decisión unánime. Con ello, la prueba termina. □

4.4. Un enfoque no-cooperativo

En esta sección mostramos que la solución propuesta en (4.3) representa un resultado de estabilidad para el problema de decidir cuál alternativa debe elegirse, bajo un enfoque basado en juegos no-cooperativos.

Para un problema de decisión multi-agente $D \in \mathbb{M}_{n\times k}$ con conjunto de agentes $N = \{1, \dots, n\}$ y conjunto de alternativas $K = \{1, \dots, k\}$, definimos un juego no-cooperativo $(N, \{S_i\}_{i=1}^n, H)$ donde $S_i = K$ para todo $i \in N$ y función de pago $H : S_1 \times \cdots \times S_n \to \mathbb{R}^n$ dada de la siguiente manera:

$$H_i(k_1, \dots, k_n) = d_{ij^*} + \phi_i(j^*), \qquad \forall i \in N \tag{4.9}$$

con

$$j^* = \underset{j\in\{k_1,\dots,k_n\}}{\operatorname{argmax}} \left\{D^j(N)\right\}$$

y vector de compensaciones ϕ definido como el valor de Shapley de (4.2). Le llamaremos a esto juego un *juego de decisión multi-agente* o más brevemente, un MADG.

De acuerdo con un MADG, cada agente puede elegir una alternativa: si los agentes están de acuerdo y eligieron todos la misma alternativa $j \in K$, cada agente $i \in N$ obtiene como pago $d_{ij} + \phi_i(j)$. Cuando no hay acuerdo entre ellos, la decisión j^* que se tomará será aquella en donde el monto obtenido por los agentes, considerándolos como un único agente, es máximo. Luego, cada agente obtendrá $d_{ij^*} + \phi_i(j^*)$.

Teorema 13. *Para un problema de decisión multi-agente y su MADG asociado, el punto*

$$x^* = (j^*, j^*, \dots, j^*) \tag{4.10}$$

es

1. un equilibrio en estrategias puras,

2. un equilibrio en estrategias dominantes,

para cada $j^* \in K_N^D$.

DEMOSTRACIÓN. Para probar la parte 1 del teorema anterior es necesario verificar que $H_i(j^*) \geq H_i(j^*/s)$ para cada $s \in S_i$. Pero, debido a (4.10) y al resultado dado en el Teorema 11, la desigualdad anterior es una conclusión directa.

Para probar la parte 2, necesitamos verificar que la condición (4.1) se cumple para cada agente. Si el agente i siempre elige jugar las estrategia j^* él está asegurando obtener su máximo valor posible, dado el Teorema 11 y la función de pago definida con anterioridad. Así, jugar j^* es la mejor alternativa para el jugador i contra las estrategias de los otros jugadores. Esto verifica la condición (4.1) y por lo tanto, la prueba termina. □

El resultado obtenido en el teorema anterior indica que bajo el esquema de vectores de compensación que estamos proponiendo, y dada la racionalidad de los agentes, cada uno de ellos preferirá la misma alternativa. Esto elimina el problema del desacuerdo entre ellos. Además, el monto que están recibiendo de acuerdo con esta alternativa es el máximo posible, bajo este mismo esquema de vectores compensatorios.

Ejemplo 4.5. *Para el problema de los agentes viajeros del Ejemplo 4.1, el juego no-cooperativo asociado a este problema se esquematiza en la siguiente tabla:*

	1	*2*	*3*	*4*
1	*26,20*	*30,24*	*33,27*	*28,22*
2	*30,24*	*30,24*	*33,27*	*30,24*
3	*33,27*	*33,27*	*33,27*	*33,27*
4	*28,22*	*30,24*	*33,27*	*28,22*

donde cada renglón corresponde con una estrategia del agente 1 y cada columna corresponde con una estrategia del agente 2. Podemos notar que el perfil de acciones $(3, 3)$ *es un equilibrio en estrategias puras. Además, para cada agente, la estrategia* 3 *es una estrategia dominante.*

4.5. Conclusiones

En este capítulo estamos proponiendo una solución para problemas donde debe elegirse una única decisión entre un conjunto de ellas, donde los agentes involucrados no necesariamente tienen predilección sobre la misma decisión. Ello puede llevar a situaciones de discusión sobre cómo y cuál debe ser la decisión que debe tomarse. En las secciones anteriores proponemos una solución basándonos en que los agentes se compensan entre ellos por el hecho de que (posiblemente) no se les esté favoreciendo con la decisión tomada. Dado que no queremos que existan incentivos externos (o dinero dado exógenamente) se requerirá que la suma de las compensaciones entre los agentes sea igual a cero. Nuestra solución se basa en el cálculo de dichas compensaciones utilizando juegos cooperativos, y con ello, mostramos que nuestra solución propone una decisión que favorece a todos los agentes, dado que, bajo este esquema de cálculo de las citadas compensaciones, cada agente obtiene el mayor monto posible con esta decisión.

Capítulo 5

Repartición de incentivos

Ene este capítulo tratamos el problema de distribuir un estado dado entre un conjunto de agentes de acuerdo a su preferencia sobre un conjunto de categorías. En contraste con las situaciones de asignación con multi-categorías (*multi-issue allocation situations*) donde cada agente reclama una parte del estado, en este modelo la distribución del monto debe hacerse tomando en cuenta cómo se comporta cada agente en cada categoría. Caracterizamos una familia de soluciones para estas situaciones. Adicionalmente, proponemos dos propiedades para una solución y con ellas surge otro problema: la necesidad de encontrar un sistema de precios para cada unidad de cada categoría. También aplicamos teoría clásica de la negociación para resolver el problema y mostramos los resultados obtenidos.

Cabe hacer mención que los resultados de este capítulo ya se encuentran publicados en la revista *Applied Mathematical Sciences*.

5.1. Introducción

En un típico problema de bancarrota (presentado por O´Neill [30]) es necesario distribuir un estado entre un conjunto de agentes, donde cada agente reclama una parte de dicho estado. Cuando la suma de los reclamos excede al estado total es necesario proporcionar mecanismos de distribución tan justos como sean posible, dado que no es posible satisfacer las demandas de los agentes en su totalidad.

Como una extensión del problema de bancarrota original, Kaminski [20] considera situaciones relacionadas con un vector de demandas para cada agente, donde cada uno de ellos asigna diferentes prioridades para cada reclamo. Calleja et al. [12] introducen las situaciones de asignación multi-categorías. Ellos suponen que cada reclamo se origina de una categoría, mientras que una categoría se considera como una razón por lo cual el estado debe ser dividido. Ellos proveen una generalización de la solución de bancarrota propuesta por O´Neill [30]. Las situaciones de asignación multi-categorías han sido estudiadas por diversos autores como González-Alcón et al. [15] y Bergantiños et al. [6].

En este trabajo consideramos que cada agente tiene una medida de desempeño dentro de un conjunto de categorías. Nuestro problema es cómo dividir un monto $r \in \mathbb{R}$ entre los agentes considerando cómo fue su desempeño dentro de cada categoría. Para nosotros, las categorías representan clases o situaciones en la que los agentes son evaluados. Ilustraremos nuestro problema con el siguiente ejemplo: Un centro de investigación recibe, debido a su productividad, un bono económico de parte del gobierno. Esta productividad es el resultado del trabajo de los investigadores de dicho centro. La dirección necesita distribuir este bono entre los investigadores, y para ello considera tres categorías de evaluación: publicaciones, difusión del conocimiento y docencia. Cada investigador tiene un perfil en cada una de estas actividades. Nuestro objetivo es proveer algún proceso que nos ayude a realizar esta repartición basándonos en dichos perfiles.

En este estudio consideraremos un enfoque axiomático, proporcionando una caracterización para una familia de soluciones de nuestro problema. Lo haremos adaptando las bien conocidas propiedades de eficiencia, aditividad y recompensas igualitarias a nuestro contexto. El resultado que mostramos puede ser utilizado también en situaciones de asignación multi-categorías. También obtenemos una generalización de la solución de iguales ganancias para nuestro problema. Finalmente, a manera de ejercicio, resolvemos el problema utilizando técnicas y soluciones clásicas de la teoría de negociación para resolver el problema.

5.2. Notación y preliminares

Sea $N = \{1, \ldots, n\}$ el conjunto de agentes y $M = \{1, \ldots, m\}$ el conjunto de categorías. Una matriz $X \in \mathbb{R}_+^{M \times N}$ representa el desempeño de los agentes en cada una de las categorías. Así, un elemento $x_{kj} \geq 0$ de X indica el desempeño del agente $j \in N$ en la categoría $k \in M$. Nos referiremos a esta matriz como una *matriz de desempeño.*

Dada una matriz de desempeño X y $k \in M$, denotamos como

$$X_k = \sum_{j \in N} x_{kj}, \quad \text{y} \quad \overline{X_k} = \frac{X_k}{n},$$

el desempeño total y el desempeño promedio de la categoría k, respectivamente.

Un *problema de distribución de incentivos*, o simplemente, un *problema de incentivos*, es una pareja (X, r), donde $X \in \mathbb{R}_+^{M \times N}$ es una matriz de desempeño y $r \in \mathbb{R}$ representa el monto que debe distribuirse entre los agentes. Definimos la suma y el producto escalar para problemas de incentivos de la siguiente manera: para (X_1, r_1), (X_2, r_2) y $\lambda \in \mathbb{R}$, $(X_1, r_1) + (X_2, r_2) = (X_1 + X_2, r_1 + r_2)$ y

$\lambda(X_1, r_1) = (\lambda X_1, \lambda r_1)$.

Definimos una *solución* para un problema de incentivos como un operador $\varphi : \mathbb{R}_+^{M\times N} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$, donde $\varphi_j(X, r)$ representa el monto que se asigna al agente j de acuerdo a su desempeño dado en la matriz X cuando un monto r es el que debe distribuirse.

5.3. Caracterización

En esta sección presentaremos nuestro resultado principal. Vamos a proporcionar una familia de soluciones para un problema de incentivos

Axioma 5.1. (Aditividad). *Para una pareja de matrices de desempeño $X_1, X_2 \in \mathbb{R}_+^{M\times N}$ y $r_1, r_2, \lambda \in \mathbb{R}$, una solución $\varphi : \mathbb{R}_+^{M\times N} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$ satisface el axioma de aditividad si*

$$\varphi(\lambda X_1, \lambda r_1) + \varphi(\lambda X_2, \lambda r_2) = \lambda\varphi(X_1 + X_2, r_1 + r_2).$$

La idea de esta propiedad es la siguiente: supónganse dos problemas de incentivos, cada una de ellos proviniendo de diferentes conceptos. El axioma de aditividad garantiza que la suma de los incentivos recibidos en cada problema debe ser igual a los incentivos de un único problema con matriz de desempeños igual a la suma de las matrices de desempeño de los conceptos individuales.

