

Centro de Investigación en Matemáticas, A. C.

---

Obtención de imágenes tomográficas  
mediante radiación no ionizante en tejido  
biológico

**T E S I S**

para obtener el grado de Maestro en Ciencias con  
especialidad en Matemáticas Aplicadas

*Presenta*

**Liliana Guadalupe Salvador**

*Director de tesis*

**Dr. José Héctor Morales Bárcenas**

Guanajuato, Guanajuato, Julio 2012

---



*A mi Dios y Señor*

Te adoro, te bendigo, te alabo, todo es para ti...

*A mis padres*

Les amo profundamente...



# Agradecimientos

- Al Doctor José Héctor Morales Bárcenas por su apoyo en la dirección de este trabajo.
- A los Doctores Miguel Ángel Moreles Vázquez y Lorenzo Héctor Juárez Valencia por el tiempo dedicado a la revisión de esta tesis.
- Al Consejo Nacional de Ciencia y Tecnología (CONACYT) por la beca para realizar estudios de maestría, otorgada dentro de la convocatoria de becas CONACYT nacionales agosto-octubre 2009.
- Al Centro de Investigación en Matemáticas, A. C. (CIMAT) por la beca de tesis de maestría otorgada durante el periodo agosto-diciembre 2011.
- Al Consejo de Ciencia y Tecnología del Estado de Guanajuato (CONCYTEG), ya que esta tesis fue elaborada como parte del proyecto “Reconstrucción de imágenes en medios dispersivos mediante técnicas tomográficas”, de los Fondos del CONCYTEG, con número de convenio 09-02-K662-073.
- A cada uno de los profesores que contribuyeron en mi formación académica dentro del CIMAT.

- 
- A mi amigos y compañeros en CIMAT por hacer de esto una experiencia inolvidable.

# Índice general

<b>Agradecimientos</b>	<b>v</b>
<b>1. Introducción</b>	<b>1</b>
1.1. Teoría de dispersión . . . . .	3
1.2. Problemas directos e inversos . . . . .	5
1.3. Formación de imágenes . . . . .	8
1.4. Esquema de tesis . . . . .	14
<b>2. Problema de dispersión de ondas</b>	<b>17</b>
2.1. Propagación y dispersión de ondas electromagnéticas . . . . .	19
2.1.1. Las ecuaciones de Maxwell . . . . .	19
2.1.2. Ondas electromagnéticas . . . . .	23
2.1.3. Dispersión de ondas electromagnéticas . . . . .	32
2.2. Propagación y dispersión de ondas acústicas . . . . .	39
2.3. Teoría de dispersión . . . . .	42
2.3.1. Problema de dispersión de ondas . . . . .	43
2.3.2. Unicidad del problema de dispersión . . . . .	45
2.4. Representación de las soluciones de Helmholtz . . . . .	47
2.4.1. Función de Green . . . . .	47

---

2.4.2.	Representación de Helmholtz y fórmula de Green . . .	53
<b>3.</b>	<b>Representación integral del problema de dispersión</b>	<b>57</b>
3.1.	Ecuación de Lippman-Schwinger . . . . .	58
3.1.1.	Aproximación de Born . . . . .	61
3.2.	Soluciones cilíndricas de Helmholtz . . . . .	62
3.2.1.	Funciones de Bessel . . . . .	62
3.2.2.	Soluciones cilíndricas . . . . .	68
3.2.3.	Función generadora de las funciones de Bessel . . . . .	69
3.2.4.	Expansiones asintóticas de funciones de Bessel . . . . .	72
3.2.5.	Fórmula de adición . . . . .	74
3.3.	Representación asintótica del campo dispersado . . . . .	80
3.3.1.	Integral oscilatoria para el campo dispersado . . . . .	84
3.3.2.	Dispersión puntual y gaussiana . . . . .	88
3.4.	Ejemplos numéricos . . . . .	90
<b>4.</b>	<b>Problema inverso de formación de imágenes tomográficas</b>	<b>97</b>
4.1.	Problema inverso para datos sin ruido . . . . .	101
4.2.	Problema inverso estadístico . . . . .	106
4.2.1.	Fórmula de inversión tomográfica . . . . .	111
4.2.2.	Ejemplos numéricos . . . . .	122
<b>A.</b>	<b>Expansiones y fórmulas asintóticas</b>	<b>135</b>
	<b>Bibliografía</b>	<b>141</b>



---

---

# Introducción

El movimiento ondulatorio es uno de los tópicos más estudiados en las ciencias. Aparece en casi cualquier área pues muchos problemas modernos involucran el fenómeno de propagación de ondas.

En particular, el estudio del fenómeno de propagación de ondas en un material produce información acerca de las características del material [54]. De esta forma se pueden determinar propiedades del interior de un cuerpo basado solamente en observaciones hechas en el exterior del mismo [9].

Así, uno de los medios no invasivos usado en el diagnóstico de propiedades de materiales muy complicados es el uso de la energía de las ondas. Los radares, sonares y la diagnosis médica, son algunos ejemplos donde se aplica este tipo de estudio [54].

Si bien la exploración por medio de ondas lleva a la determinación de parámetros que caracterizan la estructura del interior de un medio, podría decirse que su fin último es la formación de imágenes que representan tal estructura. A grandes rasgos, un sistema de exploración de este tipo es tal que colecta ondas o señales y a partir de éstas crea una imagen del material.

---

Los sistemas de exploración y formación de imágenes en la actualidad involucran diversas áreas de las ciencias, e históricamente tienen sus raíces en cada una de tales áreas.

A pesar de la variedad de sistemas que existen, y del desarrollo independiente que ha tenido cada uno de ellos, comparten sus fundamentos matemáticos y de procesamiento de señales.

Además de las aplicaciones en radares, sonares y formación de imágenes médicas, la exploración por medio de señales ha tomado lugar también en holografía, radio astronomía, cristalografía y formación de imágenes sísmicas.

La formación de imágenes con fines diagnósticos médicos tiene sus orígenes con la invención de la radiografía de rayos X en 1895, por Röntgen. El desarrollo de la tomografía de rayos X, que consiste en la reconstrucción de una imagen computarizada para aplicaciones médicas, inició en Gran Bretaña entre 1963 y 1971. Gracias al trabajo de Cormack y Hounsfield se pudo implementar el primer tomógrafo incorporando tecnología computacional.

En nuestros días existen diferentes clases de tomografía, algunas basadas en las proyecciones de señales electromagnéticas (ionizantes y no ionizantes), y otras en el decaimiento de radioisótopos (tomografía de emisión), o en la excitación magnética de un núcleo atómico (resonancia magnética) [8].

El uso de la radiación electromagnética no ionizante ha tomado relevancia a partir de la década de 1980 gracias a que ha sido posible crear y transmitir pulsos electromagnéticos no ionizantes de muy corta duración y muy energéticos; lo que brinda la posibilidad de su empleo en la exploración de todo tipo de materiales, incluyendo los biológicos [3, 15, 22]. Este tipo de radiación, en particular, apoya el diagnóstico médico en el monitoreo o tratamiento de enfermedades como el cáncer.

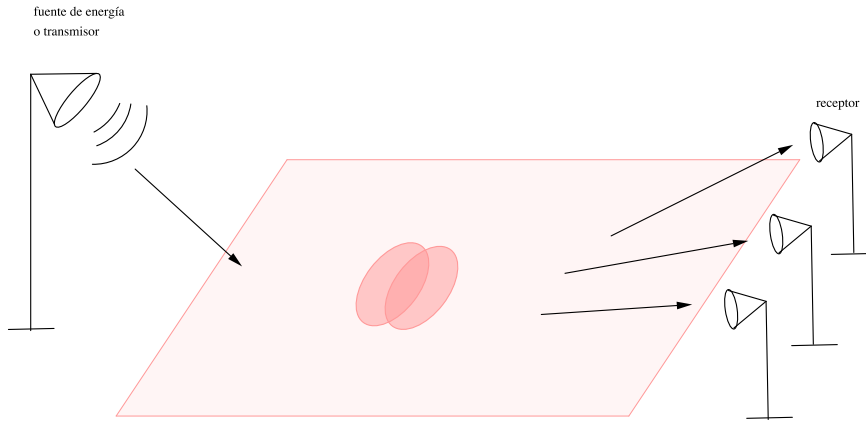


Figura 1.1: Exploración por medio de ondas

En virtud de lo anterior, ha sido motivado este trabajo de tesis, en el cual se propone un modelo para la formación de imágenes tomográficas con el uso de ondas electromagnéticas no ionizantes con datos de tejido biológico.

## 1.1. Teoría de dispersión

De forma general, podemos decir que un sistema de exploración consiste de un medio, una fuente de energía o transmisor, y un detector o receptor (figura 1.1). El transmisor emite una señal que es detectada en el receptor, posiblemente después de haber sido perturbada (dispersada) por un obstáculo, o variaciones, en el medio [54]. Una vez que se han colectado estos datos, la tarea consiste en construir una imagen que recree la escena del material explorado.

Para poder obtener tal imagen a partir de los datos, es necesario conocer primero la relación entre la señal emitida y la señal que el sensor recibe,

---

así como la forma en que esta relación influye en el proceso de obtención de la imagen [8]. Las relaciones que surgen a partir del proceso de entrada y salida de la onda son el objeto de estudio de la *teoría de dispersión*.

Es obvio que si no hay obstáculo o dispersor, no hay dispersión. Sin embargo, es muy importante conocer la manera en la cual la onda se propaga en ausencia de perturbaciones. Una vez que conocemos cómo se propagan las ondas en un medio homogéneo, podemos estudiar el problema perturbado e involucrar ahora características como condiciones de frontera, términos de forzamiento, coeficientes variables, etc.

Cuando una onda incide en un medio con dispersor, su propagación antes de encontrarse con el obstáculo es como si se tratara de un medio homogéneo. Una vez que ha sido dispersada, la propagación puede modelarse haciendo una perturbación al modelo de propagación sin dispersor. Todas estas relaciones constituyen lo que se conoce como el *problema directo de dispersión de onda*.

Nosotros nos restringiremos a un modelo aproximado en donde tomamos en cuenta sólo una primera onda dispersada (aproximación de Born). En general, las ondas son transmitidas y rebotadas, para lo cual la transmisión la consideraremos como una atenuación como más adelante explicaremos.

El fenómeno de dispersión de onda involucra así tres ingredientes: una onda entrante o incidente, una zona de interacción en la cual la onda incidente es perturbada, y una onda saliente que surge como consecuencia de la perturbación [54].

La dispersión de ondas electromagnéticas está basada en las ecuaciones de Maxwell. El planteamiento del problema directo de este tipo de dispersión es el objeto de estudio del capítulo 2.

El *problema inverso de dispersión* de ondas consiste, por el contrario,

---

en determinar la localización, forma y características del dispersor, a partir del conocimiento de la onda dispersada. En particular, la localización del dispersor se obtiene a partir de una imagen que represente el interior del medio en cuestión. La tarea de conseguir esta imagen es el objetivo del *problema inverso de formación de imagen* a partir de la dispersión de las ondas. Estudiaremos el problema inverso de formación de imagen a partir de la dispersión de ondas en el capítulo 4.

Existe cierta dualidad entre el problema directo y el problema inverso de dispersión, pues la solución de éste último requiere del conocimiento del primero.

## 1.2. Problemas directos e inversos

En modelación matemática se utilizan los términos *problema directo* y *problema inverso* para la descripción de un proceso. Los nombres se usan en un sentido relativo, dependiendo de qué es lo que se conoce y qué es lo que se quiere determinar [29]. Estos problemas están relacionado mutuamente, pues la formulación de uno de ellos requiere conocimiento parcial o total del otro. Usualmente, uno de ellos ha sido estudiado por más tiempo y, quizá, con mayor detalle. Generalmente, a éste se le llama el problema directo, mientras que el otro es el problema inverso respectivo. [39].

Los problemas directos están relacionados con la predicción [32]; consisten en el cálculo de las consecuencias, o efectos, de causas conocidas. Mientras que su correspondiente problema inverso está asociado con lo recíproco, consiste en encontrar causas desconocidas a partir de las consecuencias [7].

Los problemas directos tienen solución (en principio), y el proceso de transformación de las causas en efectos es una función matemática: una

---

causa determina, por medio del modelo, un efecto único [32]. De forma general podemos describir esto mediante

$$T(f) = g,$$

donde  $T$  es un operador conocido que describe el proceso,  $f$  es el objeto (también conocido) sobre el cual actúa  $T$ , y  $g$  son los datos que se quieren obtener. A menudo el operador  $T$  es un operador integral,  $f$  una función continua, y  $g$  una función continuamente diferenciable.

En el problema directo de dispersión de ondas,  $f$  representa el obstáculo o dispersor,  $T$  el proceso de dispersión de la onda incidente, y  $g$  son los datos que el sensor registra. Es decir, el problema directo de dispersión es calcular las ondas dispersadas a partir del conocimiento de las fuentes y del obstáculo.

En la mayoría de los problemas directos hay pérdida de información; su solución define una transición de una cantidad física con un cierto contenido de información, a otra cantidad con un menor contenido de información [7]. Además, suele haber errores de medición, tanto experimentales como numéricos. Por lo tanto,  $g$  se conoce sólo de manera aproximada.

Un problema inverso es la otra cara de la moneda [32]. Ahora se trata de la estimación de ciertas cantidades usando información obtenida de mediciones indirectas [18]. En general, se puede representar como un problema no lineal.

En este caso los datos  $g$  son los que están disponibles, y lo que se quiere determinar es el objeto  $f$  que produjo tal información.

Los problemas inversos a veces se definen como problemas de determinación de parámetros en un contexto más general [69].

Referirse al problema inverso de dispersión de ondas, significa que la

---

localización, forma y características del dispersor que produjo los datos registrados es ahora lo que nos interesa conocer.

Es difícil (e incluso imposible) conocer con precisión a  $f$ , pues para empezar ha habido pérdida de información durante la evolución del sistema [7]; además, en la práctica existen limitaciones para hacer mediciones. La recuperación de  $f$  será también, por lo mismo, una aproximación.

La teoría de los problemas inversos es una de las partes más atractivas de las matemáticas aplicadas [17], particularmente por la gran cantidad de problemas que permite resolver.

## Problemas bien y mal planteados

Hay una característica importante que marca la diferencia entre los problemas directos e inversos: el *buen* o *mal planteamiento* del problema.

La idea de un problema *bien planteado* tiene sus orígenes en el artículo publicado por Jacques S. Hadamard en 1902. Hadamard introdujo el concepto basado en la filosofía de que el modelo matemático de un problema físico debe tener las propiedades de existencia, unicidad y estabilidad de la solución (la solución depende continuamente de los datos del problema). Si una de las propiedades falla, se dice que el problema es *mal planteado*.

Por lo tanto, un problema mal planteado es un problema cuya solución no es única, o no existe, o no depende continuamente de los datos.

Los inconvenientes con la existencia y la unicidad en los problemas inversos pueden, a menudo, ser resueltos agrandando o reduciendo el espacio de soluciones. La tendencia actual indica que la extensión de los problemas inversos hacia una formulación bayesiana permite subsanar el problema de la unicidad [37]. Sin embargo, para conseguir la estabilidad se requiere cam-

---

biar la topología de los espacios. Lo anterior es, en varios casos, imposible de hacer debido a los errores de medición [39].

Aunque pareciera que no se puede calcular la solución de un problema numéricamente si la solución del problema no depende continuamente de los datos, bajo información adicional a priori acerca de la solución, es posible restaurar la estabilidad y construir algoritmos numéricos eficientes [39].

Casi todos los problemas inversos en la ciencias son problemas mal planteados, mientras que los correspondientes problemas directos son bien planteados. Sucede así con el par problema directo-inverso de dispersión de ondas.

### 1.3. Formación de imágenes

Hemos mencionado que la finalidad de un sistema de exploración por medio de señales es la obtención de una imagen que representa la estructura interior de un cuerpo o material. Específicamente, se quiere reconstruir una imagen que permita la localización de los objetos, o dispersores, que pudiera haber al interior del medio. En ese sentido, es importante trasladar la noción de problema directo e inverso en términos de la formación de imágenes.

Para empezar, consideremos que  $X$  es el espacio en el cual se encuentran todas las funciones que describen los objetos de los cuales queremos obtener una imagen; en general, puede tratarse de un espacio de Banach o un espacio de Hilbert. Resolver el problema directo es obtener, para cada objeto, su correspondiente imagen. Idealmente, esta imagen es una imagen libre de ruido, donde por *ruido* entendemos aquella parte de la señal medida que la degrada o que no aporta información de interés. Puesto que el problema es bien planteado, a cada objeto le corresponde una, y sólo una, imagen.



---

Así, la solución del problema directo define un operador, denotado por  $T$ , que transforma cualquier objeto de  $X$  en una imagen libre de ruido que está en un espacio  $Y$  que, en general, también se trata de un espacio de Banach o un espacio de Hilbert. En otras palabras, el objeto puede representarse mediante una función  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ , que codifica, por ejemplo, la escala de grises o la intensidad. La imagen producida es una función  $g : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ , y el proceso puede presentarse en abstracto por un mapeo de  $f$  a  $g$ ,  $T(f) = g$ , donde  $T$  modela la obtención de la imagen.

Es importante mencionar que las normas que son apropiadas para los instrumentos de medición son las normas  $L_1$  y  $L_2$ . Esto es, pueden medir la magnitud o el valor cuadrático medio. En la práctica, se considera que el espacio  $Y$  es el espacio de Hilbert  $L_2$  de las funciones cuadrado integrables [29].

En un caso ideal,  $T = I$ , el operador identidad, y puede expresarse en términos de la delta de Dirac en dos dimensiones como

$$f(\mathbf{x}) = \iint_{\mathbb{R}^2} \delta(\mathbf{x} - \mathbf{y})f(\mathbf{y}) d\mathbf{y}.$$

Sin embargo, la modelación produce pérdida de información y la imagen  $g$  no es exactamente  $f$ . Cuando el proceso  $T$  de formación de la imagen puede ser modelado como un proceso lineal, se puede representar a  $g$  mediante

$$g(\mathbf{x}) = Tf(\mathbf{x}) = \iint_{\mathbb{R}^2} h(\mathbf{x}, \mathbf{y})f(\mathbf{y}) d\mathbf{y}, \quad (1.1)$$

donde  $h$  es alguna aproximación de la delta centrada en el origen [32], y es la función de respuesta a un impulso. A  $h$  se le conoce como la función de dispersión puntual, o en inglés, Point Spread Function (PSF). Veremos en el capítulo 3 que el problema de dispersión de ondas puede llevarse a la forma (1.1).

---

En varios sistemas de formación de imágenes, la PSF es invariante con respecto a traslaciones en el sentido de que la imagen  $h(\mathbf{x}, \mathbf{y})$  de una fuente puntual localizada en  $\mathbf{y}$  es la traslación hecha por  $\mathbf{y}$  de la imagen  $h(\mathbf{x}, \mathbf{0})$  de una fuente puntual localizada en el origen del plano de los objetos, i.e.  $h(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = h(\mathbf{x} - \mathbf{y}, 0)$ . Así que  $h(\mathbf{x}, \mathbf{y})$  es una función de la diferencia  $\mathbf{x} - \mathbf{y}$ , y se escribe  $h(\mathbf{x} - \mathbf{y})$  en lugar de  $h(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ . En este caso, el operador  $T$  es un operador de convolución:

$$g(\mathbf{x}) = Tf(\mathbf{x}) = (h \star f)(\mathbf{x}) = \iint_{\mathbb{R}^2} h(\mathbf{x} - \mathbf{y})f(\mathbf{y}) d\mathbf{y}. \quad (1.2)$$

El tratamiento de los problemas de convolución está basado en el análisis de Fourier. Nuestro problema de dispersión no será modelado por un operador de convolución, sin embargo, este tipo de operadores será el punto de partida para nuestro análisis en el problema inverso.

El problema inverso correspondiente a (1.1) consiste en encontrar la función  $f$  a partir del conocimiento de  $g$  y del operador integral determinado por  $h$ . En el caso particular de (1.2), se dice que es un problema de *deconvolución* de la imagen.

La pérdida de información que se da como parte de la modelación, tiene fundamentalmente dos consecuencias. Primero, podría ser que dos o más objetos tengan la misma imagen; y en segundo lugar, que dos objetos muy distintos tengan imágenes muy parecidas [7]. Lo anterior se ve reflejado en el problema inverso como un mal planteamiento. Si dos o más objetos tienen la misma imagen, significa que el problema inverso no tiene solución única. Si dos imágenes son cercanas pero los correspondientes objetos son muy distintos, el problema inverso no depende continuamente de los datos.

Aún cuando los datos estén libres de ruido hay dificultades para resolver el problema inverso. A lo más que se puede aspirar es a tener soluciones que

---

reproducen los datos de manera aproximada.

Para encontrar las soluciones aproximadas, es necesario compensar la pérdida de información con información adicional a priori. Adicional porque no es información que se pueda derivar de la imagen, o de las propiedades de  $T$ , más bien se trata de propiedades físicas que se espera que el objeto tenga [7].

Hay varias clases de información adicional. Una de ellas consiste de las propiedades estadísticas de los objetos, o dispersores. En este caso, se supone que la reflectividad de los obstáculos son realizaciones de un proceso aleatorio con distribución de probabilidad conocida. Este es el tipo de información que usaremos para nuestro problema inverso de dispersión de ondas.

En la práctica el proceso de medición no es exacto, e inevitablemente  $g$  estará mezclada con ruido. Digamos que los datos obtenidos de las mediciones y afectados con ruido son  $g_\eta$ , y supongamos que el espacio  $Y$  ahora contiene tanto a las imágenes libres de ruido como a las imágenes con ruido. Dado que el rango de  $T$  son las imágenes sin ruido, el problema inverso (1.1) de obtener  $f$  a partir de  $g_\eta$  no tiene solución:  $g_\eta$  no se encuentra dentro del rango de  $T$ . Por lo tanto, preguntarse sobre la existencia de la solución de un problema inverso a partir de los datos obtenidos en las mediciones no tiene sentido porque tal solución no existe. Más bien, la solución se halla en el sentido de que si el problema inverso puede estabilizarse, sea posible encontrar soluciones aproximadas que correspondan a los datos  $g_\eta$  [29].

Nótese que los datos de las mediciones son de la forma

$$g_\eta(\mathbf{x}) = g(\mathbf{x}) + \eta(\mathbf{x}) = Tf(\mathbf{x}) + \eta(\mathbf{x}), \quad (1.3)$$

donde  $\eta$  representa la contribución de ruido aditivo. En general,  $\eta$  es una realización de un proceso aleatorio del cual se conocen sus propiedades es-

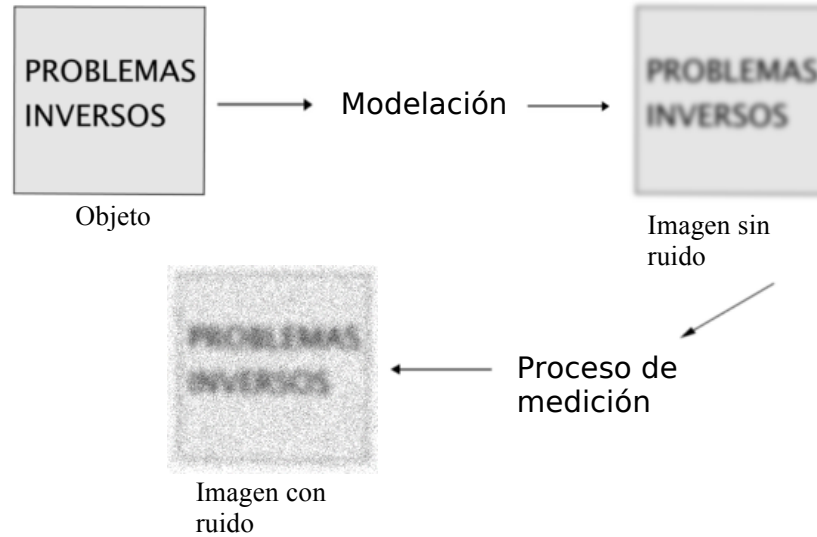


Figura 1.2: Representación esquemática de la obtención de una imagen

tadísticas (media, varianza, etc.).

En resumen, los datos colectados son una representación degradada del objeto original, donde las dos fuentes de degradación son el proceso de modelación y el proceso de medición. En la figura (1.2) hay una representación del proceso de obtención de datos como resultado de estos dos procesos.

## Regularización

Los problemas mal planteados han llevado al desarrollo de métodos que los resuelvan de manera aproximada, pero de tal manera que las soluciones cambien continuamente con los datos. A esto se le conoce, en general, con el nombre de *regularización* [29].

Existen varias aproximaciones a la solución de un problema mal planteado. Entre las más importantes están las soluciones generalizadas, las ex-

---

pansiones en valores singulares, la teoría de regularización, los métodos iterativos y la molificación. De éstas, la teoría de regularización es quizá la más importante.

La primera aproximación para la solución del problema inverso determinado por (1.3) está dada por el mínimo del funcional

$$\mathcal{E}^2(f, g_\eta) = \|Tf - g_\eta\|^2,$$

en el conjunto de los objetos  $f$  con energía finita:

$$\int |f(\mathbf{x})|^2 d\mathbf{x} < \infty.$$

La solución mínima  $f_\eta$  se conoce como *pseudoinversa* o *solución de mínimos cuadrados*.

Para reducir aún más los efectos del ruido en la solución inversa, Tíjonov propuso en 1984 estimar la solución como el mínimo del funcional

$$\mathcal{E}_{\text{Tij}}^2(f, g_\eta) = \|Tf - g_\eta\|^2 + \alpha\|f\|^2,$$

donde  $\alpha$  se conoce con el nombre de *término de regularización* [38].

La idea básica de la regularización de Tíjonov consiste en considerar una familia de soluciones aproximadas que dependen de este término de regularización y tomar aquella que corresponde a la mejor aproximación. La principal propiedad es que, en el caso de datos libres de ruido, las funciones de la familia convergen a la solución exacta del problema cuando el término de regularización tiende a cero. Mientras que en el caso de datos con ruido se obtiene una aproximación óptima de la solución exacta para un término de regularización distinto de cero. En la deconvolución de imagen, la regularización de Tíjonov es equivalente al filtrado de la solución [7].

---

Hasta ahora, hemos mencionado técnicas de regularización deterministas, sin hacer uso de la naturaleza estadística del ruido. Cuando el ruido se considera como un proceso aleatorio, tienen lugar los métodos de aproximación estadísticos. De entre estos métodos se distinguen los métodos Bayesianos, los cuales están basados en información adicional a priori acerca de la distribución de probabilidad del dispersor. En el caso de procesos gaussianos se obtiene, como ejemplo particular, el método del filtro de Wiener, que es un tipo de generalización de la regularización de Tíjonov.

El método estadístico que usaremos para el problema inverso de dispersión de ondas es un caso particular de un método Bayesiano. Está basado en la estimación mínima del error cuadrático medio, lo cual nos conduce a regularizar por medio de un filtro de Wiener.

## 1.4. Esquema de tesis

Hemos visto de manera muy general que el problema inverso de formación de imágenes, a partir de la exploración por señales, involucra distintos aspectos de las matemáticas, tales como análisis matemático, análisis funcional, teoría de funciones analíticas, y probabilidad y estadística. Haremos uso de conceptos y resultados importantes en estas materias.

En el capítulo 2 planteamos el problema directo de dispersión de ondas electromagnéticas y su unicidad. La propagación de estas ondas en un medio sin dispersores se modela, para campos armónicos en el tiempo, mediante la ecuación reducida de ondas, o ecuación de Helmholtz. Las soluciones de Helmholtz se pueden representar en forma integral y en término de la función de Green correspondiente a la ecuación de Helmholtz. Con ayuda de tales representaciones y algunos otros teoremas de análisis se puede probar la

---

unicidad del problema de dispersión.

La solución numérica del problema directo es el objetivo del capítulo 3. Para conseguirlo, será importante tener la representación integral del problema de dispersión. A ésta se le conoce como ecuación de Lippmann-Schwinger y se trata de una ecuación integral de Fredholm de la segunda clase. En este punto se hará una aproximación considerando que los dispersores son débiles, ésta se conoce con el nombre de aproximación de Born. Para la realización de tal aproximación es importante determinar la forma de la onda incidente. Tomaremos ésta como una función de Hankel de la primera clase de primer orden. Dada la aplicación que pudiera tener en física médica, adaptamos el modelo a una geometría cilíndrica o polar. Con la ayuda de las fórmulas asintóticas de las funciones de Bessel y de la transformación a coordenadas polares, expresaremos el problema directo como una integral oscilatoria [11, 64]. Los datos de dispersión que se pueden obtener con este modelo son de tipo tomográfico, en el sentido de que las mediciones se obtienen para diferentes posiciones de la fuente emisora así como del receptor. Al final de este capítulo mostraremos algunos resultados numéricos para dispersores puntuales y dispersores gaussianos.

El capítulo 4 trata el problema inverso de formación de imagen a partir de los datos de dispersión obtenidos con el modelo directo. Se propondrá la inversión mediante un operador integral en analogía con la transformada de Fourier, cuya estabilidad se conseguirá por una generalización del método de regularización de Tíjonov. Este operador involucra el uso de un filtro que será determinado, en el contexto estadístico, mediante la técnica del error cuadrático medio. La fórmula de inversión tomográfica es el objetivo principal de este trabajo de tesis. Para finalizar, se mostrarán algunas imágenes tomográficas obtenidas con este modelo de inversión.





---

---

# Problema de dispersión de ondas

Gracias al desarrollo de los teléfonos celulares o móviles, el empleo de las microondas se ha popularizado. En particular, su empleo en la física médica se ha facilitado debido al desarrollo de emisores de bajo costo. Por lo anterior, la tomografía de microondas se ha vuelto relevante en la detección del cáncer de seno debido a que se sabe que hay un gran contraste entre los parámetros electromagnéticos de los tumores malignos y del tejido normal [4]; así también en el caso de la leucemia, donde el crecimiento anormal de la población celular en la médula ósea provoca variación de los parámetros en la médula [22].

El contenido de agua es la clave para indicar si el tejido es normal, ya que la concentración de agua determina mayormente cambios en la permitividad en el medio [27].

Por otra parte, el empleo de microondas en formación de imágenes ofrece otras ventajas prácticas. Primeramente, es radiación no ionizante y, segundo,

---

es menos costosa que la resonancia magnética o la tomografía por emisión.

Derivado de esto, surge nuestro interés por la obtención de imágenes tomográficas electromagnéticas dentro del espectro no ionizante.

La formación de imágenes es un problema inverso que requiere del conocimiento sólido de la teoría para el correspondiente problema directo de dispersión. Por ello, estudiaremos el problema directo de dispersión de ondas en el presente capítulo. El objetivo es proponer un modelo matemático de propagación y dispersión de ondas electromagnéticas.

La primera parte es una breve introducción al electromagnetismo, cuya base son las ecuaciones de Maxwell. De tales ecuaciones deduciremos la ecuación que modela la propagación y dispersión de ondas: la ecuación de Helmholtz.

Ya que la exploración por ondas tiene diferentes y variados campos de aplicación, el modelo de propagación dado por la ecuación de Helmholtz surge también en otras áreas, tales como la acústica o la mecánica de fluidos. La segunda sección es un corto espacio dedicado a la deducción de tal ecuación a partir de la acústica. Así, aunque nuestro trabajo estará enfocado en la aplicación para ondas electromagnéticas, puede trasladarse a alguna otra área donde la ecuación de Helmholtz surja.

Con base en la teoría de dispersión, plantearemos en la tercera sección el problema de dispersión de ondas electromagnéticas y su unicidad.

Finalmente, en la sección cuarta daremos la representación integral de las soluciones de la ecuación de Helmholtz. Estas representaciones serán útiles en el siguiente capítulo para la formulación integral del problema de dispersión.

---

## 2.1. Propagación y dispersión de ondas electromagnéticas

Antes de describir las leyes fundamentales del electromagnetismo, hacemos unas observaciones respecto a la notación.

Por  $C^n(\Omega)$  se denota al espacio vectorial lineal de funciones de valores reales o complejos sobre algún conjunto  $\Omega \subset \mathbb{R}^3$  ó  $\mathbb{R}^2$ , que son  $n$ -veces diferenciables. Mientras que  $C^n(\bar{\Omega})$  es el subespacio de funciones de clase  $C^n(\Omega)$  que, junto con todas sus derivadas hasta de orden  $n$ , se pueden extender continuamente de  $\Omega$  a su cerradura  $\bar{\Omega}$ .

Básicamente trabajaremos en espacios de funciones de este tipo.

### 2.1.1. Las ecuaciones de Maxwell

Algunos fenómenos eléctricos producen efectos magnéticos, y algunos fenómenos magnéticos, efectos eléctricos. Esto lleva a unificarlos con el nombre común de *electromagnetismo*. El descubrimiento de las leyes del electromagnetismo y su unificación fue un gran triunfo de la física del siglo XIX. Su aplicación ha dado origen a muchos aparatos de uso práctico: motores, radio, televisores, radares, tomógrafos, hornos de microondas, teléfonos celulares, etc. [52].

Las ecuaciones básicas del electromagnetismo se conocen como ecuaciones de Maxwell, en honor del físico escocés James Clerk Maxwell (1831-1879), quien fue el primero en unificar las ideas físicas en forma matemática, y dio al electromagnetismo una base teórica sólida. Todos los efectos electromagnéticos pueden explicarse mediante estas ecuaciones.

A partir del establecimiento de las ecuaciones de Maxwell surgió la

---

predicción de la existencia de ondas electromagnéticas. Sin embargo, las ondas electromagnéticas fueron descubiertas experimentalmente por Heinrich Hertz en 1888, quince años después de publicarse la teoría de Maxwell.

La importancia de estas ondas radica en que, al igual que cualquier forma de onda, pueden transportar energía de un punto a otro del espacio, ésto lo hacen por medio de sus campos electromagnéticos. Por esta razón, uno de sus principales usos es en la exploración de medios materiales.

Las leyes del electromagnetismo están descritas en forma diferencial por

$$\nabla \cdot \mathbf{D}(\mathbf{x}, t) = \rho(\mathbf{x}, t), \quad (2.1)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{B}(\mathbf{x}, t) = 0, \quad (2.2)$$

$$\nabla \times \mathbf{E}(\mathbf{x}, t) = -\frac{\partial}{\partial t} \mathbf{B}(\mathbf{x}, t), \quad (2.3)$$

$$\nabla \times \mathbf{H}(\mathbf{x}, t) = \mathbf{J}(\mathbf{x}, t) + \frac{\partial}{\partial t} \mathbf{D}(\mathbf{x}, t). \quad (2.4)$$

Donde  $\mathbf{E}, \mathbf{D}, \mathbf{B}, \mathbf{H}$  y  $\mathbf{J}$  son campos vectoriales llamados *campo eléctrico*, *densidad de flujo eléctrico*, *densidad de flujo magnético*, *campo magnético* y *densidad de corriente*, respectivamente; y la función escalar  $\rho$  es la *densidad de carga*. Suponemos que tanto los campos como  $\rho$  están definidos en todo  $\mathbb{R}^3$  y para todo tiempo  $t$ . Más aún, son funciones de clase  $C^1$  en  $(\mathbf{x}, t) = (x, y, z, t)$ . Los valores que toman los campos vectoriales están en  $\mathbb{R}^3$ , y los valores de  $\rho$  en  $\mathbb{R}$ .

Dependiendo de las unidades físicas que se empleen, las ecuaciones pueden aparecer con factores como  $4\pi$ , la velocidad de la luz  $c$  o algunos otros. Aquí hemos usamos el Sistema Internacional (SI) de unidades.

Con la finalidad de comprender mejor estas ecuaciones, haremos una breve revisión de algunos conceptos en electromagnetismo, omitiendo, sin embargo, la derivación de las ecuaciones de Maxwell ya que no es el propósito

---

de este trabajo. Nos hemos basado en [31, 34, 48, 51, 52].

Los objetos que nos rodean almacenan *carga eléctrica*. Como esta carga generalmente se encuentra en equilibrio, sólo es posible notarla cuando hay un desbalance. Decimos entonces que un cuerpo está “cargado” cuando hay un desequilibrio en el contenido de carga. La carga eléctrica neta de un objeto suele representarse con el símbolo  $q$ . Es una cantidad escalar que puede ser positiva o negativa, y se mide en coulombs (C) en el SI.

Se sabe, por experimentos, que los cuerpos cargados ejercen una fuerza mutua, aún en el vacío. Desde el punto de vista clásico, cada carga está rodeada de un campo eléctrico  $\mathbf{E}$ , e interacciona directamente con él. Si una carga  $q$  experimenta una fuerza  $\mathbf{F}_E$ , el campo eléctrico en la posición de la carga está definido por  $\mathbf{F}_E = q\mathbf{E}$ . Las unidades del campo eléctrico son N/C. Si la carga es móvil, entonces puede experimentar otra fuerza  $\mathbf{F}_M$  proporcional a su velocidad  $\mathbf{v}$ . Se define entonces otro campo, la inducción magnética, o *densidad de flujo magnético*,  $\mathbf{B}$ , tal que  $\mathbf{F}_M = q\mathbf{v} \times \mathbf{B}$ . La unidad de  $\mathbf{B}$  es la tesla (T), donde 1 tesla = 1 N/(Cm/s).

Si ambas fuerzas  $\mathbf{F}_E$  y  $\mathbf{F}_M$  ocurren simultáneamente se dice que la carga se mueve a través de una región ocupada tanto por campos eléctricos como magnéticos, y la fuerza total ejercida sobre la carga es  $\mathbf{F} = q\mathbf{E} + q\mathbf{v} \times \mathbf{B}$  (fuerza de Lorentz).

Los campos eléctricos son generados tanto por cargas eléctricas estáticas, como por campos eléctricos variables en el tiempo. A su vez, los campos magnéticos son generados por corrientes eléctricas y por campos eléctricos variables en el tiempo. De esta dependencia surgen las leyes del electromagnetismo.

Se da el nombre de *corriente eléctrica* al flujo de electrones (u otras partículas con carga); de forma más específica, definimos la corriente eléctrica

---

ca como la carga neta que atraviesa una pequeña superficie de un material por intervalo de unidad de tiempo:

$$i = \frac{dq}{dt}.$$

La corriente es un escalar, y su unidad en el SI es el ampère (A), donde 1 ampère = 1 coulomb/segundo. La magnitud vectorial relacionada es la densidad de corriente  $\mathbf{J}$  o corriente por unidad de área, cuya magnitud se define por

$$J = \frac{i}{A}.$$

La dirección de  $\mathbf{J}$  es la dirección del flujo de una carga positiva.

