CIMAT

CENTRO DE INVESTIGACIÓN EN MATEMÁTICAS.

MAESTRÍA EN CIENCIAS CON ESPECIALIDAD EN MATEMÁTICAS APLICADAS.

TEORÍA DE ONDÍCULAS CON APLICACIÓN A LA ECUACIÓN DE DIFUSIÓN

TESIS

QUE PARA OPTAR POR EL GRADO DE:

MAESTRO EN CIENCIAS

CON ESPECIALIDAD EN
MATEMÁTICAS APLICADAS

P R E S E N T A:

JOSAFATH ALFREDO OTERO JIMENEZ

DIRECTOR DE TESIS:
DR. FRANCISCO JAVIER SOLÍS LOZANO.

Guanajuato, Gto. México. Marzo 2012

Agradecimientos

Por el apoyo económico que recibi para realizar mis estudios de maestría al Consejo Nacional de Ciencia y Tecnología (CONACyT). También expreso mi agradecimiento por el apoyo económico brindado para terminar mi tesis de maestría al Centro de Investigación en Matemáticas, A.C. (CIMAT).

Por dedicarme el tiempo necesario como director de tesis para llevar acabo este trabajo, por sus enseñanzas y apoyo, agradezco al Dr. Francisco Javier Solís Lozano. Por fungir como sinodales de esta tesis, por su apoyo, paciencia y guía, expreso mi agradecimiento al Dr. Francisco Sánchez Sánchez y al Dr. Armando Sánchez Nungaray.

A mis padres José Alfredo Otero Martínez y Blanca Este la Jiménez Rangel por haberme dado todo su apoyo durante el transcurso de mis estudio de maestría, por su comprensión, amor y fuerza. A mis hermanos Vladimir Alfredo Otero Jiménez y María José Otero Jiménez por su apoyo y animo brindado durante el tiempo lejos de mi familia.

A mis maestros Francisco Javier Solís Lozano, Francisco Sánchez Sánchez, Fausto Antonio Ongay Larios, Marcos Aurelio Capistrán Ocampo, Miguel Angel Moreles Vázquez, Silvia Jerez Galiano, Stephen Bruce Sontz, Jimmy Petean, Javier Flavio Vigeras Gomez por sus enseñanzas y consejos brindados.

A mis compañeros de generación, amigos y segunda familia Lilia Alanis, Carlos Yebra, Julio Cesar, Adrián Jinich, Hugo Torres, Emilio Salcedo, Daniel Cancino, Valentin Tovar, Atanasio Vega, Elias Huchim, Hugo Bojorquez y Carlos Campos por su amistad, compañerismo, consejos y gratos momentos.

A mis compañeros de trabajo y amigos Gilda Bolaños, Lenin Echevarria, Laura Rivera, Roxana Gongora, Wilmer Perez, Adrian López, Pedro Salazar, José Luis Trejo, Edel Rodea por su compañerismo y apoyo.

Índice general

RESUMEN.

En el siguiente trabajo se pretende dar una introducción a la teoría ondicular así como mostrar la factibilidad del método en la solución de la ecuación diferencial parcial de difusión

$$Au_t = Bu_{xx} - Cu_x + f(x,t)$$

con las condiciones iniciales y de frontera

$$u(0,t) = u(1,t) = 0, \qquad u(x,0) = g(x), \quad 0 < x < 1$$

el procedimiento es proponer una aproximación de la solución en cierto espacio generado por una base ondicular y transformar la ecuación parcial en una ordinaria misma que por el método de diferencias finitas genera un sistema de ecuaciones algebraicas.

El texto esta estructurado de manera constructiva. En un principio se desarrollara la teoría necesaria para la comprensión de las ondículas en diferentes espacios de aplicación, empezando por el espacio de vectores con entradas complejas $\mathbb{C}^N$, avanzando por el espacio de sucesiones $\ell^2(\mathbb{Z})$ y terminando con el espacio de funciones cuadrado integrables en $\mathbb{R}$, $L^2(\mathbb{R})$. Estas nociones básicas tiene como finalidad la solución de Ecuaciones Diferenciales por lo que después se dará la introducción al método de Galerkin, método conocido para la aproximación de soluciones a ecuaciones diferenciales y se verá la manera en que se combina este método con las bases ondiculares método llamado el método Wavelet-Galerkin. Finalmente se verán un par de ejemplos mostrando la eficiencia del método.

Uno de los principales retos en la teoría ondicular es construir una base ondicular, en la presentación de la teoría básica se dan las condiciones mediante las cuales se puede construir una base de este estilo. Durante esta construcción se hará énfasis en la Transformada de Fourier y sus propiedades en los mismo espacios $\mathbb{C}^N$, $\ell^2(\mathbb{Z})$ y $L^2(\mathbb{R})$ ya que una de las necesidades de la aparición de las bases ondiculares es incrementar las aportaciones que la Transformada de Fourier proporciona al estudio de las funciones por lo que la construcción se basa en esta Transformada.

Una vez establecida la teoría básica se procede a describir el método de Galerkin en donde se da una de las principales ventajas del método usando bases ondiculares aplicado a los operadores elípticos y es el buen condicionamiento del sistema asociado a la ecuación diferencial. Finalmente se resuelve la ecuación de difusión mostrando los errores cometidos en el método estableciendo una buena aproximación del método.

La aplicación del método ha sido utilizada en otro tipo de problemas como la ecuación de Burgues, ecuaciones integrodiferenciales, operadores elípticos de primero y segundo orden, ecuaciones diferenciales parciales lineales y no lineales, problemas de deflexión de vigas.

Capítulo 1

Transformada Discreta de Fourier

El objetivo de este capítulo es estudiar las bases para las ondículas. En la primera sección empezaremos por definir los conceptos básicos como el espacio donde trabajaremos, las definiciones de Transformada Discreta de Fourier, algunas operaciones básicas como traslación y conjugación compleja en el espacio de interés y terminar con la relación que hay entre estas operaciones y la Transformada Discreta de Fourier. En las últimas dos secciones estudiaremos las principales propiedades de la Transformada Discreta de Fourier que son la relación con las transformaciones lineales invariantes bajo traslación y un algoritmo rápido de cálculo.

1.1. Conceptos básicos

El estudio de la Transformada de Fourier esta inmerso en el análisis de señales. El objetivo principal de la teoría de Fourier es descomponer una señal en componentes más pequeñas que nos den información sobre la señal total.

En el sentido matemático entendemos una señal como una función con dominio temporal y codominio numérico. Existen varios tipos de señales continuas o discretas dependiendo de los valores que tome el dominio. Nosotros estaremos interesados, en primera instancia en señales discretas, es decir señales donde el dominio es un conjunto discreto, llamado $\ell^2(\mathbb{Z}_N)$.

Definición 1 *Dado $N \in \mathbb{N}$ arbitrario definimos al conjunto*

$$\ell^2(\mathbb{Z}_N) = \{z = (z(0), z(1), \ldots, z(N-1)) : z(k) \in \mathbb{C}, k = 0, 1, \ldots, N-1\}$$

y $\mathbb{Z}_N = \{0, 1, \ldots, N-1\}$

Es decir, estamos considerando la familia de imágenes de funciones de la forma

$$z : \mathbb{Z}_N \to \mathbb{C}$$

que son una abstracción de señales discretas. Por tal motivo, a veces nos referimos a z como una señal y hacemos uso de z como una función en vez del vector $(z(0), z(1), \ldots, z(N-1))$ ya que la función misma da más información que el rango de está.

El espacio $\ell^2(\mathbb{Z}_N)$ es básicamente $\mathbb{C}^N$, esto es que $\ell^2(\mathbb{Z}_N)$ es un espacio vectorial de dimensión N con las operaciones usuales de suma y producto escalar en $\mathbb{C}^N$. Como tal tendrá una base de hecho la base canónica esta dada por

Definición 2 *Dado $N \in \mathbb{N}$, **la base canónica** de $\ell^2(\mathbb{Z}_N)$ es el conjunto*

$$e = \{e_0, e_1, \ldots, e_{N-1}\}$$

donde $e_i \in \ell^2(\mathbb{Z}_N)$ y se tiene que $e_i(j) = \begin{cases} 0 & , \quad j \neq i \\ 1 & , \quad j = i \end{cases}$

Las propiedades de producto interno, norma y ortogonalidad se preservan como antes si $z, w \in \ell^2(\mathbb{Z}_N)$ entonces el producto interno esta dado por

$$\langle z, w \rangle = \sum_{k=0}^{N-1} z(k)\overline{w(k)}$$

de donde se sigue que la norma es

$$||z|| = \left(\sum_{k=0}^{N-1} |z(k)|^2 \right)^{1/2}$$

y se cumple que $z \perp w$ si y solo si $\langle z, w \rangle = 0$.

Finalmente haremos una convención más al considerar a z como una función periódica de periodo N considerando que $z(j+N) = z(j)$. Es decir que

$$z(k) = z(k \text{ mod } N)$$

para todo $k \in \mathbb{Z}$

Uno de los objetivos principales de la teoría de Fourier es estudiar las funciones en términos de ciertas características principales de la función. La base canónica de $\ell^2(\mathbb{Z}_N)$ presenta algunas limitaciones en el análisis de señales por lo que buscaremos otra base que es más usada en la práctica. Consideremos el siguiente conjunto

Definición 3 *Sea $E = \{E_0, E_1, \ldots, E_{N-1}\} \subset \ell^2(\mathbb{Z}_N)$ dado por*

$$E_m(n) = \frac{1}{\sqrt{N}} e^{2\pi i m n / N} \quad 0 \leq m, n \leq N-1$$

este conjunto es una base de $\ell^2(\mathbb{Z}_N)$ como lo muestra el siguiente lema y nos referiremos a ella como **la base estándar**

Lema 1.1.1 *El conjunto $E = \{E_0, E_1, \ldots, E_{N-1}\}$ es una base ortonormal de $\ell^2(\mathbb{Z}_N)$*

La demostración de que E es un conjunto ortonormal es ver que cuanto vale $\langle E_j, E_k \rangle$, hacer los casos para $j = k$ y $j \neq k$ y hacer uso del hecho que

$$\sum_{k=0}^{n} s^k = \frac{1 - s^{k+1}}{1 - s}.$$

Mientras que el hecho de que e conjunto es base se sigue de las propiedades de álgebra lineal.

Demostración: Primero demostremos que E es un conjunto ortonormal. Sean $j, k \in \{0, 1, \ldots, N-1\}$. Entonces

$$\begin{aligned}
\langle E_j, E_k \rangle &= \sum_{n=0}^{N-1} E_j(n)\overline{E_k(n)} \\
&= \sum_{n=0}^{N-1} \frac{1}{\sqrt{N}} e^{2\pi ijn/N} \overline{\frac{1}{\sqrt{N}} e^{2\pi ikn/N}} \\
&= \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} e^{2\pi i(j-k)n/N} \\
&= \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} \left(e^{2\pi i(j-k)/N}\right)^n
\end{aligned}$$

y tenemos los siguientes casos, si $j = k$

$$e^{2\pi i(j-k)/N} = 1 \Rightarrow \sum_{n=0}^{N-1} \left(e^{2\pi i(j-k)/N}\right)^n = N$$

con lo cual

$$\langle E_j, E_k \rangle = 1$$

por otro lado si $j \neq k$

$$\sum_{n=0}^{N-1} \left(e^{2\pi i(j-k)/N}\right)^n = \frac{1 - \left(e^{2\pi i(j-k)/N}\right)^N}{1 - e^{2\pi i(j-k)/N}}$$

y como

$$e^{2\pi i(j-k)} = 1$$

entonces

$$\sum_{n=0}^{N-1} \left(e^{2\pi i(j-k)/N}\right)^n = 0$$

de donde se tiene que

$$\langle E_j, E_k \rangle = 0$$

y esto demuestra que E es una conjunto ortonormal.

Por último veamos que E es una base. Esto se sigue de que todo conjunto ortonormal que no contiene al cero es linealmente independiente y todo conjunto linealmente independiente con N elementos en un espacio de dimensión N es base. Por lo cual E es una base ortonormal. □

Dado que tenemos una base ortonormal se cumplen las siguientes relaciones, inherentes a los espacios vectoriales con producto interno y una base ortonormal dada

$$z = \sum_{k=0}^{N-1} \langle z, E_k \rangle E_k$$

$$\langle z, w\rangle = \sum_{k=0}^{N-1} \langle z, E_k\rangle \overline{\langle w, E_k\rangle}$$

$$\|z\|^2 = \sum_{k=0}^{N-1} |\langle z, E_k\rangle|^2$$

la primera formula describe la forma de los coeficientes en la expansión respecto a la base, la tercera es una consecuencias de la segunda y la segunda es conocida como la relación de Parseval en el análisis funcional. Con el producto interno dado antes tenemos que

$$\langle z, E_m\rangle = \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{k=0}^{N-1} z(k) e^{-2\pi imk/N}$$

Aunque en la practica conviene eliminar el factor radical debido a los cálculos numéricos además de que hay ciertas formulas (las cuales veremos más adelante) que se simplifican. Este concepto se determina en la siguiente definición.

Definición 4 *Dado $N \in \mathbb{N}$ definimos* ***La Transformada Discreta de Fourier*** *como el mapeo*

$$\widehat{\cdot} : \ell^2(Z_N) \to \ell^2(Z_N)$$

definido por $z \mapsto \hat{z}$ donde

$$\widehat{z}(m) = \sum_{n=0}^{N-1} z(n) e^{-2\pi imn/N}, \qquad \forall\ m \in \mathbb{Z}_N$$

y escribimos TDF por sus siglas.

Las relaciones inherentes a los espacio vectoriales mencionadas anteriormente con la transformada se ven como

Teorema 1.1.2 *Dados $z, w \in \ell^2(\mathbb{Z}_N)$ se tiene lo siguiente*

Formula de inversión

$$z(n) = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} \widehat{z}(k) e^{2\pi ikn/N} \qquad \forall\ n \in \mathbb{Z}_N$$

Relación de Parseval

$$\langle z, w\rangle = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} \widehat{z}(k)\overline{\widehat{w}(m)} = \frac{1}{N} \langle \widehat{z}, \widehat{w}\rangle$$

Formula de Plancherel

$$\|z\|^2 = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} |\widehat{z}(k)|^2 = \frac{1}{N} \|\widehat{z}\|^2$$

La demostración es básicamente aplicar la definición de la TDF a las relaciones de expansión y Parseval.

Demostración: Empecemos por la formula de inversión. Dado que

$$z(n) = \sum_{m=0}^{N-1} \langle z, E_m \rangle E_m(n)$$

por definición del producto interno y de la TDF se sigue que

$$z(n) = \sum_{m=0}^{N-1} \frac{1}{\sqrt{N}} \widehat{z}(m) \frac{1}{\sqrt{N}} e^{2\pi imn/N} = \frac{1}{N} \widehat{z}(m) e^{2\pi imn/N}$$

con lo cual se tiene la formula de inversión.

De manera análoga para la relación de Parseval tenemos que

$$\langle z, w \rangle = \sum_{m=0}^{N-1} \langle z, E_m \rangle \overline{\langle w, E_m \rangle}$$

y por la definición del producto interno se sigue que

$$\langle z, w \rangle = \sum_{m=0}^{N-1} \frac{1}{\sqrt{N}} \widehat{z}(m) \frac{1}{\sqrt{N}} \overline{\widehat{w}(m)} = \frac{1}{N} \sum_{m=0}^{N-1} \widehat{z}(m) \overline{\widehat{w}(m)} = \frac{1}{N} \langle \widehat{z}, \widehat{w} \rangle$$

lo que demuestra la segunda relación.

Finalmente para la última, igualdad tenemos, de la relación de Parseval, con $w = z$ que

$$\|z\|^2 = \langle z, z \rangle = \frac{1}{N} \langle \widehat{z}, \widehat{z} \rangle = \frac{1}{N} \|\widehat{z}\|^2$$

y esto demuestra la formula de Plancherel. □

La fórmula de inversión es muy importante en el análisis de Fourier ya que establece que la función z se puede descomponer en una suma de términos más simples. Estos términos se especifican en la siguiente definición

Definición 5 *Dado $N \in \mathbb{N}$ y $m \in \mathbb{Z}_N$ definimos $F_m \in \ell^2(Z_N)$ como*

$$F_m(n) = \frac{1}{N} e^{2\pi imn/N} \qquad \forall\ n \in \mathbb{Z}_N$$

y $F = \{F_0, F_1, \ldots, F_{N-1}\}$ como la base de Fourier para $\ell^2(Z_N)$.

Esta es conocida como **la base de Fourier de** $\ell^2(\mathbb{Z}_N)$. Obsérvese que es como la base E la diferencia es el término constante que multiplica a la función exponencial. El hecho de ser base se sigue de observar que $F_m = N^{-1/2} E_m$, solamente hay que observar que F_m no es normal solo ortogonal.

De donde tenemos la interpretación de la fórmula de inversión, esto es la representación de un elemento z en $\ell^2(\mathbb{Z}_N)$ con respecto a la base de Fourier es precisamente la Transformada Discreta de Fourier y escribimos

$$[z]_F = \widehat{z}$$

pues recordemos que los elementos de $\ell^2(\mathbb{Z}_N)$ son vectores en $\mathbb{C}^N$.

Finalmente dado que la TDF es lineal, podemos representa a la TDF por la matriz.

$$W_N := \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & \omega_N & \omega_N^2 & \omega_N^3 & \cdots & \omega_N^{N-1} \\ 1 & \omega_N^2 & \omega_N^4 & \omega_N^6 & \cdots & \omega_N^{2(N-1)} \\ 1 & \omega_N^3 & \omega_N^6 & \omega_N^9 & \cdots & \omega_N^{3(N-1)} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & \omega_N^{N-1} & \omega_N^{2(N-1)} & \omega_N^{3(N-1)} & \cdots & \omega_N^{(N-1)(N-1)} \end{bmatrix}$$

donde $\omega_N^{mn} = e^{-2\pi imn/N}$. Esto pude verse observando que por definición la transformada discreta de Fourier es la multiplicación de esta matriz con el vector z, es decir que $\widehat{z} = W_N z$.

Un aspecto importante de la TDF es que es invertible, y más aun conocemos cual es la formula, dada por la formula de inversión, con lo cual tenemos la siguiente definición.

Definición 6 *Dado $N \in \mathbb{N}$ definimos* ***La Transformada Discreta de Fourier Inversa****, TDFI, como la transformación*

$$\check{} : \ell^2(\mathbb{Z}_N) \to \ell^2(\mathbb{Z}_N)$$

que actúa como $w \mapsto \check{w}$ dada por

$$\check{w}(n) = \frac{1}{N} \sum_{m=0}^{N-1} w(m) e^{2\pi imn/N}$$

Más aun, de la definición de cambio de base tenemos que la formula de inversión, es la formula de cambio de base para la base de Fourier. Es decir que al igual que antes podemos encontrar la matriz que representa a la TDFI y es la matriz dada por

$$W_N = \frac{1}{N} \overline{W_N}$$

donde $\overline{W_N}$ es la matriz cuyas entradas son las entradas de W_N pero conjugadas. Esto se sigue de la definición de la TDFI.

Por último, como las definiciones de la TDF y la TDFI, están en términos de una función (z o w respectivamente) definida en el conjunto $\mathbb{Z}_N$, como antes podemos hacer una extensión de las definiciones a todos los enteros por medio de la periodicidad. Y de las definiciones tenemos que

$$\begin{aligned} \check{w}(n) &= \frac{1}{N} \sum_{m=0}^{N-1} w(m) e^{2\pi imn/N} \\ &= \frac{1}{N} \sum_{m=0}^{N-1} w(m) e^{-2\pi im(-n)/N} \\ &= \frac{1}{N} \sum_{m=0}^{N-1} w(m) e^{-2\pi im(-n)/N} \\ &= \frac{1}{N} \widehat{w}(-n) \end{aligned}$$

y así, por la periodicidad de las funciones

$$\check{w}(n) = \frac{1}{N}\widehat{w}(N-n)$$

para $n \in \{1, 2, \ldots, N-1\}$.

La aplicación más común de la TDF es en el procesamiento de señales, como sigue. Recordemos que la idea original nace de representar elementos de un espacio vectorial como una combinación lineal de ciertos elementos del espacio, a estos ciertos elementos los llamamos base y más aun dicha representación esta unívocamente determinada por los coeficientes de la combinación lineal. Para el caso de la TDF, vimos que dado una señal, los coeficientes de la representación es la transformada discreta de Fourier, es decir, podemos representar el elemento $z \in \ell^2(\mathbb{Z}_N)$ como

$$z = \sum_{k=0}^{N-1} \widehat{z}(k) F_k$$

de esta igualdad podemos ver que los pesos de cada elemento de la base están dados por la TDF. Esto nos permite extraer información de la función (o señal) como cuales son los elementos de la base que más influyen en la señal; por ejemplo, si $\widehat{z}(r)$ es muy grande en comparación con otros $z\widehat{z}(n)$ para algún $r \in \mathbb{Z}_N$ y todo $n \in \mathbb{Z}_N$ diferente de r, entonces podemos decir que la frecuencia principal de la señal es el respectivo F_r. Este método es muy útil para el diseño de filtros de señales. Otros usos son, para amplificar una característica particular de la señal, pensemos en una señal de audio, esta puede sonar más o menos grave dependiendo del objetivo deseado con solo incrementar o disminuir el valor de la TDF.

En la siguiente sección veremos que la TDF es invariante bajo traslaciones, pero por ahora veremos dos propiedades de la TDF y su comportamiento con dos operaciones, la traslación y la conjugación. Empecemos por definir dichas operaciones.

Definición 7 *Dados $N \in \mathbb{N}$, $k \in \mathbb{Z}$ y $z \in \ell^2(\mathbb{Z}_N)$ definimos el operador traslación como la transformación*

$$R_k : \ell^2(\mathbb{Z}_N) \to \ell^2(\mathbb{Z}_N)$$

tal que $z \mapsto R_k z$ con

$$R_k z(n) = z(n-k) \qquad \forall\ n \in \mathbb{Z}$$

Y la relación que se tiene entre la TDF y este operador esta establecida en el siguiente resultado

Lema 1.1.3 *Dados $N \in \mathbb{N}$, $k \in \mathbb{Z}$ y $z \in \ell^2(\mathbb{Z}_N)$ se tiene que para cualquier $m \in \mathbb{Z}$*

$$\widehat{(R_k z)}(m) = \widehat{z}(m) e^{-2\pi i m k/N}$$

La demostración se basa en demostrar que

$$\sum_{j=-k}^{N-k-1} z(j) e^{-2\pi i m j/N} = \sum_{n=0}^{N-1} z(n) e^{-2\pi i m n/N} = \widehat{z}(m)$$

Demostración: Demostraremos primero que

$$\sum_{j=-k}^{N-k-1} z(j) e^{-2\pi i m j/N} = \sum_{n=0}^{N-1} z(n) e^{-2\pi i m n/N} = \widehat{z}(m)$$

dado que tanto z como la función $e^{-2\pi im/N}$ son funciones periódicas de periodo N se cumple que

$$\begin{aligned}\sum_{j=-k}^{N-k-1} z(j)e^{-2\pi imj/N} &= \sum_{j=-k}^{-1} z(j)e^{-2\pi imj/N} + \sum_{j=0}^{N-k-1} z(j)e^{-2\pi imj/N} \\ &= \sum_{j=-k}^{-1} z(j+N)e^{-2\pi im(j+N)/N} + \sum_{j=0}^{N-k-1} z(j)e^{-2\pi imj/N}\end{aligned}$$

haciendo un cambio de variable en la primera suma por $n = j + N$ y $n = j$ en la segunda se tiene que

$$\begin{aligned}\sum_{j=-k}^{N-k-1} z(j)e^{-2\pi imj/N} &= \sum_{n=N-k}^{N-1} z(n)e^{-2\pi imn/N} + \sum_{n=0}^{N-k-1} z(n)e^{-2\pi imn/N} \\ &= \sum_{n=0}^{N-1} z(n)e^{-2\pi imn/N} \\ &= \widehat{z}(m)\end{aligned}$$

Ahora probemos la conclusión del lema. Por definición

$$\widehat{R_k z}(m) = \sum_{n=0}^{N-1} R_k z(n)e^{-2\pi imn/N} = \sum_{n=0}^{N-1} z(n-k)e^{-2\pi imn/N}$$

haciendo un cambio de variable $j = n - k$ la última suma se transforma en

$$\widehat{R_k z}(m) = \sum_{j=-k}^{N-k-1} z(j)e^{-2\pi im(j+k)/N} = e^{-2\pi imk/N} \sum_{j=-k}^{N-k-1} z(j)e^{-2\pi imj/N}$$

y por lo visto al principio de la demostración

$$\widehat{R_k z}(m) = e^{-2\pi imk/N}\widehat{z}(m)$$

□

Este lema, muestra una de las principales desventajas de la TDF, pues se tiene que

$$|R_k z(m)| = |\widehat{z}(m)| \qquad \forall\ m \in \mathbb{Z}_N$$

y no podemos distinguir z de cualquier rotación $R_k z$. En el siguiente capítulo, veremos que esto implica que no podemos prescindir de ningún elemento de la base para representar algún elemento del espacio. Esto implica un mayor costo de almacenamiento de información que en la practica puede no ser muy practico como se requiere.

La segunda operación a considerar y la última parte de esta sección es la operación de conjugación definida a continuación.

Definición 8 *Dado $N \in \mathbb{N}$ y $z \in \ell^2(\mathbb{Z}_N)$ dado por $z = (z(0), z(1), \ldots, z(N-1))$ definimos el conjugado de z como $\overline{z}$ tal que*

$$\overline{z} = (\overline{z(0)}, \overline{z(1)}, \ldots, \overline{z(N-1)})$$

en otras palabras $\overline{z}(n) = \overline{z(n)}$

Y la relación con la TDF es el siguiente lema el cual se sigue de la definición de la TDF y las propiedades de conjugación en los números complejos.

Lema 1.1.4 *Dado $N \in \mathbb{N}$ y $z \in \ell^2(\mathbb{Z}_N)$ se tiene que*

$$\widehat{\overline{z}}(m) = \overline{\widehat{z}(-m)} = \overline{\widehat{z}(N-m)}, \qquad \forall\ m$$

Demostración: Por definición de la TDF

$$\widehat{\overline{z}}(m) = \sum_{n=0}^{N-1} \overline{z}(n) e^{-2\pi imn/N}$$

por la propiedades de números complejos conjugados tenemos que

$$\sum_{n=0}^{N-1} \overline{z}(n) e^{-2\pi imn/N} = \overline{\sum_{n=0}^{N-1} z(n) e^{2\pi imn/N}}$$

que es el conjugado de $\widehat{z}(-m)$, por lo que

$$\widehat{\overline{z}}(m) = \overline{\widehat{z}(-m)}$$

□

Además tenemos el siguiente corolario

Corolario 1.1.5 *Dado $z \in \ell^2(\mathbb{Z}_N)$ entonces z es real si y solo si $\widehat{z}(m) = \overline{\widehat{z}(N-m)}$ para toda m*

Demostración: Dado que z es real si y solo si $z = \overline{z}$, tenemos que $\widehat{z} = \widehat{\overline{z}}$, pues la TDF es invertible. Y como el lema anterior dice que $\widehat{\overline{z}}(m) = \overline{\widehat{z}(N-m)}$ para todo m se sigue que $\widehat{z}(m) = \widehat{\overline{z}}(m) = \overline{\widehat{z}(N-m)}$ y esto demuestra el corolario. □

En resumen, definimos la Transformada Discreta de Fourier (TDF) y vimos varias de su propiedades, la principal de ellas es que es el operador de cambio de base entre la base Euclidiana, E y la base de Fourier, F. También que la interpretación que nos dan los coeficientes, al identificar las frecuencias principales que influyen en una señal, es decir los elementos importantes de la base del espacio para cada elemento en el mismo espacio. En las siguiente sección veremos otra importante propiedad de la TDF, relacionada con las matrices diagonales.

1.2. La Transformada Discreta de Fourier y las transformaciones lineales invariantes bajo traslación.

Aun no hemos obtenido las principales ventajas de la Transformada de Fourier. En esta sección estudiaremos una de las dos características principales de la TDF que son de gran utilidad en el análisis de señales, la relación entre la TDF y las transformaciones lineales invariantes bajo traslaciones.

El objetivo principal de esta sección es probar que la TDF diagonaliza las transformaciones invariantes bajo traslaciones ya que estas son la que aparecen de manera natural en los sistemas físicos además las transformaciones que son diagonalizable son fáciles de trabajar.

Resulta que el estudio de una señal por si sola no basta ya que en la realidad física muchas de las señales son sometidas a una alteración por algún fenómeno. Pensemos en una señal de audio que se reproduce esta puede ser modificada para que suene de determinada manera con mayor o menor fuerza, más aguda o más grave, por ejemplo un amplificador de audio. En general estamos pensando en algún sistema por el cual se hace pasar la señal y esta se ve modificada.

En términos matemáticos un sistema es una función, específicamente para el estudio de las señales una transformación lineal nos representa el sistema de interés. Más aun estudiaremos aquellos sistemas cuyo comportamiento no se ven afectado a diferentes horas del tiempo, esto es son invariantes bajo traslaciones.

Ya hemos hablado de las traslaciones dadas por el operados R_k el cual hace un corrimiento de las coordenadas de un vector k unidades a la derecha. En términos de este operador decimos que

Definición 9 *Dada $T : \ell^2(\mathbb{Z}_N) \to \ell^2(\mathbb{Z}_N)$ una transformación lineal, decimos que T es invariante bajo traslaciones si*

$$T(R_k z) = R_k T(z)$$

para todo $z \in \ell^2(\mathbb{Z}_N)$ y todo $k \in \mathbb{Z}$

Es decir, T es invariante bajo traslaciones si conmuta con el operador R_k.

Hay dos caminos para probar el resultado uno de ellos es demostrar directamente el teorema

Teorema 1.2.1 *Sea $T : \ell^2(\mathbb{Z}_N) \to \ell^2(\mathbb{Z}_N)$ una transformación lineal invariante bajo traslaciones. Entonces cada elemento de la base de Fourier F es un vector propio de T, en particular T es diagonalizable.*

El segundo camino es más interesante, pues es un teorema que deja ver más utilidades de la TDF al análisis de señales. El teorema dice que

Teorema 1.2.2 *Sea $T : \ell^2(\mathbb{Z}_N) \to \ell^2(\mathbb{Z}_N)$ una transformación lineal, entonces las siguientes declaraciones son equivalentes*

1. *T es invariante bajo traslaciones.*

2. *La matriz que representa a T en la base canónica e, $A_{T,e}$ es circulante.*

3. *T es un operador convolución.*

4. *T es un operador multiplicador de Fourier.*

5. *La matriz que representa a T en la base de Fourier F, $A_{T,F}$ es diagonal.*

Empecemos por dar las definiciones adecuadas de los términos involucrados en el teorema y su importancia en el análisis de señales. La demostración se dará por medio de varios lemas bajo las siguientes implicaciones $1 \Rightarrow 2$, $2 \Rightarrow 3$, $3 \Rightarrow 1$, $3 \Leftrightarrow 4$ y $4 \Leftrightarrow 5$.

El primer concepto que debemos establecer es el de matriz circulante y al igual que antes consideraremos la periodicidad de la forma

$$a_{m+N,n} = a_{mn} \qquad \text{y} \qquad a_{m,n+N} = a_{mn}$$

Definición 10 *Una matriz $A = [a_{mn}]_{0\leq m,n\leq N-1}$ de dimensión $N \times N$ es circulante si se cumple que*

$$a_{m+k,n+k} = a_{mn}$$

para todo $m, n, k \in \mathbb{Z}$

Esto es que si nos recorremos una cantidad constante tanto en las columnas como en los renglones respetando la periodicidad encontraremos el mismo valor por ejemplo

Ejemplo 1.2.3 *Sean* $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 1 & 2 & 3 \\ 3 & 4 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & 4 & 1 \end{pmatrix}$ *y* $B = \begin{pmatrix} a & b & c \\ c & a & b \\ b & a & c \end{pmatrix}$

A es circulante por definición

$$a_{m+k,n+k} = a_{mn}$$

si $k = 1$ obsérvese que para la posición $a_{0,3}$

$$a_{0+k,3+k} = a_{1,4} = a_{1,0} = 4$$

bajo el concepto de periodicidad establecido. Sin embargo B no es circulante ya que para $m = n = 0$ y $k = 2$ se cumple que $a_{0,0} = a$ mientras que $a_{0+k,0+k} = a_{2,2} = c$.

Probemos entonces la primera implicación del teorema

Lema 1.2.4 *Supongamos que $T : \ell^2(\mathbb{Z}_N) \to \ell^2(\mathbb{Z}_N)$ es una transformación lineal tal que $A_{T,e}$ es la matriz que representa a T en la base canónica. Si T es invariante bajo traslaciones entonces $A_{T,e}$ es circulante.*

Demostración: Primero observemos que pasa cuando multiplicamos la matriz $A_{T,e}$ por el vector canónico e_n es decir el vector que solo contiene ceros excepto en la n-esima posición (pensando en dimensión N), se tiene la n-esima columna de $A_{T,e}$ y si nos restringimos a la m-esima posición tenemos la entrada a_{mn} de la matriz $A_{T,e}$.

Lo que quisiéramos probar es que $a_{m+k,n+k} = a_{m,n}$ pero por lo anterior podemos escribir

$$a_{m+k,n+k} = (A_{T,e}e_{n+k})(m + k)$$

como $A_{T,e}$ representa a T

$$a_{m+k,n+k} = (A_{T,e}e_{n+k})(m + k) = (Te_{n+k})(m + k)$$

Pero $R_ke_n = e_{n+k}$ pues R_k es un corrimiento k posiciones a la derecha se tiene que

$$a_{m+k,n+k} = (A_{T,e}e_{n+k})(m + k) = (Te_{n+k})(m + k) = (TR_ke_n)(m + k)$$

Dado que T es invariante bajo traslación R_k y T conmutan por lo que

$$a_{m+k,n+k} = (A_{T,e}e_{n+k})(m + k) = (Te_{n+k})(m + k) = (TR_ke_n)(m + k) = (R_kTe_n)(m + k)$$

Por la definición de R_k

$$\begin{aligned} a_{m+k,n+k} &= (A_{T,e}e_{n+k})(m + k) = (Te_{n+k})(m + k) = (TR_ke_n)(m + k) = (R_kTe_n)(m + k) \\ &= (Te_n)(m + k - k) = (Te_n)(m) \end{aligned}$$

pero otra vez esto es la multiplicación de $A_{T,e}$ por un vector canónico en la posición m es decir

$$\begin{aligned} a_{m+k,n+k} &= (A_{T,e}e_{n+k})(m+k) = (Te_{n+k})(m+k) = (TR_ke_n)(m+k) = (R_kTe_n)(m+k) \\ &= (Te_n)(m+k-k) = (Te_n)(m) = (A_{T,e}e_n)(m) = a_{m,n} \end{aligned}$$

que es lo que queríamos probar, por lo tanto $A_{T,e}$ es circulante. □

La segunda de las implicaciones requiere la definición de lo que es un operador convolución, esto es

Definición 11 *Supongamos que $b \in \ell^2(\mathbb{Z}_N)$. Un operador convolución es una transformación*

$$T_b : \ell^2(\mathbb{Z}_N) \to \ell^2(\mathbb{Z}_N)$$

dado por

$$T_b(z) = b * z$$

para todo $z \in \ell^2(\mathbb{Z}_N)$ donde el vector $(b * z)$ en su posición m esta dada por

$$(b * z)(m) = \sum_{n=0}^{N-1} b(m-n)z(n)$$

Probemos ahora la segunda implicación del teorema, esta establece que

Lema 1.2.5 *Sea A una matriz de $N \times N$ dada por $A = [a_{mn}]_{0 \leq m,n \leq N-1}$ que es circulante. Entonces*

$$Az = b * z = T_b(z)$$

para algún $b \in \ell^2(\mathbb{Z}_N)$

La demostración se basa en construir un b que satisface las condiciones necesarias y ver que se satisfacen.