Axioma 5.2. (Tratamiento igualitario) *Una solución $\varphi : \mathbb{R}_+^{M\times N} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$ satisface el axioma de tratamiento igualitario si para cada par de agentes $i, j \in N$ tal que $x_{ki} = x_{kj}$ para cada $k \in M$ en una matriz de desempeño dada X, se tiene que $\varphi_i(X, r) = \varphi_j(X, r)$.*

Axioma 5.3. (Eficiencia) *Una solución $\varphi : \mathbb{R}_+^{M\times N} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$ satisface el axioma de eficiencia si*

$$\sum_{j\in N} \varphi_j(X, r) = r$$

para cada $X \in \mathbb{R}_+^{M\times N}$ y $r \in \mathbb{R}$.

De acuerdo a este axioma, el monto $r \in \mathbb{R}$ debe distribuirse entre todos los agentes.

Teorema 14. *Una solución para un problema de incentivos satisface los axiomas de aditividad, tratamiento igualitario y eficiencia sí y sólo si puede escribirse de la siguiente manera:*

$$\varphi_j(X, r) = \frac{r}{n} + \sum_{k\in M} \beta_k \left(x_{kj} - \overline{X_k}\right) \qquad \forall\ j \in N \tag{5.1}$$

para un conjunto de constantes $\beta_k \in \mathbb{R}$ para todo $k \in M$, y para todo $X \in \mathbb{R}_+^{M\times N}$, $r \in \mathbb{R}$.

Demostración. Primero probaremos que toda solución que satisfaga los axiomas de aditividad, tratamiento igualitario y eficiencia puede escribirse como (5.1). Para todo $k \in M$, $i \in N$, definimos $E_{ki} \in \mathbb{R}_+^{M\times N}$, la matriz cuya ki-ésima entrada es igual a uno y cero en las demás. Por las operaciones de suma y producto escalar para un problema de incentivos tenemos que

$$(X, r) = \sum_{k=1}^{m}\sum_{i=1}^{n} x_{ki}(E_{ki}, r_{ki})$$

con $r_{ki} \in \mathbb{R}$ tal que

$$\sum_{k=1}^{m}\sum_{i=1}^{n} x_{ki} r_{ki} = r$$

para todo $X \in \mathbb{R}_+^{M\times N}$ y $r \in \mathbb{R}$. También tenemos que

$$(E_{ki}, r_{ki}) = (E_{ki}, 0) + (E_0, r_{ki})$$

donde $E_0 \in \mathbb{R}_+^{M\times N}$ es la matriz cero. Aplicando el axioma de aditividad

$$\varphi_j(X, r) = \sum_{k=1}^{m}\sum_{i=1}^{n} x_{ki}\left[\varphi_j(E_{ki}, 0) + \varphi_j(E_0, r_{ki})\right] \qquad \forall j \in N. \tag{5.2}$$

Por los axiomas de tratamiento igualitario y eficiencia tenemos que

$$\varphi_j(E_0, r_{kl}) = \frac{r_{ki}}{n} \qquad \text{y entonces} \qquad \sum_{k=1}^{m}\sum_{i=1}^{n} x_{ki}\varphi_j(E_0, r_{ki}) = \frac{r}{n}. \tag{5.3}$$

Para cada $k \in M$,$i \in N$ y por el axioma de tratamiento igualitario tenemos, para todo $j \in N$,

$$\varphi_j(E_{ki}, 0) = \begin{cases} \alpha_k, & \text{si } j = i \\ \mu_k, & \text{en otro caso} \end{cases}$$

y entonces

$$\sum_{k=1}^{m}\sum_{i=1}^{n} x_{ki}\varphi_j(E_{ki}, 0) = \sum_{k=1}^{m}\left(x_{ki}\alpha_k + \sum_{\substack{i=1\\ i\neq j}}^{n} x_{ki}\mu_k\right).$$

El axioma de eficiencia implica que $\alpha_k + (n-1)\mu_k = 0$ para cada $k \in M$. Sustituyendo en la última ecuación obtenemos

$$\sum_{k=1}^{m}\sum_{i=1}^{n} x_{ki}\varphi_j(E_{ki}, 0) = \sum_{k=1}^{m}\sum_{i=1}^{n} x_{ki}\mu_k - n\sum_{k=1}^{m} x_{kj}\mu_k = \sum_{k=1}^{m} X_k\mu_k - n\sum_{k=1}^{m} x_{kj}\mu_k.$$

Haciendo el cambio de variable $\mu_k = -\beta_k/n$ se obtiene

$$\sum_{k=1}^{m}\sum_{i=1}^{n} x_{ki}\varphi_j(E_{ki}, 0) = \sum_{k=1}^{m} \beta_k(x_{kj} - \overline{X_k}). \tag{5.4}$$

Sustituyendo (5.3) y (5.4) en (5.2) obtenemos el resultado.

Ahora necesitamos probar que (5.1), para un conjunto de constantes $\beta_k \in \mathbb{R}$ para todo $k \in M$, satisface los axiomas mencionados en el teorema. Estas pruebas pueden hacerse de manera directa, por lo que las omitimos. $\square$

La solución (5.1) indica cómo se realiza la división del estado. En un primer paso, cada agente recibe la misma parte del estado (i.e. r/n). Luego, necesitamos verificar el desempeño de cada agente $j \in N$ en cada categoría $k \in M$: si su desempeño es mejor que el desempeño promedio, una cantidad β_k se añade a lo que inicialmente se le había repartido por cada unidad de diferencia entre su desempeño y el desempeño promedio. Por otra parte, si su desempeño es menor que el promedio, esta cantidad le es restada. Luego de hacer esto por cada categoría, el monto resultante para cada agente j es (5.1).

El conjunto de constantes $\{\beta_k\}_{k=1}^{M}$ representa un peso por cada categoría, y podemos suponer que éstas se dan exógenamente. Este peso puede interpretarse como la importancia de cada categoría. Para $k, k' \in M$, $k \neq k'$ tal que $\beta_k > \beta_{k'}$, la diferencia entre el perfil en la categoría k y el desempeño promedio tiene una impacto mayor en el monto obtenido que para la categoría k'. Así, esto significa que es más conveniente tener un desempeño mejor en k que en k'. El problema relacionado con el conjunto de constantes $\{\beta_k\}_{k=1}^{M}$ se considerará más adelante

Remark 1. Los tres axiomas son necesarios e independientes

- $\psi(X, r) = 2 \cdot \varphi(X, r)$ satisface aditividad y tratamiento igualitario.
- $\psi_j(X, r) = \left(\frac{\sum_{k\in M} x_{kj}}{\sum_{k\in M} X_k}\right) r$, para todo $j \in N$, satisface tratamiento igualitario y eficiencia.
- $\psi_j(X, r) = \begin{cases} r, & \text{si } j = 1 \\ 0, & \text{en otro caso.} \end{cases}$, para $n \geq 2$, satisface aditividad y eficiencia.

Si consideramos propiedades alternativas, podemos proporcionar otros resultados. Denotemos por $\mathbb{P}^m$ al conjunto de matrices de permutación de $m \times m$.

Axioma 5.4. (Simetría de categorías) *Una solución* $\varphi : \mathbb{R}_+^{M\times N} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$ *satisface el axioma de simetría de categorías si para cada matriz de permutación* $P \in \mathbb{P}^m$

$$\varphi(X, r) = \varphi(PX, r)$$

para todo $X \in \mathbb{R}_+^{M\times N}$ *y* $r \in \mathbb{R}$.

De acuerdo con este axioma, la solución no toma en cuenta el orden de las categorías, i.e. las características externas de ellas no deben tomarse en cuenta.

Teorema 15. *Una solución para un problema de incentivos satisface los axiomas de aditividad, tratamiento igualitario, simetría de categorías y eficiencia sí y sólo si puede escribirse como*

$$\varphi_j(X,r) = \frac{r}{n} + \beta \sum_{k\in M} \left(x_{kj} - \overline{X_k}\right) \qquad \forall\ j \in N \tag{5.5}$$

para una constante $\beta \in \mathbb{R}$, para todo $X \in \mathbb{R}_+^{M\times N}$ y $r \in \mathbb{R}$.

Demostración. La prueba sigue la misma dirección que la prueba del Teorema 14. La principal diferencia es la siguiente: Aplicando el axioma de simetría de categorías obtenemos

$$\varphi_j(E_{ki},0) = \begin{cases} \alpha, & \text{si } j=i \\ \mu, & \text{en otro caso} \end{cases} \qquad \forall j \in N$$

dado que $E_{ki} = PE_{li}$ para todo $i \in N$, $k \in M$, $l \in M\backslash\{k\}$ y algún $P \in \mathbb{P}^m$. Así, por el axioma de simetría tenemos que $\alpha+(n-1)\mu = 0$. Utilizando esta ecuación, la prueba sigue los mismos pasos del Teorema 14, por lo que los omitimos. Adicionalmente, es necesario probar que (5.5) satisface el axioma de simetría de categorías, pero esta prueba puede hacerse de manera directa, por lo que la omitimos. $\square$

Axioma 5.5. (División trivial) *Una solución $\varphi : \mathbb{R}_+^{M\times N} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$ satisface el axioma de división trivial si*

$$\varphi_j(X, \sum_{k=1}^{m}\sum_{i=1}^{n} x_{ki}) = \sum_{k=1}^{m} x_{kj} \qquad \forall j \in N$$

para todo $X \in \mathbb{R}_+^{M\times N}$.

De acuerdo con el axioma anterior, si el estado a dividirse es igual a la suma de los desempeños individuales, una distribución trivial debe ser el resultado donde cada unidad de desempeño se paga a una unidad del estado.

Teorema 16. *Una solución para un problema de incentivos satisface los axiomas de aditividad, tratamiento igualitario, simetría de categorías, división trivial y eficiencia sí y sólo si puede escribirse como:*

$$\varphi_j(X,r) = \frac{r}{n} + \sum_{k\in M} \left(x_{kj} - \overline{X_k}\right) \qquad \forall\ j \in N \tag{5.6}$$

para todo $X \in \mathbb{R}_+^{M\times N}$ y $r \in \mathbb{R}$.

Demostración. La fórmula (5.5) nos proporciona una familia de soluciones que satisface los axiomas de aditividad, tratamiento igualitario, simetría de categorías y eficiencia. Sea (X,r) un problema de incentivos con $r = \sum_{k=1}^{m}\sum_{i=1}^{n} x_{ki}$. Con ello, tenemos que

$$\varphi_j(X,r) = \frac{r}{n} + \beta \sum_{k\in M} x_{kj} - \beta\frac{r}{n} \qquad \forall\ j \in N.$$

Aplicando el axioma de división trivial, obtenemos $\varphi_j(X,r) = \sum_{k=1}^{m} x_{kj}$. Sustituyendo en la última ecuación y resolviendo para β, obtenemos $\beta = 1$, y sustituyendo en (5.5) obtenemos (5.6). Finalmente, necesitamos probar que (5.6) satisface el axioma de división trivial, pero esto puede hacerse de manera directa, por lo que lo omitimos. □

Con manipulación algebraica, la solución (5.6) puede escribirse como

$$\varphi_j(X,r) = \sum_{k\in M} x_{kj} + \frac{1}{n}\left(r - \sum_{k=1}^{m}\sum_{i=1}^{n} x_{ki}\right)$$

y entonces, la solución (5.6) puede considerarse como una generalización de la *soluciones de iguales ganancias* para problemas de bancarrota.

