CIMAT

El Proceso de Wishart y la Dinámica de sus Eigenvalores y Propiedades Distribucionales Vía Cálculo Estocástico

TESINA

Que para obtener el grado de
Maestro en Ciencias con Especialidad en Probabilidad y Estadística

Presenta
Eduardo Antonio Trujillo Rivera

Director de Tesina
Dr. Víctor Manuel Pérez Abreu Carrión

Guanajuato, Guanajuato. 15 de Julio de 2011.

Integrantes del jurado

Presidente: Dr. Constantin Tudor.
Secretario: Dr. Carlos Gabriel Pacheco González.
Vocal: Dr. Víctor Manuel Pérez Abreu Carrión.
Lector especial: Dr. Juan Carlos Pardo Millán.

Asesor:

Dr. Víctor Manuel Pérez Abreu Carrión.

Sustentante:

Eduardo Antonio Trujillo Rivera.

Contenido

Introducción **1**

1 Preliminares de Cálculo Estocástico **5**

1.1 Notación 5

1.2 Elementos de Cálculo Estocástico 6

1.3 Cálculo Estocástico Matricial 11

1.4 Proceso de Cuadrado de Bessel 22

2 Proceso de Wishart **27**

2.1 Proceso de Wishart Estándar 27

2.2 Proceso de Wishart General 28

2.3 Generador Infinitesimal 44

3 Propiedades Distribucionales del Proceso de Wishart **47**

3.1 Transformada de Laplace y Transformaciones Lineales 47

3.2 Momentos del Proceso de Wishart Estándar 51

4 Generación del Proceso de Wishart **63**

4.1 Generación en un Caso Particular 63

4.2 Generación del Proceso de Wishart General 68

5 Comportamiento Dinámico de los Eigenvalores **70**

5.1 Eigenvalores del Proceso de Wishart Estándar 70

5.2 Eigenvalores del Proceso de Wishart General 71

5.3 Imposibilidad de Colisión 79
5.4 Interpretación y Conjetura de Existencia de un Proceso de Wishart más General . . 81

A Álgebra de Matrices **84**

B Matrices Aleatorias **87**

C Demostración de Resultados Auxiliares **91**

Dedicatoria

Dedico esta tesis a mi familia.

A mis papás María del Carmen y Antonio Trujillo por el amor que me han brindado y su apoyo incondicional. Me han dado los valores y principios que poseo. Gracias a ellos pude realizar esta tesina.

A mi hermano Alex por apoyarme siempre, por ser mi amigo y escucharme.

A ellos,
se los agradezco de todo corazón.

Agradecimientos

A mis padres y mi hermano por apoyarme en todos los sentidos.

A mi asesor, el Dr. Víctor Manuel Pérez Abreu Carrión, por dirigirme con gran entusiasmo, por su inmensa paciencia, sus excelentes comentarios y su gran dedicación.

A mis sinodales, el Dr. Constantin Tudor, el Dr. Carlos Gabriel Pacheco González y el Dr. Juan Carlos Pardo Millán por su paciencia y por sus valiosas observaciones.

A todos mis profesores, amigos y compañeros que compartieron conmigo su conocimiento a lo largo del programa de mis estudios.

Al CIMAT por todos los apoyos intelectuales y económicos que recibí a lo largo de la maestría.

Al CONACYT por su apoyo económico que recibí a lo largo de la maestría.

Introducción

En 1928 John Wishart [27] derivó la distribución matricial que lleva su nombre en el contexto de diversos problemas de estadística multivariada. Puede pensarse a la distribución de Wishart como la versión matricial de la distribución ji-cuadrada y es actualmente de gran importancia en inferencia estadística acerca de una distribución normal multivariada, como en la estimación de las matrices de covarianza, en el estudio de componentes principales, pruebas de verosimilitud en estadística multivariada, entre otros problemas; ver por ejemplo el libro [19].

El proceso cuadrado de Bessel, nombrado así en honor a Friedrich Bessel, es un proceso de Markov continuo con importancia tanto teórica como aplicada. Aparece, por ejemplo, en la teoría de los procesos de Markov y difusiones, con aplicaciones a la teoría del tiempo local del movimiento browniano [14], [26], a excursiones brownianas y tiempo reverso [14]. Asimismo es bastante conocido por sus aplicaciones a la teoría en finanzas [3], [7], [23]. El proceso cuadrado de Bessel puede ser definido en varios contextos; mediante su generador infinitesimal [13], como la parte radial de un movimiento browniano $d-$dimensional [15], [16] o como la solución de una ecuación diferencial estocástica [21]. Este proceso es de especial interés en esta tesis ya que el proceso de Wishart es el análogo matricial del proceso cuadrado de Bessel y también se encuentra relacionado con el proceso de eigenvalores.

En 1989 Marie-France Bru [4] estudió el espectro de matrices varianza-covarianza brownianas; motivada por el análisis de componentes principales y también realizó un análisis espectral de matrices de correlación. La importancia de su artículo es que realiza los primeros estudios del comportamiento dinámico de un proceso continuo que para cada tiempo fijo posee distribución de Wishart. Éste es el análogo matricial del proceso cuadrado de Bessel, más específicamente el producto de matrices brownianas.