Cuando un material se somete a un campo eléctrico, la distribución interna de carga se distorsiona bajo la influencia del campo. El campo eléctrico separa las cargas positivas y negativas, así que cada par forma un dipolo. A este efecto se le conoce como *polarización*, y al campo generado que se opone al campo aplicado se le llama campo de polarización  $\mathbf{P}$ . Este campo es una medida del comportamiento general del medio, ya que es igual al momento dipolar resultante por unidad de volumen. Las unidades de  $\mathbf{P}$  son C/m<sup>2</sup>. Cuanto mayor sea el campo aplicado, mayor será el campo de polarización. Puesto que el campo dentro del material ha sido alterado, tenemos que definir un nuevo campo, el *desplazamiento eléctrico*  $\mathbf{D}$ :

$$\mathbf{D} = \epsilon_0 \mathbf{E} + \mathbf{P}, \tag{2.5}$$

donde la constante  $\epsilon_0$  es la *permitividad eléctrica del vacío*, cuyo valor es de  $\epsilon_0 = 8.8542 \times 10^{-12}$  C<sup>2</sup>/Nm<sup>2</sup>. Las unidades del desplazamiento eléctrico son C/m<sup>2</sup>. De (2.5)

$$\mathbf{E} = \frac{\mathbf{D}}{\epsilon_0} + \frac{\mathbf{P}}{\epsilon_0}.$$

---

Esto es, el campo eléctrico interno  $\mathbf{E}$  es la diferencia entre el campo  $\mathbf{D}/\epsilon_0$ , el cual existiría en la ausencia de polarización, y el campo  $\mathbf{P}/\epsilon_0$  que surge de la polarización.

Podemos definir también una *polarización magnética* o campo de magnetización  $\mathbf{M}$  al someter un material a un campo magnético. Este campo es el momento dipolar magnético por unidad de volumen, y sus unidades son C/ms. Introducimos ahora un vector auxiliar  $\mathbf{H}$ , conocido como el *campo magnético*:

$$\mathbf{H} = \frac{1}{\mu_0} \mathbf{B} - \mathbf{M},$$

donde la constante  $\mu_0$  es la *permeabilidad del vacío* y tiene valor de  $4\pi \times 10^{-7}$  Ns<sup>2</sup>/C<sup>2</sup>. Las unidades del campo magnético  $\mathbf{H}$  son C/ms.

Las ecuaciones del electromagnetismo aparecieron por primera vez en el artículo de Maxwell titulado “A Dynamical Theory of the Electromagnetic Field”, en 1864. Sin embargo, el cálculo vectorial moderno no era conocido por Maxwell, así que fueron formuladas en forma equivalente por 20 ecuaciones escalares. Fue el físico Oliver Heaviside, en 1880, quien las expresó en la manera en que las hemos presentado. Históricamente, las ecuaciones aparecieron primero en forma integral puesto que surgieron de los resultados experimentales de André Marie Ampère y Michael Faraday.

### 2.1.2. Ondas electromagnéticas

Con el conocimiento de las ecuaciones de Maxwell se predijo la existencia de las ondas electromagnéticas, pues la manera de propagarse de los campos eléctricos y magnéticos es en forma de ondas.

Consideremos una carga que de alguna manera se acelera desde el reposo. Cuando la carga está sin movimiento, tiene asociada a ella un campo

---

eléctrico uniforme radial que se extiende hasta el infinito. A partir de que la carga comienza a moverse, el campo  $\mathbf{E}$  se altera (se perturba) en la vecindad de la carga y esta alteración se propaga. El campo  $\mathbf{E}$  variable en el tiempo induce un campo magnético (ley de Ampère, ecuación 2.4). Pero la carga está acelerándose, así que no es constante su velocidad en el tiempo, luego el campo  $\mathbf{B}$  inducido es dependiente del tiempo. El campo  $\mathbf{B}$  variable con el tiempo genera a su vez un campo  $\mathbf{E}$  (ley de inducción de Faraday, ecuación 2.3), y el proceso continua con  $\mathbf{E}$  y  $\mathbf{B}$  acoplados uno a otro. A medida que un campo cambia, genera un nuevo campo que se extiende un poco más allá, y así el punto se mueve al siguiente a través del espacio. Los campos  $\mathbf{E}$  y  $\mathbf{B}$  pueden considerarse como dos aspectos de un solo fenómeno, el *campo electromagnético*, cuya fuente es un carga en movimiento. La perturbación, una vez que ha sido generada en el campo electromagnético, es una onda que se propaga más allá de su fuente e independientemente de ella. Ligados uno a otro, como una sola unidad, los campos magnéticos y eléctricos variables en el tiempo se regeneran uno a otro en un ciclo sin fin [34].

Las ondas electromagnéticas, a diferencia de otros tipos de ondas, no necesita de un medio material para propagarse, sino que puede hacerlo en el vacío. La velocidad con que una onda electromagnética se propaga en el vacío está determinada por

$$c_0 = \frac{1}{\sqrt{\epsilon_0 \mu_0}} \approx 3 \times 10^8 \text{ m/s.}$$

Sin embargo, en todo medio material, en mayor o menor grado, la velocidad de propagación de las ondas es función de la frecuencia [13].

Las relaciones constitutivas ligam los campos mediante parámetros, y uno de ellos es la permitividad, por ejemplo.



---

## Relaciones constitutivas

Una primera relación constitutiva se obtiene al considerar que el medio de interés es *isotrópico*; es decir, sus propiedades físicas son iguales en todas direcciones, son invariantes bajo rotaciones. Cuando estos medios se someten a un campo eléctrico  $\mathbf{E}$ , sus electrones son acelerados generando una corriente. La densidad de corriente está determinada por

$$\mathbf{J} = \sigma \mathbf{E}. \quad (2.6)$$

Aquí,  $\sigma$  denota la *conductividad eléctrica* del material. Ésta indica la capacidad de un material para conducir corriente eléctrica. Un valor grande de  $\sigma$  significa que el material es un buen conductor. La unidad de la conductividad es el siemens/metro, (S/m), donde 1 siemen = 1 ampère/volt. La ecuación (2.6) se conoce como la *ley de Ohm*. En el caso general, tenemos relaciones  $\mathbf{J} = \mathbf{J}(\mathbf{E})$ , donde  $\mathbf{J}$  es un funcional.

Por otra parte, en medios isotrópicos  $\mathbf{P}$  y  $\mathbf{E}$  están en la misma dirección. En muchos materiales, el campo de polarización  $\mathbf{P}$  se relaciona con el campo  $\mathbf{E}$  por

$$(\epsilon - \epsilon_0)\mathbf{E} = \mathbf{P}, \quad (2.7)$$

donde  $\epsilon$  es la *permitividad eléctrica* del medio. A estos materiales se les conoce como *lineales*. La permitividad describe entonces, cómo un campo eléctrico afecta un medio. Tiene unidades de  $C^2/Nm^2$ . La permitividad de un material se puede expresar en términos de  $\epsilon_0$  como

$$\epsilon = \epsilon_r \epsilon_0,$$

la cantidad adimensional  $\epsilon_r$  recibe el nombre de *permitividad relativa*. Por (2.5) y (2.7),

$$\mathbf{D} = \epsilon \mathbf{E}. \quad (2.8)$$

---

Análogamente, para un medio isotrópico y lineal,  $\mathbf{B}$  y  $\mathbf{H}$  son paralelos y proporcionales:

$$\mathbf{H} = \frac{1}{\mu} \mathbf{B}. \quad (2.9)$$

A  $\mu$  se le llama *permeabilidad del medio* y su relación con la permeabilidad del vacío es

$$\mu = \mu_r \mu_0,$$

con  $\mu_r$  la *permeabilidad relativa*, sin dimensiones. Las unidades de la permeabilidad son  $\text{Ns}^2/\text{C}^2$ .

En el caso particular del vacío,  $\sigma = 0$  y  $\epsilon_r = \mu_r = 1$ .

La velocidad de una onda electromagnética en un medio está dada por

$$c = \frac{1}{\sqrt{\epsilon\mu}},$$

y la razón entre las velocidades en el vacío y la materia se conoce como *índice de refracción*. Este índice lo denotamos por  $n$  y es igual a

$$n = \frac{c_0}{c} = \sqrt{\frac{\epsilon\mu}{\epsilon_0\mu_0}};$$

se trata de una cantidad adimensional. En términos de la permitividad y permeabilidad relativas,

$$n = \sqrt{\epsilon_r \mu_r}.$$

Conviene resaltar que la refracción se debe a que la velocidad de las ondas electromagnéticas cambia de un medio a otro [52].

En la gran mayoría de los materiales,  $\mu_r$  es apenas diferente de 1, así que en adelante tomaremos  $\mu_r = 1$ . Nos queda

$$n = \sqrt{\epsilon_r}. \quad (2.10)$$

---

Cuando se estudia la propagación de una onda electromagnética en un medio absorbente, se vuelve conveniente utilizar el índice de refracción con valores complejos:

$$\mathbf{n} = \mathbf{n}_R + i\mathbf{n}_I.$$

Si la parte imaginaria es distinta de cero, la amplitud de la onda disminuirá cuando se propague a través del medio, debido a la absorción de energía electromagnética [10]. La parte real  $\mathbf{n}_R$ , corresponde al cociente entre la velocidad de la onda en el vacío y la velocidad de la onda en el material, mientras que la parte imaginaria  $\mathbf{n}_I$  depende del coeficiente de absorción. Así, se elige la rama de la raíz cuadrada en (2.10) tal que  $\mathbf{n}_I$  corresponde físicamente a la atenuación de la propagación de la onda electromagnética.

En general, los parámetros de conductividad, permitividad, y por consiguiente, el índice de refracción, pueden variar con la posición en el medio, la frecuencia del campo aplicado (que definiremos más adelante), la humedad o la temperatura, entre otros. Para el problema de dispersión que nos interesa, solamente consideramos la dependencia de la posición; y cualquier otro factor lo tomaremos constante.

Para tratar con el problema de dispersión será importante estudiar las ondas electromagnéticas en ausencia de dispersores. Es decir, hemos de considerar un medio *homogéneo*, cuyas propiedades sean invariantes a las traslaciones. En este caso, los parámetros  $\sigma, \epsilon, \mu, n, \mathbf{n}$  serán constantes.

Por ahora no será necesario especificar si el medio es o no homogéneo.

Si consideramos un medio isotrópico y lineal, las relaciones constitutivas

---

(2.6), (2.8), (2.9) en las ecuaciones de Maxwell (2.1)-(2.4) producen

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = \frac{\rho}{\epsilon}, \quad (2.11)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{H} = 0, \quad (2.12)$$

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\mu_0 \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t}, \quad (2.13)$$

$$\nabla \times \mathbf{H} = \sigma \mathbf{E} + \epsilon \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}. \quad (2.14)$$

Estas ecuaciones modelan el comportamiento de una onda electromagnética en el medio.

### Campos armónicos en el tiempo

Hay varias formas de ondas que pueden satisfacer las ecuaciones de Maxwell, pero nuestro interés está en las ondas armónicas en el tiempo.

Un campo de ondas armónico en el tiempo tiene la forma general

$$\mathbf{F}(\mathbf{x}, t) = \mathbf{A} \cos \omega t + \mathbf{B} \sin \omega t,$$

donde  $\mathbf{A}$  y  $\mathbf{B}$  son campos vectoriales independientes del tiempo pero que pueden depender de la posición, y  $\omega$  se conoce como *frecuencia angular*. Esta frecuencia se mide en radianes/segundos (rad/s), y cuando el valor de ésta es constante, se dice que el campo es de ondas *monocromáticas*. El modelo de dispersión de ondas que deduciremos más adelante es un modelo para ondas monocromáticas, es decir, consideramos solamente una frecuencia.

Notemos que  $\mathbf{F}$  puede escribirse como la parte real de un vector complejo:  $\mathbf{F} = \text{Re}(\mathbf{F}_c)$ , para el cual

$$\mathbf{F}_c = \mathbf{C} e^{-i\omega t}, \quad \mathbf{C} = \mathbf{A} + i\mathbf{B}.$$

El vector  $\mathbf{F}_c$  es una representación compleja del campo real  $\mathbf{F}$ . Dado cualquier

---

operador lineal  $\mathcal{L}$ , la operación sobre  $\mathbf{F}$  es equivalente a operar sobre la representación compleja  $\mathbf{F}_c$  y luego tomar la parte real:

$$\mathcal{L}(\mathbf{F}) = \mathcal{L}(\text{Re}(\mathbf{F}_c)) = \text{Re}(\mathcal{L}(\mathbf{F}_c)).$$

La representación con números complejos es matemáticamente más simple para trabajar. Puesto que todas las operaciones que realizaremos sobre los campos armónicos en el tiempo en este trabajo son lineales, encontramos conveniente utilizar la representación compleja. Quedamos en el entendido de que el campo real es la parte real de su representación en  $\mathbb{C}$ .

Aún cuando trabajamos con una sola frecuencia, el índice de refracción complejo se expresa en términos de  $\omega$ . En un medio absorbente, la permitividad relativa está dada por

$$\epsilon_{r,\mathbb{C}} = \frac{1}{\epsilon_0} \left( \epsilon + i \frac{\sigma}{\omega} \right).$$

Por lo tanto,

$$\mathbf{n} = \sqrt{\frac{1}{\epsilon_0} \left( \epsilon + i \frac{\sigma}{\omega} \right)}.$$

De gran utilidad será el *índice de refracción normalizado* de un medio respecto a otro. Si  $n_1, n_2$  son los índices de refracción de dos medios, el índice de refracción del medio 2 normalizado respecto al medio 1 es

$$\mathfrak{N}^2 = \frac{n_2^2}{n_1^2} = \frac{\epsilon_{r2,\mathbb{C}}}{\epsilon_{r1}} = \frac{1}{\epsilon_1} \left( \epsilon_2 + i \frac{\sigma_2}{\omega} \right).$$

La *frecuencia* de una onda la definimos en términos de su frecuencia angular:

$$\nu = \frac{\omega}{2\pi}.$$

Sus unidades son los Hertz (Hz).

---

La razón entre la frecuencia angular y la velocidad de la onda en un medio se conoce como *número de onda*, y lo representaremos como  $k$ :

$$k = \frac{\omega}{c} = \omega\sqrt{\epsilon\mu_0}.$$

Las unidades del número de onda son rad/m.

La *longitud de onda* es un parámetro que se define por

$$\lambda = \frac{2\pi}{k},$$

su unidad es el metro.

Podemos ver que la longitud de onda y la frecuencia tienen una relación inversa dada por

$$\lambda = \frac{c}{\nu}.$$

Las ondas electromagnéticas se clasifican de acuerdo a la frecuencia o a su longitud de onda. Tal clasificación se conoce con el nombre de *espectro electromagnético*.

### **Espectro electromagnético**

El espectro electromagnético (ver figura 2.1.2) incluye una amplia gama de tipos de radiación electromagnética emanada de diversas fuentes. Las propiedades de estas radiaciones difieren enormemente de sus medios de producción y de las formas en las que las observamos, pero todas esas propiedades se pueden describir en función de los campos eléctricos y magnéticos y todas se desplazan por el vacío con la misma velocidad (la velocidad de la luz) [52]. En esencia, lo único que las distingue es la longitud de onda o su frecuencia.

Si la longitud de onda es muy pequeña comparada con la distancia más pequeña del objeto que se quiere observar, el dispersor produce una sombra

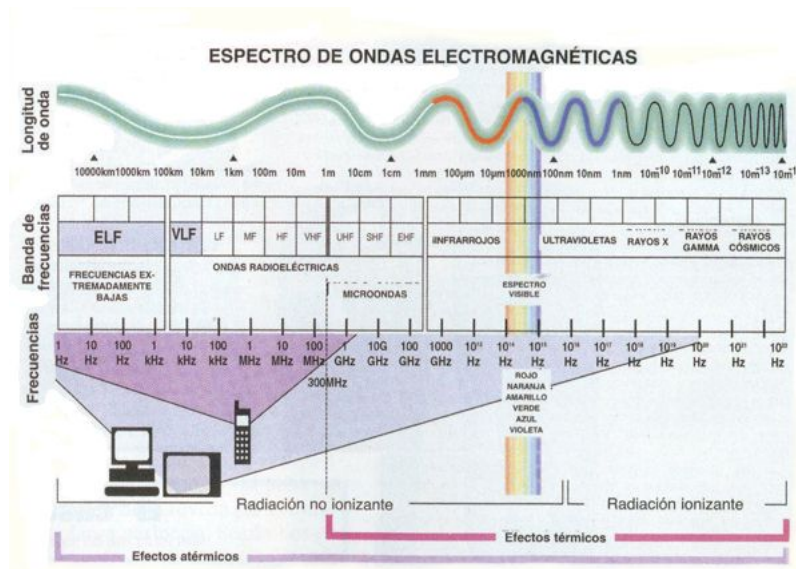


Figura 2.1: Espectro electromagnético

con borde definido. Cuando se observa más de cerca, se nota que la sombra en realidad no está bien definida sino que se descompone en franjas. A este fenómeno se le conoce como *difracción*. En el otro extremo, los obstáculos que son pequeños comparados con la longitud de onda perturban la onda incidente de tal forma que no se produce alguna sombra con la que se pueda identificar el objeto.

Así, se pueden distinguir dos regiones de frecuencia de acuerdo a la magnitud de  $ka$ , donde  $a$  es la dimensión característica del dispersor. Una de ellas corresponde al grupo de valores de  $k$  para los cuales  $ka \gg 1$ ; llamada *region de alta frecuencia*. La otra corresponde a los valores de  $k$  tales que  $ka$  es menor, o comparable con 1; esta región se llama *región de resonancia* [21].

Este trabajo se desarrolla considerando frecuencias para la región de

---

resonancia. Más específicamente, consideramos que la frecuencia de nuestros campos está dentro del espectro de las microondas, el cual a su vez es parte de la gama de radiación no ionizante.

### 2.1.3. Dispersión de ondas electromagnéticas

Los cumulus en el cielo de una tarde de verano presentan un sorprendente contraste de blanco comparado con el brillante cielo azul. Durante un inesperado chubasco los arcoiris primario y secundario muestran sus arcos multicolores. Estos fenómenos son manifestaciones de la dispersión y absorción de la luz por partículas pequeñas [10].

La dispersión y la absorción de la luz, y en general de las ondas electromagnéticas, es una importante herramienta para la exploración de medios.

La dispersión de ondas electromagnéticas en cualquier sistema está relacionada a la heterogeneidad del sistema [10]. Heterogeneidad, objeto, obstáculo, o *dispersor*, significa que hay una parte dentro del medio que tiene una propiedad distinta a la del resto.

La característica que distingue a un dispersor cuando una onda electromagnética incide en el medio en el cual éste se encuentra, es el índice de refracción. Así, el proceso de exploración con este tipo de ondas consiste en distinguir dónde el índice de refracción tiene una variación significativa.

Independientemente del tipo de heterogeneidad, o forma del dispersor, la física de la dispersión es la misma para todos los sistemas. Si un objeto es iluminado por una onda electromagnética, las cargas eléctricas en el objeto se ponen en movimiento debido al campo eléctrico de la onda incidente. Las cargas eléctricas aceleradas irradian energía electromagnética en todas las direcciones (figura 2.2); a esta radiación secundaria se le llama radiación



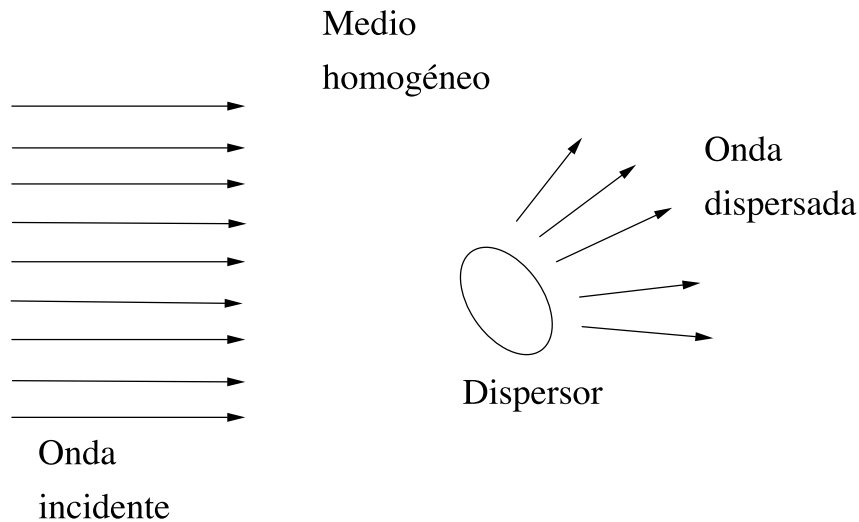


Figura 2.2: Dispersión de ondas.

*dispersada* por el objeto [10].

Además de la energía electromagnética re-radiada, las cargas elementales excitadas podrían transformar parte de la energía electromagnética en otras formas (energía térmica, por ejemplo), proceso que se llama *absorción* [10].

La dispersión y la absorción no son procesos mutuamente independientes. Por ello, cuando hablamos de la dispersión implícitamente incluimos la absorción. Como mencionamos antes, el término de absorción está dado matemáticamente por la parte imaginaria del índice de refracción.

Para nuestro trabajo, asumiremos que la dispersión es *elástica*, es decir, la frecuencia de la onda dispersada es la misma que la de la onda incidente.

Se consideran esencialmente dos tipos de objetos que pueden producir dispersión: los obstáculos y las heterogeneidades.

Por obstáculos entendemos cambios de las propiedades materiales que experimentan discontinuidades (en relación al medio en el cual se encuentra

---

el obstáculo) a través de sus fronteras. Contrariamente, el cambio es gradual y suave en el caso de las heterogeneidades [29]. En otras palabras, en el primer caso el dispersor es un obstáculo acotado no penetrable, y en el segundo caso las ondas penetran en un medio no homogéneo cuya heterogeneidad es de soporte compacto.

Recordemos que el *soporte* de una función  $f$  es la cerradura del conjunto de puntos para los cuales la función no se anula. Una heterogeneidad de soporte compacto se refiere a que la función de la característica que determina la heterogeneidad es de soporte compacto.

La dispersión debida a heterogeneidades es la que nos interesa estudiar. En concreto, para la dispersión de ondas electromagnéticas la heterogeneidad de soporte compacto se refiere a que el índice de refracción del dispersor lo caracterizaremos con una función de soporte compacto.

## **Ecuación de Helmholtz**

La dispersión de ondas producida por objetos materiales está gobernada por la ecuación reducida de ondas, también conocida como *ecuación de Helmholtz* [29].

La ecuación de Helmholtz, en particular, modela la propagación del campo electromagnético en un medio con y sin dispersores. Por lo tanto esta ecuación puede derivarse a partir de las ecuaciones de Maxwell.

Supongamos que un campo electromagnético armónico en el tiempo se propaga en un medio no cargado ( $\rho = 0$ ), lineal, isotrópico y absorbente, con permitividad  $\epsilon$  y conductividad  $\sigma$ . Digamos que los campos eléctrico y

---

magnético son

$$\begin{aligned}\mathbf{E}(\mathbf{x}, t) &= \frac{1}{\sqrt{\epsilon_0}} \hat{\mathbf{E}}(\mathbf{x}) e^{-i\omega t}, \\ \mathbf{H}(\mathbf{x}, t) &= \frac{1}{\sqrt{\mu_0}} \hat{\mathbf{H}}(\mathbf{x}) e^{-i\omega t}.\end{aligned}$$

De las ecuaciones (2.11)-(2.14),

$$\nabla \cdot \hat{\mathbf{E}} = 0, \quad (2.15)$$

$$\nabla \cdot \hat{\mathbf{H}} = 0, \quad (2.16)$$

$$\nabla \times \hat{\mathbf{E}} = i\omega \sqrt{\epsilon_0 \mu_0} \hat{\mathbf{H}}, \quad (2.17)$$

$$\nabla \times \hat{\mathbf{H}} = \sqrt{\frac{\mu_0}{\epsilon_0}} (\sigma - i\omega\epsilon) \hat{\mathbf{E}}. \quad (2.18)$$

Como el número de onda  $k_0$  del vacío es

$$k_0 = \frac{\omega}{c_0} = \omega \sqrt{\epsilon_0 \mu_0},$$

y el índice de refracción complejo del medio se determina por

$$\mathbf{n}^2 = \frac{1}{\epsilon_0} \left( \epsilon + i \frac{\sigma}{\omega} \right),$$

entonces las ecuaciones (2.17) y (2.18) se convierten en

$$\nabla \times \hat{\mathbf{E}} = ik_0 \hat{\mathbf{H}}, \quad (2.19)$$

$$\nabla \times \hat{\mathbf{H}} = -ik_0 \mathbf{n}^2 \hat{\mathbf{E}}. \quad (2.20)$$

Tomamos el rotacional sobre la ecuación (2.19) y sustituimos (2.20):

$$\nabla \times (\nabla \times \hat{\mathbf{E}}) = ik_0 (\nabla \times \hat{\mathbf{H}}) = ik_0 (-ik_0 \mathbf{n}^2 \hat{\mathbf{E}}) = k_0^2 \mathbf{n}^2 \hat{\mathbf{E}}.$$

Por propiedad del rotacional, y de (2.15),

$$\nabla \times (\nabla \times \hat{\mathbf{E}}) = \nabla(\nabla \cdot \hat{\mathbf{E}}) - \nabla^2 \hat{\mathbf{E}} = -\nabla^2 \hat{\mathbf{E}}.$$

---

Entonces el campo eléctrico está gobernado por la ecuación:

$$\nabla^2 \hat{\mathbf{E}} + k_0^2 \mathbf{n}^2 \hat{\mathbf{E}} = 0. \quad (2.21)$$

Por otra parte, de la ecuación (2.20) obtenemos

$$\nabla \times \left( \frac{1}{\mathbf{n}^2} (\nabla \times \hat{\mathbf{H}}) \right) = -ik_0 (\nabla \times \hat{\mathbf{E}}) = -ik_0 (ik_0 \hat{\mathbf{H}}) = k_0^2 \hat{\mathbf{H}}. \quad (2.22)$$

Si el medio es homogéneo,  $\mathbf{n}$  es constante, y las ecuaciones (2.21)-(2.22) se reducen a las ecuaciones de Helmholtz para los campos eléctrico y magnético:

$$\nabla^2 \hat{\mathbf{E}} + k_0^2 \mathbf{n}^2 \hat{\mathbf{E}} = 0, \quad (2.23)$$

$$\nabla^2 \hat{\mathbf{H}} + k_0^2 \mathbf{n}^2 \hat{\mathbf{H}} = 0. \quad (2.24)$$

En particular, si el medio es el vacío ( $\mathbf{n} = 1$ ), las ecuaciones que modelan la propagación del campo electromagnético armónico son

$$\nabla^2 \hat{\mathbf{E}} + k_0^2 \hat{\mathbf{E}} = 0,$$

$$\nabla^2 \hat{\mathbf{H}} + k_0^2 \hat{\mathbf{H}} = 0.$$

Si el medio no es homogéneo,  $\mathbf{n} = \mathbf{n}(\mathbf{x})$ ,  $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3$ . Las ecuaciones (2.21)-(2.22) en este caso sirven para modelar la propagación de una onda electromagnética que ha sido dispersada por un medio no homogéneo que se encuentra en el interior del medio homogéneo que es el vacío.

En particular, consideremos el problema de dispersión debido a un cilindro no homogéneo infinito con eje en la dirección  $\hat{\mathbf{k}}$  del eje  $z$ ; suponemos que el cilindro es homogéneo en la dirección  $\hat{\mathbf{k}}$  y que la onda incidente se propaga en una dirección perpendicular al eje del cilindro y es independiente de  $z$ . Entonces  $\hat{\mathbf{E}}(\mathbf{x}) = (E_1(\mathbf{x}), E_2(\mathbf{x}), E_3(\mathbf{x}))^T$  y  $\hat{\mathbf{H}}(\mathbf{x}) = (H_1(\mathbf{x}), H_2(\mathbf{x}), H_3(\mathbf{x}))^T$  son independientes de  $z$ . Las ecuaciones (2.21)-(2.22) están definidas ahora para  $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^2$ . Por su parte, las ecuaciones (2.19)-(2.20) se reducen a los

---

siguientes dos grupos de ecuaciones

$$\frac{\partial E_3}{\partial y} = ikH_1, \quad (2.25)$$

$$\frac{\partial E_3}{\partial x} = -ikH_2, \quad (2.26)$$

$$\frac{\partial H_2}{\partial x} - \frac{\partial H_1}{\partial y} = -ikn^2 E_3; \quad (2.27)$$

y

$$\frac{\partial H_3}{\partial y} = -ikn^2 E_1,$$

$$\frac{\partial H_3}{\partial x} = ikn^2 E_2,$$

$$\frac{\partial E_2}{\partial x} - \frac{\partial E_1}{\partial y} = -ikH_3;$$

donde  $\mathbf{x} = (x, y) \in \mathbb{R}^2$ .

Notemos que el primer grupo de ecuaciones involucra solamente  $E_3, H_1, H_2$  y el segundo solamente  $E_1, E_2, H_3$ . En particular, si  $E_3, H_1, H_2$  satisfacen (2.25)-(2.27), entonces  $\hat{\mathbf{E}}(\mathbf{x}) = E_3(\mathbf{x})\hat{\mathbf{k}}$  y  $\hat{\mathbf{H}} = H_1(\mathbf{x})\hat{\mathbf{i}} + H_2(\mathbf{x})\hat{\mathbf{j}}$  determinan una onda electromagnética polarizada perpendicular al eje  $z$ , donde  $E_3 \in C^2(\mathbb{R}^2)$  satisface la ecuación:

$$\nabla^2 E_3(\mathbf{x}) + k^2 n^2(\mathbf{x}) E_3(\mathbf{x}) = 0, \quad (2.28)$$

en  $\mathbb{R}^2$ .

La dispersión de ondas electromagnéticas con la geometría de este ejemplo es la que nos interesa en este trabajo. Así, nos enfocaremos a tratar el problema de dispersión para campos escalares definidos en  $\mathbb{R}^2$ .

De manera más general, nos interesa la dispersión de una onda electromagnética debida a una heterogeneidad, o medio no homogéneo, que se encuentra en el interior de un medio homogéneo absorbente distinto del vacío.

---

Supongamos que el medio homogéneo tiene permitividad  $\epsilon_w$ , índice de refracción  $n_w$ , índice de refracción complejo  $\mathbf{n}_w$ , índice de refracción normalizado (respecto a  $n_w$ )  $\mathfrak{N}_w$ , y número de onda  $k_w$ . Para el dispersor simplemente omitimos el subíndice  $w$ . El análogo al número de onda  $k_0$  se define por

$$\gamma := k_w \mathfrak{N}_w = k_0 \mathbf{n}_w.$$

Mientras que el índice de refracción  $\mathbf{n}$  es análogo a

$$\mathcal{N} := \frac{\mathbf{n}}{\mathbf{n}_w}.$$

La ecuación que modela ahora la dispersión del campo eléctrico en  $\mathbb{R}^2$  es

$$\nabla^2 E(\mathbf{x}) + \gamma^2 \mathcal{N}^2(\mathbf{x}) E(\mathbf{x}) = 0; \quad (2.29)$$

o bien,

$$\nabla^2 E(\mathbf{x}) + k_w^2 \mathfrak{N}^2(\mathbf{x}) E(\mathbf{x}) = 0. \quad (2.30)$$

Si el medio no tuviera heterogeneidad, el índice  $\mathcal{N}$  sería 1, y la ecuación (2.29) quedaría

$$\nabla^2 E(\mathbf{x}) + \gamma^2 E(\mathbf{x}) = 0. \quad (2.31)$$

La cual es equivalente a (2.28) pero con índice  $\mathbf{n}_w$  constante. Corresponde a la propagación de la onda en el medio homogéneo.

Es necesario dar condiciones de frontera o condiciones de radiación para poder resolver (2.28) ó (2.29) de manera única. Nosotros usaremos una condición de radiación. El planteamiento del problema de dispersión con condición de radiación se dará en la sección 2.3.

A partir de la acústica también puede derivarse la ecuación de Helmholtz como modelo de propagación. Asimismo una ecuación de la forma (2.29) que modela la dispersión debida a una heterogeneidad. Sobre ello trata la siguiente sección.

---

## 2.2. Propagación y dispersión de ondas acústicas

Los problemas acústicos escalares son de interés práctico en varias aplicaciones, tales como en ultrasonido en medicina y en acústica oceánica [36].

Podríamos clasificar los medios materiales en fluidos y sólidos. Los *fluidos* incluyen gases y líquidos y en general son *viscosos*. Sin embargo, a menudo los efectos de la viscosidad son despreciables, y podemos considerar fluidos *no viscosos*, o fluidos *perfectos*. Los fluidos son en general *compresibles*, pero cuando la densidad del medio se considera constante, los fluidos son *incompresibles*.

La propagación de una onda acústica se puede dar en sólidos elásticos, fluidos compresibles viscosos, y fluidos compresibles no viscosos. En esta sección resumimos la formulación para la propagación de ondas acústicas en fluidos compresibles no viscosos.

Consideremos un fluido con densidad  $\varrho(\mathbf{x}, t)$  y entropía  $S(\mathbf{x}, t)$ . Supongamos que una onda perturba  $\varrho$  y se propaga a través del medio. Entonces la presión  $P(\mathbf{x}, t)$  y la velocidad  $\mathbf{v}(\mathbf{x}, t)$  de una partícula en el medio también son cambiadas. Si suponemos que no hay fuerzas exteriores que actúen sobre el fluido, entonces el movimiento de la partícula está descrito por las siguientes ecuaciones:

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + (\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{v} + \gamma \mathbf{v} + \frac{1}{\varrho} \nabla P = 0, \quad (\text{ecuación de Euler}) \quad (2.32)$$

$$\frac{\partial \varrho}{\partial t} + \nabla \cdot (\varrho \mathbf{v}) = 0, \quad (\text{ecuación de continuidad}) \quad (2.33)$$

$$f(\varrho, S) = P, \quad (\text{ecuación de estado}) \quad (2.34)$$

$$\frac{\partial S}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla S = 0, \quad (\text{hipótesis adiabática}) \quad (2.35)$$

donde la función  $f$  depende del fluido,  $\gamma$  es un coeficiente de regulación que

---

se supone constante por trozos. Este sistema es no lineal en las funciones  $\mathbf{v}$ ,  $\varrho$ ,  $P$  y  $S$ . Para hacerlo lineal, considérese el caso estacionario para el cual  $\mathbf{v}_0 = 0$ ,  $\varrho = \varrho(\mathbf{x})$ ,  $S = S_0(\mathbf{x})$ , y  $P_0$  es constante tal que  $f(\varrho_0(\mathbf{x}), S_0(\mathbf{x}))$ . Hacemos

$$\begin{aligned}\mathbf{v}(\mathbf{x}, t) &= \varepsilon \mathbf{v}_1(\mathbf{x}, t) + \mathcal{O}(\varepsilon^2), \\ P(\mathbf{x}, t) &= P_0 + \varepsilon P_1(\mathbf{x}, t) + \mathcal{O}(\varepsilon^2), \\ \varrho(\mathbf{x}, t) &= \varrho_0(\mathbf{x}) + \varepsilon \varrho_1(\mathbf{x}, t) + \mathcal{O}(\varepsilon^2), \\ S(\mathbf{x}, t) &= S_0(\mathbf{x}) + \varepsilon S_1(\mathbf{x}, t) + \mathcal{O}(\varepsilon^2),\end{aligned}$$

y sustituimos en (2.32)-(2.35). Obtenemos

$$\frac{\partial \mathbf{v}_1}{\partial t} + \gamma \mathbf{v}_1 + \frac{1}{\varrho_0} \nabla P_1 = 0 \quad (2.36)$$

$$\frac{\partial \varrho_1}{\partial t} + \nabla \cdot (\varrho_0 \mathbf{v}_1) = 0 \quad (2.37)$$

$$\frac{\partial f(\varrho_0, S_0)}{\partial \varrho} \varrho_1 + \frac{\partial f(\varrho_0, S_0)}{\partial S} S_1 = P_1 \quad (2.38)$$

$$\frac{\partial S_1}{\partial t} + \mathbf{v}_1 \cdot \nabla S_0 = 0. \quad (2.39)$$

Puesto que

$$0 = \nabla f(\varrho_0(\mathbf{x}), S_0(\mathbf{x})) = \frac{\partial f(\varrho_0, S_0)}{\partial \varrho} \nabla \varrho_0 + \frac{\partial f(\varrho_0, S_0)}{\partial S} \nabla S_0,$$

y de (2.38)

$$\frac{\partial f(\varrho_0, S_0)}{\partial \varrho} \frac{\partial \varrho_1}{\partial t} + \frac{\partial f(\varrho_0, S_0)}{\partial S} \frac{\partial S_1}{\partial t} = \frac{\partial P_1}{\partial t},$$

al sustituir (2.39) se tiene

$$\frac{\partial P_1}{\partial t} = \frac{\partial f(\varrho_0, S_0)}{\partial \varrho} \left[ \frac{\partial \varrho_1}{\partial t} + \mathbf{v}_1 \cdot \nabla \varrho_0 \right].$$

Haciendo

$$c^2(\mathbf{x}) = \frac{\partial f(\varrho_0(\mathbf{x}), S_0(\mathbf{x}))}{\partial \varrho},$$



---

nos queda

$$\frac{\partial P_1}{\partial t} = c^2 \left[ \frac{\partial \varrho_1}{\partial t} + \mathbf{v}_1 \cdot \nabla \varrho_0 \right]. \quad (2.40)$$

Los valores que tome  $c$  dependen del fluido, y ésta es la velocidad de la onda acústica en el medio. Ahora derivamos (2.40) con respecto a  $t$ , y usando (2.36) y (2.37), queda

$$\frac{\partial^2 P_1}{\partial t^2} + \gamma \frac{\partial P_1}{\partial t} = c^2 \varrho_0 \nabla \cdot \left( \frac{1}{\varrho_0} \nabla P_1 \right).$$

Ésta es la ecuación de onda acústica básica para un medio estacionario. Obsérvese que el término  $1/\rho_0$  está dentro de la operación de divergencia. Para un medio uniforme, este término puede tomarse fuera de la divergencia:

$$\frac{\partial^2 P_1}{\partial t^2} + \gamma \frac{\partial P_1}{\partial t} - c^2 \nabla^2 P_1 = 0. \quad (2.41)$$

Consideremos ahora que  $P_1$  es armónico en el tiempo, i.e., es de la forma

$$P_1(\mathbf{x}, t) = \text{Re}[u(\mathbf{x})e^{-i\omega t}],$$

con  $\omega > 0$  y  $u = u(\mathbf{x})$  de valores complejos. Así, la ecuación (2.41) se convierte en

$$\nabla^2 u(\mathbf{x}) + \frac{\omega^2}{c^2} \left( 1 + i \frac{\gamma}{\omega} \right) u(\mathbf{x}) = 0. \quad (2.42)$$

Supongamos que tenemos un medio homogéneo, donde la velocidad de la onda  $c(\mathbf{x})$  es constante, digamos  $c(\mathbf{x}) = c_0$ , y  $\gamma = 0$ . La ecuación (2.42) en este caso es la ecuación de Helmholtz:

$$\nabla^2 u(\mathbf{x}) + k^2 u(\mathbf{x}) = 0,$$

donde  $k$  es el número de onda definido por

$$k = \frac{\omega}{c_0} > 0,$$

---

Cuando dentro de un medio homogéneo tenemos un obstáculo o dispersor, la velocidad no se conserva constante, y la ecuación que gobierna la propagación es (2.42). Si definimos el índice de refracción

$$n(\mathbf{x}) = \frac{c_0^2}{c^2(\mathbf{x})} \left( 1 + i \frac{\gamma}{\omega} \right),$$

nos queda

$$\nabla^2 u(\mathbf{x}) + k^2 n(\mathbf{x}) u(\mathbf{x}) = 0.$$

Entonces, las ecuaciones que modelan la propagación en la acústica son las mismas que para el caso electromagnético. Aunque la interpretación física es distinta, este trabajo de tesis puede extenderse para problemas de dispersión de ondas cuyo modelo siga siendo la ecuación de Helmholtz.