Demostración: Sea $b \in \ell^2(\mathbb{Z}_N)$ dada por la primer columna de la matriz A es decir

$$b(n) = a_{n,0}$$

para $n = 0, 1, \ldots, N-1$. Probemos que esto nos define el comportamiento de A aplicado a cualquier $z \in \ell^2(\mathbb{Z}_N)$.

Pero primero obsérvese que como A es circulante podemos sumarle un entero a las coordenadas de cualquier elemento, para obtener una posición de la primer columna de A es decir, para a_{mn} sumar $-n$ con lo que se tiene

$$a_{m,n} = a_{m-n,n-n} = a_{m-n,0}$$

que es la entrada en la posición $m-n$ de la primera columna por lo que tenemos $b(m-n)$

En base a lo anterior se tiene que A aplicado a un vector cualquiera $z \in \ell^2(\mathbb{Z}_N)$ en alguna posición m esta dado por

$$Az(m) = \sum_{n=0}^{N-1} a_{mn}z(n)$$

y dado que $a_{mn} = b(m-n)$ tenemos que

$$Az(m) = \sum_{n=0}^{N-1} a_{mn} z(n) = \sum_{n=0}^{N-1} b(m-n)z(n)$$

que por definición es la convolución de b con z es decir

$$Az(m) = b * z(m)$$

lo que significa ser un operador convolución. Por lo tanto A es un operador convolución. □

Vamos a cerrar un circulo entre las primeras tres proposiciones demostrando que $3 \Rightarrow 1$ esto es que cualquier transformación invariante bajo traslación es un operador convolución.

Lema 1.2.6 *Sea $b \in \ell^2(\mathbb{Z}_N)$ y sea $T_b : \ell^2(\mathbb{Z}_N) \to \ell^2(\mathbb{Z}_N)$ el operador convolución asociado a b entonces T_b es invariante bajo traslación.*

Demostración: Sea $z \in \ell^2(\mathbb{Z}_N)$ y $k \in \mathbb{Z}$ entonces para cualquier m

$$T_b(R_k z)(m) = b * (R_k z)(m) = \sum_{n=0}^{N-1} b(m-n)z(n-k)$$

haciendo un cambio de variable $j = n - k$ tenemos que

$$T_b(R_k z)(m) = \sum_{j=-k}^{N-1-k} b(m-k-j)z(j)$$

dado que b y z son periódicas de periodo N

$$\sum_{j=-k}^{N-1-k} b(m-k-j)z(j) = \sum_{j=0}^{N-1} b(m-k-j)z(j)$$

por la definición de convolución

$$\sum_{j=0}^{N-1} b(m-k-j)z(j) = b * z(m-k) = R_k(b*z)(m)$$

por lo que

$$T_b(R_k z)(m) = R_k(b*z)(m) = R_k T_b(z)(m)$$

es decir T_b conmuta con el operador traslación R_k por lo que se tiene el resultado deseado. □

El uso de estos resultados en el análisis de señales esta dado de la siguiente manera. Supongamos que se tiene un sistema, ya sea un amplificador o un sistema de audio. Este sistema se puede modelar como un transformación invariante bajo traslación en $\ell^2(\mathbb{Z}_N)$. Una manera de conocer su comportamiento es en base al resultado anterior, como es invariante bajo traslación es un operador convolución T_b es decir el sistema funciona como

$$T_b(z) = b * z$$

pero aun no se conoce b. Si se desea Saber como es b basta con saber cuanto vale $T_b(\delta)$ donde

$$\delta(n) = \begin{cases} 1 & \text{si } n = 0 \\ 0 & \text{si } n \neq 0 \end{cases}$$

ya que

$$T_b(\delta) = b * \delta = b$$

ya que δ realmente es e_0. Así basta conocer cuanto vale la salida del sistema cuando la entrada es δ.

Un aspecto que será de gran utilidad más adelante es el comportamiento de la TDF con la operación de convolución.

Lema 1.2.7 *Supongamos que $z, w \in \ell^2(\mathbb{Z}_N)$. Entonces para cada $m \in \mathbb{Z}_N$ se tiene que*

$$\widehat{z * w}(m) = \widehat{z}(m)\widehat{w}(m)$$

Demostración: Por definición

$$\begin{aligned} \widehat{z * w}(m) &= \sum_{n=0}^{N-1} (z * w)(n) e^{-2\pi imn/N} \\ &= \sum_{n=0}^{N-1} \sum_{k=0}^{N-1} z(n-k)w(k)e^{-2\pi imn/N} \\ &= \sum_{n=0}^{N-1} \sum_{k=0}^{N-1} z(n-k)w(k)e^{-2\pi im(n-k)/N} e^{-2\pi imk/N} \\ &= \sum_{k=0}^{N-1} w(k)e^{-2\pi imk/N} \sum_{n=0}^{N-1} z(n-k)e^{-2\pi im(n-k)/N} \end{aligned}$$

la última suma es

$$\sum_{n=0}^{N-1} z(n-k)e^{-2\pi im(n-k)/N} = \sum_{j=-k}^{N-1-k} z(j)e^{-2\pi imj/N} = \sum_{j=0}^{N-1} z(j)e^{-2\pi imj/N}$$

ya que z es periódica de periodo N de donde se tiene que

$$\begin{aligned} \widehat{z * w}(m) &= \sum_{k=0}^{N-1} w(k)e^{-2\pi imk/N} \sum_{n=0}^{N-1} z(n-k)e^{-2\pi im(n-k)/N} \\ &= \sum_{k=0}^{N-1} w(k)e^{-2\pi imk/N} \sum_{j=0}^{N-1} z(j)e^{-2\pi imj/N} \\ &= \widehat{w}(m)\widehat{z}(m) \end{aligned}$$

□

Antes de probar la cuarta implicación del teorema necesitamos establecer la definición correspondiente a lo que es un operador multiplicador de Fourier, esto es

Definición 12 *Dado $m \in \ell^2(\mathbb{Z}_N)$, definimos un operador multiplicador de Fourier como la transformación lineal $T_{(m)} : \ell^2(\mathbb{Z}_N) \to \ell^2(\mathbb{Z}_N)$ dada por*

$$T_{(m)}(z) = (m\widehat{z})\check{}$$

donde $m\widehat{z}$ es el vector que resulta de la multiplicación entrada con entrada de m y $\widehat{z}$, es decir

$$m\widehat{z}(n) = m(n)\widehat{z}(n)$$

Este tipo de transformaciones son muy útiles en la modelación de ecualizadores gráficos cuyo propósito principal es alterar por separado las frecuencias de la señal de interés. Esto es debido a que como podemos ver el efecto de un operador multiplicador de Fourier $T_{(m)}$ aplicado a una señal dada $z \in \ell^2(\mathbb{Z}_N)$ es multiplicar el k-esimo coeficiente de Fourier por $m(k)$ ya que

$$T_{(m)}(z) = \sum_{k=0}^{N-1} \widehat{T_{(m)}z} F_k = \sum_{k=0}^{N-1} m(k)\widehat{z}(k) F_k$$

esto debido a que F es la base de Fourier, la representación de una señal $T_{(m)}(z)$ en dicha base y por la definición del operador multiplicador de Fourier.

Veamos ahora la implicación de la cuarta implicación de nuestro teorema principal de Fourier, la cual establece que

Lema 1.2.8 *Sea $T : \ell^2(\mathbb{Z}_N) \to \ell^2(\mathbb{Z}_N)$ una transformación lineal. Entonces T es un operador convolución si y solo si T es un operador multiplicador de Fourier*

Demostración: Si $T : \ell^2(\mathbb{Z}_N) \to \ell^2(\mathbb{Z}_N)$ es un operador convolución digamos $T = T_b$ para algún $b \in \ell^2(\mathbb{Z}_N)$ tomemos $m = \widehat{b}$ se tiene que

$$T_b(z) = b * z = (\widehat{b * z})\check{} = (\widehat{b}\widehat{z})\check{} = (m\widehat{z})\check{} = T_{(m)}(z)$$

conversamente si $T = T_{(m)}$ un operador multiplicador de Fourier basta tomar $b = \check{m}$ □

Finalmente la última de nuestras implicaciones es demostrar que la matriz que representa a T en la base de Fourier es diagonal. De la definición de ser un operador multiplicador de Fourier

$$T_{(m)}(z) = (m\widehat{z})\check{} \Leftrightarrow \widehat{T_{(m)}(z)}(k) = m(k)\widehat{z}(k)$$

vemos que la TDF de un operador multiplicador de Fourier se comporta como la multiplicación por una matriz diagonal, a saber la matriz D, tal que $D_{ii} = m(i)$ lo cual establece se especifica en el siguiente lema

Lema 1.2.9 *Sea $T : \ell^2(\mathbb{Z}_N) \to \ell^2(\mathbb{Z}_N)$ una transformación lineal. Entonces T es un operador multiplicador de Fourier si y solo si la matriz que representa T en la base de Fourier F es diagonal.*

Demostración: Sea T el operador multiplicador de Fourier $T_{(m)}$. Sea $D = [d_m n]_{0 \leq m,n \leq N-1}$ que satisface $d_{nn} = m(n)$ para $n = 0, 1, \ldots, N-1$.

Obsérvese de la definición de ser un operador multiplicador de Fourier que se tiene la equivalencia

$$\widehat{T_{(m)}(z)}(k) = m(k)\widehat{z}(k)$$

es decir que

$$\begin{aligned}
[T_{(m)}(z)]_F &= \begin{bmatrix} m(0)\widehat{z}(0) \\ m(1)\widehat{z}(1) \\ \vdots \\ m(N-1)\widehat{z}(N-1) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} d_{00}\widehat{z}(0) \\ d_{11}\widehat{z}(1) \\ \vdots \\ d_{N-1N-1}\widehat{z}(N-1) \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} d_{00} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & d_{11} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & d_{N-1N-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \widehat{z}(0) \\ \widehat{z}(1) \\ \vdots \\ \widehat{z}(N-1) \end{bmatrix} \\
&= D\widehat{z} = D[z]_F
\end{aligned}$$

esto es que el operador multiplicador de Fourier se comporta como un matriz diagonal en la base de Fourier.

Conversamente supongamos que la matriz diagonal $D = [d_m n]_{0\leq m,n\leq N-1}$ representa a T respecto a al base de Fourier. Sea $m(n) = d_{nn}$ para $0 \leq\leq N-1$ y sea $T_{(m)}$ el correspondiente operador multiplicador de Fourier y al igual que antes

$$[T_{(m)}(z)]_F = D[z]_F = [T_{(m)}(z)]_F$$

por lo que $T = T_{(m)}$

$\square$

En resumen si T es una transformación lineal invariante bajo traslación entonces es diagonalizable en la base de Fourier dado que se puede ver como un operador multiplicador de Fourier.

En la práctica este teorema es muy útil ya que si T es una transformación lineal invariante bajo traslaciones basta con encontrar su representación matricial en términos de la base canónica, la cual será circulante, tomar la primera columna de esta matriz b con lo que tendremos un operador convolución T_b y tomando $m = \widehat{b}$ tendremos un operador multiplicador de Fourier $T_{(m)}$ o si se desea la matriz diagonal D, $d_{ii} = m(i)$ que representa a T en la base de Fourier esto es

$$[T(z)]_F = D[z]_F$$

Dado que W_N es la matriz que representa a la aplicación TDF en términos de matrices podemos decir que si T es una transformación lineal invariante bajo traslaciones, A es la matriz que representa a T en la base canónica, D es la matriz que representa a T en la base de Fourier tenemos que

$$W_N Az = \widehat{(Az)} = [Az]_F = [T(z)]_F = D[z]_F = D\widehat{z} = DW_N z$$

es decir

$$W_N Az = DW_N z \Rightarrow Az = W_N^{-1} DW_N z$$

de donde se tiene que

$$A = W_N^{-1} DW_N \text{ ó equivalentemente } D = W_N AW_N^{-1}$$

Finalmente vimos que la TDF diagonaliza cualquier transformación lineal invariante bajo traslaciones que es una de las propiedades más importantes de la TDF ya que este tipo de transformaciones son las más comunes en el análisis de señales. Sin embargo aun hay un par de preguntas que quedan al aire sobre la utilidad de la TDF en el análisis de señales, esto es desde el punto de vista computacional, ¿Que tan factible es, (fácil o difícil) es calcular la TDF? ¿Cuantos elementos necesitamos para representar una señal? en las secciones posteriores responderemos estas interrogantes y construiremos bases que nos permitan subsanar las deficiencias que se vayan teniendo.

1.3. Un algoritmo de cálculo rápido: La Transformada Rápida de Fourier

En esta sección estudiaremos un algoritmo rápido para el cálculo de la Transformada de Fourier conocido como la Transformada Rápida de Fourier (TRF por sus siglas en español). En la sección anterior vimos que la Transformada de Fourier es muy útil en el estudio de las transformaciones lineales invariantes bajo traslación que son las transformaciones que más aparecen en el estudio de señales. Sin embargo, el cambio de coordenadas a la base de Fourier podría no resultar ser tan útil cuando hablamos desde el punto de vista computacional ya que para calcular la TDF de una señal, digamos $z \in \ell^2(\mathbb{Z}_N)$ tendríamos que calcular

$$\widehat{z} = [z]_F = W_N[z]_e$$

donde e es la base canónica. Es decir, hacer una multiplicación de una matriz de dimensión $N \times N$ por un vector de dimensión N. Lo que equivale a N^2 multiplicaciones complejas (de números complejos) solo para transformar una señal a su representación en la base de Fourier. Si ha esto le añadimos que en las aplicaciones los vectores son de longitud $10,000,000$ pixeles por segundo (por ejemplo en señales de TV) o 500×500 pixeles en una imagen, esto requiere muchas una gran trabajo computacional por los que se requiere un algoritmo rápido y la Transformada Rápida de Fourier es la solución. A continuación veremos como se realiza este procedimiento en base a un ejemplo.

Empecemos por el ejemplo a manera de algoritmo. La idea es calcular transformadas de Fourier de menor orden para encontrar la de mayor orden.

Ejemplo 1.3.1 *Sea* $z \in \ell^2(\mathbb{Z}_8)$ *el vector* $z = (1, 1, 1, i, 1, -1, 1, -i)$ *calcular* $\widehat{z}$

Solución 1.3.2 .

1. *Primero consideremos los vectores* $u, v \in \ell^2(\mathbb{Z}_4)$ *dados por las coordenadas pares e impares digamos*
$$u = (z(0), z(2), z(4), z(6)) = (1, 1, 1, 1)$$
y
$$v = (z(1), z(3), z(5), z(7)) = (1, i, -1, -i)$$
recuerde que aquí $N = 8$ *por lo que los índices de* z *son* $0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7$

2. *Calculemos ahora las TDF de* u *y* v *pero para esto necesitaremos calcular primero* W_4 *pues* $\widehat{u} = W_4 u$ *y* $\widehat{v} = W_4 v$

   a) *Para calcular* W_4 *recordemos que* $W_N = \left[e^{-2\pi i m n/N}\right]_{0 \le m,n \le N-1}$, *para el caso de* $N = 4$
$$e^{-2\pi i m n/N} = e^{-2\pi i m n/4} = e^{-\pi i m n/2}$$

y W_N esta dada por

$$W_4 = \begin{bmatrix} e^{-\pi i 0\cdot 0/2} & e^{-\pi i 0\cdot 1/2} & e^{-\pi i 0\cdot 2/2} & e^{-\pi i 0\cdot 3/2} \\ e^{-\pi i 1\cdot 0/2} & e^{-\pi i 1\cdot 1/2} & e^{-\pi i 1\cdot 2/2} & e^{-\pi i 1\cdot 3/2} \\ e^{-\pi i 2\cdot 0/2} & e^{-\pi i 2\cdot 1/2} & e^{-\pi i 2\cdot 2/2} & e^{-\pi i 2\cdot 3/2} \\ e^{-\pi i 3\cdot 0/2} & e^{-\pi i 3\cdot 1/2} & e^{-\pi i 3\cdot 2/2} & e^{-\pi i 3\cdot 3/2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -i & -1 & i \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & i & -1 & -i \end{bmatrix}$$

b*) Usando W_4 obtenemos que*

$$\widehat{u} = W_4 u = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -i & -1 & i \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & i & -1 & -i \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} = (4,0,0,0)$$

y

$$\widehat{v} = W_4 v = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -i & -1 & i \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & i & -1 & -i \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ i \\ -1 \\ -i \end{bmatrix} = (0,4,0,0)$$

3. Finalmente usaremos $\widehat{u}$ y $\widehat{v}$ para construir $\widehat{z}$ en base a la siguiente formula

$$\widehat{z}(m) = \begin{cases} \widehat{u}(m) + e^{-2\pi i m/8}\widehat{v}(m) & si\ m = 0,1,2,3 \\ \widehat{u}(m-4) - e^{-2\pi i (m-4)/8}\widehat{v}(m-4) & si\ m = 4,5,6,7 \end{cases}$$

Observe que los valores de $m-4$ son $0,1,2,3$ conforme $m = 4,5,6,7$ esto significa que la diferencia entre las dos formulas es el signo. Más adelante daremos una interpretación más general de esta fórmula.

Es decir

$$\begin{aligned} \widehat{z}(0) &= \widehat{u}(0) + e^{-2*\pi i\cdot 0/8}\widehat{v}(0) = 4 + 0 = 4 \\ \widehat{z}(1) &= \widehat{u}(1) + e^{-2*\pi i\cdot 1/8}\widehat{v}(1) = 0 + \left(\frac{\sqrt{2}}{2} - i\frac{\sqrt{2}}{2}\right)4 = 2\sqrt{2} - i2\sqrt{2} \\ \widehat{z}(2) &= \widehat{u}(2) + e^{-2*\pi i\cdot 2/8}\widehat{v}(2) = 0 + 0 = 0 \\ \widehat{z}(3) &= \widehat{u}(3) + e^{-2*\pi i\cdot 3/8}\widehat{v}(3) = 0 + 0 = 0 \\ \widehat{z}(4) &= \widehat{u}(0) - e^{-2*\pi i\cdot 0/8}\widehat{v}(0) = 4 - 0 = 4 \\ \widehat{z}(5) &= \widehat{u}(1) - e^{-2*\pi i\cdot 1/8}\widehat{v}(1) = 0 - \left(\frac{\sqrt{2}}{2} - i\frac{\sqrt{2}}{2}\right)4 = -2\sqrt{2} + i2\sqrt{2} \\ \widehat{z}(6) &= \widehat{u}(2) - e^{-2*\pi i\cdot 2/8}\widehat{v}(2) = 0 - 0 = 0 \\ \widehat{z}(7) &= \widehat{u}(3) - e^{-2*\pi i\cdot 3/8}\widehat{v}(3) = 0 - 0 = 0 \end{aligned}$$

$$\widehat{z} = (4, 2\sqrt{2}(1-i), 0, 0, 4, -2\sqrt{2}(1-i), 0, 0)$$

Este algoritmo esta basado en el siguiente lema

Lema 1.3.3 *Supongamos que $M \in \mathbb{N}$ y que $N = 2M$. Sea $z \in \ell^2(\mathbb{Z}_N)$ definimos $u, v \in \ell^2(\mathbb{Z}_M)$ dados por*

$$u(k) = z(2k) \qquad k = 0,1,2,\dots,M-1$$

y

$$v(k) = z(2k+1) \qquad k = 0, 1, 2, \dots, M-1$$

Entonces $\widehat{z} \in \ell^2(\mathbb{Z}_N)$ *se puede calcular como*

$$\widehat{z}(m) = \begin{cases} \widehat{u}(m) + e^{-2\pi i m/N}\widehat{v}(m) & si\ m = 0, 1, 2, \dots, M-1 \\ \widehat{u}(m-M) - e^{-2\pi i(m-M)/N}\widehat{v}(m-M) & si\ m = M, M+1, M+2, \dots, N-1 \end{cases}$$

Antes de dar la demostración hay que observar con cuidado las ventajas del lema. Dado que estamos partiendo en dos el vector de interés z en u y v y se tiene que calcular $\widehat{u}$ y $\widehat{v}$ en $\ell^2(\mathbb{Z}_{N/2})$ deberemos hacer $2M^2$ operaciones para las TDF de u y v más M multiplicaciones según la fórmula establecida en el lema (a saber los productos $e^{-2\pi i m/N}\widehat{v}(m)$) esto nos da un total de

$$2M^2 + M = 2\left(\frac{N}{2}\right)^2 + \frac{N}{2} = \frac{N^2}{2} + N = \frac{1}{2}(N^2 + N)$$

operaciones que para valores muy grandes de N es básicamente $\frac{1}{2}N^2$ es decir la mitad de operaciones que nos hubiera tomado con la multiplicación de matrices

$$\widehat{z} = W_8 z$$

Demostración: Por la definición de la TDF se tiene que para cualquier $m = 0, 1, \dots, N-1$

$$\widehat{z}(m) = \sum_{n=0}^{N-1} z(n) e^{-2\pi i mn/N}$$

Según el resultado deseado separamos esta suma en dos sumas, una para las entradas pares y otra para las entradas impares.

$$\begin{aligned} \widehat{z}(m) &= \sum_{k=0}^{M-1} z(2k) e^{-2\pi i m2k/N} + \sum_{k=0}^{M-1} z(2k+1) e^{-2\pi i m(2k+1)/N} \\ &= \sum_{k=0}^{M-1} z(2k) e^{-2\pi i mk/(N/2)} + e^{-2\pi i m/N} \sum_{k=0}^{M-1} z(2k+1) e^{-2\pi i mk/(N/2)} \\ &= \sum_{k=0}^{M-1} u(k) e^{-2\pi i mk/M} + e^{-2\pi i m/N} \sum_{k=0}^{M-1} v(k) e^{-2\pi i mk/M} \end{aligned}$$

en el caso de que $m = 0, 1, \dots, M-1$ la suma es

$$\widehat{z}(m) = \widehat{u}(m) + e^{-2\pi i m/N}\widehat{v}(m)$$

sin embargo para los valores de $m = M, M+1, M+2, \dots, N-1$ $m = M + j$ con $j = 0, 1, \dots, M-1$ y esto transforma la suma en

$$\widehat{z}(m) = \sum_{k=0}^{M-1} u(k) e^{-2\pi i k(j+M)/M} + e^{-2\pi i(j+M)/N} \sum_{k=0}^{M-1} v(k) e^{-2\pi i k(j+M)/M}$$

y puesto que la función exponencial que se encuentra dentro de las sumas están definidas en $\mathbb{Z}_M$ ellas son periódicas con periodo M por lo que

$$\widehat{z}(m) = \sum_{k=0}^{M-1} u(k) e^{-2\pi i kj/M} + e^{-2\pi i(j+M)/N} \sum_{k=0}^{M-1} v(k) e^{-2\pi i kj/M}$$

finalmente ya que

$$e^{-2\pi i(j+M)/N} = e^{-2\pi ij/N}e^{-2\pi iM/N}$$

y

$$e^{-2\pi iM/N} = e^{-2\pi i(1/2)} = e^{-\pi i} = -1$$

y sustituyendo el valor de $j = m - M$ se tiene que

$$\widehat{z}(m) = \sum_{k=0}^{M-1} u(k)e^{-2\pi ik(m-M)/M} - e^{-2\pi i(m-M)/N} \sum_{k=0}^{M-1} v(k)e^{-2\pi ik(m-M)/M}$$

que por definición es

$$\widehat{z}(m) = \widehat{u}(m-M) - e^{-2\pi i(m-M)/N}\widehat{v}(m-M)$$

□

Hay otros resultados sobre los casos cuando N es primo (en cuyo caso la TRF no aplica) o cuando N impar o potencia de dos sobre la cantidad e operaciones necesarias para calcular la TDF. Por ejemplo el número de operaciones necesarias para calcular la TDF cuando N es una potencia de 2 es como sigue

Lema 1.3.4 *Supongamos que $N = 2^n$ para algún $n \in \mathbb{N}$. Entonces el menor número de multiplicaciones complejas necesarias para calcular la TDF es menor o igual a* $(1/2)N \log_2 N$

Para la TDF inversa obsérvese lo siguiente, si $z \in \ell^2(\mathbb{Z}_N)$, $\widehat{z} \in \ell^2(\mathbb{Z}_N)$ además z es periódica de periodo N y se cumple que para números negativos $-n$ que $z(-n) = z(N-n)$ y $\widehat{z}(-n) = \widehat{z}(N-n)$ y por los definiciones de la TDF y la TDF inversa tenemos que

$$\check{z}(n) = \frac{1}{N}\widehat{z}(-n) = \frac{1}{N}\widehat{z}(N-n)$$

por lo que el cálculo de la TDF inversa también es rápido.

Capítulo 2

Introducción a las ondículas

En este capítulo veremos una introducción a las ondículas y como generarlas. Las ondículas comienzan por la necesidad de satisfacer cierta propiedad que no se tiene con la base de Fourier y tiene varias aplicaciones en el análisis de señales. Los objetivos específicos del capítulo serán dar las condiciones necesarias para crear una base ondicular de primera etapa y un algoritmo que me permita construir una base ondicular. Mientras que en la segunda sección generalizaremos este proceso mediante una iteración de lo visto en la primera sección.

2.1. Bases ondiculares de primera etapa

Una de las propiedades de mayor interés en el uso práctico de la TDF es que podemos determinar cuales elementos de la base del espacio (llamados frecuencias) son los más relevantes en la representación mediante dicha base y así poder remover aquellas frecuencias que no sean sustanciales para la señal como frecuencias de ruido, frecuencias imperceptibles o simplemente frecuencias altas. Esto es, podemos hacer un análisis en frecuencia del sistema de interés obsérvese que al dejar de lado algunas frecuencias se pierde exactitud del elemento en cuestión.

En este sentido, la base de Fourier tiene una desventaja importante en la práctica, ya que para representar algún elemento del espacio en un punto específico debemos tomar en consideración el valor de cada una de las componentes de su expansión respecto a la base de Fourier. Esto no es muy conveniente cuando se desea hacer transmisión de señales, pues requerimos demasiados términos solo para enviar una señal, lo cual tiene un costo computacional muy elevado. Por tal motivo estamos en busca de otra base, una que satisfaga esta necesidad. Es decir, queremos una base que nos permita poder representar una señal no con todos los elementos de la base, si no solamente algunos que sean los más significativos. A este tipo de conjuntos se les conoce como conjuntos localizables en el espacio. Formalmente, decimos

Definición 13 *Un vector* $z \in \ell^2(\mathbb{Z}_N)$ *es localizable en el espacio, digamos en* $n_0 \in \mathbb{Z}_N$ *si existe* $\delta > 0$ *tal que* z *es cero fuera de la vecindad de radio* δ *centrada en* n_0*,* $V_\delta(n_0)$*.*

Y decimos que un conjunto es localizable en el espacio si todos sus elementos son localizables en el espacio.

La principal ventaja de ser localizable en el espacio es como sigue. Supongamos que tenemos una base de $\ell^2(\mathbb{Z}_n)$, $\beta = \{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$, que es localizable en el espacio; de acuerdo a la definición de base podemos expresar cualquier elemento $z \in \ell^2(\mathbb{Z}_n)$ como una combinación lineal de estos elementos

$$z = \sum_{k=0}^{n} a_k v_k$$

sin embargo, dado que la base es localizable en el espacio, algunos elementos de la base serán cero en ciertos elementos $n_0 \in \mathbb{Z}_n$, por lo que z en n_0 puede ser representado por

$$z(n_0) = \sum_{k=0}^{m} a_{i_k} v_{i_k}(n_0), \quad m < n$$

por lo que la señal se hace menos costosa al solo trabajar con los coeficientes de esta representación cerca de n_0.

Las bases que conocemos hasta ahora son la base de Fourier F y la base canónica e, esta última definida al principio del capítulo anterior por $e_k(j) = \delta_{kj}$ para todo $j \in \mathbb{Z}_N$. La base de Fourier no es localizable en el espacio pues cada elemento es una exponencial los cuales nunca son cero por lo que necesitaríamos de todos los elementos para representar una señal en un punto fijo del dominio como mencionamos antes. Y por otro, lado aunque la base canónica si es localizable en el espacio, esta no es localizable en frecuencia, que es una de las ventajas de la base de Fourier que queremos conservar.

Por lo tanto queremos encontrar una base cuyos elementos sean localizable tanto en el espacio como en frecuencia. Este tipo de bases se obtienen usando ondículas. Con estas bases, podemos sacar el doble de información de los coeficientes. Por un lado si la base es localizable en frecuencia podemos saber que frecuencias (o elementos de la base) son significativos en la señal y por otro lado si la base es localizable en espacio necesitaremos solo pocos elementos para hacer una representación de la señal.

Como hemos dicho anteriormente, las ondículas surgen por la necesidad de un mejor análisis de ciertas señales pero sin perder las ventajas que ya se tienen con la TDF; una de estas propiedades de la TDF es que se tiene un algoritmo de computo rápido dado por la TRF y la diagonalización de ciertas transformaciones lineales. En esta misma dirección con las nuevas bases queremos tener una manera rápida de pasar una señal de una base, digamos la base canónica e a la nueva base, llamémosle W.

Primero recordemos que los coeficientes de la expansión de un vector z en términos de la base $W = \{w_1, w_2, \ldots, w_N\}$ están dados por los productos internos $\langle z, w_k \rangle$. Segundo, en el capítulo anterior vimos que la convolución de dos vectores puede ser calculada usando la TDF, que a su vez puede ser calculada de una manera rápida por la TRF. Por lo que ya tenemos una manera rápida de hacer cierto tipo de cálculos y nos gustaría usar esto, solo necesitamos una manera de relacionar estas dos ideas dicha relación esta dada por el siguiente lema, pero primero una definición que sera útil en el lema.

Definición 14 *Sea $s \in \ell^2(\mathbb{Z}_N)$ un elemento arbitrario. Definimos* ***la reflexión conjugada de s****, $\widetilde{s}$, como el elemento de $\ell^2(\mathbb{Z}_N)$ tal que*

$$\widetilde{s}(n) = \overline{s(-n)} = \overline{s(N-n)} \qquad \forall\ n$$

Lema 2.1.1 *Dados $s, t \in \ell^2(\mathbb{Z}_N)$ se tiene para cualquier $k \in \mathbb{Z}$ que*

$$s * \widetilde{t}(k) = \langle s, R_k t \rangle$$

o

$$s * t(k) = \left\langle s, R_k \widetilde{t} \right\rangle$$

La demostración es básicamente usar las definiciones y recordar la conmutatividad de la convolución. Para la segunda ecuación basta ver que la reflexión conjugada de la reflexión conjugada es la identidad y aplicar esto a la primera ecuación.

Demostración: Por definición

$$\begin{aligned}
\langle s, R_k t\rangle &= \sum_{n=0}^{N-1} s(n)\overline{R_k t(n)} \\
&= \sum_{n=0}^{N-1} s(n)\overline{t(n-k)} \\
&= \sum_{n=0}^{N-1} s(n)\widetilde{t}(k-n) \\
&= \widetilde{t} * s(k) = s * \widetilde{t}(k)
\end{aligned}$$

por la conmutatividad del operador convolución.

Para la segunda ecuación, primero tenemos que

$$\widetilde{\widetilde{t}}(n) = \overline{\widetilde{t}(-n)} = \overline{\overline{t(n)}} = t(n)$$

lo cual aplicado a la primera ecuación nos da que

$$s * t(k) = s * \widetilde{\widetilde{t}} = \left\langle s, R_k \widetilde{t}\right\rangle$$

con lo cual queda demostrado el lema. □

Con este resultado, la idea esta completa. Si queremos hacer cálculos rápidos sobre la representación de una señal en términos de cierta base basta con tener una base de traslaciones $W = \{w, R_1 w, \ldots, R_{N-1}w\}$, pues en este caso los coeficientes estarán dados por el producto interno

$$\langle z, R_k w\rangle \quad k = 0, 1, \ldots, N-1$$

que según el lema anterior son convoluciones que a su vez pueden ser calculadas de manera rápida por la Transformada Rápida de Fourier.

Sin embargo, hasta ahora no tenemos una manera de saber cuando un conjunto de traslaciones es base pero existe una caracterización de esta relación dada por el siguiente lema. Que a su vez es desalentador en la dirección que queremos, que es buscar una base localizable en frecuencia y en espacio y que sea rápidamente calculable en términos computacionales.

Lema 2.1.2 *Sea $w \in \ell^2(\mathbb{Z}_N)$, w no cero. Entonces el conjunto de traslaciones $\beta = \{R_k w\}_{k=0}^{N-1}$ es una base ortonormal de $\ell^2(\mathbb{Z}_N)$ si y solo si $|\widehat{w}(n)| = 1$ para todo $n \in \mathbb{Z}_N$*

Demostración: La idea es demostrar que $\{R_k w\}_{k=0}^{N-1}$ es una base ortonormal de $\ell^2(\mathbb{Z}_N)$ si y solo si $\langle w, R_k w\rangle = e_0(k)$ pues en ese caso

$$\langle w, R_k w\rangle = e_0(k) \Rightarrow \langle \widehat{w, R_k w}\rangle = \widehat{e_0(k)}$$

pero dado que $s * \widetilde{t}(k) = \langle s, R_k t\rangle$ entonces

$$\widehat{\langle w, R_k w\rangle} = \widehat{w * \widetilde{w}}(k) = \widehat{w}(k)\widehat{\widetilde{w}}(k) = \widehat{w}(k)\overline{\widehat{w}}(k) = |\widehat{w}(k)|$$

con lo que tendríamos que $\{R_k w\}_{k=0}^{N-1}$ es una base ortonormal de $\ell^2(\mathbb{Z}_N)$ si y solo si $|\widehat{w}(k)| = \widehat{e_0}(n)$ pero $\widehat{e_0}(k) = 1$ con lo que se cumpliría el resultado del lema.

Empecemos por demostrar que $\widehat{e_0}(n) = 1$. Por definición

$$e_0(n) = \begin{cases} 1, & n = 0 \\ 0, & n = 1, 2, \dots, N-1 \end{cases}$$

luego

$$\widehat{e_0}(n) = \sum_{k=0}^{N-1} e_0(k) e^{-2\pi i n k/N} = e_0(0) e^{-2\pi i n \cdot 0/N} = 1 \cdot 1 = 1$$

Finalmente demostremos que $\{R_k w\}_{k=0}^{N-1}$ es una base ortonormal de $\ell^2(\mathbb{Z}_N)$ si y solo si $\langle w, R_k w\rangle = e_0(k)$.