En un artículo posterior en 1991, Bru [5] definió el proceso de Wishart $X = (X_t; t \geq 0)$ como la solución a una ecuación diferencial estocástica matricial que incluye una familia más amplia que los procesos estudiados en [4] y que incluye parámetros matriciales Q y K. Bru mostró que este nuevo proceso existe solamente para matrices Q, K que conmutan y siempre y cuando los eigenvalores del proceso se mantengan distintos. En esta tesis llamamos Proceso de Wishart estándar al caso en que $Q = \mathrm{I}_p$ y $K = 0$, para el cual se cumple que cada tiempo t fijo, X_t se distribuye como una extensión de la distribución de Wishart central. La extensión es en el sentido de que la distribución de Wishart central depende de un parámetro $n \in \mathbb{N}$ y la extensión es para una distribución que incluye un parámetro $\alpha \in \mathbb{R}^+$, similar al caso del proceso cuadrado de Bessel α-dimensional.

En 2008 Oliver Pfaffel [21] consideró en su tesis de maestría una definición más general del proceso de Wishart que la considerada en [5], la cual en este trabajo llamaremos proceso de Wishart general. Sin imponer restricción en K y Q ni la condición de la no colisión de los eigenvalores, en [21] se demuestra que el proceso de Wishart general existe y es único, en [17] se demuestra que un conjunto de procesos que incluyen al proceso de Wishart general existen; ambas demostraciones se desarrollan usando herramientas del cálculo estocástico matricial. Para el proceso de Wishart general se cumple que para cada tiempo t fijo, X_t se distribuye como una extensión de la distribución Wishart no central. La extensión es en un sentido análogo al descrito anteriormente para el parámetro $\alpha \in \mathbb{R}^+$.

El objetivo principal de este trabajo es presentar de manera unificada resultados básicos del proceso de Wishart, estudiar su proceso de eigenvalores y resultados recientes sobre la dinámica de algunas propiedades distribucionales, utilizando el enfoque de cálculo estocástico.

De especial interés en este trabajo es el realizar de manera detallada el estudio de los valores propios del proceso de Wishart. Éste fue iniciado por [4], [5] en el caso del proceso de Wishart estándar, encontrando la ecuación diferencial estocástica que obedece este proceso, el cual se comporta como un proceso cuadrado de Bessel mas un término de no colisión de los eigenvalores.

Una aportación de esta tesis es el estudio detallado de los eigenvalores del proceso de Wishart general. Específicamente, se obtiene una ecuación diferencial estocástica que describe la dinámica de estos eigenvalores. Esto requiere primero de una extensión de algunas técnicas propuestas por Bru y en especial una modificación del llamado argumento de McKean; resultado que conjeturamos permite mostrar que los eigenvalores del proceso de Wishart general nunca colisionan. Asimismo, con el propósito de dar una interpretación de la dinámica de los eigenvalores propios del proceso de Wishart general, en este trabajo se hace la propuesta de una definición aún más general del proceso de Wishart estudiada en [21] y más generalmente en [17], estudio que proponemos realizar posteriormente.

Con respecto a las propiedades distribucionales del proceso de Wishart, recientemente han sido considerados varios resultados. En 2007 Vostrikova y Graczyk [25] proporcionaron fórmulas recursivas para los momentos y esperanzas de funcionales del proceso de Wishart estándar vía cálculo estocástico. En 2010 Alfonsi y Ahdida [1] estudiaron propiedades distribucionales de procesos afines y usan el generador infinitesimal con el propósito de generar distribuciones de Wishart y generar el proceso de Wishart general y procesos afines en matrices semipositivas definidas sin alguna restricción en los parámetros.

Hay varias propiedades y aspectos del proceso de Wishart que no se consideran en este trabajo. Por ejemplo, resultados relacionados con comportamiento límite o matrices con entradas complejas; el proceso de Wishart libre o la distribución asintótica espectral como en [6] y [20]; o propiedades sobre las relaciones de las medidas del proceso de Wishart con respecto a dimensión diferente [9].

La estructura de la tesis es la siguiente. El Capítulo 1 presenta la nomenclatura y resultados clásicos del cálculo estocástico real y matricial que serán de utilidad en el desarrollo de la tesis. Así mismo se formula y demuestra una extensión del argumento de McKean, el cual se usa para probar la no colisión del proceso de eigenvalores del proceso de Wishart general en la Sección 5.3.

En el Capítulo 2 se presenta la definición general del proceso de Wishart propuesta por Bru [5] y estudiada por Pfaffel [21] y por Mayerhofer, Pfaffel y Stelzer [17] y se recopilan resultados recientes y generales sobre su existencia y unicidad, presentado las pruebas de los resultados más importantes. Se mencionan los procesos afines y su relación con el proceso de Wishart y se presenta el generador infinitesimal de este proceso. Finalmente se expone y demuestra una generalización de un resultado enunciado sin demostración por Bru ([5, Sección 5.3]). Esto caracteriza el proceso de Wishart general.