## 2.3. Teoría de dispersión

La teoría de dispersión ha jugado un papel central en la física matemática del siglo XX.

En términos muy generales, la teoría de dispersión se encarga del estudio del efecto que tiene un medio no homogéneo sobre una onda incidente. En particular, si el campo total se ve como la suma de un campo incidente  $u^i$  y un campo dispersado  $u^s$ , entonces el *problema de dispersión directo* es determinar  $u^s$  a partir del conocimiento de  $u^i$  y de la ecuación diferencial que gobierna el movimiento de la onda [21].

A continuación plantearemos el problema directo de dispersión de ondas sobre el cual se desarrolla este trabajo. Esta formulación, así como los resultados sobre las soluciones de Helmholtz en medios homogéneos de la sección 2.4, son válidos en cualquier área donde la ecuación de Helmholtz

---

modele la dispersión de ondas. Utilizaremos la letra  $u$  para denotar al campo escalar de ondas, que podrá interpretarse desde el punto de vista del electromagnetismo, la acústica, la mecánica de fluidos o alguna otra área.

### 2.3.1. Problema de dispersión de ondas

Consideramos el caso en que tenemos una heterogeneidad de soporte compacto al interior de una región que representa un medio homogéneo. La región en consideración está dada toda en  $\mathbb{R}^2$ . El movimiento de onda es causado por un campo incidente  $u^i$  que satisface la ecuación de Helmholtz sin perturbación:

$$\nabla^2 u(\mathbf{x}) + k^2 u(\mathbf{x}) = 0. \quad (2.43)$$

donde  $k \in \mathbb{R}, k > 0$  es el número de onda en el medio homogéneo y  $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^2$ . Esta onda incidente es dispersada por la heterogeneidad y se produce el campo  $u^s$ . Supongamos que la heterogeneidad está contenida en un disco  $D$  con centro en el origen y radio  $a > 0$ , i.e.  $c(\mathbf{x}) = \text{constante}$  para  $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^2 \setminus D$ . El problema de dispersión consiste en encontrar una solución  $u \in C^1(\mathbb{R}^2)$  de

$$\nabla^2 u(\mathbf{x}) + k^2 n^2(\mathbf{x}) u(\mathbf{x}) = 0; \quad (2.44)$$

tal que

$$u = u^i + u^s, \quad (2.45)$$

y  $u^s$  satisface la condición de radiación de Sommerfeld:

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \sqrt{r} \left( \frac{\partial u^s}{\partial r} - i k u^s \right) = 0, \quad (2.46)$$

con el límite uniforme en todas las direcciones  $\hat{x} = \mathbf{x}/|\mathbf{x}|$ , y donde  $r = |\mathbf{x}|$ . El índice de refracción representa el ratio entre la velocidad de la onda en el medio homogéneo que contiene la heterogeneidad y la velocidad de la

---

onda en la heterogeneidad. Así, en nuestro caso  $\mathbf{n}(\mathbf{x}) = 1$  para  $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^2 \setminus D$ . Supondremos que  $\mathbf{n}(\mathbf{x})$  es complejo; más aún, consideramos que hay atenuación de la onda y no amplificación:  $\text{Re}(\mathbf{n}) > 0, \text{Im}(\mathbf{n}) \geq 0$ .

La primera pregunta que surge en torno al problema de dispersión es la unicidad de la solución. Las herramientas básicas para establecer la unicidad son los teoremas de Green y el Principio de Continuación Única de las soluciones de ecuaciones elípticas [21]. La condición de radiación de Sommerfeld (2.46) es la que asegura la unicidad del problema de dispersión.

### Condición de radiación de Sommerfeld

Una solución  $u$  de la ecuación de Helmholtz

$$\nabla^2 u + k^2 u = 0,$$

cuyo dominio de definición incluye el exterior de una esfera se llama *solución de radiación* si satisface la condición de radiación de Sommerfeld:

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \sqrt{r} \left( \frac{\partial u}{\partial r} - iku \right) = 0,$$

donde  $r = |\mathbf{x}|$ , y el límite se da uniformemente en todas las direcciones  $\mathbf{x}/|\mathbf{x}|$ .

Esta condición de radiación fue introducida por Sommerfeld en 1912, y con ella se asegura la unicidad de la solución para problemas de propagación de ondas modelados por la ecuación de Helmholtz.

Físicamente la condición dice que las fuentes deben ser fuentes, no pozos, de energía. La energía que se irradia desde las fuentes debe dispersarse en infinito; y ninguna energía debería ser radiada desde el infinito hacia las singularidades del campo [60]. Lo anterior se corresponde con lo que ocurre en la naturaleza.

---

Como veremos en el siguiente capítulo hay dos tipos de soluciones a la ecuación de Helmholtz. Una representa la onda que se aleja, o que se irradia, y la otra la onda entrante, o que está siendo absorbida. De éstas sólo la primera satisface la condición de radiación. Así, la condición de Sommerfeld caracteriza a las ondas salientes.

El requisito de que  $u^s$  satisfaga la condición de radiación en el problema de dispersión garantiza a su vez la unicidad del problema [60].

Por ello, estaremos interesados en las soluciones de Helmholtz que satisfagan esta condición.

### 2.3.2. Unicidad del problema de dispersión

La prueba de la unicidad del problema de dispersión está basada en el siguiente teorema.

**Teorema 2.1 (Lema de Rellich)** *Sea  $\Omega$  un conjunto abierto acotado y  $u \in C^2(\mathbb{R}^2 \setminus \bar{\Omega})$  una solución a la ecuación de Helmholtz que satisface*

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \int_{|\mathbf{x}|=r} |u(\mathbf{x})|^2 ds = 0.$$

*Entonces  $u = 0$  en  $\mathbb{R}^2 \setminus \bar{\Omega}$ .*

Para la prueba puede consultar [19, 39]. La segunda herramienta importante es el Principio de Continuación Única.

**Teorema 2.2 (Principio de Continuación Única)** *Sea  $\Omega$  un dominio en  $\mathbb{R}^n$  y sea  $u : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  una función de clase  $C^2$  tal que*

$$|\nabla^2 u(\mathbf{x})| \leq L(|u(\mathbf{x})| + |\nabla u(\mathbf{x})|),$$

*para  $\mathbf{x} \in \Omega$ , y  $L$  independiente de  $\mathbf{x}$ . Si  $u$  se anula idénticamente sobre alguna bola  $B \subset \Omega$ , entonces  $u$  se anula en todo  $\Omega$ .*

---

Como consecuencia de éste se tiene lo siguiente.

**Teorema 2.3** *Sea  $\mathbf{n} \in C^2(\mathbb{R}^2)$  con  $\mathbf{n}(\mathbf{x}) = 1$  para  $|\mathbf{x}| \geq a$ , y  $a > 0$  dado. Sea  $u \in C^2(\mathbb{R}^2)$  una solución de la ecuación (2.44) en  $\mathbb{R}^2$ . Si  $u(\mathbf{x}) = 0$  para  $|\mathbf{x}| \geq b$  para algún  $b \geq a$ , entonces  $u$  se anula en todo  $\mathbb{R}^2$ .*

La demostración del teorema 2.3 puede consultarse en [21, 39]. La unicidad del problema de dispersión se da en el siguiente teorema. Damos un breve bosquejo de la prueba. La demostración completa se encuentra en [21, 39, 40]

**Teorema 2.4 (Unicidad del problema de dispersión)** *El problema de dispersión (2.44)-(2.46) tiene a lo más una solución, i.e. si  $u$  es una solución que corresponde a  $u^i = 0$ , entonces  $u = 0$ .*

**Demostración.** Sea  $u_i = 0$ . La condición de radiación (2.46) lleva a

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \int_{|\mathbf{x}|=r} |u|^2 ds = 0.$$

El lema de Rellich implica que  $u = 0$  para  $|\mathbf{x}| > a$ . Del teorema 2.3,  $u = 0$  en  $\mathbb{R}^2$ . ■

Ahora que hemos establecido la unicidad de la solución del problema de dispersión, la siguiente pregunta es la existencia y aproximación numérica de la solución. La aproximación más utilizada es el método de ecuaciones integrales [21]. El campo se calcula por medio de una *representación de Helmholtz*, la cual es una ecuación integral que relaciona el campo dispersado con el obstáculo o dispersor [29].

La representación integral del problema de dispersión de ondas es el objeto de estudio del siguiente capítulo.

---

Para obtener esta representación integral serán necesarios algunos resultados que caracterizan a las soluciones de la ecuación Helmholtz en un medio homogéneo, no perturbado. Sobre éstos trata la siguiente sección.

## 2.4. Representación de las soluciones de Helmholtz

Consideremos la ecuación

$$\nabla^2 u + k^2 u = 0, \tag{2.43}$$

definida en todo  $\mathbb{R}^2$ , donde  $k > 0$ .

Las propiedades básicas de las soluciones de (2.43) se deducen en su mayoría de su *solución fundamental*, ó *función de Green*.

### 2.4.1. Función de Green

Las funciones de Green fueron estudiadas por primera vez por George Green, razón por la cual llevan ese nombre. Su estudio lo desarrolló en un ensayo titulado “Análisis matemático de la teoría de electricidad y magnetismo” publicado en Nottingham en 1828. En este ensayo se formularon las soluciones en términos de la función de Green para la ecuación de Laplace y Poisson [26].

La función de Green es una fuerte herramienta matemática que ha sido utilizada para realizar cálculos en distintas áreas de las matemáticas y de la física matemática. En particular, en la solución de ecuaciones diferenciales parciales.

En principio, la técnica de función de Green puede aplicarse a cualquier ecuación diferencial parcial lineal no homogénea con coeficientes constantes, sea escalar o vectorial, y para cualquier número de variables independientes;

---

aunque en la práctica pueden surgir muchas dificultades técnicas con la realización de los cálculos.

Las funciones de Green proporcionan más que una solución, éstas nos permiten tener una representación integral de la ecuación en derivadas parciales. El núcleo de la ecuación integral está formado, completamente o en parte, por la función de Green asociada a la ecuación diferencial.

Físicamente, la función de Green es la respuesta de un sistema a un impulso, o fuente puntual, aplicado al sistema [45]. Matemáticamente se formula usando la función generalizada llamada *delta de Dirac*.

En esta sección nos enfocaremos solamente en la función de Green asociada a la ecuación de Helmholtz en dos dimensiones.

Para un estudio de las funciones de Green de la ecuación de Helmholtz en otras dimensiones, o de las funciones de Green en general, se puede consultar [25, 26, 61, 62].

Una de las herramientas básicas para las funciones de Green, así como de las propiedades de las soluciones de Helmholtz son las identidades integrales de Green.

### **Teorema de Green**

El teorema de Green es una consecuencia particular, pero de gran importancia, del teorema de la divergencia de Gauss. Éste último es esencialmente una generalización de la fórmula de integración por partes y del teorema fundamental del cálculo en una variable.

Puesto que el problema de dispersión que nos interesa está dado sobre  $\mathbb{R}^2$ , los siguientes resultados se enuncian para dos dimensiones. Los problemas de dispersión en  $\mathbb{R}^3$  son tratados ampliamente en referencias como [21, 39, 40]



---

Dado un conjunto  $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ , diremos que  $\Omega$  es un *dominio* si es abierto y conexo. El dominio  $\Omega$  será de *clase*  $C^k$  si su curva frontera  $\partial\Omega$  puede parametrizarse localmente con una aplicación biyectiva de clase  $C^k$ .

**Teorema 2.5 (Teorema de la divergencia de Gauss)** *Consideremos un dominio acotado  $\Omega \subset \mathbb{R}^2$  de clase  $C^1$ , y sea  $\mathbf{F}$  un campo vectorial  $C^1(\overline{\Omega})$ .*

*Entonces*

$$\iint_{\Omega} (\operatorname{div} \mathbf{F}) \, dA = \int_{\partial\Omega} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s} = \int_{\partial\Omega} (\mathbf{F} \cdot \mathbf{n}) \, ds,$$

*donde  $\mathbf{n}$  es la normal unitaria que apunta al exterior de la curva  $\partial\Omega$ .*

Consideremos dos funciones  $f, h$  de valores reales en  $C^2(\overline{\Omega})$  para  $\Omega$  como en el teorema de Gauss. Obsérvese que

$$\operatorname{div} (h\nabla f) = \nabla h \cdot \nabla f + h\nabla^2 f.$$

De la misma manera

$$\operatorname{div} (f\nabla h) = \nabla f \cdot \nabla h + f\nabla^2 h. \quad (2.47)$$

Entonces

$$\iint_{\Omega} \operatorname{div} (h\nabla f - f\nabla h) \, dA = \iint_{\Omega} (h\nabla^2 f - f\nabla^2 h) \, dA.$$

Sin embargo, por el teorema de Gauss

$$\iint_{\Omega} \operatorname{div} (h\nabla f - f\nabla h) \, dA = \int_{\partial\Omega} ((h\nabla f - f\nabla h) \cdot \mathbf{n}) \, ds.$$

Así que se tiene el siguiente teorema.

**Teorema 2.6 (Teorema de Green)** *Dadas dos funciones  $f, h$  de valores reales y clase  $C^2$  definidas en  $\overline{\Omega}$ , donde  $\Omega$  es un dominio acotado de clase  $C^1$ , se cumple*

$$\iint_{\Omega} (h\nabla^2 f - f\nabla^2 h) \, dA = \int_{\partial\Omega} ((h\nabla f - f\nabla h) \cdot \mathbf{n}) \, ds.$$

*A este resultado también se le conoce como segunda identidad de Green.*

---

La *primera identidad de Green* se obtiene de forma similar a partir de (2.47). Se tiene

$$\iint_{\Omega} (\nabla f \cdot \nabla h + f \nabla^2 h) dA = \int_{\partial\Omega} ((f \nabla h) \cdot \mathbf{n}) ds,$$

para funciones de valores reales  $f, h$  tales que  $f \in C^1(\Omega)$ ,  $h \in C^2(\Omega)$  y  $\Omega$  dominio acotado de clase  $C^1$ .

### Función de Green

Definimos la *solución fundamental*  $g$  de la ecuación de Helmholtz como la solución a la ecuación que se obtiene cuando en lugar de igualar a cero en (2.43) igualamos con la delta de Dirac que representa una fuente puntual en  $\mathbf{x}_0$ . Esto es, se debe satisfacer

$$(\nabla^2 + k^2)g(\mathbf{x}|\mathbf{x}_0, k) = -\delta^2(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0), \quad (2.48)$$

donde  $\mathbf{x}, \mathbf{x}_0 \in \mathbb{R}^2$  y  $\delta^2(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0) := \delta(x - x_0)\delta(y - y_0)$ . Cuando la solución fundamental está sujeta a condiciones de frontera o de radiación, se dice que es un *función de Green*. La función de Green es la respuesta del sistema a un impulso o perturbación en  $\mathbf{x}_0$  y representado por  $\delta^2(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0)$ .

Físicamente, las funciones de Green asociadas con problemas ondulatorios, como en el caso de la ecuación de Helmholtz, representan la manera en la cual la onda se propaga de un punto a otro del espacio [26]. Como veremos, la función de Green en nuestro caso es una función de la distancia entre  $\mathbf{x}$  y  $\mathbf{x}_0$ . Esta distancia está dada por  $|\mathbf{x} - \mathbf{x}_0|$ , es por ello que usamos la notación  $\mathbf{x}|\mathbf{x}_0 \equiv |\mathbf{x} - \mathbf{x}_0|$  y escribimos  $g(\mathbf{x}|\mathbf{x}_0, k)$ .

Ahora encontraremos una expresión de  $g$ . Para simplificar denotaremos  $\mathbf{R} = \mathbf{x} - \mathbf{x}_0$  y  $R = |\mathbf{R}| = |\mathbf{x} - \mathbf{x}_0|$ . Expresamos a  $g$  y  $\delta$  en términos de sus

---

transformadas de Fourier:

$$\begin{aligned} g(R, k) &= \frac{1}{(2\pi)^2} \iint_{\mathbb{R}^2} \hat{g}(\mathbf{v}, k) e^{i\mathbf{v}\cdot\mathbf{R}} dA(\mathbf{v}), \\ \delta^2(R, k) &= \frac{1}{(2\pi)^2} \iint_{\mathbb{R}^2} e^{i\mathbf{v}\cdot\mathbf{R}} dA(\mathbf{v}). \end{aligned} \quad (2.49)$$

Sustituimos en (2.48):

$$(\nabla^2 + k^2) \iint_{\mathbb{R}^2} \hat{g}(\mathbf{v}, k) e^{i\mathbf{v}\cdot\mathbf{R}} dA(\mathbf{v}) = - \iint_{\mathbb{R}^2} e^{i\mathbf{v}\cdot\mathbf{R}} dA(\mathbf{v}).$$

Diferenciando bajo la integral se obtiene

$$\iint_{\mathbb{R}^2} (-|\mathbf{v}|^2 + k^2) \hat{g}(\mathbf{v}, k) e^{i\mathbf{v}\cdot\mathbf{R}} dA(\mathbf{v}) = - \iint_{\mathbb{R}^2} e^{i\mathbf{v}\cdot\mathbf{R}} dA(\mathbf{v}).$$

De tal forma que

$$\hat{g}(\mathbf{v}, k) = \frac{1}{(|\mathbf{v}|^2 - k^2)}$$

Así, de (2.49)

$$g(R, k) = \frac{1}{(2\pi)^2} \iint_{\mathbb{R}^2} \frac{e^{i\mathbf{v}\cdot\mathbf{R}}}{(|\mathbf{v}|^2 - k^2)} dA(\mathbf{v}).$$

Recordemos que para cualesquiera dos vectores  $\mathbf{a}, \mathbf{b} \in \mathbb{R}^2$  se tiene

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = |\mathbf{a}||\mathbf{b}| \cos \theta,$$

donde  $0 \leq \theta \leq \pi$  es el ángulo entre los dos vectores. Si consideramos ahora  $(r, \theta)$  como coordenadas polares para  $\mathbf{v}$ , con  $\theta$  el ángulo entre  $\mathbf{v}$  y  $\mathbf{R}$ , queda

$$g(R, k) = \frac{1}{(2\pi)^2} \int_0^\pi \int_{\mathbb{R}} \frac{e^{irR \cos \theta}}{(r^2 - k^2)} r dr d\theta. \quad (2.50)$$

Para evaluar la integral sobre  $r$  haremos uso de la fórmula integral de Cauchy aplicada a la función

$$f(z) = \frac{z e^{izR \cos \theta}}{z + k}. \quad (2.51)$$

---

Tenemos que

$$\int_{\Gamma} \frac{f(z)}{z-k} dz = (2\pi i) \cdot f(k) = i\pi e^{ikR \cos \theta},$$

donde  $\Gamma$  es una curva cerrada simple que encierra a  $z = k$ . Entonces,

$$\int_{\Gamma} \frac{ze^{izR \cos \theta}}{z^2 - k^2} dz = \int_{\Gamma} \frac{ze^{izR \cos \theta}}{(z+k)(z-k)} dz = i\pi e^{ikR \cos \theta}.$$

Esto nos dará una expresión para la función de Green que representa la propagación de las ondas que viajan alejándose del punto de perturbación  $\mathbf{x} = \mathbf{x}_0$ ; es decir, la solución fundamental que satisface la condición de radiación de Sommerfeld. En este caso la función de Green se determina por

$$g(R, k) = \frac{1}{(2\pi)^2} \int_0^\pi i\pi e^{ikR \cos \theta} d\theta = \frac{i}{4\pi} \int_0^\pi e^{ikR \cos \theta} d\theta. \quad (2.52)$$

Existe un tipo especial de funciones conocidas como funciones de Hankel. En el siguiente capítulo hablaremos un poco al respecto de tales funciones. Puesto que la función de Hankel de la primera clase de orden cero se puede expresar como

$$H_0^{(1)}(x) = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi e^{ix \cos \phi} d\phi,$$

donde  $x \in \mathbb{R}$ , escribimos la función de Green (2.52) para la ecuación de Helmholtz como

$$g(R, k) = \frac{i}{4} H_0^{(1)}(kR) = \frac{i}{4} H_0^{(1)}(k|\mathbf{x} - \mathbf{x}_0|).$$

Si para evaluar la integral respecto a  $r$  en (2.50) usamos  $f(z) = ze^{izR \cos \theta}/(z-k)$ , y  $\Gamma$  una curva cerrada simple que encierra a  $z = -k$ , obtendremos la función de Green que representa a una onda entrante, es decir, una onda viajando hacia  $\mathbf{x} = \mathbf{x}_0$ .

Puesto que estamos interesados en soluciones que satisfacen la condición de radiación de Sommerfeld, en adelante consideramos la función de Green

---

dada por

$$g(\mathbf{x}|\mathbf{x}_0, k) = \frac{i}{4} H_0^{(1)}(k|\mathbf{x} - \mathbf{x}_0|). \quad (2.53)$$

Dado que la función de Hankel  $H_0^{(1)}(\mathbf{x})$  es singular para el punto  $\mathbf{x} = 0$ , la función de Green es singular cuando  $k = 0$  ó  $\mathbf{x} = \mathbf{x}_0$ .

Nótese que por la forma en que está dada, la función de Green tiene la propiedad de reciprocidad:

$$g(\mathbf{x}|\mathbf{y}, k) = g(\mathbf{y}|\mathbf{x}, k).$$

Un buen ejemplo de esta función de Green bidimensional se observa cuando una pequeña piedra cae verticalmente dentro de un estanque. La expansión simétrica de los frentes de onda representan el resultado de un impulso corto sobre la superficie del agua. ¡Lo que se observa es una buena aproximación de una función de Hankel! [26].

#### 2.4.2. Representación de Helmholtz y fórmula de Green

En esta parte vamos encontrar una expresión para la solución de Helmholtz en el interior de una región en  $\mathbb{R}^2$ . Esta fórmula se conoce como *representación de Helmholtz*.

Sea  $\Omega \subset \mathbb{R}^2$  un dominio acotado de clase  $C^2$  y  $u$  una función en  $C^2(\Omega) \cap C(\bar{\Omega})$  que es solución de la ecuación de Helmholtz

$$\nabla^2 u(\mathbf{x}) + k^2 u(\mathbf{x}) = 0 \quad (2.54)$$

en  $\Omega$ . Consideremos la función de Green  $g(\mathbf{x}|\mathbf{x}_0, k)$ :

$$\nabla^2 g(\mathbf{x}|\mathbf{x}_0, k) + k^2 g(\mathbf{x}|\mathbf{x}_0, k) = \delta^2(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0) \quad (2.48)$$

la cual está definida para  $\mathbf{x}, \mathbf{x}_0 \in \mathbb{R}^2$ . En particular supongamos que  $\mathbf{x}, \mathbf{x}_0 \in \Omega$ . Multiplicamos (2.54) por  $g(\mathbf{x}|\mathbf{x}_0, k)$ , (2.48) por  $u(\mathbf{x})$  y restamos para

---

obtener

$$g(\mathbf{x}|\mathbf{x}_0, k)\nabla^2 u(\mathbf{x}) - u(\mathbf{x})\nabla^2 g(\mathbf{x}|\mathbf{x}_0, k) = -u(\mathbf{x})\delta^2(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0).$$

Integramos sobre  $\mathbf{x} \in \Omega$ , y por propiedad de la delta de Dirac nos queda

$$u(\mathbf{x}_0) = \iint_{\Omega} [g(\mathbf{x}|\mathbf{x}_0, k)\nabla^2 u(\mathbf{x}) - u(\mathbf{x})\nabla^2 g(\mathbf{x}|\mathbf{x}_0, k)] dA(\mathbf{x}),$$

para todo  $\mathbf{x}_0 \in \Omega$ . Del teorema de Green,

$$u(\mathbf{x}_0) = \int_{\partial\Omega} [g(\mathbf{x}|\mathbf{x}_0, k)\nabla u(\mathbf{x}) - u(\mathbf{x})\nabla g(\mathbf{x}|\mathbf{x}_0, k)] \cdot \mathbf{n} ds(\mathbf{x}),$$

Obsérvese que si  $\mathbf{x}_0 \in \mathbb{R}^2 \setminus \bar{\Omega}$ , entonces la integral es idénticamente cero. Esto se debe a que en este caso la función de Green no tiene singularidad y satisface

$$\nabla^2 g(\mathbf{x}|\mathbf{x}_0, k) + k^2 g(\mathbf{x}|\mathbf{x}_0, k) = 0.$$

Resumimos lo anterior en el siguiente teorema, para el que hemos usado la propiedad de reciprocidad de la función de Green.

**Teorema 2.7 (Representación de Helmholtz)** *Sea  $\Omega \subset \mathbb{R}^2$  un dominio acotado de clase  $C^2$  y  $u \in C^2(\Omega) \cap C(\bar{\Omega})$  solución de la ecuación de Helmholtz*

$$\nabla^2 u + k^2 u = 0$$

en  $\Omega$ . Entonces

$$u(\mathbf{x}) = \int_{\partial\Omega} [g(\mathbf{x}|\mathbf{z}, k)\nabla_{\mathbf{z}} u(\mathbf{z}) - u(\mathbf{z})\nabla_{\mathbf{z}} g(\mathbf{x}|\mathbf{z}, k)] \cdot \mathbf{n}(\mathbf{z}) ds(\mathbf{z}),$$

para  $\mathbf{x} \in \Omega$ .

Cuando  $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^2 \setminus \bar{\Omega}$ ,

$$\int_{\partial\Omega} [g(\mathbf{x}|\mathbf{z}, k)\nabla_{\mathbf{z}} u(\mathbf{z}) - u(\mathbf{z})\nabla_{\mathbf{z}} g(\mathbf{x}|\mathbf{z}, k)] \cdot \mathbf{n}(\mathbf{z}) ds(\mathbf{z}) = 0.$$

---

El teorema 2.7 también es válido para valores complejos de  $k$ .

La representación de una solución de Helmholtz en el exterior de una región se conoce como *fórmula de Green*. Para encontrar ésta se hace uso del teorema 2.7 y de la condición de radiación de Sommerfeld.

**Teorema 2.8 (Fórmula de Green)** *Considérese un dominio  $\Omega$  acotado y simplemente conexo. Sea  $u$  una función de clase  $C^2$  en  $\mathbb{R}^2 \setminus \bar{\Omega}$  y de clase  $C^1$  en  $\mathbb{R}^2 \setminus \Omega$ , que es solución de radiación de la ecuación de Helmholtz en  $\mathbb{R}^2 \setminus \bar{\Omega}$ . Entonces*

$$u(\mathbf{x}) = \int_{\partial\Omega} [u(\mathbf{z})\nabla_{\mathbf{z}}g(\mathbf{x}|\mathbf{z}) - g(\mathbf{x}|\mathbf{z})\nabla_{\mathbf{z}}u(\mathbf{z})] \cdot \mathbf{n}(\mathbf{z}) \, ds(\mathbf{z})$$

para  $x \in \mathbb{R}^2 \setminus \bar{\Omega}$ , con  $g(\mathbf{x}|\mathbf{z})$  la función de Green de Helmholtz.

**Demostración.** Sea  $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^2 \setminus \Omega^*$  y sea  $D_r$  un disco con centro en el origen y radio  $r$  que contenga en su interior a  $\bar{\Omega}$  y a  $\mathbf{x}$ . Denotamos por  $\Omega^*$  la región  $D_r \setminus \Omega$  y por  $\partial\Omega^*$  su frontera. Notemos que  $u$  es solución de Helmholtz en  $\Omega^*$  tal que es de clase  $C^2$  en  $\Omega^*$  y de clase  $C^1$  en  $\partial\Omega^*$ . Por el teorema (2.7),

$$u(\mathbf{x}) = \int_{\partial\Omega^*} [g(\mathbf{x}|\mathbf{z}, k)\nabla_{\mathbf{z}}u(\mathbf{z}) - u(\mathbf{z})\nabla_{\mathbf{z}}g(\mathbf{x}|\mathbf{z}, k)] \cdot \mathbf{n}(\mathbf{z}) \, ds(\mathbf{z}).$$

Luego,

$$\begin{aligned} u(\mathbf{x}) &= \int_{\partial D_r} [g(\mathbf{x}|\mathbf{z}, k)\nabla_{\mathbf{z}}u(\mathbf{z}) - u(\mathbf{z})\nabla_{\mathbf{z}}g(\mathbf{x}|\mathbf{z}, k)] \cdot \mathbf{n}(\mathbf{z}) \, ds(\mathbf{z}) \\ &\quad - \int_{\partial\Omega} [g(\mathbf{x}|\mathbf{z}, k)\nabla_{\mathbf{z}}u(\mathbf{z}) - u(\mathbf{z})\nabla_{\mathbf{z}}g(\mathbf{x}|\mathbf{z}, k)] \cdot \mathbf{n}(\mathbf{z}) \, ds(\mathbf{z}) \\ &= \int_{\partial\Omega} [u(\mathbf{z})\nabla_{\mathbf{z}}g(\mathbf{x}|\mathbf{z}, k) - g(\mathbf{x}|\mathbf{z}, k)\nabla_{\mathbf{z}}u(\mathbf{z})] \cdot \mathbf{n}(\mathbf{z}) \, ds(\mathbf{z}) \\ &\quad - \int_{\partial D_r} [u(\mathbf{z})\nabla_{\mathbf{z}}g(\mathbf{x}|\mathbf{z}, k) - g(\mathbf{x}|\mathbf{z}, k)\nabla_{\mathbf{z}}u(\mathbf{z})] \cdot \mathbf{n}(\mathbf{z}) \, ds(\mathbf{z}). \end{aligned} \tag{2.55}$$

---

Para completar la demostración del teorema, se prueba que la integral sobre  $\partial D_r$  es cero cuando  $r \rightarrow \infty$ .

De la condición de radiación de Sommerfeld se puede probar que cuando  $r \rightarrow \infty$

$$\int_{D_r} |u(\mathbf{z})|^2 ds(\mathbf{z}) = \int_{|\mathbf{z}|=r} |u(\mathbf{z})|^2 ds(\mathbf{z}) = \mathcal{O}(1). \quad (2.56)$$

Por otra parte se tiene la identidad

$$\begin{aligned} & \int_{\partial D_r} [u(\mathbf{z}) \nabla_{\mathbf{z}} g(\mathbf{x}|\mathbf{z}, k) - g(\mathbf{x}|\mathbf{z}, k) \nabla_{\mathbf{z}} u(\mathbf{z})] \cdot \mathbf{n}(\mathbf{z}) ds(\mathbf{z}) \\ &= \int_{|\mathbf{z}|=R} u(\mathbf{z}) [\nabla_{\mathbf{z}} g(\mathbf{x}|\mathbf{z}, k) \cdot \mathbf{n}(\mathbf{z}) - ikg(\mathbf{x}|\mathbf{z}, k)] ds(\mathbf{z}) \\ & \quad - \int_{|\mathbf{z}|=R} g(\mathbf{x}|\mathbf{z}, k) [\nabla_{\mathbf{z}} u(\mathbf{z}) \cdot \mathbf{n}(\mathbf{z}) - iku(\mathbf{z})] ds(\mathbf{z}). \end{aligned}$$

Aplicando la desigualdad de Schwarz a cada integral, usando (2.56), el hecho de que  $g(\mathbf{x}|\mathbf{z}, k) = \mathcal{O}(1/\sqrt{r})$ , y que tanto  $u$  como  $g$  satisfacen la condición de Sommerfeld, se deduce que la integral sobre  $\partial D_r$  en (2.55) tiende a cero cuando  $r \rightarrow 0$ . ■

Una prueba más detallada de la fórmula de Green se puede encontrar en [19, 21].



---

---

# Representación integral del problema de dispersión

El problema de dispersión de ondas puede llevarse a una forma integral equivalente conocida como ecuación de Lippmann-Schwinger. Aún cuando se sabe, por métodos del análisis funcional, que la solución de este problema existe, calcularla numéricamente requiere del uso de aproximaciones.

El objetivo en este capítulo es construir una fórmula que permita el cálculo aproximado del campo dispersado en un dominio circular. Como veremos, se trata de una expresión integral oscilatoria.

La ecuación de Lippmann-Schwinger la deduciremos en la Sección 3.1, y la primera aproximación que realizaremos será la aproximación de Born.

Dada la geometría del problema de nuestro interés, es importante considerar las soluciones cilíndricas de Helmholtz. Estas soluciones se obtendrán en la segunda sección, y se darán algunas de sus propiedades más importantes, como la fórmula de adición.

En la tercera sección adaptamos el problema de dispersión a una geo-

---

metría circular. Con la ayuda de las expresiones asintóticas de las soluciones cilíndricas en coordenadas polares, obtendremos una representación asintótica del campo dispersado. Ésta tiene la forma de integral oscilatoria. Daremos aquí algunos ejemplos numéricos. Los valores de los parámetros en las simulaciones han sido tomados de la literatura y corresponden a datos en tejido biológico.

### 3.1. Ecuación de Lippman-Schwinger

Consideremos el modelo dispersión (2.44)-(2.46) bajo las consideraciones señaladas en 2.3.1

Este problema de dispersión se puede ver como una integral de Fredholm de la segunda clase. Para probar esto suponemos que  $\mathbf{n} \in C^2(\mathbb{R}^2)$ , y

$$m(\mathbf{x}) = 1 - \mathbf{n}^2(\mathbf{x})$$

de soporte compacto. Digamos que  $\Omega = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^2 : m(\mathbf{x}) \neq 0\}$ . Esto implica que  $\Omega \subset D$ . La ecuación (2.44) queda

$$\nabla^2 u(\mathbf{x}) + k^2 u(\mathbf{x}) - m(\mathbf{x})u(\mathbf{x}) = 0, \quad (3.1)$$

con  $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^2$ . Nuevamente consideramos la función de Green  $g(\mathbf{x}|\mathbf{x}_0, k)$ , tal que

$$\nabla^2 g(\mathbf{x}|\mathbf{x}_0, k) + k^2 g(\mathbf{x}|\mathbf{x}_0, k) = \delta^2(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0), \quad (2.48)$$

con  $\mathbf{x}, \mathbf{x}_0 \in \mathbb{R}^2$ . Multiplicando (3.1) por  $g(\mathbf{x}|\mathbf{x}_0, k)$ , (2.48) por  $u(\mathbf{x})$ , y restando

$$\begin{aligned} g(\mathbf{x}|\mathbf{x}_0, k)\nabla^2 u(\mathbf{x}) - u(\mathbf{x})\nabla^2 g(\mathbf{x}|\mathbf{x}_0, k) - k^2 g(\mathbf{x}|\mathbf{x}_0, k)m(\mathbf{x})u(\mathbf{x}) \\ = u(\mathbf{x})\delta^2(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0). \end{aligned}$$

---

Ahora tomamos la integral sobre  $\mathbf{x} \in D$ :

$$u(\mathbf{x}_0) = \iint_D [g(\mathbf{x}|\mathbf{x}_0, k) \nabla^2 u(\mathbf{x}) - u(\mathbf{x}) \nabla^2 g(\mathbf{x}|\mathbf{x}_0, k)] dA(\mathbf{x}) \\ - \iint_D k^2 g(\mathbf{x}|\mathbf{x}_0, k) m(\mathbf{x}) u(\mathbf{x}) dA(\mathbf{x}),$$

siempre que  $\mathbf{x}_0 \in D$ . Haciendo uso de la propiedad de reciprocidad de la función de Green, realizaremos un cambio de notación. Tenemos

$$u(\mathbf{x}) = \iint_D [g(\mathbf{x}|\mathbf{z}, k) \nabla^2 u(\mathbf{z}) - u(\mathbf{z}) \nabla^2 g(\mathbf{x}|\mathbf{z}, k)] dA(\mathbf{z}) \\ - k^2 \iint_D g(\mathbf{x}|\mathbf{z}, k) m(\mathbf{z}) u(\mathbf{z}) dA(\mathbf{z}),$$

con  $\mathbf{x} \in D$ . Por el teorema de Green,

$$u(\mathbf{x}) = \int_{\partial D} [g(\mathbf{x}|\mathbf{z}, k) \nabla u(\mathbf{z}) - u(\mathbf{z}) \nabla g(\mathbf{x}|\mathbf{z}, k)] \cdot \mathbf{n}(\mathbf{z}) ds(\mathbf{z}) \\ - k^2 \iint_D g(\mathbf{x}|\mathbf{z}, k) m(\mathbf{z}) u(\mathbf{z}) dA(\mathbf{z})$$

para  $\mathbf{x} \in D$ . Como (2.45) se cumple, entonces

$$u^i(\mathbf{x}) + u^s(\mathbf{x}) = \int_{\partial D} [g(\mathbf{x}|\mathbf{z}, k) \nabla (u^i(\mathbf{z}) + u^s(\mathbf{z}))] \cdot \mathbf{n}(\mathbf{z}) ds(\mathbf{z}) \\ - \int_{\partial D} [(u^i(\mathbf{z}) + u^s(\mathbf{z})) \nabla g(\mathbf{x}|\mathbf{z}, k)] \cdot \mathbf{n}(\mathbf{z}) ds(\mathbf{z}) \\ - k^2 \iint_D g(\mathbf{x}|\mathbf{z}, k) m(\mathbf{z}) u(\mathbf{z}) dA(\mathbf{z}) \\ = \int_{\partial D} [g(\mathbf{x}|\mathbf{z}, k) \nabla u^i(\mathbf{z}) - u^i(\mathbf{z}) \nabla g(\mathbf{x}|\mathbf{z}, k)] \cdot \mathbf{n}(\mathbf{z}) ds(\mathbf{z}) \\ + \int_{\partial D} [g(\mathbf{x}|\mathbf{z}, k) \nabla u^s(\mathbf{z}) - u^s(\mathbf{z}) \nabla g(\mathbf{x}|\mathbf{z}, k)] \cdot \mathbf{n}(\mathbf{z}) ds(\mathbf{z}) \\ - k^2 \iint_D g(\mathbf{x}|\mathbf{z}, k) m(\mathbf{z}) u(\mathbf{z}) dA(\mathbf{z})$$

en  $D$ . Puesto que la representación de Helmholtz para  $u^i$  en  $D$  es

$$u^i(\mathbf{x}) = \int_{\partial \Omega} [g(\mathbf{x}|\mathbf{z}, k) \nabla u^i(\mathbf{z}) - u^i(\mathbf{z}) \nabla g(\mathbf{x}|\mathbf{z}, k)] \cdot \mathbf{n}(\mathbf{z}) ds(\mathbf{z}),$$

---

se sigue

$$u^s(\mathbf{x}) = \int_{\partial D} [g(\mathbf{x}|\mathbf{z}, k)\nabla u^s(\mathbf{z}) - u^s(\mathbf{z})\nabla g(\mathbf{x}|\mathbf{z}, k)] \cdot \mathbf{n}(\mathbf{z}) \, ds(\mathbf{z}) - k^2 \iint_D g(\mathbf{x}|\mathbf{z}, k)m(\mathbf{z})u(\mathbf{z}) \, dA(\mathbf{z}),$$

en  $D$ . De la condición de radiación se obtiene que

$$\int_{\partial D} [g(\mathbf{x}|\mathbf{z}, k)\nabla u^s(\mathbf{z}) - u^s(\mathbf{z})\nabla g(\mathbf{x}|\mathbf{z}, k)] \cdot \mathbf{n}(\mathbf{z}) \, ds(\mathbf{z}) = 0.$$

Luego entonces, para  $\mathbf{x} \in D$ ,

$$u^s(\mathbf{x}) = -k^2 \iint_D g(\mathbf{x}|\mathbf{z}, k)m(\mathbf{z})u(\mathbf{z}) \, dA(\mathbf{z}). \quad (3.2)$$

Nótese que, como el soporte de  $m$  está contenido en  $D$ , la ecuación (3.2) se puede extender a todo  $\mathbb{R}^2$

Obtenemos así la *ecuación de Lippmann-Schwinger* para el campo total  $u$ :

$$u(\mathbf{x}) = u^i(\mathbf{x}) - k^2 \iint_{\mathbb{R}^2} g(\mathbf{x}|\mathbf{z}, k)m(\mathbf{z})u(\mathbf{z}) \, dA(\mathbf{z}), \quad (3.3)$$

con  $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^2$ . Ésta es una integral de Fredholm de segunda clase.