- Supongamos que $\{R_k w\}_{k=0}^{N-1}$ es una base ortonormal de $\ell^2(\mathbb{Z}_N)$ y queremos demostrar que $\langle w, R_k w\rangle = e_0(k)$.

  Dado que $\{R_k w\}_{k=0}^{N-1}$ es una base ortonormal de $\ell^2(\mathbb{Z}_N)$ se tiene que

  $$\langle R_p w, R_k w\rangle = \begin{cases} 1, & p = k \\ 0, & p \neq k \end{cases}$$

  para todo p y k en $\{0, 1, \dots, N-1\}$. En particular si $p = 0$, $R_p w = w$ luego

  $$\langle w, R_k w\rangle = \begin{cases} 1, & k = 0 \\ 0, & k = 1, 2, \dots, N-1 \end{cases}$$

  que es la definición de $e_0(n)$.

- Ahora supongamos que $\langle w, R_k w\rangle = e_0(k)$ y queremos demostrar que $\{R_k w\}_{k=0}^{N-1}$ es una base ortonormal de $\ell^2(\mathbb{Z}_N)$

  Como $R_0 w = w$ tenemos que

  $$\langle w, w\rangle = \langle w, R_0 w\rangle = e_0(0) = 1$$

  también

  $$\langle w, R_k w\rangle = e_0(k) = 0$$

  para todo $k = 1, 2, \dots, N-1$ además

  $$\langle R_i w, R_i w\rangle = \langle w, w\rangle = 1$$

  finalmente

  $$\langle R_i w, R_j w\rangle = \langle w, R_{j-i} w\rangle = e_0(j-i) = 0$$

  para $1 \leq i < j$ y $j = 2, 3, \dots, N-1$ luego el conjunto $\{R_k w\}_{k=0}^{N-1}$ es ortonormal de N elementos en $\ell^2(\mathbb{Z}_N)$ y como 0 no pertenece a $\{R_k w\}_{k=0}^{N-1}$ entonces tenemos un conjunto linealmente independiente en un espacio de dimensión N por lo que $\{R_k w\}_{k=0}^{N-1}$ es una base ortonormal de $\ell^2(\mathbb{Z}_N)$.

□

Este resultado dice que una base ortonormal de traslaciones no puede ser localizable en frecuencia pues por el lema (1.1.3) se tiene que $\left|\widehat{R_k w}(n)\right| = |\widehat{w}(n)| = 1$ para todo elemento de la base. Sin embargo, no es tiempo perdido el trabajo hecho hasta ahora pues podemos hacer una pequeña variación al considerar las traslaciones pares de dos vectores en vez de las traslaciones de un solo vector. Y buscamos ahora una base del siguiente tipo.

Definición 15 *Supongamos que tenemos un número N par positivo de la forma $N = 2M$ donde $M \in \mathbb{N}$ y dos vectores de $\ell^2(\mathbb{Z}_N)$ u y v. Decimos que una base ortonormal de $\ell^2(\mathbb{Z}_N)$ de la forma*

$$\{R_{2k}u\}_{k=0}^{M-1} \bigcup \{R_{2k}v\}_{k=0}^{M-1}$$

*es una **base ondicular de primera etapa** llamamos a u y a v los generadores de dicha base, algunas veces llamados **ondícula padre** y **ondícula madre** respectivamente.*

Una manera de caracterizar este tipo de conjuntos se da en breve, pero primero consideremos el siguiente resultado que es una caracterización parcial de algunos elementos de la base, para ser precisos, la mitad de los elementos de la base

Lema 2.1.3 *Supongamos que tenemos $M \in \mathbb{N}$, $N = 2M$ y $w \in \ell^2(\mathbb{Z}_N)$ entonces $\{R_{2k}w\}_{k=0}^{M-1}$ es un conjunto ortonormal con M elementos si y solo si*

$$|\widehat{w}(n)|^2 + |\widehat{w}(n+M)|^2 = 2, \quad n = 0, 1, \ldots, M-1$$

Para probar este resultado es necesario considerar un poco de notación.

Definición 16 *Supongamos que $M \in \mathbb{N}$, $N = 2M$ y que $z \in \ell^2(\mathbb{Z}_N)$ definimos $z^* \in \ell^2(\mathbb{Z}_N)$ como $z^*(n) = (-1)^n z(n)$ para todo n.*

Lo cual cumple que $\widehat{z^*}(n) = \widehat{z}(n+M)$ para todo n ya que

$$\begin{aligned}
\widehat{z^*}(n) &= \sum_{k=0}^{N-1} z^*(k)e^{-2\pi ink/N} = \sum_{k=0}^{N-1} (-1)^k z(k)e^{-2\pi ink/N} = \sum_{k=0}^{N-1} z(k)e^{-i\pi k}e^{-2\pi ink/N} \\
&= \sum_{k=0}^{N-1} z(k)e^{-i\pi k-2\pi ink/N} = \sum_{k=0}^{N-1} z(k)e^{(-iN\pi k-2\pi ink)/N} = \sum_{k=0}^{N-1} z(k)e^{-2i\pi k(N/2+n)/N} \\
&= \sum_{k=0}^{N-1} z(k)e^{-2i\pi k(n+M)/N} = \widehat{z}(n+M)
\end{aligned}$$

además observe que

$$(z+z^*)(n) = z(n) + z^*(n) = z(n) + (-1)^n z(n) = z(n)(1+(-1)^n) = \begin{cases} 2z(n) & \text{n par} \\ 0 & \text{n impar} \end{cases}$$

En base a esta definición podemos dar una prueba del lema 2.1.3 como sigue

Demostración:

Según el lema (2.1.2) se tiene que $\{R_{2k}w\}_{k=0}^{M-1}$ es un conjunto ortonormal con M elementos si y solo si $\langle w, R_{2k}w\rangle = e_0(k)$ con lo cual se sigue que

$$\begin{aligned}
\langle w, R_{2k}w\rangle = e_0(k) &\Leftrightarrow w * \widetilde{w}(2k) = e_0(k) \\
&\Leftrightarrow 2(w * \widetilde{w}(2k)) = 2e_0(k) \Leftrightarrow ((w * \widetilde{w}) + (w * \widetilde{w})^*)(2k) = 2e_0(k)
\end{aligned}$$

y dado que

$$\widehat{w * \widetilde{w}}(2k) = (\widehat{w}\widehat{\widetilde{w}})(2k) = \widehat{w}\overline{\widehat{w}}(2k) = |\widehat{w}(2k)|^2$$

y

$$(\widehat{w * \widetilde{w}})^*(2k) = \widehat{w * \widetilde{w}}(2k+M) = (\widehat{w}\widehat{\widetilde{w}})(2k+M) = \widehat{w}\overline{\widehat{w}}(2k) = |\widehat{w}(2k+M)|^2$$

$$\begin{aligned}\langle w, R_{2k}w\rangle = e_0(k) \quad &\Leftrightarrow \quad \widehat{\langle w, R_{2k}w\rangle} = \widehat{e_0}(k) \Leftrightarrow ((w * \widetilde{w}) + (w * \widetilde{w})^*)\widehat{\ }(2k) = 2 \cdot 1 \\ &\Leftrightarrow \quad \widehat{w * \widetilde{w}}(2k) + (\widehat{w * \widetilde{w}})^*(2k) = 2 \Leftrightarrow |\widehat{w}(2k)|^2 + |\widehat{w}(2k+M)|^2 = 2\end{aligned}$$

□

Este resultado junto con la siguiente definición nos permitirá dar el teorema de caracterización de las bases ondiculares de primera etapa.

Definición 17 *Supongamos que $M \in \mathbb{N}$, $N = 2M$ y $u, v \in \ell^2(\mathbb{Z}_N)$. Para $n \in \mathbb{Z}$ definimos la matriz de sistema de u y v, $A(n)$, por*

$$A(n) = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} \widehat{u}(n) & \widehat{v}(n) \\ \widehat{u}(n+M) & \widehat{v}(n+M) \end{bmatrix}$$

Y finalmente el resultado para caracterizar las bases ondiculares de primera etapa.

Teorema 2.1.4 *Supongamos $M \in \mathbb{N}$ y $N = 2M$. Sean $u, v \in \ell^2(\mathbb{Z}_N)$ Entonces el conjunto $B = \{R_{2k}u\}_{k=0}^{M-1} \cup \{R_{2k}v\}_{k=0}^{M-1}$ es una base ortonormal si y solo si la matriz de sistema $A(n)$ de u y v es unitaria para cada $n = 0, 1, \ldots, M-1$.*

Equivalentemente B es un base ondicular de primera etapa para $\ell^2(\mathbb{Z}_N)$ si y solo si

$$|\widehat{u}(n)|^2 + |\widehat{u}(n+M)|^2 = 2$$

$$|\widehat{v}(n)|^2 + |\widehat{v}(n+M)|^2 = 2$$

y además

$$\widehat{u}(n)\overline{\widehat{v}(n)} + \widehat{u}(n+M)\overline{\widehat{v}(n+M)} = 0$$

para todo $n = 0, 1, \ldots, M-1$

Demostración:

Para demostrar que B es base ortonormal de $\ell^2(\mathbb{Z}_N)$, vamos a probar que B es un conjunto ortonormal de N elementos en $\ell^2(\mathbb{Z}_N)$ que es un espacio de dimensión N.

Primero observemos del resultado anterior que $\{R_{2k}u\}_{k=0}^{M-1}$ es un conjunto ortonormal de M elementos si y solo si

$$|\widehat{u}(n)|^2 + |\widehat{u}(n+M)|^2 = 2$$

para todo $n = 0, 1, \ldots, M-1$ y que $\{R_{2k}v\}_{k=0}^{M-1}$ es un conjunto ortonormal de M elementos si y solo si

$$|\widehat{v}(n)|^2 + |\widehat{v}(n+M)|^2 = 2$$

para todo $n = 0, 1, \ldots, M-1$ lo que restaría por demostrar es que la ortogonalidad entre ambos conjuntos de traslaciones de u y v también se cumple esto es que

$$\langle R_{2k}u, R_{2j}v\rangle = 0$$

para todo n, j, k veamos que $\langle R_{2k}u, R_{2j}v\rangle = 0 \Leftrightarrow \widehat{u}(n)\overline{\widehat{v}(n)} + \widehat{u}(n+M)\overline{\widehat{v}(n+M)} = 0$ para todo $n = 0, 1, \ldots, M-1$

Primero tenemos que

$$\langle R_{2k}u, R_{2j}v\rangle = 0 \Leftrightarrow \langle u, R_{2j-2k}v\rangle = 0$$

pero $\langle u, R_{2j-2k}v\rangle = \left\langle u, R_{2(j-k)}v\right\rangle = \langle u, R_{2i}v\rangle$ luego

$$\langle R_{2k}u, R_{2j}v\rangle = 0 \Leftrightarrow \langle u, R_{2i}v\rangle = 0$$

para todo $i, j, k = 0, 1, 2, \ldots, M-1$

Como $\langle u, R_{2i}v\rangle = u * \widetilde{v}(2i)$ entonces

$$\langle R_{2k}u, R_{2j}v\rangle = 0 \Leftrightarrow u * \widetilde{v}(2i) = 0$$

para todo $i, j, k = 0, 1, 2, \ldots, M-1$

pero

$$u * \widetilde{v}(n) = 0,\ n \in \mathbb{Z}_N \text{ par } \Rightarrow ((u * \widetilde{v}) + (u * \widetilde{v})^*)(n) = 0, \quad \forall\, n \in \mathbb{Z}_N$$

ya que

$$((u * \widetilde{v}) + (u * \widetilde{v})^*)(n) = \left\{ \begin{array}{cc} 2(u * \widetilde{v})(n) & \text{n par} \\ 0 & \text{n impar} \end{array} \right. = 0$$

esto es

$$\langle R_{2k}u, R_{2j}v\rangle = 0 \Leftrightarrow ((u * \widetilde{v}) + (u * \widetilde{v})^*)(n) = 0$$

para todo $n = 0, 1, \ldots, N-1$ así

$$\langle R_{2k}u, R_{2j}v\rangle = 0 \Leftrightarrow ((u * \widetilde{v}) + (u * \widetilde{v})^*)\widehat{\ }(n) = 0$$

para todo $n = 0, 1, \ldots, N-1$ y dado que

$$\begin{aligned} ((u * \widetilde{v}) + (u * \widetilde{v})^*)\widehat{\ }(n) &= (u * \widetilde{v})\widehat{\ }(n) + ((u * \widetilde{v})^*)\widehat{\ }(n) = (u * \widetilde{v})\widehat{\ }(n) + (u * \widetilde{v})\widehat{\ }(n+M) \\ &= \widehat{u}(n)\widehat{\widetilde{v}}(n) + \widehat{u}(n+M)\widehat{\widetilde{v}}(n+M) = \widehat{u}(n)\overline{\widehat{v}(n)} + \widehat{u}(n+M)\overline{\widehat{v}(n+M)} \end{aligned}$$

se tiene que

$$\langle R_{2k}u, R_{2j}v\rangle = 0 \Leftrightarrow \widehat{u}(n)\overline{\widehat{v}(n)} + \widehat{u}(n+M)\overline{\widehat{v}(n+M)} = 0$$

para todo $n = 0, 1, \ldots, M-1$

Por lo que B es un conjunto ortonormal de $\ell^2(\mathbb{Z}_N)$ si y solo si se cumple que

$$|\widehat{u}(n)|^2 + |\widehat{u}(n+M)|^2 = 2$$

$$|\widehat{v}(n)|^2 + |\widehat{v}(n+M)|^2 = 2$$

$$\widehat{u}(n)\overline{\widehat{v}(n)} + \widehat{u}(n+M)\overline{\widehat{v}(n+M)} = 0$$

para todo $n = 0, 1, \ldots, M-1$ y dado que B tiene N elementos y $\ell^2(\mathbb{Z}_N)$ es un espacio de dimensión N B es base de $\ell^2(\mathbb{Z}_N)$.

Para probar la equivalencia basta recordar una caracterización de las matrices unitarias de 2×2 estas cumplen que sus columnas forman un base ortonormal de $\mathbb{C}^2$ por lo que $A(n)$ es unitaria si y solo si la primer columna es unitaria esto es

$$\frac{|\widehat{u}(n)|^2}{2} + \frac{|\widehat{u}(n+M)|^2}{2} = 1$$

y la segunda columna también es unitaria es decir

$$\frac{|\widehat{v}(n)|^2}{2} + \frac{|\widehat{v}(n+M)|^2}{2} = 1$$

y el hecho de que las columnas de $A(n)$ sean ortogonales implica que el producto de las columnas sea cero es decir

$$\frac{\widehat{u}(n)\overline{\widehat{v}(n)}}{2} + \frac{\widehat{u}(n+M)\overline{\widehat{v}(n+M)}}{2} = 0$$

de donde $A(n)$ es unitaria si y solo si

$$|\widehat{u}(n)|^2 + |\widehat{u}(n+M)|^2 = 2$$

$$|\widehat{v}(n)|^2 + |\widehat{v}(n+M)|^2 = 2$$

$$\widehat{u}(n)\overline{\widehat{v}(n)} + \widehat{u}(n+M)\overline{\widehat{v}(n+M)} = 0$$

□

En general, no es fácil ver directamente si B es una base ortonormal, sin embargo, por el teorema anterior basta construir la matriz unitaria y después aplicar la TDFI que no es tan difícil. Una herramienta útil es el siguiente lema, que nos dice como debe ser la ondícula madre de una potencial ondícula padre.

Lema 2.1.5 *Dado $M \in \mathbb{N}$, $N = 2M$ y $u \in \ell^2(\mathbb{Z}_N)$ tal que $\{R_{2k}u\}_{k=0}^{M-1}$ es una conjunto ortonormal con M elementos. Definimos $v \in \ell^2(\mathbb{Z}_N)$ por*

$$v(k) = (-1)^{k-1}\overline{u(1-k)}, \qquad \forall\ k$$

entonces $\{R_{2k}u\}_{k=0}^{M-1} \cup \{R_{2k}v\}_{k=0}^{M-1}$ es una base ondicular de primera etapa para $\ell^2(\mathbb{Z}_N)$.

Demostración:

La demostración es probar que se satisfacen las condiciones del teorema (2.1.4) sobre la construcción de una base ortonormal de $\ell^2(\mathbb{Z}_N)$, es decir buscamos que la matriz del sistema $A(n)$ sea unitaria para todo n o equivalentemente se cumplan las condiciones

$$|\widehat{u}(n)|^2 + |\widehat{u}(n+M)|^2 = 2$$

$$|\widehat{v}(n)|^2 + |\widehat{v}(n+M)|^2 = 2$$

$$\widehat{u}(n)\overline{\widehat{v}(n)} + \widehat{u}(n+M)\overline{\widehat{v}(n+M)} = 0$$

para todo $n = 0, 1, \ldots, M-1$ con la definición respectiva de v.

Por hipótesis el conjunto $\{R_{2k}u\}_{k=0}^{M-1}$ es una conjunto ortonormal con M elementos de donde se tiene que

$$|\widehat{u}(n)|^2 + |\widehat{u}(n+M)|^2 = 2$$

para todo $n = 0, 1, \ldots, M-1$

Empecemos por calcular la TDF de v, esta es

$$\begin{aligned}
\widehat{v}(m) &= \sum_{n=0}^{N-1} v(n)e^{-2\pi imn/N} = \sum_{n=0}^{N-1}(-1)^{n-1}\overline{u(1-n)}e^{-2\pi imn/N} = \sum_{k=0}^{N-1}(-1)^{-k}\overline{u(k)}e^{-2\pi im(1-k)/N} \\
&= \sum_{k=0}^{N-1}(e^{-\pi i})^{-k}\overline{u(k)}e^{-2\pi im(1-k)/N} = e^{-2\pi im/N}\sum_{k=0}^{N-1}(e^{-\pi i})^{-k}\overline{u(k)}e^{-2\pi im(-k)/N} \\
&= = e^{-2\pi im/N}\sum_{k=0}^{N-1}\overline{u(k)}e^{2ik\pi(m+M)/N} = e^{-2\pi im/N}\sum_{k=0}^{N-1}\overline{u(k)}\overline{e^{-2ik\pi(m+M)/N}} \\
&= e^{-2\pi im/N}\overline{\sum_{k=0}^{N-1}u(k)e^{-2ik\pi(m+M)/N}} = e^{-2\pi im/N}\overline{\widehat{u}(m+M)}
\end{aligned}$$

de donde

$$\begin{aligned}
\widehat{v}(m+M) &= e^{-2\pi i(m+M)/N}\overline{\widehat{u}(m+2M)} = e^{-2\pi im/N}e^{-2\pi iM/N}\overline{\widehat{u}(m+N)} \\
&= e^{-2\pi im/N}e^{-2\pi iM/N}\overline{\widehat{u}(m+N)} = e^{-2\pi im/N}e^{-\pi i}\overline{\widehat{u}(m+N)} \\
&= e^{-2\pi im/N}e^{-\pi i}\overline{\widehat{u}(m)} = e^{-2\pi im/N}(-1)\overline{\widehat{u}(m)} = -e^{-2\pi im/N}\overline{\widehat{u}(m)}
\end{aligned}$$

así se tiene que

$$\begin{aligned}
|\widehat{v}(m)|^2 + |\widehat{v}(m+M)|^2 &= \left|e^{-2\pi im/N}\overline{\widehat{u}(m+M)}\right|^2 + \left|-e^{-2\pi im/N}\overline{\widehat{u}(m)}\right|^2 \\
&= \left|\overline{\widehat{u}(m+M)}\right|^2 + \left|\overline{\widehat{u}(m)}\right|^2 = 2
\end{aligned}$$

para todo $m = 0, 1, \ldots, M-1$ solo basta probar que se satisface la tercera ecuación

$$\widehat{u}(n)\overline{\widehat{v}(n)} + \widehat{u}(n+M)\overline{\widehat{v}(n+M)} = 0$$

para todo $n = 0, 1, \ldots, M-1$ pero esto se tiene ya que

$$\begin{aligned}
\widehat{u}(n)\overline{\widehat{v}(n)} + \widehat{u}(n+M)\overline{\widehat{v}(n+M)} &= \widehat{u}(n)\overline{e^{-2\pi in/N}\overline{\widehat{u}(n+M)}} + \widehat{u}(n+M)\overline{-e^{-2\pi in/N}\overline{\widehat{u}(n)}} \\
&= \widehat{u}(n)e^{2\pi in/N}\widehat{u}(n+M) - \widehat{u}(n+M)e^{2\pi in/N}\widehat{u}(n) = 0
\end{aligned}$$

para todo $n = 0, 1, \ldots, M-1$ luego por el teorema (2.1.4) u y v generan una base ondicular de primera etapa para $\ell^2(\mathbb{Z}_N)$ dada por $\{R_{2k}u\}_{k=0}^{M-1} \cup \{R_{2k}v\}_{k=0}^{M-1}$ □

Con este tipo de bases el cambio de coordenadas que nos motivo a buscar una base de traslaciones queda de la siguiente manera. Si $B = \{R_{2k}u\}_{k=0}^{M-1}\bigcup\{R_{2k}v\}_{k=0}^{M-1}$ es una base ondicular de primera etapa de $\ell^2(\mathbb{Z}_N)$ y $z \in \ell^2(\mathbb{Z}_N)$ la representación de z respecto a B es el vector de productos internos de z con los elementos de la base, los cuales, según el lema (2.1.1) son las convoluciones

$$[z]_B = \begin{bmatrix} z * \widetilde{v}(0) \\ z * \widetilde{v}(2) \\ \vdots \\ z * \widetilde{v}(N-2) \\ z * \widetilde{u}(0) \\ z * \widetilde{u}(2) \\ \vdots \\ z * \widetilde{u}(N-2) \end{bmatrix}$$

que pueden ser calculados de manera rápida por la TRF.

Una parte importante en el estudio de las matemáticas es que, cuando estamos trabajando en un espacio y aplicamos ciertos procesos que nos transforman el problema en cuestión a otro problema en otro espacio con mejores condiciones de manipulación y lo solucionamos en este nuevo espacio, podernos regresar al espacio inicial donde surgió el problema. En nuestro caso pasamos de la base canónica a la base B por el cálculo de ciertas convoluciones y podemos considerar otra vez a la base canónica con un proceso similar al que se tiene de pasar de la base canónica a la nueva base.

En está última parte estudiaremos precisamente los procesos para pasar de la base canónica a un nueva base ondicular de primera etapa. Primero definamos un poco de notación de dos operadores que serán de utilidad a lo largo del proceso.

Definición 18 *Sea $M \in \mathbb{N}$ y $N = 2M$, definimos los operadores de muestreo bajo y muestreo alto como los operadores*

$$D : \ell^2(\mathbb{Z}_N) \to \ell^2(\mathbb{Z}_N), \quad U : \ell^2(\mathbb{Z}_N) \to \ell^2(\mathbb{Z}_N)$$

dados por

$$(D(z))(n) = z(2n), \quad n = 0, 1, \ldots, M-1$$

y

$$(U(z))(n) = \begin{cases} z(n/2) & n \text{ par} \\ 0 & n \text{ impar} \end{cases}$$

y cuyos símbolos de representación son $\downarrow 2$ y $\uparrow 2$, respectivamente.

Con esta terminología, podemos describir el proceso hecho anteriormente para ir de la base canónica a la base ondicular. Supongamos que $z \in \ell^2(\mathbb{Z}_N)$, $B = \{R_{2k}u\}_{k=0}^{M-1} \bigcup \{R_{2k}v\}_{k=0}^{M-1}$ es una base ondicular de primera etapa para $\ell^2(\mathbb{Z}_N)$ y que u y v son los generadores de dicha base, el siguiente algoritmo indica el proceso para generar el vector que representa z en la base B:

1. Calcular las reflexiones conjugadas de los generadores, $\widetilde{u}$ y $\widetilde{v}$.

2. Hacer la convolución de z con las reflexiones conjugadas del paso anterior, $z * \widetilde{u}$ y $z * \widetilde{v}$.

3. Aplicar el operador de muestreo bajo a las convoluciones del paso anterior, $D(z * \widetilde{u})$ y $D(z * \widetilde{v})$.

4. Juntar los vectores del paso anterior en un vector.

Este algoritmo nos da la forma que ya teníamos de $[z]_B$.

El paso inverso de regresar a la base canónica una vez que estamos en términos de la base ondicular se da de manera casi natural. Igual que el algoritmo anterior consideremos la base B, de $\ell^2(\mathbb{Z}_N)$, generada por u y v y sea $z \in \ell^2(\mathbb{Z}_N)$, más aun consideremos que tenemos los vectores que genera el paso tres del algoritmo anterior, es decir consideremos que tenemos los vectores $D(z * \widetilde{u})$ y $D(z * \widetilde{v})$, el algoritmo es el siguiente

1. Aplicar el operador muestreo alto a los vectores $D(z * \widetilde{u})$ y $D(z * \widetilde{v})$, con lo que tenemos los vectores $U(D(z * \widetilde{u}))$ y $U(D(z * \widetilde{v}))$.

2. Hagamos la convolución de estos nuevos vectores con los vectores $\widetilde{t}$ y $\widetilde{s}$ (s y t se especifican adelante), esto nos deja con los vectores $\widetilde{t} * U(D(z * \widetilde{u}))$ y $\widetilde{s} * U(D(z * \widetilde{v}))$.

Además el algoritmo se dio de manera general pues no se especificaron quienes son s y t. En el caso particular de una base ondicular de primera etapa, sabemos específicamente cual es la forma de estos vectores y esta dada en el siguiente teorema, que justifica que tenemos una reconstrucción perfecta del vector inicial.

Teorema 2.1.6 *Supongamos que tenemos $M \in \mathbb{N}$, $N = 2M$ y $u, v, s, t \in \ell^2(\mathbb{Z}_N)$. Entonces la suma*

$$\widetilde{t} * U(D(z * \widetilde{u})) + \widetilde{s} * U(D(z * \widetilde{v})) = z$$

para cualquier $z \in \ell^2(\mathbb{Z}_N)$, es decir nos da una reconstrucción perfecta, si y solo si

$$A(n) \begin{bmatrix} \widehat{s}(n) \\ \widehat{t}(n) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sqrt{2} \\ 0 \end{bmatrix}, \quad n = 0, 1, \ldots, N-1$$

Más aun, en el caso que $A(n)$ es unitaria, se tiene que $\widehat{t}(n) = \overline{\widehat{v}(n)}$ y $\widehat{s}(n) = \overline{\widehat{u}(n)}$. si $A(n)$ es unitaria entonces $t = \widetilde{v}$ y $s = \widetilde{u}$

Demostración:
Dado que

$$A(n) = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} \widehat{u}(n) & \widehat{v}(n) \\ \widehat{u}(n+M) & \widehat{v}(n+M) \end{bmatrix}$$

se tiene que

$$A(n) \begin{bmatrix} \widehat{s}(n) \\ \widehat{t}(n) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sqrt{2} \\ 0 \end{bmatrix}$$

si y solo si

$$\frac{1}{\sqrt{2}}(\widehat{u}(n)\widehat{s}(n) + \widehat{v}(n)\widehat{t}(n)) = \sqrt{2}$$

$$\frac{1}{\sqrt{2}}(\widehat{u}(n+M)\widehat{s}(n) + \widehat{v}(n+M)\widehat{t}(n)) = \sqrt{2}$$

o equivalentemente

$$\widehat{u}(n)\widehat{s}(n) + \widehat{v}(n)\widehat{t}(n) = 2$$

$$\widehat{u}(n+M)\widehat{s}(n) + \widehat{v}(n+M)\widehat{t}(n) = 2$$

es decir queremos demostrar que para cualquier $z \in \ell^2(\mathbb{Z}_N)$

$$\widetilde{t} * U(D(z * \widetilde{u})) + \widetilde{s} * U(D(z * \widetilde{v})) = z$$

si y solo si

$$\widehat{u}(n)\widehat{s}(n) + \widehat{v}(n)\widehat{t}(n) = 2$$

$$\widehat{u}(n+M)\widehat{s}(n) + \widehat{v}(n+M)\widehat{t}(n) = 0$$

Tomando la transformada discreta de Fourier en la identidad que queremos probar observamos que

$$\widetilde{t} * U(D(z * \widetilde{u})) + \widetilde{s} * U(D(z * \widetilde{v})) = z \Leftrightarrow (\widetilde{t} * U(D(z * \widetilde{u})) + \widetilde{s} * U(D(z * \widetilde{v})))\widehat{\ }(n) = \widehat{z}(n)$$

pero

$$\begin{aligned}
(\widetilde{t}*U(D(z*\widetilde{u}))+\widetilde{s}*U(D(z*\widetilde{v})))\widehat{\ }(n) &= (\widetilde{t}*U(D(z*\widetilde{u})))\widehat{\ }(n)+(\widetilde{s}*U(D(z*\widetilde{v})))\widehat{\ }(n)\\
&= \widehat{\widetilde{t}}(n)(U(D(z*\widetilde{u})))\widehat{\ }(n)+\widehat{\widetilde{s}}(n)(U(D(z*\widetilde{v})))\widehat{\ }(n)\\
&= \overline{\widehat{t}(n)}(U(D(z*\widetilde{u})))\widehat{\ }(n)+\overline{\widehat{s}(n)}(U(D(z*\widetilde{v})))\widehat{\ }(n)
\end{aligned}$$

y dado que

$$U(D(z*\widetilde{u}))=\frac{1}{2}[(z*\widetilde{u})+(z*\widetilde{u})^*] \qquad U(D(z*\widetilde{v}))=\frac{1}{2}[(z*\widetilde{v})+(z*\widetilde{v})^*]$$

$$\begin{aligned}
(U(D(z*\widetilde{u})))\widehat{\ }(n) &= \frac{1}{2}[(z*\widetilde{u})\widehat{\ }(n)+((z*\widetilde{u})^*)\widehat{\ }(n)]\\
&= \frac{1}{2}[\widehat{z}(n)\widehat{\widetilde{u}}(n)+\widehat{z}(n+M)\widehat{\widetilde{u}}(n+M)]\\
&= \frac{1}{2}[\widehat{z}(n)\overline{\widehat{u}(n)}+\widehat{z}(n+M)\overline{\widehat{u}(n+M)}]
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
(U(D(z*\widetilde{v})))\widehat{\ }(n) &= \frac{1}{2}[(z*\widetilde{v})\widehat{\ }(n)+((z*\widetilde{v})^*)\widehat{\ }(n)]\\
&= \frac{1}{2}[\widehat{z}(n)\widehat{\widetilde{v}}(n)+\widehat{z}(n+M)\widehat{\widetilde{v}}(n+M)]\\
&= \frac{1}{2}[\widehat{z}(n)\overline{\widehat{v}(n)}+\widehat{z}(n+M)\overline{\widehat{v}(n+M)}]
\end{aligned}$$

por lo que

$$\begin{aligned}
(\widetilde{t}*U(D(z*\widetilde{u}))+\widetilde{s}*U(D(z*\widetilde{v})))\widehat{\ }(n) &= \overline{\widehat{t}(n)}(U(D(z*\widetilde{u})))\widehat{\ }(n)+\overline{\widehat{s}(n)}(U(D(z*\widetilde{v})))\widehat{\ }(n)\\
&= \overline{\widehat{t}(n)}\left(\frac{1}{2}[\widehat{z}(n)\overline{\widehat{u}(n)}+\widehat{z}(n+M)\overline{\widehat{u}(n+M)}]\right)\\
&+ \overline{\widehat{s}(n)}\left(\frac{1}{2}[\widehat{z}(n)\overline{\widehat{v}(n)}+\widehat{z}(n+M)\overline{\widehat{v}(n+M)}]\right)\\
&= \left(\frac{1}{2}\right)\left[\overline{\widehat{t}(n)}\left(\widehat{z}(n)\overline{\widehat{u}(n)}+\widehat{z}(n+M)\overline{\widehat{u}(n+M)}\right)\right.\\
&+ \left.\overline{\widehat{s}(n)}\left(\widehat{z}(n)\overline{\widehat{v}(n)}+\widehat{z}(n+M)\overline{\widehat{v}(n+M)}]\right)\right]\\
&= \left(\frac{1}{2}\right)\left[\widehat{z}(n)\left(\overline{\widehat{t}(n)\widehat{u}(n)}+\overline{\widehat{s}(n)\widehat{v}(n)}\right)\right.\\
&+ \left.\widehat{z}(n+M)\left(\overline{\widehat{t}(n)\widehat{u}(n+M)}+\overline{\widehat{s}(n)\widehat{v}(n+M)}]\right)\right]
\end{aligned}$$

y para cualquier $z\in\ell^2(\mathbb{Z}_N)$ se tiene que

$$\widetilde{t}*U(D(z*\widetilde{u}))+\widetilde{s}*U(D(z*\widetilde{v}))=z$$

si y solo si

$$\left(\frac{1}{2}\right)\left[\widehat{z}(n)\left(\overline{\widehat{t}(n)\widehat{u}(n)}+\overline{\widehat{s}(n)\widehat{v}(n)}\right)+\widehat{z}(n+M)\left(\overline{\widehat{t}(n)\widehat{u}(n+M)}+\overline{\widehat{s}(n)\widehat{v}(n+M)}]\right)\right]=\widehat{z}(n)$$

observemos que esto pasa si

$$\overline{\widehat{t}(n)\widehat{u}(n)} + \overline{\widehat{s}(n)\widehat{v}(n)} = 2 \quad \text{y} \quad \overline{\widehat{t}(n)\widehat{u}(n+M)} + \overline{\widehat{s}(n)\widehat{v}(n+M)} = 0$$

por otro lado también pasa que si

$$\left(\frac{1}{2}\right)\left[\widehat{z}(n)\left(\overline{\widehat{t}(n)\widehat{u}(n)} + \overline{\widehat{s}(n)\widehat{v}(n)}\right) + \widehat{z}(n+M)\left(\overline{\widehat{t}(n)\widehat{u}(n+M)} + \overline{\widehat{s}(n)\widehat{v}(n+M)]}\right)\right] = \widehat{z}(n)$$

para todo $z \in \ell^2(\mathbb{Z}_N)$ basta tomar $z \in \ell^2(\mathbb{Z}_N)$ tal que $\widehat{z}(n) = 1$ y $\widehat{z}(n+M) = 0$ con lo cual tendríamos

$$\overline{\widehat{t}(n)\widehat{u}(n)} + \overline{\widehat{s}(n)\widehat{v}(n)} = 2$$

y de manera similar si tomamos $z \in \ell^2(\mathbb{Z}_N)$ tal que $\widehat{z}(n) = 0$ y $\widehat{z}(n+M) = 1$ tendríamos que

$$\overline{\widehat{t}(n)\widehat{u}(n+M)} + \overline{\widehat{s}(n)\widehat{v}(n+M)} = 0$$

por lo tanto para cualquier $z \in \ell^2(\mathbb{Z}_N)$

$$\widetilde{t} * U(D(z * \widetilde{u})) + \widetilde{s} * U(D(z * \widetilde{v})) = z$$

si y solo si

$$\widehat{u}(n)\widehat{s}(n) + \widehat{v}(n)\widehat{t}(n) = 2$$

$$\widehat{u}(n+M)\widehat{s}(n) + \widehat{v}(n+M)\widehat{t}(n) = 0$$

Finalmente en el caso de que $A(n)$ sea unitaria

$$A^{-1}(n) = \overline{A(n)^T} = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix} \overline{\widehat{u}(n)} & \overline{\widehat{u}(n+M)} \\ \overline{\widehat{v}(n)} & \overline{\widehat{v}(n+M)} \end{bmatrix}$$

por lo que la solución del sistema

$$A(n)\begin{bmatrix} \widehat{s}(n) \\ \widehat{t}(n) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sqrt{2} \\ 0 \end{bmatrix}$$

esta dada por

$$\begin{bmatrix} \widehat{s}(n) \\ \widehat{t}(n) \end{bmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix} \overline{\widehat{u}(n)} & \overline{\widehat{u}(n+M)} \\ \overline{\widehat{v}(n)} & \overline{\widehat{v}(n+M)} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \sqrt{2} \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \overline{\widehat{u}(n)} \\ \overline{\widehat{v}(n)} \end{bmatrix}$$

es decir

$$\widehat{s}(n) = \overline{\widehat{u}(n)} = \widehat{\widetilde{u}}(n) \qquad \widehat{t}(n) = \overline{\widehat{v}(n)} = \widehat{\widetilde{v}}(n)$$

aplicando la TDFI

$$s = \widetilde{u} \qquad t = \widetilde{v}$$

□

2.2. Bases ondiculares de p-esima etapa

En la sección anterior, vimos como generar una base ondicular de primera etapa. Además de un algoritmo rápido de computo, basado en lo que llamamos un banco de filtros, el cual constaba de dos algoritmos. Uno para analizar la señal y encontrar la representación de está en términos de una base y el otro para reconstruir la señal y regresar a la base inicial. Llamaremos de ahora en adelante a esto algoritmos como algoritmo de análisis y algoritmo de reconstrucción, respectivamente.