El Capítulo 3 está dedicado a las propiedades distribucionales del proceso de Wishart, tal como la transformada de Laplace y los momentos, los cuales han sido estudiados recientemente por Vostrikova y Graczyk [25] y Alfonsi y Ahdida [1]. Se muestra que los momentos del proceso de Wishart en el caso estándar pueden ser calculados por recurrencia, usando cálculo estocástico.

En el Capítulo 4 se presenta el algoritmo propuesto por Ahdida y Alfonsi [1] para generar un proceso de Wishart sin restricción en los parámetros. La idea principal de este algoritmo se basa en una descomposición del generador infinitesimal del proceso de Wishart y propiedades distribucionales presentadas en el Capítulo 3.

Finalmente, en el Capítulo 5 se aborda el estudio del comportamiento dinámico de los eigenvalores del procesos de Wishart primero en el caso estudiado por Bru [5] y posteriormente los detalles del caso general. Para finalizar el capítulo se proporciona una interpretación del comportamiento dinámico de los eigenvalores dando como resultado el planteamiento de un posible proceso de Wishart aún más general.

Con el objetivo de hacer la lectura de este trabajo lo más auto contenida posible se incluyen tres apéndices. En el Apéndice A se encuentran resultados relacionados con matrices deterministas. En el Apéndice B se presentan definiciones y resultados relacionados con las matrices aleatorias que son de utilidad en este trabajo. En el Apéndice C se demuestran resultados auxiliares que se utilizan en este trabajo.

Capítulo 1

Preliminares de Cálculo Estocástico

El objetivo principal de este capítulo es presentar las herramientas de cálculo estocástico real y matricial que son necesarias para el estudio del proceso de Wishart y otros procesos estocásticos que se obtienen a partir de éste. En particular se describe el proceso cuadrado de Bessel; un proceso importante tanto por su contenido teórico como por sus aplicaciones y debido a que el proceso de Wishart es el análogo matricial del proceso cuadrado de Bessel. Así mismo se incluye el llamado argumento de McKean y presentamos una extensión de éste, el cual se usa para probar la no colisión del proceso de eigenvalores del proceso de Wishart en el Capítulo 5.

1.1 Notación

La nomenclatura que se utiliza en esta tesis es usual y es fácilmente interpretable para un lector con conocimiento básico de álgebra y espacios de matrices, sin embargo conviene repasar la notación.

Se denota con $\mathbb{R}$ el conjunto de los números reales y $\mathbb{R}^+$ como el conjunto de los reales no negativos, $\mathbb{R}^p = \{(x_1, ..., x_p) : x_i \in \mathbb{R}\}$ y $\mathbb{R}^{p+} = \{(x_1, ..., x_p) : x_i \in \mathbb{R}^+\}$.

La nomenclatura para el espacio de las matrices se describe a continuación:

$\mathcal{M}_{p,q}(\mathbb{R})$ es el conjunto de las matrices de tamaño $p \times q$ con entradas en $\mathbb{R}$ y si $p = q$ se escribirá $\mathcal{M}_p(\mathbb{R})$. El grupo de las matrices invertibles en $\mathcal{M}_p(\mathbb{R})$ se denota como $\mathcal{G}_p(\mathbb{R})$. Las matrices simétricas en $\mathcal{M}_p(\mathbb{R})$ son representadas por $\mathcal{S}_n$. Recuérdese que el cono de las matrices positivas (negativas) definidas $S \in \mathcal{M}_p(\mathbb{R})$ son aquellas que para toda $x \in \mathbb{R}^p \backslash \left\{ \overrightarrow{0} \right\}$ cumplen que $x^\top S x > 0$ (< 0), serán denotadas por $\mathcal{S}_p^+$ $\left(\mathcal{S}_p^-\right)$. Se utiliza la notación $\overline{\mathcal{S}_p^+}$ para la cerradura de $\mathcal{S}_p^+$ en $\mathcal{M}_p(\mathbb{R})$, es decir el conjunto de las matrices semipositivas definidas en $\mathcal{M}_p(\mathbb{R})$. El orden parcial en $\mathcal{S}_p$ inducido por el cono es denotado por $\geq$, y $x > 0$ sí y sólo si $x \in \mathcal{S}_p^+$.

Ahora se define la notación para algunas funciones definidas en $\mathcal{M}_p(\mathbb{R})$. La transpuesta de una matriz cuadrada x se denota como $x^\top$, la adjunta de la matriz x es $\operatorname{adj}(x)$, la traza de x se escribe como $Tr(x)$, y la dimensión de la imagen de x, es decir, el rango de x se denota por $\operatorname{Rk}(x)$.