Recíprocamente se puede mostrar que, si  $u \in C(\mathbb{R}^2)$  es solución de la ecuación de Lippmann-Schwinger (3.3), entonces  $u \in C^2(\mathbb{R}^2)$  es solución del problema de dispersión (2.44)-(2.46). La prueba de ésto puede consultarse en [21, 39].

**Teorema 3.1** *Si  $u \in C^2(\mathbb{R}^2)$  una solución al problema de dispersión (2.44)-(2.46), entonces  $u$  es solución de (3.3). Recíprocamente, si  $u \in C(\mathbb{R}^2)$  es solución de (3.3), entonces  $u \in C^2(\mathbb{R}^2)$  es solución de (2.44)-(2.46).*

La unicidad de la solución de la ecuación integral (3.3) se puede probar también con análisis funcional.

Por lo tanto, es suficiente encontrar la solución única de (3.3) para resolver el problema de dispersión también de forma única.

---

### 3.1.1. Aproximación de Born

Aún cuando la fórmula (3.3) nos proporciona la manera de calcular el campo dispersado  $u^s$  y el campo total  $u$ , es claro que falta conocer  $u$  dentro de  $D$ . En la práctica no es posible conocer este valor y es necesario realizar una aproximación que modele el problema físico de manera adecuada [26].

Uno de los modelos más usados en teoría de dispersión es la aproximación de Born. Ésta se realiza cuando el contraste entre el medio y el dispersor es pequeño; es decir, el campo dispersado es débil porque los dispersores se parecen al medio. Por lo tanto se hace la suposición de que cerca del dispersor el campo se comporta como el campo incidente. Es decir,  $u = u^i$  en  $D$ . Bajo esta hipótesis podemos encontrar una solución aproximada para  $u^s$  y  $u$ .

Esta aproximación fue introducida por Born en 1920 en sus estudios de mecánica cuántica [26].

Calculamos el campo total mediante

$$u(\mathbf{x}) = u^i(\mathbf{x}) - k^2 \iint_{\mathbb{R}^2} g(\mathbf{x}|\mathbf{z}, k) m(\mathbf{z}) u^i(\mathbf{z}) dA(\mathbf{z}),$$

con  $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^2$ .

Es importante, por tanto, conocer bien la forma de las ondas incidentes. Las soluciones más simples de la ecuación de Helmholtz

$$\nabla^2 u + k^2 u = 0 \tag{2.43}$$

en  $\mathbb{R}^2$  son las ondas planas y las ondas cilíndricas. Las ondas planas tiene la forma

$$u(\mathbf{x}) = a e^{ik\vec{\mathbf{k}} \cdot \mathbf{x}},$$

donde  $\vec{\mathbf{k}}$  es algún vector unitario que describe la dirección de propagación de la onda plana, y la amplitud  $a \in \mathbb{C}$  alguna constante. Por otra parte, las

---

*ondas cilíndricas* en  $\mathbb{R}^2$  hacen uso de la función de Hankel  $H_0^{(1)}$  de la primer orden y de la primera clase. Están dadas por

$$u(\mathbf{x}) = aH_0^{(1)}(k|\mathbf{x} - \mathbf{y}|),$$

para  $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^2 \setminus \{\mathbf{y}\}$  y  $a \in \mathbb{C}$  constante.

Cualquier de estas dos formas de solución pueden considerarse como onda incidente y realizar el cálculo numérico de  $u$  en el problema de dispersión. Sin embargo, pueden surgir situaciones físicas en las que la geometría del problema haga más conveniente el uso de una que de la otra. Por el problema de aplicación que nos interesa, aquí consideraremos las ondas cilíndricas. El problema de dispersión tratado con ondas incidentes planas puede revisarse en [19].

## 3.2. Soluciones cilíndricas de Helmholtz

Las soluciones cilíndricas de la ecuación de Helmholtz se obtienen al pasar la ecuación (2.43) a coordenadas polares. De esta transformación surge la ecuación conocida como *ecuación de Bessel*, y de ésta las soluciones o *funciones de Bessel* de la primera, segunda y tercera clase. Sobre esto trata la presente sección.

### 3.2.1. Funciones de Bessel

En general, muchos de los problemas en dos dimensiones que involucran el laplaciano  $\nabla^2 u$  están dados sobre regiones en las que conviene expresar la ecuación en coordenadas polares más que en coordenadas rectangulares. Una vez expresado el problema en coordenadas polares, el proceso de separación

---

de variables produce una ecuación diferencial de la forma

$$r^2 \frac{d^2 y}{dr^2} + r \frac{dy}{dr} + (\nu r^2 - \lambda^2)y = 0. \quad (3.4)$$

donde  $y = y(r)$ . Aquí,  $-\lambda^2$  es una constante de separación, y los valores de  $\lambda^2$  son los valores propios del problema de Sturm-Liouville asociado a (3.4). El parámetro  $\nu$  es un número no negativo determinado por aspectos del problema. Con una sustitución adecuada, la ecuación puede transformarse en una que no involucra  $\nu$ :

$$z^2 y''(z) + zy'(z) + (z^2 - \lambda^2)y(z) = 0.$$

Esta ecuación se conoce como la *ecuación de Bessel*, y sus soluciones se llaman *funciones de Bessel*, o *funciones cilíndricas*. La variable  $z$  y el parámetro  $\lambda$  pueden ser números complejos arbitrarios. Aunque para la mayoría de las aplicaciones ambos son reales y no negativos, resulta conveniente trabajar en un contexto de variable compleja.

Consideremos pues la ecuación de Helmholtz en  $\mathbb{R}^2$

$$\nabla^2 u(\mathbf{x}) + k^2 u(\mathbf{x}) = 0. \quad (2.43)$$

Si  $(r, \theta)$  son las coordenadas polares de  $\mathbf{x}$ , la expresión (2.43) es equivalente a

$$\frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2} + k^2 u = 0,$$

donde  $u = u(r, \theta)$ . Considerando que  $u(r, \theta) = y(r)\vartheta(\theta)$ , se encuentra que

$$\begin{aligned} r^2 \frac{d^2 y}{dr^2} + r \frac{dy}{dr} + (k^2 r^2 - \lambda^2)y &= 0, \\ \frac{d^2 \vartheta}{d\theta^2} + \lambda^2 \vartheta &= 0, \end{aligned} \quad (3.5)$$

aquí  $-\lambda^2$  es la constante de separación. Impondremos soluciones para  $\vartheta$  que sean de la forma  $e^{in\theta}$ , con  $n$  un entero; de tal manera que  $u$  sea periódica en

---

$\theta$ , de periodo  $2\pi$ . Tenemos pues que  $\lambda = n$ . Haciendo el cambio de variable  $z = kr$  en (3.5) nos queda la ecuación de Bessel

$$z^2 \frac{d^2 y}{dz^2} + z \frac{dy}{dz} + (z^2 - n^2)y = 0,$$

o bien,

$$y''(z) + \frac{1}{z}y'(z) + \left(1 - \frac{n^2}{z^2}\right)y = 0. \quad (3.6)$$

Dado que  $z = 0$  es un punto singular regular de la ecuación (3.6), esperamos encontrar soluciones de la forma

$$y(z) = \sum_{j=0}^{\infty} a_j z^{j+b},$$

donde el exponente  $b$  y los coeficientes  $a_j$  son los que se van a determinar.

Se encuentra que para cada  $n = 0, 1, 2, \dots$ ,

$$J_n(z) = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{(-1)^j}{j!(n+j)!} \left(\frac{z}{2}\right)^{n+2j}$$

es solución de (3.6). A  $J_n$  se le conoce como la *función de Bessel de primera clase de orden  $n$* . Definidas para  $z \in \mathbb{C}$ , estas funciones son analíticas en todo  $\mathbb{C}$ .

Es posible encontrar una segunda solución linealmente independiente de  $J_n(z)$ . A ésta se le llama *función de Bessel de segunda clase de orden  $n$* , o *función de Neumann de orden  $n$* , y se denota por  $Y_n(z)$ . Existen varios métodos para encontrar dicha solución, pero la teoría resulta considerablemente más complicada que para  $J_n(z)$ . Nos limitaremos a dar solamente el resultado. Para  $n \geq 0$ ,

$$\begin{aligned} Y_n(z) = & \frac{2}{\pi} \left( \log \frac{z}{2} + \varsigma \right) J_n(z) - \frac{1}{\pi} \sum_{j=0}^{n-1} \frac{(n-1-j)!}{j!} \left(\frac{2}{z}\right)^{n-2j} \\ & - \frac{1}{\pi} \sum_{j=0}^{\infty} \frac{(-1)^j}{j!(n+j)!} \left(\frac{z}{2}\right)^{n+2j} [\varrho(j+n) + \varrho(j)], \end{aligned}$$



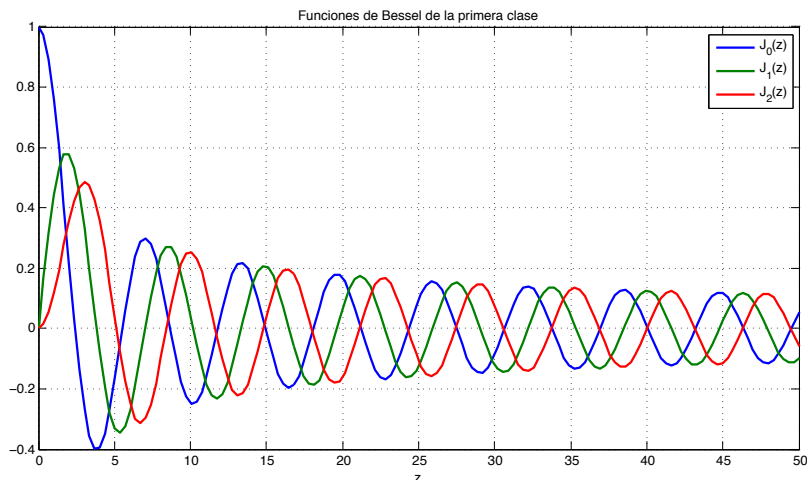


Figura 3.1: Primeras tres funciones de Bessel de la primera clase

siempre que  $z \in \mathbb{C} \setminus (-\infty, 0]$ , donde  $\varrho(0) = 0$ ,  $\varrho(j) = \sum_{s=1}^j \frac{1}{s}$  y  $\varsigma = 0.57721566$  es la constante de Euler.

Entonces, si  $z \notin (-\infty, 0]$  la solución general de la ecuación de Bessel (3.6) se puede escribir como

$$y_n(z) = B_1 J_n(z) + B_2 Y_n(z), \quad (3.7)$$

para cada  $n = 0, 1, 2, \dots$ , con  $B_1$  y  $B_2$  constantes complejas arbitrarias.

En las figuras 3.1 y 3.2 presentamos las gráficas de las primeras tres funciones de Bessel de primera y segunda clase, respectivamente.

El proceso que hemos seguido nos ha servido para tener las funciones de Bessel de órdenes enteros no negativos. Pero notemos que si sustituimos  $-n$  en lugar de  $n$  ( $n \geq 0$ ) en la ecuación (3.6), ésta no se altera. Es lógico pensar entonces que existen soluciones, o funciones de Bessel, para órdenes

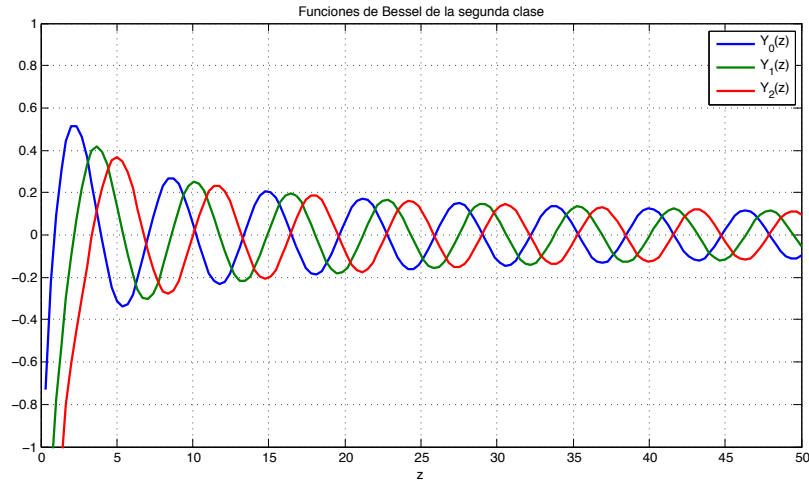


Figura 3.2: Primeras tres funciones de Bessel de la segunda clase

negativos:  $J_{-n}(z), Y_{-n}(z)$ . A éstas las definimos como

$$J_{-n}(z) := (-1)^n J_n(z),$$

$$Y_{-n}(z) := (-1)^n Y_n(z).$$

Se puede probar que, en efecto, éstas funciones satisfacen la ecuación de Bessel; y que  $\{J_n, Y_n\}$  forman un conjunto fundamental de soluciones para la ecuación (3.6) con  $n$  cualquier entero [65].

### Funciones de Hankel

En numerosas investigaciones sobre la teoría de funciones de Bessel, así como en aplicaciones físico matemáticas, aparecen frecuentemente dos combinaciones de las funciones de Bessel:  $J_n(z) \pm iY_n(z)$ . Tiene sentido entonces pensar en este par de funciones como soluciones de la ecuación (3.6).

A estas funciones se les llama *funciones de Bessel de tercera clase* o *funciones de Hankel*, en honor del matemático alemán Hermann Hankel

---

(1839-1873). Se les denota por  $H_n^{(1)}(z), H_n^{(2)}(z)$ :

$$H_n^{(1)}(z) = J_n(z) + iY_n(z) \quad (3.8)$$

$$H_n^{(2)}(z) = J_n(z) - iY_n(z); \quad (3.9)$$

y, en efecto,  $\{H_n^{(1)}, H_n^{(2)}\}$  forman un conjunto fundamental de soluciones de la ecuación de Bessel.

Así, una solución equivalente a (3.7) para la ecuación de Bessel (3.6) está dada por

$$y_n(z) = F_1 H_n^{(1)}(z) + F_2 H_n^{(2)}(z),$$

para  $n$  cualquier entero,  $z \notin (-\infty, 0]$ , y  $F_1, F_2 \in \mathbb{C}$  constantes arbitrarias.

La formulación (3.8)-(3.9) de las funciones de Hankel es análoga a la descomposición de la función exponencial en sus componentes trigonométricas, como lo representamos en este arreglo:

$$\begin{array}{cccc} e^{ix}, & e^{-ix}, & \cos x, & \text{sen } x, \\ H^{(1)}(z), & H^{(2)}(z), & J(z), & Y(z). \end{array}$$

Esta analogía no sólo es cualitativa, sino que asintóticamente ( $z \rightarrow \infty$ ) se cumple [60]. El término con  $H^{(1)}(z)$  representa una onda que es radiada, mientras que para  $H^{(2)}(z)$  se trata de una onda que está siendo absorbida. Así como preferimos la representación exponencial compleja a la representación trigonométrica, preferimos la representación de las soluciones de Helmholtz en términos de las funciones de Hankel en lugar de las funciones de Bessel de primera y segunda clase.

---

### 3.2.2. Soluciones cilíndricas

Las soluciones cilíndricas de la ecuación de Helmholtz son entonces de la forma

$$u(r, \theta) = y(r)\vartheta(\theta) = [B_1 J_n(kr) + B_2 Y_n(kr)]e^{in\theta},$$

con  $n$  cualquier entero,  $r > 0$  y  $B_1, B_2$  constantes. En términos de las funciones de Hankel,

$$u(r, \theta) = [F_1 H_n^{(1)}(kr) + F_2 H_n^{(2)}(kr)]e^{in\theta},$$

y  $n$  entero,  $r > 0$ ,  $F_1, F_2$  constantes. En particular, si  $n = 0$

$$u(r, \theta) = [F_1 H_0^{(1)}(kr) + F_2 H_0^{(2)}(kr)],$$

es solución de Helmholtz. Más aún,

$$u(\mathbf{x}) = F_1 H_0^{(1)}(k|\mathbf{x} - \mathbf{y}|) \tag{3.10}$$

es solución de radiación para la ecuación de Helmholtz en  $\mathbb{R}^2$ , siempre que  $\mathbf{y} \neq \mathbf{x}$ . Como ya hemos mencionado, tenemos particular interés en las soluciones cilíndricas de la forma (3.10).

Resultará conveniente tener una expresión en coordenadas polares para  $H_0^{(1)}(k|\mathbf{x} - \mathbf{y}|)$ . Tal formulación se conoce con el nombre de *fórmula de adición*, la cual trataremos en la Sección 3.2.5.

En el siguiente apartado veremos que las funciones de Bessel de la primera clase se pueden definir también a partir de una función generadora. Del análisis de tal función conseguiremos resultados útiles en la obtención de las expansiones asintóticas de las funciones de Bessel, así como en la obtención de la fórmula de adición.

---

### 3.2.3. Función generadora de las funciones de Bessel

Recordemos que si  $\{a_n\}$  es una sucesión de números complejos, la *función generadora* para  $a_n$  es la serie de potencias  $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ . Estamos interesados en encontrar la función generadora de las  $J_n(z)$ .

Consideremos la función

$$f(z) = e^{\frac{1}{2}z\left(\zeta - \frac{1}{\zeta}\right)}.$$

Para  $z$  fijo, esta es una función analítica en  $\zeta$  en cualquier anillo  $0 \leq \alpha \leq |\zeta| \leq \beta$ . Así que tiene una expansión en serie de Laurent de la forma

$$e^{\frac{1}{2}z\left(\zeta - \frac{1}{\zeta}\right)} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n(z)\zeta^n,$$

donde

$$a_n(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\mathcal{C}} \zeta^{-n-1} e^{\frac{1}{2}z\left(\zeta - \frac{1}{\zeta}\right)} d\zeta, \quad (3.11)$$

con  $\mathcal{C}$  cualquier círculo alrededor del origen. Mostraremos que  $a_n(z) = J_n(z)$ .

Hacemos el cambio de variable  $\zeta = 2t/z$ , obteniendo para cada  $z$  fija,

$$\begin{aligned} a_n(z) &= \frac{1}{2\pi i} \int_{\mathcal{C}} \frac{2}{z} \left(\frac{2t}{z}\right)^{-n-1} \exp\left[\frac{1}{2}z\left(\frac{2t}{z} - \frac{z}{2t}\right)\right] dt \\ &= \frac{1}{2\pi i} \int_{\mathcal{C}} \frac{1}{t} \left(\frac{z}{2t}\right)^n \exp\left(t - \frac{z^2}{4t}\right) dt \\ &= \frac{1}{2\pi i} \left(\frac{z}{2}\right)^n \int_{\mathcal{C}} t^{-n-1} \exp\left(t - \frac{z^2}{4t}\right) dt. \end{aligned}$$

Sabemos que la función exponencial tiene una expansión en serie que es válida para todo  $\mathbb{C}$ , y uniformemente convergente. En particular,

$$\exp\left(-\frac{z^2}{4t}\right) = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{1}{j!} \left(-\frac{z^2}{4t}\right)^j = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{(-1)^j}{j!} \left(\frac{z}{2}\right)^{2j} t^{-j}$$

---

será uniformemente convergente siempre que  $t \neq 0$ . Entonces la serie anterior converge uniformemente para  $t \in \mathcal{C}$ . De esta forma podemos integrar término a término y obtener

$$\begin{aligned}
a_n(z) &= \frac{1}{2\pi i} \left(\frac{z}{2}\right)^n \int_{\mathcal{C}} t^{-n-1} \exp(t) \exp\left(-\frac{z^2}{4t}\right) dt \\
&= \frac{1}{2\pi i} \left(\frac{z}{2}\right)^n \int_{\mathcal{C}} t^{-n-1} e^t \left(\sum_{j=0}^{\infty} \frac{(-1)^j}{j!} \left(\frac{z}{2}\right)^{2j} t^{-j}\right) dt \\
&= \frac{1}{2\pi i} \left(\frac{z}{2}\right)^n \sum_{j=0}^{\infty} \frac{(-1)^j}{j!} \left(\frac{z}{2}\right)^{2j} \int_{\mathcal{C}} t^{-n-j-1} e^t dt \\
&= \frac{1}{2\pi i} \sum_{j=0}^{\infty} \frac{(-1)^j}{j!} \left(\frac{z}{2}\right)^{n+2j} \int_{\mathcal{C}} \frac{e^t}{t^{n+j+1}} dt. \tag{3.12}
\end{aligned}$$

Supongamos ahora que  $n \geq 0$ . Sean  $p(t) = e^t$  y  $q(t) = t^{n+j+1}$ . La funciones  $p$  y  $q$  son analíticas en  $t = 0$ , además,  $p(0) = 1, q(0) = 0, q^{(1)}(0) = 0, \dots, q^{(n+j)}(0) = 0, q^{(n+j+1)}(0) = (n+j+1)! \neq 0$ . Por lo tanto,  $e^t/t^{n+j+1}$  tiene un polo de orden  $n+j+1$  en  $t = 0$  y el residuo es  $\frac{1}{(n+k)!}$ . Así,

$$\begin{aligned}
a_n(z) &= \frac{1}{2\pi i} \sum_{j=0}^{\infty} \frac{(-1)^j}{j!} \left(\frac{z}{2}\right)^{n+2j} \left(2\pi i \frac{1}{(n+j)!}\right) \\
&= \sum_{j=0}^{\infty} \frac{(-1)^j}{j!(n+j)!} \left(\frac{z}{2}\right)^{n+2j}.
\end{aligned}$$

Esto es,  $a_n(z) = J_n(z)$ . Suponga ahora que  $n \leq 0$ , y que  $n = -N$  para algún entero  $N > 0$ . Si  $j+1 \leq N$ , el integrando en (3.12),  $e^t t^{N-(j+1)}$ , es una función entera; así que por el teorema de Cauchy, la integral se hace 0. Si  $j+1 > N$ , las funciones  $p(t) = e^t, q(t) = t^{-N+j+1}$  son analíticas en  $t = 0$ , y  $p(0) = 1, q(0) = 0, q^{(1)}(0) = 0, \dots, q^{(-N+j)}(0) = 0, q^{(-N+j+1)}(0) = (-N+j+1)! \neq 0$ . El residuo de  $e^t/t^{-N+j+1}$  en  $t = 0$  es  $\frac{1}{(-N+j)!}$ . De esta

---

forma,

$$a_n(z) = \sum_{j=N}^{\infty} \frac{(-1)^j}{j!(-N+j)!} \left(\frac{z}{2}\right)^{-N+2j}.$$

Haciendo el cambio  $w = -N + j$ ,

$$\begin{aligned} a_n(z) &= \sum_{w=0}^{\infty} \frac{(-1)^{N+w}}{(N+w)!w!} \left(\frac{z}{2}\right)^{-N+2(N+w)} \\ &= \sum_{w=0}^{\infty} \frac{(-1)^{N+w}}{(N+w)!w!} \left(\frac{z}{2}\right)^{N+2w} \\ &= (-1)^N \sum_{w=0}^{\infty} \frac{(-1)^w}{(N+w)!w!} \left(\frac{z}{2}\right)^{N+2w} \\ &= (-1)^N J_N(z) \\ &= (-1)^{-n} J_{-n}(z) \\ &= (-1)^n J_{-n}(z) \end{aligned}$$

Esto es,  $a_n(z) = J_n(z)$  también para  $n < 0$ .

Por lo tanto, la función  $e^{\frac{1}{2}z\left(\zeta - \frac{1}{\zeta}\right)}$  es la función generadora de las funciones de Bessel de la primera clase:

$$e^{\frac{1}{2}z\left(\zeta - \frac{1}{\zeta}\right)} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} J_n(z)\zeta^n, \quad (3.13)$$

Haremos ahora algunas observaciones útiles en nuestro trabajo posterior.

Notemos que si  $\zeta = ie^{i\theta}$ , para  $\theta$  un ángulo arbitrario entre 0 y  $2\pi$ ,

$$\begin{aligned} \sum_{n=-\infty}^{\infty} i^n J_n(z) e^{in\theta} &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} J_n(z) (ie^{i\theta})^n \\ &= e^{\frac{1}{2}z\left(ie^{i\theta} - \frac{1}{ie^{i\theta}}\right)} \\ &= e^{iz\left(\frac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2}\right)} \\ &= e^{iz \cos \theta}. \end{aligned}$$

Similarmente, si  $\zeta = -ie^{i\theta}$ , obtenemos

$$e^{-iz \cos \theta} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} (-i)^n J_n(z) e^{in\theta}, \quad (3.14)$$

y si  $\zeta = e^{i\theta}$ ,

$$e^{iz \operatorname{sen} \theta} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} J_n(z) e^{in\theta}. \quad (3.15)$$

Por otra parte, la expresión en (3.11) nos proporciona una representación integral para las  $J_n(z)$ . Si usamos el círculo unitario  $\zeta = e^{i\theta}$  en (3.11), se tiene

$$\begin{aligned} J_n(z) &= \frac{1}{2\pi i} \int_0^{2\pi} i e^{i\theta} (e^{i\theta})^{-n-1} e^{\frac{1}{2}z(e^{i\theta} - e^{-i\theta})} d\theta \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} e^{-in\theta} e^{iz \operatorname{sen} \theta} d\theta \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} e^{iz \operatorname{sen} \theta - in\theta} d\theta \\ &= \frac{1}{2\pi} \left[ \int_{-\pi}^0 e^{iz \operatorname{sen} \theta - in\theta} d\theta + \int_0^{\pi} e^{iz \operatorname{sen} \theta - in\theta} d\theta \right] \\ &= \frac{1}{2\pi} \left[ \int_0^{\pi} e^{-(iz \operatorname{sen} \theta - in\theta)} d\theta + \int_0^{\pi} e^{iz \operatorname{sen} \theta - in\theta} d\theta \right] \quad (3.16) \\ &= \frac{1}{\pi} \left[ \int_0^{\pi} \frac{1}{2} \left( e^{-i(z \operatorname{sen} \theta - n\theta)} + e^{i(z \operatorname{sen} \theta - n\theta)} \right) d\theta \right] \\ &= \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} \cos(z \operatorname{sen} \theta - n\theta) d\theta. \end{aligned}$$

La expresión (3.16) es útil para encontrar la fórmula asintótica de las funciones  $J_n$ .

### 3.2.4. Expansiones asintóticas de funciones de Bessel

Las expansiones asintóticas proporcionan un método para usar las sumas parciales de una serie, con el objetivo de aproximar valores de una función compleja  $f(z)$ , si  $z$  es grande. Puede resultar más fácil de manejar la expresión asintótica que la función misma. Cuando se usa únicamente un término de la serie se dice que se tiene una aproximación asintótica o una fórmula asintótica para  $f$  [47].



---

En esta sección daremos fórmulas asintóticas para las ecuaciones de Bessel  $J_n$  y las funciones de Hankel  $H_n^{(1)}$ . En el apéndice A hacemos una revisión de los conceptos básicos de análisis asintótico.

Del teorema de la fase estacionaria (A.4) se deduce el siguiente resultado.

**Proposición 3.2** *Para cualquier entero  $n$ , son válidas las fórmulas*

$$\begin{aligned} J_n(z) &\sim \sqrt{\frac{2}{\pi z}} \cos\left(z - \frac{n\pi}{2} - \frac{\pi}{4}\right), \\ H_n^{(1)}(z) &\sim \sqrt{\frac{2}{\pi z}} \exp\left[i\left(z - \frac{n\pi}{2} - \frac{\pi}{4}\right)\right], \end{aligned}$$

cuando  $z \rightarrow \infty$ , con  $z$  real y mayor que cero. La relación para  $H_n^{(1)}(z)$  también es válida para  $z$  complejo con  $\text{Im}(z) > 0$ .

**Demostración.** Usaremos la representación (3.16):

$$J_n(z) = \frac{1}{2\pi} \left( \int_0^\pi e^{iz \sin \theta - in\theta} d\theta + \int_0^\pi e^{-iz \sin \theta + in\theta} d\theta \right). \quad (3.16)$$

Considérese la función

$$f(z) = \int_0^\pi e^{iz \sin \theta - in\theta} d\theta.$$

En la notación del teorema de la fase estacionaria,  $h(t) = \sin t$  y  $p(t) = e^{-int}$ .

Como se puede notar,  $h(t)$  es analítica y real para  $t$  real; y  $p(t)$  es de clase  $C^1$ . El intervalo es  $[0, \pi]$ , y  $h'(t) = \cos t$  se anula únicamente en  $t_0 = \pi/2$ .

Además  $h''(t_0) = -\sin t_0 = -\sin(\pi/2) = -1 < 0$ . Así, el teorema da

$$f(z) \sim \frac{e^{iz\sqrt{2\pi}}}{\sqrt{z}} e^{-i\frac{\pi}{4}} e^{-i\frac{n\pi}{2}} = \sqrt{\frac{2\pi}{z}} e^{i\left(z - \frac{n\pi}{2} - \frac{\pi}{4}\right)},$$

cuando  $z \rightarrow \infty$  en el eje real positivo. De manera análoga, si hacemos

$$\tilde{f}(z) = \int_0^\pi e^{-iz \sin \theta + in\theta} d\theta,$$

---

obtenemos

$$\tilde{f}(z) \sim \sqrt{\frac{2\pi}{z}} e^{-i(z - \frac{n\pi}{2} - \frac{\pi}{4})},$$

cuando  $z \rightarrow \infty$  en el eje real positivo. Por lo tanto,

$$\begin{aligned} J_n(z) &\sim \frac{1}{2\pi} (f + \tilde{f}) \\ &= \frac{1}{2\pi} \left( \sqrt{\frac{2\pi}{z}} e^{i(z - \frac{n\pi}{2} - \frac{\pi}{4})} + \sqrt{\frac{2\pi}{z}} e^{-i(z - \frac{n\pi}{2} - \frac{\pi}{4})} \right) \\ &= \frac{1}{\pi} \sqrt{\frac{2\pi}{z}} \cos \left( z - \frac{n\pi}{2} - \frac{\pi}{4} \right) \\ &= \sqrt{\frac{2}{\pi z}} \cos \left( z - \frac{n\pi}{2} - \frac{\pi}{4} \right). \end{aligned}$$

El cálculo de la expansión asintótica para las funciones de Hankel es más complicado y omitiremos la prueba. Se puede consultar [65]. ■

Más específicamente, cuando  $z \in \mathbb{R}, z > 0$  y  $z \rightarrow \infty$ ,

$$J_n(z) = \sqrt{\frac{2}{\pi z}} \cos \left( z - \frac{n\pi}{2} - \frac{\pi}{4} \right) + \mathcal{O} \left( \frac{1}{z^{3/2}} \right), \quad (3.17)$$

$$H_n^{(1)}(z) = \sqrt{\frac{2}{\pi z}} \exp \left[ i \left( z - \frac{n\pi}{2} - \frac{\pi}{4} \right) \right] + \mathcal{O} \left( \frac{1}{z^{3/2}} \right), \quad (3.18)$$

para cualquier entero  $n$ . La segunda relación también se cumple si  $\text{Im } z > 0$ .

Ya que todas las funciones de Bessel guardan relaciones entre sí, a partir de (3.17)-(3.18) pueden obtenerse las correspondientes a  $Y_n(z)$  y  $H_n^{(2)}(z)$ .

### 3.2.5. Fórmula de adición

La fórmula de adición consiste en expresar la función de Hankel de la primera clase de orden cero en coordenadas polares. Tal expresión se da en términos de una serie de Fourier, y el análisis asintótico servirá para encontrar los coeficientes de Fourier de la serie.

---

Sean  $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^2$ . Sabemos que para  $\mathbf{y}$  fijo y  $\mathbf{x} \neq \mathbf{y}$ ,  $u(\mathbf{x}) = H_0^{(1)}(|\mathbf{x} - \mathbf{y}|)$  es solución de

$$\nabla^2 u(\mathbf{x}) + u(\mathbf{x}) = 0,$$

y satisface la condición de radiación

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \sqrt{r} \left( \frac{\partial u(\mathbf{x})}{\partial r} - iu(\mathbf{x}) \right) = 0,$$

donde  $r = |\mathbf{x}|$ .

Haciendo  $(r, \theta)$  las coordenadas polares de  $\mathbf{x}$  y  $(\rho, \phi)$  las coordenadas polares de  $\mathbf{y}$ , donde  $r, \rho > 0$  y  $\theta, \phi \in [-\pi, \pi]$ ,

$$|\mathbf{x} - \mathbf{y}| = \sqrt{r^2 - 2r\rho \cos(\theta - \phi) + \rho^2}.$$

Así que denotaremos

$$H_0^{(1)}(r, \theta; \rho, \phi) = H_0^{(1)}(\sqrt{r^2 - 2r\rho \cos(\theta - \phi) + \rho^2}) = H_0^{(1)}(|\mathbf{x} - \mathbf{y}|).$$

Considérese  $r > \rho$ . Si mantenemos  $r$  y  $\rho$  fijos, la función  $H_0^{(1)}(r, \theta; \rho, \phi)$  depende solamente de  $\cos(\psi)$ , donde  $\psi := \theta - \phi$ ; además, es continua en  $[-\pi, \pi]$ . El teorema de Fourier nos garantiza que

$$H_0^{(1)}(r, \theta; \rho, \phi) = \frac{1}{2}a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n(r, \rho) \cos(n\psi) + b_n(r, \rho) \operatorname{sen}(n\psi)).$$

donde

$$\begin{aligned} a_n(r, \rho) &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} H_0^{(1)}(r, \theta; \rho, \phi) \cos(n\psi) \, d\psi, \\ b_n(r, \rho) &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} H_0^{(1)}(r, \theta; \rho, \phi) \operatorname{sen}(n\psi) \, d\psi, \end{aligned}$$

para  $n = 0, 1, 2, \dots$ . Dado que  $H_0^{(1)}(r, \theta; \rho, \phi)$  es una función par en la variable  $\psi$  (ver figura 3.3), entonces  $H_0^{(1)}(r, \theta; \rho, \phi) \cos(n\psi)$  es par también en esta variable; los términos  $a_n$  se reducen y los  $b_n$  se anulan. De tal forma que

$$H_0^{(1)}(r, \theta; \rho, \phi) = \frac{1}{2}a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n(r, \rho) \cos(n\psi), \quad (3.19)$$

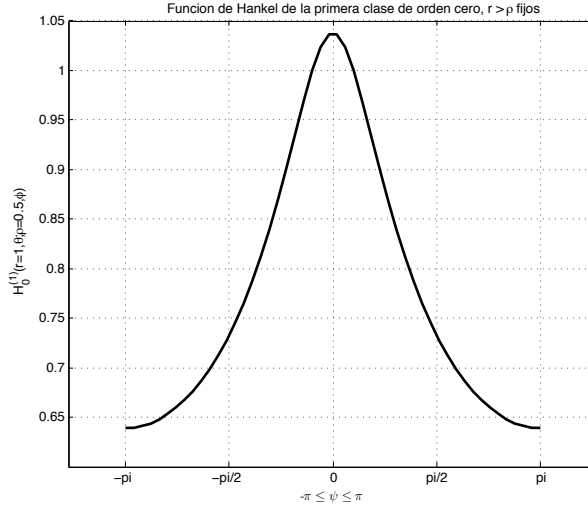


Figura 3.3: La función  $H_0^{(1)}(r, \theta; \rho, \phi)$  es par en la variable  $\psi$ . Aquí  $r$  y  $\rho$  son fijos.

con

$$a_n(r, \rho) = \frac{2}{\pi} \int_0^\pi H_0^{(1)}(r, \theta; \rho, \phi) \cos(n\psi) d\psi, \quad (3.20)$$

donde  $n = 0, 1, 2, \dots$ . Lo que haremos ahora es encontrar estos coeficientes.