Ejemplo 5.1. *Considérese un grupo de tres investigadores $N = \{1,2,3\}$ y dos categorías, el número de cursos dictados ($k = 1$) y el número de artículos publicados ($k = 2$). Su desempeño en estas categorías en un cierto período de tiempo está dado en la siguiente matriz de desempeños:*

$$X = \begin{bmatrix} 8 & 6 & 4 \\ 2 & 1 & 3 \end{bmatrix}.$$

Existe un monto de 18 (en algunas unidades) para dividir entre los investigadores de acuerdo a su perfil. Claramente, estamos ante un problema de incentivos. Aplicando (5.6) obtenemos

$$\varphi(X,r) = (8,5,5).$$

Este ejemplo muestra una debilidad de la solución (5.6), aunque realmente es una debilidad de la familia de soluciones dada en el Teorema 15: le asigna a cada uno de las categorías la misma importancia, en contraste con la familia de soluciones dada en (5.1). Esta es la razón por la que los investigadores 2 y 3 obtienen el mismo monto. Esta puede ser una propiedad controversial porque, en algunos contextos, los esfuerzos que se requieren para ejecutar una unidad en las diferentes categorías varían entre una y otra.

Para una matriz de desempeño $X \in \mathbb{R}_+^{M\times N}$ decimos que X' es una *matrix reducida de desempeños de* X si el desempeño de un subconjunto de agentes en N, los agentes *involucrados*, se colapsa dentro de un único agente, el agente *representante*. El desempeño del agente representante es igual a la suma de los desempeños de los agentes involucrados.

Axioma 5.6. (Reducción) *Sea $X \in \mathbb{R}_+^{M\times N}$ una matriz de desempeños y X' una matriz reducida de X, con agente representante j^* y conjunto de agentes involucrados $T \subset N$. Una solución φ para problemas de incentivos satisface el axioma de reducción si*

$$\varphi_{j^*}(X',r) = \sum_{h\in T} \varphi_h(X,r).$$

De acuerdo a este axioma, amalgamar agentes en uno solo no representa ninguna ventaja.

Axioma 5.7. (Proporcionalidad) *Sea* $X \in \mathbb{R}_+^{M\times N}$ *una matriz de desempeños tal que existen dos agentes* $i, j \in N$ *y* $\alpha \in \mathbb{R}_+$ *tal que* $x_{kj} = \alpha x_{ki}$ *para cada* $k \in M$. *Una solución* φ *para un problema de incentivos satisface el axioma de proporcionalidad si*

$$\varphi_j(X, r) = \alpha\varphi_i(X, r).$$

Este axioma establece que los agentes con desempeño proporcional en cada categoría, deben obtener montos proporcionales.

Lema 2. *Si una solución para el problema de incentivos satisface los axiomas de aditividad, tratamiento igualitario, eficiencia y reducción (proporcionalidad) entonces*

$$\sum_{k\in M} \beta_k X_k = r \tag{5.7}$$

para todo $X \in \mathbb{R}_+^{M\times N}$, $r \in \mathbb{R}$ *donde* $\{\beta_k\}_{k=1}^m$ *son dados de acuerdo a (5.1).*

Demostración. Supóngase que (5.1) satisface el axioma de reducción. Sea $X \in \mathbb{R}_+^{M\times N}$ una matriz de desempeños y X' una matriz reducida de X tal que $\{i, j\} \in N$ es el conjunto de agentes involucrados y j^* es el agente representante. Nótese que $x'_{kj^*} = x_{ki} + x_{kj}$ para todo $k \in M$. Entonces, aplicando el axioma de reducción tenemos que

$$\frac{r}{n-1}+\sum_{k\in M}\beta_k\left(x_{ki}+x_{kj}-\sum_{h\in N}\frac{x_{kh}}{n-1}\right)=\frac{2r}{n}+\sum_{k\in M}\beta_k\left(x_{ki}+x_{kj}-2\sum_{h\in N}\frac{x_{kh}}{n}\right).$$

Aplicando manipulación algebraica tenemos

$$\sum_{k\in M}\left(\beta_k\cdot\sum_{h\in N}\frac{x_{kh}(n-2)}{n(n-1)}\right)=\frac{r(n-2)}{n(n-1)}$$

y entonces obtenemos el resultado.

Sea $X \in \mathbb{R}_+^{M\times N}$ una matriz de desempeños tal que existen $i, j \in N$ con $x_{jk} = \alpha x_{ik}$ para todo $k \in M$ y $\alpha \in \mathbb{R}_+$. Ahora, supóngase que (5.1) satisface el axioma de proporcionalidad. Entonces

$$\frac{r}{n}-\sum_{k\in M}\beta_k\overline{X_k}=\frac{\alpha r}{n}-\alpha\sum_{k\in M}\beta_k\overline{X_k}.$$

Reordenando y simplificando términos obtenemos

$$\frac{r(\alpha-1)}{n}=\sum_{k\in M}\beta_k\frac{X_k(\alpha-1)}{n}$$

que es equivalente a (5.7). □

Teorema 17. *Una solución $\varphi : \mathbb{R}_+^{M\times N} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$ satisface los axiomas de aditividad, tratamiento igualitario, eficiencia, reducción (proporcionalidad) sí y sólo si existe un conjunto de constantes $\beta_k \in \mathbb{R}$, $k \in M$, tal que*

$$\varphi_j(X, r) = \sum_{k\in M} \beta_k x_{kj} \qquad \forall j \in N \tag{5.8}$$

para todo $X \in \mathbb{R}_+^{M\times N}$ y $r \in \mathbb{R}$.

Demostración. Supóngase una solución φ que satisfaga los axiomas de aditividad, tratamiento igualitario, eficiencia y reducción (proporcionalidad). Por el Lema 2, podemos sustituir (5.7) en (5.1), y haciendo manipulación algebraica obtenemos el resultado. Ahora, necesitamos probar que (5.8) satisface los axiomas mencionados en el teorema. Esto puede hacerse de manera directa por lo que la prueba se omite y con ello, la demostración termina. □

En la ecuación (5.7) podemos considerar a β_k como el precio al que se va a pagar cada unidad de cada categoría $k \in M$. Si queremos una solución aditiva, eficiente y que cumpla el axioma de tratamiento igualitario así como los axiomas de reducción y proporcionalidad, necesitamos encontrar estos precios, de tal forma que el estado distribuido sea r. Por la ecuación (5.7), estos precios dependen de la matriz de desempeños. El inconveniente es que la existencia de dichos precios viola la existencia de algunas asunciones, como el axioma de aditividad.

5.4. Un enfoque de negociación

Formalmente, un *problema de negociación* n-personal es una pareja (S, d) donde $d \in \mathbb{R}^n$ y $S \subset \mathbb{R}^n$ es un conjunto convexo y compacto, y donde hay al menos un punto de S que domina estrictamente a d. Sea $N = \{1, \ldots, n\}$ el conjunto de agentes. Cada punto de S indica la utilidad lograda por lo agentes a través de la elección de una de las posibles alternativas. Si no hay acuerdo con esta solución, se asigna como solución al vector d. Adicionalmente, se asume que la utilidad es de libre disponibilidad: esto es, si $x \in X$ y $x_i \geq y_i \geq d_i$ para algún $i \in N$, entonces $y \in S$.

En esta sección utilizaremos teoría clásica de la negociación para resolver el problema de repartición de estímulos. Sea (X, r) un problema de incentivos. Consideraremos a $d = (0, \ldots, 0) \in \mathbb{R}^n$ como el punto de desacuerdo: si los agentes no logran ponerse de acuerdo sobre cómo dividir el estado, nadie obtiene incentivo alguno. Nosotros estamos interesados en encontrar soluciones eficientes no-negativas, i.e. $\varphi : \mathbb{R}_+^{M\times N} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$ donde $\varphi_j(X, r) \geq 0$ para todo $j \in N$ y $\sum_{j\in N} \varphi_j(X, r) = r$. Así que, por la propiedad de libre disponibilidad, tenemos que $S = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \sum_{i\in N} x_i \leq r, x_i \geq 0, \forall i \in N\}$. Este conjunto representa las posibles formas de dividir el estado r.

Existen varias soluciones bien conocidas para el problema de negociación. Trabajaremos con tres de ellas: la solución de Nash [29], $N(S,d) \in \mathbb{R}^n$, se obtiene maximizando el producto de la diferencia de las utilidades con el punto de desacuerdo. La solución de Kalai-Smorodinsky [19], $KS(S,d) \in \mathbb{R}^n$, establece ganancias proporcionales de acuerdo a las situaciones más optimistas para cada agente desde el punto de desacuerdo. La solución de Yu [41], $Y(S,d) \in \mathbb{R}^n$, trata de realizar una repartición que satisfaga a todos lo más posible. Para nuestro problema, estas soluciones asignan el mismo punto como solución, sin importar que matriz de desempeño se esté considerando, debido a la simetría de la región S. Esto es, $N(S,d) = KS(S,d) = Y(S,d) = (r/n,\ldots,r/n)$.

Consideremos un problema de incentivos con soluciones de acuerdo con (5.1). También requeriremos que la condición (5.8) se cumpla con $\beta_k \geq 0$ para todo $k \in M$, para poder interpretar las constantes β_k como precios unitarios. Nos referiremos a estos problemas como problemas de incentivos $\beta-$restringidos.