Dotemos a $\mathcal{S}_p$ con el producto escalar $\langle x, y\rangle := \operatorname{Tr}(xy)$. Mientras no se diga lo contrario $\|\cdot\|$ denota la norma asociada y $d\left(x, \partial\mathcal{S}_p^+\right)$ es la distancia de $x \in \mathcal{S}_p^+$ a la frontera $\partial\mathcal{S}_p^+$.

Algunos elementos de $\mathcal{M}_p(\mathbb{R})$ con importancia para la descomposición de cualquier matriz cuadrada $p \times p$ como suma de matrices en bloques se definen a continuación. La matriz identidad en $\mathcal{M}_p(\mathbb{R})$ se denota como I_p y para $n \leq p$, $\mathrm{I}_p^n = (\mathbf{1}_{i=j\leq n})_{1\leq i,j\leq p}$ y $e_p^n = (\mathbf{1}_{i=j=n})_{1\leq i,j\leq p}$ de tal forma que $\mathrm{I}_p^n = \sum_{i=1}^n e_p^i$. Denótese para $1 \leq i, j \leq p$, $e_p^{i,j} = (\mathbf{1}_{k=i,l=j})_{1\leq k,l\leq p}$.

1.2 Elementos de Cálculo Estocástico

En esta sección se recopilan definiciones y resultados clásicos de cálculo estocástico en $\mathbb{R}$.

Se comienza con una definición básica.

Definición 1.1 (Espacio de probabilidad filtrado) *Una cuádrupla $\left(\Omega, \mathcal{G}, (\mathcal{G}_t)_{t\in\mathbb{R}^+}, Q\right)$ es llamado un espacio de probabilidad filtrado si Ω es un conjunto no vacío, $\mathcal{G}$ es una $\sigma-$álgebra en Ω, $(\mathcal{G}_t)_{t\in\mathbb{R}}$ es una familia creciente de sub-$\sigma-$álgebras de $\mathcal{G}$ (una filtración) y Q es una medida de probabilidad en $(\Omega, \mathcal{G})$.*

Definición 1.2 (Condiciones usuales) *Un espacio de probabilidad filtrado $\left(\Omega, \mathcal{G}, (\mathcal{G}_t)_{t\in\mathbb{R}^+}, Q\right)$ satisface las condiciones usuales sí y sólo si*

i) *La filtración es continua por la derecha, es decir, $\cap_{s>t}\mathcal{G}_s = \mathcal{G}_t$ $\forall t \geq 0$ y*

ii) *$(\mathcal{G}_t)_{t\in\mathbb{R}^+}$ es completo, es decir, $\mathcal{G}_0$ contiene a todos los conjunto de $\mathcal{G}$ de medida 0.*

Se asume a partir de ahora que cualquier espacio filtrado $\left(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_t)_{t\in\mathbb{R}^+}, P\right)$ que se convoque en este trabajo es un espacio de probabilidad filtrado que satisface las condiciones usuales.

Definición 1.3 (Variable Aleatoria Real) *Una variable aleatoria real X es una función medible*

$$X : (\Omega, \mathcal{G}) \to (\mathbb{R}, \mathcal{B}).$$

Se define un proceso estocástico en $\mathbb{R}$.

Definición 1.4 (Proceso Estocástico Real) *Una función medible*

$$\begin{aligned} X \quad &: \quad \mathbb{R}^{+} \times \Omega \rightarrow \mathbb{R}, \\ (t, \omega) \quad &\longmapsto \quad X(t, \omega) = X_t(\omega) \end{aligned}$$

es una proceso estocástico si $X(t, \omega)$ *es una variable aleatoria para toda* $t \in \mathbb{R}^{+}$.

Se define a continuación una martingala.

Definición 1.5 (Martingala) *Dada una filtración* $(\mathcal{F}_t)_{t \geq 0}$ *en el espacio de probabilidad* $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ *y un proceso estocástico real* $X = (X_t)_{t \in T}$ *para* $T \subset \mathbb{R}$ *un conjunto que suele representar el tiempo. Se dice que* $(X_t, \mathcal{F}_t)_{t \in T}$ *es una martingala si y sólo si para cada* $t \in T$ *se cumple:*

i) X *es adaptado a la filtración* $(\mathcal{F}_t)_{t \geq 0}$, *es decir que* X_t *es* $\mathcal{F}_t -$ *medible* $\forall t \in T$.

ii) $\mathbb{E}(|X_t|) < \infty \ \forall t \in T$,

iii) $X_t = \mathbb{E}(X_s | \mathcal{F}_t) \ \forall t \in T$ *con* $t < s$.

El movimiento browniano uno de los procesos estocásticos continuos más conocidos. Por una parte, por su origen al tratar de modelar el movimiento, aparentemente errático, de las partículas de tamaño ínfimo que se encuentran en una solución en reposo. Por otro lado por toda la teoría desarrollada alrededor de este proceso.