Vamos a mantener fijo solamente  $\rho$ . Entonces  $a_n$  es una función de una sola variable y  $H_0^{(1)}(r, \theta; \rho, \phi) \cos(n\psi)$  depende sólo de  $r$  y  $\psi$ . Podemos diferenciar en (3.20) bajo el signo de la integral:

$$\frac{d}{dr} a_n(r, \rho) = \frac{2}{\pi} \int_0^\pi \frac{\partial}{\partial r} H_0^{(1)}(r, \theta; \rho, \phi) \cos(n\psi) d\psi.$$

Así también para la segunda derivada,

$$\frac{d^2}{dr^2} a_n(r, \rho) = \frac{2}{\pi} \int_0^\pi \frac{\partial^2}{\partial r^2} H_0^{(1)}(r, \theta; \rho, \phi) \cos(n\psi) d\psi.$$

---

Luego,

$$\begin{aligned} & \frac{d^2 a_n}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{da_n}{dr} + \left(1 - \frac{n^2}{r^2}\right) a_n \\ &= \frac{2}{\pi} \int_0^\pi \cos(n\psi) \left[ \frac{\partial^2 H_0^{(1)}}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial H_0^{(1)}}{\partial r} + \left(1 - \frac{n^2}{r^2}\right) H_0^{(1)} \right] d\psi \quad (3.21) \end{aligned}$$

Usando el hecho de que  $H_0^{(1)}(r, \theta; \rho, \phi)$  satisface

$$\nabla^2 u + u = \frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 u}{\partial \psi^2} + u = 0,$$

el lado derecho en (3.21) queda

$$\frac{2}{\pi} \int_0^\pi \cos(n\psi) \left[ -\frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 H_0^{(1)}}{\partial \psi^2} - \frac{n^2}{r^2} H_0^{(1)} \right] d\psi.$$

Haciendo integración por partes, la integral anterior es igual a

$$-\frac{2}{\pi} \frac{1}{r^2} \cos(n\psi) \frac{\partial H_0^{(1)}}{\partial \psi} \Big|_0^\pi$$

Luego entonces

$$\frac{d^2 a_n}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{da_n}{dr} + \left(1 - \frac{n^2}{r^2}\right) a_n = 0.$$

La solución general a esta ecuación de Bessel es

$$a_n(r, \rho) = F_1 H_n^{(1)}(r) + F_2 H_n^{(2)}(r),$$

donde  $F_1$  y  $F_2$  dependen de  $\rho$ . Pero  $H_0^{(1)}$  satisface la condición de radiación de Sommerfeld, así que sus coeficientes de Fourier deben ser de la forma

$$a_n(r, \rho) = F_1(\rho) H_n^{(1)}(r). \quad (3.22)$$

El mismo análisis pero ahora manteniendo fijo  $r$ , y usando el hecho de que  $H_0^{(1)}$  es acotada respecto de la variable  $\mathbf{y}$ , produce

$$a_n(r, \rho) = B_1(r) J_n(\rho). \quad (3.23)$$

---

Así, de (3.22) y (3.23) se tiene que

$$a_n(r, \rho) = BH_n^{(1)}(r)J_n(\rho), \quad (3.24)$$

con  $B$  independiente de  $r$  y  $\rho$ . Los coeficientes  $a_n$  quedarán completamente determinados cuando encontremos el valor de la constante  $B$ .

Para ello usaremos análisis asintótico. Por una parte,

$$\begin{aligned} |\mathbf{x} - \mathbf{y}| &= \sqrt{r^2 - 2r\rho \cos \psi + \rho^2} \\ &= r\sqrt{1 - 2\frac{\rho}{r} \cos \psi + \frac{\rho^2}{r^2}} \\ &= r - \rho \cos \psi + \mathcal{O}\left(\frac{1}{r}\right). \end{aligned}$$

Así que de (3.20) y el comportamiento asintótico de  $H_0^{(1)}$ ,

$$a_n(r, \rho) = \frac{2}{\pi} \sqrt{\frac{2}{\pi r}} e^{i(r-\frac{\pi}{4})} \int_0^\pi e^{-i\rho \cos \psi} \cos(n\psi) d\psi + \mathcal{O}\left(\frac{1}{r}\right). \quad (3.25)$$

Ahora bien, por (3.14) y el hecho de que  $J_{-n}(\rho) = (-1)^n J_n(\rho)$  se tiene que

$$\begin{aligned} e^{-i\rho \cos \psi} &= \sum_{-\infty}^{\infty} (-i)^j J_j(\rho) e^{ij\psi} \\ &= J_0(\rho) + 2 \sum_{j=1}^{\infty} (-i)^j J_j(\rho) \cos(j\psi). \end{aligned}$$

Entonces (3.25) queda

$$a_n(r, \rho) = 2\sqrt{\frac{2}{\pi r}} e^{i(r-\frac{\pi}{4})} (-i)^n J_n(\rho) + \mathcal{O}\left(\frac{1}{r}\right).$$

Por otra parte, la expansión asintótica de  $H_n^{(1)}$  en (3.24) da como resultado

$$a_n(r, \rho) = B\sqrt{\frac{2}{\pi r}} e^{i(r-\frac{\pi}{4})} (-i)^n J_n(\rho) + \mathcal{O}\left(\frac{1}{r}\right).$$

Por lo tanto  $B = 2$ . Así, de (3.19) y (3.24), la *fórmula de adición* para la función de Hankel  $H_0^{(1)}(|\mathbf{x} - \mathbf{y}|)$  es

$$H_0^{(1)}(\sqrt{r^2 - 2r\rho \cos \psi + \rho^2}) = J_0(\rho)H_0^{(1)}(r) + 2 \sum_{n=1}^{\infty} J_n(\rho)H_n^{(1)}(r) \cos(n\psi), \quad (3.26)$$


---

---

para  $r > \rho$ . Puesto que  $|\mathbf{x} - \mathbf{y}|$  es simétrico en  $\mathbf{x}$  y  $\mathbf{y}$ , si  $r < \rho$  la fórmula (3.26) es válida con  $r$  y  $\rho$  intercambiados.

Observemos que para un número real  $\alpha$  cualquiera

$$\begin{aligned} \alpha \sqrt{r^2 - 2r\rho \cos \psi + \rho^2} &= \sqrt{\alpha^2(r^2 - 2r\rho \cos \psi + \rho^2)} \\ &= \sqrt{\alpha^2 r^2 - 2\alpha^2 r\rho \cos \psi + \alpha^2 \rho^2} \\ &= \sqrt{(\alpha r)^2 - 2(\alpha r)(\alpha \rho) \cos \psi + (\alpha \rho)^2}. \end{aligned}$$

De tal forma que la fórmula de adición para  $H_0^{(1)}(k|\mathbf{x} - \mathbf{y}|)$ , donde  $k > 0$ , queda

$$\begin{aligned} H_0^{(1)}(k\sqrt{r^2 - 2r\rho \cos \psi + \rho^2}) \\ = J_0(k\rho)H_0^{(1)}(kr) + 2 \sum_{n=1}^{\infty} J_n(k\rho)H_n^{(1)}(kr) \cos(n\psi) \end{aligned}$$

Lo anterior también se cumple para  $k \in \mathbb{C}$  con  $\text{Im}(k) > 0$ .

Notemos que

$$\begin{aligned} 2 \sum_{n=1}^{\infty} J_n(k\rho)H_n^{(1)}(kr) \cos(n\psi) \\ = \sum_{n=1}^{\infty} J_n(k\rho)H_n^{(1)}(kr)(e^{in\psi} + e^{-in\psi}) \\ = \sum_{n=1}^{\infty} J_n(k\rho)H_n^{(1)}(kr)e^{in\psi} + \sum_{n=1}^{\infty} J_n(k\rho)H_n^{(1)}(kr)e^{-in\psi} \end{aligned}$$

De la definición de  $J_{-n}$  y la propiedad

$$H_{-n}^{(j)}(z) = (-1)^n H_n^{(1)}(z),$$

---

de las funciones de Hankel  $H_n$ , el segundo término del lado derecho es

$$\begin{aligned} \sum_{n=-\infty}^{-1} J_{-n}(k\rho)H_{-n}^{(1)}(kr)e^{in\psi} &= \sum_{n=-\infty}^{-1} (-1)^n J_n(k\rho)(-1)^n H_n^{(1)}(kr)e^{in\psi} \\ &= \sum_{n=-\infty}^{-1} J_n(k\rho)H_n^{(1)}(kr)e^{in\psi}. \end{aligned}$$

Luego,

$$\begin{aligned} 2 \sum_{n=1}^{\infty} J_n(k\rho)H_n^{(1)}(kr) \cos(n\psi) \\ = \sum_{n=1}^{\infty} J_n(k\rho)H_n^{(1)}(kr)e^{in\psi} + \sum_{n=-\infty}^{-1} J_n(k\rho)H_n^{(1)}(kr)e^{in\psi}. \end{aligned}$$

Por lo tanto, si  $r > \rho$

$$\begin{aligned} H_0^{(1)}(k\sqrt{r^2 - 2r\rho \cos \psi + \rho^2}) \\ = J_0(k\rho)H_0^{(1)}(kr) \\ + \sum_{n=1}^{\infty} J_n(k\rho)H_n^{(1)}(kr)e^{in\psi} + \sum_{n=-\infty}^{-1} J_n(k\rho)H_n^{(1)}(kr)e^{in\psi} \\ = \sum_{n=-\infty}^{\infty} J_n(k\rho)H_n^{(1)}(kr)e^{in\psi}. \end{aligned} \tag{3.27}$$

### 3.3. Representación asintótica del campo dispersado

Consideremos el problema de dispersión (2.44)-(2.46) para una onda electromagnética polarizada que se propaga en un medio homogéneo, lineal, isotrópico y absorbente que contiene un dispersor de soporte compacto en su interior.



---

Es decir, queremos una solución  $E(\mathbf{x}) \in C(\mathbb{R}^2)$  que satisfaga la ecuación

$$\nabla^2 E(\mathbf{x}) + k_w^2 \mathfrak{N}^2(\mathbf{x}) E(\mathbf{x}) = 0. \quad (2.30)$$

De tal forma que  $E = E^i + E^s$ , con  $E^i$  solución de

$$\nabla^2 E(\mathbf{x}) + \gamma^2 E(\mathbf{x}) = 0; \quad (2.31)$$

y  $E^s$  que satisface la condición de radiación de Sommerfeld

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \sqrt{r} \left( \frac{\partial E^s}{\partial r} - i\gamma E^s \right) = 0. \quad (3.28)$$

Recordemos que  $\gamma = k_w \mathfrak{N}_w$ , donde  $k_w$  es el número de onda del medio,  $\mathfrak{N}_w$  es el índice del medio normalizado respecto al índice  $n_w$ , y  $\mathfrak{N}$  es el índice de refracción del dispersor normalizado respecto a  $n_w$ . Suponemos que el índice de refracción  $\mathbf{n} = \mathbf{n}(\mathbf{x}) \in C^2(\mathbb{R}^2)$  y que  $\mathbf{n}(\mathbf{x}) = \mathbf{n}_w$  para  $\mathbb{R}^2 \setminus D$ , en algún disco  $D$ . Dicho de otra forma,  $\mathcal{N}(\mathbf{x}) = \mathbf{n}(\mathbf{x})/\mathbf{n}_w(\mathbf{x}) = 1$  en  $\mathbb{R}^2 \setminus D$ .

Por el teorema 2.4 sabemos que este problema de dispersión tiene solución única, y por el teorema 3.1 su solución se puede encontrar mediante su representación integral

$$E(\mathbf{x}) = E^i(\mathbf{x}) - \gamma^2 \iint_{\mathbb{R}^2} g(\mathbf{x}|\mathbf{z}, \gamma) m(\mathbf{z}) E(\mathbf{z}) dA(\mathbf{z}),$$

donde  $m(\mathbf{x})$  es tal que

$$k_w^2 \mathfrak{N}^2(\mathbf{x}) = \gamma^2 (1 - m(\mathbf{x})).$$

El soporte de  $m$  es un conjunto  $\Omega \subset D$  compacto. Al hacer aproximación de Born y sustituir  $g(\mathbf{x}|\mathbf{z}, \gamma)$  nos queda

$$E(\mathbf{x}) = E^i(\mathbf{x}) - \frac{i\gamma^2}{4} \iint_{\mathbb{R}^2} H_0^{(1)}(\gamma|\mathbf{x} - \mathbf{z}|) m(\mathbf{z}) E^i(\mathbf{z}) dA(\mathbf{z}).$$

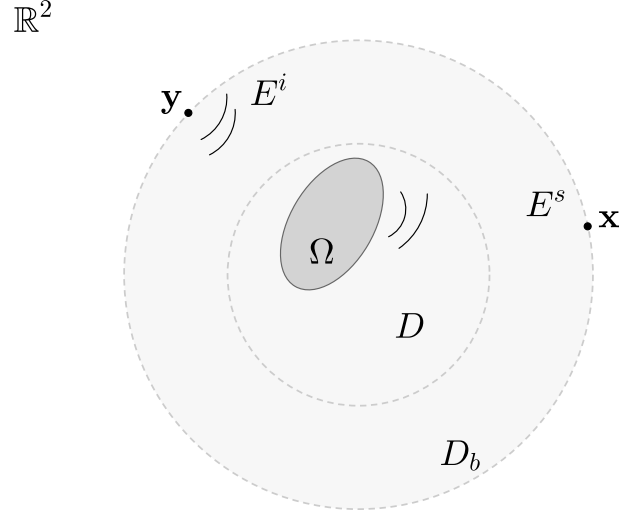


Figura 3.4: Representación de los dominios para el problema directo.

Hacemos incidir ondas de la forma

$$E^i(\mathbf{x}) = H_0^{(1)}(\gamma|\mathbf{x} - \mathbf{y}|),$$

en puntos  $\mathbf{y}$  tales que  $|\mathbf{y}| = b$ , donde el disco  $D_b$  con centro en el origen y radio  $b$  contiene a  $D$  (figura 3.4). El campo total medido en  $|\mathbf{x}| = b$  satisface entonces

$$E(\mathbf{x}; \mathbf{y}) = H_0^{(1)}(\gamma|\mathbf{x} - \mathbf{y}|) - \frac{i\gamma^2}{4} \iint_{D_b} H_0^{(1)}(\gamma|\mathbf{x} - \mathbf{z}|)m(\mathbf{z})H_0^{(1)}(\gamma|\mathbf{z} - \mathbf{y}|) dA(\mathbf{z}).$$

Puesto que una vez que se determina el campo dispersado  $E^s$ , queda también determinado el campo total  $E$ , nuestro problema directo de dispersión de ondas consiste en encontrar  $E^s$  dado  $m$ :

$$E^s(\mathbf{x}; \mathbf{y}) = -\frac{i\gamma^2}{4} \iint_{D_b} H_0^{(1)}(\gamma|\mathbf{x} - \mathbf{z}|)m(\mathbf{z})H_0^{(1)}(\gamma|\mathbf{z} - \mathbf{y}|) dA(\mathbf{z}) \quad (3.29)$$

---

Por la geometría de nuestro problema, resulta conveniente expresar la ecuación (3.29) en coordenadas polares.

### Ecuación de Lippmann-Schwinger para el campo dispersado en coordenadas polares

Denotamos por  $(r, \theta)$ ,  $(\xi, \varphi)$  y  $(\rho, \phi)$  las coordenadas polares de  $\mathbf{x}$ ,  $\mathbf{y}$  y  $\mathbf{z}$ , respectivamente (figura 3.5), entonces  $r = \xi = b$ ,  $0 < \rho < b$  y  $\theta, \varphi, \phi \in [-\pi, \pi]$ . El campo dispersado se puede calcular con

$$\begin{aligned}
 E^s(r, \theta; \xi, \varphi) &= -\frac{i\gamma^2}{4} \int_{-\pi}^{\pi} \int_0^b H_0^{(1)}(\gamma; r, \theta; \rho, \phi) m(\rho, \phi) H_0^{(1)}(\gamma; \rho, \phi; \xi, \varphi) \rho \, d\rho d\phi, \\
 \end{aligned} \tag{3.30}$$

donde  $H_0^{(1)}(\gamma; r, \theta; \rho, \phi)$  denota  $H_0^{(1)}(\gamma|\mathbf{x} - \mathbf{z}|)$  en coordenadas polares, y análogamente para  $H_0^{(1)}(\gamma; \rho, \phi; \xi, \varphi)$ . Por la fórmula de adición (3.27),

$$H_0^{(1)}(\gamma; r, \theta, \rho, \phi) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} J_n(\gamma\rho) H_n^{(1)}(\gamma r) e^{in\psi}, \tag{3.31}$$

$$H_0^{(1)}(\gamma; \rho, \phi; \xi, \varphi) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} J_n(\gamma\rho) H_n^{(1)}(\gamma\xi) e^{in\psi_1}, \tag{3.32}$$

donde  $\psi = \theta - \phi$  y  $\psi_1 = \phi - \varphi$ .

Es claro que aún cuando la fórmula (3.30) determina el campo dispersado  $E^s$ , en la práctica resulta complicado realizarlo. En la siguiente sección haremos una aproximación que nos permite expresar (3.30) como una integral oscilatoria, y con esta nueva expresión el cálculo numérico es más sencillo.

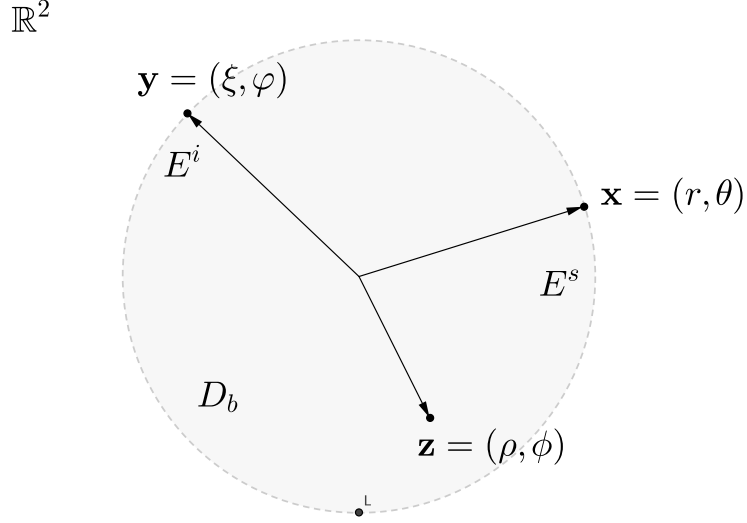


Figura 3.5: Representación de  $\mathbf{x}$ ,  $\mathbf{y}$  y  $\mathbf{z}$ .

### 3.3.1. Integral oscilatoria para el campo dispersado

Consideremos la expansión (3.18) para las funciones de Hankel  $H_n^{(1)}$ . Si  $z \in \mathbb{R}$ ,  $z > 0$ , y  $\alpha \in \mathbb{C}$  con  $\text{Im } z > 0$ , entonces

$$H_n^{(1)}(\alpha z) = \sqrt{\frac{2}{\pi \alpha z}} \exp \left[ i \left( \alpha z - \frac{n\pi}{2} - \frac{\pi}{4} \right) \right] + \mathcal{O} \left( \frac{1}{(\alpha z)^{3/2}} \right), \quad (3.33)$$

cuando  $z \rightarrow \infty$ . El término en  $\mathcal{O}$  denota una función tal que existe una constante  $L$  y

$$\left| \mathcal{O} \left( \frac{1}{(\alpha z)^{3/2}} \right) \right| \leq L \left| \frac{1}{(\alpha z)^{3/2}} \right|.$$

Pero

$$L \left| \frac{1}{(\alpha z)^{3/2}} \right| = \tilde{L} \left| \frac{1}{z^{3/2}} \right|,$$

donde  $\tilde{L} = L/|\alpha^{3/2}|$ . Entonces (3.33) la podemos escribir como

$$H_n^{(1)}(\alpha z) = \sqrt{\frac{2}{\pi \alpha z}} \exp \left[ i \left( \alpha z - \frac{n\pi}{2} - \frac{\pi}{4} \right) \right] + \mathcal{O} \left( \frac{1}{z^{3/2}} \right). \quad (3.34)$$

---

Al usar la expresión asintótica (3.34) para las funciones de Hankel de la primera clase en (3.31) obtenemos

$$\begin{aligned}
H_0^{(1)}(\gamma; r, \theta, \rho, \phi) &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} J_n(\gamma\rho) \left[ \sqrt{\frac{2}{\pi\gamma r}} e^{i(\gamma r - \frac{n\pi}{2} - \frac{\pi}{4})} \right] + \mathcal{O}\left(\frac{1}{r^{3/2}}\right) e^{in\psi} \\
&= \sqrt{\frac{2}{\pi\gamma r}} \sum_{n=-\infty}^{\infty} J_n(\gamma\rho) e^{i(\gamma r - \frac{n\pi}{2} - \frac{\pi}{4})} e^{in\psi} + \mathcal{R}_1(\gamma; r, \theta, \rho, \phi) \\
&= \sqrt{\frac{2}{\pi\gamma r}} e^{i(\gamma r - \frac{\pi}{4})} \sum_{n=-\infty}^{\infty} J_n(\gamma\rho) e^{in(\psi - \frac{\pi}{2})} + \mathcal{R}_1(\gamma; r, \theta, \rho, \phi)
\end{aligned}$$

con residuo

$$\mathcal{R}_1(\gamma; r, \theta, \rho, \phi) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} J_n(\gamma\rho) e^{in\psi} \mathcal{O}\left(\frac{1}{r^{3/2}}\right)$$

De la propiedad (3.15) se tiene

$$\begin{aligned}
H_0^{(1)}(\gamma; r, \theta, \rho, \phi) &= \sqrt{\frac{2}{\pi\gamma r}} e^{i(\gamma r - \frac{\pi}{4})} e^{i\gamma\rho \operatorname{sen}(\psi - \frac{\pi}{2})} + \mathcal{R}_1(\gamma; r, \theta, \rho, \phi) \\
&= \sqrt{\frac{2}{\pi\gamma r}} e^{i(\gamma r - \frac{\pi}{4})} e^{-i\gamma\rho \cos\psi} + \mathcal{R}_1(\gamma; r, \theta, \rho, \phi) \quad (3.35)
\end{aligned}$$

y también

$$\begin{aligned}
\mathcal{R}_1(\gamma; r, \theta, \rho, \phi) &= \mathcal{O}\left(\frac{1}{r^{3/2}}\right) \sum_{n=-\infty}^{\infty} J_n(\gamma\rho) e^{in\psi} \\
&= \mathcal{O}\left(\frac{1}{r^{3/2}}\right) e^{i\gamma\rho \operatorname{sen}\psi} \\
&= \mathcal{O}\left(\frac{1}{r^{3/2}}\right),
\end{aligned}$$

donde la última igualdad se debe a que el término exponencial está acotado por 1 (apéndice A). La expresión (3.35) queda

$$H_0^{(1)}(\gamma; r, \theta, \rho, \phi) = \sqrt{\frac{2}{\pi\gamma r}} e^{i(\gamma r - \frac{\pi}{4})} e^{-i\gamma\rho \cos\psi} + \mathcal{O}\left(\frac{1}{r^{3/2}}\right). \quad (3.36)$$

Análogamente,

$$H_0^{(1)}(\gamma; \rho, \phi; \xi, \varphi) = \sqrt{\frac{2}{\pi\gamma\xi}} e^{i(\gamma\xi - \frac{\pi}{4})} e^{-i\gamma\rho \cos\psi_1} + \mathcal{O}\left(\frac{1}{\xi^{3/2}}\right). \quad (3.37)$$

---

Sustituimos primero (3.36) en la ecuación de Lippmann-Schwinger (3.30) para el campo dispersado:

$$\begin{aligned}
E^s(r, \theta; \xi, \varphi) &= -\frac{i\gamma^2}{4} \iint \left[ \sqrt{\frac{2}{\pi\gamma r}} e^{i(\gamma r - \frac{\pi}{4})} e^{-i\gamma\rho \cos \psi} + \mathcal{O}\left(\frac{1}{r^{3/2}}\right) \right] \\
&\quad \times m(\rho, \phi) H_0^{(1)}(\gamma; \rho, \phi; \xi, \varphi) \rho \, d\rho d\phi \\
&= -\frac{i\gamma^2}{4} \sqrt{\frac{2}{\pi\gamma r}} \iint e^{i(\gamma r - \frac{\pi}{4})} e^{-i\gamma\rho \cos \psi} m(\rho, \phi) H_0^{(1)}(\gamma; \rho, \phi; \xi, \varphi) \rho \, d\rho d\phi + \mathcal{R}_2,
\end{aligned}$$

donde

$$\mathcal{R}_2 = -\frac{i\gamma^2}{4} \iint \mathcal{O}\left(\frac{1}{r^{3/2}}\right) m(\rho, \phi) H_0^{(1)}(\gamma; \rho, \phi; \xi, \varphi) \rho \, d\rho d\phi.$$

Hemos quitado por ahora los límites de integración para simplificar la notación. Sustituimos ahora (3.37):

$$\begin{aligned}
E^s(r, \theta; \xi, \varphi) &= -\frac{i\gamma^2}{4} \sqrt{\frac{2}{\pi\gamma r}} \iint e^{i(\gamma r - \frac{\pi}{4})} e^{-i\gamma\rho \cos \psi} m(\rho, \phi) \\
&\quad \times \left[ \sqrt{\frac{2}{\pi\gamma\xi}} e^{i(\gamma\xi - \frac{\pi}{4})} e^{-i\gamma\rho \cos \psi_1} + \mathcal{O}\left(\frac{1}{\xi^{3/2}}\right) \right] \rho \, d\rho d\phi + \mathcal{R}_2 \\
&= -\frac{i\gamma^2}{4} \sqrt{\frac{2}{\pi\gamma r}} \sqrt{\frac{2}{\pi\gamma\xi}} \iint e^{i(\gamma r - \frac{\pi}{4})} e^{-i\gamma\rho \cos \psi} e^{i(\gamma\xi - \frac{\pi}{4})} e^{-i\gamma\rho \cos \psi_1} m(\rho, \phi) \rho \, d\rho d\phi \\
&\quad + \mathcal{R}_3 + \mathcal{R}_2 \\
&= -\frac{i\gamma}{2\pi} \frac{1}{(r\xi)^{1/2}} \iint e^{-i\frac{\pi}{2}} e^{i\gamma(r+\xi-\rho(\cos \psi + \cos \psi_1))} m(\rho, \phi) \rho \, d\rho d\phi + \mathcal{R}_3 + \mathcal{R}_2
\end{aligned}$$

Dado que el receptor y la fuente cumplen  $|r| = |\xi|$ ,

$$\begin{aligned}
\mathcal{R}_3 &= -\frac{i\gamma^2}{4} \sqrt{\frac{2}{\pi\gamma r}} \iint \mathcal{O}\left(\frac{1}{\xi^{3/2}}\right) e^{i(\gamma r - \frac{\pi}{4})} e^{-i\gamma\rho \cos \psi} m(\rho, \phi) \rho \, d\rho d\phi \\
&= \mathcal{O}\left(\frac{1}{r^2}\right).
\end{aligned}$$

---

La última igualdad se tiene de la definición de  $\mathcal{O}$  (apéndice A). Mientras que

$$\begin{aligned}
\mathcal{R}_2 &= -\frac{i\gamma^2}{4} \iint \mathcal{O}\left(\frac{1}{r^{3/2}}\right) m(\rho, \phi) \\
&\quad \times \left[ \sqrt{\frac{2}{\pi\gamma\xi}} e^{i(\gamma\xi - \frac{\pi}{4})} e^{-i\gamma\rho \cos \psi_1} + \mathcal{O}\left(\frac{1}{\xi^{3/2}}\right) \right] \rho \, d\rho d\phi \\
&= -\frac{i\gamma^2}{4} \sqrt{\frac{2}{\pi\gamma\xi}} \iint \mathcal{O}\left(\frac{1}{r^{3/2}}\right) e^{i(\gamma\xi - \frac{\pi}{4})} e^{-i\gamma\rho \cos \psi_1} m(\rho, \phi) \rho \, d\rho d\phi \\
&\quad - \frac{i\gamma^2}{4} \iint \mathcal{O}\left(\frac{1}{r^{3/2}}\right) \mathcal{O}\left(\frac{1}{\xi^{3/2}}\right) m(\rho, \phi) \rho \, d\rho d\phi \\
&= \mathcal{O}\left(\frac{1}{r^3}\right).
\end{aligned}$$

Esta última igualdad también se tiene por la definición de  $\mathcal{O}$ . Sabemos que  $e^{-i\frac{\pi}{2}} = -i$ . Por lo tanto,

$$\begin{aligned}
E^s(r, \theta; \xi, \varphi) &= -\frac{\gamma}{2\pi(r\xi)^{1/2}} \iint_{\mathcal{D}} e^{i\gamma(r+\xi-\rho(\cos \psi + \cos \psi_1))} m(\rho, \phi) \rho \, d\rho d\phi \\
&\quad + \mathcal{O}\left(\frac{1}{r^2}\right),
\end{aligned}$$

con  $\mathcal{D} = [0, b] \times [-\pi, \pi]$ . De lo anterior llegamos al resultado principal en este capítulo.

**Teorema 3.3** *El campo dispersado para el problema (2.30)-(2.31)-(3.28) está dado por*

$$E^s(r, \theta; \xi, \varphi) = K \iint_{\mathcal{D}} e^{i\gamma z} m(\rho, \phi) \rho \, d\rho d\phi + \mathcal{O}\left(\frac{1}{r^2}\right), \quad (3.38)$$

donde

$$\begin{aligned}
K &= -\frac{\gamma}{2\pi(r\xi)^{1/2}} \\
z &= r + \xi - \rho \cos \psi - \rho \cos \psi_1
\end{aligned}$$

---

Con la expresión (3.38) resulta sencillo calcular ahora el campo dispersado dado  $m$ , a partir de la emisión de ondas en  $(\xi, \varphi)$  y medido en  $(r, \theta)$ .

Hemos adaptado el problema directo de dispersión de ondas a una geometría cilíndrica o polar, sólo pensando en las aplicaciones que en física médica tener. Las ondas incidentes también son construidas *ad doc*, pero no tienen nada de especial, simplemente son unas de las más simples de implementar computacionalmente, y tienen la característica de ser soluciones fundamentales en polares de la ecuaciones de Helmholtz involucradas.

Puesto que el algoritmo de reconstrucción, o fórmula de inversión, que construiremos en el siguiente capítulo, se deduce a partir de (3.38), también estará adaptado a una geometría cilíndrica.

Hay dos tipos de dispersores que particularmente nos interesan: los dispersores puntuales y los dispersores gaussianos, que definiremos a continuación.

### 3.3.2. Dispersión puntual y gaussiana

En primer lugar consideramos la interacción de una microonda con una sola partícula que está dentro de un medio homogéneo. Aunque la partícula pudiera ser de forma complicada, suponemos que está compuesta de tal manera que, en términos macroscópicos, se puede describir como un punto. A esto nos referimos con un *dispersor puntual*.

La respuesta del sistema a un dispersor puntual determina la función de dispersión puntual, o Point Spread Function (PSF). Esta función juega un papel importante en la formulación del problema directo, pero también en la solución del problema inverso.

Suponga que el dispersor es un punto colocado en  $(\rho_0, \phi_0) \in \mathcal{D}$  y



---

$m(\rho_0, \phi_0) = m_0$  es su intensidad constante. Esto es,

$$m(\rho, \phi) = m_0 \delta(\rho - \rho_0) \delta(\phi - \phi_0).$$

Entonces el término integral en (3.38) es

$$\begin{aligned} & \iint e^{i\gamma(r+\xi-\rho \cos(\theta-\phi)-\rho \cos(\phi-\varphi))} m_0 \delta(\rho - \rho_0) \delta(\phi - \phi_0) \rho \, d\rho d\phi \\ &= m_0 \rho_0 e^{i\gamma(r+\xi-\rho_0 \cos(\theta-\phi_0)-\rho_0 \cos(\phi_0-\varphi))}. \end{aligned}$$

Así, el campo dispersado se calcula simplemente como

$$E^s(r, \theta; \xi, \varphi; \rho_0, \phi_0) = K m_0 \rho_0 e^{i\gamma z_0} + \mathcal{O}\left(\frac{1}{r^2}\right), \quad (3.39)$$

con

$$z_0 = r + \xi - \rho_0 \cos(\theta - \phi_0) - \rho_0 \cos(\phi_0 - \varphi).$$

La PSF de nuestro problema de dispersión es entonces (3.39).

Para un objeto cualquiera, suponemos que se compone de una colección discreta de puntos. Asumimos entonces que la dispersión es *simple*, es decir, el número de partículas es suficientemente pequeño y su separación suficientemente grande, tal que en la vecindad de cualquier partícula el campo dispersado por todas las partículas es pequeño comparado con el campo externo. Bajo esta hipótesis el campo dispersado total es justamente la suma de los campos dispersados por las partículas individuales, cada una de las cuales actúa con el campo externo de manera aislada con respecto a las otras partículas [10].

Un ejemplo de dispersor distinto al puntual se da cuando la colección de puntos tienen forma gaussiana. En este caso consideramos el dispersor dado por

$$m(\rho, \phi) = m_0 \exp\left(\frac{-(\rho - \rho_0)^2}{2\sigma_0^2}\right) \exp\left(\frac{-(\phi - \phi_0)^2}{2\sigma_1^2}\right),$$

---

donde  $m_0 = m(\rho_0, \phi_0)$  es el valor máximo del dispersor, y  $\sigma_0, \sigma_1$  son los parámetros que determinan el ancho de la función gaussiana en la coordenada radial y angular, respectivamente. Entonces

$$\begin{aligned}
 E^s(r, \theta; \xi, \varphi) &= Km_0 \iint_{\mathcal{D}} \exp(i\gamma z) \exp\left(\frac{-(\rho - \rho_0)^2}{2\sigma_0^2}\right) \exp\left(\frac{-(\phi - \phi_0)^2}{2\sigma_1^2}\right) \rho \, d\rho d\phi \\
 &\quad + \mathcal{O}\left(\frac{1}{r^2}\right)
 \end{aligned}$$

Los dispersores puntuales y gaussianos serán considerados para las simulaciones numéricas en la siguiente sección.

Los experimentos numéricos que presentaremos a continuación nos permiten ejemplificar el algoritmo de dispersión de ondas, así como los ejemplos numéricos del siguiente capítulo nos permitirán ejemplificar el algoritmo de reconstrucción. Pero los algoritmos que determinan nuestros modelos son más generales y pueden ser mostrados con otras configuraciones y parámetros iniciales.

### 3.4. Ejemplos numéricos

Finalizamos el capítulo dando algunos ejemplos numéricos de la aplicación de (3.38) para dispersores puntuales y para dispersores gaussianos, con base en valores tomados de la literatura. Las imágenes que mostraremos están dadas en coordenadas polares.

Estamos considerando que el medio homogéneo es el agua. El valor de  $k_w$  es 144, que corresponde con una frecuencia de 800 MHz a una temperatura de 37°C. El índice de refracción normalizado  $\mathfrak{N}_w$  es igual a  $\sqrt{1 + 0.04i}$ . Mientras que  $m_0 = \sqrt{0.69 + 0.4i}$  corresponde al índice de refracción normalizado del

---

músculo humano [22]. El valor de  $r = \xi = b$  es  $0.1 \text{ m} = 10 \text{ cm} = 1 \text{ dm}$ . Por conveniencia, las distancias están en decímetros.

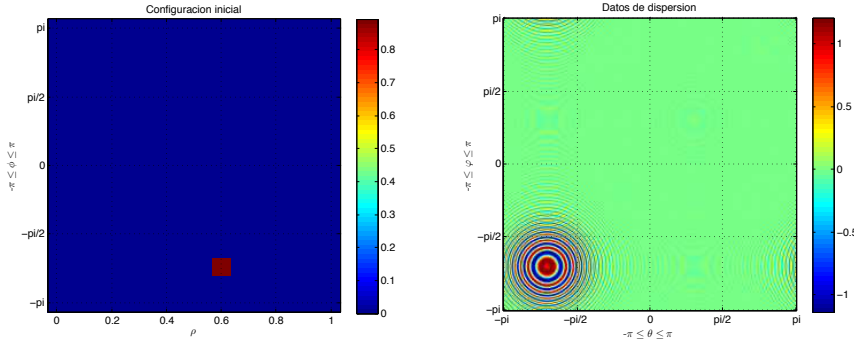
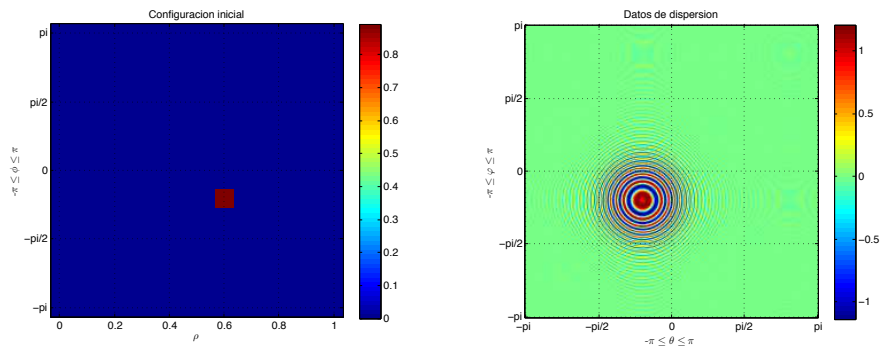


Figura 3.6: Configuración inicial y campo dispersado para un dispersor puntual localizado en  $(\rho_0, \phi_0) = (0.6, -0.7\pi)$ .

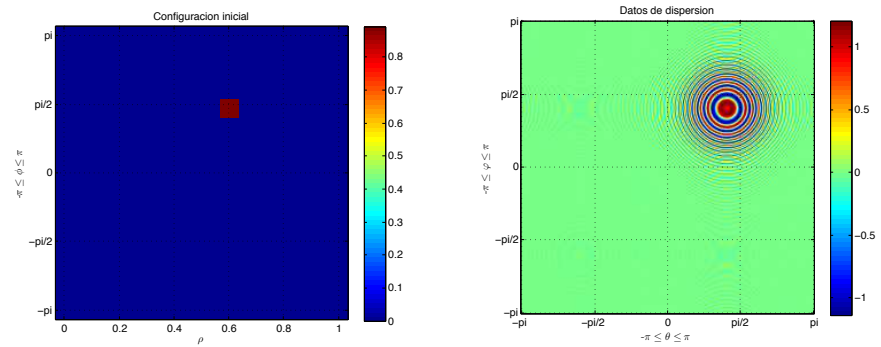
La figura 3.6 muestra los datos de dispersión para un dispersor puntual localizado en  $(\rho_0, \phi_0) = (0.6, -0.7\pi)$ . La figura 3.7 tiene los datos de dispersión para dispersores puntuales localizados en  $(\rho_0, \phi_0) = (0.6, -0.2\pi)$  y  $(\rho_0, \phi_0) = (0.6, 0.4\pi)$ . En estas figuras tenemos fijo  $\rho_0 = 0.6$ . Podemos notar que el campo dispersado  $E^s$  no varía en intensidad conforme  $\phi_0$  cambia entre  $-\pi$  y  $\pi$ . Sin embargo, la zona de mayor intensidad se desplaza sobre la diagonal  $\varphi = \theta$ , de izquierda a derecha.

Si la variación se hace ahora en el sentido radial, manteniendo fijo  $\phi_0 = 0.1\pi$ , se nota que la zona de mayor intensidad se mantiene en el mismo lugar, pero la intensidad varía de menor a mayor conforme  $\rho_0$  crece. En la figura 3.8 se tienen los datos de dispersión, y un corte transversal de estos datos en  $\varphi = 0$ , para un dispersor puntual en  $(\rho_0, \phi_0) = (0.08, 0.1\pi)$ . Comparamos con los datos en la figura 3.9.

Cuando el dispersor se encuentra cerca del centro de  $D_b$ , la intensidad



(a)  $(\rho_0, \phi_0) = (0.6, -0.2\pi)$



(b)  $(\rho_0, \phi_0) = (0.6, 0.4\pi)$

Figura 3.7: Configuración inicial y campo dispersado para un dispersor puntual localizado en (a)  $(\rho_0, \phi_0) = (0.6, -0.2\pi)$  y (b)  $(\rho_0, \phi_0) = (0.6, 0.4\pi)$ .