Lema 3. *El conjunto de alternativas para una problema de incentivos $\beta-$restringido está contenido en el conjunto de alternativas del mismo problema pero sin restricciones.*

Demostración. Sea (X,r) un problema de incentivos $\beta-$restringido. De acuerdo con (5.8), el valor máximo para todo β_k es r/X_k cuando $X_k \neq 0$. Para todo $j \in N$ definimos

$$k^j = \operatorname*{argmax}_{k\in M} \left\{ \frac{r}{x_k}(x_{kj} - \overline{X_k}) \right\}.$$

Entonces, el monto máximo que puede asignársele a un agente $j \in N$, denotado por $\varphi_j^*(X,r)$ ocurre cuando $\beta_{k^j} = r/X_{k^j}$ y $\beta_k = 0$ en otro caso. Entonces, tenemos que

$$\varphi_j^*(X,r) = \frac{r}{n} + \frac{r}{X_{k^j}}(X_{k^j j} - \overline{X_{k^j}}) = \left(\frac{X_{k^j j}}{X_{k^j}}\right) r.$$

Sin restricciones, el monto máximo que un agente puede obtener es r. Así, como $\varphi_j^*(X,r) \in [0,r]$, la prueba termina. □

En la Figura 5.1 mostramos el conjunto de alternativas para el problema del Ejemplo 5.1 con y sin restricciones

Teorema 18. *Sea (X,r) un problema de incentivos $\beta-$restringido con conjunto de alternativas S y punto de desacuerdo $d = (0,\ldots,0)$. Para el problema de negociación (S,d) tenemos que:*

1. *La solución de Nash está dada por el punto S más cercano a $(r/n,\ldots,r/n) \in \mathbb{R}^n$.*

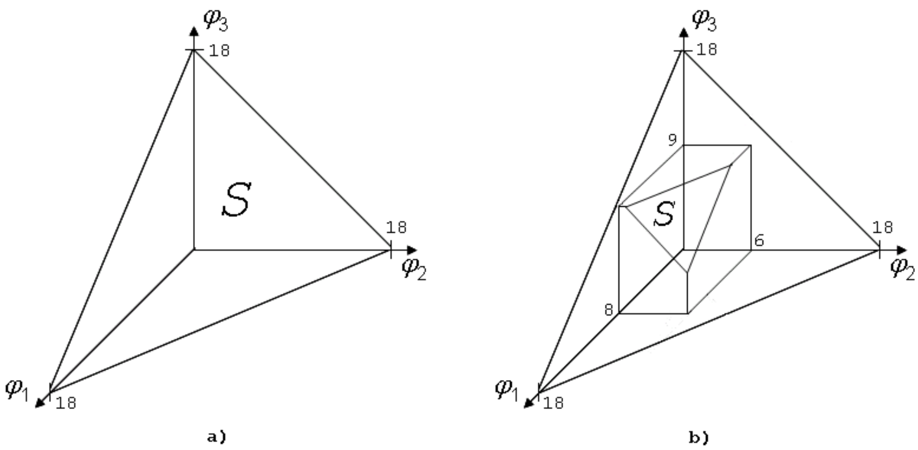

Figura 5.1: Conjunto de alternativas para el Ejemplo 5.1. En *a)*, el problema es sin restricciones. En *b)*, el problema es $\beta-$restringido.

2. La solución de Kalai-Smorodinsky está dada por

$$KS_j(S,d) = \left[\frac{\varphi_j^*(X,r)}{\displaystyle\sum_{h\in N} \varphi_h^*(X,r)} \right] r \qquad \forall j \in N$$

donde $\varphi_j^*(X,r)$ es el monto máximo que el agente $j \in N$ puede obtener en el problema.

3. La solución de Yu está dada por

$$Y_j(S,d) = \varphi_j^*(X,r) + \frac{1}{n}\left(r - \sum_{h\in N} \varphi_h^*(X,r) \right) \qquad \forall j \in N.$$

Demostración.

1. La solución de Nash está dada por el maximizador de

$$\prod_{j\in N} \varphi_j(X,r) \qquad \text{s.t.} \sum_{j\in N} \varphi_j(X,r) = r, \varphi_j(X,r) \geq 0\ \forall j \in N \tag{5.9}$$

en el conjunto de alternativas S. El maximizador de (5.9) es el punto $(r/n, \ldots, r/n)$. Si este punto está en S, ésta es la solución. En otro caso, el punto más cercano a éste en S será la solución.

2. La solución de Kalai-Smorodinsky corresponde al punto de intersección del hiperplano $\sum_{j\in N} \varphi_j(X,r) = r$ con la línea $(\varphi_1^*(X,r), \ldots, \varphi_n^*(X,r))t$.

Este punto lo denotamos como $KS_j(S,d) = \varphi_j^*(X,r)t$, con t satisfaciendo

$$r = t\sum_{j\in N}\varphi_j^*(X,r) \quad \Rightarrow \quad t = \frac{r}{\sum_{j\in N}\varphi_j^*(X,r)}.$$

Sustituyendo la última ecuación en $KS_j(S,d)$, obtenemos el resultado.

3. La solución de Yu corresponde al punto de intersección del hiperplano $\sum_{j\in N}\varphi_j(X,r) = r$ con la línea $(\varphi_1^*(X,r),\dots,\varphi_n^*(X,r)) - (1,\dots,1)t$. Este punto, $Y(S,d)$, está dado por $Y_j(S,d) = \varphi_j^*(X,r) - t$, con t satisfaciendo

$$\sum_{j\in N}(\varphi_j^*(X,r) - t) = r \quad \Rightarrow \quad t = \frac{1}{n}\left(\sum_{j\in N}\varphi_j^*(X,r) - r\right).$$

Sustituyendo este valor en la expresión de $Y_j(S,d)$, obtenemos el resultado.

□

5.5. Conclusiones

En este capítulo estudiamos el problema de reparto de incentivos. Proporcionamos toda una familia de soluciones así como una interpretación de cómo se realiza la distribución de acuerdo a la formulación obtenida. Dichas formulación se basa en unas constantes que pueden interpretarse como los precios unitarios de cada unidad de desempeño: es posible proporcionar nuevos y razonables axiomas que permitan caracterizar una solución única perteneciente a esta familia. Así mismo, proporcionamos una solución basándonos en el estudio clásico de la teoría de la negociación.

Capítulo 6

Un problema de división justa

En este capítulo proponemos un algoritmo para resolver un problema de división justa: queremos encontrar una manera de repartir una conjunto de bienes divisibles entre un conjunto de agentes tal que el agente que obtenga el monto más bajo obtenga lo máximo posible. Además, de acuerdo con la distribución encontrada, cada agente obtiene la misma valoración (generalmente en dinero) y éste es tan alto como es posible. Modelaremos esta situación como un problema de programación lineal y usaremos su problema dual para resolverlo. Para hacer esto, asociaremos una gráfica bipartita con cada conjunto de variables duales. El algoritmo presentado utilizará las relaciones representadas en ese tipo de gráficas para encontrar la solución óptima de los problemas primal y dual.

6.1. Introducción

El problema de *división justa* se relaciona con encontrar maneras de dividir un conjunto de m objetos entre n individuos. de *una manera justa*. Existen muchas posibles ideas sobre lo que es justo o no. Por ejemplo, puede significar que cada agente obtenga la misma proporción de los bienes o que la division satisfaga ciertos requerimientos, como ser libre de envidias. También, el problema considera que cada agente tiene una valoración positiva de cada objeto y que esta valoración debe tomarse en cuenta en el proceso de repartición. Con ello, el objetivo principal de la teoría de división justa es proporcionar procedimientos para llevar a cabo la distribución de los objetos (de acuerdo a alguna definición de justicia) y el estudio de las propiedades en tales divisiones.

Podemos identificar dos problemas de división justa de acuerdo al tipo de objetos que se están dividiendo: bienes divisibles (discretos) o indivisibles (continuos). En este capítulo trataremos con bienes divisibles. Nosotros proponemos un algoritmo para encontrar una repartición de los objetos tal que el agente que obtenga bienes con la menor valoración obtenga el mayor valor posible. En nuestro modelo, cada agente puede obtener cualquier fracción de cada bien; así, el valor que cada uno de ellos obtiene de cada bien es proporcional a la fracción de éste que se obtiene, y el valor total obtenido es la suma de los valores de las fracciones que obtiene. Con ello, es posible que cada agente obtenga una fracción de los bienes tal que el valor que obtiene de ellos es, al menos, $1/n$: esta situación ocurre cuando dividimos los bienes en n partes iguales y le damos una de las fracciones a cada agente.

Este capítulo está organizado de la siguiente manera: En la Sección 6.2 presentaremos la notación básica que usaremos a lo largo del mismo. Luego, en la Sección 6.3, presentaremos el problema de programación lineal que puede resolver nuestro problema y estudiamos algunas de sus propiedades. En la Sección 6.4 mostramos las ideas detrás de nuestro algoritmo: presentaremos el problema dual así como el concepto de una gráfica asociada a dicho problema. También mostraremos una versión general del algoritmo. En las siguientes subsecciones explicaremos los pasos involucrados en nuestro algoritmo para finalmente, mostrar su convergencia. Para finalizar, proponemos una interpretación al problema dual que surgió al momento de proponer la solución.

Los resultados que se muestran en este capítulo se encuentran actualmente en el proceso de arbitraje para su aparición en la revista *Operations Research: An International Journal.*

6.2. Definiciones y notaciones

El problema que trabajamos en este capítulo se refiere a cómo distribuir un conjunto de bienes continuamente divisibles entre un conjunto de agentes. Como resultado de esta distribución, cada agente recibe una porción de cada bien, y el valor que obtienen por cada bien es proporcional a la porción recibida. El valor total obtenido, por cada agente, corresponde a la suma de los valores de acuerdo a cada porción recibida de cada bien.

Sea $M = \{1, 2, \ldots, m\}$ el conjunto de bienes divisibles (o, por simplicidad, *bienes*) y $N = \{1, 2, \ldots, n\}$ el conjunto de agentes. Sea $\mathbb{M}_{mn}$ el conjunto de matrices reales con entradas estrictamente positivas tal que $\sum_{i \in M} a_{ij} = y$ para cada $j \in N$, para cada $A = (a_{ij})_{i \in M, j \in N} \in \mathbb{M}_{mn}$ y algún $y \in \mathbb{R}$.

Cada matriz $A \in \mathbb{M}_{mn}$ representa un *problema de distribución*. La entrada a_{ij} indica la valoración que cada agente j le da al bien i. En nuestro problema, todos los agentes tienen una valoración positiva de cada bien. También, la valoración total que cada agente tiene al conjunto total de bienes es la misma.

Una *solución* para un problema de distribución $A \in \mathbb{M}_{mn}$ es una matriz real $X = (x_{ij})_{i \in M, j \in N}$ tal que $\sum_{j \in N} x_{ij} = 1$ para cada $i \in M$. La entrada x_{ij} indica la fracción del bien i que se asigna al agente j.

Ejemplo 6.1. *Consideremos $m = 2$, $n = 3$ y el siguiente problema de distribución:*

$$A = \begin{bmatrix} 8 & 10 & 7 \\ 4 & 2 & 5 \end{bmatrix}.$$

Una solución para este problema podría ser

$$X = \begin{bmatrix} 0{,}5 & 0{,}5 & 0{,}0 \\ 0{,}5 & 0{,}3 & 0{,}2 \end{bmatrix}.$$

De acuerdo a la solución anterior, la mitad del bien 1 se asigna al agente 2 y la otra mitad, al agente 1; del segundo bien, la mitad se le asigna al agente 1, una quinta parte al agente 3 y el resto, al agente 2. Más aún, todos los bienes se distribuyen en su totalidad. El agente 1 obtiene bienes que el valora en 6; el agente 2 obtiene un monto total de $17/3$ *y así sucesivamente.*

Definición 6.1. *Diremos que una solución X para una problema de distribución $A \in \mathbb{M}_{mn}$ es igualitaria si el valor total obtenido de acuerdo a X para cada agente es el mismo. Esto es, X es igualitaria si*

$$\sum_{i \in M} a_{ij} x_{ij} = c \qquad \forall j \in N \text{ para algún } c \in \mathbb{R}.$$

La matriz de distribución que se muestra en el Ejemplo 6.1 no es igualitaria.