Definición 1.6 (Movimiento Browniano Real Estándar) *Un movimiento browniano en* $\mathbb{R}$ *es una proceso continuo adaptado* $W = \{W_t, \mathcal{F}_t; t \in \mathbb{R}^{+}\}$ *definido en algún espacio de probabilidad filtrado* $\left(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_t)_{t \in \mathbb{R}^{+}}, P\right)$, *con la propiedad de que* $W_0 = 0$ *c.s.,* $W_t - W_s$ *es independiente de* $\mathcal{F}_s$ *y está normalmente distribuido con media cero y varianza* $t - s$.

La siguiente definición está relacionada con resultados de convergencia de momentos en espacios filtrados. Será de utilidad en la sección de los momentos del proceso de Wishart estándar.

Definición 1.7 (Integrabilidad Uniforme) *Una familia de variables aleatorias $\{X_t\}_{t\in T}$, donde T es una familia de índices arbitraria, se dice uniformemente integrable si y sólo si*

$$\lim_{A\to\infty}\int_{|X_t|>A}|X_t|\,\mathrm{d}P=0$$

uniformemente en $t\in T$.

El siguiente resultado que caracterización cuándo un proceso es uniformemente integrable se encuentra en [8, pág 101] con su respectiva demostración.

Teorema 1.1 (Caracterización de Integrabilidad Uniforme) *La familia $\{X_t\}$ es uniformemente integrable si y sólo si las siguiente dos condiciones se satisfacen:*

i) $\mathbb{E}\,|X_t|$ *es acotada en $t\in T$.*

ii) *Para toda $\epsilon>0$, existe $\delta(\epsilon)>0$ tal que para cualquier $E\in\mathcal{F}$*

$$P(E)<\delta(\epsilon)\implies\int_E|X_t|\,dP<\epsilon\ \forall t\in T.$$

Se describe a continuación una equivalencia entre la convergencia de momentos y la convergencia en probabilidad. Se puede ver este teorema con su respectiva demostración en [8, pág 101]. Este resultado está demostrado para variables aleatorias, pero siguiendo la demostración es válido para matrices aleatorias.

Teorema 1.2 (Convergencia de Momentos) *Sea $0<r<\infty$, X_n con momento r-ésimo, y $X_n\to X$ en probabilidad. Entonces las siguientes proposiciones son equivalentes.*

i) $\{|X_n|^r\}$ *es uniformemente integrable;*

ii) $X_n\to X$ *en media r-ésima;*

iii) $E\,|X_n|^r\to E\,|X|^r<\infty$.

Se presenta a continuación una generalización del llamado argumento de McKean. Este teorema permite mostrar que una familia de procesos que incluyen al proceso de Wishart existen en $\mathbb{R}^+$.

Esta generalización del argumento de McKean fue enunciado y demostrado en [17, Proposición 3.4]. La demostración sigue un argumento de reducción al absurdo utilizando que toda martingala local parada es un movimiento browniano parado con cambio de tiempo (Teorema 1.13).

Teorema 1.3 *Sea $Z = (Z_t)_{t\in\mathbb{R}^+}$ un proceso cádlág adaptado real valuado en un intervalo estocástico $[0, \tau_0)$ tal que $Z_0 > 0$ c.s. y*

$$\tau_0 := \inf\{t \geq 0 : Z_{t-} = 0\}.$$

Supóngase que $h : \mathbb{R}^+ \backslash \{0\} \to \mathbb{R}$ satisface lo siguiente:

i) *Para toda $t \in [0, \tau_0)$ se tiene que $h(Z_t) = h(Z_0) + M_t + P_t$, donde*

- ***(a)*** *P es una proceso cádlág adaptado localmente acotado y no negativo en $[0, \tau_0)$,*

  (b) *M es una martingala local continua en $[0, \tau_0)$ con $M_0 = 0$,*

ii) $\lim_{x\to 0} h(x) = -\infty$ *o respectivamente* ∞.

Entonces $\tau_0 = \infty$ casi seguramente.

El siguiente resultado, el llamado argumento de McKean puede encontrarse en [21, pág 21]. La demostración sigue las mismas ideas que el teorema anterior. Sin embargo, bajo el teorema anterior, este resultado es un corolario directo cuando P es un proceso creciente. El argumento de McKean se incluye en este trabajo de tesis porque es utilizado para la obtención de otra versión de este argumento.

Teorema 1.4 (Argumento de McKean) *Sea r un proceso estocástico en $\mathbb{R}^+$ tal que $P(r_0 > 0) = 1$ y $h : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ tal que*

i) *$h(r)$ es una martingala local continua en el intervalo $[0, \tau_0)$ para $\tau_0 = \inf\{s : r_s = 0\}$,*

ii) $\lim_{x\to 0^+} h(x) = \infty$ *o respectivamente* $\lim_{x\to 0^+} h(x) = -\infty$.

Entonces $\tau_0 = \infty$ casi seguramente.

Los resultados expuestos y demostrados en este trabajo giran en torno a la solución fuerte de una ecuación diferencial estocástica. La siguiente definición explica este concepto.