Sin embargo, existen otro tipo de base ondiculares que nos permiten un mejor estudio de las señales, llamadas bases ondiculares de p-esima etapa. Y hay dos maneras de ver la construcción de estas nuevas bases una manera es recursiva y la otra no. En esta sección dedicaremos la atención a estas dos maneras de llegar a estas bases empezando por la recursiva para determinar la no recursiva. El objetivo es construir una base como establece la siguiente definición

Definición 19 *Sea N divisible por 2^p donde p es un entero positivo y sea B un conjunto de la forma*

$$B = \{R_{2^p k} g_p\}_{k=0}^{(N/2^p)-1} \bigcup_{i=1}^{p} \{R_{2^i k} f_i\}_{k=0}^{(N/2^i)-1}$$

para algunos $f_1, f_2, \ldots, f_p, g_p \in \ell^2(\mathbb{Z}_N)$. Decimos que B es una ***base ondicular de p-esima etapa de*** $\ell^2(\mathbb{Z}_N)$ *si B es una base ortonormal para $\ell^2(\mathbb{Z}_N)$ y que $f_1, f_2, \ldots, f_p, g_p$ generan a B.*

La primera manera de ver la construcción del nuevo tipo de bases es basada en el estudio hecho en la sección anterior. Es decir ¿por qué no aplicar el algoritmo pasado de manera recursiva en alguna de las salidas del algoritmo de análisis? o de igual manera ¿por qué no aplicar el algoritmo de reconstrucción en alguna de las entradas? En cierto sentido es lógico pues después de todo cuando hicimos la construcción de la base ondicular vimos que el algoritmo de análisis nos llevaba a la representación de un vector $z \in \ell^2(\mathbb{Z}_N)$ en términos de la base ondicular, entonces, esperamos que este proceso de iteración nos lleve también a un tipo de base de $\ell^2(\mathbb{Z}_N)$ y ya veremos que así es. Veamos como es esto, empezando por el algoritmo de análisis. Recordemos los algoritmos y a su vez le haremos unos pequeños cambios de notación, primero el algoritmo de análisis

1. Calcular las reflexiones conjugadas de los generadores, $\widetilde{v}_1$ y $\widetilde{u}_1$.

2. Hacer la convolución de z con las reflexiones conjugadas del paso anterior, $z * \widetilde{v}_1$ y $z * \widetilde{u}_1$.

3. Aplicar el operador de muestreo bajo a las convoluciones del paso anterior, $x_1 := D(z * \widetilde{v}_1)$ y $y_1 := D(z * \widetilde{u}_1)$.

A primera vista podríamos realizar iteraciones en cualquiera de las salidas de este algoritmo o en ambos, sin embargo por convicción en el tema trabajaremos con iteraciones en el segundo de los vectores de salida de este algoritmo, es decir en y_1.

Aplicando este algoritmo nuevamente a y_1 tenemos dos vectores nuevos que son

$$x_2 := D(y_1 * \widetilde{v}_2) = D(D(z * \widetilde{u}_1) * \widetilde{v}_2), \quad y_2 := D(y_1 * \widetilde{u}_2) = D(D(z * \widetilde{u}_1) * \widetilde{u}_2)$$

y en general en la i-esima iteración tendremos que

$$x_i := D(y_{i-1} * \widetilde{v}_i), \quad y_i := D(y_{i-1} * \widetilde{u}_i)$$

Solo dos detalles técnicos, el primero necesitamos que N sea divisible por una potencia de 2 dependiendo del número de iteraciones que queramos hacer. Segundo, observemos que en la segunda iteración u_2 y v_2 deben generar una base ondicular de primera etapa en $\ell^2(\mathbb{Z}_{N/2})$ y así u_i, v_i una base ondicular de primera etapa en $\ell^2(\mathbb{Z}_{N/2^{i-1}})$. Con esta sucesión de convoluciones, resumimos lo anterior en la siguiente definición

Definición 20 *Sea $N \in \mathbb{N}$ divisible por 2^p.* ***Una secuencia de filtros ondiculares de p-esima etapa*** *es una sucesión de vectores $u_1, v_1, \ldots, u_p, v_p$ tal que para cada $k = 1, 2, \ldots, p$*

$$u_k, v_k \in \ell^2(\mathbb{Z}_{N/2^{k-1}})$$

y el sistema de matriz

$$A_k(n) = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} \widehat{u_k}(n) & \widehat{v_k}(n) \\ \widehat{u_k}(n + \frac{N}{2^k}) & \widehat{v_k}(n + \frac{N}{2^k}) \end{bmatrix}$$

es unitaria para todo $n = 0, 1, \ldots, (N/2^k) - 1$. También definimos ***un banco de filtros ondiculares de p-esima etapa*** *como el conjunto de vectores $\{x_1, x_2, \ldots, x_p, y_p\}$ donde*

$$x_i := D(y_{i-1} * \widetilde{v}_i), \quad y_i := D(y_{i-1} * \widetilde{u}_i), \quad \in \ell^2(\mathbb{Z}_{N/2^i})$$

y

$$x_1 := D(z * \widetilde{v}_1), \quad y_1 := D(z * \widetilde{u}_1), \quad \in \ell^2(\mathbb{Z}_{N/2})$$

para un vector $z \in \ell^2(\mathbb{Z}_N)$.

Veamos ahora el algoritmo de reconstrucción, que en términos de la definición anterior queda de manera muy parecida. Este algoritmo consta de aplicar el operador de muestreo alto, seguido de la convolución con la frecuencia de filtros ondiculares de p-esima etapa como sigue. Supongamos que tenemos una secuencia de filtros ondiculares de p-esima etapa $\{u_1, v_1, \ldots, u_p, v_p\}$ y un banco de filtros ondiculares de p-esima etapa $\{x_1, x_2, \ldots, x_p, y_p\}$ como en la definición anterior. En la primera etapa de reconstrucción tenemos que

$$y_{p-1} = (U(y_p)) * u_p + (U(x_p)) * v_p$$

y así tenemos que en el k-esimo paso

$$y_{p-k} = (U(y_{p-k+1})) * u_{p-k+1} + (U(x_{p-k+1})) * v_{p-k+1}$$

hasta llegar a

$$y_1 = (U(y_2)) * u_2 + (U(x_2)) * v_2$$

y con una ultima iteración tenemos que

$$z = (U(y_1)) * u_1 + (U(x_1)) * v_1$$

No se ha dicho pero estamos suponiendo que se satisfacen las condiciones del lema de reconstrucción perfecta (2.1.6) en cada una de las iteraciones del proceso de análisis y el algoritmo de reconstrucción.

Sin embargo, no es muy claro como es que este proceso nos genera una base ortonormal de $\ell^2(\mathbb{Z}_N)$. A continuación daremos formalización a estas ideas, que nos llevan a la segunda manera de reconstruir las bases ondiculares de p-esima etapa. Empecemos por definir ciertos conceptos que serán de utilidad para nuestro objetivo.

Definición 21 *Sean* $N, k \in \mathbb{N}$ *con* $k > 1$*, definimos*

$$D^k : \ell^2(\mathbb{Z}_N) \to \ell^2(\mathbb{Z}_{N/2^k})$$

dado por

$$D^k z(n) = z(2^k n)$$

y también definimos

$$U^k : \ell^2(\mathbb{Z}_{N/2^k}) \to \ell^2(\mathbb{Z}_N)$$

dado por

$$U^k w(n) = \begin{cases} w(n/2^k) & \textit{si } 2^k \textit{ divide a } n \\ 0 & \textit{si } 2^k \textit{ no divide a } n \end{cases}$$

Estos operadores cumplen que

Lema 2.2.1 *Supongamos que* N *es un entero par de la forma* $N = 2M$ *para* $M \in \mathbb{N}$*,* $z \in \ell^2(\mathbb{Z}_N)$*,* $x, y, w \in \ell^2(\mathbb{Z}_{N/2})$ *entonces*

$$D(z) * w = D(z * U(w))$$

y

$$U(x) * U(y) = U(x * y)$$

y en general

Corolario 2.2.2 *Supongamos que* N *es divisible por* 2^k*,* $x, y, w \in \ell^2(\mathbb{Z}_{N/2^k})$ *y* $z \in \ell^2(\mathbb{Z}_N)$ *entonces*

$$D^k(z) * w = D^k(z * U^k(w))$$

y

$$U^k(x * y) = U^k(x) * U^k(y)$$

Definición 22 *Supongamos que* N *es divisible por* 2^p *y que tenemos* $u_1, v_1, \ldots, u_p v_p$ *tales que* $u_k, v_k \in \ell^2(\mathbb{Z}_{N/2^{k-1}})$*. Definimos* $f_1 = v_1$ *y* $g_1 = u_1$ *e inductivamente a* $f_k, g_k \in \ell^2(\mathbb{Z}_N)$ *para* $k = 2, 3, \ldots, p$ *como*

$$f_k := g_{k-1} * U^{k-1}(v_k)$$

y

$$g_k := g_{k-1} * U^{k-1}(u_k)$$

Obsérvese que

$$\widetilde{f_k} = (g_{k-1} * U^{k-1}(v_k))^{\sim} = \widetilde{g}_{k-1} * (U^{k-1}(v_k))^{\sim} = \widetilde{g}_{k-1} * U^{k-1}(\widetilde{v}_k)$$

y

$$\widetilde{g}_k = (g_{k-1} * U^{k-1}(u_k))^{\sim} = \widetilde{g}_{k-1} * (U^{k-1}(u_k))^{\sim} = \widetilde{g}_{k-1} * U^{k-1}(\widetilde{u}_k)$$

Esto dado que para $z, w \in \ell^2(\mathbb{Z}_N)$ se tiene que

- $(z * w)^{\sim} = \widetilde{z} * \widetilde{w}$
- $(U(z))^{\sim} = U(\widetilde{z})$

Utilizando estas definiciones y resultados estamos en condiciones para reescribir el proceso iterativo presentado al principio de la sección (algoritmo de análisis y el algoritmo de reconstrucción aplicados de manera iterativa).

Primero observemos las primeras iteraciones del algoritmo supongamos algunos casos

Supongamos que $N = 2M$

En este caso solo hay un paso para las fases de análisis según el algoritmo tenemos que

$$x_1 := D(z * \widetilde{v}_1) \qquad y_1 := D(z * \widetilde{u}_1)$$

que en términos de f_1 y g_1 es

$$x_1 := D(z * \widetilde{f}_1) \qquad y_1 := D(z * \widetilde{g}_1)$$

y para la fase de síntesis

$$v_1 * U(D(z * \widetilde{v}_1)) \qquad u_1 * U(D(z * \widetilde{u}_1))$$

Supongamos que $N = 4M = 2^2 M$

En este caso hay dos pasos para las fases de análisis según el algoritmo tenemos que

$$x_1 := D(z * \widetilde{v}_1) \qquad y_1 := D(z * \widetilde{u}_1)$$

$$x_2 := D(D(z * \widetilde{u}_1) * \widetilde{v}_2) \qquad y_2 := D(D(z * \widetilde{u}_1) * \widetilde{u}_2)$$

pero dado el lema (2.2.1) y la definición (22)

$$x_2 = D(D(z * \widetilde{u}_1) * \widetilde{v}_2) = D(D(z * \widetilde{u}_1 * U(\widetilde{v}_2))) = D^2(z * \widetilde{u}_1 * U(\widetilde{v}_2)) = D^2(z * \widetilde{f}_2)$$

$$y_2 = D(D(z * \widetilde{u}_1) * \widetilde{u}_2) = D(D(z * \widetilde{u}_1 * U(\widetilde{u}_2))) = D^2(z * \widetilde{u}_1 * U(\widetilde{u}_2)) = D^2(z * \widetilde{g}_2)$$

y para la fase de síntesis

$$v_1 * U(D(z * \widetilde{v}_1)) \qquad v_2 * U(D^2(z * \widetilde{f}_2)) \qquad u_2 * U(D^2(z * \widetilde{g}_2))$$

Supongamos que $N = 8M = 2^3 M$

En este caso hay tres pasos para las fases de análisis según el algoritmo tenemos que

$$x_1 := D(z * \widetilde{v}_1) \qquad y_1 := D(z * \widetilde{u}_1)$$

$$x_2 := D(D(z * \widetilde{u}_1) * \widetilde{v}_2) \qquad y_2 := D(D(z * \widetilde{u}_1) * \widetilde{u}_2)$$

$$x_3 := D(D(D(z * \widetilde{u}_1) * \widetilde{u}_2) * \widetilde{v}_3) \qquad y_3 := D(D(D(z * \widetilde{u}_1) * \widetilde{u}_2) * \widetilde{u}_3)$$

pero dado el lema (2.2.1) y el corolario (2.2.2)

$$\begin{aligned} x_3 &= D(D(D(z * \widetilde{u}_1) * \widetilde{u}_2) * \widetilde{v}_3) = D(D^2(z * \widetilde{u}_1 * U(\widetilde{u}_2)) * \widetilde{v}_3)) \\ &= D(D^2(z * \widetilde{u}_1 * U(\widetilde{u}_2) * U^2(\widetilde{v}_3))) = D^3(z * \widetilde{u}_1 * U(\widetilde{u}_2) * U^2(\widetilde{v}_3)) = D^3(z * \widetilde{f}_3) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} y_3 &= D(D(D(z * \widetilde{u}_1) * \widetilde{u}_2) * \widetilde{u}_3) = D(D^2(z * \widetilde{u}_1 * U(\widetilde{u}_2)) * \widetilde{u}_3)) \\ &= D(D^2(z * \widetilde{u}_1 * U(\widetilde{u}_2) * U^2(\widetilde{u}_3))) = D^3(z * \widetilde{u}_1 * U(\widetilde{u}_2) * U^2(\widetilde{u}_3)) = D^3(z * \widetilde{g}_3) \end{aligned}$$

y para la fase de síntesis

$$v_1 * U(D(z * \widetilde{v}_1)) \qquad v_2 * U(D^2(z * \widetilde{f}_2)) \qquad v_3 * U(D^3(z * \widetilde{f}_3)) \qquad u_3 * U(D^3(z * \widetilde{g}_3))$$

Supongamos que $N = 16M = 2^4 M$

En este caso hay cuatro pasos para las fases de análisis según el algoritmo tenemos que

$$x_1 := D(z * \widetilde{v}_1) \qquad y_1 := D(z * \widetilde{u}_1)$$

$$x_2 := D(D(z * \widetilde{u}_1) * \widetilde{v}_2) \qquad y_2 := D(D(z * \widetilde{u}_1) * \widetilde{u}_2)$$

$$x_3 := D(D(D(z * \widetilde{u}_1) * \widetilde{u}_2) * \widetilde{v}_3) \qquad y_3 := D(D(D(z * \widetilde{u}_1) * \widetilde{u}_2) * \widetilde{u}_3)$$

$$x_4 := D(D(D(D(z * \widetilde{u}_1) * \widetilde{u}_2) * \widetilde{u}_3) * v_4) \qquad y_4 := D(D(D(D(z * \widetilde{u}_1) * \widetilde{u}_2) * \widetilde{u}_3) * u_4)$$

pero dado el lema (2.2.1) y el corolario (2.2.2)

$$\begin{aligned} x_4 &= D(D(D(D(z * \widetilde{u}_1) * \widetilde{u}_2) * \widetilde{u}_3) * \widetilde{v}_4) = D(D^3(z * \widetilde{u}_1 * U(\widetilde{u}_2)) * U^2(\widetilde{u}_3)) * v_4) \\ &= D(D^3(z * \widetilde{u}_1 * U(\widetilde{u}_2) * U^2(\widetilde{u}_3)) * U^3(\widetilde{v}_4)) = D^4(z * \widetilde{u}_1 * U(\widetilde{u}_2) * U^2(\widetilde{u}_3)) * U^3(\widetilde{v}_4) \\ &= D^4(z * \widetilde{f}_4) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} y_4 &= D(D(D(D(z * \widetilde{u}_1) * \widetilde{u}_2) * \widetilde{u}_3) * \widetilde{u}_4) = D(D^3(z * \widetilde{u}_1 * U(\widetilde{u}_2)) * U^2(\widetilde{u}_3)) * u_4) \\ &= D(D^3(z * \widetilde{u}_1 * U(\widetilde{u}_2) * U^2(\widetilde{u}_3)) * U^3(\widetilde{u}_4)) = D^4(z * \widetilde{u}_1 * U(\widetilde{u}_2) * U^2(\widetilde{u}_3)) * U^3(\widetilde{u}_4) \\ &= D^4(z * \widetilde{g}_4) \end{aligned}$$

y para la fase de síntesis

$$v_1 * U(D(z * \widetilde{v}_1)) \quad v_2 * U(D^2(z * \widetilde{f}_2)) \quad v_3 * U(D^3(z * \widetilde{f}_3)) \quad v_4 * U(D^4(z * \widetilde{f}_4)) \quad u_4 * U(D^4(z * \widetilde{g}_4))$$

Procediendo de manera inductiva podemos conocer los valores para la salida de la fase de análisis dado por x_j y y_j así como las entradas del algoritmo de síntesis siempre y cuando se conozcan los valores para f_j, g_j, $\widetilde{f}_j$ y $\widetilde{g}_j$ los cuales están dados en términos de u_j y v_j como

$$\begin{aligned} f_1 &= v_1 & g_1 &= u_1 \\ f_2 &= u_1 * U(v_2) & g_2 &= u_1 * U(u_2) \\ f_3 &= u_1 * U(u_2) * U^2(v_3) & g_3 &= u_1 * U(u_2) * U^2(u_3) \\ &\vdots & &\vdots \\ f_j &= u_1 * U(u_2) * U^2(u_3) * \cdots * U^{j-1}(v_j) & g_j &= u_1 * U(u_2) * U^2(u_3) * \cdots * U^{j-1}(u_j) \end{aligned}$$

y

$$\begin{aligned} \widetilde{f}_1 &= \widetilde{v}_1 & \widetilde{g}_1 &= \widetilde{u}_1 \\ \widetilde{f}_2 &= \widetilde{u}_1 * U(\widetilde{v}_2) & \widetilde{g}_2 &= \widetilde{u}_1 * U(\widetilde{u}_2) \\ \widetilde{f}_3 &= \widetilde{u}_1 * U(\widetilde{u}_2) * U^2(\widetilde{v}_3) & \widetilde{g}_3 &= \widetilde{u}_1 * U(\widetilde{u}_2) * U^2(\widetilde{u}_3) \\ &\vdots & &\vdots \\ \widetilde{f}_j &= \widetilde{u}_1 * U(\widetilde{u}_2) * U^2(\widetilde{u}_3) * \cdots * U^{j-1}(\widetilde{v}_j) & g_j &= \widetilde{u}_1 * U(\widetilde{u}_2) * U^2(\widetilde{u}_3) * \cdots * U^{j-1}(\widetilde{u}_j) \end{aligned}$$

esto se resume en los dos siguientes lemas

Lema 2.2.3 *Supongamos que N es divisible por 2^p, $z \in \ell^2(\mathbb{Z}_N)$ y $u_1, v_1, \ldots, u_p, v_p$ son tales que*

$$u_k, v_k \in \ell^2(\mathbb{Z}_{N/2^{k-1}})$$

para cada $k = 1, 2, \ldots, p$. *Sean* $\{x_1, x_2, \ldots, x_p, y_p\}$ *un banco de filtros ondiculares de p-esima etapa donde*

$$x_i := D(y_{i-1} * \widetilde{v}_i)$$

$$y_i := D(y_{i-1} * \widetilde{u}_i)$$

en $\ell^2(\mathbb{Z}_{N/2^i})$ *con* $i = 1, 2, \ldots, p$ *y* $y_0 = z$. *Además sean,* $f_1, g_1, \ldots, f_p, g_p \in \ell^2(\mathbb{Z}_N)$ *definidos por*

$$f_k := g_{k-1} * U^{k-1}(v_k)$$

y

$$g_k := g_{k-1} * U^{k-1}(u_k)$$

para $k = 2, 3, \ldots, p$ *donde* $f_1 := v_1$ *y* $g_1 := u_1$. *Entonces se tiene para* $j = 1, 2, \ldots, p$ *que*

$$x_j = D^j(z * \widetilde{f}_j)$$

y

$$y_j = D^j(z * \widetilde{g}_j).$$

Lema 2.2.4 *Supongamos que* N *es divisible por* 2^p, $z \in \ell^2(\mathbb{Z}_N)$ *y* $u_1, v_1, \ldots, u_p, v_p$ *son tales que*

$$u_k, v_k \in \ell^2(\mathbb{Z}_{N/2^{k-1}})$$

para cada $k = 1, 2, \ldots, p$. *Sean* $\{x_1, x_2, \ldots, x_p, y_p\}$ *un banco de filtros ondiculares de p-esima etapa donde*

$$x_i := D(y_{i-1} * \widetilde{v}_i)$$

$$y_i := D(y_{i-1} * \widetilde{u}_i)$$

en $\ell^2(\mathbb{Z}_{N/2^i})$ *con* $i = 1, 2, \ldots, p$ *y* $y_0 = z$. *Además sean,* $f_1, g_1, \ldots, f_p, g_p \in \ell^2(\mathbb{Z}_N)$ *definidos por*

$$f_k := g_{k-1} * U^{k-1}(v_k)$$

y

$$g_k := g_{k-1} * U^{k-1}(u_k)$$

para $k = 2, 3, \ldots, p$ *donde* $f_1 := v_1$ *y* $g_1 := u_1$. *Entonces se tiene que en la k-esima iteración del algoritmo de reconstrucción nos da*

$$f_k * U^k(x_k)$$

para $k = 1, 2, \ldots, p$. *Además si estamos en el último paso iterativo de la reconstrucción se tiene que*

$$g_p * U^p(y_p)$$

En resumen, vimos que aplicar el algoritmo de análisis-reconstrucción iterativamente es equivalente a un algoritmo no recursivo, donde las salidas de la etapa de análisis están dadas por

$$x_j = D^j(z * \widetilde{f}_j)$$

y

$$y_j = D^j(z * \widetilde{g}_j)$$

para $j = 1, 2, \ldots, p$, de donde se tiene que

$$x_j(k) = D^j(z * \widetilde{f}_j)(k) = z * \widetilde{f}_j(2^j k) = \langle z, R_{2^j k} f_j \rangle$$

para $k = 0, 1, \ldots, (N/2^j) - 1$ y de manera similar

$$y_p(k) = D^p(z * \widetilde{g}_p)(k) = z * \widetilde{g}_p(2^p k) = \langle z, R_{2^p k} g_p \rangle$$

para $k = 0, 1, \ldots, (N/2^p) - 1$ que son las componentes de z en términos de alguna base ortonormal.

Ahora ya tenemos otro tipo de bases ondiculares de $\ell^2(\mathbb{Z}_N)$ que sirven para mirar a detalle ciertas características de la señal, según sea la aplicación. Solo basta probar que la base construida por el algoritmo anteriormente es una base ondicular de p-esima etapa. Esto lo haremos probando primero dos lemas y después un teorema con el resultado deseado.

Los lemas estableces que podemos descomponer un subespacio generado por las 2^{j-1} traslaciones de un vector en dos subespacios, cada uno generado por las 2^j traslaciones de otro vector.

Lema 2.2.5 *Supongamos que N es divisible por 2^j, $g_{j-1} \in \ell^2(\mathbb{Z}_N)$ y que el conjunto $\{R_{2^{j-1}k} g_{j-1}\}_{k=0}^{(N/2^{j-1})-1}$ es ortonormal con $N/2^{j-1}$ elementos. Supongamos que $u_j, v_j \in \ell^2(\mathbb{Z}_{N/2^{j-1}})$ y la matriz de sistema*

$$A_j(n) = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} \widehat{u_j}(n) & \widehat{v_j}(n) \\ \widehat{u_j}(n + \frac{N}{2^j}) & \widehat{v_j}(n + \frac{N}{2^j}) \end{bmatrix}$$

es unitaria para todo $n = 0, 1, \ldots, (N/2^j) - 1$ definimos

$$f_j = g_{j-1} * U^{j-1}(v_j) \qquad y \qquad g_j = g_{j-1} * U^{j-1}(u_j)$$

entonces

$$\{R_{2^j k} f_j\}_{k=0}^{(N/2^j)-1} \cup \{R_{2^j k} g_j\}_{k=0}^{(N/2^j)-1}$$

es un conjunto ortonormal con $N/2^{j-1}$ elementos.

Demostración:

Primero observemos que

$$g_{j-1} * \widetilde{g}_{j-1}(2^{j-1}k) = \langle g_{j-1}, R_{2^{j-1}k} g_{j-1} \rangle = \begin{cases} 1, & k = 0 \\ 0, & k = 1, 2, \ldots, (N/2^{j-1}) - 1 \end{cases}$$

y dado que $u_j, v_j \in \ell^2(\mathbb{Z}_{N/2^{j-1}})$ y la matriz de sistema $A_j(n)$ es unitaria se tiene que

$$\{R_{2^j k} v_j\}_{k=0}^{(N/2^j)-1} \cup \{R_{2^j k} u_j\}_{k=0}^{(N/2^j)-1}$$

es una base ortonormal para $\ell^2(\mathbb{Z}_{N/2^{j-1}})$ con lo que se cumple que

$$v_j * \widetilde{v}_j(2k) = \langle v_j, R_{2k} v_j \rangle = \begin{cases} 1, & k = 0 \\ 0, & k = 1, 2, \ldots, (N/2^j) - 1 \end{cases}$$

$$v_j * \widetilde{u}_j(2k) = \langle v_j, R_{2k} u_j \rangle = 0$$

$$u_j * \widetilde{u}_j(2k) = \langle u_j, R_{2k} u_j \rangle = \begin{cases} 1, & k = 0 \\ 0, & k = 1, 2, \ldots, (N/2^j) - 1 \end{cases}$$

de donde finalmente tenemos que

$$\begin{aligned}
\langle f_j, R_{2^jk}f_j\rangle &= f_j * \widetilde{f}_j(2^jk)\\
&= g_{j-1} * U^{j-1}(v_j) * \widetilde{g}_{j-1} * U^{j-1}(\widetilde{v}_j)(2^jk)\\
&= g_{j-1} * \widetilde{g}_{j-1} * U^{j-1}(v_j) * U^{j-1}(\widetilde{v}_j)(2^jk)\\
&= (g_{j-1} * \widetilde{g}_{j-1}) * U^{j-1}(v_j * \widetilde{v}_j)(2^jk)\\
&= \sum_{n=0}^{N-1}(g_{j-1} * \widetilde{g}_{j-1})(2^jk-n)U^{j-1}(v_j * \widetilde{v}_j)(n)\\
&= \sum_{i=0}^{(N/2^{j-1})-1}(g_{j-1} * \widetilde{g}_{j-1})(2^jk-2^{j-1}i)(v_j * \widetilde{v}_j)(i)\\
&= (v_j * \widetilde{v}_j)(2k) = \begin{cases} 1, & k=0\\ 0, & k=1,2,\ldots,(N/2^j)-1\end{cases}
\end{aligned}$$

de la misma manera

$$\langle g_j, R_{2^jk}g_j\rangle = (u_j * \widetilde{u}_j)(2k) = \begin{cases} 1, & k=0\\ 0, & k=1,2,\ldots,(N/2^j)-1\end{cases}$$

y

$$\langle f_j, R_{2^jk}g_j\rangle = (v_j * \widetilde{u}_j)(2k) = 0$$

para todo k que implica que

$$\langle R_{2^jk}f_j, R_{2^ji}g_j\rangle = 0$$

□

En términos de los espacios generados por las traslaciones y la suma directa del algoritmo de análisis y síntesis tenemos que bajo las mismas hipótesis del lema anterior los espacios

$$V_{-j+1} = generado\,\{R_{2^{j-1}k}g_{j-1}\}_{k=0}^{(N/2^{j-1})-1}$$

$$W_{-j} = generado\,\{R_{2^jk}f_j\}_{k=0}^{(N/2^j)-1}$$

y

$$V_{-j} = generado\,\{R_{2^jk}g_j\}_{k=0}^{(N/2^j)-1}$$

cumplen que

$$V_{-j} \oplus W_{-j} = V_{-j+1}$$

Lo que nos falta por ver es que las salidas del algoritmo de análisis y síntesis generan una base ondicular de p-esima etapa, esto se demuestra en el siguiente teorema

Teorema 2.2.6 *Supongamos que N es divisible por 2^p y que $u_1, v_1, u_2, v_2, \ldots, u_p, v_p$ es una sucesión de filtros ondiculares de p-esima etapa definimos $f_1 = v_1$ y $g_1 = u_1$ e inductivamente a $f_k, g_k \in \ell^2(\mathbb{Z}_N)$ para $k = 2, 3, \ldots, p$ por*

$$f_k := g_{k-1} * U^{k-1}(v_k)$$

y

$$g_k := g_{k-1} * U^{k-1}(u_k)$$

entonces $f_k, g_k \in \ell^2(\mathbb{Z}_N)$ para $k = 1, 2, \ldots, p$ generan una base ondicular de p-esima etapa para $\ell^2(\mathbb{Z}_N)$.

Demostración:

El objetivo es demostrar que el conjunto

$$\{R_{2k}f_1\}_{k=0}^{(N/2)-1} \cup \{R_{2^2k}f_2\}_{k=0}^{(N/2^2)-1} \cup \cdots \cup \{R_{2^pk}f_p\}_{k=0}^{(N/2^p)-1} \cup \{R_{2^pk}g_p\}_{k=0}^{(N/2^p)-1}$$

es un conjunto ortonormal de N elementos que no contiene al cero en $\ell^2(\mathbb{Z}_N)$ que es un espacio de dimensión N con lo cual tendremos una base.

Sin embargo la ortogonalidad de los diferentes conjuntos se tiene de manera automática debido a que como $f_1 = v_1$ y $g_1 = u_1$ entonces el conjunto

$$\{R_{2k}f_1\}_{k=0}^{(N/2)-1} \cup \{R_{2k}g_1\}_{k=0}^{(N/2)-1}$$

es ortonormal, procediendo de manera inductiva sobre el conjunto de la izquierda, es decir sobre

$$\{R_{2k}f_1\}_{k=0}^{(N/2)-1}$$

tenemos que

$$\{R_{2^jk}f_j\}_{k=0}^{(N/2^j)-1}$$

es ortonormal para $j = 1, 2, \ldots, p$ así mismo

$$\{R_{2^pk}g_p\}_{k=0}^{(N/2^p)-1}$$

es ortonormal.

Lo que resta es demostrar que también se tiene la ortonormalidad de elementos en diferentes conjuntos. Supongamos que $i < j \leq p$ buscamos que

$$R_{2^ik}f_i \perp R_{2^jk}f_j$$

esto se cumple según la definición del conjunto W_{-i} y W_{-j} ya que

$$R_{2^ik}f_i \in W_{-i} \qquad \text{y} \qquad R_{2^jk}f_j \in W_{-j}$$

además

$$W_{-j} \subseteq V_{-j+1} \subseteq \cdots \subseteq V_{-i}$$

con lo cual

$$R_{2^jk}f_j \in V_{-j}$$

y como

$$V_{-i} \perp W_{-i}$$

entonces

$$R_{2^ik}f_i \perp R_{2^jk}f_j$$

análogamente para

$$R_{2^pk}g_p \in V_{-p} \subseteq V_{-j} \perp W_{-j} \quad \text{y} \quad R_{2^jk}f_j \in W_{-j}$$

cuando $j \leq p$

$$R_{2^pk}g_p \perp R_{2^jk}f_j$$

$\square$

El comportamiento del algoritmo de análisis y síntesis establece que comenzando por $\ell^2(\mathbb{Z}_N)$ lo partimos en dos subespacios más pequeños, nos quedamos con V_{-1} y lo partimos nuevamente hasta obtener el espacio V_{-p}. Además la salida de la fase de análisis son las componentes del vector que representa a $z \in \ell^2(\mathbb{Z}_N)$ en la base ondicular de p-esima etapa.

Un aspecto importante del teorema es que establece la relación que hay entre un sucesión de filtros ondiculares y la manera de construir una base ondicular de p-esima etapa. Sin embargo parece un tanto complejo construir una sucesión de filtros ondiculares y pareciera que no hay relación entre ellos pero el siguiente lema y su corolario vienen a resolver estas dificultades describiendo la relación que hay entre los elementos de la sucesión de filtros ondiculares así solo estamos interesados en construir una pareja de filtros ondiculares u_1 y v_1 y los demás están dados según el siguiente lema.