Una gráfica *bipartita* $g = (S_1, S_2, E)$ es una gráfica cuyos nodos se dividen en dos conjuntos disjuntos S_1 y S_2, y donde cada arista conecta un nodo en S_1 con un nodo de S_2. Esto es, $E \subseteq \{(i,j) \mid i \in S_1, j \in S_2\}$. Un *camino* entre dos nodos s_1, s_k en g es una secuencia de nodos $s_1, s_2, \ldots, s_{k-1}, s_k$ tal que existe una arista entre cada par de nodos consecutivos en la secuencia. Un *ciclo* es un camino donde $s_1 = s_k$. Un *árbol* es una gráfica sin ciclos tal que existe un camino entre cada par de nodos. Una subgráfica $g' = (S_1', S_2', E')$ de g es una gráfica con $S_1' \subseteq S$, $S_2' \subseteq S_2$ y $E' = \{(i,j) \in E \mid i \in S_1', j \in S_2'\}$. Una *componente* de g, g', es una subgráfica donde existe un camino entre cada par de nodos en g' pero sin caminos entre sus nodos y los nodos que no están en g'.

6.3. Encontrando una solución igualitaria

Un problema de distribución $A \in \mathbb{M}_{mn}$ puede tener varias soluciones igualitarias. Por ejemplo, una solución natural podría ser la matriz X donde $x_{ij} = 1/n$ para cada $i \in M$, $j \in N$. De acuerdo con esta distribución, cada objeto se divide en partes iguales (n partes) y uno de ellos se da a cada agente. Por eso, cada agente obtiene $1/n$ de su valoración total y, por el supuesto de que la valoración al conjunto de bienes es la misma, ellos obtienen el mismo monto. En esta sección mostramos como encontrar una distribución igualitaria tal que el agente que obtenga el monto menor obtiene el valor más grande posible.

Para hacer esto, podemos resolver el siguiente problema de programación lineal

$$\text{Max} \quad z \quad \text{sujeto a} \tag{6.1}$$

$$\sum_{i \in M} a_{ij} x_{ij} \geq z \qquad \forall j \in N \tag{6.2}$$

$$\sum_{j \in N} x_{ij} = 1 \qquad \forall i \in M \tag{6.3}$$

$$x_{ij} \geq 0 \qquad \forall i \in M, \forall j \in N. \tag{6.4}$$

De acuerdo con las restricciones (6.4), la fracción que cada agente obtiene de cada bien debe ser un número no negativo. Las restricciones (6.3) indican que cada bien debe ser dividido en su totalidad. Las desigualdades (6.2) están estableciendo que el agente que obtiene el monto menor obtiene el máximo valor posible. Si estas desigualdades se satisfacen con el signo de igualdad, la solución al problema será una solución igualitaria. Por el supuesto de que la valoración total de cada agente es la misma, todos ellos obtienen el mismo monto. Nótese que este supuesto no se está modelando en el problema de programación lineal.

Proposición 5. *Sea X^* una solución óptima a (6.1-6.4) y z^* el valor de la función objetivo asociado. Entonces,*

$$\sum_{i \in M} a_{ij} x^*_{ij} = z^* \qquad \forall j \in N.$$

Demostración. Haremos la prueba por contradicción. Supondremos que la Proposición 5 no es cierta; esto es, que existe un agente $k \in N$ tal que

$$\sum_{i \in M} a_{ik} x^*_{ik} = z_k > z^*.$$

Así, existe un subconjunto de bienes $I \subseteq M$ tal que

$$\sum_{i \in I} a_{ik}(x^*_{ik} - \epsilon_i) + \sum_{i \in M \setminus I} a_{ik} x_{ik} = z^*$$

para algunos valores $\{\epsilon_i > 0\}_{i \in I}$. Ahora, proponemos, para cada $i \in N$ y $j \in N$ e

$$\widetilde{x}_{ij} = \begin{cases} x^*_{ij} + \epsilon_i/n, & \text{si } i \in I,\ j \neq k; \\ x^*_{ij} - \epsilon_i + \epsilon_i/n, & \text{si } i \in I,\ j = k; \\ x^*_{ij}, & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

Entonces, tenemos

$$\widehat{z} = \min_{j \in N} \left\{ \sum_{i \in M} a_{ij} \widehat{x}_{ij} \right\} > z^*.$$

Así, X^* no puede ser una solución óptima de (6.1-6.4). Así, se tiene una contradicción y la prueba termina. □

Debido al resultado anterior, una solución al problema (6.1-6.4) es siempre una solución igualitaria. Aún más, porque (6.1-6.4) es un problema de maximización, la solución es lo mayor posible.

La solución que estamos proponiendo no es el resultado de un procedimiento que los agentes deben seguir para obtener la división, como el procesos del tipo *tu partes, yo escojo* o basados en *cuchillos móviles*. Se considera que un juez les ordena a los agentes distribuir un número fijo $c \in \mathbb{R}$ entre los bienes de acuerdo a su propia valoración y a sus preferencias. Cada agente ejecuta esta tarea de manera independiente y sin saber lo que los otros agentes están haciendo. Ya teniendo todas las valoraciones, el juez ejecuta la distribución de acuerdo con la solución que se está obteniendo.

6.4. El algoritmo

En esta sección mostraremos un algoritmo basado en gráficas bipartitas para buscar una solución óptima a (6.1-6.4). Primero, tenemos que identificar el número de variables básicas (en el sentido del método símplex) en una solución óptima.

Proposición 6. *La solución óptima para el problema de programación lineal dado en (6.1-6.4) tiene $m + n - 1$ variables básicas.*

Demostración. En el conjunto de desigualdades (6.2), podemos reemplazar el valor de z con el lado izquierdo de cualquier desigualdad. Así, podemos remover esta desigualdad de (6.2) debido a su redundancia. Así, el conjunto de n desigualdades puede escribirse como $n - 1$ ecuaciones, más las m ecuaciones dadas por (6.3). Con ello, obtenemos el número de variables básicas necesarias en una solución óptima. □

El problema dual correspondiente de (6.1-6.4) es

$$\text{Min} \quad w = \sum_{i \in M} v_i \quad \text{sujeto a} \tag{6.5}$$

$$v_i \geq a_{ij} u_j \qquad \forall i \in M, \forall j \in N \tag{6.6}$$

$$\sum_{j \in N} u_j = 1 \tag{6.7}$$

$$u_j \geq 0 \qquad \forall j \in N \tag{6.8}$$

donde estamos tomando el valor negativo de las variables duales u_j, $j \in N$ correspondientes a (6.2) para obtener un problema más conveniente.

Proposición 7. *Existe al menos una solución óptima al problema dual (6.5-6.8), donde $m+n-1$ desigualdades de (6.6) se satisfacen como igualdades.*

Demostración. De acuerdo con la Proposición 6, el problema (6.1-6.4) tiene $m+n-1$ variables óptimas básicas x_{ij}. Las condiciones Kuhn-Tucker correspondientes a (6.1-6.4) y (6.5-6.8) son $(v_i - a_{ij}u_j)x_{ij} = 0$. Sea B el subconjunto de variables x_{ij} en la base óptima de (6.1-6.4) tales que $v_{ij} - a_{ij}u_j = 0$. Si B contiene $m+n-1$ elementos, la prueba termina. En otro caso, podemos construir una nueva base óptima basada en B, donde por cada variables x_{hk} que añadimos a B, la ecuación $v_h - a_{hk}u_k = 0$ se mantiene. Así, después de completar la base tendremos el resultado. Para hacer esto, calculamos

$$x_{hk} = \underset{x_{ij}\notin B}{\operatorname{argmin}} \left\{ \frac{v_i}{a_{ij}u_j} \right\} \text{ y luego } \alpha = \frac{v_h}{a_{hk}u_k}.$$

Así, si actualizamos $u_k := \alpha \cdot u_k$ entonces tenemos que $v_h - a_{hk}u_k = 0$. Pero necesitamos asegurarnos que la ecuación $v_i - a_{ij}u_j = 0$ se siga cumpliendo para cada $x_{ij} \in B$ después de la actualización. Con ello, la *regla* es de la siguiente manera: para cada variable dual v_i que actualicemos, necesitamos también actualizar u_j para cada $x_{ij} \in B$. Igualmente, por cada variable dual u_j que actualicemos, necesitamos actualizar v_i, para cada $x_{ij} \in B$. La actualización se realiza siempre multiplicando la variable dual correspondiente por α. Aplicamos esta regla luego de cada actualización. Después de todas las posibles actualizaciones, calculamos

$$\widehat{v_i} = \frac{v_i}{S_U} \quad \forall i \in M; \qquad \widehat{u_j} = \frac{u_j}{S_U} \quad \forall j \in N; \quad \text{with} \quad S_U = \sum_{j=1}^{n} u_j \tag{6.9}$$

y añadimos x_{hk} a B. Entonces, ya tenemos un nuevo conjunto de variables duales $\widehat{u}, \widehat{v}$ tales que si $x_{ij} \in B$, la ecuación $\widehat{v_i} - a_{ij}\widehat{u_j} = 0$ se preserva. Por (6.9), estas nuevas variables óptimas satisfacen las restricciones (6.7). Escogemos la variables x_{hk} con valor α mínimo para asegurar que las restricciones (6.6) se cumplen para las nuevas variables duales. Así, ellas son factibles. Continuamos añadiendo variables a B hasta que tenga $m+n-1$ elementos. Lo que hicimos fue eliminar variables nulas de la base óptima original y añadimos variables nulas a B para obtener una nueva base. Así, por construcción, luego de completar la base óptima de (6.1-6.4) las variables duales $\widehat{u}$,$\widehat{v}$ son óptimas y $\widehat{v_i} - a_{ij}\widehat{u_j} = 0$ se cumple para cada x_{ij} en la nueva base. Entonces, por la Proposición 6, la prueba termina. $\square$

Definimos *vectores duales* $v \in \mathbb{R}^M$ y $u \in \mathbb{R}^N$, donde sus coordenadas están indexadas de acuerdo a los conjuntos M y N, respectivamente. Dado un problema de distribución $A \in \mathbb{M}_{mn}$ y los vectores duales u y v, definimos una gráfica bipartita $g = (M, N, E)$ donde el conjunto de aristas está dado por $E = \{(i,j) \mid i \in M, j \in N \text{ y } v_i = a_{ij}u_j\}$. Así, para un problema de distribución, tenemos una gráfica bipartita asociada con cada par de vectores duales u y v y viceversa. Nos referiremos a esta gráfica como una a-gráfica de u y v. Una arista (i,j) de una a-gráfica indica que alguna porción no negativa del bien i se le da al agente j. De aquí en adelante, consideraremos que el problema $A \in \mathbb{M}_{mn}$ está dado y está fijo.

Decimos que los vectores duales u y v son *factibles* si ellos satisfacen (6.6-6.8). También, diremos que su a-gráfica es factible. Análogamente, definimos vectores duales *óptimos* y una a-gráfica óptima.