Definición 1.8 (Solución de EDE) *Sea* $\left(\Omega, \mathcal{G}, (\mathcal{G}_t)_{t\in\mathbb{R}^+}, Q\right)$ *un espacio de probabilidad filtrado que satisface las condiciones usuales y considérese la ecuación diferencial estocástica*

$$\mathrm{d}X_t = b\,(t, X_t) + \sigma\,(t, X_t)\,\mathrm{d}W_t,\ X_0 = x_0$$

donde $b : \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *y* $\sigma : \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *son funciones medibles,* $x_0 \in \mathbb{R}$ *y* W *un movimiento browniano.*

i) Un par (X, W) *de procesos continuos* $\mathcal{G}_t-$*adaptados definidos en* $\left(\Omega, \mathcal{G}, (\mathcal{G}_t)_{t\in\mathbb{R}^+}, Q\right)$ *es llamado solución de (1.1) en* $[0, T)$, $T > 0$ *si* W *es un* $\mathcal{G}_t-$*Movimiento browniano y*

$$X_t = X_0 + \int_0^T b\,(s, X_s)\,\mathrm{d}s + \int_0^T \sigma\,(s, X_s)\,\mathrm{d}W_s,\ \forall t \in [0, T)\,.$$

ii) (X, W) *es una solución fuerte de (1.1) si* X *es adaptado a* $\left(\mathcal{G}_t^W\right)_{t\in\mathbb{R}^+}$, *donde* $\mathcal{G}_t^W = \sigma_c\,(W_s, s \leq t)$.

iii) Una solución (X, W) *de (1.1) que no es fuerte es llamada solución débil.*

El estudio del comportamiento dinámico de los eigenvalores del proceso de Wishart y una caracterización del proceso Wishart general requiere del siguiente resultado de representación de martingalas; que se encuentra en [13, página 90].

Teorema 1.5 *Sea* $\left(\Omega, (\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}, \mathcal{F}, P\right)$ *un espacio de probabilidad filtrado y* M^i *martingala local continua cuadrado integrable que inicia en* 0 *c.s.* $i = 1, 2, ..., d$. *Sean* $\Phi_{i,j}$, $i, j = 1, 2, ..., d$ *y* $\Psi_{i,k}, i = 1, 2, ..., d$, $k = 1, 2, ..., r$ *procesos* $\mathcal{F}_t-$*medibles tales que* $\int_0^t |\Phi_{i,j}\,(s)|\,\mathrm{d}s < \infty$ *y* $\int_0^t |\Psi_{i,k}\,(s)|^2\,\mathrm{d}s < \infty$ $\forall t \geq 0$ *c.s.,*

$$\left[M^i, M^j\right]_t = \int_0^t \Phi_{i,j}\,(s)\,\mathrm{d}s$$

y

$$\Phi_{i,j}\,(s) = \sum_{k=1}^{r} \Psi_{i,k}\,(s)\,\Psi_{j,k}\,(s)\,.$$

Entonces en una extensión $\left(\tilde{\Omega}, \left(\tilde{\mathcal{F}}_t\right)_{t\geq 0}, \tilde{\mathcal{F}}, \tilde{P}\right)$ *de* $\left(\Omega, \left(\mathcal{F}_t\right)_{t\geq 0}, \mathcal{F}, P\right)$ *existe un* $\left(\tilde{\mathcal{F}}_t\right)-$*movimiento browniano* $W_t = \left(W_t^1, ..., W_t^r\right)$ *tal que*

$$M_t^i = \sum_{k=1}^{r} \int_0^t \Psi_{i,k}\left(s\right) \mathrm{d}W_s^k$$

1.3 Cálculo Estocástico Matricial

El propósito de esta sección es exponer las herramientas del cálculo estocástico matricial que se utilizan para el estudio del proceso de Wishart general. Estas definiciones y resultados pueden encontrarse en [17] y [21].

Definición 1.9 (Matriz Proceso Estocástico) *Una función medible*

$$\begin{aligned} X \quad &: \quad \mathbb{R}^+ \times \Omega \to \mathcal{M}_{m,n}\left(\mathbb{R}\right), \\ (t, \omega) \quad &\longmapsto \quad X\left(t, \omega\right) = X_t\left(\omega\right) \end{aligned}$$

es una matriz proceso estocástico si $X\left(t,\omega\right)$ *es una matriz aleatoria para toda* $t \in \mathbb{R}^+$. *Además,* X *es llamado proceso estocástico en* $\overline{\mathcal{S}_p^+}$ *si* $X : \mathbb{R}^+ \times \Omega \to \overline{\mathcal{S}_p^+}$.