Lema 2.2.7 *Supongamos que N es divisible por 2 y que $u_1 \in \ell^2(\mathbb{Z}_N)$*

1. *Definimos $u_2 \in \ell^2(\mathbb{Z}_{N/2})$ por*

$$u_2(n) = u_1(n) + u_1\left(n + \frac{N}{2}\right)$$

entonces para toda m

$$\widehat{u}_2(m) = \widehat{u}_1(2m)$$

2. *Suponiendo que N es divisible por 2^j, definimos $u_j \in \ell^2(\mathbb{Z}_{N/2^{j-1}})$ por*

$$u_j(n) = \sum_{k=0}^{2^{j-1}-1} u_1\left(n + \frac{kN}{2^{j-1}}\right)$$

entonces

$$\widehat{u}_j(m) = \widehat{u}_1(2^{j-1}m)$$

Demostración:

$$\begin{aligned}
\widehat{u}_2(m) &= \sum_{n=0}^{(N/2)-1} u_2(n)e^{-2\pi inm/(N/2)} \\
&= \sum_{n=0}^{(N/2)-1} \left[u_1(n) + u_1\left(n + \frac{N}{2}\right)\right] e^{-2\pi inm/(N/2)} \\
&= \sum_{n=0}^{(N/2)-1} u_1(n)e^{-2\pi inm/(N/2)} + \sum_{n=0}^{(N/2)-1} u_1\left(n + \frac{N}{2}\right) e^{-2\pi inm/(N/2)} \\
&= \sum_{k=0}^{(N/2)-1} u_1(k)e^{-2\pi ik(2m)/N} + \sum_{k=N/2}^{N-1} u_1(k)e^{-2\pi ik(2m)/N} \\
&= \sum_{k=0}^{N-1} u_1(k)e^{-2\pi ik(2m)/N} \\
&= \widehat{u}_1(2m)
\end{aligned}$$

haciendo los cambios de variable $k = n$ y $k = n + N/2$ en la primera y segunda suma respectivamente de manera inductiva para $j = k+1$ tenemos que por definición

$$\widehat{u}_{k+1}(m) = \sum_{n=0}^{(N/2^k)-1} \left[\sum_{r=0}^{2^k-1} u_1 \left(n + \frac{rN}{2^k} \right) e^{-2\pi i n m/(N/2^k)} \right]$$

intercambiando los índices de las sumas

$$\widehat{u}_{k+1}(m) = \sum_{r=0}^{2^k-1} \left[\sum_{n=0}^{(N/2^k)-1} u_1 \left(n + \frac{rN}{2^k} \right) e^{-2\pi i n m/(N/2^k)} \right]$$

usando el cambio de variable $s = n + rN/2^k$

$$\widehat{u}_{k+1}(m) = \sum_{r=0}^{2^k-1} \left[\sum_{s=rN/2^k}^{(N/2^k)(1+r)-1} u_1(s) e^{-2\pi i (s - rN/2^k) m/(N/2^k)} \right]$$

dado que $e^{2\pi t m i} = 1$ para todo t entero

$$\widehat{u}_{k+1}(m) = \sum_{r=0}^{2^k-1} \left[\sum_{s=rN/2^k}^{(N/2^k)(1+r)-1} u_1(s) e^{-2\pi i s (2^k m)/N} \right]$$

obsérvese que mientras r varia desde 0 hasta $2^k - 1$ se tiene que el limite inferior de la suma en s varia desde 0 hasta $1 - N/2^k$ y el limite superior de la suma en s varia desde $N/2^k - 1$ hasta $N - 1$ de donde

$$\widehat{u}_{k+1}(m) = \sum_{s=0}^{N-1} u_1(s) e^{-2\pi i s (2^k m)/N} = \widehat{u}_1(2^k m)$$

□

Corolario 2.2.8 *Supongamos que N es divisible por 2^p y supongamos que $u, v \in \ell^2(\mathbb{Z}_N)$ son tales que la matriz de sistema $A(n)$ es unitaria para todo n. Sea $u_1 = u$ y $v_1 = v$ y para todo $j = 2, 3, \ldots, p$ definimos u_j por la ecuación*

$$u_j(n) = \sum_{k=0}^{2^{j-1}-1} u_1 \left(n + \frac{kN}{2^{j-1}} \right)$$

y similarmente v_j por

$$v_j(n) = \sum_{k=0}^{2^{j-1}-1} v_1 \left(n + \frac{kN}{2^{j-1}} \right)$$

entonces $u_1, v_1, u_2, v_2, \ldots, u_p, v_p$ es una sucesión de filtros ondiculares.

Demostración:

Lo único que tenemos que probar es que la matriz $A_j(n)$ para cada $j = 1, 2 \ldots, p$ es unitaria pero

$$\begin{aligned} A_j(n) &= \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix} \widehat{u}_j(n) & \widehat{v}_j(n) \\ \widehat{u}_j\left(n + \frac{N}{2^j}\right) & \widehat{v}_j\left(n + \frac{N}{2^j}\right) \end{bmatrix} \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix} \widehat{u}_1(2^{j-1}n) & \widehat{v}_1(2^{j-1}n) \\ \widehat{u}_1\left(2^{j-1}n + \frac{N}{2}\right) & \widehat{v}_1\left(2^{j-1}n + \frac{N}{2}\right) \end{bmatrix} \\ &= A_1(2^{j-1}n) \end{aligned}$$

y dado que esta matriz es unitaria para todo n entonces $A_j(n)$ para cada $j = 1, 2 \ldots, p$ y todo n $\square$

Por lo tanto si construimos una base ondicular de primera etapa para $\ell^2(\mathbb{Z}_N)$ dada por u y v según la sección (2.1) y aplicamos el último corolario de esta sección podemos construir una sucesión filtros ondiculares y por consiguiente una base ondicular de p-esima etapa. El siguiente algoritmo describe el proceso para construir dicha base.

1. Supongamos que N es divisible por 2^p
2. Encontrar u y v en $\ell^2(\mathbb{Z}_N)$ tal que $A(n)$ es unitaria para todo $n = 0, 1, \ldots, N1$
3. Construir la sucesión de filtros ondiculares $u_2, v_2, \ldots, u_p, v_p$
4. Construimos los valores de $f_1, g_1, \ldots, f_p, g_p$
5. Construir $R_{2^jk}f_j$ para cada valor de $j = 1, 2, \ldots, p$ y $R_{2^pk}g_p$

Capítulo 3

Una extensión de las ondículas a los enteros.

El objetivo de este capítulo es extender el estudio de las ondículas a otro espacio más grande $\ell^2(\mathbb{Z})$ introduciendo un poco de notación y conceptos teóricos sobre espacios de Hilbert y las principales propiedades y resultados que en ellos se manejan. Después haremos una construcción de una base ondicular de primera etapa y extenderemos esta idea a una base ondicular de p-esima etapa en $\ell^2(\mathbb{Z})$.

3.1. Conceptos de espacios de Hilbert.

La motivación para el estudio de las ondículas en $\mathbb{Z}_N$ se dio por la necesidad de trabajar con entes matemáticos que nos representaran las señales finitas y/o periódicas. Ahora ampliaremos un poco más nuestro estudio a otro tipo de señales aquellas que no son periódicas. Este tipo de señales se ve descrito nuevamente por funciones de la forma

$$z : \mathbb{Z} \to \mathbb{C}$$

así mismo es más prudente trabajar con el rango de estas funciones, pensando como un vector de la forma

$$z = (\ldots, z(-2), z(-1), z(0), z(1), z(2), \ldots) = (z(n))_{n\in\mathbb{Z}}$$

Este tipo de señales son parecidas a las sucesiones que se estudian en análisis real la diferencia es el dominio. No obstante las sucesiones nos permiten pensar que el nuevo conjunto de señales que estudiaremos es un espacio de dimensión infinita y como tal no podremos hablar de una base como un conjunto finito de vectores que nos representen a dichas señales como una combinación lineal de los elementos de la base. Lo que haremos en esta sección es hablar sobre el símil de una base de un espacio vectorial de dimensión finita conocido como conjunto o sistema ortonormal de vectores.

Empecemos por definir el conjunto de interés así como restringir nuestro estudio a aquellos vectores que sean "matemáticamente trabajables", es decir no cualquier vector $(z(n))_{n\in\mathbb{Z}}$ sera de interés si no solo aquellos que cumplan cierta condición

Definición 23 *Definimos el espacio de sucesiones cuadrado sumables como el conjunto* $\ell^2(\mathbb{Z})$ *dado por*

$$\ell^2(\mathbb{Z}) = \left\{ (z(n))_{n\in\mathbb{Z}} : z(n) \in \mathbb{C} \quad \forall\, n \in \mathbb{Z}, \sum_{n\in\mathbb{Z}} |z(n)|^2 < \infty \right\}$$

donde la serie de la definición esta dada de manera usual por la convergencia de las sumas parciales, además $\ell^2(\mathbb{Z})$ es un espacio vectorial con producto interno con las operaciones usuales de suma y producto escalar entre vectores de dimensión finita, donde el producto interno y la norma están dados por

$$\langle z, w\rangle = \sum_{n\in\mathbb{Z}} z(n)\overline{w(n)} \qquad \|z\| = \left(\sum_{n\in\mathbb{Z}} |z(n)|^2\right)^{1/2}$$

y las relaciones de Cauchy-Schwarz y la desigualdad del triángulo son

$$\left|\sum_{n\in\mathbb{Z}} z(n)\overline{w(n)}\right| \le \left(\sum_{n\in\mathbb{Z}} |z(n)|^2\right)^{1/2} + \left(\sum_{n\in\mathbb{Z}} |w(n)|^2\right)^{1/2}$$

$$\left(\sum_{n\in\mathbb{Z}} |z(n)+w(n)|^2\right)^{1/2} \le \left(\sum_{n\in\mathbb{Z}} |z(n)|^2\right)^{1/2} + \left(\sum_{n\in\mathbb{Z}} |w(n)|^2\right)^{1/2}$$

Este conjunto tiene una característica muy importante que es que toda sucesión en $\ell^2(\mathbb{Z})$ que sea de Cauchy converge en $\ell^2(\mathbb{Z})$ por lo que $\ell^2(\mathbb{Z})$ es un espacio vectorial completo con producto interno es decir es un espacio de Hilbert.

A continuación escribiremos un poco de teoría acerca de los espacios de Hilbert para estudiar el comportamiento de las "bases" en estos espacios. Obsérvese que el análogo en la base canónica de $\ell^2(\mathbb{Z}_N)$ en $\ell^2(\mathbb{Z})$ debería ser

$$e_j(n) = \begin{cases} 1, & n = j \\ 0, & n \neq j \end{cases}$$

y parece que cualquier vector $z \in \ell^2(\mathbb{Z})$ puede escribirse como

$$z(j) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} z(n)e_n(j)$$

que no es una combinación lineal finita, pero la idea se mantiene como antes una suma de términos que involucran un conjunto (no necesariamente finito) de vectores con los cuales podemos representar un vector lo único que faltaría por revisar es la convergencia de las serie que nos representaría el vector.

Un espacio de Hilbert es un espacio vectorial con producto interno que es completo (toda sucesión de Cauchy converge). En un espacio de Hilbert el análogo a ser base es el siguiente teorema

Teorema 3.1.1 *Supongamos que* H *es un espacio de Hilbert y que* $\{a_j\}_{j\in\mathbb{Z}}$ *es un conjunto ortonormal en* H *entonces* $\{a_j\}_{j\in\mathbb{Z}}$ *es un sistema ortonormal completo si y solo si*

$$f = \sum_{j\in\mathbb{Z}} \langle f, a_j\rangle\, a_j$$

Podemos observar que si tenemos un sistema ortonormal completo tendremos la noción de base que se tenia en dimensiones finitas por lo que solo resta definir que es un sistema ortonormal completo

Definición 24 *Dado H un espacio de Hilbert y $\{a_j\}_{j\in\mathbb{Z}} \subset H$. Decimos que $\{a_j\}_{j\in\mathbb{Z}}$ es un sistema ortonormal completo si $\{a_j\}_{j\in\mathbb{Z}}$ es un conjunto ortonormal tal que el único elemento que satisface $\langle w, a_j\rangle = 0$ para todo $j \in \mathbb{Z}$ es $w = 0$*

A los sistemas ortonormales completos también se les conoce como conjuntos ortonormales completos pero aquí los llamaremos sistemas para evitar confusiones con la definición de ser completo desde el punto de vista de Cauchy (que toda sucesión de Cauchy converge).

Los dos siguientes lemas justifican el teorema y proveen la convergencia de la serie en el teorema,

Lema 3.1.2 *Supongamos que H es un espacio de Hilbert y $\{a_j\}_{j\in\mathbb{Z}}$ es un conjunto ortonormal en H, si $z = (z(j))_{j\in\mathbb{Z}} \in \ell^2(\mathbb{Z})$ entonces la serie*

$$\sum_{j\in\mathbb{Z}} z(j)a_j$$

converge en H y se tiene que

$$\left\| \sum_{j\in\mathbb{Z}} z(j)a_j \right\|^2 = \sum_{n\in\mathbb{Z}} |z(j)|\, 2$$

Lema 3.1.3 *Sea H un espacio de Hilbert $\{a_j\}_{j\in\mathbb{Z}}$ un conjunto ortonormal en H y f un elemento en H entonces la sucesión $\{\langle f, a_j\rangle\}$ pertenece a $\ell^2(\mathbb{Z})$ con*

$$\sum_{j\in\mathbb{Z}} |\langle f, a_j\rangle|^2 = \|f\|^2$$

Estos establecen que si tenemos un conjunto ortonormal $\{a_j\}_{j\in\mathbb{Z}}$ en un espacio de Hilbert H y f es un elemento del espacio H entonces $\{\langle f, a_j\rangle\}_{j\in\mathbb{Z}}$ pertenece a $\ell^2(\mathbb{Z})$ y por lo tanto $\sum_{j\in\mathbb{Z}} \langle f, a_j\rangle\, a_j$ converge en H y el hecho de ser un sistema ortonormal garantiza que converge a f.

Una caracterización de los conjuntos ortonormales $\{a_j\}_{j\in\mathbb{Z}}$ en espacios de Hilbert establece que es equivalente ser

1. $\{a_j\}_{j\in\mathbb{Z}}$ es un completo.

2. (Parseval) Para todo $f, g \in H$

$$\langle f, g\rangle = \sum_{j\in\mathbb{Z}} \langle f, a_j\rangle\, \overline{\langle g, a_j\rangle}$$

3. (Plancherel) Para toda $f \in H$

$$\|f\|^2 = \sum_{j\in\mathbb{Z}} |\langle f, a_j\rangle|^2$$

Existen varios tipos de espacios de Hilbert aquellos que tiene un sistema ortonormal completo finito o contable a los cuales se les llama espacios de Hilbert separables y aquellos con sistemas ortonormales completos que no tienen elementos finitos o contables nosotros centraremos nuestra atención a aquellos espacios de Hilbert separables.

Para terminar esta sección estudiaremos el espacio de Hilbert $L^2([-\pi,\pi))$ y las series de Fourier. Comencemos por definir cual es este espacio de interés y ver que tiene un sistema ortonormal completo.

Definición 25 *El espacio de las funciones complejas definidas sobre el intervalo* $[-\pi,\pi)$ *que son cuadrado integrables es el conjunto*

$$L^2([-\pi,\pi)) = \left\{ f : [-\pi,\pi) \to \mathbb{C} \text{ tal que } \int_{\pi}^{\pi} |f(\theta)|^2 \, d\theta < \infty \right\}$$

Este conjunto es un espacio de Hilbert con las operaciones usuales de suma y producto escalar donde el producto interno y la norma están dadas por

$$\langle f,g\rangle = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(\theta)\overline{g(\theta)}d\theta \qquad \|f\| = \left(\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} |f(\theta)|^2 \, d\theta\right)^{1/2}$$

y las relaciones de Cauchy-Schwarz y desigualdad del triángulo están dadas por

$$\left|\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(\theta)\overline{g(\theta)}d\theta\right| \le \left(\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} |f(\theta)|^2 \, d\theta\right)^{1/2} \left(\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} |g(\theta)|^2 \, d\theta\right)^{1/2}$$

$$\left(\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} |f(\theta)+g(\theta)|^2 \, d\theta\right)^{1/2} \le \left(\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} |f(\theta)|^2 \, d\theta\right)^{1/2} + \left(\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} |g(\theta)|^2 \, d\theta\right)^{1/2}$$

Antes de demostrar que $L^2([-\pi,\pi))$ tiene un sistema ortonormal completo obsérvese que si aplicamos la desigualdad de Cauchy-Schwarz a $|f(\theta)|$ y $g(\theta) = 1$ se tiene

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} |f(\theta)| \, d\theta \le \left(\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} |f(\theta)|^2 \, d\theta\right)^{1/2}$$

es decir que si $f \in L^2([-\pi,\pi))$ entonces f sera absolutamente integrable. Esta es la clave para ver que $L^2([-\pi,\pi))$ tiene un sistema ortonormal completo y básicamente es ver que $L^1([-\pi,\pi))$ tiene un sistema ortonormal completo ya que el resultado de aplicar la desigualdad de Cauchy-Schwarz a $|f(\theta)|$ y $g(\theta) = 1$ implica que si $f \in L^2([-\pi,\pi))$ entonces $f \in L^1([-\pi,\pi))$, es decir $L^2([-\pi,\pi)) \subset L^1([-\pi,\pi))$

El conjunto

$$L^1([-\pi,\pi)) = \left\{ f : [-\pi,\pi) \to \mathbb{C} \text{ tal que } \int_{\pi}^{\pi} |f(\theta)| \, d\theta < +\infty \right\}$$

se conoce como el conjunto de las funciones integrables y la norma en este conjunto es

$$\|f\|_1 = \int_{-\pi}^{\pi} |f(\theta)| \, d\theta$$

Definición 26 *El conjunto de funciones*

$$\left\{e^{in\theta}\right\}_{n\in\mathbb{Z}}$$

en $L^2([-\pi,\pi))$ *se le conoce con el nombre de sistema trigonométrico de* $L^2([-\pi,\pi))$.

Este conjunto es ortonormal en $L^2([-\pi,\pi))$ puesto que

$$\left\langle e^{ik\theta},e^{ij\theta}\right\rangle=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}e^{i(j-k)\theta}d\theta=\begin{cases}1, & k=j\\ \dfrac{(e^{i(k-j)\pi}-e^{-i(k-j)\pi})}{2\pi i(j-k)}, & k\neq j\end{cases}\begin{cases}1, & k=j\\ 0, & k\neq j\end{cases}$$

ya que la función es periódica de periodo 2π finalmente dado que la función de $L^1((-\pi,\pi])$ que cumple que

$$\left\langle f,e^{in\theta}\right\rangle=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(\theta)e^{-in\theta}d\theta=0$$

para todo $n\in\mathbb{Z}$ es $f(\theta)=0$ a.e. podemos concluir que el sistema trigonométrico es un sistema ortonormal de $L^1((-\pi,\pi])$ y por consiguiente se tiene que el sistema trigonométrico $\left\{e^{in\theta}\right\}_{n\in\mathbb{Z}}$ es un sistema ortonormal completo en $L^2([-\pi,\pi))$ pues $L^2([-\pi,\pi))\subset L^1((-\pi,\pi])$

En resumen en $L^2([-\pi,\pi))$ tenemos un sistema ortonormal completo dado por $\left\{e^{in\theta}\right\}_{n\in\mathbb{Z}}$ y por lo tanto se tiene que

$$f(\theta)=\sum_{n\in\mathbb{Z}}\left\langle f,e^{in\theta}\right\rangle e^{in\theta}$$

conocida como la serie de Fourier de f y a $\left\langle f,e^{in\theta}\right\rangle$ se le conoce como el n-esimo coeficiente de Fourier. Además por el estudio hecho al principio de la sección tenemos las siguientes propiedades

Corolario 3.1.4

1. *Supongamos que* $z=(z(n))_{n\in\mathbb{Z}}\in\ell^2(\mathbb{Z})$ *entonces la serie*

$$\sum_{n\in\mathbb{Z}}z(n)e^{in\theta}$$

converge a un elemento de $L^2([-\pi,\pi))$.

2. *(Fórmula de Plancherel) Supongamos que* $f\in L^2([-\pi,\pi))$ *entonces la sucesión* $\{\left\langle f,e^{in\theta}\right\rangle\}_{n\in\mathbb{Z}}\in\ell^2(\mathbb{Z})$ *y*

$$\sum_{n\in\mathbb{Z}}\left|\left\langle f,e^{in\theta}\right\rangle\right|^2=\|f\|=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}|f(\theta)|^2\,d\theta$$

3. *(Relación de Parseval) Supongamos* $f,g\in L^2([-\pi,\pi))$ *entonces*

$$\langle f,g\rangle=\sum_{n\in\mathbb{Z}}\left\langle f,e^{in\theta}\right\rangle\overline{\left\langle g,e^{in\theta}\right\rangle}$$

4. *(Fórmula de inversión de Fourier) Para todo* $f\in L^2([-\pi,\pi))$ $f(\theta)=\sum_{n\in\mathbb{Z}}\left\langle f,e^{in\theta}\right\rangle e^{in\theta}$

Recordando el capítulo anterior recordemos que la TDF diagonaliza las transformaciones lineales invariantes bajo traslación y veremos que lo mismo pasa en $L^2([-\pi,\pi))$ según para lo cual necesitaremos las siguientes definiciones

Definición 27 *Sea $T : H_1 \to H_2$ una transformación lineal entre espacios de Hilbert H_1 y H_2 con normas $\|\cdot\|_1$ y $\|\cdot\|_2$ respectivamente decimos que T es acotada si existe $C > 0$ tal que se cumple que*

$$\|Tx\|_2 \leq C \|x\|_1$$

para toda $x \in H_1$

Definición 28 *Sea $\psi \in \mathbb{R}$ arbitrario, definimos el operador traslación $T_\psi : L^2([-\pi, \pi)) \to L^2([-\pi, \pi))$ dado por*

$$(T_\psi f)(\theta) = f(\theta - \psi)$$

además decimos que una transformación lineal es invariante bajo traslaciones si conmuta con el operador traslación, esto es

$$T(T_\psi f)(\theta) = T_\psi(Tf)(\theta)$$

Teorema 3.1.5 *Supongamos que $T : L^2([-\pi, \pi)) \to L^2([-\pi, \pi))$ es una transformación lineal acotada invariante bajo traslaciones, entonces para cada $m \in \mathbb{Z}$ existe $\lambda_m \in \mathbb{C}$ tal que*

$$Te^{in\theta} = \lambda_m e^{in\theta}$$

El hecho de decir que T diagonaliza a las transformaciones lineales acotadas invariantes bajo traslaciones es por que si tenemos $f \in L^2([-\pi, \pi))$ se cumple que $f(\theta) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} c(n)e^{in\theta}$ por lo que al aplicarle T se cumple que

$$Tf(\theta) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} c(n)Te^{in\theta} = \sum_{n\in\mathbb{Z}} c(n)\lambda_n e^{in\theta}$$

es decir que el efecto es multiplicar el n-esimo coeficiente de Fourier por λ_n o un vector $[c(n)]_{n\in\mathbb{Z}}$ por una matriz diagonal $D = [\lambda_n]_{n\in\mathbb{Z}}$ suponiendo que pudiéramos hablar de matrices infinitas.

3.2. Bases ondiculares de primera etapa.

Comencemos ahora la construcción de las ondículas en el espacio $\ell^2(\mathbb{Z})$. Para lo cual definiremos primero la TDF en dicho espacio y después una primera etapa de la base, análogo a la sección anterior.

En esta primera parte de la sección el objetivo es definir el análogo de la TDF en el espacio $\ell^2(\mathbb{Z})$ y revisar la relación con las transformaciones invariantes bajo traslación.

Empecemos por la definición de la Transformada de Fourier

Definición 29 *La Transformada Fourier en el espacio $\ell^2(\mathbb{Z})$ es la función $\widehat{\cdot} : \ell^2(\mathbb{Z}) \to L^2([-\pi, \pi))$ dada por*

$$\widehat{z}(\theta) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} z(n)e^{in\theta}$$

donde $z(n) \in \ell^2(\mathbb{Z})$

La Transformada de Fourier inversa es la función $\check{\cdot} : L^2([-\pi, \pi)) \to \ell^2(\mathbb{Z})$ dada por

$$\check{f}(n) = \langle f, e^{in\theta} \rangle = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(\theta)e^{-in\theta} d\theta$$

donde $f \in L^2([-\pi, \pi))$

El siguiente lema establece las relaciones que se satisfacen con la Transformada de Fourier

Lema 3.2.1 *La transformada de Fourier* $\widehat{\cdot}$ *es biyectiva con inversa* $\check{\cdot}$. *Para* $z \in \ell^2(\mathbb{Z})$ *se tiene que*

$$z(n) = (\widehat{z})\check{}(n) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \widehat{z}(\theta)e^{-in\theta}d\theta$$

Para todo $z, w \in \ell^2(\mathbb{Z})$ *se satisface la relación de Parseval*

$$\langle z, w\rangle = \sum_{n\in\mathbb{Z}} z(n)\overline{w(n)} = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \widehat{z}(n)\overline{\widehat{w}(\theta)}d\theta = \langle \widehat{z}, \widehat{w}\rangle$$

y se cumple la fórmula de Plancherel

$$\|z\|^2 = \sum_{n\in\mathbb{Z}} |z(n)|^2 = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} |\widehat{z}(\theta)|^2 \, d\theta = \|\widehat{z}\|^2$$

Una de las principales propiedades de la TDF en el espacio $\ell^2(\mathbb{Z}_N)$ es que diagonaliza las transformaciones lineales invariantes bajo traslación y hay un análogo de esa propiedad en el espacio $\ell^2(\mathbb{Z})$, básicamente la prueba se basa en lo que llamamos un operador convolución del capítulo anterior. Para este caso hay un detalle sobre la convolución, que no es cerrada para los elementos de $\ell^2(\mathbb{Z})$ se necesita pedir que al menos uno de ellos esta en otro espacio más pequeño que $\ell^2(\mathbb{Z})$ llamado $\ell^1(\mathbb{Z})$ este espacio es

$$\ell^1(\mathbb{Z}) = \left\{ z = (z(n))_{n\in\mathbb{Z}} : z(n) \in \mathbb{C} \text{ parap todo } n \text{ y } \sum_{n\in\mathbb{Z}} |z(n)| < +\infty \right\}$$

el espacio $\ell^1(\mathbb{Z})$ es un espacio vectorial en donde la norma es

$$\|z\|_1 = \sum_{n\in\mathbb{Z}} |z(n)|$$

es un subespacio propio de $\ell^2(\mathbb{Z})$ en este caso la convolución esta definida como

Definición 30 *Dado* $w \in \ell^1(\mathbb{Z})$ *y* $z \in \ell^2(\mathbb{Z})$ *definimos la convolución como*

$$z * w(m) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} z(m-n)w(n)$$

que es un elemento de $\ell^2(\mathbb{Z})$

Al igual que en $\ell^2(\mathbb{Z}_N)$ la Transformada de Fourier y la convolución guardan ciertas relaciones como

- $(z * w)\widehat{}(\theta) = \widehat{z}(\theta)\widehat{w}(\theta)$ a.e para todo $v \in \ell^1(\mathbb{Z})$ y $z \in \ell^2(\mathbb{Z})$
- $z * w = w * z$ para todo $v \in \ell^1(\mathbb{Z})$ y $z \in \ell^2(\mathbb{Z})$
- $v * (w * z) = (v * w) * z$ para todo $v, w \in \ell^1(\mathbb{Z})$ y $z \in \ell^2(\mathbb{Z})$

Probemos entonces como es que la Transformada de Fourier diagonaliza las transformaciones lineales invariantes bajo traslación.

Definición 31 *Sea $k \in \mathbb{Z}$ el operador traslación $R_k : \ell^2(\mathbb{Z}) \to \ell^2(\mathbb{Z})$ esta definido por*

$$R_k z = z(n-k)$$

para todo $n \in \mathbb{Z}$. Decimos además que una transformación lineal $T : \ell^2(\mathbb{Z}) \to \ell^2(\mathbb{Z})$ es invariante bajo traslaciones si conmuta con cualquier operador traslación, es decir se cumple que

$$T(R_k z) = R_k(Tz)$$

para todo $z \in \ell^2(\mathbb{Z})$ y todo $k \in \mathbb{Z}$.

También

$$\delta(n) = \begin{cases} 1, & n = 0 \\ 0, & n \neq 0 \end{cases}$$

para todo $n \in \mathbb{Z}$ es la función delta en $\ell^2(\mathbb{Z})$

Lema 3.2.2 *Supongamos que $T : \ell^2(\mathbb{Z}) \to \ell^2(\mathbb{Z})$ es una transformación lineal acotada invariante bajo traslaciones y sea $b \in \ell^2(\mathbb{Z})$ dado por $b = T(\delta)$ entonces para todo $z \in \ell^2(\mathbb{Z})$ se tiene que*

$$T(z) = b * z$$

Es decir si T es una transformación lineal invariante bajo traslación

$$Tz(n) = b * z(n) = (\widehat{b * z})\check{}(n) = (\widehat{b}\widehat{z})\check{}(n) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \widehat{b}(\theta)\widehat{z}(\theta)e^{-in\theta}d\theta$$

comparando con la primera ecuación de las propiedades que se satisfacen con la Transformada de Fourier

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \widehat{z}(\theta)e^{-in\theta}d\theta$$

es como si cambiáramos el término $\widehat{z}(\theta)$ por $\widehat{b}(\theta)\widehat{z}(\theta)$. En este sentido decimos que el sistema ortonormal completo de $\left\{e^{-in\theta}\right\}_{\theta \in [-\pi,\pi)}$ diagonaliza a T como lo hacia $\left\{e^{in\theta}\right\}$ en el caso de $L^2([-\pi,\pi))$ y F en el caso de $\ell^2(\mathbb{Z}_N)$

A manera de construir un análogo de las bases ondiculares de $\ell^2(\mathbb{Z}_N)$ en $\ell^2(\mathbb{Z})$ la siguiente definición nos muestran algunas propiedades de $\ell^2(\mathbb{Z})$

Definición 32 *Supongamos que $z \in \ell^2(\mathbb{Z})$ y que $n, k \in \mathbb{Z}$ la reflexión conjugada de z es*

$$\widetilde{z}(n) = \overline{z(-n)}$$

y también definimos el vector

$$z^* = (-1)^n z(n)$$

estas operaciones cumplen que

- $\widetilde{z}, z^*, R_k z \in \ell^2(\mathbb{Z})$ para toda $k \in \mathbb{Z}$ y todo $z \in \ell^2(\mathbb{Z})$
- $\widehat{\widetilde{z}}(\theta) = \overline{\widehat{z}(\theta)}$ para todo $z \in \ell^2(\mathbb{Z})$
- $\widehat{z^*}(\theta) = \widehat{z}(\theta + \pi)$ para todo $z \in \ell^2(\mathbb{Z})$
- $\widehat{R_k z}(\theta) = e^{ik\theta}\widehat{z}(\theta)$ para todo $z \in \ell^2(\mathbb{Z})$

- $\langle R_j z, R_k w\rangle = \langle z, R_{k-j} w\rangle$ para todo $j, k \in \mathbb{Z}$ para todo $z, w \in \ell^2(\mathbb{Z})$
- $\langle z, R_k w\rangle = z * \widetilde{w}(k)$ para todo $k \in \mathbb{Z}$ para todo $z, w \in \ell^2(\mathbb{Z})$
- $\widehat{\delta}(\theta) = 1$ para todo θ

La segunda parte de esta sección está enfocada en la construcción de una base ondicular para $\ell^2(\mathbb{Z})$. Básicamente ya hemos hecho la parte más difícil, la generalización del enfoque dado en $\ell^2(\mathbb{Z}_N)$ es natural salvo el detalle que ya hemos considerado en la convolución. El objetivo es demostrar el siguiente teorema

Teorema 3.2.3 *Supongamos que $u, v \in \ell^1(\mathbb{Z})$ entonces tenemos que*

$$B = \{R_{2k}u\}_{k\in\mathbb{Z}} \bigcup \{R_{2k}v\}_{k\in\mathbb{Z}}$$

es un sistema ortonormal completo en $\ell^2(\mathbb{Z})$ si y solo si la matriz de sistema

$$A(\theta) = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} \widehat{u}(\theta) & \widehat{v}(\theta) \\ \widehat{u}(\theta+\pi) & \widehat{v}(\theta+\pi) \end{bmatrix}$$

es unitaria para todo $\theta \in [0, \pi)$.

Prácticamente la diferencia es que ahora los generadores de la base están en $\ell^1(\mathbb{Z})$ y esto se debe a que si recordamos el algoritmo de análisis en las bases de $\ell^2(\mathbb{Z}_N)$ hay que hacer las convoluciones $u*z$ y $v*z$ sin embargo hemos visto que en el caso de $\ell^2(\mathbb{Z})$ no necesariamente se tiene que la convolución siga estando en $\ell^2(\mathbb{Z})$ por lo que al menos uno de los elementos a convolucionar deberá estar en $\ell^1(\mathbb{Z})$.