Proposición 8. *Existe al menos una a-gráfica óptima $g = (M, N, E)$ que es un árbol con $m + n - 1$ aristas.*

Demostración. De acuerdo con la Proposición 7, existe al menos una a-gráfica óptima g con $m+n-1$ aristas. Mostraremos que al menos una de estas a-gráficas óptimas es un árbol. Supongamos que ésto es falso. En g, todo nodo debe estar conectado. Entonces, toda g consiste de por lo menos dos componentes. También, una de estas componentes no debe ser un árbol. Por ello, debe tener un ciclo. Denotemos a una de estas componentes como $g' = (M' \subseteq M, N' \subseteq N, E')$. Si restringimos el problema original a M' y N', notamos que, debido a la Proposición 6, para alguna arista (i, j) en el ciclo de g' la variable primal óptima asociada x_{ij} es igual a cero. Removemos esta variables de la base del problema óptimo original. Repetimos este procedimiento para cada componente de g que contenga un ciclo. Luego de todas las posibles remociones, tenemos la misma situación que en la prueba de la Proposición 7: un subconjunto de variables básicas óptimas B (con menos de $m + n - 1$ elementos) donde $v_i - a_{ij}u_j = 0$ para cada $x_{ij} \in B$. Así, podemos repetir el procedimiento aplicado en esta prueba para completar el conjunto B hasta que éste sea una nueva base óptima primal, pero ahora vamos añadiendo la variable nula x_{hk} con mínimo valor α que conecte dos componentes. Así, hemos construido una a-graph óptima que es un árbol con $m+n-1$ aristas. Esta es una contradicción con nuestra suposición inicial. $\square$

Definición 6.2. *Una a-gráfica es completa si es un árbol con $m + n - 1$ aristas.*

Estamos interesados en encontrar vectores duales óptimos u y v para un problema de distribución dado. Si obtenemos estos vectores, podemos encontrar una solución óptima X para (6.1-6.4). Para ello, trabajaremos con a-gráficas completas. Por lo mencionado anteriormente, el problema de encontrar soluciones óptimas para (6.1-6.4) y (6.5-6.8) es equivalente a encontrar a-gráfica óptimas. Por la Proposición 7 y 8, existe al menos una a-gráfica óptima que es completa. Nos interesaremos en encontrar una de estas a-gráficas.

En el Algoritmo 1, presentamos el esquema general del algoritmo que estamos proponiendo.

Algoritmo 1 Encontrar la mayor solución igualitaria para un problema de distribución

Entrada: Un problema de distribución $A \in \mathbb{M}_{mn}$
Salida: La mayor solución igualitaria X

1. Encontrar una a-gráfica factible completa para A con vectores duales u y v.
2. Suponga que $z = w = \sum_{i \in M} v_i$
3. Encontrar el valor de la variables primales X. Si X es una solución primal factible, el algoritmo termina.
4. Sino, encontrar una nueva a-gráfica completa factible y regresar al Paso 2

La idea general del Algoritmo 1 es la siguiente: Primero encontramos una a-gráfica completa tal que los vectores duales asociados u y v sean factibles (Paso 1). Asumimos que los valores de las funciones objetivos para los problemas primal y dual coinciden (Paso 2). Entonces, las variables primales correspondientes también deben ser factibles. En el Paso 3 encontramos los valores de estas variables. Si ellas no son factibles, u y v no son vectores duales óptimos. En este caso, encontramos otros vectores duales u' y v' con las mismas características requeridas de acuerdo al Paso 1 modificando la a-gráfica encontrada previamente (Paso 4). Entonces, regresamos al Paso 2 y así sucesivamente. Nos detenemos hasta que las variables primales sean factibles.

En las siguientes subsecciones detallaremos los pasos involucrados en el Algoritmo 1. Luego de estas explicaciones, probaremos la convergencia del algoritmo.

6.4.1. Encontrando una a-gráfica factible completa

En este paso construiremos una a-gráfica para un problema de distribución tal que los vectores duales asociados representan una solución factible dual. Para hacer esto, iniciamos con una a-gráfica sin aristas y conectamos dos componentes hasta que tengamos una a-gráfica completa. Mostraremos una manera de hacer esto en el Procedimiento 1.

Para una gráfica bipartita $g = (M, N, E)$, denotamos como $C(g)$ al conjunto de componentes de g. Para una componente $C \in C(g)$, denotamos como $N(C)$ al conjunto de nodos en C. Para un nodo k, C_k denota la componente $C \in C(g)$ tal que $k \in N(C)$.

Proposición 9. *La salida del Procedimiento 1 es una pareja de vectores duales factibles u y v y su a-gráfica es completa.*

Demostración. Por construcción los vectores duales u y v inicializados en (6.10) satisfacen $v_i > a_{ij}u_j$ para todo $i \in M, j \in N$. Así, después de la

Procedimiento 1 Encontrar una a-gráfica factible completa

Entrada: Un problema de distribución $A \in \mathbb{M}_{mn}$
Salida: Vectores duales $v \in \mathbb{R}^M, u \in \mathbb{R}^N$ para A y su a-gráfica $g = (M, N, E)$.

1. Inicializar $E := \emptyset$ y

$$v_i = 1 + \max_{j \in N}\{a_{ij}\} \quad \forall i \in M; \qquad u_j = 1 \qquad \forall j \in N. \tag{6.10}$$

2. Calcular

$$(h, k) := \operatorname*{argmin}_{\substack{(i,j) \notin E \\ i \notin N(C_j)}} \left\{ \frac{v_i}{a_{ij} u_j} \right\}; \quad \alpha = \frac{v_h}{a_{hk} u_k}.$$

3. Actualizar

$$v_i := \alpha v_i; \quad u_j := \alpha u_j \quad \forall i \in M, \forall j \in N \text{ tal que } i, j \in C_k$$

y

$$E := E \cup (h, k).$$

4. Si el número de aristas en g es diferente de $m + n - 1$, regresar al Paso 2.
5. Aplicar la normalización dada en (6.9) a las variables duales obtenidas previamente.

inicialización, $g = (M, N, E)$ es una a-gráfica sin aristas y, consecutivamente, tiene $m + n$ componentes (cada nodo aislado se considera una componente). La idea de los siguientes pasos es la siguiente: añadir aristas entre dos componentes de g tal que los vectores duales asociados satisfagan (6.6). Añadir la arista (h, k) significa que la desigualdad $v_h > a_{hk} u_k$ debe convertirse a igualdad. Para hacer esto, actualizamos los valores de u_k multiplicándola por $\alpha = v_h/(a_{hk} u_k)$. Necesitamos preservar las igualdades representadas por aristas en la componente de g que contiene al nodo k. Así, multiplicamos todas las variables duales v_i, u_j, con $i, j \in N(C_k)$, por α (Paso 3). También, necesitamos asegurar que las otras desigualdades se siguen satisfaciendo. Entonces, elegimos la arista (h, k) que conecte dos componentes con el mínimo valor α (Paso 2). Luego, añadimos esta arista (Paso 3). Cuando conectamos dos componentes estamos garantizando no formar ciclos. Hacemos los pasos anteriores hasta que g consiste en una única componente. Entonces, luego del Paso 4, tenemos una a-gráfica con $m + n - 1$ aristas sin ciclos (un árbol). Luego, normalizamos los vectores duales de acuerdo con (6.9) para que se satisfaga (6.7) (Paso 5). Finalmente, obtenemos una a-gráfica completa y sus vectores duales asociados son factibles. $\square$

Ejemplo 6.2. *Trabajaremos con el problema de distribución A dado en el Ejemplo 6.1. Aplicando el Procedimiento 1 a este problema, obtenemos vectores duales $u = (1, 1, 1)$ y $v = (11, 6)$ luego de la inicialización. Entonces,* *la a-gráfica correspondiente tiene 5 componentes. Necesitamos saber qué arista añadir, conectando dos componentes, tal que el conjunto de restricciones duales (6.6) continúe siendo factible. La arista* $(1,2)$ *nos da el valor mínimo para* α, $\alpha = 11/10$ *(cuando existan varias aristas con el mismo valor* α*, rómpanse los empates arbitrariamente). Actualizamos el valor de las variables duales asociadas con nodos en* $C_2, 2 \in N$ *multiplicándolas por* α*. Luego, añadimos la arista* $(1,2)$*. Con ello, obtenemos la a-gráfica de la Figura 6.1.*

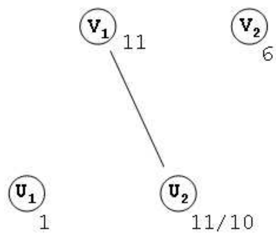

Figura 6.1: Primer paso del Procedimiento 1 aplicado al problema del Ejemplo 6.1.

Aún no se tiene una a-gráfica con $m + n - 1$ *aristas. Al hacer de nuevo el Paso 3, obtenemos* $(h,k) = (2,3)$ *con* $\alpha = 6/5$*. De nuevo, actualizamos el valor de las variables duales asociadas con nodos en* $C_3, 3 \in N$ *para luego añadir esa arista. Así, obtenemos la a-gráfica de la Figura 6.2.*

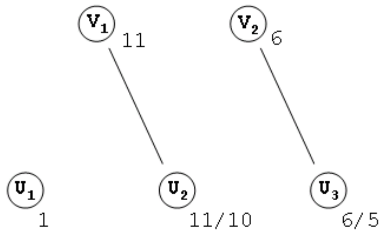

Figura 6.2: Segundo paso del Procedimiento 1 aplicado a la a-gráfica de la Figura 6.1.

Repetimos los pasos anteriores hasta obtener una a-gráfica con $m + n - 1$ *aristas. La a-gráfica completa final, antes de aplicar el Paso 5, se muestra en la Figura 6.3.*

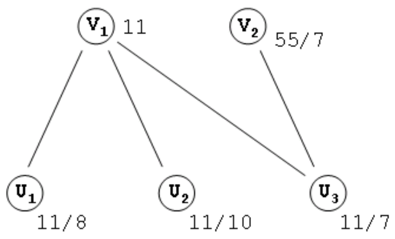

Figura 6.3: Una a-gráfica completa de A dada en el Ejemplo 6.1 con vectores duales satisfaciendo (6.6). Es necesario aplicar las ecuaciones (6.9) para obtener vectores duales factibles.

Aplicando las ecuaciones (6.9), obtenemos lo vectores duales $\widehat{v} = \frac{1}{103}(280, 200)$ *y* $\widehat{u} = \frac{1}{103}(35, 28, 40)$. *Calculando el valor de la función objetivo para estas variables duales obtenemos* $w = 480/103$.

En el ejemplo anterior, hubo 5 actualizaciones de elementos de los vectores duales, 9 actualizaciones del valor α dado por la ecuación (2) y 5 actualizaciones debidas a la aplicación de la ecuaciones (6.9). Así, hubo un total de 19 actualizaciones; en el peor caso, habría la necesidad de realizar 21 actualizaciones.

6.4.2. Encontrando el valor de las variables primales X

En esta sección asumimos que u y v son vectores duales factibles de un problema de distribución $A \in \mathbb{M}_{mn}$ y g es su correspondiente a-gráfica completa. De acuerdo con el Algoritmo 1, asumimos que los valores de las funciones objetivos del problema dual y primal coinciden. En el siguiente procedimiento, y bajo esta asunción, proponemos un método para encontrar el valor de las variables primales correspondientes con u y v tales que satisfagan el conjunto de restricciones (6.2) y (6.3), posiblemente no satisfaciendo (6.4). Este método se explica en el Procedimiento 2.