Definición 1.10 (Proceso Estocástico en un Intervalo Aleatorio) *Una familia* $\left(X_t\right)_{t\in\mathbb{R}^+}$ *de matrices aleatorias en* $\{t < T\}$, *con* T *un tiempo de paro, es llamado proceso estocástico en* $[0, T)$. *Si* X_t *es* $\{t < T\} \cap \mathcal{F}_t -$ *medible para toda* $t \in \mathbb{R}^+$, *entonces se dice que* X *es adaptado.*

Para definir la ley de probabilidad P^X de un proceso estocástico X, se considera a X como una matriz aleatoria en el espacio funcional $\left(\mathcal{M}_{m,n}\left(\mathbb{R}\right)^{\mathbb{R}^+}, \widetilde{\mathcal{F}}\right)$ con la $\sigma - \acute{a}lgebra$ generada por los cilindros

$$\{\omega \in \Omega : X_{t_1}\left(\omega\right) \in \mathcal{F}_1, ..., X_{t_k}\left(\omega\right) \in \mathcal{F}_k\}$$

$k \in \mathbb{N}$ y donde $F_i \subset \mathcal{M}_{m,n}\left(\mathbb{R}\right)$ son conjuntos de Borel.

$X : \left(\Omega, \mathcal{F}, P\right) \to \left(\mathcal{M}_{m,n}\left(\mathbb{R}\right)^{\mathbb{R}^+}, \widetilde{\mathcal{F}}\right)$ es una función medible con ley P^X.

Definición 1.11 (Movimiento Browniano Matricial) *Un movimiento browniano matricial* W *en* $\mathcal{M}_{n,p}\left(\mathbb{R}\right)$ *es una matriz que consiste de movimientos brownianos independientes estándar de* *dimensión uno. Es decir, $W_{i,j}$ son movimientos brownianos independientes estándar (definición 1.6), $1 \leq i \leq n$, $1 \leq j \leq p$. La notación será $W \sim \mathcal{BM}_{n,p}$ (y $W \sim \mathcal{BM}_n$ si $p = n$).*

Definición 1.12 (Martingala Local Matricial) *Un proceso estocástico X en $\mathcal{M}_p(\mathbb{R})$ es llamado martingala local en $\mathbb{R}^+$ si cada componente de X es una martingala local en $\mathbb{R}^+$, es decir, si existe una sucesión estrictamente creciente de tiempos de paro $(T_n)_{n\in\mathbb{N}}$, con $T_n \overset{c.s}{\to} \infty$ tal que $(X_{n\wedge T_n})_{ij}$ es martingala para toda i, j.*

Definición 1.13 *Un proceso adaptado M en $[0,T)$ es llamado martingala local continua en $[0,T)$ si existe una sucesión creciente de tiempos de paro $(T_n)_{n\in\mathbb{N}}$ y una sucesión de martingalas continuas $\left(M^{(n)}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ (en la forma usual en $[0,\infty)$) tal que $\lim_{n\to\infty} T_n = T$ c.s. y $M_t = M_t^{(n)}$ en $\{t < T_n\}$.*

Definición 1.14 (Semimartingala) *Un proceso estocástico X es una semimartingala si X se puede descomponer como $X = X_0 + M + A$, donde M es una martingala local y A es un proceso adaptado de variación finita.*

Se asumirá a partir de ahora que las semimartingalas que se mencionen son continuas a menos que se diga lo contrario.

La integral estocástica matricial, que será fundamental para definir el proceso de Wishart, se define a continuación a partir de las integrales estocásticas de Itô de sus entradas.

Definición 1.15 (Matriz Integral Estocástica) *Sean $W \sim \mathcal{BM}_{n,p}$ y X y Y procesos estocásticos en $\mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{R})$ y $\mathcal{M}_{p,q}(\mathbb{R})$ respectivamente y un tiempo de paro T entonces la matriz integral estocástica en $[0,T)$ es la matriz con entradas*

$$\begin{aligned}\left(\int_0^T X_t \mathrm{d}W_t Y_t\right)_{i,j} &= \sum_{k=1}^{n}\sum_{l=1}^{p}\int_0^T X_{t,ik} Y_{t,lj} \mathrm{d}W_{t,kl}, \\ \forall 1 &\leq i \leq m, 1 \leq j \leq q.\end{aligned}$$

De forma similar se define la matriz de variación cuadrática a partir de las variaciones cuadráticas de sus entradas.

Definición 1.16 (Variación cuadrática) *Para dos semimartingalas $A \in \mathcal{M}_{d,m}(\mathbb{R})$, $B \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{R})$*

la matriz de variación cuadrada está definida como

$$[A, B]_{t,ij} = \sum_{k=1}^{m} [A_{ik}, B_{kj}]_t \in \mathcal{M}_{d,n}(\mathbb{R}).$$

Definición 1.17 *Para una martingala local continua M en $[0, T)$ la variación cuadrática es el proceso $[M, M]$ valuado en $\mathbb{R} \cup \{\infty\}$ definido por*

$$[M, M]_t = \sup_{n \in \mathbb{N}} \left[M^{(n)}, M^{(n)} \right]_{t \wedge T_n}$$

para toda $t \in \mathbb{R}^+$.

La fórmula de Itô es uno de los resultados más importantes en cálculo estocásticos, ya que permite expresar la imagen de una semimartingala bajo una función lo suficientemente suave en términos de la semimartingala original. En esta tesis se utilizan las siguientes versiones matriciales de la fórmula de Itô.