La demostración se basa en el siguiente lema

Lema 3.2.4 *Supongamos que $z, w \in \ell^1(\mathbb{Z})$*

- *El conjunto $\{R_{2k}w\}_{k\in\mathbb{Z}}$ es un sistema ortonormal si y solo si*

  $$|\widehat{w}(\theta)|^2 + |\widehat{w}(\theta+\pi)|^2 = 2$$

  para todo $\theta \in [0, \pi)$

- *Tenemos que*

  $$\langle R_{2k}z, R_{2j}w\rangle = 0$$

  para todo $k, j \in \mathbb{Z}$ si y solo si

  $$\widehat{z}(\theta)\overline{\widehat{w}(\theta)} + \widehat{z}(\theta+\pi)\overline{\widehat{w}(\theta+\pi)} = 0$$

  para todo $\theta \in [0, \pi)$

Demostración: Dado que el conjunto $\{R_{2k}w\}_{k\in\mathbb{Z}}$ es ortonormal si y solo si

$$\langle w, R_{2k}w\rangle = \begin{cases} 1, & k = 0 \\ 0, & k \neq 0 \end{cases}$$

basta con demostrar que

$$w * \widetilde{w} + (w * \widetilde{w})^* = 2\delta$$

puesto que

$$\langle w, R_{2k}w\rangle = \begin{cases} 1, & k=0 \\ 0, & k\neq 0 \end{cases}$$

si y solo si

$$w * \widetilde{w}(2k) = \begin{cases} 1, & k=0 \\ 0, & k\neq 0 \end{cases}$$

lo cual es equivalente a tener

$$w * \widetilde{w} + (w * \widetilde{w})^* = 2\delta$$

Obsérvese que si tomamos la Transformada de Fourier de esta última ecuación

$$w * \widetilde{w} + (w * \widetilde{w})^* = 2\delta$$

si y solo si

$$(w * \widetilde{w})\widehat{\ }(\theta) + ((w * \widetilde{w})^*)\widehat{\ }(\theta) = 2\widehat{\delta} = 2$$

para todo θ pero

$$(w * \widetilde{w})\widehat{\ }(\theta) = \widehat{w}(\theta)\widehat{\widetilde{w}(\theta)} = \widehat{w}(\theta)\overline{\widehat{w}(\theta)} = |\widehat{w}(\theta)|^2$$

y

$$(w * \widetilde{w})\widehat{\ }(\theta) = (w * \widetilde{w})\widehat{\ }(\theta+\pi) = |\widehat{w}(\theta+\pi)|^2$$

de donde se tiene que

$$w * \widetilde{w} + (w * \widetilde{w})^* = 2\delta$$

si y solo si

$$|\widehat{w}(\theta)|^2 + |\widehat{w}(\theta+\pi)|^2 = 2$$

así el conjunto $\{R_{2k}w\}_{k\in\mathbb{Z}}$ es ortonormal si y solo si

$$|\widehat{w}(\theta)|^2 + |\widehat{w}(\theta+\pi)|^2 = 2$$

finalmente dado que

$$|\widehat{w}(\theta)|^2 + |\widehat{w}(\theta+\pi)|^2 = 2$$

es periódica de periodo π el resultado es valido si y solo si se tiene para el intervalo $[0,\pi)$

Para demostrar la segunda parte basta observar que $(z * \widetilde{w}) + (z * \widetilde{w})^* = 0$ ya que

$$((z * \widetilde{w}) + (z * \widetilde{w})^*)(n) = \begin{cases} 2(z * \widetilde{w})(n) & n \text{ par} \\ 0 & n \text{ impar} \end{cases}$$

pero

$$\langle R_{2k}z, R_{2j}w\rangle = 0 \Longleftrightarrow \left\langle z, R_{2(j-k)}w\right\rangle = 0 \Longleftrightarrow z * \widetilde{w}(2(j-k)) = 0$$

es decir $(z * \widetilde{w})(n) = 0$ si n es par por lo que $(z * \widetilde{w}) + (z * \widetilde{w})^* = 0$ aplicando la Transformada de Fourier tenemos que

$$((z * \widetilde{w}) + (z * \widetilde{w})^*)\widehat{\ }(\theta) = (z * \widetilde{w})\widehat{\ }(\theta) + ((z * \widetilde{w})^*)\widehat{\ }(\theta) = \widehat{z}(\theta)\overline{\widehat{w}(\theta)} + \widehat{z}(\theta+\pi)\overline{\widehat{w}(\theta+\pi)} = 0$$

$\square$

Para la demostración del teorema tenemos que

Demostración: Queremos demostrar que $B = \{R_{2k}u\}_{k\in\mathbb{Z}} \cup \{R_{2k}v\}_{k\in\mathbb{Z}}$ es un sistema ortonormal tenemos que probar dos cosas que el conjunto es ortonormal y que es completo. Para demostrar que B es ortonormal tenemos por el lema anterior que $\{R_{2k}u\}_{k\in\mathbb{Z}}$ es ortonormal si y solo si

$$|\widehat{u}(\theta)|^2 + |\widehat{u}(\theta+\pi)|^2 = 2 \tag{3.1}$$

también por el lema anterior se tiene que $\{R_{2k}v\}_{k\in\mathbb{Z}}$ es ortonormal si y solo si

$$|\widehat{v}(\theta)|^2 + |\widehat{v}(\theta+\pi)|^2 = 2 \tag{3.2}$$

y $\{R_{2k}u\}_{k\in\mathbb{Z}} \cup \{R_{2k}v\}_{k\in\mathbb{Z}}$ es ortonormal si y solo si

$$\widehat{u}(\theta)\overline{\widehat{v}(\theta)} + \widehat{u}(\theta+\pi)\overline{\widehat{v}(\theta+\pi)} = 0 \tag{3.3}$$

pero las ecuaciones (3.1), (3.2) y (3.3) se cumplen si y solo si la matriz del sistema $A(\theta)$ es unitaria para todo θ por lo que B es ortonormal si y solo si $A(\theta)$ es unitaria para todo θ

Para demostrar la parte de la completes tenemos que probar que

$$\langle z, R_{2k}u\rangle = 0, \qquad \langle z, R_{2k}v\rangle = 0 \qquad \forall k\in\mathbb{Z}$$

implica que $z = 0$ es decir que el único elemento que cumple es el vector cero.

Pero dado que $z = v * U(D(z*\widetilde{v})) + u * U(D(z*\widetilde{u}))$ ya que

$$\begin{aligned}
&(v * U(D(z*\widetilde{v})) + u * U(D(z*\widetilde{u})))\widehat{\ }(\theta)\\
&= \widehat{v}(\theta)\frac{1}{2}\left[\widehat{z}(\theta)\overline{\widehat{v}(\theta)} + \widehat{z}(\theta+\pi)\overline{\widehat{v}(\theta+\pi)}\right] + \widehat{u}(\theta)\frac{1}{2}\left[\widehat{z}(\theta)\overline{\widehat{u}(\theta)} + \widehat{z}(\theta+\pi)\overline{\widehat{u}(\theta+\pi)}\right]\\
&= \widehat{z}(\theta)\frac{1}{2}\left[|\widehat{u}(\theta)|^2 + |\widehat{v}(\theta)|^2\right] + \widehat{z}(\theta+\pi)\frac{1}{2}\left[\widehat{u}(\theta)\overline{\widehat{u}(\theta+\pi)} + \widehat{v}(\theta)\overline{\widehat{v}(\theta+\pi)}\right]\\
&= \widehat{z}(\theta)
\end{aligned}$$

pues $A(\theta)$ es unitaria.

Y como $\langle z, R_{2k}u\rangle = D(z*\widetilde{u})(k)$ y $\langle z, R_{2k}v\rangle = D(z*\widetilde{v})(k)$ entonces

$$\langle z, R_{2k}u\rangle = 0, \qquad \langle z, R_{2k}v\rangle = 0 \qquad \forall k\in\mathbb{Z}$$

implica que

$$z = v * U(D(z*\widetilde{v})) + u * U(D(z*\widetilde{u})) = v * U(\langle z, R_{2k}v\rangle) + u * U(\langle z, R_{2k}u\rangle) = 0$$

y se tiene que B es un sistema ortonormal completo. □

De aquí podemos ver que el algoritmo para construir la base ondicular en el caso $\ell^2(\mathbb{Z}_N)$ se mantiene además otra propiedad importante se puede obtener a partir de las ideas de $\ell^2(\mathbb{Z}_N)$ el cual nos dice que basta con encontrar un solo vector generador pues su ondícula compañera se construye a partir del vector conocido y esto lo establece el siguiente lema

Lema 3.2.5 *Supongamos que $u \in \ell^1(\mathbb{Z})$ y que $\{R_{2k}u\}_{k\in\mathbb{Z}}$ es ortonormal en $\ell^2(\mathbb{Z})$ entonces el conjunto*

$$\{R_{2k}v\}_{k\in\mathbb{Z}} \cup \{R_{2k}u\}_{k\in\mathbb{Z}}$$

es un sistema ortonormal completo de $\ell^2(\mathbb{Z})$ donde

$$v(k) = (-1)^{k-1}\overline{u(1-k)}$$

Demostración: Para demostrar que el conjunto es ortonormal tenemos que probar que la matriz del sistema $A(\theta)$ es unitaria para todo θ o equivalentemente que se cumplen las ecuaciones

$$|\widehat{u}(\theta)|^2 + |\widehat{u}(\theta+\pi)|^2 = 2$$
$$|\widehat{v}(\theta)|^2 + |\widehat{v}(\theta+\pi)|^2 = 2$$
$$\widehat{u}(\theta)\overline{\widehat{v}(\theta)} + \widehat{u}(\theta+\pi)\overline{\widehat{v}(\theta+\pi)} = 0$$

primero calculemos observemos que por la definición de v se tiene que

$$\widehat{v}(\theta) = \sum_{k\in\mathbb{Z}}(-1)^{k-1}\overline{u(1-k)}e^{ik\theta} = \sum_{j\in\mathbb{Z}}(-1)^{-j}\overline{u(j)}e^{i(1-j)\theta}$$

haciendo $j = 1-k$ además si escribimos $(-1)^{-j} = (e^{i\pi})^{-j} = e^{-i\pi j}$ tenemos que

$$\widehat{v}(\theta) = \overline{\sum_{j\in\mathbb{Z}} e^{-i\pi}u(j)e^{ij(\theta+\pi)}} = e^{i\theta}\overline{\widehat{u}(\theta+\pi)}$$

y

$$\widehat{v}(\theta+\pi) = -e^{i\theta}\overline{\widehat{u}(\theta)}$$

de donde se tiene que la primera de las ecuaciones que queremos probar se da por que la hipótesis de que el conjunto $\{R_{2k}u\}_{k\in\mathbb{Z}}$ es ortonormal nos la da por otro lado la ecuación

$$|\widehat{v}(\theta)|^2 + |\widehat{v}(\theta+\pi)|^2 = 2$$

se da ya que

$$|\widehat{v}(\theta)|^2 + |\widehat{v}(\theta+\pi)|^2 = \left|e^{i\theta}\overline{\widehat{u}(\theta+\pi)}\right|^2 + \left|-e^{i\theta}\overline{\widehat{u}(\theta)}\right|^2 = |\widehat{u}(\theta+\pi)|^2 + |\widehat{u}(\theta)|^2 = 2$$

finalmente para la ecuación

$$\widehat{u}(\theta)\overline{\widehat{v}(\theta)} + \widehat{u}(\theta+\pi)\overline{\widehat{v}(\theta+\pi)} = 0$$

se tiene pues

$$\widehat{u}(\theta)\overline{\widehat{v}(\theta)} + \widehat{u}(\theta+\pi)\overline{\widehat{v}(\theta+\pi)} = \widehat{u}(\theta)\overline{\overline{\widehat{u}(\theta+\pi)}e^{i\theta}} - \widehat{u}(\theta+\pi)\overline{\overline{\widehat{u}(\theta)}e^{i\theta}} = \widehat{u}(\theta)\widehat{u}(\theta+\pi)e^{-i\theta} - \widehat{u}(\theta)\widehat{u}(\theta+\pi)e^{-i\theta} = 0$$

$\square$

Capítulo 4

Una extensión de las ondículas a los reales.

En este capítulo se busca la construcción de la ondículas en $\mathbb{R}$. Nos basaremos en los dos capítulos anteriores, es decir, definiremos el espacio de trabajo, definiremos la convolución, construiremos la Transformada de Fourier y usaremos lo anterior para la construcción de una base ondicular.

4.1. La Transformada de Fourier en $L^2(\mathbb{R})$

Empecemos por definir nuestro espacio de trabajo. Como antes trabajaremos con las funciones que son cuadrado integrables solo que ahora en todo los reales no solo en el intervalo $[-\pi, \pi)$ es decir en el conjunto

$$L^2(\mathbb{R}) = \left\{ f : \mathbb{R} \to \mathbb{C} \text{ con } \int_{\mathbb{R}} |f(x)|^2 \, dx < +\infty \right\}$$

$L^2(\mathbb{R})$ es un espacio de Hilbert con las operaciones usuales de suma y producto escalar definidas en funciones; el producto escalar y la norma están dadas por

$$\langle f, g \rangle = \int_{\mathbb{R}} f(x)\overline{g(x)}dx, \qquad \|f(x)\| = \left(\int_{\mathbb{R}} |f(x)|^2 \right)^{1/2}$$

y las desigualdades de Cauchy-Schwarz y del triángulo son

$$\left| \int_{\mathbb{R}} f(x)\overline{g(x)}dx \right| \leq \left(\int_{\mathbb{R}} |f(x)|^2 \right)^{1/2} \left(\int_{\mathbb{R}} |g(x)|^2 \right)^{1/2}$$

$$\left(\int_{\mathbb{R}} |f(x) + g(x)|^2 \right)^{1/2} \leq \left(\int_{\mathbb{R}} |f(x)|^2 \right)^{1/2} + \left(\int_{\mathbb{R}} |g(x)|^2 \right)^{1/2}$$

También consideramos el espacio de las funciones que convergen absolutamente en todo $\mathbb{R}$ por el conjunto

$$L^1(\mathbb{R}) = \left\{ f : \mathbb{R} \to \mathbb{C} \text{ con } \int_{\mathbb{R}} |f(x)| \, dx < +\infty \right\}$$

con la norma

$$\|f(x)\|_1 = \int_{\mathbb{R}} |f(x)|\, dx$$

y decimos que si $f \in L^1(\mathbb{R})$ es integrable.

La diferencia es que ahora no hay una contención entre los espacios $L^1(\mathbb{R})$ y $L^2(\mathbb{R})$. Además se presentaran ciertos aspectos delicados referentes a la convergencia de las integrales en el proceso pues estas deben cumplir la convergencia de $L^2(\mathbb{R})$.

Primero empecemos por la definición de la convolución que es una de las operaciones fundamentales en el estudio de la teoría de Fourier.

Definición 33 *Supongamos $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ de tal manera que*

$$\int_{\mathbb{R}} |f(x-y)\, g(y)|\, dy < \infty \tag{4.1}$$

para cualquier $x \in \mathbb{R}$. Entonces definimos la convolución de dichas funciones como sigue

$$f * g(x) = \int_{\mathbb{R}} f(x-y)\, g(y)\, dy$$

esta operación cumple con las siguientes propiedades

i. $f, g \in L^2(\mathbb{R}) \Rightarrow |f * g| \leq ||f||\, ||g||\, \forall x \in \mathbb{R}$

ii. $f, g \in L^1(\mathbb{R}) \Rightarrow ||f * g||_1 \leq ||f||_1\, ||g||_1\, \forall x \in \mathbb{R}$

iii. $f \in L^2(\mathbb{R}), g \in L^1(\mathbb{R}) \Rightarrow f * g \in L^2(\mathbb{R})$ y

$$||f * g|| \leq ||f||\, ||g||_1\, \forall x \in \mathbb{R}$$

Otras definiciones que se utilizan en la construcción de la Transformada de Fourier son la traslación y la reflexión conjugada

Definición 34 *Supongamos $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$, $y \in \mathbb{R}$. Definimos la traslación $R_y f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ como*

$$R_y f(x) = f(x-y).$$

También definamos la reflexión $\tilde{f} : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ como

$$\tilde{f}(x) = \overline{f(-x)}.$$

estas operaciones tienen la propiedad de

Si $f, g \in L^2(\mathbb{R})$ y además $x, y \in \mathbb{R}$ entonces

i. $\langle R_x f, R_y g\rangle = \langle f, R_{y-x} g\rangle$

ii. $\langle f, R_y g\rangle = f * \widetilde{g}(y)$

Dado que

$$\langle R_x f, R_y g\rangle = \int_{\mathbb{R}} R_x f(t)\overline{R_y g(t)} dt = \int_{\mathbb{R}} f(t-x)\overline{g(t-y)} dt$$

tomando el cambio de variable $u = t - x$

$$\langle R_x f, R_y g\rangle = \int_{\mathbb{R}} f(u)\overline{g(u+x-y)}du = \int_{\mathbb{R}} f(u)\overline{R_{y-x}g(u)}du = \langle f, R_{y-x}g\rangle$$

Y además

$$\langle f, R_y g\rangle = \int_{\mathbb{R}} f(x)\overline{R_y g(x)}dx = \int_{\mathbb{R}} f(x)\overline{g(x-y)}dx = \int_{\mathbb{R}} f(x)\widetilde{g}(y-x)dx = f * \widetilde{g}(y)$$

La convolución jugaba un papel importante en el estudio de la TDF tanto en $\ell^2(\mathbb{Z}_N)$ como en $\ell^2(\mathbb{Z})$ pues existía un elemento que llamamos delta δ que cumplía que $\delta * z = z$ pero en $L^2(\mathbb{R})$ no tenemos tal elemento, sin embargo si hay un análogo con dicha propiedad el conjunto conocido como identidad aproximada

Definición 35 *Una identidad aproximada es una familia de funciones* $\{g_t\}_{t>0}$ *donde*

$$g_t(x) = \frac{1}{t}g\left(\frac{x}{t}\right), \qquad t > 0$$

y $g : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ *es una función que cumple que*

$$|g(x)| \leq \frac{c_1}{(1+|x|)^2},\ \forall x \in \mathbb{R},\ c_1 > 0 \qquad y \qquad \int_{\mathbb{R}} g(x)dx = 1$$

a la función g_t se le conoce como la t-dilatación de g. El nombre de identidad aproximada se debe a que

$$\lim_{t\to 0^+} g_t * f(x) = f(x) \quad a.e\ x \in \mathbb{R}$$

esto si $f \in L^1(\mathbb{R})$

El estudio de las identidades aproximadas es fundamental para la definición de la Transformada de Fourier como se vera a continuación.

En base a la definición de la Transformada de Fourier en $\ell^2(\mathbb{Z}_N)$ y $\ell^2(\mathbb{Z})$ nos gustaría definir la Transformada de Fourier usando la expresión

$$\int_{\mathbb{R}} f(x)e^{-ix\xi}dx$$

sin embargo esta integral podría no converger en el espacio $L^2(\mathbb{R})$ pero si converge en el espacio $L^1(\mathbb{R})$ pues

$$\left|\int_R f(x)e^{-ix\xi}dx\right| \leq \int_R |f(x)|\, dx = \|f(x)\|_1$$

por lo que si es posible definir la Transformada de Fourier en $L^1(\mathbb{R})$ como

Definición 36 *Si* $f(x) \in L^1(\mathbb{R})$ *y* $\xi \in \mathbb{R}$ *definimos la Transformada de Fourier como al aplicación*

$$\widehat{\cdot} : L^1(\mathbb{R}) \to L^1(\mathbb{R})$$

dada por

$$\widehat{f}(\xi) = \int_R f(x)e^{-ix\xi}dx$$

y la Transformada de Fourier inversa como la aplicación

$$\check{} : L^1(\mathbb{R}) \to L^1(\mathbb{R})$$

dada por

$$\check{g}(x) = \frac{1}{2\pi}\int_R g(\xi)e^{ix\xi}d\xi$$

donde $g(x) \in L^1(\mathbb{R})$

Pero lo que nosotros buscamos es la definición en el espacio $L^2(\mathbb{R})$. La definición para $L^1(\mathbb{R})$ no esta del todo alejada del objetivo general ya que hay ciertos aspectos del espacio $L^1(\mathbb{R})$ que permiten describir a los elementos del espacio $L^2(\mathbb{R})$. Primero que nada existe un conjunto de funciones en $L^1(\mathbb{R})$ que son densas en $L^2(\mathbb{R})$, estas a su vez cumplen la definición de la Transformada de Fourier y nos ayudaran a definirán la Transformada de Fourier en $L^2(\mathbb{R})$, dichas funciones son

Definición 37 *El conjunto de funciones con soporte compacto son las funciones* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ *tal que la cerradura del conjunto* $\{x \in \mathbb{R} : f(x) \neq 0\}$ *es compacto*

En términos del teorema de Heine-Borel basta tener que la cerradura de

$$\{x \in \mathbb{R} : f(x) \neq 0\}$$

es acotado para que f sea de soporte compacto. Las funciones que son de interés son las de clase C^2 con soporte compacto ya que estas cumplen ser densas en $L^2(\mathbb{R})$, es decir si $f \in L^2(\mathbb{R})$ y $\epsilon > 0$ entonces existe g una función de clase C^2 con soporte compacto tal que

$$|f - g| < \epsilon$$

Las funciones de clase C^2 con soporte compacto a su vez son funciones del espacio $L^1(\mathbb{R})$ por lo que si $f \in L^2(\mathbb{R})$ existe una sucesión de funciones de clase C^2 con soporte compacto que aproximan a f es decir

$$f \in L^2(\mathbb{R}) \Rightarrow \exists\, \{f_n(x)\}_{n\in\mathbb{N}} \subset L^1(\mathbb{R}) : f_n \to^{n\to\infty} f$$

Más aun las funciones de clase C^2 de soporte compacto cumplen que su Transformada de Fourier pertenecen a $L^1(\mathbb{R})$ por lo que la Transformada de Fourier de una sucesión de funciones que convergen a $f \in L^2(\mathbb{R})$ también converge a una función de $L^2(\mathbb{R})$ y esperamos que sea a $\widehat{f}$ es decir

$$f \in L^2(\mathbb{R}) \Rightarrow \exists\, \{f_n(x)\}_{n\in\mathbb{N}} \subset L^1(\mathbb{R}) : f_n \to^{n\to\infty} f$$

y

$$\exists F \in L^2(\mathbb{R}) : \widehat{f_n} \to^{n\to\infty} F$$

El siguiente lema establece formalmente este echo y además especifica que la convergencia es independiente de la sucesión que se tome salvo un conjunto de medida cero

Lema 4.1.1 *Supongamos que* $f \in L^2(\mathbb{R})$ *y* $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ *es una sucesión de funciones en* $L^1(\mathbb{R})$ *que cumple dos cosas* $f_n, \widehat{f_n} \in L^1(\mathbb{R})$ *y* $f_n \to f$ *en* $L^2(\mathbb{R})$ *entonces se tiene que*

1. *$\{\widehat{f}_n\}_{n=1}^{\infty}$ converge en $L^2(\mathbb{R})$.*

2. *Si $\{g_n\}_{n=1}^{\infty}$ es otra sucesión que converge a f y $g_n, \widehat{g}_n \in L^1(\mathbb{R})$ entonces $\{\widehat{g}_n\}$ converge en $L^2(\mathbb{R})$ y además $\{\widehat{f}_n\}_{n=1}^{\infty}$ y $\{\widehat{g}_n\}_{n=1}^{\infty}$ convergen a la misma función a.e*

3. *Si $f \in L^1(\mathbb{R}) \cup L^2(\mathbb{R})$ y $F \in L^2(\mathbb{R})$ tal que $\{\widehat{f}_n\}_{n=1}^{\infty}$ converge a F entonces $F = \widehat{f}$*

Demostración: Para demostrar la primer parte del teorema basta probar que la sucesión $\{\widehat{f}_n\}_{n=1}^{\infty}$ es de Cauchy pues dado que $L^2(\mathbb{R})$ es de Hilbert se tiene el resultado. Por las hipótesis de que f_n y $\widehat{f}_n$ están en $L^1(\mathbb{R})$ se tiene que $\widehat{f}_n \in L^2(\mathbb{R})$ para toda n además por la desigualdad de Plancherel

$$\left\|\widehat{f}_n - \widehat{f}_m\right\| = \sqrt{2\pi}\,\|f_n - f_m\|$$

y como $\{f_n\}_{n=1^{\infty}}$ converge en $L^2(\mathbb{R})$ por hipótesis es de Cauchy por lo que si $\epsilon > 0$ y $n, m \in \mathbb{N}$ entonces

$$\left\|\widehat{f}_n - \widehat{f}_m\right\| < \sqrt{2\pi}\epsilon \quad \forall n, m > N$$

por lo que $\{\widehat{f}_n\}_{n=1}^{\infty}$ es de Cauchy y como $L^2(\mathbb{R})$ es de Hilbert entonces existe $F \in L^2(\mathbb{R})$ tal que $\widehat{f}_n \to F$.

Para la segunda parte se tiene que $\{\widehat{g}_n\}$ converge en $L^2(\mathbb{R})$ por las mismas razones que la primer parte además obsérvese que si $\widehat{f}_n \to F$ y $\widehat{g}_n \to G$ con $F, G \in L^2(\mathbb{R})$ entonces

$$\left\|F - \widehat{f}_n\right\| \to 0, \quad \|G - \widehat{g}_n\| \to 0, \quad n \to \infty$$

por lo que basta demostrar que

$$\left\|\widehat{f}_n - \widehat{g}_n\right\| \to 0, \quad n \to \infty$$

ya que por la desigualdad del triángulo

$$\|F - G\| \leq \left\|F - \widehat{f}_n\right\| + \left\|\widehat{f}_n - \widehat{g}_n\right\| + \|\widehat{g}_n - G\|$$

y si hacemos $n \to \infty$ $F = G$ a.e pero por la formula de Plancherel y la desigualdad del triángulo

$$\left\|\widehat{f}_n - \widehat{g}_n\right\| = \sqrt{2\pi}\,\|f_n - g_n\| \leq \sqrt{2\pi}\left(\|f_n - f\| + \|f - g_n\|\right)$$

y como $\{f_n\} \to f$ y $\{g_n\} \to g$ cuando $n \to \infty$ entonces

$$\left\|\widehat{f}_n - \widehat{g}_n\right\| \to 0, \quad n \to \infty$$

y se tiene que $F = G$ a.e

Finalmente para la tercera parte dado que $f \in L^2(\mathbb{R})$ podemos encontrar una sucesión $\{g_n\}_{n=1}^{\infty}$ de $L^1(\mathbb{R})$ que convergen a f en $L^2(\mathbb{R})$ con $\widehat{g}_n \in L^1(\mathbb{R})$ y $\{\widehat{g}_n\}$ converge a $F \in L^2(\mathbb{R})$ también como $f \in L^1(\mathbb{R})$

$$\|g_n - f\|_1 \to 0, \quad n \to \infty$$

esto implica que

$$\left|\widehat{g}_n(\xi) - \widehat{f}(\xi)\right| = \left|\int_{\mathbb{R}} (g_n(x) - f(x))\, e^{-ix\xi} dx\right| \leq \int_{\mathbb{R}} |g_n(x) - f(x)|\, dx, \quad \forall \xi$$

es decir que $\widehat{g}_n$ converge uniformemente a $\widehat{f}$ conforme $n \to \infty$ por lo que $F = \widehat{f}$ a.e $\square$

Esto nos ayuda a definir la Transformada de Fourier en $L^2(\mathbb{R})$ como

Definición 38 *Si $f \in L^2(\mathbb{R})$ definimos la transformada de Fourier en $L^2(\mathbb{R})$ de f como*

$$\widehat{f} = \lim_{n\to\infty} \widehat{f}_n$$

donde $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ es una sucesión de funciones de $L^1(\mathbb{R})$ que converge a f en $L^2(\mathbb{R})$ y tal que $\widehat{f}_n \in L^1(\mathbb{R})$ para todo n y así mismo la Transformada inversa de Fourier de f como el limite

$$\check{f} = \lim_{n\to\infty} \check{f}_n$$

Esta definición concuerda con la definición dada anteriormente para $L^1(\mathbb{R})$ cuando $f \in L^1(\mathbb{R}) \cup L^2(\mathbb{R})$ también puede verse que la definición no es puntual como en la definición en $L^1(\mathbb{R})$ si no más bien a una función como lo necesitamos.

Las principales propiedades de la transformada para $f, g \in L^2(\mathbb{R})$ son

1. Relación de Parseval $\left\langle \widehat{f}, \widehat{g} \right\rangle = 2\pi \langle f, g \rangle$
2. Fórmula de Plancherel $\left\| \widehat{f} \right\| = \sqrt{2\pi}\, \|f\|$
3. $\langle \check{f}, \check{g} \rangle = \frac{1}{2\pi} \langle f, g \rangle$
4. $\|\check{f}\| = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \|f\|$

lo cual nos permitirá quitarnos la dependencia de las funciones en $L^1(\mathbb{R})$ y poder utilizar cualquier tipo de funciones incluso en $L^2(\mathbb{R})$ esto es si $\{f_n\}$ es una sucesión de funciones en $L^2(\mathbb{R})$ que convergen a $f \in L^2(\mathbb{R})$ entonces por la formula de Plancherel

$$\left\| \widehat{f}_n - f \right\| = \sqrt{2\pi}\, \|f_n - f\| \to 0, \quad n \to \infty$$

y de igual manera para la Transformada de Fourier inversa con los cual podremos seguir trabajando con las propiedades de la Transformada como antes para la definición de las ondículas en $\mathbb{R}$ pues

$$f = (\check{f})\widehat{\ } = (\widehat{f})\check{\ }$$

además

1. $(f * g)\widehat{\ } = \widehat{f}\,\widehat{g}$
2. $f * (g * h) = (f * g) * h$
3. $(\widetilde{f})\widehat{\ }(\xi) = \overline{\widehat{f}(\xi)}$
4. $(R_y f)\widehat{\ }(\xi) = e^{-iy\xi}\widehat{f}(\xi) \quad$ a.e

Recordemos que una de las principales propiedades de la Transformada de Fourier era la diagonalización de la transformaciones invariantes bajo traslación y nos gustaría que así fuera también en este caso por lo que de la misma manera definimos

Definición 39 *Dada $T : L^2(\mathbb{R}) \to L^2(\mathbb{R})$ una transformación lineal decimos que T es invariante bajo traslación si para todo $y \in \mathbb{R}$ y para toda $f \in L^2(\mathbb{R})$ se cumple que*

$$T(R_y f) = R_y T(f)$$

Y esto es dado que cada transformación lineal acotada invariante bajo traslaciones T se puede definir como un operador convolución esto es que

$$Tf(x) = \widehat{b}(\xi)\widehat{f}(\xi)$$

utilizando la Transformada de Fourier Inversa

$$Tf(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{R}} \widehat{b}(\xi)\widehat{f}(\xi)d\xi$$

es decir en la base de Fourier la aplicación T se comporta multiplicando por $\widehat{b}(\xi)$ el coeficiente $\widehat{f}(\xi)$ y en este sentido se diagonaliza T respecto al sistema $\{e^{ix\xi}\}$.

Con estas herramientas de la transformada de Fourier pasaremos al estudio de las ondículas utilizando el análisis multiresolución que describimos a continuación.

4.2. Análisis multiresolución.

El propósito de está sección es dar las condiciones necesarias y suficientes para construir un sistema ondicular de $L^2(\mathbb{R})$. Un sistema ondicular se define como

Definición 40 *Un sistema ondicular de $L^2(\mathbb{R})$ es un conjunto ortonormal completo en $L^2(\mathbb{R})$ de la forma $\{\psi_{j,k}\}_{j,k\in\mathbb{Z}}$ donde*

$$\psi_{j,k} = 2^{j/2}\psi(2^j x - k)$$

para alguna función $\psi \in L^2(\mathbb{R})$. A las funciones $\psi_{j,k}$ se les conoce como ondículas.

Es decir vamos a considerar todas las traslaciones enteras dela función ψ así como las expansiones y contracciones tanto en el eje X como en el eje Y por un factor de 2^j y $2^{j/2}$ respectivamente.

A diferencia de los capítulos anteriores esta vez no nos será posible construir el sistema con argumentos similares a los dados para $\ell^2(\mathbb{Z}_N)$ y $\ell^2(\mathbb{Z})$. El problema es que en $L^2(\mathbb{R})$ no se tiene una función δ como se tenia en los espacios de las secciones anteriores. La característica de la función δ era que

$$\delta * z = z$$

esto es que actuaba como una identidad más aun las traslaciones de δ formaban un sistema ortonormal completo que nos partía el espacio de interés en dos subespacio con lo cual obteníamos un sistema ortonormal completo de la forma

$$\{R_{2k}u\}_{k\in\mathbb{Z}} \cup \{R_{2k}v\}_{k\in\mathbb{Z}}$$

En esta sección buscaremos hacer lo mismo aunque no hay tal función δ buscaremos reemplazar las traslaciones de una función φ por dos conjuntos de traslaciones de otros dos elementos. Esto será construir un análisis multiresolución definido como

Definición 41 *Un análisis multiresolución (AMR) es una sucesión de subespacios $\{V_j\}_{j\in\mathbb{Z}}$ de $L^2(\mathbb{R})$ que*

1. *La sucesión de subespacios es creciente $V_j \subseteq V_{j+1}$ para todo $j \in \mathbb{Z}$*

2. *Existe una función* $\varphi \in V_0$ *tal que el el conjunto* $\{\varphi_{0,k}\}_{k\in\mathbb{Z}}$ *es ortonormal en* $L^2(\mathbb{R})$ *donde*
$$V_0 = \left\{ \sum_{k\in\mathbb{Z}} z(k)\varphi_{0,k} : z = (z(k))_{k\in\mathbb{Z}} \in \ell^2(\mathbb{Z}_N) \right\}$$
a la función φ *se le conoce como función de escala.*

3. *Para cada* j*,* $f(x) \in V_0$ *si y solo si* $f(2^j x) \in V_j$*.*

4. $\bigcap_{j\in\mathbb{Z}} V_j = \{0\}$*.*

5. $\bigcup_{j\in\mathbb{Z}} V_j$ *es denso en* $L^2(\mathbb{R})$*.*

Lo que nos gustaría demostrar es que un análisis multiresolución genera un sistema ortonormal completo para $L^2(\mathbb{R})$. La primera clave es que dado un análisis multiresolución con función de escala φ tenemos que los conjuntos V_j están dados por

$$V_j = \left\{ \sum_{k\in\mathbb{Z}} z(k)\varphi_{j,k} : z = (z(k))_{k\in\mathbb{Z}} \in \ell^2(\mathbb{Z}) \right\}$$

cada uno de ellos con un sistema ortonormal completo $\{\varphi_{jk}\}_{j,k\in\mathbb{Z}}$ esto se debe a que como $\{\varphi_{0,k}\}_{k\in\mathbb{Z}}$ es un sistema ortonormal completo de V_0 entonces

$$\langle \varphi_{j,k}, \varphi_{j,k'} \rangle = \int_{\mathbb{R}} \varphi_{j,k}(x)\overline{\varphi_{j,k'}(x)}dx = \int_R 2^{j/2}\varphi(2^j x - k)\overline{2^{j/2}\varphi(2^j x - k')}dx$$

que con el cambio de variable $u = 2^j x$ nos queda que

$$\int_R \varphi(u-k)\overline{\varphi(u-k')}du = \langle \varphi_{0,k}, \varphi_{0,k'} \rangle = \left\{ \begin{array}{ll} 1, & k = k' \\ 0, & k \neq k' \end{array} \right.$$

es decir
$$\langle \varphi_{j,k}, \varphi_{j,k'} \rangle = \langle \varphi_{0,k}, \varphi_{0,k'} \rangle$$
por lo que $\{\varphi_{jk}\}_{j,k\in\mathbb{Z}}$ es ortonormal dado que $\{\varphi_{0,k}\}_{k\in\mathbb{Z}}$ es ortonormal. Más aun, el conjunto $\{\varphi_{jk}\}_{j,k\in\mathbb{Z}}$ es completo debido a que como el conjunto $\{V_j\}_{j\in\mathbb{Z}}$ es un AMR se cumple que $f(x) \in V_0 \Leftrightarrow f(2^j x) \in V_j$ pero

$$f(x) \in V_0 \Rightarrow f(x) = \sum_{k\in\mathbb{Z}} u(k)\varphi_{0,k}(x) = \sum_{k\in\mathbb{Z}} u(k)\varphi(x-k)$$

luego
$$f(2^j x) = \sum_{k\in\mathbb{Z}} u(k)\varphi(2^j x - k) = \sum_{k\in\mathbb{Z}} u(k)2^{j/2}\varphi_{j,k}(x)$$

y $f(2^j x) \in V_j$ entonces

$$V_j = \left\{ \sum_{k\in\mathbb{Z}} z(k)\varphi_{j,k} : z = (z(k))_{k\in\mathbb{Z}} \in \ell^2(\mathbb{Z}) \right\}$$

Uno pensaría que la unión de tales sistemas ortonormales

$$\bigcup_{j,k\in\mathbb{Z}} \{\varphi_{jk}\}_{j,k\in\mathbb{Z}}$$

es una sistema ondicular de $L^2(\mathbb{R})$, el problema es que la unión de sistemas ortonormales no es necesariamente ortonormal pues dado que al ser análisis multiresolución con función de escala φ se tiene que $\varphi \in V_0$ y $V_0 \subset V_1$ de donde $\varphi \in V_1$ por lo que

$$\varphi(x) = \sum_{k\in\mathbb{Z}} u(k)\varphi_{1,k}(x) = \sum_{k\in\mathbb{Z}} u(k)\sqrt{2}\varphi(2x-k)$$

que se conoce como la la ecuación de escala y donde $(u(k))_{k\in\mathbb{Z}}$ se conoce como la sucesión de escala. Puesto que $\{\varphi_{jk}\}_{j,k\in\mathbb{Z}}$ es sistema ortonormal completo para $L^2(\mathbb{R})$ se tiene que

$$u(k) = \langle \varphi, \varphi_{1,k} \rangle$$

además $\varphi = \varphi_{0,0}$ entonces

$$u(k) = \langle \varphi, \varphi_{1,k} \rangle = \langle \varphi_{0,0}, \varphi_{1,k} \rangle$$

finalmente como $\phi(x)$ no es idénticamente cero se tiene que existe al menos uno de los producto internos

$$\langle \varphi_{0,0}, \varphi_{1,k} \rangle$$

que no es cero por lo que la unión de sistemas ortonormales completos de cada V_j dado por $\{\varphi_{j,k}\}_{j,k\in\mathbb{Z}}$ no es ortogonal (para ser más preciso ortogonal a diferentes niveles j). A pesar de que el panorama no pinta bien para construir un sistema ondicular de $L^2(\mathbb{R})$ el siguiente lema nos da luz para seguir adelante

Lema 4.2.1 *Si $\{V_j\}$ es un análisis multiresolución con función de escala φ y sucesión de escala u entonces $\{R_{2k}u\}_{k\in\mathbb{Z}}$ es un conjunto orotnormal en $\ell^2(\mathbb{Z})$*

Demostración: La demostración se basa en el manejo de conjuntos ortonormales en $\ell^2(\mathbb{Z})$, esto es que el sistema $\{R_{2k}u\}_{k\in\mathbb{Z}}$ es ortonormal en $\ell^2(\mathbb{Z})$ si y solo si se cumple que

$$\langle u, R_{2k}u \rangle = \begin{cases} 1, & k = 0 \\ 0, & k \neq 0 \end{cases}$$

Pero esta última ecuación es cierta ya que

$$\varphi(x) = \sum_{k\in\mathbb{Z}} u(k)\sqrt{2}\varphi(2x-k)$$

implica que

$$\varphi_{0,i} = \varphi(x-i) = \sum_{k\in\mathbb{Z}} u(k)\sqrt{2}\varphi(2(x-i)-k) = \sum_{m\in\mathbb{Z}} u(m-2i)\sqrt{2}\varphi(2x-m)$$

haciendo $m = 2i + k$ luego

$$\begin{aligned}
\langle \varphi, \varphi_{0,i} \rangle &= \left\langle \sum_{j\in\mathbb{Z}} u(j)\varphi_{1,j}, \sum_{m\in\mathbb{Z}} u(m-2i)\varphi_{1,m} \right\rangle &(4.2)\\
&= \sum_{j\in\mathbb{Z}}\sum_{m\in\mathbb{Z}} u(j)\overline{u(m-2i)}\, \langle \varphi_{1,j}, \varphi_{1,m} \rangle &(4.3)\\
&= \sum_{j\in\mathbb{Z}} u(j)\overline{u(j-2i)} &(4.4)\\
&= \langle u, R_{2i}u \rangle &(4.5)
\end{aligned}$$

pues $\{\varphi_{1,k}\}$ es ortonormal de donde $\langle u, R_{2k} \rangle = \langle \varphi, \varphi_{0,k} \rangle$ pero $\{\varphi_{0,k}\}$ es ortogonal por lo que

$$\langle u, R_{2k}u \rangle = \begin{cases} 1, & k = 0 \\ 0, & k \neq 0 \end{cases}$$

con lo que se concluye que un análisis multiresolución genera un conjunto ortonormal en $\ell^2(\mathbb{Z})$ □

Además la sucesión de escala $(u(k))_{k\in\mathbb{Z}}$, por ser un conjunto ortonormal de $\ell^2(\mathbb{Z})$, tiene una compañera $v \in \ell^2(\mathbb{Z})$ tal que entre ellas dos (u y v) generan una sistema ondicular de primera etapa para $\ell^2(\mathbb{Z})$. De la misma manera que hicimos con u podemos proceder y considerar

$$\psi(x) = \sum_{k\in\mathbb{Z}} v(k)\varphi_{1,k}(x) = \sum_{k\in\mathbb{Z}} v(k)\sqrt{2}\varphi(2x-k)$$

tal que $\{\psi_{0,k}\}_{k\in\mathbb{Z}}$ es un conjunto ortonormal de $L^2(\mathbb{R})$ y el conjunto

$$W_0 = \left\{ \sum_{k\in\mathbb{Z}} z(k)\psi_{0,k} : z = (z(k))_{k\in\mathbb{Z}} \in \ell^2(\mathbb{Z}) \right\}$$

tiene la propiedad que $V_1 = V_0 \oplus W_0$.