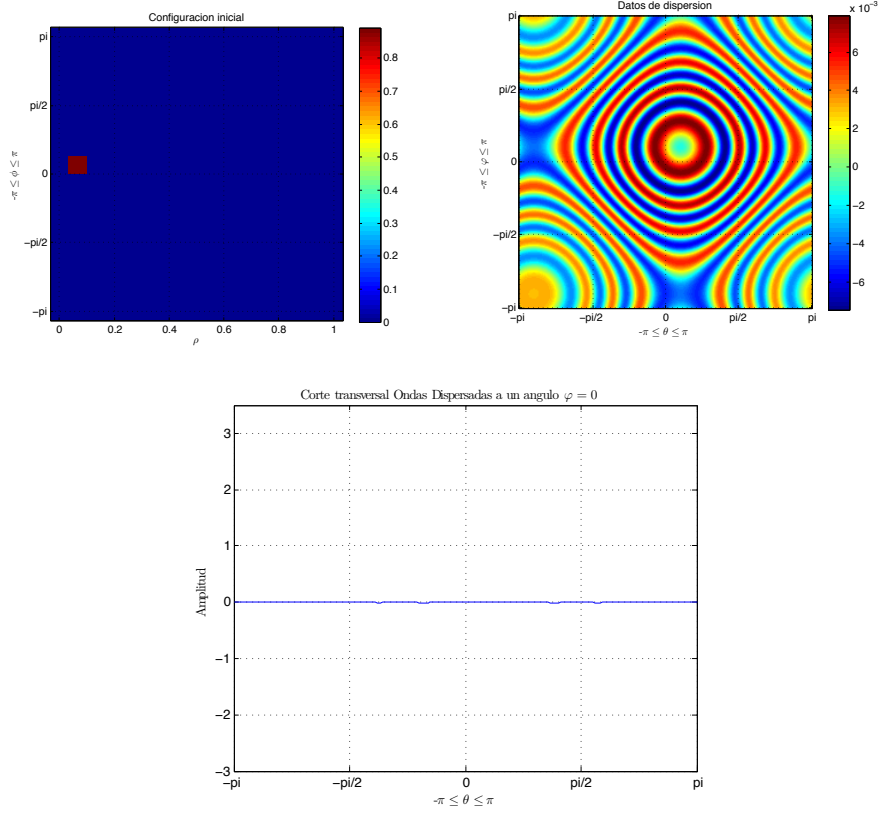
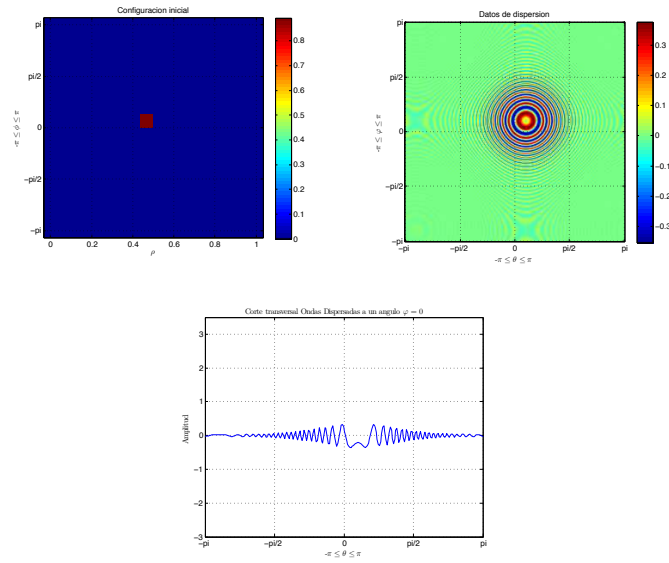


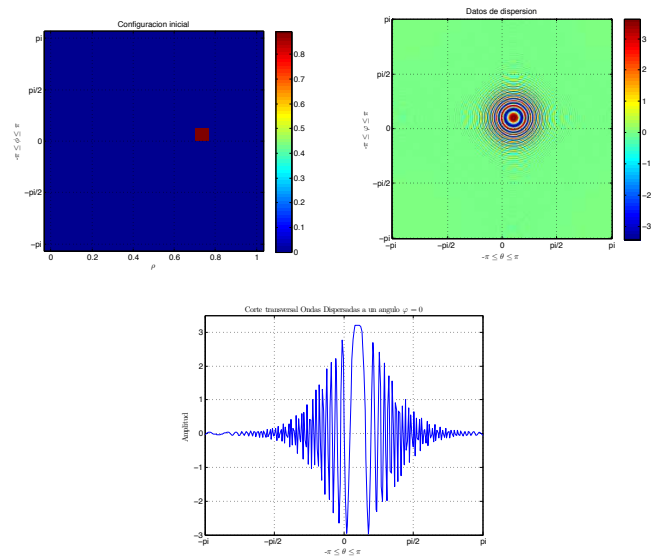
Figura 3.8: Configuración inicial, campo dispersado y corte transversal para un dispersor puntual localizado en  $(\rho_0, \phi_0) = (0.08, 0.1\pi)$ .

del campo es mucho menor que cuando se encuentra cerca de la frontera. Recordemos que se está considerando que las ondas incidentes son funciones de Hankel, las cuales disminuyen en amplitud conforme aumenta la distancia desde donde fueron emitidas.

Estos experimentos numéricos muestran lo que se conoce como las funciones de esparcimiento puntual, o PSF por sus siglas en inglés. Que corresponden a la “respuesta” puntual o casi puntual, que la fórmula de inversión tiene que procesar como información *a priori* de objetos dispersores. De



(a)  $(\rho_0, \phi_0) = (0.45, 0.1\pi)$



(b)  $(\rho_0, \phi_0) = (0.75, 0.1\pi)$

Figura 3.9: Configuración inicial, corte transversal y campo dispersado para un dispersor puntual localizado en (a)  $(\rho_0, \phi_0) = (0.45, 0.1\pi)$  y (b)  $(\rho_0, \phi_0) = (0.75, 0.1\pi)$ .

---

esta forma estamos mostrando la ejecución del algoritmo para detectar singularidades (puntuales o casi puntuales) en un medio de referencia, pero no ponemos énfasis en la resolución ni en la eficacia del algoritmo.

En este caso también estamos pensando en las aplicaciones en física médica, en donde la idea es detectar apariciones de defectos pequeños en tejido que no son perceptibles por otros métodos en las etapas iniciales de un potencial daño o enfermedad.

Finalmente, en la figura 3.10 mostramos los datos de dispersión y el corte transversal para un dispersor gaussiano cuyo valor máximo se encuentra en  $(\rho_0, \phi_0) = (0.4, \pi/4)$ .

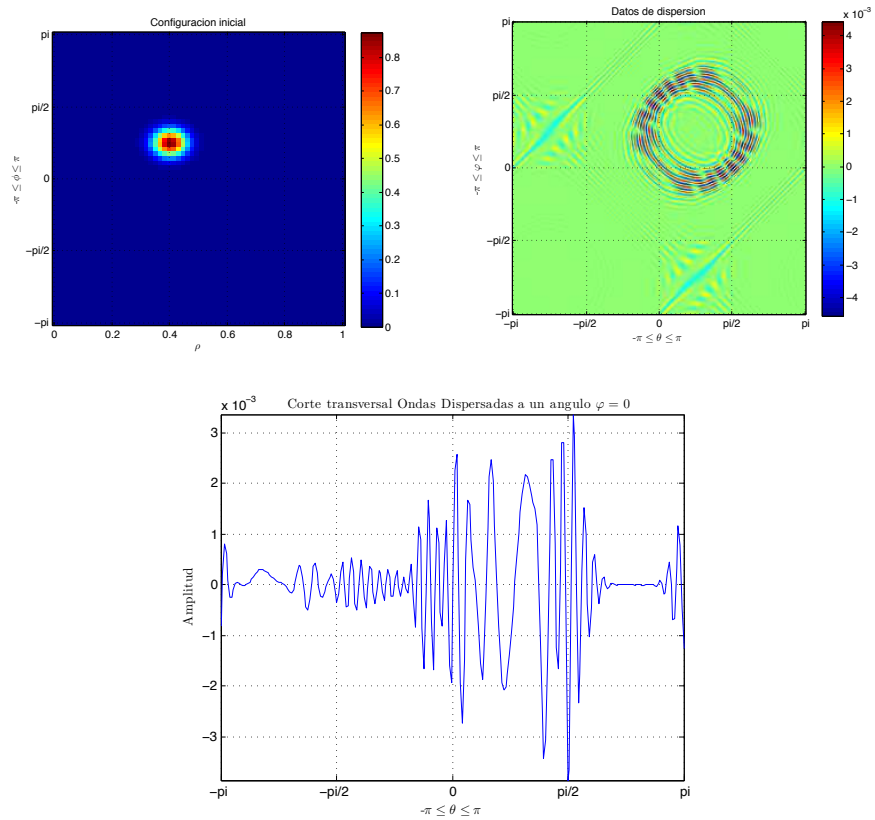


Figura 3.10: Configuración inicial, campo dispersado y corte transversal para un dispersor gaussiano con  $(\rho_0, \phi_0) = (0.4, \pi/4)$ .



---

---

# Problema inverso de formación de imágenes tomográficas

La primera máquina clínica para la detección de tumores, basada en tomografía computada de rayos X, fue instalada en 1971 en el hospital Atkinson Morley de Wimbledon, Gran Bretaña. Este hecho ha sido considerado uno de los más grandes logros en radiología desde el descubrimiento de los rayos X por W. C. Röntgen en 1895. Las imágenes generadas por computadora dieron el primer ejemplo de imágenes obtenidas mediante la solución de un problema matemático que pertenece a los problemas inversos [7]. A partir de este suceso, los problemas inversos han tenido importantes avances tanto en los aspectos teóricos como en la práctica. En particular, se han desarrollado métodos efectivos para superar las dificultades que implican el mal planteamiento de este tipo de problemas.

Recordemos que un sistema de exploración es, a grandes rasgos, cualquier

---

sistema que colecte señales y forme una imagen observable del medio a partir del procesamiento de tales señales. La imagen suele ser el producto final del sistema de exploración. Ésta es una representación del medio que se explora, y generalmente se trata de una escena bidimensional o tridimensional. En la representación formal:  $g = T(f)$ , es  $f$  quien denota esta imagen; y para nuestro caso, la escena es bidimensional.

La tarea computacional de estimar esta función  $f$ , cuando se conocen los datos  $g$  y el proceso que modela el operador  $T$ , es lo que se conoce como el *problema inverso de formación de imagen* [8]. En términos de la dispersión de ondas, el problema inverso de formación de imagen consiste en la determinación de  $f$  cuando un conjunto de ondas dispersadas que dependen de  $f$  ha sido dado. Si el conjunto de datos dispersados proviene de mediciones que se realizaron empleando diferentes posiciones, tanto de emisión como de recepción de las señales, se dice que la imagen es una *imagen tomográfica*.

Como ya hemos mencionado, en la práctica uno nunca mide datos que representen impecablemente el proceso o la distribución de interés; sino que los datos medidos están afectados por las degradaciones (deterministas) producto de la modelación, así como por las degradaciones aleatorias, como el ruido [38]. En consecuencia,  $f$  no se puede obtener de manera exacta. La solución al problema inverso corresponde más bien a una aproximación de  $f$  que se corresponda con los datos. Otra manera de referirnos a la solución es decir que estamos reconstruyendo una imagen de  $f$ , que si bien no es exactamente  $f$ , es la mejor aproximación, en algún sentido.

En el capítulo anterior se construyó un modelo de dispersión de ondas con una geometría que permite la obtención de datos de dispersión para diferentes posiciones, tanto de emisor como de receptor, alrededor de un

---

dominio circular. Esto conlleva a un problema de inversión tomográfico. El problema inverso de formación de imágenes tomográficas que se deduce del modelo (3.38) consiste en obtener una imagen que represente el interior del medio explorado a partir de un conjunto de datos de dispersión,  $E^s$ , medidos en la frontera de algún dominio circular adecuado. A partir de tal imagen es posible la localización del dispersor.

En este capítulo construiremos una fórmula de inversión tomográfica para (3.38), tomando en cuenta la degradación, tanto determinista como aleatoria, que sufren los datos de dispersión. Mediante esta fórmula obtendremos imágenes tomográficas de un medio biológico.

Una primera aproximación a la fórmula de inversión será dada en analogía a la transformada inversa de Fourier, aprovechando la forma de integral oscilatoria que tiene (3.38). Esta formulación y ejemplos numéricos de su aplicación están dados en la Sección 4.1. No obstante, esta primera versión no considera la degradación debida al ruido.

Para llegar a la fórmula de inversión que considera las degradaciones tanto deterministas como aleatorias, haremos analogía con la teoría básica de formación de imágenes.

La teoría de formación de imágenes se encarga de la descripción matemática de los procesos de formación de imágenes, tratando las degradaciones de tal forma que sus efectos sobre la calidad de la imagen puedan ser caracterizados y, de ser posible, corregidos [38].

Los sistemas básicos dentro de la teoría de formación de imágenes son los sistemas lineales deterministas. Ellos describen las principales características de la mayoría de los sistemas de formación de imagen y son la base de varias técnicas de procesamiento de imágenes. Para éstos, la herramienta matemática principal es el análisis de Fourier. Dentro de los sistemas

---

lineales, los sistemas invariantes tienen un papel fundamental debido a sus propiedades matemáticas. Estos sistemas reciben el nombre de sistemas de convolución, y la solución al problema inverso es un problema de deconvolución de la imagen. La solución a este tipo de problemas será la referencia para la construcción de nuestro modelo inverso.

La presencia de ruido en los sistemas de formación de imagen lineales conduce a problemas de inversión mal planteados, lo que ha motivado el desarrollo de métodos de regularización.

Un primer método obtiene una solución aproximada conocida como pseudoinversa, o solución de mínimos cuadrados. Sin embargo, esta técnica conduce también a problemas mal planteados, pues la solución pseudoinversa es bastante sensible al ruido.

Una técnica más efectiva, que reduce los efectos del ruido en la imagen, se conoce con el nombre de regularización de Tíjonov. A pesar de su efectividad, la regularización de Tíjonov es un método determinista que no considera la naturaleza aleatoria del ruido.

La consideración aleatoria del ruido da lugar a métodos de aproximación estadísticos. Este tipo de aproximación es la que nos interesa para nuestro modelo de inversión tomográfica. El enfoque estocástico nos llevará a regularizar mediante un filtro de Wiener, obtenido al minimizar el error cuadrático medio en las imágenes reconstruidas. Como veremos, esta regularización generaliza el esquema de Tíjonov para problemas de deconvolución. La Sección 4.2 abarca todo este análisis y ejemplos numéricos de la aplicación del modelo.

Con la obtención de imágenes tomográficas en esta última Sección se consigue el objetivo principal del capítulo y de la tesis.

---

## 4.1. Problema inverso para datos sin ruido

En el capítulo anterior obtuvimos un modelo de dispersión de ondas en el que el campo dispersado está determinado por

$$E^s(r, \theta; \xi, \varphi) \sim K \iint_{\mathcal{D}} e^{i\gamma z} m(\rho, \phi) \rho \, d\rho d\phi,$$

donde  $\mathcal{D} = [0, b] \times [-\pi, \pi]$ , y

$$\begin{aligned} K &= -\frac{\gamma}{2\pi(r\xi)^{1/2}}, \\ z &= r + \xi - \rho \cos(\theta - \phi) - \rho \cos(\phi - \varphi). \end{aligned}$$

Buscamos ahora crear una imagen tomográfica del medio, que nos permita localizar el dispersor, a partir de los datos  $E^s(r, \theta; \xi, \varphi)$ . Vamos a suponer que los datos de dispersión no son afectados por ruido.

En analogía con la transformada inversa de Fourier, proponemos que

$$I(\varrho, \vartheta) = \iint_{\mathfrak{D}} Q(\theta, \varphi; \varrho, \vartheta) e^{-i\gamma \zeta} E^s(r, \theta; \xi, \varphi) \, d\theta d\varphi, \quad (4.1)$$

es una aproximación de la imagen del medio de donde se obtuvieron los datos dispersados. Aquí,  $\mathfrak{D} = [-\pi, \pi] \times [-\pi, \pi]$ ,

$$Q(\theta, \varphi; \varrho, \vartheta) = \frac{1}{K},$$

y

$$\zeta = r + \xi - \varrho \cos(\theta - \vartheta) - \varrho \cos(\vartheta - \varphi),$$

con  $(\varrho, \vartheta) \in \mathcal{D}$ . El signo negativo en la exponencial sugiere que estamos revirtiendo el sentido de las ondas para encontrar el punto en el que fueron dispersadas, análogo al signo negativo en la transformada inversa de Fourier.

El esquema de inversión que estamos construyendo proviene de la teoría de dispersión de ondas de Kirchhoff que no es tomográfica. Esta teoría de

---

dispersión está basada en la descripción que sigue un sólo rayo (óptica - geométrica), que incluye tanto un campo emisor como uno dispersado. El campo dispersado explícitamente depende de una posición de emisión como de medición. Dichas posiciones las podemos hacer coincidir, lo que significa que la antena que emite las ondas también las colecta como ecos. Esta es una aproximación que en inglés se llama “start-stop”.

Obsérvese que cuando el dispersor es puntual y localizado en  $\rho_0, \phi_0$ ,

$$I(\varrho, \vartheta; \rho_0, \phi_0) = \iint_{\mathfrak{D}} m_0 \rho_0 e^{-i\gamma\zeta} e^{i\gamma z_0} d\theta d\varphi.$$

Idealmente, la reconstrucción de la imagen se obtiene con esta función de  $\rho_0, \phi_0$  para cada punto donde se encuentre el dispersor. Es decir, la imagen de reconstrucción ideal es

$$I_{id}(\varrho, \vartheta; \rho_0, \phi_0) = \iiint\limits_{\mathfrak{D} \times \mathcal{D}} e^{-i\gamma(\zeta-z)} m(\rho, \phi) \rho d\rho d\phi d\theta d\varphi. \quad (4.2)$$

A continuación presentamos algunos ejemplos numéricos. En la figura 3.9(b)) del capítulo anterior se mostraron los datos de dispersión de un dispersor puntual localizado en  $(\rho_0, \phi_0) = (0.75, 0.1\pi)$ . Ahora mostramos la reconstrucción de este dispersor en la figura 4.1, basada en el modelo (4.1). Damos nuevamente la configuración inicial y agregamos el relieve de tal configuración para la comparación.

El ejemplo de reconstrucción de un dispersor gaussiano lo encontramos en la figura 4.2. Se reconstruyó el dispersor gaussiano de la figura 3.10 (valor máximo en  $(\rho_0, \phi_0) = (0.4, \pi/4)$ ).

Un modelo más realista necesita considerar que las mediciones en la práctica no son exactas y sí contienen ruido. Damos un ejemplo de datos afectados con ruido en la figura 4.3, donde se considera el mismo dispersor gaussiano de la figura 4.2.

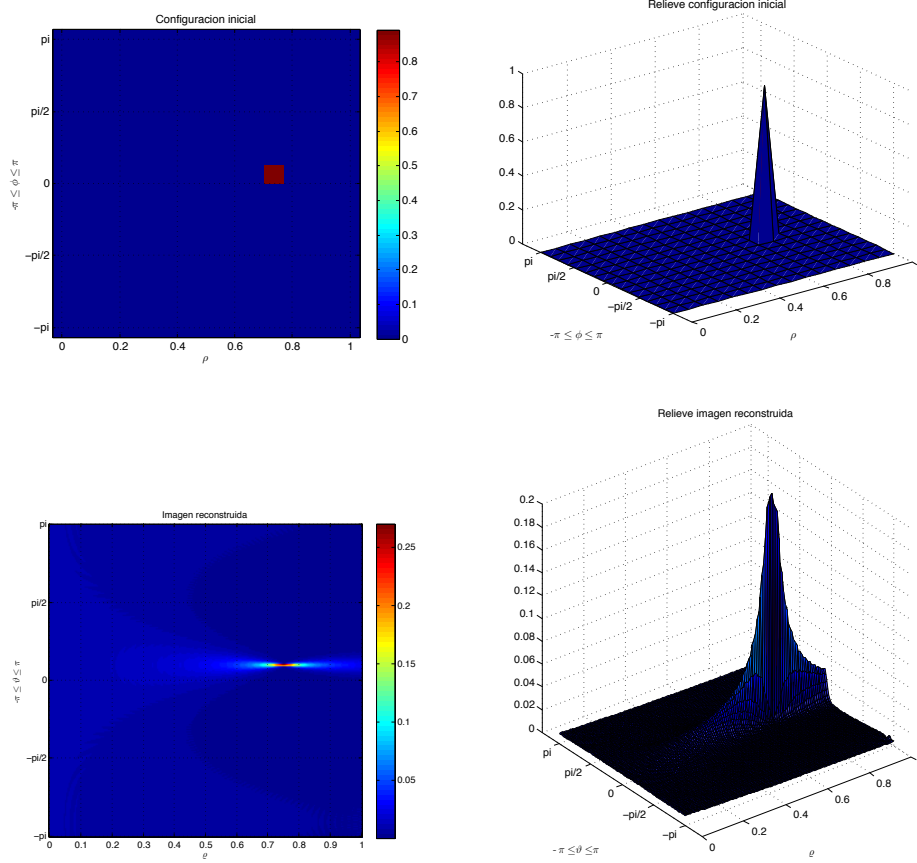


Figura 4.1: Reconstrucción del dispersor puntual localizado en  $(\rho_0, \phi_0) = (0.75, 0.1\pi)$ , mediante el modelo (4.1).

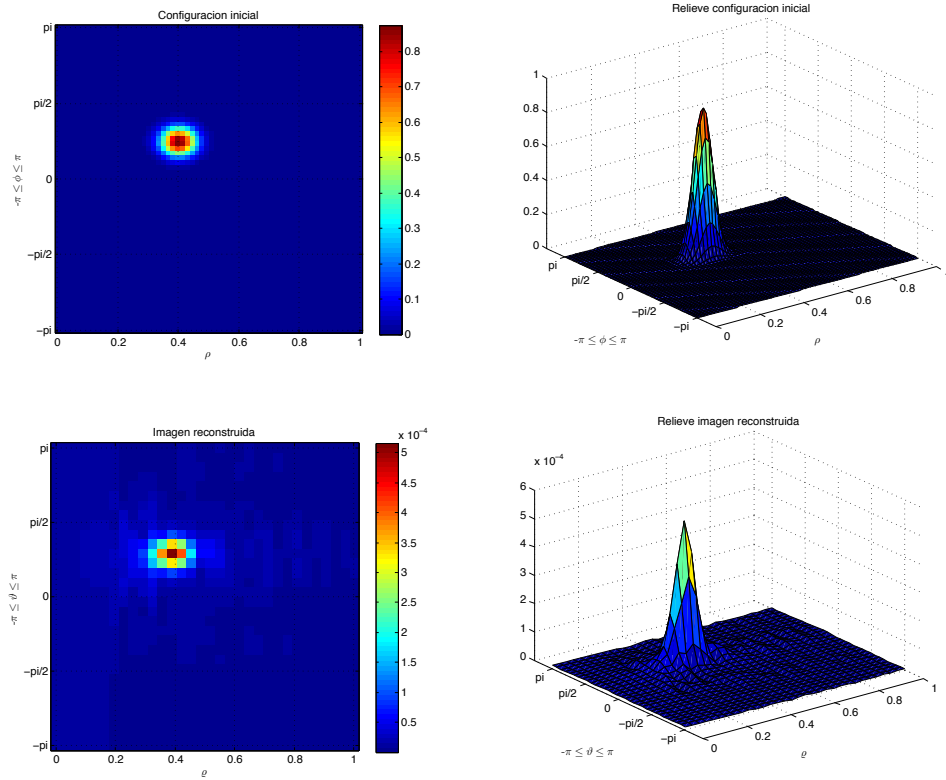


Figura 4.2: Reconstrucción del dispensor gaussiano con máximo  $(\rho_0, \phi_0) = (0.4, \pi/4)$ , mediante el modelo (4.1).



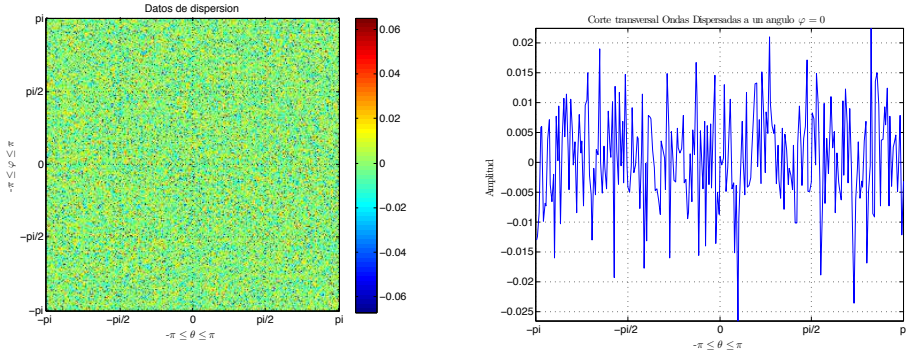


Figura 4.3: Datos de dispersión con ruido para el dispersor gaussiano con máximo en  $(\rho_0, \phi_0) = (0.4, \pi/4)$ .

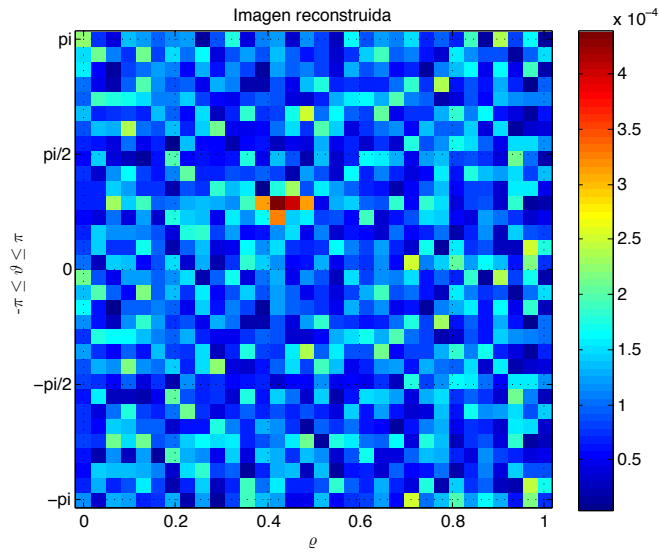


Figura 4.4: Reconstrucción del dispersor gaussiano con máximo en  $(\rho_0, \phi_0) = (0.4, \pi/4)$ .

---

Si aplicamos el modelo de inversión (4.1) a estos datos, observamos que la reconstrucción (figura 4.4) también contiene ruido, y no es tan satisfactoria como en los casos de los dispersores de las figuras 4.1 y 4.2.

El ruido en los datos de medición es producto de un proceso aleatorio. Por lo tanto es importante considerar su naturaleza y propiedades estadísticas en la solución del problema inverso. En la siguiente sección proponemos un modelo de inversión que toma en cuenta estas consideraciones.

## 4.2. Problema inverso estadístico

Además de las características del ruido, es necesario compensar la pérdida de información en el problema directo con información adicional respecto al dispersor. En nuestro caso supondremos que el dispersor también es una realización de un proceso aleatorio y pediremos que cumpla con algunas propiedades estadísticas.

Para darnos una idea más intuitiva, pensemos que el problema consiste en seleccionar una imagen (la imagen de reconstrucción) de un espacio de posibles imágenes. Desde este punto de vista, una imagen es una realización de una variable aleatoria caracterizada por una función de probabilidad predefinida sobre un conjunto de imágenes. El propósito no es tomar la imagen “real”, sino seleccionar una imagen del espacio de imágenes que explique mejor los datos observados [8].

Antes de iniciar con la construcción de la fórmula de inversión que considere las propiedades aleatorias del dispersor y del ruido, daremos un breve resumen de las ideas fundamentales que motivan la solución aproximada por tal fórmula.

Partimos del siguiente problema determinista.

---

**Problema 4.1** Hallar  $x \in H_1$  que satisfice

$$Ax = y, \quad (\text{Ecuación de Fredholm de primera clase.})$$

con  $y \in H_2$ , en donde  $H_1, H_2$  son espacios separables de Hilbert (dimensión finita o infinita), y  $A : H_1 \rightarrow H_2$  un operador compacto.

Sabemos que

1. La solución existe  $\iff y \in \text{Ran}(A)$ .
2. La solución es única  $\iff \text{Ker}(A) = \{0\}$ .

Lo que en realidad significan estas dos condiciones es que tenemos restricciones para hallar solución al problema. Existe un tercer obstáculo para hallar una solución única: el vector  $y$  representa típicamente datos de medición contaminada por ruido (señal degradada). Ante tal situación, la opción que tenemos es construir sólo soluciones aproximadas  $x$ , tal que  $Ax \approx y$ .

Por otro lado, aún cuando la inversa de  $A$  exista, podría no ser continua, a menos que los espacios  $H_i$  fueran de dimensión finita [42, 71]. Lo anterior significa que “pequeños” errores en los datos  $y$ , pueden causar “grandes” errores en  $x$ . Adicionalmente, en aplicaciones prácticas, si  $T$  es una matriz (sistema lineal) las condiciones (1) y (2) no son suficientes para resolver adecuadamente al sistema. El número de condición  $\kappa(A)$  puede ser muy grande, aún en problemas de dimensión finita, debido a los problemas de redondeo numérico. El objetivo de los métodos de regularización es remediar algunos de estos problemas. Uno de tales métodos es la regularización de Tíjonov, que consiste en lo siguiente.

**Definición 4.2** Sea  $\varepsilon > 0$  una constante dada. La solución regularizada de Tíjonov  $x_\varepsilon \in H_1$  es el minimizador del funcional

$$F_\varepsilon(x) = \|Ax - y\|^2 + \varepsilon\|x\|^2,$$

---

con tal de que el minimizador exista. El parámetro  $\varepsilon > 0$  se llama el parámetro de regularización.

La idea principal de este esquema es controlar simultáneamente la norma del residuo  $r = Ax - y$  y la norma de la solución aproximada  $x$ . El siguiente teorema muestra la solución al problema.

**Teorema 4.3** *Sea  $A : H_1 \rightarrow H_2$  un operador compacto con un sistema singular  $(\lambda_n, v_n, u_n)$ . Entonces, la solución regularizada de Tíjonov existe, es única y está dada por la fórmula*

$$x_\varepsilon = (A^*A + \delta I)^{-1}A^*y = \sum_n \frac{\lambda_n}{\lambda_n^2 + \varepsilon} \langle y, u_n \rangle v_n.$$

La aplicación de este teorema dentro de la teoría de formación de imágenes permite la reconstrucción de imágenes mediante transformadas de Fourier. Ejemplificamos esto con un problema de deconvolución. Consideremos un sistema invariante representado por el problema de convolución

$$g(\mathbf{x}) = (h \star f)(\mathbf{x}) = \iint_{\mathbb{R}^2} h(\mathbf{y} - \mathbf{x})f(\mathbf{y}) d\mathbf{y} \quad (4.3)$$

donde  $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^2$  y las funciones  $g$  y  $f$  están definidas en espacios de Banach  $H_1 = H_2 = L^2(\mathbb{R}^2)$ , y  $f$ , de valores reales, es de soporte compacto. A su vez,  $g$  define un operador integral de la forma  $(Tf)(\mathbf{x}) =: g(\mathbf{x})$ , en donde supondremos que  $T = T^*$  es autoadjunto y que el núcleo  $h(-\mathbf{x}) = h(\mathbf{x})$  es una función par. Queremos determinar el minimizador  $f_\delta = (T^*T + \delta I)^{-1}T^*g$  de este problema. Primero observamos que, aplicando la transformada de Fourier,  $\mathcal{F}$ , a la operación  $T(f) = g$ , obtenemos la multiplicación  $\hat{g} = \hat{h}\hat{f}$ , por lo que, para recuperar a  $g$  invertimos Fourier,  $\mathcal{F}^{-1}$ , de la siguiente forma

$$g(\mathbf{x}) = \mathcal{F}^{-1}(\hat{h}\hat{f})(\mathbf{v}) = \frac{1}{(2\pi)^2} \iint_{\mathbb{R}^2} e^{i\mathbf{v}\cdot\mathbf{x}} \hat{h}(\mathbf{v}) \hat{f}(\mathbf{v}) dA(\mathbf{v}).$$

---

Así podemos definir al operador  $T$  y su adjunto  $T^*$  como sigue

$$\begin{aligned} Tf(\mathbf{x}) &= \mathcal{F}^{-1}(\hat{h}\hat{f})(\mathbf{v}), \\ T^*f(\mathbf{x}) &= \mathcal{F}^{-1}(\bar{\hat{h}}\hat{f})(\mathbf{v}), \end{aligned}$$

donde la barra  $\bar{\phantom{x}}$ , denota conjugado complejo. Aplicando el adjunto a  $Tf$  obtenemos

$$\begin{aligned} T^*(Tf(\mathbf{x})) &= \mathcal{F}^{-1}(\bar{\hat{h}}\mathcal{F}(Tf)) \\ &= \mathcal{F}^{-1}(\bar{\hat{h}}\hat{h}\hat{f}) \\ &= \mathcal{F}^{-1}(|\hat{h}|^2\hat{f}). \end{aligned}$$

Luego entonces, agregando la identidad a este operador  $T^*T$ , obtenemos

$$(T^*T + \varepsilon I)f(\mathbf{x}) = \mathcal{F}^{-1}[(|\hat{h}|^2 + \varepsilon)\hat{f}](\mathbf{x}), \quad (4.4)$$

pero esta expresión es en realidad el lado izquierdo de los mínimos cuadrados con regularización del problema original; es decir,

$$(T^*T + \varepsilon I)f(\mathbf{x}) = T^*g(\mathbf{x}). \quad (4.5)$$

Tomando la transformada de Fourier en ambos lados de la igualdad (4.4) obtenemos

$$\mathcal{F}[(T^*T + \varepsilon I)f](\mathbf{v}) = (|\hat{h}|^2 + \varepsilon)\hat{f}(\mathbf{v});$$

por lo tanto, tenemos la representación espectral como producto del lado izquierdo de (4.5), de ahí que podamos despejar a  $f$ , en realidad su aproximación  $f_\varepsilon$ , y obtener que

$$f_\varepsilon(\mathbf{x}) = \mathcal{F}^{-1}\left(\frac{\bar{\hat{h}}\hat{g}(\mathbf{v})}{|\hat{h}|^2 + \varepsilon}\right)(\mathbf{x});$$

---

Por lo tanto, a partir de la inversión para la Ecuación (4.5), concluimos que

$$f_\varepsilon(\mathbf{x}) = (T^*T + \varepsilon I)^{-1}T^*g(\mathbf{x}) = \mathcal{F}^{-1} \left( \frac{\tilde{h}}{|\hat{h}|^2 + \varepsilon} \hat{g} \right) (\mathbf{x}).$$

Lo anterior nos da como resultado una aproximación de Tíjonov a la deconvolución de  $f$  en (4.3); es decir,  $f_\varepsilon$ . ¿Cuánto vale  $\varepsilon$ ?, es una pregunta natural y se puede determinar, por ejemplo, con el criterio de Morozov [42].

La regularización con el filtro de Wiener que obtendremos para la fórmula de inversión tomográfica generaliza no sólo el esquema de Tíjonov, si no que le da un sentido físico a este parámetro  $\varepsilon$  que, como veremos, pasa a ser el cociente de las densidades espectrales entre el dispersor y el ruido ambiental.

Es importante notar que el análisis de deconvolución está basado en propiedades de la transformada de Fourier. Dicha transformada diagonaliza operadores diferenciales de coeficientes constantes (los reemplaza por multiplicaciones en el dominio de Fourier). Sin embargo, la inversión de Fourier reemplaza productos por convoluciones no locales. No obstante, la transformada y su inversa son problemas bien planteados [6]. Si  $H_1$  y  $H_2$  son espacios de Banach y  $A$  un operador lineal de  $H_1$  a  $H_2$ , para cada  $y \in H_2$ , quisieramos resolver el problema lineal: hallar  $x$  tal que  $Ax = y$ . Formalmente, definimos un problema *bien planteado* como aquel en el cual  $A$  es invertible ( $A^{-1}y$  está definido para todo  $y \in H_2$ ) y que posee una inversa acotada; es decir,  $\|A^{-1}y\|_{H_1} \leq C\|y\|_{H_2}$  (para una constante  $C$  que depende de  $A$  pero no de  $y \in H_2$ ). La transformada de Fourier es un operador bien planteado de  $H_1 = L^2(\mathbb{R}^n)$  a  $H_2 = L^2(\mathbb{R}^n)$  ya que su inversa está bien definida de  $H_2 = L^2(\mathbb{R}^n)$  a  $H_1 = L^2(\mathbb{R}^n)$ . El resultado es que la transformada es estable con respecto a datos con ruido. En una imagen reconstruida sólo con transformada de Fourier significaría que la imagen se vería degradada, pero los errores no serían muy significativos. Dicho de otra forma, el error entre

---

dos soluciones  $x_1$  y  $x_2$ , que corresponde a dos conjuntos de datos  $y_1$  y  $y_2$ , satisface que  $\|x_1 - x_2\|_{H_1} \leq C\|y_1 - y_2\|_{H_2}$ . La elección de de los espacios  $H_1$  y  $H_2$  y de las normas  $\|\cdot\|_{H_1}$  y  $\|\cdot\|_{H_2}$  es importante desde luego.

En nuestro caso, los mapeos directo e inverso no son de transformadas de Fourier (ecuaciones (3.38),(4.7)). Pero, en cierto sentido, haremos analogía con la teoría de Fourier al momento de plantear la fórmula de inversión. Los operadores que definen nuestros problemas directo e inverso son una generalización en términos de Operadores Integrales de Fourier. Los operadores integrales de Fourier (FIO, por sus siglas en inglés), aparecen en el estudio de las ecuaciones diferenciales parciales, en particular en las que no son de coeficientes constantes. Cuando los coeficientes son constantes, se conoce que el Teorema de Malgrange-Ehrenpreis garantiza la existencia y unicidad de las soluciones, gracias a la descomposición de Fourier de los operadores diferenciales de estas ecuaciones [55]. En el contexto de la formación de imágenes tomográficas, la introducción de esta teoría que generaliza las transformadas de Fourier data de mediados de los 80's [9]. El problema es que la fórmula de inversión o mapeo inverso, es un problema mal planteado y por lo tanto no estable. La determinación de un filtro adecuado en nuestra fórmula de inversión garantiza la estabilidad del problema inverso.

#### 4.2.1. Fórmula de inversión tomográfica

Procedemos ahora al cálculo de nuestra fórmula de inversión para el problema de dispersión de ondas.