Hacemos la suposición anterior porque queremos verificar si el conjunto de vectores duales es óptimo. Sabemos que son factibles, y si las variables primales asociadas son factibles también, entonces las variables duales y primales serán óptimas.

Dada una gráfica bipartita $g = (M, N, E)$ y un nodo i, $\deg(i, g)$ denota el número de aristas en g que conectan a i con cualquier otro nodo en g.

Proposición 10. *Las variables primales X, dadas como salida del Procedimiento 2, satisfacen las restricciones (6.2) y (6.3).*

Demostración. La prueba es directa. Por construcción, los Pasos 2,3 y 4 del Procedimiento 2 aseguran que las variables primales satisfagan las restricciones (6.2) y (6.3). □

Procedimiento 2 Encontrar variables primales asociadas con una pareja de vectores duales factibles

Entrada: Vectores duales factibles $v \in \mathbb{R}^M, u \in \mathbb{R}^N$ para un problema de distribución $A \in \mathbb{M}_{mn}$ y su a-gráfica completa $g = (M, N, E)$
Salida: Variables primales X satisfaciendo (6.2) y (6.3).

1. Calcular el valor de la función objetivo w para el problema dual.
2. Para cada $(i, j) \in E$ tal que $\deg(i, g) = 1$, $x_{ij} := 1$
3. Para cada $(i, j) \in E$ tal que $\deg(j, g) = 1$, $x_{ij} := w/a_{ij}$
4. Encontrar el valor de las demás variables usando (6.3) y que

$$\sum_{i \in M} a_{ij} x_{ij} = w \qquad \forall j \in N. \tag{6.11}$$

en un orden secuencial adecuado.

Ejemplo 6.3. *Consideremos los vectores duales* $\widehat{u}$ *y* $\widehat{v}$ *asociados con el problema de distribución A del Ejemplo 6.1 dado en la parte final del Ejemplo 6.2 y su a-gráfica dada en la Figura 6.3. Aplicando los pasos 2 y 3 del Procedimiento 2, obtenemos*

$$x_{23} = 1, \qquad x_{11} = 60/103 \qquad \textit{and} \qquad x_{12} = 48/103.$$

Con esta información, podemos encontrar el valor de las demás variables primales. Por ejemplo, sabemos que $x_{11} + x_{12} + x_{13} = 1$ *y* $7x_{13} + 5x_{23} = 480/103$. *Entonces, obtenemos que*

$$x_{13} = -5/103$$

y $x_{ij} = 0$ *en otro caso. Claramente, esta no es una solución factible para el problema primal (6.1-6.4) porque* $x_{13} < 0$ *(no se satisface (6.4)). Por ello, los vectores duales* $\widehat{u}, \widehat{v}$ *no son óptimos.*

Si consideramos que antes del procedimiento las variables se encuentran inicializadas en cero, es necesario ejecutar $m+n-1$ actualizaciones para encontrar el valor de cada una de las variables básicas primales cuando se tiene una a-gráfica completa.

6.4.3. Encontrando nuevos vectores duales factibles u y v

Es posible que los vectores duales u y v para un problema de distribución $A \in \mathbb{M}_{mn}$ que resultan del Procedimiento 1 no sean óptimos. Esto es, si u y v y su a-gráfica completa son la entrada del Procedimiento 2, puede ser que algunas entradas en la salida X de este procedimiento sean números negativos. Este hecho indica que X no representa un solución factible de (6.1-6.4). Entonces,

Procedimiento 3 Calculando nuevos vectores duales factibles

Entrada: Vectores duales no óptimos u y v para un problema $A \in \mathbb{M}_{mn}$, su a-gráfica completa $g = (M, N, E)$ y las variables primales correspondientes X resultantes del Procedimiento 2

Salida: Vectores duales $\widehat{u}, \widehat{v}$ para A y su a-gráfica completa $g' = (M, N, E')$

1. Sea $(h, k) \in E$ tal que $x_{hk} < 0$. Si existen varias variables primales negativas, escójase aquella con valor absoluto máximo.
2. Establecer $E' := E \backslash (h, k)$.
3. Calcular
$$(i, j) := \underset{\substack{(i,j) \notin E' \\ i \in N(C_k), j \in N(C_h)}}{\operatorname{argmin}} \left\{ \frac{v_i}{a_{ij} u_j} \right\}; \quad \alpha = \frac{v_i}{a_{ij} u_j}$$
4. Actualizar
$$v_p := \alpha v_p \quad \text{y} \quad u_q := \alpha u_q \quad \forall p \in M, \forall q \in N \text{ tal que } p, q \in C_j$$
y
$$E' := E' \cup (i, j)$$
5. Aplicar la normalización dada en (6.9) a u y v para obtener $\widehat{u}$ y $\widehat{v}$.

---

u y v no son óptimos. En el Procedimiento 3, mostramos cómo modificar una a-gráfica completa g tal que se asocie con otros vectores duales factibles.

Proposición 11. *Los vectores duales $\widehat{u}$ y $\widehat{v}$ y su a-gráfica completa resultante del Procedimiento 3 son factibles y son diferentes a los vectores de entrada.*

Demostración. Consideremos los vectores duales u y v para un problema $A \in \mathbb{M}_{mn}$, su a-gráfica completa $g = (M, N, E)$ y X como la entrada del Procedimiento 3. En el Paso 1 estamos removiendo una arista (h, k) tal que $x_{hk} < 0$. Esta arista existe porque g no representa una solución óptima y también porque X es la salida del Procedimiento 2. Esta desconexión causa que g se separe en dos componentes: una conteniendo al nodo h y la otra conteniendo al nodo k. Definimos $g' = (M, N, E \backslash (h, k))$. Queremos que g' sea una a-gráfica completa, por lo que necesitamos añadir una arista que conecte las dos componentes. Para añadir una arista, usamos la misma idea que en el Procedimiento 1. No es posible añadir una arista (i, j) $i \in C_h$ y $j \in C_k$ porque, para mantener la factibilidad en los vectores duales asociados, la arista con mínimo α ($\alpha = 1$) es (h, k). Pero si añadimos esta arista la nueva a-gráfica será la misma que la de la entrada. Así, existe una *única* manera de conectar las dos componentes y obtener una nueva (y diferente) a-gráfica completa: tenemos que añadir una arista (i, j), $i \in C_k, j \in C_h$. Necesitamos asegurar la factibilidad en los vectores duales. Así, necesitamos añadir la arista (i, j) con mínima α (Paso 3). También, necesitamos multiplicar todas las variables duales representadas por aristas en

C_h por esta α mínima (Paso 4). Luego de esto, añadimos la arista. Entonces, obtenemos una nueva a-gráfica completa y nuevos vectores duales. Para hacerlos factibles, necesitamos usar la normalización dada en (6.9) (Paso 5). □

Ejemplo 6.4. *Consideremos los vectores duales u y v, su a-gráfica completa g, resultado del Ejemplo 6.2 y la matriz de distribución X que resulta del Ejemplo 6.3 como entradas al Procedimiento 3. En este caso, existe una única variable primal negativa,* x_{13}*. Entonces, removemos la arista* $(1,3)$ *(Pasos 1 y 2). Esta remoción produce la desconexión de g en dos componentes,* $C_1, 1 \in M$ *y* C_3*, como se muestra en la Figura 6.4.*

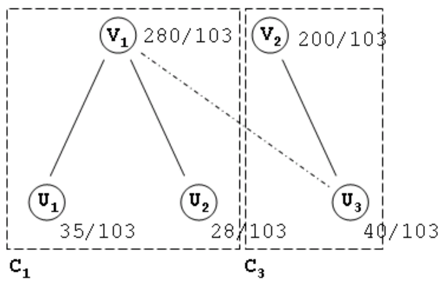

Figura 6.4: La desconexión de G en dos componentes: C_1 y C_3, después de remover la arista $(1,3)$.

Necesitamos añadir una arista para obtener una a-gráfica completa. Cuando realizamos el Paso 3, notamos que sólo hay que verificar las aristas $(2,1)$ *y* $(2,2)$*. La arista con mínimo valor* α *es* $(2,1)$, $\alpha = 10/7$*. Ahora, actualizamos el valor de las variables duales en* $C_1, 1 \in M$*, multiplicándolas por* α*. Luego, añadimos la arista. Con ello, obtenemos la a-gráfica de la Figura 6.5.*

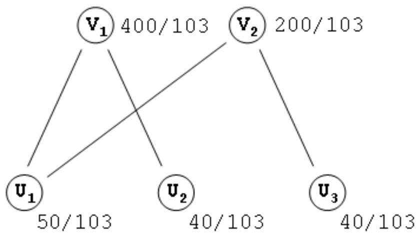

Figura 6.5: a-gráfica resultante de añadir la arista $(2,1)$ a la gráfica de la Figura 6.4.

Entonces, normalizamos las variables duales y obtenemos $\widehat{v} = \frac{1}{13}(40, 20)$ *y* $\widehat{u} = \frac{1}{13}(5,4,4)$

Cuando identificamos la arista que hay que eliminarse y la eliminamos, encontrar la nueva arista que debe entrar requiere un número máximo de $(m - |C_h|)(n - |C_k|)$ actualizaciones del valor α involucrado. Luego de añadir la arista, necesitamos actualizar el valor de algunas variables, y esta situación requiere $|C_h| + (n - |C_k|)$ actualizaciones.

Ahora probaremos la convergencia del algoritmo:

Teorema 19. *El algoritmo 1 produce, como salida, una solución igualitaria.*

Demostración. De acuerdo con la Proposición 7, el Procedimiento 1 proporciona vectores duales factibles u y v así como una a-gráfica completa g para un problema de distribución A. Calculamos el valor de las variables primales de acuerdo al Procedimiento 2 (Paso 3): Si estas variables primales son factibles entonces el algoritmo termina y tenemos una solución óptima para (6.5-6.8) y, consecutivamente, de (6.1-6.4). Si las variables primales X que resultan del Procedimiento 2 no son factibles, entonces aplicamos el Procedimiento 3 (Paso 4) con entradas X,u, v y g. En la ejecución de este procedimiento tenemos una solución dual factible (representada por los vectores duales u y v) y un conjunto de variables primales no factibles. Más aún, algunas de estas variables primales tienen valores negativos. De acuerdo al Procedimiento 3, escogemos la variable primal con el valor más negativo para dejar la base. Como mostramos en la prueba de la Proposición 11, existe una *única variable primal* que debería entrar a la base para mantener la solución dual factible. Así, lo que el Procedimiento 3 está haciendo, es ejecutar un paso del método simplex-dual. Entonces, desde el Paso 4, estamos haciendo el método simplex-dual pero utilizando la información relacionada con la a-gráfica completa que se tiene. Esto asegura que el algoritmo converge a algunos vectores duales u y v para A y algunas variables primales X. Entonces, la salida del Algoritmo 1 es una solución óptima de (6.1-6.4). $\square$