El siguiente teorema es uno de los teoremas más importantes ya que muestra como la compañera v de u genera un sistema ondicular de $L^2(\mathbb{R})$ y más aun marca una manera como un AMR nos ayuda a la construcción de un sistema ondicular en $L^2(\mathbb{R})$

Teorema 4.2.2 (Teorema de Mallat) *Supongamos que $\{V_j\}$ es un análisis multiresolución con función de escala φ y sucesión de escala $u = (u(k))_{k\in\mathbb{Z}} \in \ell^1(\mathbb{Z})$ y sean $v = (v(k))_{k\in\mathbb{Z}}$ y $\psi(x)$ dadas por*

$$v(k) = (-1)^{k-1}\overline{u(1-k)}, \quad \psi(x) = \sum_{k\in\mathbb{Z}} v(k)\varphi_{1,k}(x) = \sum_{k\in\mathbb{Z}} v(k)\sqrt{2}\varphi(2x-k)$$

entonces $\{\psi_{j,k}\}_{j,k\in\mathbb{Z}}$ es un sistema ortonormal de $L^2(\mathbb{R})$

Es decir que la manera de genera un sistema ondicular de $L^2(\mathbb{R})$ a partir de un AMR es considerar la sucesión de escala asociada a φ, la cual estará en $\ell^2(\mathbb{Z})$ y construir su compañera v en $\ell^2(\mathbb{Z})$ después regresar a $L^2(\mathbb{R})$ construyendo ψ y sus traslaciones nos darán un sistema ondicular de $L^2(\mathbb{R})$ más aun este proceso nos parte el espacio V_1 en dos espacios más pequeños.

Aunque hemos visto que un AMR nos genera una base ondicular de $\ell^2(\mathbb{Z}_N)$ parece no ser practico construir una AMR. A continuación buscaremos una manera de construir un AMR construyendo solo una función que satisfaga ciertas condiciones (o equivalentemente un elemento de $\ell^2(\mathbb{Z})$ con ciertas propiedades).

Lo primero que hay que observar es que parece que podemos prescindir de la función φ ya que al tener $u \in \ell^2(\mathbb{Z})$ que satisfaga la ecuación escalar podemos encontrar su compañera $v \in \ell^2(\mathbb{Z})$ tal que u y v nos generen una base ondicular de $\ell^2(\mathbb{Z})$ y después considerar

$$\psi(x) = \sum_k v(k)\varphi_{1,k}(x)$$

sin embargo esto implica conocer la función φ por lo que es necesario encontrar una función que nos satisfaga la ecuación de escala

$$\varphi(x) = \sum_{k\in\mathbb{Z}} u(k)\varphi_{1,k}(x) = \sum_{k\in\mathbb{Z}} u(k)\sqrt{2}\varphi(2x-k)$$

si aplicamos la Transformada de Fourier a la ecuación de escala tenemos que

$$\widehat{\varphi}(\xi) = \sum_{k\in\mathbb{Z}} u(k)\widehat{\varphi_{1,k}}(\xi)$$

pero por definición de la transformada de Fourier

$$\begin{aligned}
\widehat{\varphi_{1,k}}(\xi) &= \int_{\mathbb{R}} \varphi_{1,k}(x)e^{-ix\xi}dx \\
&= \int_{\mathbb{R}} \sqrt{2}\varphi(2x-k)e^{-ix\xi}dx \\
&= \frac{\sqrt{2}}{2}\int_{\mathbb{R}} \varphi(u)e^{-i(\frac{u+k}{2})\xi}du \\
&= \frac{1}{\sqrt{2}}e^{-ik\xi/2}\int_{\mathbb{R}} \varphi(u)e^{-iu\xi/2}du \\
&= \frac{e^{-ik\xi/2}}{\sqrt{2}}\widehat{\varphi}\left(\frac{\xi}{2}\right)
\end{aligned}$$

tomando $u = 2x - k$ de donde se tiene que

$$\widehat{\varphi}(\xi) = \frac{1}{\sqrt{2}}\sum_{k\in\mathbb{Z}} u(k)e^{-ik\xi/2}\widehat{\varphi}\left(\frac{\xi}{2}\right)$$

equivalentemente

$$\widehat{\varphi}(\xi) = m_0\left(\frac{\xi}{2}\right)\widehat{\varphi}\left(\frac{\xi}{2}\right)$$

donde

$$m_0(\xi) = \frac{1}{\sqrt{2}}\sum_{k\in\mathbb{Z}} u(k)e^{-ik\xi}$$

o también

$$u(k) = \frac{\sqrt{2}}{2\pi}\int_{\pi}^{\pi} m_0(\xi)e^{ik\xi}d\xi = \sqrt{2}\check{m}_0(-k)$$

análogamente

$$\widehat{\varphi}\left(\frac{\xi}{2}\right) = m_0\left(\frac{\xi}{4}\right)\widehat{\varphi}\left(\frac{\xi}{4}\right)$$

de donde

$$\widehat{\varphi}(\xi) = m_0\left(\frac{\xi}{2}\right)m_0\left(\frac{\xi}{4}\right)\widehat{\varphi}\left(\frac{\xi}{4}\right)$$

e inductivamente

$$\widehat{\varphi}(\xi) = \widehat{\varphi}(0)\prod_{n=1}^{\infty} m_0\left(\frac{\xi}{2^n}\right)$$

Siempre y cuando el producto $\prod_{n=1}^{\infty} m_0(\frac{\xi}{2^n})$ converja. Una condición para que esto pase es que la función $m_0 : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ satisfaga que

$$m_0(0) = 1, \quad |m_0(\xi)| \leq 1 \ \forall \xi \in \mathbb{R}, \quad |m_0(\xi) - m_0(0)| \leq C\,|\xi|^{\delta} \ \ \forall \xi \in \mathbb{R}$$

siempre que existan $\delta > 0$ y $C < \infty$ constantes.

Esto es podemos encontrar tal función $\varphi(x)$ siempre y cuando se cumplan las condiciones anteriores para m_0. La condición $m_0(0) = 1$ se debe al hecho de que

$$\widehat{\varphi}(0) = m_0(0)\widehat{\varphi}(0)$$

por la definición de $\widehat{\varphi}(\xi)$ y dado que buscamos una solución no trivial de la ecuación escalar, esto es que $\widehat{\varphi}(0) \neq 0$ de lo contrario $\varphi(x) = 0$ para todo x y la función idénticamente cero no genera un AMR.

El hecho de pedir que $|m_0(\xi)| \leq 1$ se tiene de manera inmediata ya que por definición de la TDF $m_0(\xi) = \frac{1}{\sqrt{2}}\sum_{k\in\mathbb{Z}} u(v)e^{-ik\xi} = \frac{1}{\sqrt{2}}\widehat{u}(-\xi)$ además $u \in \ell^2(\mathbb{Z})$ cumple la ecuación escalar por lo que $\{R_{2k}u\}_{k\in\mathbb{Z}}$ es un conjunto ortonormal en $\ell^2(\mathbb{Z})$ esto implica que

$$|\widehat{u}(\theta)|^2 + |\widehat{u}(\theta+\pi)|^2 = 2 \Rightarrow |m_0(\xi)|^2 + |m_0(\xi+\pi)|^2 = 1$$

Finalmente la búsqueda de φ sera única salvo un múltiplo constante a saber $\widehat{\varphi}(0)$ que más adelante veremos que se cumple que $\widehat{\varphi}(0) = 1$ y se reduce a encontrar cierta $m_0 : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ con algunas propiedades que nos permitirán encontrar φ en términos de m_0 para encontrar el AMR respectivo. Obsérvese que m_0 depende de u y podemos formular nuestro resultado en términos de u ya que

$$m_0(0) = 1 \Leftrightarrow \sum_{k\in\mathbb{Z}} u(k) = \sqrt{2}$$

por la discusión anterior

$$|m_0(\xi)| \leq 1 \Leftrightarrow \{R_{2k}u\}_{k\in\mathbb{Z}} \text{ ortonormal en } \ell^2(\mathbb{Z})$$

lo único que faltaría es el análogo de la propiedad

$$|m_0(\xi) - m_0(0)| \leq C\,|\xi|^{\delta}$$

para toda $\xi \in \mathbb{R}$ esto ocurre cuando $\sum_{k\in\mathbb{Z}} |k|^\epsilon |u(k)| < +\infty$ para algún $\epsilon > 0$ puesto que

$$\begin{aligned}
|m_0(\xi) - m_0(0)| &= \frac{1}{\sqrt{2}} \left| \sum_{k\in\mathbb{Z}} u(k)e^{-ik\xi} - \sum_{k\in\mathbb{Z}} u(k) \right| \\
&\leq \frac{1}{\sqrt{2}} \sum_{k\in\mathbb{Z}} |u(k)| \left| e^{-ik\xi} - 1 \right| \\
&\leq \frac{1}{\sqrt{2}} \sum_{|k|\leq 1/|\xi|} |u(k)| \, |k\xi| + \frac{1}{\sqrt{2}} \sum_{|k|>1/|\xi|} 2 \, |u(k)| \\
&\leq \frac{1}{\sqrt{2}} \sum_{|k|\leq 1/|\xi|} |u(k)| \, |k\xi|^\delta + \sqrt{2} \sum_{|k|>1/|\xi|} |u(k)| \, |k\xi|^\delta \\
&\leq \sqrt{2} \sum_{k\in\mathbb{Z}} |u(k)| \, |k|^\epsilon \, |\xi|^\delta
\end{aligned}$$

tomando $C = \sqrt{2} \sum_{k\in\mathbb{Z}} |u(k)| \, |k|^\epsilon$ y $\delta = min\{1, \epsilon\}$

Hasta ahora lo que hemos establecido es que podemos resolver la ecuación escalar y encontrar una función $\varphi(x)$ que genera un AMR definida por la Transformada de Fourier inversa de $\widehat{\varphi}(\xi) = \prod_{j=1}^{\infty} m_0(\xi/2^j)$ y cumple que

1. $\widehat{\varphi} \in L^2(\mathbb{R})$ y es continua en cero.
2. $\widehat{\varphi}(\xi) = m_0(\xi/2)\widehat{\varphi}(\xi/2) \ \forall \xi \in \mathbb{R}$
3. si $u \in \ell^1(\mathbb{Z})$ entonces se cumple la ecuación escalar.

encontrando una función $m_0 : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ que satisfaga

1. m_0 es periódica de periodo 2π
2. $m_0(0) = 1$
3. $|m_0(\xi) - m_0(0)| \leq |\epsilon|^\delta \quad \forall \xi \in \mathbb{R}$
4. $|m_0(\xi)|^2 + |m_0(\xi + \pi)|^2 = 1 \quad \forall \xi$

o equivalentemente en términos de u que cumple

1. $\{R_{2k}u\}_{k\in\mathbb{Z}}$ es ortonormal en $\ell^2(\mathbb{Z})$
2. $\sum_{k\in\mathbb{Z}} u(k) = \sqrt{2}$
3. $\sum_{k\in\mathbb{Z}} |k|^\epsilon |u(k)| < \infty$ para algún $\epsilon > 0$

Regresando a la idea original buscamos φ que nos satisface la ecuación de escala y con ella encontramos u de donde se desprende su compañera $v \in \ell^2(\mathbb{Z})$ dada por

$$v(k) = (-1)^{k-1}\overline{u(1-k)}$$

esta nos genera $\psi(x) = \sum_{k\in\mathbb{Z}} v(k)\varphi_{1,k}(x)$.

Dos cosas nos faltan por demostrar, una es que las traslaciones de esta función forman un conjunto ortonormal de $L^2(\mathbb{R})$ y que los conjuntos V_j formados por la construcción cumplen con la definición de AMR.

Empecemos por ver que las traslaciones son un conjunto ortonormal. Al igual que en el caso de la transformada de Fourier el argumento es una sucesión de funciones que convergen a φ y cada una de ellas cumple que el conjunto de sus traslaciones forman un conjunto ortonormal de $L^2(\mathbb{R})$; esto es si

$$\widehat{\varphi}(\xi) = \lim_{n\to\infty} \prod_{j=1}^{n} m_0\left(\frac{\xi}{2^j}\right)$$

definiendo $\varphi = (\widehat{\varphi})\check{}$ tenemos que el conjunto $\{\varphi_{0,k}\}_{k\in\mathbb{Z}}$ es ortonormal en $L^2(\mathbb{R})$ siempre y cuando $m_0 : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ sea una función periódica de periodo 2π y cumpla que $m_0(0) = 1$, $|m_0(\xi) - m_0(0)| \leq C\,|\xi|^\delta$ para todo $\xi \in \mathbb{R}$, $|m_0(\xi)|^2 + |m_0(\xi+\pi)|^2 = 1$ para todo $\xi \in \mathbb{R}$ y

$$\inf_{|\xi|\leq\pi/2} |m_0(\xi)| > 0$$

pues estas condiciones aseguran que si $\varphi = (\widehat{\varphi})\check{}$ y

$$\widehat{\varphi}(\xi) = \lim_{n\to\infty} \widehat{\varphi}_n(\xi)$$

donde

$$\widehat{\varphi}_n(\xi) = \begin{cases} \prod_{j=1}^{n} m_0\left(\frac{\xi}{2^j}\right), & \xi \in [-2^n\pi, 2^n\pi) \\ 0, & \xi \notin [-2^n\pi, 2^n\pi) \end{cases}$$

el conjunto de traslaciones $\{(\varphi_n)_{0,k}\}$ para cada n es ortonomal en $L^2(\mathbb{R})$ donde la noción de ortonormalidad de un función $\varphi(x) \in L^2(\mathbb{R})$ es equivalente a

$$\int_{\mathbb{R}} |\widehat{\varphi}(\xi)|^2 e^{ik\xi} d\xi = \begin{cases} 2\pi, & k = 0 \\ 0, & k \neq 0 \end{cases}$$

o equivalentemente

$$\sum_{k\in\mathbb{Z}} |\widehat{\varphi}(\xi + 2\pi k)|^2 = 1 \quad \text{a.e}$$

Obsérvese que si $\{\widehat{\varphi_n}(\xi)\}_{n\in\mathbb{N}}$ es una sucesión que converge a $\widehat{\varphi}(\xi)$ y

$$\int_{\mathbb{R}} |\widehat{\varphi}(\xi)|^2 e^{ik\xi} d\xi = \lim_{n\to\infty} \int_{\mathbb{R}} |\widehat{\varphi_n}(\xi)|^2 e^{ik\xi} d\xi$$

entonces $\{\varphi_{0,k}(\xi)\}_{k\in\mathbb{Z}}$ es ortonormal en $L^2(\mathbb{R})$ dado que

$$\lim_{n\to\infty} \int_{\mathbb{R}} |\widehat{\varphi_n}(\xi)|^2 e^{ik\xi} d\xi = \lim_{n\to\infty} \begin{cases} 2\pi, & k = 0 \\ 0, & k \neq 0 \end{cases} = \begin{cases} 2\pi, & k = 0 \\ 0, & k \neq 0 \end{cases}$$

el siguiente lema resume las condiciones necesarias para que lo anterior suceda basado en el Teorema de Convergencia Dominada que nos permite intercambiar la integral con el límite

Lema 4.2.3 *Si* $m_0 : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ *es periódica de periodo* 2π *y cumple que* $m_0(0) = 1$, $|m_0(\xi) - m_0(0)| \leq C|\xi|^\delta$ *para todo* $\xi \in \mathbb{R}$, $|m_0(\xi)|^2 + |m_0(\xi + \pi)|^2 = 1$ *para todo* $\xi \in \mathbb{R}$ *y*

$$\inf_{|\xi| \leq \pi/2} |m_0(\xi)| > 0$$

entonces el conjunto $\{\varphi_{0,k}\}_{k\in\mathbb{Z}}$ *es ortonormal en* $L^2(\mathbb{R})$ *donde* φ *es la Transformada de Fourier inversa de*

$$\widehat{\varphi}(\xi) = \prod_{j=1}^{\infty} m_0\left(\frac{\xi}{2^j}\right)$$

En resumen tenemos dos maneras de construir un AMR ya sea buscando una función m_0 que satisfaga ciertas condiciones

Teorema 4.2.4 *Si* $m_0 : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ *es una función periódica de periodo* 2π *y cumple que*

1. $|m_0(\xi)|^2 + |m_0(\xi + \pi)|^2 = 1$ *para toda* $\xi \in \mathbb{R}$
2. $m_0(0) = 1$
3. $|m_0(\xi) - m_0(0)| \leq C|\xi|^\delta$, *para algún* $\delta > 0$
4. $\inf_{|\xi| \leq \pi/2} |m_0(\xi)| > 0$

y tomando $u(k) = \sqrt{2}\check{m}_0(-k)$, $\varphi = (\widehat{\varphi})\check{}$ *con*

$$\widehat{\varphi}(\xi) = \prod_{j=1}^{\infty} m_0\left(\frac{\xi}{2^j}\right)$$

se tiene que φ *satisface que la familia de conjuntos* $\{V_j\}_{j\in\mathbb{Z}}$ *es un AMR donde*

$$V_j = \left\{\sum_{k\in\mathbb{Z}} z(k)\varphi_{j,k} : z = (z(k))_{k\in\mathbb{Z}} \in \ell^2(\mathbb{Z})\right\}$$

o en términos de un elemento u que satisfaga ciertas condiciones equivalentes al teorema anterior condiciones

Teorema 4.2.5 *Si* $u = (u(k))_{k\in\mathbb{Z}} \in \ell^2(\mathbb{Z})$ *cumple que*

1. $\sum_{k\in\mathbb{Z}} |k|^\epsilon |u(k)| < +\infty$ *para algún* $\epsilon > 0$
2. $\sum_{k\in\mathbb{Z}} u(k) = \sqrt{2}$
3. $\{R_{2k}u\}_{k\in\mathbb{Z}}$ *es un conjunto ortonormal en* $\ell^2(\mathbb{Z})$
4. *Si* $m_0(\xi) = \frac{1}{\sqrt{2}} \sum_{k\in\mathbb{Z}} u(k)e^{-ik\xi}$ *entonces* $\inf_{|\xi|<\pi/2} |m_0(\xi)| > 0$

si hacemos $\varphi = (\widehat{\varphi})\check{}$ *con*

$$\widehat{\varphi}(\xi) = \prod_{j=1}^{\infty} m_0\left(\frac{\xi}{2^j}\right)$$

se tiene que φ *satisface que la familia de conjuntos* $\{V_j\}_{j\in\mathbb{Z}}$ *es un AMR donde*

$$V_j = \left\{\sum_{k\in\mathbb{Z}} z(k)\varphi_{j,k} : z = (z(k))_{k\in\mathbb{Z}} \in \ell^2(\mathbb{Z})\right\}$$

Capítulo 5

Aplicaciones de las ondículas

El objetivo de este capítulo es estudiar la aplicación de las bases ondiculares en el método numérico de Galerkin para la resolución de ecuaciones diferenciales, método conocido como Wavelet-Galerkin y las ventajas que este método genera.

5.1. Nociones previas

Existen métodos de solución de ecuaciones diferenciales que llevan a la solución de sistemas de ecuaciones algebraicos así la solución de la ecuación diferencial esta relacionada con el comportamiento de la solución del sistema y en muchos casos la solución del sistema algebraico es susceptible a variaciones de los datos iniciales (es decir problemas mal planteados) por lo que una de las condiciones que nos gustaría tener en un método de solución de ecuaciones diferenciales es que el sistema algebraico sea bien condicionado es decir que las soluciones que arroja el sistema no se vean afectadas por variaciones en los datos iniciales; más aun sería muy útil tener un sistema cuya matriz de coeficientes sea operable desde el punto de vista computacional esto es que tenga muchos ceros. Este tipo de problemas son cubiertos por las bases ondiculares como veremos a continuación.

Primero veamos la susceptibilidad a los datos iniciales en el sistema. Una manera de medir que tan bien condicionado es el sistema es mediante el número de condición de la matriz que se denota como $C_{\#}(A)$ y esta definido como

$$C_{\#}(A) = \|A\| \left\|A^{-1}\right\|$$

que a su vez esta en función de los valores propios de la matriz de coeficientes del sistema pues se puede probar que

$$C_{\#}(A) = \frac{|\lambda|_{\text{máx}}}{|\lambda|_{\text{mín}}}$$

Pensemos por ejemplo en un problema de frontera básico $-u''(t) = f(t)$ con $u(0) = 0$ y $u(1) = 0$ dicha solución es relativamente fácil de calcular siempre y cuando se conozca el comportamiento de f; el método de diferencias finitas establece que una manera de aproximar la solución de sistema es discretizar el dominio de la función y aproximar los valores de dicha función en los puntos previamente establecidos del dominio esto es buscamos los valores u_j donde

$$u_j(t) = u(t_j) \text{ con } t_j = \frac{1}{N}$$

esto nos lleva a transforma el problema de resolver la ecuación diferencial

$$-u''(t) = f(t), \quad u(0) = 0, \quad u(1) = 0$$

al de encontrar valores $u_j = u\left(\frac{j}{N}\right)$ del sistema

$$\begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 & \cdot & \cdot & \cdot & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 0 & \cdot & \cdot & \cdot & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -1 & 0 & \cdot & \cdot & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 2 & -1 & 0 & \cdot & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & \cdot & \cdot & 0 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & \cdot & \cdot & \cdot & 0 & -1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u\left(\frac{1}{N}\right) \\ u\left(\frac{2}{N}\right) \\ u\left(\frac{3}{N}\right) \\ u\left(\frac{4}{N}\right) \\ \cdot \\ \cdot \\ u\left(\frac{N-2}{N}\right) \\ u\left(\frac{N-1}{N}\right) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{N^2} f\left(\frac{1}{N}\right) \\ \frac{1}{N^2} f\left(\frac{2}{N}\right) \\ \frac{1}{N^2} f\left(\frac{3}{N}\right) \\ \frac{1}{N^2} f\left(\frac{4}{N}\right) \\ \cdot \\ \cdot \\ \frac{1}{N^2} f\left(\frac{N-2}{N}\right) \\ \frac{1}{N^2} f\left(\frac{N-1}{N}\right) \end{bmatrix}$$

para después considerar una partición más fina del dominio es decir tender $N \to \infty$ y obtener una mejor aproximación del sistema.

El problema es que este sistema esta mal condicionado ya que la matriz de coeficientes asociada al sistema tiene valores propios

$$4 \sin^2\left(\frac{\pi m}{2N}\right) \quad m = 1, 2 \ldots, N-1$$

por lo que el número de condición del sistema esta dado por

$$C_{\#}(A) = \frac{|\lambda|_{\text{máx}}}{|\lambda|_{\text{mín}}} = \frac{4 \sin^2\left(\frac{\pi(N-1)}{2N}\right)}{4 \sin^2\left(\frac{\pi}{2N}\right)} \approx \frac{4N^2}{\pi^2}$$

con lo cual podemos ver que si $N \to \infty$ entonces el número de condición crece y por lo tanto el sistema lleva a una solución menos real ya que los datos iniciales del sistema inevitablemente tiene errores de medición.

Por otro lado es bien sabido que el uso de matrices en computación puede ser muy tardado si la matriz es grande y con valores distintos de cero. Una matriz con muchos ceros se conoce con el nombre de matriz dispersa estas son las matrices deseables en los cálculos numéricos.

El método de diferencias finitas nos lleva a un sistema algebraico que no por fuerza tiene asociado una matriz dispersa. El método de Galerkin es otro método para la solución de ecuaciones diferenciales y consiste en construir un sistema cuya matriz de coeficientes son los productos internos de cierta base del espacio de soluciones de la ecuación diferencial y aunque en general este tampoco es un sistema con matriz dispersa los coeficientes dependen de los elementos de la base que se elija una base que genera una matriz dispersa es una base ondicular. Veamos primero el método de Galerkin.

Supongamos que buscamos una solución al problema de frontera

$$-\frac{d}{dt}\left(a(t)\frac{du}{dt}\right) + b(t)u(t) = f(t), \quad 0 \leq t \leq 1$$

$$u(0) = u(1) = 0$$

y pensemos a la ecuación diferencial como el operador

$$Lu = -\frac{d}{dt}\left(a(t)\frac{du}{dt}\right) + b(t)u(t)$$

este problema admite una solución en $\mathrm{Ł}^2([0,1])$. La idea del método de Galerkin es pensar dicha solución u en términos de un sistema ortonormal completo del espacio $L^2([0,1])$ y determinar los coeficientes en dicha expansión del sistema ortonormal es decir, supongamos que $\{v_j\}$ es un sistema ortonormal completo de $L^2([0,1])$ que satisface que

$$v_j(0) = v_j(1) = 0$$

el método de Galerkin busca aproximar la solución u por una combinación de ciertos elementos del sistema ortonormal pensemos que dicha aproximación esta dada por u_s donde

$$S = span\,\{v_k : k \in I\}$$

e I es un conjunto de índices entonces la aproximación a u se escribe como

$$u_s = \sum_{k \in I} \alpha_k v_k$$

vamos a determinar los coeficientes de dicha expresión. Dado que u_s quiere ser solución debe satisfacer la ecuación y se tendría que

$$Lu_s = f$$

si tomamos el producto internos con los elementos que generan a S tenemos que

$$\langle Lu_s, v_j \rangle = \langle f, v_j \rangle \qquad \forall\ j \in I$$

sustituyendo la expresión para u_s y aplicando las propiedades del producto interno dado que L es lineal se tiene que

$$\sum_{k \in I} \alpha_k \langle Lv_k, v_j \rangle = \langle f, v_j \rangle \qquad \forall\ j \in I$$

lo cual es equivalente a un sistema de ecuaciones de la forma $Ax = y$ donde

$$x = (\alpha_k)_{k \in I}\,, \quad y = (\langle f, v_j \rangle)_{j \in I}\,, \quad A_{jk} = \langle Lv_k, v_j \rangle$$

al resolver el sistema se tiene la aproximación u_s y al extender el conjunto de índices se tiene una mejor aproximación.

5.2. Wavelet-Galerkin

En el caso de una base ondicular $\{\psi_{j,k}\}_{j,k \in \mathbb{Z}}$ el método de Galerkin busca aproximar la solución al problema

$$Lu = f, \quad u(0) = u(1) = 0$$

pensamos que

$$u_s = \sum_{j,k \in I} \alpha_{j,k} \psi_{jk}$$

donde I es un conjunto de índices de $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ sustituyendo en la ecuación y haciendo el producto interno con los elementos de la base ondicular tenemos que

$$\sum_{j,k \in I} \alpha_{j,k} \langle L\psi_{j,k}, \psi_{r,s} \rangle = \langle f, \psi_{r,s} \rangle \qquad \forall\ r, s \in I$$

que es un sistema de ecuaciones de la forma $Ax = y$ donde

$$x = (\alpha_{j,k})_{j,k\in I}\,, \quad y = (\langle f, \psi_{r,s}\rangle)_{r,s\in I}\,, \quad A_{(jk),(rs)} = \langle L\psi_{j,k}, \psi_{r,s}\rangle$$

sin embargo la matriz de coeficientes no tiene un número de condición bajo al menos no a simple vista pero el siguiente lema establece bajo que condiciones el sistema tiene un número de condición lo suficientemente accesible, esto es

Lema 5.2.1 *Sea L un operador diferencial de Sturm-Liouville uniformemente elíptico, esto es de la forma,*

$$Lu = -\frac{d}{dt}\left(a(t)\frac{du}{dt}\right) + b(t)u(t) = f(t), \quad 0 \leq t \leq 1$$

tal que existen constantes C_1, C_2 y C_3 que cumplen que

$$0 < C_1 \leq a(t) \leq C_2, \quad 0 \leq b(t) \leq C_3$$

y sea $\{\psi_{j,k}\}_{j,k\in I}$ un sistema ortonormal completo que cumple que

$$\psi_{j,k}(0) = \psi_{j,k}(1) = 0$$

y

$$C_4 \sum_{j,k} 2^{2j} |c_j, k|^2 \leq \int_0^1 |g'(t)|^2\, dt \leq C_5 \sum_{j,k} 2^{2j} |c_j, k|^2\,, \qquad \forall\ g = \sum_{j,k} c_{j,k}\psi_{j,k}$$

sea además M la matriz dada por $M = D^{-1}AD^{-1}$ donde D la matriz diagonal dada por

$$d_{j,k;r,s} = \begin{cases} 2^j, & (j,k) = (r,s) \\ 0 & (j,k) \neq (r,s) \end{cases}$$

y A es la matriz de coeficientes que resulta del método de Wavelet-Galerkin entonces

$$C_{\#}(M) = \frac{(C_2 + C_3)C_5}{C_1 C_4}$$

para cualquier subconjunto finito de índices de I.

Esto es que el sistema que arroja el método a primera vista no tiene un número de condición bajo pero bajo una transformación sencilla (multiplicar por una matriz diagonal) se tiene un sistema de ecuaciones algebraicas con número de condición acotado independientemente del conjunto de índices que se elija por lo que podemos incrementar la cantidad de elementos en el sistema ortonormal para mejorar la exactitud de la solución sin preocuparnos por una solución invalida de la ecuación diferencial.

Entonces la manera de resolver el problema del operador elíptico de Sturm-Liouville es aplicar el método de Galerkin con la base ondicular y obtener el sistema de ecuaciones $Ax = y$ después transformar el problema construyendo una matriz diagonal D

$$Ax = y \Leftrightarrow D^{-1}AD^{-1}Dx = D^{-1}y \Leftrightarrow Mz = v$$

con $M = D^{-1}AD^{-1}$, $z = Dx$ y $v = D^{-1}y$ en donde esta matriz M tiene un número de condición acotado sin importar el subconjunto de índices.

Como mencionamos anteriormente desearíamos que el comportamiento de la matriz de coeficientes del sistema sea una matriz con número de condición bajo así como dispersa. En la siguiente sección construiremos la base adecuada para que la matriz de coeficientes sea una matriz dispersa.

5.3. Ondículas en $L^2([0,1])$

Aunque hemos visto que un sistema ondicular de $L^2([0,1])$ nos lleva a un sistema de ecuaciones algebraico con número de condición acotado no queda claro cual es la ventaja sobre otros sistemas ortonormales de $L^2([0,1])$ por ejemplo el sistema ortonormal completo de Fourier. La ventaja es la otra característica que nos gustaría que el sistema tuviera una matriz de coeficientes dispersa (es decir con muchos ceros) esta propiedad la da la base ondicular de $L^2([0,1])$ dada por

$$\{\psi_{j,k}\}_{j,k\in I}\,, \quad \psi_{j,k}(0) = \psi_{j,k}(1) = 0$$

donde I es un conjunto de índices de $\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}$ como lo veremos a continuación.