Consideremos que los datos de dispersión tienen ruido aditivo. Si denotamos  $d(r, \theta, \varphi)$  como las mediciones, entonces

$$d(r, \theta, \varphi) = E^s(r, \theta, \varphi) + \eta(\theta, \varphi). \quad (4.6)$$

---

Puesto que  $|r| = |\xi|$  (medimos  $E^s$  a la misma distancia de donde se emite  $E^i$ ) hemos omitido la dependencia de  $\xi$  para simplificar notación. Para formar la imagen  $I(\varrho, \vartheta)$  a partir de los datos con ruido, aplicamos un operador  $\hat{\mathcal{M}}_Q$  de la siguiente manera

$$I(\varrho, \vartheta) = \hat{\mathcal{M}}_Q(d) := \iint_{\mathfrak{D}} Q(\theta, \varphi; \varrho, \vartheta) e^{-i\gamma\zeta} d(r, \theta, \varphi) d\theta d\varphi, \quad (4.7)$$

donde  $\mathfrak{D} = [-\pi, \pi] \times [-\pi, \pi]$ ,  $Q(\theta, \varphi; \varrho, \vartheta)$  es una función por determinar, y

$$\zeta = 2r - \varrho \cos(\theta - \vartheta) - \varrho \cos(\vartheta - \varphi),$$

para  $(\varrho, \vartheta) \in \mathcal{D}$ . Con el fin de encontrar la relación entre la imagen  $I$  y el dispersor  $m$ , sustituimos (3.38) y (4.6) en (4.7):

$$\begin{aligned} I(\varrho, \vartheta) &= \iint_{\mathfrak{D}} Q(\theta, \varphi; \varrho, \vartheta) e^{-i\gamma\zeta} [E^s(r, \theta, \varphi) + \eta(\theta, \varphi)] d\theta d\varphi, \\ &= \iint_{\mathfrak{D}} Q(\theta, \varphi; \varrho, \vartheta) e^{-i\gamma\zeta} \\ &\quad \times \left[ \iint_{\mathcal{D}} K e^{i\gamma z} m(\rho, \phi) \rho d\rho d\phi + \eta(\theta, \varphi) \right] d\theta d\varphi, \\ &= \iiint_{\mathfrak{D} \times \mathcal{D}} K Q(\theta, \varphi; \varrho, \vartheta) e^{-i\gamma(\zeta - z)} m(\rho, \phi) \rho d\rho d\phi d\theta d\varphi \\ &\quad + \iint_{\mathfrak{D}} Q(\theta, \varphi; \varrho, \vartheta) e^{-i\gamma\zeta} \eta(\theta, \varphi) d\theta d\varphi, \end{aligned}$$

donde

$$z = 2r - \rho \cos(\theta - \phi) - \rho \cos(\phi - \varphi).$$

Escribiendo

$$I_m(\varrho, \vartheta) = \int_{\mathfrak{D} \times \mathcal{D}} K Q(\theta, \varphi; \varrho, \vartheta) e^{-i\gamma(\zeta - z)} m(\rho, \phi) \rho d\rho d\phi d\theta d\varphi, \quad (4.8)$$

$$I_\eta(\varrho, \vartheta) = \int_{\mathfrak{D}} Q(\theta, \varphi; \varrho, \vartheta) e^{-i\gamma\zeta} \eta(\theta, \varphi) d\theta d\varphi, \quad (4.9)$$

se tiene

$$I(\varrho, \vartheta) = I_m(\varrho, \vartheta) + I_\eta(\varrho, \vartheta), \quad (4.10)$$



---

Hemos omitido algunos signos de la integral para simplificar la notación. Nuestro propósito es determinar  $Q$  de tal forma que podamos suprimir el ruido al mismo tiempo que obtenemos información del dispersor, tanta como sea posible.

Si queremos encontrar el filtro  $Q$  para el cual  $I(\varrho, \vartheta)$  es la mejor reconstrucción, es necesario cuantificar la calidad de cada reconstrucción. Para ello, necesitamos primero considerar una imagen que nos sirva de referencia para la comparación con la reconstrucción. Usaremos

$$I_{id}(\varrho, \vartheta) = \int_{\mathfrak{D} \times \mathcal{D}} e^{-i\gamma(\zeta-z)} m(\rho, \phi) \rho \, d\rho d\phi d\theta d\varphi. \quad (4.11)$$

La cuantificación la obtenemos con la norma  $L^2$  de la diferencia entre nuestra reconstrucción y la referencia  $I_{id}$ . Definimos el error puntual  $\mathcal{E}(\varrho, \vartheta)$  por

$$\mathcal{E}(\varrho, \vartheta) := I(\varrho, \vartheta) - I_{id}(\varrho, \vartheta).$$

El error  $L^2$  para esta reconstrucción es

$$\Delta(Q, m) = \int_{\mathcal{D}} |\mathcal{E}(\varrho, \vartheta)|^2 \, d\varrho d\vartheta \quad (4.12)$$

Como el ruido adicionado a la imagen es en realidad una cantidad aleatoria, estrictamente hablando la imagen reconstruida es una cantidad estocástica. Esto implica que la ecuación (4.12) es también aleatoria. Además, buscamos  $Q$  no sólo para un dispersor particular, sino para una familia de posibles funciones  $m$ . Es decir, consideramos cada dispersor como una realización de un campo aleatorio. El modelo de ruido estocástico y el modelo de campo aleatorio para el dispersor inducen una función de densidad de probabilidad para  $\Delta(Q, m)$ . Así, en lugar de usar (4.12) como medida del error de reconstrucción, emplearemos el error cuadrático medio:

$$\Delta(Q) := \langle \Delta(Q, m) \rangle = \left\langle \int_{\mathcal{D}} |\mathcal{E}(\varrho, \vartheta)|^2 \, d\varrho d\vartheta \right\rangle. \quad (4.13)$$

---

Aquí  $\langle \cdot \rangle$  denota la media o esperanza. Hacemos intercambio de la esperanza con la integral y obtenemos el error cuadrático medio como una integral sobre el segundo momento puntual del error de reconstrucción,

$$\Delta(Q) = \int_{\mathcal{D}} \langle |\mathcal{E}(\varrho, \vartheta)|^2 \rangle d\varrho d\vartheta. \quad (4.14)$$

La  $Q$  óptima para nuestro problema la encontramos minimizando el funcional  $\Delta(Q)$ . Para encontrar la fórmula explícita de  $Q$  primero encontraremos la forma explícita de este funcional.

Hacemos algunas suposiciones respecto a los términos aleatorios.

**Hipótesis 4.4** *Consideramos que el dispersor es un campo aleatorio de segundo orden y media cero, con función de correlación  $R_m$  conocida,*

$$\begin{aligned} \langle m(\rho, \phi) \rangle &= 0, \\ R_m(\rho, \phi; \rho', \phi') &:= \langle m(\rho, \phi) \overline{m(\rho', \phi')} \rangle; \end{aligned}$$

la línea sobre  $m(\rho', \phi')$  denota conjugado complejo. Suponemos además que el ruido  $\eta(\theta, \varphi)$  es un campo aleatorio de segundo orden y media cero, el cual cumple

$$\langle \eta(\theta, \varphi) \overline{\eta(\theta', \varphi')} \rangle = e^{i\gamma\zeta - i\bar{\gamma}\zeta'} S_\eta^2 \delta(\theta - \theta', \varphi - \varphi'),$$

donde  $S_\eta^2$  es la densidad espectral del ruido,  $e$  indica su intensidad. Por último, asumimos que  $m$  y  $\eta$  son estadísticamente independientes, tal que

$$\langle m(\rho, \phi) \overline{\eta(\theta, \varphi)} \rangle = \langle m(\rho, \phi) \rangle \overline{\langle \eta(\theta, \varphi) \rangle} = 0. \quad (4.15)$$

Veamos en qué consiste  $|\mathcal{E}(\varrho, \vartheta)|^2$ , con  $\varrho, \vartheta$  fijos. Para simplificar notación omitiremos por ahora la dependencia  $(\varrho, \vartheta)$ ,

$$\begin{aligned} |\mathcal{E}|^2 = |I - I_{id}|^2 &= (I - I_{id}) \overline{(I - I_{id})} \\ &= I\bar{I} - I\bar{I}_{id} - I_{id}\bar{I} + I_{id}\bar{I}_{id}. \end{aligned}$$

---

Pero por (4.10),

$$\begin{aligned}
|\mathcal{E}|^2 &= (I_m + I_\eta)(\overline{I_m + I_\eta}) - (I_m + I_\eta)\overline{I_{id}} - I_{id}(\overline{I_m + I_\eta}) + I_{id}\overline{I_{id}} \\
&= I_m\overline{I_m} + I_m\overline{I_\eta} + I_\eta\overline{I_m} + I_\eta\overline{I_\eta} \\
&\quad - I_m\overline{I_{id}} - I_\eta\overline{I_{id}} - I_{id}\overline{I_m} - I_{id}\overline{I_\eta} + I_{id}\overline{I_{id}} \\
&= I_m\overline{I_m} - I_m\overline{I_{id}} - I_{id}\overline{I_m} + I_{id}\overline{I_{id}} \\
&\quad + I_m\overline{I_\eta} + I_\eta\overline{I_m} + I_\eta\overline{I_\eta} - I_\eta\overline{I_{id}} - I_{id}\overline{I_\eta} \\
&= |I_m - I_{id}|^2 + I_m\overline{I_\eta} + I_\eta\overline{I_m} + I_\eta\overline{I_\eta} - I_\eta\overline{I_{id}} - I_{id}\overline{I_\eta}
\end{aligned}$$

Denotamos

$$\begin{aligned}
\mathcal{E}_m^2 &= |I_m - I_{id}|^2 \\
\mathcal{E}_\eta^2 &= I_m\overline{I_\eta} + I_\eta\overline{I_m} + I_\eta\overline{I_\eta} - I_\eta\overline{I_{id}} - I_{id}\overline{I_\eta},
\end{aligned}$$

así que

$$|\mathcal{E}|^2 = \mathcal{E}_m^2 + \mathcal{E}_\eta^2.$$

Luego,

$$\langle |\mathcal{E}|^2 \rangle = \langle \mathcal{E}_m^2 \rangle + \langle \mathcal{E}_\eta^2 \rangle. \quad (4.16)$$

Por (4.8) y (4.11),

$$\begin{aligned}
\langle \mathcal{E}_m^2 \rangle &= \left\langle \left| \int_{\mathfrak{D} \times \mathfrak{D}} KQ(\theta, \varphi; \varrho, \vartheta) e^{-i\gamma(\zeta-z)} m(\rho, \phi) \rho \, d\rho d\phi d\theta d\varphi \right. \right. \\
&\quad \left. \left. - \int_{\mathfrak{D} \times \mathfrak{D}} e^{-i\gamma(\zeta-z)} m(\rho, \phi) \rho \, d\rho d\phi d\theta d\varphi \right|^2 \right\rangle \\
&= \left\langle \left| \int_{\mathfrak{D} \times \mathfrak{D}} \rho e^{-i\gamma(\zeta-z)} m(\rho, \phi) [KQ(\theta, \varphi; \varrho, \vartheta) - 1] \, d\rho d\phi d\theta d\varphi \right|^2 \right\rangle \\
&= \left\langle \int_{\mathfrak{D} \times \mathfrak{D}} \rho e^{-i\gamma(\zeta-z)} m(\rho, \phi) [KQ(\theta, \varphi; \varrho, \vartheta) - 1] \, d\rho d\phi d\theta d\varphi \right. \\
&\quad \left. \times \int_{\mathfrak{D} \times \mathfrak{D}} \rho' e^{i\gamma(\zeta'-z')} \overline{m(\rho', \phi')} \overline{[KQ(\theta', \varphi'; \varrho, \vartheta) - 1]} \, d\rho' d\phi' d\theta' d\varphi' \right\rangle,
\end{aligned}$$

donde

$$\begin{aligned}\zeta' &= 2r - \varrho \cos(\theta' - \vartheta) - \varrho \cos(\vartheta - \varphi'), \\ z' &= 2r - \rho' \cos(\theta' - \phi') - \rho' \cos(\phi' - \varphi').\end{aligned}$$

Haciendo

$$L(\theta, \varphi; \theta', \varphi'; \varrho, \vartheta) = [KQ(\theta, \varphi; \varrho, \vartheta) - 1] \overline{[KQ(\theta', \varphi'; \varrho, \vartheta) - 1]},$$

queda

$$\begin{aligned}\langle \mathcal{E}_m^2 \rangle &= \left\langle \int_{(\mathfrak{D} \times \mathcal{D}) \times (\mathfrak{D} \times \mathcal{D})} \rho \rho' e^{-i\gamma(\zeta-z) + i\bar{\gamma}(\zeta'-z')} m(\rho, \phi) \overline{m(\rho', \phi')} \right. \\ &\quad \left. \times L(\theta, \varphi; \theta', \varphi'; \varrho, \vartheta) d\rho d\phi d\theta d\varphi d\rho' d\phi' d\theta' d\varphi' \right\rangle_m \\ &= \int_{(\mathfrak{D} \times \mathcal{D}) \times (\mathfrak{D} \times \mathcal{D})} \rho \rho' e^{-i\gamma(\zeta-z) + i\bar{\gamma}(\zeta'-z')} \langle m(\rho, \phi) \overline{m(\rho', \phi')} \rangle_m \\ &\quad \times L(\theta, \varphi; \theta', \varphi'; \varrho, \vartheta) d\rho d\phi d\theta d\varphi d\rho' d\phi' d\theta' d\varphi' \\ &= \int_{(\mathfrak{D} \times \mathcal{D}) \times (\mathfrak{D} \times \mathcal{D})} \rho \rho' e^{-i\gamma(\zeta-z) + i\bar{\gamma}(\zeta'-z')} R_m(\rho, \phi, \rho', \phi') \\ &\quad \times L(\theta, \varphi; \theta', \varphi'; \varrho, \vartheta) d\rho d\phi d\theta d\varphi d\rho' d\phi' d\theta' d\varphi'. \quad (4.17)\end{aligned}$$

Por otra parte, el primer término de  $\langle \mathcal{E}_\eta^2 \rangle$  es

$$\begin{aligned}\langle I_m \overline{I_\eta} \rangle &= \left\langle \int_{\mathfrak{D} \times \mathcal{D}} KQ(\theta, \varphi; \varrho, \vartheta) e^{-i\gamma(\zeta-z)} m(\rho, \phi) \rho d\rho d\phi d\theta d\varphi \right. \\ &\quad \left. \times \int_{\mathfrak{D}} \overline{Q(\theta, \varphi; \varrho, \vartheta)} e^{i\bar{\gamma}\zeta'} \overline{\eta(\theta', \varphi')} d\theta' d\varphi' \right\rangle \\ &= \int_{\mathfrak{D} \times \mathcal{D} \times \mathfrak{D}} KQ(\theta, \varphi; \varrho, \vartheta) \overline{Q(\theta, \varphi; \varrho, \vartheta)} \\ &\quad \times e^{-i\gamma(\zeta-z) + i\bar{\gamma}\zeta'} \langle m(\rho, \phi) \overline{\eta(\theta', \varphi')} \rangle \rho d\rho d\phi d\theta d\varphi d\theta' d\varphi' \\ &= 0,\end{aligned}$$

debido a que  $m$  y  $\eta$  son estadísticamente independientes y se cumple (4.15).

Análogamente,

$$\langle I_\eta \overline{I_m} \rangle = \langle I_\eta \overline{I_{id}} \rangle = \langle I_{id} \overline{I_\eta} \rangle = 0.$$

Por lo tanto,

$$\begin{aligned}
\langle \mathcal{E}_\eta^2 \rangle &= \langle I_\eta \overline{I_\eta} \rangle \\
&= \int_{\mathfrak{D} \times \mathfrak{D}} Q(\theta, \varphi; \varrho, \vartheta) \overline{Q(\theta', \varphi'; \varrho, \vartheta)} \\
&\quad \times e^{-i\gamma\zeta + i\bar{\gamma}\zeta'} \langle \eta(\theta, \varphi) \overline{\eta(\theta', \varphi')} \rangle d\theta d\varphi d\theta' d\varphi' \\
&= \int_{\mathfrak{D} \times \mathfrak{D}} Q(\theta, \varphi; \varrho, \vartheta) \overline{Q(\theta', \varphi'; \varrho, \vartheta)} \\
&\quad \times e^{-i\gamma\zeta + i\bar{\gamma}\zeta'} e^{i\gamma\zeta - i\bar{\gamma}\zeta'} S_\eta^2 \sigma(\theta - \theta', \varphi - \varphi') d\theta d\varphi d\theta' d\varphi' \\
&= \int_{\mathfrak{D}} Q(\theta, \varphi; \varrho, \vartheta) \overline{Q(\theta, \varphi; \varrho, \vartheta)} S_\eta^2 d\theta d\varphi \tag{4.18} \\
&= \int_{\mathfrak{D}} |Q(\theta, \varphi; \varrho, \vartheta)|^2 S_\eta^2 d\theta d\varphi \tag{4.19}
\end{aligned}$$

Finalmente, de (4.16), (4.17) y (4.19) tenemos

$$\Delta(Q) = \int_{\mathfrak{D}} \langle |\mathcal{E}(\varrho, \vartheta)|^2 \rangle d\varrho d\vartheta = \Delta_m(Q) + \Delta_\eta(Q),$$

donde

$$\begin{aligned}
\Delta_m(Q) &= \int_{\mathfrak{D}} \langle \mathcal{E}_m^2(\varrho, \vartheta) \rangle d\varrho d\vartheta \\
&= \int_{(\mathfrak{D} \times \mathfrak{D}) \times (\mathfrak{D} \times \mathfrak{D}) \times \mathfrak{D}} \rho \rho' e^{-i\gamma(\zeta - z) + i\bar{\gamma}(\zeta' - z')} R_m(\rho, \phi, \rho', \phi') \\
&\quad \times L(\theta, \varphi; \theta', \varphi'; \varrho, \vartheta) d\rho d\phi d\theta d\varphi d\rho' d\phi' d\theta' d\varphi' d\varrho d\vartheta, \tag{4.20}
\end{aligned}$$

y

$$\begin{aligned}
\Delta_\eta(Q) &= \int_{\mathfrak{D}} \langle \mathcal{E}_\eta^2(\varrho, \vartheta) \rangle d\varrho d\vartheta \\
&= \int_{\mathfrak{D} \times \mathfrak{D}} |Q(\theta, \varphi; \varrho, \vartheta)|^2 S_\eta^2 d\theta d\varphi d\varrho d\vartheta. \tag{4.21}
\end{aligned}$$

Con la finalidad de reducir variables en (4.20), haremos ahora la aproximación de fase estacionaria:

$$\theta' \sim \theta, \quad \varphi' \sim \varphi, \quad \rho' \sim \rho, \quad \phi' \sim \phi.$$

---

Esta aproximación considera que la contribución principal de la integral debe venir de la región donde el ángulo fase varía tan lentamente como es posible, análogo a lo que establece el teorema de fase estacionaria (A.4). Entonces tenemos

$$\begin{aligned}\zeta' &\sim 2r - \varrho \cos(\theta - \vartheta) - \varrho \cos(\vartheta - \varphi) = \zeta, \\ z' &\sim \zeta.\end{aligned}$$

Luego,

$$\begin{aligned}\Delta_m(Q) &\sim \int_{(\mathfrak{D} \times \mathcal{D}) \times \mathcal{D}} \rho \varrho e^{-i\gamma(\zeta-z)} R_m(\rho, \phi, \varrho, \vartheta) \\ &\quad \times L(\theta, \varphi; \varrho, \vartheta) d\rho d\phi d\theta d\varphi d\varrho d\vartheta, \quad (4.22)\end{aligned}$$

con

$$\begin{aligned}L(\theta, \varphi; \varrho, \vartheta) &= [KQ(\theta, \varphi; \varrho, \vartheta) - 1] \overline{[KQ(\theta, \varphi; \varrho, \vartheta) - 1]} \\ &= |KQ(\theta, \varphi; \varrho, \vartheta) - 1|^2\end{aligned}$$

Definimos la densidad espectral del dispersor  $S_m$  por medio de la relación

$$R_m(\rho, \phi; \varrho, \vartheta) = \int e^{-i(\rho, \phi) \cdot (\tilde{\rho}, \tilde{\phi})} e^{i(\varrho, \vartheta) \cdot (\tilde{\varrho}, \tilde{\vartheta})} S_m^2(\tilde{\rho}, \tilde{\phi}; \tilde{\varrho}, \tilde{\vartheta}) d\tilde{\rho} d\tilde{\phi} d\tilde{\varrho} d\tilde{\vartheta}. \quad (4.23)$$

Sustituyendo (4.23) en (4.22),

$$\begin{aligned}\Delta_m(Q) &\sim \int_{(\mathfrak{D} \times \mathcal{D}) \times \mathcal{D}} \rho \varrho e^{-i\gamma(\zeta-z)} e^{-i(\rho, \phi) \cdot (\tilde{\rho}, \tilde{\phi})} e^{i(\varrho, \vartheta) \cdot (\tilde{\varrho}, \tilde{\vartheta})} S_m(\tilde{\rho}, \tilde{\phi}; \tilde{\varrho}, \tilde{\vartheta}) \\ &\quad \times L(\theta, \varphi; \varrho, \vartheta) d\rho d\phi d\theta d\varphi d\tilde{\rho} d\tilde{\phi} d\tilde{\varrho} d\tilde{\vartheta} d\varrho d\vartheta.\end{aligned}$$

Tomamos nuevamente la aproximación de fase estacionaria,

$$\tilde{\varrho} \sim \theta, \quad \tilde{\vartheta} \sim \varphi, \quad \rho \sim \varrho, \quad \phi \sim \vartheta.$$

Entonces  $z = \zeta$ , y

$$\begin{aligned}\Delta_m(Q) &\sim \int_{\mathfrak{D} \times \mathcal{D}} \varrho^2 e^{-i(\varrho, \vartheta) \cdot (\tilde{\rho}, \tilde{\phi})} e^{i(\varrho, \vartheta) \cdot (\theta, \varphi)} S_m(\tilde{\rho}, \tilde{\phi}; \theta, \varphi) \\ &\quad \times L(\theta, \varphi; \varrho, \vartheta) d\theta d\varphi d\tilde{\rho} d\tilde{\phi} d\varrho d\vartheta. \quad (4.24)\end{aligned}$$

---

Hacemos la hipótesis de que el dispersor  $m$  es un campo aleatorio estacionario en sentido amplio. En este caso la función de correlación  $R_m$  es una función tal que

$$S_m^2(\tilde{\rho}, \tilde{\phi}; \theta, \varphi) = S_m^2(\tilde{\rho}, \tilde{\phi})\delta(\tilde{\rho} - \theta, \tilde{\phi} - \varphi).$$

Bajo esta hipótesis, de (4.24)

$$\Delta_m(Q) \sim \int_{\mathfrak{D} \times \mathfrak{D}} \varrho^2 S_m^2(\theta, \varphi) L(\theta, \varphi; \varrho, \vartheta) d\theta d\varphi d\varrho d\vartheta. \quad (4.25)$$

Combinando (4.25) y (4.21),

$$\begin{aligned} \Delta(Q) &= \Delta_m(Q) + \Delta_\eta(Q), \\ &\sim \int_{\mathfrak{D} \times \mathfrak{D}} \left[ \varrho^2 S_m^2(\theta, \varphi) L(\theta, \varphi; \varrho, \vartheta) \right. \\ &\quad \left. + |Q(\theta, \varphi; \varrho, \vartheta)|^2 S_\eta^2 \right] d\theta d\varphi d\varrho d\vartheta. \end{aligned}$$

Notemos que

$$L = K\bar{K}Q\bar{Q} - KQ - \bar{K}\bar{Q} + 1,$$

aquí hemos omitido escribir la dependencia de  $(\theta, \varphi; \varrho, \vartheta)$  para simplificar notación. Ésta dependencia, y la de  $(\theta, \varphi)$  en  $S_m$ , serán omitidas en los siguientes cálculos. Se tiene así

$$\begin{aligned} \Delta(Q) \sim \int_{\mathfrak{D} \times \mathfrak{D}} \left[ \varrho^2 S_m^2 (K\bar{K}Q\bar{Q} - KQ - \bar{K}\bar{Q} + 1) \right. \\ \left. + Q\bar{Q}S_\eta^2 \right] d\theta d\varphi d\varrho d\vartheta. \end{aligned} \quad (4.26)$$

Queremos encontrar el filtro óptimo  $Q = Q_{\text{opt}}$  para el cual (4.26) sea mínimo. Para ello, haremos cero la derivada variacional  $\frac{d}{d\sigma} \Delta(Q + \sigma h)$ . Primero

---

observemos que

$$\begin{aligned}
& \Delta(Q + \sigma h) \\
&= \int_{\mathfrak{D} \times \mathcal{D}} \left[ \varrho^2 S_m^2 \left( |K|^2 (Q + \sigma h) \overline{(Q + \sigma h)} - K(Q + \sigma h) - \overline{K(Q + \sigma h)} + 1 \right) \right. \\
&\quad \left. + S_\eta^2 (Q + \sigma h) \overline{(Q + \sigma h)} \right] d\theta d\varphi d\varrho d\vartheta \\
&= \int_{\mathfrak{D} \times \mathcal{D}} \left[ \varrho^2 S_m^2 (|K|^2 (Q\overline{Q} + \sigma Q\overline{h} + \sigma \overline{Q}h + \sigma^2 h\overline{h}) \right. \\
&\quad \left. - KQ - \sigma Kh - \overline{KQ} - \sigma \overline{Kh} + 1) \right. \\
&\quad \left. + S_\eta^2 (Q\overline{Q} + \sigma Q\overline{h} + \sigma \overline{Q}h + \sigma^2 h\overline{h}) \right] d\theta d\varphi d\varrho d\vartheta.
\end{aligned}$$

De tal forma que

$$\begin{aligned}
\frac{d}{d\sigma} \Delta(Q + \sigma h) &= \int_{\mathfrak{D} \times \mathcal{D}} \left[ \varrho^2 S_m^2 (|K|^2 (Q\overline{h} + \overline{Q}h + 2\sigma h\overline{h}) - Kh - \overline{Kh}) \right. \\
&\quad \left. + S_\eta^2 (Q\overline{h} + \overline{Q}h + 2\sigma h\overline{h}) \right] d\theta d\varphi d\varrho d\vartheta.
\end{aligned}$$

Luego,

$$\begin{aligned}
\left. \frac{d}{d\sigma} \Delta(Q + \sigma h) \right|_{\sigma=0} &= \int_{\mathfrak{D} \times \mathcal{D}} \left[ \varrho^2 S_m^2 (|K|^2 (Q\overline{h} + \overline{Q}h) - Kh - \overline{Kh}) \right. \\
&\quad \left. + S_\eta^2 (Q\overline{h} + \overline{Q}h) \right] d\theta d\varphi d\varrho d\vartheta \\
&= \int_{\mathfrak{D} \times \mathcal{D}} \left[ \varrho^2 S_m^2 (2\operatorname{Re}(|K|^2 Q\overline{h} - \overline{Kh})) \right. \\
&\quad \left. + S_\eta^2 (2\operatorname{Re}(Q\overline{h})) \right] d\theta d\varphi d\varrho d\vartheta.
\end{aligned}$$

Como esto debe cumplirse para todo  $h$ , obtenemos

$$(|K|^2 Q - \overline{K}) \varrho^2 S_m^2 + Q S_\eta^2 = 0.$$

Por lo tanto,

$$\begin{aligned}
Q_{\text{opt}}(\theta, \varphi; \varrho, \vartheta) &= \frac{\varrho^2 \overline{K} S_m^2(\theta, \varphi)}{\varrho^2 |K|^2 S_m^2(\theta, \varphi) + S_\eta^2} \\
&= \frac{\varrho^2 \overline{K}}{\varrho^2 |K|^2 + S_\eta^2 / S_m^2(\theta, \varphi)}. \tag{4.27}
\end{aligned}$$



---

Una vez determinado  $Q_{\text{opt}}$ , queda determinado el operador de inversión  $\hat{\mathcal{M}}_Q$ . La obtención de  $Q$ , y por ende la determinación de la fórmula de inversión, son los resultados fundamentales en esta tesis.

La cantidad  $S_\eta^2/S_m^2(\theta, \varphi)$  es un término de regularización, análogo al término de regularización de Tíjonov. Nótese que cuando no hay ruido,  $S_\eta^2/S_m^2(\theta, \varphi) = 0$  y por lo tanto  $Q_{\text{opt}} = 1/K$ . Es decir, se reduce al problema inverso determinista que se trató en la Sección 4.1.

En resumen, a partir del operador integral de dispersión o mapeo directo  $\mathcal{M}$  proponemos, con analogía a la transformada inversa de Fourier, un operador inverso  $\hat{\mathcal{M}}_Q$ , y establecemos el siguiente problema de optimización

$$\min_Q \|\hat{\mathcal{M}}_Q - \mathcal{M}_{\text{ideal}}\|_2^2. \quad (4.28)$$

A partir de este problema es que determinamos el filtro de Wiener  $Q_{\text{opt}}$  que minimiza esta varianza. El factor de regularización está contenido en este filtro pero no como un simple parámetro, sino como un cociente que tiene información estadística tanto de los dispersores como del ruido ambiental; es decir,

$$\varepsilon = \frac{S_\eta^2}{S_m^2}. \quad (4.27)$$

Precisamente esta razón es la que estabiliza el problema de inversión garantizando la convergencia de la expresión integral del mapeo inverso. Este filtro es una generalización de la inversión de Tíjonov via Fourier. El papel del filtro es, precisamente, “filtrar” frecuencias no deseables, y permitir el paso de las que mejoran las imágenes formadas, en el sentido óptimo de varianza mínima. Otra ciencia o arte es determinar u obtener esta información a priori y emplearla adecuadamente. Para ésto último, en la práctica, los experimentos son los que deben tener la última palabra.

---

Adicionalmente, quisieramos mencionar que el enfoque bayesiano, que hemos mencionado en la introducción en este trabajo, no está alejado de la regularización mediante el filtro de Wiener; éste último enfoque podría considerarse un caso particular del primero. Y la razón es que, en cuanto establecemos el cálculo de errores cuadráticos medios, o bien, cálculos de varianzas sobre las imágenes que reconstruimos, estamos asumiendo que obtenemos estas cantidades estadísticas respecto a densidades de probabilidad (que provendrían del cálculo de las densidades de probabilidad a posteriori del método bayesiano [37]), o bien, respecto a un enfoque frecuentista en donde, cada vez que resolvemos nuestro problema inverso, estamos llevando a cabo una sola realización del proceso estocástico subyacente. Lo anterior significa que las imágenes formadas sólo tienen sentido llevando a cabo “promedios” de varias de ellas con una misma configuración, como explícitamente lo mostramos en el momento de diseñar el filtro de Wiener en la fórmula de inversión.

#### 4.2.2. Ejemplos numéricos

En este último apartado damos algunas reconstrucciones con base en la fórmula de inversión (4.7).

Estas simulaciones consideran que el término de regularización  $S_\eta^2/S_m^2$  es constante. Esta constante corresponde a la razón entre la fracción porcentual de ruido en relación al promedio de la intensidad de la onda incidente (que denotamos por  $\alpha$ ), con la proporción entre la intensidad promedio del campo dispersado y el campo incidente.

Las primeras dos reconstrucciones (figuras 4.5, 4.8) corresponden a una sola realización del proceso estocástico que determina nuestra fórmula de

---

inversión. Conforme el porcentaje de ruido aumenta, una sola realización se vuelve insuficiente para la obtención de una buena imagen de reconstrucción. Para ejemplificar esto mostramos dos casos en las figuras 4.7 y 4.9, respectivamente.

Aplicamos el modelo de inversión (4.7) para el dispersor gaussiano de la figura 4.2, cuyos datos de dispersión han sido afectados por un factor de  $\alpha = 0.5$ , es decir, el porcentaje de ruido en relación a la intensidad de la onda incidente es del 50%. La figura 4.5 tiene los datos de dispersión y las reconstrucciones. Si bien la imagen permite la localización del dispersor, es notorio que el efecto del ruido distorsiona la imagen.

En la Sección 4.1 vimos que cuando los datos de dispersión de este dispersor gaussiano son afectados en un porcentaje  $\alpha = 1.0$ , el modelo (4.1) no da una buena reconstrucción. La figura 4.6 muestra que una sola realización con el modelo (4.7) tampoco resulta satisfactoria. Sin embargo, tras 10 realizaciones del proceso, la imagen de reconstrucción mejora considerablemente, como lo muestra la figura 4.7. Aquí, las primeras dos imágenes corresponden a la reconstrucción, y el resto a cada una de las 10 realizaciones.

Para el caso puntual mostramos la reconstrucción en una realización de un dispersor colocado en  $(0.45, 0.1\pi)$ . En la figura 4.8 se tiene la imagen cuando el porcentaje de ruido es  $\alpha = 25.0$ .

Si ahora consideramos un dispersor puntual en  $(\rho_0, \phi_0) = (0.15, 0.1\pi)$  con porcentaje de ruido  $\alpha = 6.0$  (figura 4.9), una sola realización no es suficiente para tener una buena reconstrucción. La situación mejora después de 10 realizaciones (figura 4.10). La figura 4.11 es un acercamiento a las dos primeras imágenes de 4.10, es decir, a las imágenes de la reconstrucción.

Observemos que en este último ejemplo el porcentaje de ruido fue menor con respecto al primer dispersor puntual  $(\rho_0, \phi_0) = (0.45, 0.1\pi)$ , y sin em-

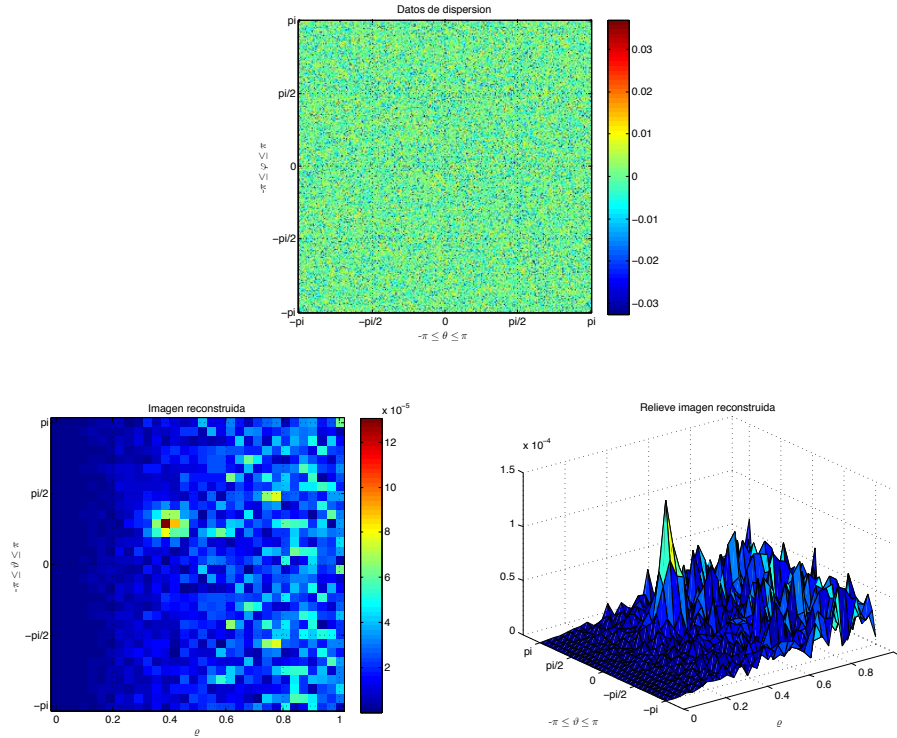


Figura 4.5: Campo dispersado y reconstrucción (con base en el modelo (4.7)) para un dispersor gaussiano con máximo localizado en  $(\rho_0, \phi_0) = (0.4, \pi/4)$ . Porcentaje de ruido  $\alpha = 0.5$ .

bargo, el efecto de degradación fue mayor. Esto se debe a que la intensidad del campo disminuye mientras más distancia recorra la onda incidente. Por lo tanto, el efecto del ruido se vuelve más dominante.

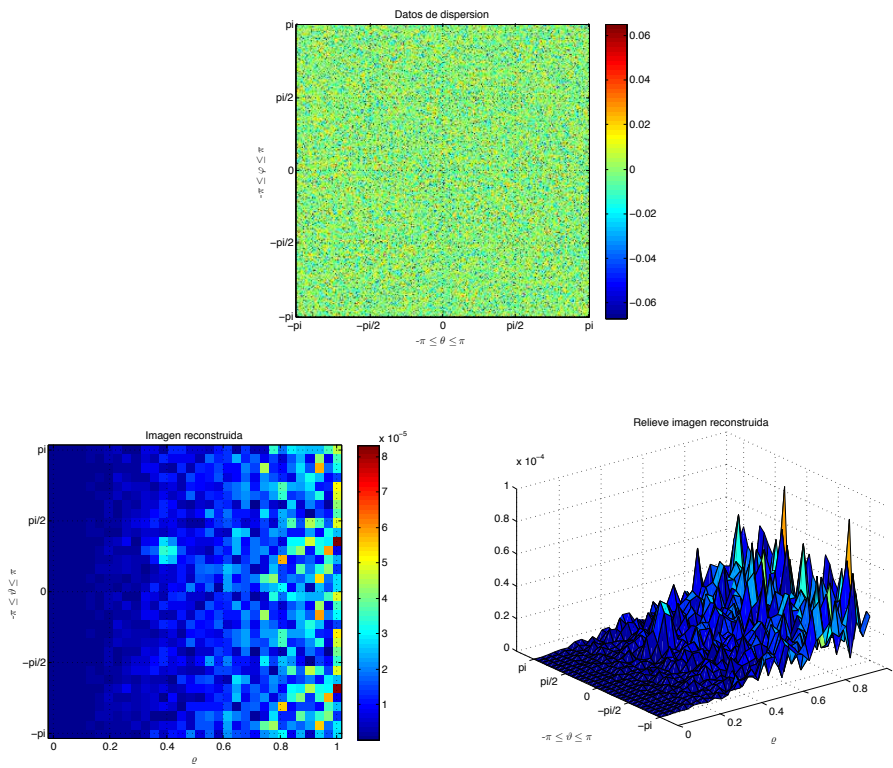


Figura 4.6: Campo dispersado y reconstrucción tras una sola realización del modelo (4.7) para un dispersor gaussiano con máximo localizado en  $(\rho_0, \phi_0) = (0.4, \pi/4)$ . Porcentaje de ruido  $\alpha = 1.0$ .