Ejemplo 6.5. *Continuamos aplicando el Algoritmo 1 para los vectores duales $\widehat{u}$ y $\widehat{v}$ para el problema de distribución dado en el Ejemplo 6.1 y su a-gráfica obtenida en el ejemplo 6.4. Así, necesitamos aplicar el Procedimiento 2 para encontrar las variables primales correspondientes X. Luego de hacer esto, notamos que X es una solución primal factible. Entonces, el algoritmo termina. La Figura 6.5 muestra la a-gráfica óptima y los vectores duales asociados son variables óptimas de (6.5-6.8), con $w = 60/13 \approx 4{,}615$. Entonces, una solución igualitaria donde el agente con menor valoración recibe el máximo monto posible para el Ejemplo 6.1 es de la siguiente manera:*

$$X = \begin{bmatrix} 7/13 & 6/13 & 0{,}0 \\ 1/13 & 0{,}0 & 12/13 \end{bmatrix}.$$

Nótese que si se asigna $1/n$ de cada bien a cada agente, cada uno de ellos obtiene únicamente 4 *unidades.*

6.5. Una interpretación del problema dual

En la Sección 6.3 introdujimos el problema de programación lineal (6.1-6.4) que nos permitió encontrar la máxima solución igualitaria. Podemos establecer una forma general de este problema de la siguiente manera:

$$\text{Max} \quad cz \quad \text{sujeto a} \tag{6.12}$$

$$\sum_{i\in M} a_{ij}x_{ij} - z \geq b_j \qquad \forall j \in N \tag{6.13}$$

$$\sum_{j\in N} x_{ij} = d_i \qquad \forall i \in M \tag{6.14}$$

$$x_{ij} \geq 0 \qquad \forall i \in M, \forall j \in N. \tag{6.15}$$

con $c > 0$ y $b_j \geq 0$, $j \in N$ y $d_i > 0$, $i \in M$. Como establecimos anteriormente, esta es una formulación generalizada a un problema de cómo distribuir un conjunto de bienes continuamente divisibles entre un conjunto de agentes. Como en el modelo presentado en (6.1-6.4), a_{ij} representa la valoración del bien i para el agente j y x_{ij} indica la fracción del bien i que será asignado al agente j. De la misma manera, z representa un monto mínimo que cada agente debe obtener debido a la distribución de los bienes pero, de hecho, ellos están obteniendo c veces este monto, con $c \in \mathbb{R}, c > 0$. Así, c es la valoración de una unidad obtenida por la distribución. En (6.1-6.4), tenemos que $c = 1$. b_j indica un monto adicional al monto z que debe ser asignado al agente j. También, puede ser interpretado como si el agente j ya cuenta con bienes que el valora en b_j. En nuestro modelo, $b_j = 0$ para cada $j \in N$; así, cada agente está obteniendo únicamente el monto z y, debido a la Proposición 5, la solución obtenida es igualitaria. Adicionalmente, d_i representa el número de bienes del tipo i disponibles para su distribución. En (6.1-6.4), tenemos $d_i = 1$ para todo $i \in M$; entonces, se cuenta con un único bien de cada tipo i.

El correspondiente problema dual del problema generalizado anterior es

$$\text{Min} \quad \sum_{i\in M} d_i v_i + \sum_{j\in N} b_j u_j \quad \text{sujeto a}$$

$$a_{ij}u_j \leq v_i \qquad \forall i \in M, \forall j \in N \tag{6.16}$$

$$\sum_{j\in N} u_j = c \tag{6.17}$$

$$u_j \geq 0 \qquad \forall j \in N. \tag{6.18}$$

Podemos considerar a M como un conjunto de *orígenes* y N como un conjunto de *destinos*. Así, d_i representa el número de bienes en el origen i y b_j, el número de bienes en el destino j. v_i y u_j indican el valor de un bien en el origen i y el valor de un bien en el destino j, respectivamente. Así, de acuerdo con (6.5), necesitamos encontrar los valores para v_i, $i \in M$ y u_j, $j \in N$ tales que la valoración total debido a los bienes en los orígenes y los destinos sea tan bajo como sea posible. Podemos interpretar a las cantidades a_{ij} como una *tasa de cambio* entre los valores en el origen i y el destino j. Las restricciones (6.16) indican cómo los valores de los bienes entre los orígenes y los destinos se relacionan. También, en la restricción (6.17), el valor de una unidad del monto obtenido por los agentes en (6.12-6.15), debido a la distribución de los bienes, se debe repartir entre los destinos.

6.6. Conclusiones

En este capítulo mostramos cómo resolver un problema de división justa tal que el agente que obtiene el menor monto obtiene el mayor valor posible. Esta solución no tiene una propiedad que algunos estudiosos de la teoría de la división justa considera como muy importante: no es libre de envidias. Nosotros consideraremos que si los agentes actúan racionalmente ellos deben preferir una solución en donde reciben un valor mayor a una libre de envidias pero donde están recibiendo un monto menor. Para estudiar soluciones libres de envidias necesitamos añadir más restricciones al problema de programación lineal original, y por el momento esto queda fuera de los alcances de esta tesis.

Referencias

[1] Aumann, R. and Drèze, J. (1974) *Cooperative games with coalition structures*, International Journal of Game Theory, Vol. 3, 4:217–237.

[2] Aumann, R. and Myerson, R. (1988) *Endogenous formation of links between players and of coalitions: an application of the Shapley value*, The Shapley value: Essays in honor of Lloyd S. Shapley, 175–191

[3] Austin, A.K. (1982) *Sharing a cake*. Mathemathical Gazette 6. 437:212 - 215.

[4] Barbanel, J.B. (1995) *Game-theoretic algorithms for fair and strongly fair cake division with entitlements*. Colloquium Mathematicum. Vol. LXIX No.1, 59 - 73.

[5] Bazzan, A., Bordini, R., Campbell, J. (2002) *Evolution of agents with moral sentiments in an iterated prisioner's dilemma exercise*. In Parsons, S., Gmytrasiewicz P. and Wooldridge M. (eds.) Game Theory in Agent–Based Systems pp. 43–64, Kluwer Academic Publishers.

[6] Bergantiños, G., Lorenzo, L., Lorenzo-Freire, L. (2010) *A characterization of the proportional rule in multi-issue allocation situations*, Operations Research Letters, 38:17 - 19.

[7] G. Bergantiños, L. Méndez-Naya (2001) *Additivity in bankruptcy problems and in allocation problems*, Spanish Economic Review, 3:223 - 229.

[8] Bergantiños, G., Sánchez, E. (1997) *On values for generalized characteristic functions*. OR Spektrum 19:229 - 234.

[9] Bergantiños, G. and Vidal, P.J. (2003) *An implementation of the Owen value*, Games and Economic Behavior, 44:412–427.

[10] Borm, P., Owen, G., Tijs, S. (1992) *On the position value for communication situations*. SIAM J. Discrete Math, 5:305-320.

[11] Brams S.J., Taylor A.D. (1996) *Fair division - From cake-cutting to dispute resolution*. Cambridge University Press. ISBN 0-521-55390-3

[12] Calleja, P., Borm, P., Hendrickx, R. (2005) *Multi-issue allocation situations*, European Journal of Operational Research, 164:730 - 747.

[13] Dantzig G.B. (1963) Linear programming and extensions. Princeton University Press, Princeton N.J. 1st edition.

[14] Gmytrasiewicz, P., Lisetti, C. (2002) *Emotions and personality in agent design and modeling.* In Parsons, S., Gmytrasiewicz P. and Wooldridge M. (eds.) Game Theory in Agent–Based Systems pp. 81–96, Kluwer Academic Publishers.

[15] González-Alcón, C., Borm, P., Hendrickx, R. (2007) *A composite run-to-the-bank rule for multi-issue allocation situations*, Mathematical Methods of Operations Research 65:339 - 352.

[16] Herings P., Van der Laan G., Talman D. (2008) *The average tree solution for cycle-free graph games.* Games and Economic Behavior 62:77-92.

[17] Jackson M. (2005) *Allocation rules for network games.* Games and Economic Behavior 51:128 - 154.

[18] Jackson, M., Van den Nouweland, A. (2005) *Strongly stable networks.* Games and Economic Behavior. 51:420-444.

[19] Kalai, E.M. Smorodinsky (1975) *Other solutions to Nash's bargaining problem*, Econometrica 43:513 - 518.

[20] Kaminski, M. (2000) *Hydraulic rationing*, Mathematical Social Sciences 40:131 - 155.

[21] Kar, Anibar (2002) *Axiomatizations of the Shapley value on Minimun Cost Spanning Tree Games.* Games and Economic Behavior 38(2): 265 - 277.

[22] Klee V., Minty G.J. (1972) How good is the simplex algorithm? Inequalities - III. Academic Press, New York, NY 159 - 175.

[23] Lawler, E.L. (1976) *Combinatorial optimization: networks and matroids*, 94–97.

[24] Lee W. (1971) *Decision theory and human behavior.* New York, John Wiley & Sons, Inc.

[25] Lemke C.E. (1954) The dual method of solving the linear programming problem. Naval Research Logistic Q 1:36-47.

[26] Lerner, A. (1998) *A pie allocation among sharing groups*, Games and Economic Behavior, 22:316 - 330.

[27] Myerson, R.B. (1977) *Graphs and cooperation on games.* Mathematics of Operation Research 2:225-229

[28] Myerson, R.B. (1980) *Conference structures and fair allocation rules.* Internacional Journal of Game Theory 9:169-182.

[29] Nash, J. (1950) *The bargaining problem*, Econometrica, 28:155 - 162.

[30] OÑeill, B. (1982) *A problem of rights arbitration from the Talmud*, Mathematical Social Sciences, 2:345 - 371.

[31] Neyman, J. (1946) *Un theoreme déxistence.* C.R. Acad. Sci. Paris 222, 843 - 845.

[32] Owen, G. (1977) *Values of games with a priori unions*, Essays in Mathematical Economics and Game Theory, Springer-Verlag, New York, 76–88.

[33] Robertson, J., Webb, W. (1998) *Cake cutting algorithms: Be fair if you can.* AK Peters Ltd, . ISBN 1-56881-076-8.

[34] Ruiz, L.M., Valenciano, F., Zarzuelo, J.M. (1988) *The family of least square values for transferable utility games*, Games and Economic Behavior, 24:109–130.

[35] Shapley, L.S. (1953) *A value for n-person games.* Contributions to Theory of Games 2:307-317.

[36] Steinhaus, H. (1948) *The problem of fair division.* Econometrica 16:101-104.

[37] Stone, P., Veloso, M. (1998) *Using decision tree confidence factors for multiagent control.* Kitano (ed.) Robocup–97, Robot Soccer World Cup I, pp. 99-111. Berlin: Springer–Verlag.

[38] Stromquist, W. (1980) *How to cute a cake fairly.* American Mathematical Monthly 87:640 - 644.

[39] White, D. (1969) *Decision theory.* Chicago, Aldine Pub. Co.

[40] Young, H. (1987) *On dividing an amount according to individual claims or liabilites*, Mathematics of Operations Research, 12:398 - 414.

[41] Yu, P. (1973) *A class of solutions for group decision problems*, Management Science, 19:936 - 946.

Índice alfabético