Primero veamos el comportamiento de las funciones $\psi_{j,k}$ que están dadas por

$$\psi_{j,k}(x) = 2^{j/2}\psi(2^j x - k)$$

las cuales están definidas en un intervalo de longitud $\dfrac{b-a}{2^j}$ centrado en el valor $\dfrac{k}{2^j}$ cuando la función ψ tiene soporte compacto en el $[a,b]$ en este caso las funciones de interés son $L^2([0,1])$ por lo que $\psi_{j,k}$ es una función definida en un intervalo de longitud 2^{-j} y centrado en $2^{-j}k$ para cada uno de los valores $j,k\in I$.

Para observar como es que se da la dispersión de la matriz de coeficientes hay que ver que el comportamiento de $\psi'_{j,k}$ y $\psi_{j,k}$ son parecidos en el sentido que ambas son funciones definidas en un intervalo de longitud 2^{-j} y centrado en $2^{-j}k$ así como $\psi_{r,s}$ esta definida en un intervalo de longitud 2^{-r} y centrado en $2^{-r}s$ por lo que los productos internos de la matriz de coeficientes del sistema $Mz = v$ dados por

$$\langle L\psi_{j,k}, \psi_{r,s}\rangle = \int_0^1 L\psi_{j,k}\overline{\psi_{r,s}}$$

son cero conforme j y r crecen lo que da la dispersión de la matriz de coeficientes del sistema $Mz = v$ debido al soporte compacto de las ondículas.

En resumen en los capítulos anteriores vimos que una de las principales ventajas de la base de Fourier es que diagonaliza las transformaciones lineales invariantes bajo traslación sin embargo aquellas transformaciones que no son invariantes bajo traslación como las de coeficientes variables por ejemplo los operadores elípticos de Sturm-Liouville están lejos de ser diagonalizables por la base de Fourier. Por otro lado la base ondicular es una base que esta muy cerca de diagonalizar dichos operadores proporciona una matriz dispersa y esto es para una gran clase de operadores además la matriz asociada al problema tiene un número de condición acotado por lo que la solución aproximada es una buena solución.

Capítulo 6

Ondículas y la ecuación de difusión.

6.1. Introducción

El objetivo de este capítulo es aplicar el método de Wavelet-Galerkin en la solución del problema con valores iniciales y de contorno dado por

$$Au_t = Bu_{xx} - cu_x + f(x,t)$$

$$u(0,t) = u(1,t) = 0,\ t > 0$$

$$u(x,0) = g(x),\ 0 < x < 1$$

Lo primero es definir la base a utilizar. Una de las bases ondiculares más usadas en las aplicaciones son las bases de Daubechies denotas por DN. Para construir dicha base recordemos la manera de construir un sistema ondicular que basicamente es considerar una sucesión $u \in \ell^1(\mathbb{Z})$ que cumpla

1. $\sum_{k\in\mathbb{Z}} |k|^{\epsilon} |u(k)| < +\infty$ para algún $\epsilon > 0$
2. $\sum_{k\in\mathbb{Z}} u(k) = \sqrt{2}$
3. $\{R_{2k}u\}_{k\in\mathbb{Z}}$ es un conjunto ortonormal en $\ell^2(\mathbb{Z})$
4. Si $m_0(\xi) = \frac{1}{\sqrt{2}} \sum_{k\in\mathbb{Z}} u(k)e^{-ik\xi}$ entonces $\inf_{|\xi|<\pi/2} |m_0(\xi)| > 0$

construir la compañera v de la sucesión u definida por

$$v(k) = (-1)^{k-1}\overline{u(1-k)}$$

con la cual se define

$$\psi(x) = \sum_{k\in\mathbb{Z}} v(k)\phi_{1,k}$$

y se tiene la base ondicular de $L^2(\mathbb{R})$ dada por $\{\psi_{j,k}\}_{j,k\in\mathbb{Z}}$ donde $\phi(x)$ es la ondícula padre que cumple

$$\widehat{\phi}(\xi) = \prod_{j=1}^{\infty} m_0\left(\frac{\xi}{2^j}\right)$$

más aun para cada $j \in \mathbb{Z}$ se tienen los espacios

$$V_j = \left\{ \sum_{k\in\mathbb{Z}} z(k)\phi_{j,k} : z = (z(k))_{k\in\mathbb{Z}} \in \ell^2(\mathbb{Z}) \right\}, \qquad W_j = \left\{ \sum_{k\in\mathbb{Z}} z(k)\psi_{j,k} : z = (z(k))_{k\in\mathbb{Z}} \in \ell^2(\mathbb{Z}) \right\}$$

que satisface que

$$V_{j+1} = V_j + W_j$$

y el conjunto $\{V_j\}$ es un análisis multiresolución con función de escala ϕ y sucesión de escala u. Estos son los espacios que se usaran para aproximar la solución de la ecuación diferencial parcial dada al principio del capítulo.

Las bases de Daubechies DN son aquellas en las que la sucesión de escala u tiene solamente N entradas diferentes de cero. Para resolver la ecuación diferencial vamos a utilizar la base D6 la cual se construye como sigue.

Primero vamos a calcular la sucesión de escala u considerando la identidad trigonométrica

$$\left[\cos^2\left(\frac{\theta}{2}\right) + \operatorname{sen}^2\left(\frac{\theta}{2}\right)\right]^5 = 1, \qquad \forall\theta$$

o equivalentemente

$$\begin{aligned} \cos^{10}\left(\frac{\theta}{2}\right) &+ 5\cos^8\left(\frac{\theta}{2}\right)\operatorname{sen}^2\left(\frac{\theta}{2}\right) + 10\cos^6\left(\frac{\theta}{2}\right)\operatorname{sen}^4\left(\frac{\theta}{2}\right) \\ &+ 10\cos^4\left(\frac{\theta}{2}\right)\operatorname{sen}^6\left(\frac{\theta}{2}\right) + 5\cos^2\left(\frac{\theta}{2}\right)\operatorname{sen}^8\left(\frac{\theta}{2}\right) + \operatorname{sen}^{10}\left(\frac{\theta}{2}\right) \end{aligned}$$

obsérvese que si definimos

$$b(\theta) = \cos^{10}\left(\frac{\theta}{2}\right) + 5\cos^8\left(\frac{\theta}{2}\right)\operatorname{sen}^2\left(\frac{\theta}{2}\right) + 10\cos^6\left(\frac{\theta}{2}\right)\operatorname{sen}^4\left(\frac{\theta}{2}\right)$$

se tiene que

$$b(\theta+\pi) = 10\cos^4\left(\frac{\theta}{2}\right)\operatorname{sen}^6\left(\frac{\theta}{2}\right) + 5\cos^2\left(\frac{\theta}{2}\right)\operatorname{sen}^8\left(\frac{\theta}{2}\right) + \operatorname{sen}^{10}\left(\frac{\theta}{2}\right)$$

ya que

$$\cos\left(\frac{\theta+\pi}{2}\right) = \operatorname{sen}\left(\frac{\theta}{2}\right), \qquad \operatorname{sen}\left(\frac{\theta+\pi}{2}\right) = \cos\left(\frac{\theta}{2}\right)$$

de donde se tiene que

$$b(\theta) + b(\theta+\pi) = 1$$

por lo que basta tomar

$$|\widehat{u}(\theta)|^2 = 2b(\theta), \qquad \forall\theta$$

para que se satisfaga la condición de tener un conjunto ortonormal de traslaciones de $\ell^2(\mathbb{Z})$.

Para definir $\widehat{u}$ obsérvese que en la definición de $b(\theta)$ podemos factorizar una potencia de coseno teniendo que

$$b(\theta) = \cos^6\left(\frac{\theta}{2}\right)\left[\cos^4\left(\frac{\theta}{2}\right) + 5\cos^2\left(\frac{\theta}{2}\right)\operatorname{sen}^2\left(\frac{\theta}{2}\right) + 10\operatorname{sen}^4\left(\frac{\theta}{2}\right)\right]$$

equivalentemente completando cuadrados

$$b(\theta) = \cos^6\left(\frac{\theta}{2}\right)\left[\left(\cos^2\left(\frac{\theta}{2}\right) - \sqrt{10}\,\mathrm{sen}^2\left(\frac{\theta}{2}\right)\right)^2 + (5+2\sqrt{10})\,\mathrm{sen}^2\left(\frac{\theta}{2}\right)\cos^2\left(\frac{\theta}{2}\right)\right]$$

de donde se puede tomar

$$\widehat{u}(\theta) = \sqrt{2}\cos^3\left(\frac{\theta}{2}\right)e^{5i\theta/2}\left[\cos^2\left(\frac{\theta}{2}\right) - \sqrt{10}\,\mathrm{sen}^2\left(\frac{\theta}{2}\right) - (5+2\sqrt{10})\,\mathrm{sen}\left(\frac{\theta}{2}\right)\cos\left(\frac{\theta}{2}\right)i\right]$$

para satisfacer que $|\widehat{u}(\theta)|^2 = 2b(\theta)$ y como queremos encontrar la sucesión escalar u se simplifican términos utilizando las identidades trigonométricas de ángulo doble obteniendo que

$$\begin{aligned}\widehat{u}(\theta) &= \sqrt{2}\cos^3\left(\frac{\theta}{2}\right)e^{5i\theta/2}\left[\frac{1+\cos(\theta)}{2} - \frac{\sqrt{10}}{2}(1-\cos(\theta)) - \frac{\sqrt{5+2\sqrt{10}}}{2}\,\mathrm{sen}(\theta)i\right] \\ &= \sqrt{2}\cos^3\left(\frac{\theta}{2}\right)e^{5i\theta/2}\left[\frac{1-\sqrt{10}}{2} + \frac{1+\sqrt{10}}{2}\cos(\theta) - \frac{\sqrt{5+2\sqrt{10}}}{2}\,\mathrm{sen}(\theta)i\right]\end{aligned}$$

tomando $a = 1-\sqrt{10}$, $b = 1+\sqrt{10}$ y $c = \sqrt{5+2\sqrt{10}}$ se tiene que

$$\begin{aligned}\widehat{u}(\theta) &= \sqrt{2}\left(\frac{e^{i\theta/2}+e^{-i\theta/2}}{2}\right)^3 e^{5i\theta/2}\left[\frac{a}{2} + \frac{b}{2}\cos(\theta) - \frac{c}{2}\,\mathrm{sen}(\theta)i\right] \\ &= \sqrt{2}\left(\frac{e^{i\theta/2}+e^{-i\theta/2}}{2}\right)^3 e^{3i\theta/2}e^{i\theta}\left[\frac{a}{2} + \frac{b}{2}\left(\frac{e^{i\theta}+e^{-i\theta}}{2}\right) - \frac{c}{2}\left(\frac{e^{i\theta}-e^{-i\theta}}{2}\right)\right] \\ &= \frac{\sqrt{2}}{8}(e^{i\theta/2}+e^{-i\theta/2})^3 e^{3i\theta/2}e^{i\theta}\left[\frac{a}{2} + \frac{b}{4}(e^{i\theta}+e^{-i\theta}) - \frac{c}{4}(e^{i\theta}-e^{-i\theta})\right] \\ &= \frac{\sqrt{2}}{8}(e^{i\theta}+1)^3\left[\frac{a}{2}e^{i\theta} + \left(\frac{b-c}{4}\right)e^{2i\theta} + \left(\frac{b+c}{4}\right)\right] \\ &= \frac{\sqrt{2}}{32}(e^{3i\theta}+3e^{2i\theta}+3e^{i\theta}+1)\left[2ae^{i\theta} + (b-c)e^{2i\theta} + (b+c)\right] \\ &= \frac{\sqrt{2}}{32}\left[(b+c) + (2a+3b+3c)e^{i\theta} + (6a+4b+2c)e^{2i\theta} + (6a+4b-2c)e^{3i\theta}\right. \\ &\qquad \left. +(2a+3b-3c)e^{4i\theta} + (b-c)e^{5i\theta}\right]\end{aligned}$$

finalmente dado que $\widehat{u}(\theta) = \sum_{k\in\mathbb{Z}} u(k)e^{in\theta}$ se tiene $u \in \ell^2(\mathbb{Z})$ dado por $u(k) = 0$ para $k < 0$

y $k > 5$ y además

$$\begin{aligned} u(0) &= \frac{\sqrt{2}}{32}(b+c) \\ u(1) &= \frac{\sqrt{2}}{32}(2a+3b+3c) \\ u(2) &= \frac{\sqrt{2}}{32}(6a+4b+2c) \\ u(3) &= \frac{\sqrt{2}}{32}(6a+4b-2c) \\ u(4) &= \frac{\sqrt{2}}{32}(2a+3b-3c) \\ u(5) &= \frac{\sqrt{2}}{32}(b-c) \end{aligned}$$

donde

$$a = 1-\sqrt{10}, \qquad b = 1+\sqrt{10}, \qquad c = \sqrt{5+2\sqrt{10}}$$

con lo cual podemos construir $v \in \ell^2(\mathbb{Z})$ dado por $v(k) = 0$ cuando $k < -4$ y $k > 1$ y además

$$\begin{aligned} v(-4) &= -u(5) \\ v(-3) &= u(4) \\ v(-2) &= -u(3) \\ v(-1) &= u(2) \\ v(0) &= -u(1) \\ v(1) &= u(0) \end{aligned}$$

obsérvese que u y v construidas de esta manera satisfacen las condiciones para construir el sistema ondicular pues

1. $\sum_{k\in\mathbb{Z}} |k|^{\epsilon} |u(k)| < \infty$ para algún $\epsilon > 0$ pues $u(k)$ es cero excepto en seis coordenadas.
2. $\sum_{k\in\mathbb{Z}} u(k) = \sqrt{2}$ o equivalentemente $m_0(0) = 1$ o $\widehat{u}(0) = \sqrt{2}$ lo cual sucede por la elección de $\widehat{u}$ que es

   $$\widehat{u}(\theta) = \sqrt{2}\cos^3\left(\frac{\theta}{2}\right) e^{5i\theta/2}\left[\cos^2\left(\frac{\theta}{2}\right) - \sqrt{10}\,\mathrm{sen}^2\left(\frac{\theta}{2}\right) - (5+2\sqrt{10})\,\mathrm{sen}\left(\frac{\theta}{2}\right)\cos\left(\frac{\theta}{2}\right) i\right]$$

3. El conjunto $\{R_{2k}u\}_{k\in\mathbb{Z}}$ es ortonormal en $\ell^2(\mathbb{Z})$ por la elección de $b(\theta)$ que es

   $$|\widehat{u}(\theta)|^2 = 2b(\theta)$$

   luego

   $$|\widehat{u}(\theta+\pi)|^2 = 2b(\theta+\pi)$$

   con lo que se cumple que

   $$|\widehat{u}(\theta)|^2 + |\widehat{u}(\theta+\pi)|^2 = 2b(\theta) + 2b(\theta+\pi) = 2$$

   y se tiene la condición de ortonormalidad en $\ell^2(\mathbb{Z})$

4. Finalmente la condición de que $\inf_{|\xi|<\pi/2} |m_0(\xi)| > 0$ se tiene por la definición de $b(\theta)$ que es una suma de términos no negativos el primero de ellos un coseno que es no negativo en el intervalo $-\frac{\pi}{2} \leq \xi \leq \frac{\pi}{2}$

Esta es la base ondicular de primera etapa para $\ell^2(\mathbb{Z})$ que nos da los coeficientes para las expresiones de las ondículas madre y padre

$$\phi(x) = \sum_{k\in\mathbb{Z}} u(k)\phi_{1,k}(x), \qquad \psi(x) = \sum_{k\in\mathbb{Z}} v(k)\phi_{1,k}(x)$$

que en realidad es una suma finita pues $u(k) = 0$ cuando $0 \leq k \leq N-1$ y como $v(k) = (-1)^{k-1}\overline{u(1-k)}$ entonces $v(k) = 0$ cuando $2 - N \leq k \leq 1$ y como estamos considerando $N = 6$

$$\phi(x) = \sum_{k=0}^{5} u(k)\phi_{1,k}(x), \qquad \psi(x) = \sum_{k=-4}^{1} v(k)\phi_{1,k}(x)$$

además ϕ y ψ tienen soporte compacto en los intervalos $[0, N-1]$ y $\left[1 - \frac{N}{2}, \frac{N}{2}\right]$ respectivamente que para el caso de $N = 6$ nos queda quedan como $[0,5]$ y $[-2,3]$.

En las figuras 6.1 y 6.2 se pueden observar las graficas de las ondiculas padre y madre de la base de Daubechies D6.

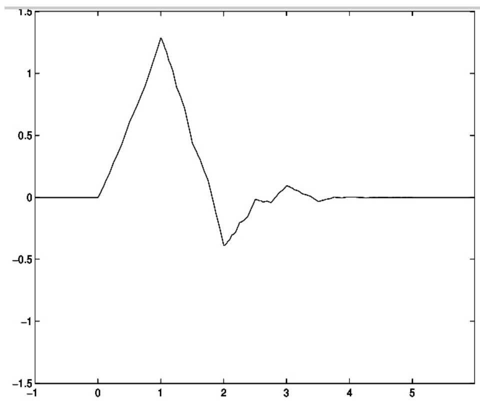

Figura 6.1: $\phi(x)$ ondícula padre en D6

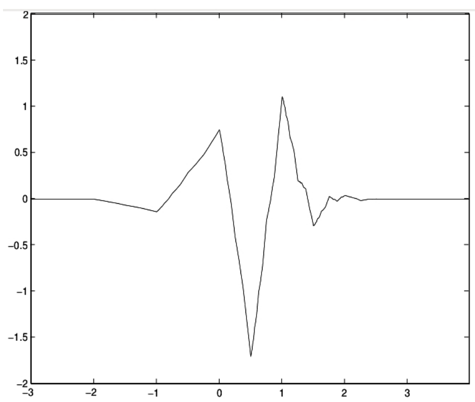

Figura 6.2: $\psi(x)$ ondícula madre en D6

La manera de contruir dichas graficas es considerar la ecuación escalar

$$\phi(x) = \sum_{k=0}^{5} u(k)2^{1/2}\phi(2x-k)$$

y actuar de manera recursiva esto es, conociendo los valores de la función $\phi(x)$ en los enteros $0, 1, 2, 3, 4, 5$ se aproximan los valores de la función en los valores intermedios

$$x = \frac{r}{2}, \quad \text{con } r = 0, 1, 2, \ldots, 10$$

por la ecuación escalar

$$\phi\left(\frac{r}{2}\right) = \sum_{k=0}^{5} u(k)2^{1/2}\phi(r-k)$$

como $r = 0, 1, 2, \ldots, 10$ y $k = 0, 1, 2, 3, 4, 5$ se tiene que $r - k$ puede tomar valores desde -5 hasta 10 y como $\phi(x)$ tiene soporte compacto en el intervalo $[0, 5]$ los valores de $\phi\left(\frac{r}{2}\right)$ estan en terminos de los valores de ϕ en $0, 1, 2, 3, 4, 5$.

De la misma manera para conocer los valores de la función en las cuartas partes de los puntos

$$x = \frac{r}{4}, \quad \text{con } r = 0, 1, 2, \ldots, 20$$

se tiene que

$$\phi\left(\frac{r}{4}\right) = \sum_{k=0}^{5} u(k) 2^{1/2} \phi\left(\frac{r}{2} - k\right)$$

donde $\frac{r}{2} - k$ es de la forma $\frac{t}{2}$ con $t = ,10, -9, \ldots, 10$.

Analogamente para los valores

$$x = \frac{r}{2^i}$$

se utilizan los valores de ϕ en los puntos de la forma

$$\frac{t}{2^{i-1}}$$

y así hasta obtener una representación suficientemente buena de la función.

6.2. Ecuación de difusión

Consideremos ahora la solución aproximada

$$u_j(x, t) = \sum_{k=1}^{N} u_{j,k}(t) \phi_{j,k}(x)$$

donde j esta relacionado al nivel de la aproximación de la solución en el espacio V_j y $\{\phi_{j,k}(x)\}$ son las ondículas generadas por la ondícula madre de la base de Daubechies.

Lo que falta por determinar son los coeficientes $u_{j,k}(t)$ de la expresión para $u_j(x, t)$ para lo cual sustituimos $u_j(x, t)$ en la ecuación con lo que tenemos que

$$A \sum_{k=1}^{N} \dot{u}_{j,k}(t) \phi_{j,k}(x) = B \sum_{k=1}^{N} u_{j,k}(t) \phi''_{j,k}(x) - C \sum_{k=1}^{N} u_{j,k}(t) \phi'_{j,k}(x) + f(x, t)$$

tomando el producto interno con $\phi_{j,l}(x)$ para todo $l = 1, 2, \ldots, N$ queda que

$$\begin{aligned} A \sum_{k=1}^{N} \dot{u}_{j,k}(t) \int_0^1 \phi_{j,k}(x) \phi_{j,l}(x) dx &= B \sum_{k=1}^{N} u_{j,k}(t) \int_0^1 \phi''_{j,k}(x) \phi_{j,l}(x) dx \\ &\quad -C \sum_{k=1}^{N} u_{j,k}(t) \int_0^1 \phi'_{j,k}(x) \phi_{j,l}(x) dx + \int_0^1 f(x, t) \phi_{j,l}(x) \end{aligned}$$

que es un sistema de ecuaciones diferenciales ordinarias de primer orden de la forma

$$AM\dot{U} = BNU - CPU + Q$$

donde M, N, P, Q son matrices dadas por

$$M_{k,l} = \int_0^1 \phi_{j,k}(x)\phi_{j,l}(x)dx \quad N_{k,l} = \int_0^1 \phi''_{j,k}(x)\phi_{j,l}(x)dx$$
$$P_{k,l} = \int_0^1 \phi'_{j,k}(x)\phi_{j,l}(x)dx \quad Q_{k,l} = \int_0^1 f(x,t)\phi_{j,l}(x)dx$$

también U es el vector columna $U = [u_{j,1}(t), u_{j,2}(t), \ldots, u_{j,N}(t)]^T$ y $\dot{U} = [\dot{u}_{j,1}(t), \dot{u}_{j,2}(t), \ldots, \dot{u}_{j,N}(t)]^T$

Dichas integrales son altamente oscilatorias por lo que los métodos comunes de integración podrían fallar, una manera de calcular dichas integrales es transformar las integrales a las cuales se les puede aplicar cierto método de integración. Lo primero es ver que

$$M_{k,l} = \int_0^1 \phi_{j,k}(x)\phi_{j,l}(x)dx = \int_0^1 2^{j/2}\phi(2^jx-k)2^{j/2}\phi(2^jx-l)dx$$

según la definición de $\phi_{j,k}(x)$, tomando el cambio de variable $y = 2^jx - l$ tenemos que

$$M_{k,l} = 2^j \int_{-l}^{2^j-l} \phi\left(2^j\left(\frac{y+l}{2^j}\right)-k\right)\phi(y)\frac{dy}{2^j} = \int_{-l}^{2^j-l} \phi(y-(k-l))\phi(y)dy$$

ya que como $0 < x < 1$ entonces $-l < y < 2^j - l$ y $dy = 2^jdx$.

De la misma forma, como

$$\phi'_{j,k}(x) = \frac{d}{dx}2^{j/2}\phi(2^jx-k) = 2^{j/2}2^j\phi'(2^jx-k) = 2^{3j/2}\phi'(2^jx-k)$$

y

$$\phi''_{j,k}(x) = \frac{d^2}{dx^2}2^{j/2}\phi(2^jx-k) = 2^{j/2}2^{2j}\phi''(2^jx-k) = 2^{5j/2}\phi''(2^jx-k)$$

se tiene que

$$\begin{aligned} P_{k,l} &= \int_0^1 \phi'_{j,k}(x)\phi_{j,l}(x)dx = \int_0^1 2^{3j/2}\phi'(2^jx-k)2^{j/2}\phi(2^jx-l)dx \\ &= 2^{2j}\int_{-l}^{2^j-l} \phi'\left(2^j\left(\frac{y+l}{2^j}\right)-k\right)\phi(y)\frac{dy}{2^j} = 2^j\int_{-l}^{2^j-l} \phi'(y-(k-l))\phi(y)dy \end{aligned}$$

y

$$\begin{aligned} N_{k,l} &= \int_0^1 \phi''_{j,k}(x)\phi_{j,l}(x)dx = \int_0^1 2^{5j/2}\phi''(2^jx-k)2^{j/2}\phi(2^jx-l)dx \\ &= 2^{3j}\int_{-l}^{2^j-l} \phi''\left(2^j\left(\frac{y+l}{2^j}\right)-k\right)\phi(y)\frac{dy}{2^j} = 2^{2j}\int_{-l}^{2^j-l} \phi''(y-(k-l))\phi(y)dy \end{aligned}$$

es decir que

$$M_{k,l} = \int_{-l}^{2^j-l} \phi(y-(k-l))\phi(y)dy$$

$$P_{k,l} = 2^j\int_{-l}^{2^j-l} \phi'(y-(k-l))\phi(y)dy$$

$$N_{k,l} = 2^{2j} \int_{-l}^{2^j - l} \phi''(y - (k - l))\phi(y)dy$$

Estas integrales se calculan con un algoritmo recursivo como el utilizado en la graficación de las ondeletas madre y padre de la base de Daubechies D6 en las figuras 6.1 y 6.2 detallado por Ming-Quayer. Para el caso de $Q_{k,l}$ se procede de forma similar, la diferencia es que se hace un par de suposiciones sobre la función $f(x,t)$ una es que tiene la forma $h(t)z(x)$ y $z(x)$ es un polinomio de grado finito digamos m, es decir que $f(x,t)$ se ve como

$$f(x,t) = h(t) \sum_{i=0}^{m} a_i x^i$$

en cuyo caso $Q_{k,l}$ se calcula como M, N y P

$$Q_{k,l} = \int_0^1 f(x,t)\phi_{j,l}(x)dx = \int_0^1 h(t)z(x)2^{j/2}\phi(2^j x - l)dx = 2^{j/2}h(t)\sum_{i=0}^{m} a_i \int_0^1 x^i \phi(2^j x - l)dx$$

haciendo el cambio $y = 2^j x$ se sigue que $x = 2^{-j}y$, $0 < y < 2^j$ y $dy = 2^j dx$ de donde

$$Q_{k,l} = 2^{j/2}h(t)\sum_{i=0}^{m} a_i \int_0^{2^j} \left(\frac{y}{2^j}\right)^i \phi(y - l)\frac{dy}{2^j} = \sum_{i=0}^{m} \frac{h(t)a_i}{2^{\left(i+\frac{1}{2}\right)j}} \int_0^{2^j} y^i \phi(y - l)dy$$

misma que puede ser calculada por el algoritmo recursivo como se menciono anteriormente para el calculo de M, N y P. Esto significa que de entrada conocemos todas las matrices que involucra el sistema de ecuaciones diferenciales ordinarias

$$AM\dot{U} = BNU - CPU + Q$$

lo que faltaría por determinar es la condición inicial del sistema.

Para la condición inicial recordemos que $u(x,0) = g(x)$ o equivalentemente

$$\sum_{k=1}^{N} u_{j,k}(0)\phi_{j,k}(x) = g(x)$$

tomando el producto interno tenemos que

$$\sum_{k=1}^{N} u_{j,k}(0) \int_0^1 \phi_{j,k}(x)\phi_{j,l}(x) = \int_0^1 g(x)\phi_{j,l}(x), \qquad \forall l = 1, 2, \ldots, N$$

la cual en términos de matrices es $MU(0) = R$ donde R es la matriz dada por

$$R_{j,l} = \int_0^1 g(x)\phi_{j,l}(x)dx$$

de aquí se sigue que la condición inicial $U(0)$ esta dada por

$$U(0) = M^{-1}R$$

En resumen, hemos transformado el problema de aproximar la solución de la ecuación de difusión

$$Au_t = Bu_{xx} - Cu_x + f(x,t)$$

$$u(0,t) = u(1,t) = 0, \quad t > 0 \quad y \quad u(x,0) = g(x), \quad 0 < x < 1$$

al de resolver el sistema de ecuaciones diferenciales

$$AM\dot{U} = BNU - CPU + Q, \qquad U(0) = M^{-1}R$$

para encontrar los coeficientes de la aproximación $u_j(x,t)$.

Pasemos ahora a resolver el sistema de ecuaciones diferenciales en U que nos permite conocer los coeficientes de la aproximación $u_j(x,t)$. Aplicando un esquema de diferencias finitas dado por

$$U_i = U(i\Delta t)$$

podemos aproximar la solución $U(t)$ considerando ya sea diferencias finitas centradas o diferencias finitas laterales.

Método 1 *Desde el punto de vista de diferencias centradas se tiene que*

$$\dot{U}_i = \frac{U_{i+1} - U_{i-1}}{2\Delta t}$$

además podemos considerar el valor de U_i *dado por el promedio*

$$U_i = \frac{U_{i+1} + U_{i-1}}{2}$$

los cuales al ser sustituidos en el sistema de ecuaciones diferenciales ordinarias

$$AM\dot{U} = (BN - CP)U + Q$$

generan el método iterativo

$$A_1 U_{i+1} = A_2 U_{i-1} + A_3$$

donde

$$A_1 = [AM - \Delta t(BN - CP)]$$
$$A_2 = [AM + \Delta t(BN - CP)]$$
$$A_3 = 2\Delta t Q$$

puesto que

$$\begin{aligned}
AM\dot{U}_i &= (BN - CP)U_i + Q \\
AM\left(\frac{U_{i+1} - U_{i-1}}{2\Delta t}\right) &= (BN - CP)\left(\frac{U_{i+1} + U_{i-1}}{2}\right) + Q \\
AMU_{i+1} - AMU_{i-1} &= (BN - CP)U_{i+1}\Delta t + (BN - CP)U_{i-1}\Delta t + 2\Delta t Q \\
AMU_{i+1} - (BN - CP)U_{i+1}\Delta t &= AMU_{i-1} + (BN - CP)U_{i-1}\Delta t + 2\Delta t Q \\
[AM - (BN - CP)\Delta t]\, U_{i+1} &= [AM + (BN - CP)\Delta t]U_{i-1} + 2\Delta t Q
\end{aligned}$$

Método 2 *Por otro lado desde el punto de diferencias finitas laterales se tiene que*

$$U_{i+1} = U_i + \Delta t \dot{U}_i$$

de donde

$$\dot{U}_i = \frac{U_{i+1} - U_i}{\Delta t}$$

que al ser sustituido en el sistema de ecuaciones se tiene que

$$AM\left(\frac{U_{i+1}-U_i}{\Delta t}\right) = (BN - CP)U_i + Q$$

al despejar U_{i+1} se tiene que

$$A_1 U_{i+1} = A_2 U_i + A_3$$

donde

$$A_1 = AM$$
$$A_2 = AM + \Delta t(BN - CP)$$
$$A_3 = \Delta t Q$$

para $i \geq 0$.

En cualquiera de estos dos planteamientos podemos generar los valores de U en los puntos $i\Delta t$. A continuación se presentan dos casos concretos de la aplicación del método para observar su comportamiento respecto soluciones analíticas usando un esquema solamente de diferencias finitas centradas por su buen comportamiento respecto al de diferencias finitas laterales.

Ejemplo 6.2.1 *Considere el problema de valores iniciales dado por la ecuación de difusión*

$$u_t = u_{xx} - u_x + 3\operatorname{sen} t - 2x \operatorname{sen} t + x(1-x)\cos t$$

con las condiciones

$$u(0,t) = u(1,t) = 0, \qquad u(x,0) = 0, \quad 0 \leq x \leq 1$$

se sabe que la solución exacta es

$$u(x,t) = x(1-x)\operatorname{sen} t$$

y bajo el esquema de diferencias centradas con $\Delta t = 0{,}001$ se obtienen los siguientes errores absolutos a diferentes niveles de j

Tiempo	*j=5*	*j=7*	*j=9*
0.01	*0.296E-06*	*0.294E-06*	*0.293E-06*
0.1	*0.275E-04*	*0.273E-05*	*0.271E-05*
1.0	*0.0014*	*0.314E-03*	*0.778E-04*
1.5	*0.0021*	*0.373E-03*	*0.107E-03*

Ejemplo 6.2.2 *En este ejemplo se considera la ecuación*

$$u_t = 2u_{xx} - 0{,}3u_x + (1-t)e^{-t}x^2(1-x) + [12{,}6x - 0{,}9x^2 - 4]te^{-t}$$

con las condiciones iniciales y de frontera dadas por

$$u(0,t) = u(1,t) = 0, \qquad u(x,0) = 0, \quad 0 \leq x \leq 1$$

cuya solución exacta es

$$u(x,t) = x^2(1-x)te^{-t}$$

y bajo el esquema de diferencias centradas con $\Delta t = 0{,}001$ se obtienen los siguientes errores a diferentes niveles de j

Tiempo	*j=5*	*j=7*	*j=9*
0.01	*0.2475E-10*	*0.2475E-10*	*0.2475E-10*
0.1	*0.9178E-06*	*0.2328E-07*	*0.2328E-07*
0.5	*0.3107E-03*	*0.2638E-04*	*0.6038E-05*
1.0	*0.7547E-03*	*0.1584E-03*	*0.3672E-04*

En conclusión el método de Wavelet-Galerkin es una buena elección para la solución de la Ecuación Diferencial Parcial de Difusión por su alto grado de exactitud como se puede observar en la tablas de resultados. La principal desventaja es encontrar la base a utilizar en el método, sin embargo ya existen métodos que nos permiten operar con una gran familia de bases (las bases DN) cuya implementación numérica es relativamente sencilla.

Este método es muy usado en ecuaciones diferenciales parciales lineales de primer y segundo orden e incluso ha demostrado su efectividad en ecuaciones diferenciales parciales no lineales parabólicas, elípticas e hiperbólicas. Algunos de los fenómenos que se han estudiado con este tipo de métodos son difusión de contaminantes en medios porosos, deflexión de Vigas, la ecuación de Burgues y ecuaciones integrodiferenciales. En algunos casos el método de Wavelet-Galerkin ha mostrado ser una alternativa para el método de elemento fínito.

Bibliografía

[1] **Vampa Victoria, Martín Maria, Alvarez Lilliam** *A Daubechies Wavelet Beam Element* Mécanica Computacional, Argentina 2007.

[2] **Mohamed El-Gamel.**. *A new numerical approach for the solution of contaminant transport equation* Ninth International Water Technology Conference, IWTC9 2005, Sharm El-Sheikh, Egypt 673

[3] **Frazier Michael. W.**. *An Introduction to Wavelets Through Linear Algebra* Undergraduate in Mathematics, Springer Verlang, 1999

[4] **Feng Jin, T.Q. Ye**. *Instability Analysis of Prismatic Members by Wavelet-Galerkin Method* Advances In Engineering Software, 1999, Pag 361-367.

[5] **Ming-Quayer Chen, Chyi Hwang, Yen-Ping Shih.**. *The computation of wavelet-Galerkin approximation on a bounded interval* International Journal for Numerical Methods in engineering, vol 39, 2921-2944

[6] **Ingrid Daubechies**. *Ortonormal Bases of Compactly Supported Wavelets* Ten Lectures on Wavelets, Capital City Press, Vermont 1992.