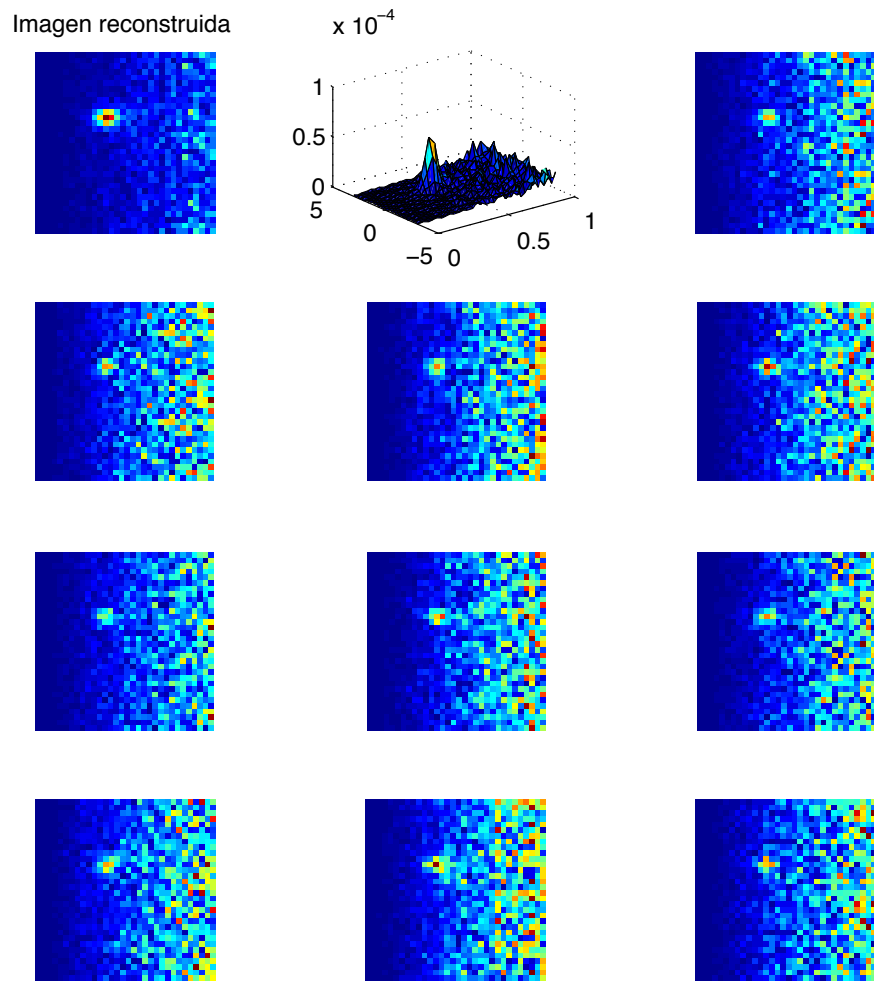


Figura 4.7: Reconstrucción del dispersor gaussiano con máximo en  $(\rho_0, \phi_0) = (0.4, \pi/4)$ . Porcentaje de ruido  $\alpha = 1.0$ .

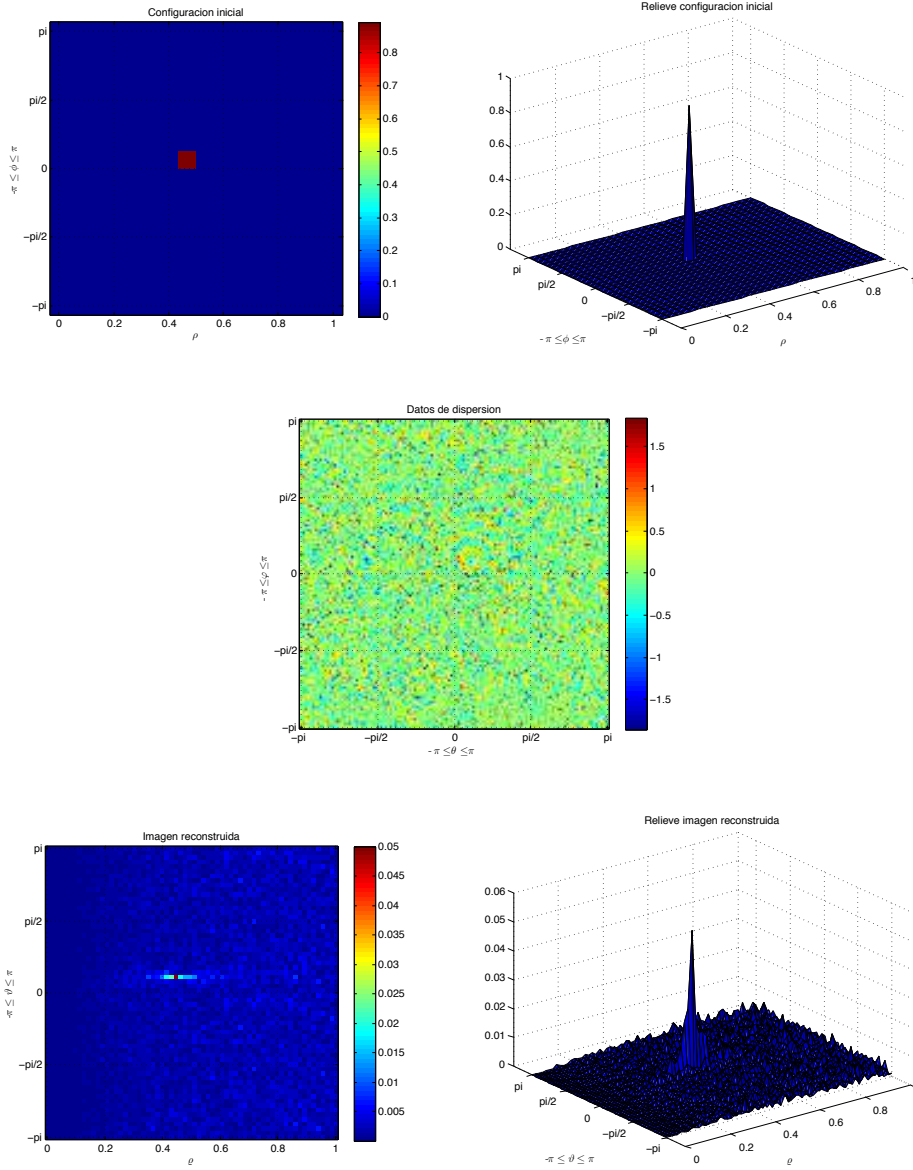


Figura 4.8: Configuración inicial, campo dispersado, y reconstrucción (con base en el modelo (4.7)), para un dispersor puntual localizado en  $(\rho_0, \phi_0) = (0.45, 0.1\pi)$ , y porcentaje de ruido  $\alpha = 25.0$ .

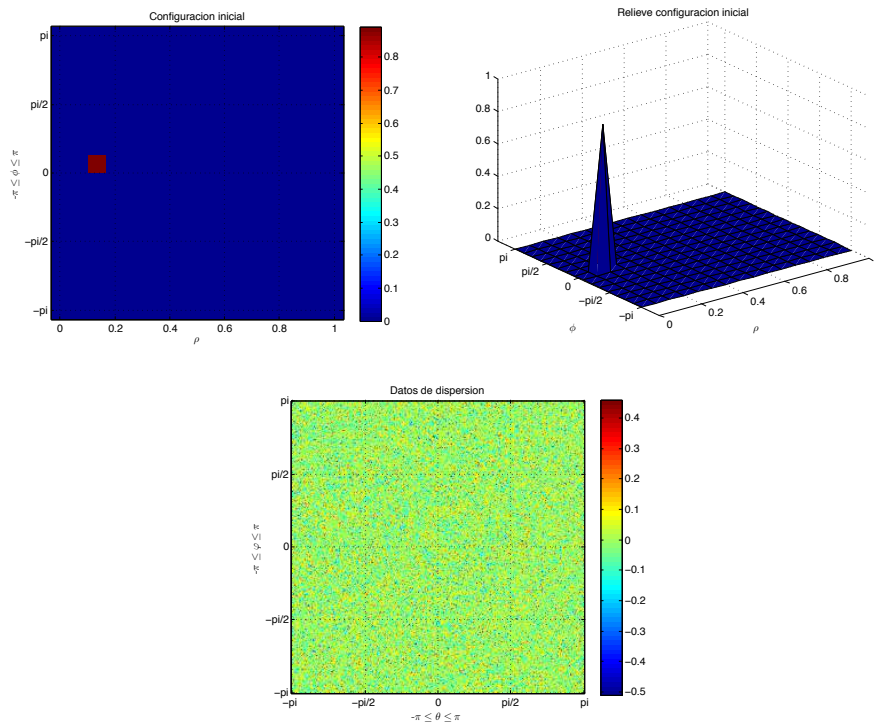


Figura 4.9: Configuración inicial y campo dispersado para un dispersor puntual en  $(\rho_0, \phi_0) = (0.15, 0.1\pi)$ , y porcentaje de ruido  $\alpha = 6.0$ .



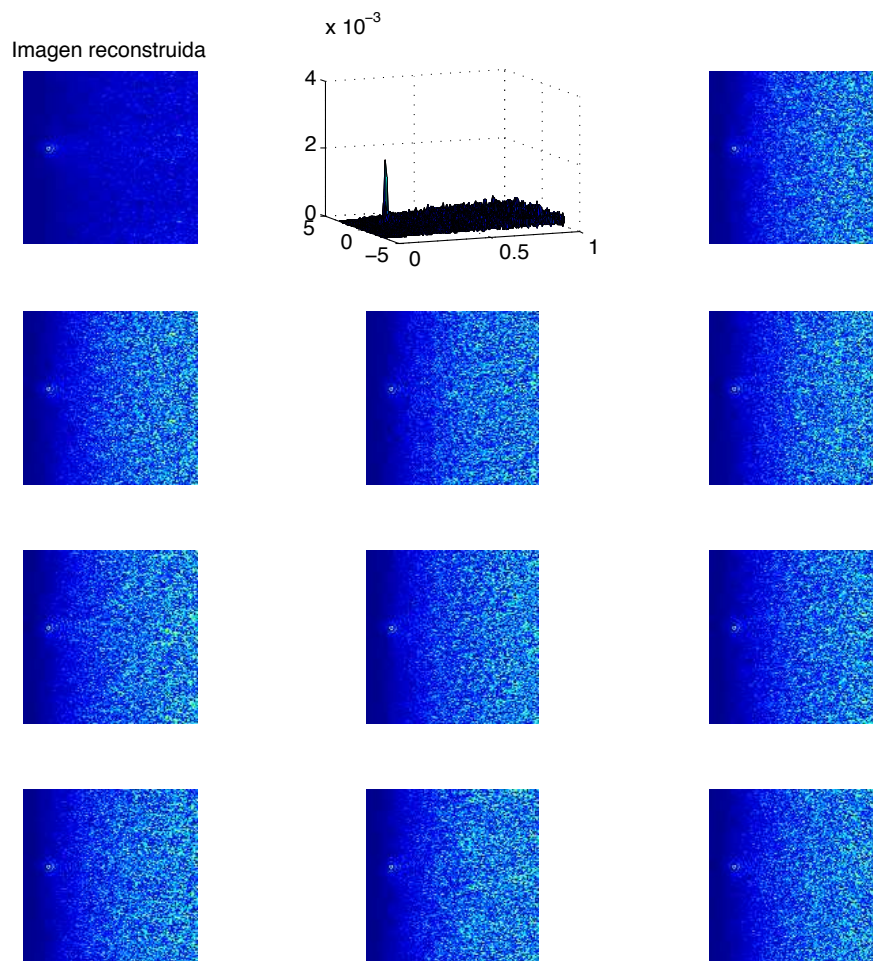


Figura 4.10: Reconstrucción del dispersor puntual en  $(\rho_0, \phi_0) = (0.15, 0.1\pi)$ .  
Porcentaje de ruido  $\alpha = 6.0$ .

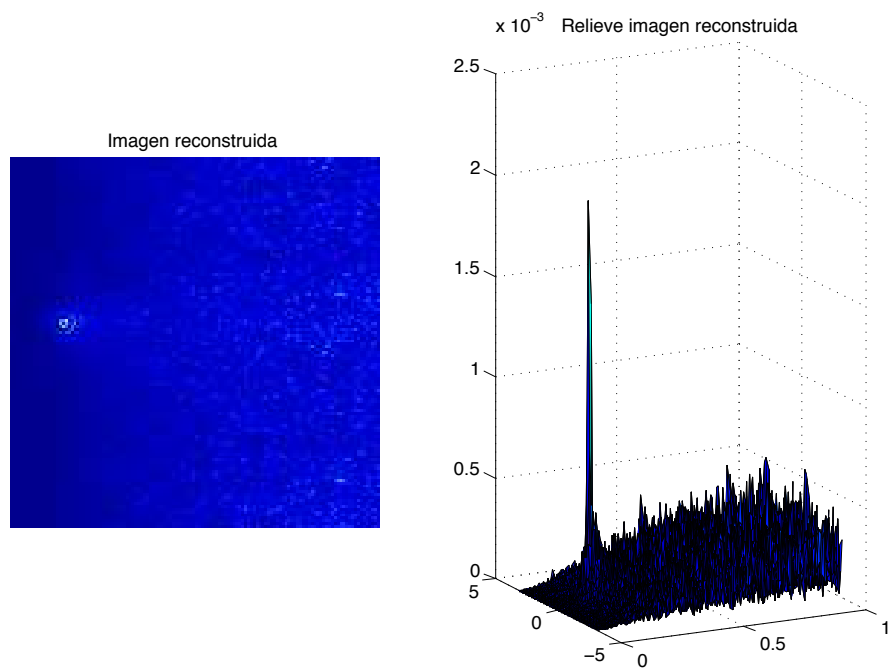


Figura 4.11: Reconstrucción del dispersor puntual en  $(\rho_0, \phi_0) = (0.15, 0.1\pi)$  tras 10 realizaciones. Porcentaje de ruido  $\alpha = 6.0$ .

# Conclusiones

Este trabajo de tesis fue motivado por las aplicaciones que tienen los problemas inversos de dispersión de ondas en el campo de la medicina. En particular, la formación de imágenes tomográficas para la detección de enfermedades como el cáncer es una de las aplicaciones más interesantes.

El modelo de dispersión de ondas electromagnéticas ha sido ampliamente estudiado. Más generalmente, el problema de dispersión de ondas es uno de los principales tópicos para los problemas inversos en la actualidad. Si bien el problema directo de dispersión ha sido solucionado teóricamente con herramientas matemáticas como el análisis funcional, para obtener la solución numérica es necesario realizar aproximaciones que permitan un cálculo sencillo. Nosotros hemos propuesto un modelo aproximado para esta solución numérica en el caso particular de un dominio circular, y a partir del cual se pueden obtener datos de dispersión para diferentes localizaciones del emisor y del receptor. Por lo tanto, la información del campo dispersado es tomográfica. A partir de este modelo, propusimos también el modelo de inversión. Dada la forma del operador de dispersión, no era posible aplicar técnicas de formación de imágenes básicas. Así que lo que se propuso fue una solución en analogía con éstas. Más específicamente, en esta tesis hemos mostrado, vía el filtro de Wiener (contexto estadístico), cómo construir un operador

---

integral para la inversión tomográfica que es regularizado y estable numéricamente. Con esto se alcanzó el objetivo principal de la obtención de imágenes tomográficas mediante radiación no ionizante en tejido biológico.

Aún cuando nuestro estudio partió del contexto electromagnético, y las simulaciones numéricas se consideraron también para una aplicación con parámetros electromagnéticos, los resultados pueden considerarse y extenderse en áreas donde el modelo de dispersión de ondas sea determinado por la ecuación de Helmholtz, o equivalentemente, por la ecuación de Lippmann-Schwinger.

Uno de los puntos positivos que ofrece nuestro modelo de inversión, es la consideración estadística de los dispersores y del ruido, pues los experimentos reales inevitablemente involucran aleatoriedad. Sin embargo, hemos hecho también varias simplificaciones para conseguir el modelo, tanto de dispersión de ondas, usando aproximación de Born, por ejemplo, como en la deducción del filtro de Wiener en fórmula de inversión, al hacer aproximación de fase estacionaria. Esto conlleva dificultades puesto que por conseguir simplicidad se llegan a sacrificar, entre otros, algunos aspectos físicos importantes. Un posible trabajo a futuro sería considerar simplificaciones menos restrictivas que las que aquí hemos hecho.

Por otra parte, a pesar de los esfuerzos que se han realizado para investigar las propiedades de los tejidos biológicos, al respecto de sus propiedades electromagnéticas, muchos aspectos siguen desconocidos o poco comprendidos. En particular, encontrar valores de los parámetros electromagnéticos en tejido biológico humano es una tarea difícil. Otro de los problemas con los que se enfrenta el desarrollo de sistemas de monitoreo que incluyen al espectro de las microondas para explorar dentro de seres vivos, es el de la seguridad en el empleo de este tipo de radiación. La dosis de radiación debe

---

ser considerada como una limitación que impone el sistema sobre el modelo matemático, de tal manera que a partir de éste sea posible cuantificar la dosis máxima “aceptable” bajo premisas físicas. Esto propone un reto para algún trabajo posterior.

Finalmente, en el aspecto numérico, nos enfocamos simplemente en mostrar que el algoritmo de reconstrucción determinado por la fórmula de inversión funciona adecuadamente. La mejora en la precisión y eficiencia del código podría ser también una línea de trabajo a futuro.



---

---

# Expansiones y fórmulas asintóticas

Es común querer aproximar una función cuando un parámetro, índice o variable independiente tiende a un valor específico [58]. A estas aproximaciones se les conoce como *fórmulas asintóticas*. Las fórmulas asintóticas se definen por medio de las expansiones asintóticas de la función en cuestión. Las fórmulas y las expansiones asintóticas son el objeto de estudio de este apartado.

Para iniciar con el estudio de las expansiones asintóticas es necesario usar una notación que ayude relacionar el comportamiento entre dos funciones. Por ello introduciremos los símbolos Landau  $\mathcal{O}$  ('O' grande) y  $o$  ('o' chica). Supóngase que  $f(z)$  y  $g(z)$  están definidas para  $z$  en alguna región  $\Omega$  en el plano complejo. Nos restringimos a usar sectores, es decir, consideramos  $\Omega$  como el conjunto de los  $z$  tales que  $\alpha \leq \arg z \leq \beta$  y  $|z| < a$ , donde  $a$  puede ser  $\infty$ . Una función  $f(z)$  es  $\mathcal{O}(g(z))$  (y se dice  $f(z)$  es 'O' grande de  $g(z)$ )

---

para  $z \in \Omega$ , si existe una constante  $A$  tal que

$$|f(z)| \leq A|g(z)|$$

para toda  $z \in \Omega$ . Escribimos  $f(z) = \mathcal{O}(g(z))$  en  $\Omega$ . Nos interesa, en particular, el comportamiento de una función cuando  $z \rightarrow \infty$ . Entonces decimos que  $f(z) = \mathcal{O}(g(z))$  cuando  $z \rightarrow \infty$ , si existen constantes  $A, b$  tales que

$$|f(z)| \leq A|g(z)|$$

siempre que  $|z| \geq b$  y  $\alpha \leq \arg z \leq \beta$ . Cuando se tiene  $f(z) = \mathcal{O}(1)$ , significa que  $f(z)$  es acotada cuando  $z \rightarrow \infty$ . Observemos que si  $f(z) = \mathcal{O}(1/z^n)$  y  $h(z) = \mathcal{O}(1/z^m)$ , entonces  $(fh)(z) = \mathcal{O}(z^{n+m})$ , pues si  $A_1, A_2$  son constantes tales que

$$|f(z)| \leq A_1 \left| \frac{1}{z^n} \right|, \quad |h(z)| \leq A_2 \left| \frac{1}{z^m} \right|,$$

entonces

$$|(fh)(z)| \leq A \left| \frac{1}{z^{n+m}} \right|, \quad A = A_1 A_2.$$

También, si  $f(z) = \mathcal{O}(1/z^n)$  y  $h(z)$  es acotada, entonces  $(fg)(z) = \mathcal{O}(1/z^n)$ .

Por otra parte, tener  $f(z) = o(g(z))$  (se pronuncia  $f(z)$  es 'o' chica de  $g(z)$ ) en  $\Omega$  significa que

$$\left| \frac{f(z)}{g(z)} \right| \rightarrow 0,$$

cuando  $z \rightarrow z_0$  o  $z \rightarrow \infty$ . También en este caso nos interesa  $f(z) = o(g(z))$  cuando  $z \rightarrow \infty$ . Así,  $f(z) = o(g(z))$  significará que para toda  $\varepsilon > 0$  existe  $b$  tal que

$$|f(z)| \leq \varepsilon|g(z)|,$$

cuando  $|z| \geq b$  y  $\alpha \leq \arg z \leq \beta$ .

Con esta notación es posible dar ahora una definición formal de expansión asintótica.



---

**Definición A.1** *Considérese una serie  $S$  de la forma*

$$S(z) = a_0 + \frac{a_1}{z} + \frac{a_2}{z^2} + \cdots,$$

*y sea*

$$S_n(z) = a_0 + \frac{a_1}{z} + \cdots + \frac{a_n}{z^n},$$

*con  $\arg z$  en un rango  $[\alpha, \beta]$ . Si  $f(z)$  está definida para  $\alpha \leq \arg z \leq \beta$ , se dice que  $f \sim S$ , o que  $f$  es asintótica a  $S$ , o que  $S$  es una expansión asintótica de  $f$ , cuando*

$$f - S_n = o\left(\frac{1}{z^n}\right)$$

*en el sector  $\alpha \leq \arg z \leq \beta$ .*

Equivalentemente, decimos que  $f$  es asintótica a  $S$ , si para cada  $\varepsilon > 0$  existe  $b$  tal que

$$|f(z) - S_n(z)| \leq \varepsilon \left| \frac{1}{z^n} \right|.$$

O bien,

$$\lim_{z \rightarrow \infty} |z^n(f(z) - S_n(z))| = 0.$$

A continuación enunciamos algunas propiedades básicas de las expansiones asintóticas. Para evitar ser repetitivos, en adelante suponemos que las funciones y sus expansiones asintóticas están definidas en sectores adecuados.

**Proposición A.2 (i)** *Si  $f(z) \sim S(z) = a_0 + \frac{a_1}{z} + \frac{a_2}{z^2} + \cdots$ , entonces*

$$f(z) - S_n(z) = \mathcal{O}\left(\frac{1}{z^{n+1}}\right),$$

*y recíprocamente.*

**(ii)** *Si  $f(z) \sim a_0 + \frac{a_1}{z} + \frac{a_2}{z^2} + \cdots$ , y  $f(z) \sim \tilde{a}_0 + \frac{\tilde{a}_1}{z} + \frac{\tilde{a}_2}{z^2} + \cdots$ , entonces  $a_i = \tilde{a}_i$ . Es decir, la expansión asintótica de una función es única.*

---

(iii) Si  $f(z) \sim a_0 + \frac{a_1}{z} + \frac{a_2}{z^2} + \dots$ , y  $g(z) \sim b_0 + \frac{b_1}{z} + \frac{b_2}{z^2} + \dots$ , entonces

$$(f+g)(z) \sim (a_0 + b_0) + \frac{(a_1 + b_1)}{z} + \frac{(a_2 + b_2)}{z^2} + \dots;$$

y

$$(fg)(z) \sim c_0 + \frac{c_1}{z} + \frac{c_2}{z^2} + \dots,$$

con

$$c_n = \sum_{j=0}^n a_j b_{n-j}.$$

(iv) Dos funciones diferentes pueden tener la misma expansión asintótica.

Hasta ahora hemos considerado el comportamiento de una función solamente en términos de series de potencias inversas, pero el rango de aplicación de esto es un poco restringido. En varios problemas es útil aproximar las funciones con otras que contienen términos como  $e^z$ ,  $z^p$  (con  $p$  un escalar complejo), o  $\cos z$ , como es el caso de las funciones de Bessel.

Necesitamos entonces definir el comportamiento asintótico de una función en una forma más general. Supongamos que tenemos

$$f(z) = g(z) \left[ a_0 + \frac{a_1}{z} + \dots + \frac{a_n}{z^n} + o\left(\frac{1}{z^n}\right) \right].$$

Escribimos

$$f(z) \sim g(z) \left( a_0 + \frac{a_1}{z} + \frac{a_2}{z^2} + \dots \right).$$

Si  $g(z) \neq 0$ , significa que

$$\frac{f(z)}{g(z)} \sim a_0 + \frac{a_1}{z} + \frac{a_2}{z^2} + \dots;$$

y esperamos que, al menos en algún sentido,  $g(z)$  sea una función más fácil de manejar. Si  $a_0$  lo consideramos dentro de  $g(z)$ ,

$$f(z) \sim g(z) \left( 1 + \frac{b_1}{z} + \frac{b_2}{z^2} + \dots \right).$$

---

Estamos interesados en obtener el primer término. De tal forma que se tiene una función  $g(z)$  tal que  $f(z) = g(z) [1 + \mathcal{O}(\frac{1}{z})]$ . Más generalmente,  $f(z) = g(z)[1 + o(1)]$ . Esto nos conduce a la siguiente definición.

**Definición A.3** *Dos funciones  $f(z)$  y  $g(z)$  son asintóticamente equivalentes si*

$$f(z) = g(z)[1 + o(1)].$$

*Escribimos  $f(z) \sim g(z)$ .*

La función  $g(z)$  da una *fórmula asintótica* para  $f(z)$  que permite aproximarla para valores grandes de  $z$ .

Es importante mencionar que la fórmula asintótica no es única. La misma función puede tener dos fórmulas asintóticas de diferente aspecto.

Uno de los métodos más conocidos para encontrar fórmulas asintóticas es el método de la fase estacionaria.

**Teorema A.4 (Teorema de la fase estacionaria)** *Sean  $[a, b]$  un intervalo acotado en el eje real,  $h(t)$  una función analítica en una vecindad de  $[a, b]$  que es real para todo  $t$  real, y  $p(t)$  una función de valores reales o complejos en  $[a, b]$  con derivada continua. Suponga*

$$f(z) = \int_a^b e^{izh(t)} p(t) dt.$$

*Si  $h'(t) = 0$  en exactamente un punto  $t_0$  en  $(a, b)$  y  $h''(t) \neq 0$ , entonces*

$$f(z) \sim \frac{e^{izh(t_0)} \sqrt{2\pi}}{\sqrt{z} \sqrt{\pm h''(t_0)}} e^{\pm i \frac{\pi}{4}} p(t_0).$$

*cuando  $z \rightarrow \infty$  en el eje real positivo. Se usa el signo más si  $h''(t_0) > 0$  y se usa el signo menos si  $h''(t_0) < 0$ .*

---

El término “fase estacionaria” viene de la interpretación de que el integrando es una cantidad compleja con amplitud  $p(t)$  y ángulo fase  $zh(t)$ . La intuición detrás de la fórmula es que la contribución principal de la integral debe venir de la vecindad de  $t_0$  donde el ángulo fase varía tan lentamente como es posible [47].

# Bibliografía

- [1] Adair, E. R.; Allen, S. J.; Barber, P. W.; Guy, A. W.; Hurt, W. D.; Johnson, C. C.; Lords, J. L.; Lozano, L.; Mitchell, J. C.; Ryser, D. K. y Schwan, H. P. (Eds.): *Radiofrequency Radiation Dosimetry Handbook*. USAF School of Aerospace Medicine, Brooks Air Force Base, Texas, USA, 1997.
- [2] Albanese, R.; Blaschak, J.; Medina, R. y Penn, J.: «Ultrashort Electromagnetic Signals: Biophysical Questions, Safety Issues and Medical Opportunities». *Aviation, Space, and Environmental Medicine*, 1994, **65(5)**, pp. A116–A120.
- [3] Albanese, R.; Penn, J. y Medina, R.: «Short-rise-time microwave pulse propagation through dispersive biological media». *Journal of the Optical Society of America*, 1989, **6(9)**, pp. 1441–1446.
- [4] Ammari, H.: *An Introduction to Mathematics of Emerging Biomedical Imaging*. volumen 62 de *Mathématiques and Applications*. Springer, 2008.
- [5] Aster, R.; Borchers, B y Thurber, C: *Parameter Estimation and Inverse Problems*. Elsevier Academic Press, USA, 2005.

- 
- [6] Bal, G.: *Lecture Notes. Introduction to Inverse Problems*. Department of Applied Physics and Applied Mathematics, Columbia University., New York, USA, 2004.
- [7] Bertero, M. y Boccacci, P.: *Introduction to Inverse Problems in Imaging*. Institute of Physics Publishing, London, UK, 1998.
- [8] Blahut, R. E.: *Theory of Remote Image Formation*. Cambridge University Press, New York, USA, 2004.
- [9] Bleistein, N.; Cohen, J. K. y Stockwell, J. W.: *Mathematics of Multidimensional Seismic Imaging, Migration, and Inversion*. Springer-Verlag, New York, USA, 2000.
- [10] Bohren, C. F. y Huffman, D. R.: *Absorption and Scattering of Light by Small Particles*. John Wiley & Sons, Inc., New York, USA, 1983.
- [11] Borovikov, V. A.: *Uniform Stationary Phase Method*. volumen 40 de *Electromagnetic Waves*. The Institution of Electrical Engineers, London, UK, 1994.
- [12] Boyce, W y DiPrima, R: *Elementary Differential Equations and Boundary Value Problems*. John Wiley & Sons, Inc., 1997.
- [13] Brillouin, L.: *Wave Propagation and Group Velocity*. Academic Press Inc., Publishers, 1960.
- [14] Brown, J. W. y Churchill, R. V.: *Fourier Series and Boundary Value Problems*. Mc Graw Hill, New York, USA, 2001.
- [15] Brun, M. A.; Formanek, F. y Yasuda, A.: «Terahertz imaging applied

- 
- to cancer diagnosis». *Physics in Medicine and Biology*, 2010, **55**, pp. 4615–4623.
- [16] Burden, R. L. y Faires, J. D.: *Numerical Analysis*. Brooks/Cole, California, USA, 2001.
- [17] Chadan, K.; Colton, D.; Päivärinta, L. y Rundell, W.: *An Introduction to Inverse Scattering and Inverse Spectral Problems*. SIAM, Philadelphia, USA, 1997.
- [18] Chung, J.; Knepper, S. y Nagy, J. G.: «Large-Scale Inverse Problems in Imaging». En: *Handbook of Mathematical Methods in Imaging*, pp. 43–86. Springer, 2011.
- [19] Colton, D.: «Multidimensional Inverse Scattering Problems». En: *An Introduction to Inverse Scattering and Inverse Spectral Problems*, Monographs on Mathematical Modeling and Computation. SIAM, Philadelphia, USA, 1997.
- [20] Colton, D.; Coyle, J. y Monk, P.: «Recent Developments in Inverse Problems». *SIAM Review*, 2000, **42(3)**, pp. 369–414.
- [21] Colton, D. y Kress, R.: *Inverse Acoustic and Electromagnetic Scattering Theory*. Springer-Verlag, New York, USA, 1992.
- [22] Colton, D. y Monk, P.: «The detection and monitoring of leukemia using electromagnetic waves: mathematical theory». *Inverse Problems*, 1994, **10(6)**, pp. 1235–1251.
- [23] Conway, J. B.: *Functions of One Complex Variable*. Springer-Verlag, New York, USA, 1978.

- 
- [24] del Valle, A. Hernández y Hernández, O.: *Elementos de Probabilidad y Estadística*. Sociedad Matemática Mexicana, Distrito Federal, México, 2003.
- [25] Duffy, D. G.: *Green's Functions with Applications*. Chapman & Hall/CRC, Florida, USA, 2001.
- [26] Evans, G. A.; Blackledge, J. M. y Yardely, P. D.: *Analytic Methods for Partial Differential Equations*. Springer Undergraduate Mathematics. Springer-Verlag, London, UK, 2001.
- [27] Farhang, F. y Ting, H.N.: «Review of the Use of Microwave in investigating the Dielectric Properties of Different Human Tissues». En: *Biomed 2008*, 21, pp. 679–682. Springer-Verlag, 2008.
- [28] Folland, G. B.: *Fourier Analysis and its Applications*. Mathematics. Wadsworth & Brooks/Cole, California, USA, 1992.
- [29] Ghosh, D. N. y Couchman, L. S.: *Inverse Problems and Inverse Scattering of Plane Waves*. Academic Press Inc., Publishers, California, USA, 2001.
- [30] González-Velasco, E.: *Fourier Analysis and Boundary Value Problems*. Academic Press Inc., Publishers, California, USA, 1995.
- [31] Greiner, W.: *Classical Electrodynamics*. Springer-Verlag, New York, USA, 1998.
- [32] Groetsch, Ch.: «Linear Inverse Problems». En: Omar Scherzer (Ed.), *Handbook of Mathematical Methods in Imaging*, pp. 3–41. Springer, New York, USA, 2011.



- 
- [33] Hackbusch, W.: *Integral Equations*. Birkhäuser, Germany, 1995.
- [34] Hecht, E. y Zajac, A.: *Óptica*. Fondo Educativo Interamericano, Massachusetts, USA, 1977.
- [35] Hernández, O.: *Procesos estocásticos: introducción a la teoría de colas*. Centro de Investigación y de Estudios Avanzados del I.P.N., Distrito Federal, México, 1981.
- [36] Ishimaru, A.: *Electromagnetic Wave Propagation, Radiation, and Scattering*. Prentice Hall, New Jersey, USA, 1991.
- [37] Kaipio, J. y Somersalo, E.: *Statistical and Computational Inverse Problems*. volumen 160 de *Applied Mathematical Sciences*. Springer-Verlag, New York, USA, 2004.
- [38] Kao, C. M.; La Rivière, P. y Pan, X.: «Basics of Imaging Theory and Statistics». En: Miles N. Wernick y John N. Aarsold (Eds.), *Emission Tomography. The Fundamentals of PET and SPECT*, pp. 103–126. Elsevier Academic Press, London, UK, 2004.
- [39] Kirsch, A.: *An Introduction to the Mathematical Theory of Inverse Problems*. Applied mathematical sciences. Springer-Verlag, New York, USA, 1996.
- [40] —: «Inverse Scattering Theory for Time-Harmonic Waves». En: Mark Ainsworth; Penny Davies; Dugald Duncan; Paul Martin y Bryan Rynne (Eds.), *Topics in Computational Wave Propagation*, Springer-Verlag, New York, USA, 2003.
- [41] Kythe, P.: *Fundamental Solutions for Differential Operators and Applications*. Birkhäuser, Massachusetts, USA, 1996.

- 
- [42] Lebedev, L. P.; Vorovich, I. I. y Gladwell, G. M. L.: *Functional Analysis. Applications in Mechanics and Inverse Problems*. Academic Press Inc., Publishers, New York, USA, 2003.
- [43] Lévy, E.: *Diccionario Akal de Física*. Ediciones Akal, Madrid, España, 1992.
- [44] Logan, J. D.: *Applied Partial Differential Equations*. Springer-Verlag, New York, USA, 1998.
- [45] —: *Applied Mathematics*. John Wiley & Sons, Inc., New Jersey, USA, third edicin, 2006.
- [46] Louis, A. K. y Natterer, F.: «Mathematical Problems of Computerized Tomography». *Proceedings of the IEEE*, 1983, **71(3)**, pp. 379–389.
- [47] Marsden, J. y Hoffman, M.: *Análisis Básico de Variable Compleja*. Trillas, Distrito Federal, México, 1996.
- [48] Marsden, J. y Tromba, A.: *Cálculo Vectorial*. Prentice Hall, Estado de México, México, cuarta edicin, 1998.
- [49] Miklavcic, D; Pavselj, N. y Hart, F. X.: «Electric Properties of Tissues». En: *Wiley Encyclopedia of Biomedical Engineering*, pp. 1–12. John Wiley & Sons, Inc., 2006.
- [50] Nordebo, S.; Gustafsson, M. y Nilsson, B.: «Fisher Information Analysis for Two-Dimensional Microwave Tomography». *Department of Electroscience of Lund University*, 2006.
- [51] Päivärinta, L.: «A review of Basic Mathematical Tools». En: *An Introduction to Inverse Scattering and Inverse Spectral Problems*, Mono-

- 
- graphs on Mathematical Modeling and Computation, pp. 1–24. SIAM, Philadelphia, USA, 1997.
- [52] Resnick, R.; Halliday, D. y Krane, K. S.: *Física*. volumen 2. Grupo Editorial Patria, Distrito Federal, México, 2002.
- [53] —: *Física*. volumen 1. Grupo Editorial Patria, Distrito Federal, México, 2002.
- [54] Roach, G: *An introduction to Echo Analysis: Scattering Theory and Wave Propagation*. Springer Monographs in Mathematics. Springer-Verlag, London, UK, 2008.
- [55] Rosay, J. P.: «Malgrange-Ehrenpreis theorem». En: *Encyclopedia of Mathematics*, Springer, 2001.
- [56] Schwartz, L.: *Mathematics for the Physical Sciences*. Addison-Wesley, Paris, France, 1966.
- [57] Semenov, S.: «Microwave tomography: review of the progress towards clinical applications». *Philosophical Transactions of the Royal Society*, 2009, **(367)**, pp. 3021–3042.
- [58] Sirovich, L.: *Techniques of Asymptotic Analysis*. volumen 2 de *Applied Mathematical Sciences*. Springer-Verlag, New York, USA, 1971.
- [59] Skourou, C.; Hoopes, P. J. y Paulsen, K. D.: «A monitor for progressive tissue fibrosis as observed in bystander tissues following experimental high dose rate irradiation». *Cancer Biology and Therapy*, 2009, **8(23)**, pp. 221–2227.

- 
- [60] Sommerfeld, A.: *Partial Differential Equations in Physics*. Academic Press Inc., Publishers, New York, USA, 1953.
- [61] Stakgold, I.: *Green's Functions and Boundary Value Problems*. John Wiley & Sons, Inc., New York, USA, 1979.
- [62] —: *Boundary Value Problems of Mathematical Physics*. volumen 1 de *Classics in Applied Mathematics*. SIAM, New York, USA, 2000.
- [63] Trujillo-Romero, C. J.; García-Jimeno, S.; Vera, A.; Leija, L. y Estelrich, J.: «Using Nanoparticles for Enhancing the Focusing Heating Effect of an External Waveguide Applicator for Oncology Hyperthermia: Evaluation in Muscle and Tumor Phantoms». *Progress In Electromagnetics Research*, 2011, **121**, pp. 343–363.
- [64] Varslot, T.; Morales, H. J. y Cheney, M.: «Synthetic-aperture radar imaging through dispersive media». *Inverse Problems*, 2010, **26(025008)**, p. 27.
- [65] Watson, G. N.: *A treatise on the theory of the Bessel functions*. Cambridge University Press, London, UK, 1922.
- [66] Werber, D.; Schwentner, A. y Biebl, E. M.: «Investigation of RF transmission properties of human tissues». *Advances in Radio Science*, 2006, **(4)**, pp. 357–360.
- [67] Wernick, M. N. y Aarsold, J. N.: «Introduction to Emission Tomography». En: M. N. Wernick y J. N. Aarsold (Eds.), *Emission Tomography. The Fundamentals of PET and SPECT*, pp. 11–23. Elsevier Academic Press, California, USA, 2004.

- 
- [68] Witham, G. B.: *Linear and nonlinear waves*. John Wiley & Sons, Inc., New York, USA, 1974.
- [69] Wunsch, C.: *Discrete Inverse and State Estimation Problems*. Cambridge University Press, New York, USA, 2006.
- [70] Zajicek, R. y Vrba, J.: «Broadband Complex Permittivity Determination for Biomedical Applications». En: *Advanced Microwave Circuits and Systems*, pp. 365–386. InTech, 2010.
- [71] Zeidler, E.: *Applied Functional Analysis. Applications in Mechanics and Inverse Problems*. volumen 108 de *Applied Mathematical Sciences*. Springer, New York, USA, 1995.