Teorema 1.6 (Itô Leibnitz Matricial) *Sea $U \subset \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{R})$ un conjunto abierto, X y Y semimartingalas continuas con valores en U. La fórmula de Itô para diferenciar el producto $X^\top Y$ es*

$$\mathrm{d}\left(X^\top Y\right) = X^\top \mathrm{d}Y + (\mathrm{d}X)^\top Y + (\mathrm{d}X)(\mathrm{d}Y)$$

Demostración. La demostración es directa aplicando la fórmula de Itô en $\mathbb{R}$ en cada entrada del producto $X^\top Y$. ■

La notación $(\mathrm{d}X)(\mathrm{d}Y)$ significa $\mathrm{d}[X, Y]$.

A continuación se enuncia una variante de la fórmula de Itô que es utilizada más adelante [17, Lema 4.4].

Teorema 1.7 *Sea X una semimartingala no necesariamente continua con valores en $\mathcal{S}_p^+$ en un intervalo estocástico $[0, T)$ y*

$$f : \mathcal{S}_p^+ \longrightarrow \mathbb{R}$$

una función dos veces continuamente diferenciable. Si $X_{t-} \in \mathcal{S}_p^+$ para toda $t \in [0, T)$ y

$$\sum_{0 < s \leq t} \|\Delta X_s\| < \infty$$

para $t \in [0,T)$ *donde* $\Delta X_s = X_s - X_{s-}$, *entonces* $f(X)$ *es una semimartingala en* $[0,T)$ *y*

$$\begin{aligned} f(X_t) &= f(X_0) + \operatorname{Tr}\left(\int_0^t \nabla f(X_{s-})^T \mathrm{d}X_s^c\right) \\ &\quad + \frac{1}{2}\int_0^t \sum_{j,l=1}^{n}\sum_{i,k=1}^{m} \frac{\partial^2}{\partial X_{ij}\partial X_{kl}} f(X_{s-})\,\mathrm{d}\left[X_{ij}, X_{kl}\right]_s^c \\ &\quad + \sum_{0<s\leq t}\left(f(X_s) - f(X_{s-})\right). \end{aligned}$$

El siguiente teorema se sigue directamente del Teorema 1.7 para semimartingalas continuas.

Teorema 1.8 (Fórmula de Itô) *Sea* $U \subset \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{R})$ *un conjunto abierto,* X *una semimartingala continua con valores en* U *y sea* $f : U \to \mathbb{R}$ *una función dos veces continuamente diferenciable. Entonces* $f(X)$ *es una semimartingala continua y*

$$\begin{aligned} f(X_t) &= f(X_0) + \operatorname{Tr}\left(\int_0^t Df(X_s)^T \mathrm{d}X_s\right) \\ &\quad + \frac{1}{2}\int_0^t \sum_{j,l=1}^{n}\sum_{i,k=1}^{m} \frac{\partial^2}{\partial X_{ij}\partial X_{kl}} f(X_s)\,\mathrm{d}\left[X_{ij}, X_{kl}\right]_s \end{aligned}$$

con $D = \left(\frac{\partial}{\partial X_{ij}}\right)_{ij}$.

La siguiente caracterización del movimiento browniano matricial será utilizada varias veces en este trabajo.

Teorema 1.9 (Caracterización de Lévy del Movimiento Browniano) *Sea* W *una martingala local continua en el espacio* $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ *que toma valores en* $\mathcal{M}_p(\mathbb{R})$. *Entonces* W *es un movimiento browniano matricial* $p \times p$ *si y sólo si se cumplen*

$$\left[W_{i,j}, W_{k,l}\right]_t = \begin{cases} t, & si\ i = k\ y\ j = l \\ 0, & de\ otra\ forma \end{cases}$$

para toda $i, j, k, l \in \{1, ..., p\}$.

A continuación se presentan varias nociones y resultados sobre ecuaciones diferenciales estocásticas matriciales.

Definición 1.18 (Solución de EDE) *Sea* $\left(\Omega, \mathcal{G}, (\mathcal{G}_t)_{t\in\mathbb{R}^+}, Q\right)$ *un espacio de probabilidad filtrado que satisface las condiciones usuales y considérese la ecuación diferencial estocástica siguiente*

$$\mathrm{d}X_t = b\left(t, X_t\right) + \sigma\left(t, X_t\right)\mathrm{d}W_t,\ X_0 = x_0 \tag{1.1}$$

donde $b : \mathbb{R}^+ \times \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{R}) \to \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{R})$ *y* $\sigma : \mathbb{R}^+ \times \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{R}) \to \mathcal{M}_{m,p}(\mathbb{R})$ *son funciones medibles,* $x_0 \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{R})$ *y* $W \sim \mathcal{BM}_{p,n}$*.*

i) Un par (X, W) *de procesos continuos* $\mathcal{G}_t-$*adaptados definidos en* $\left(\Omega, \mathcal{G}, (\mathcal{G}_t)_{t\in\mathbb{R}^+}, Q\right)$ *es llamado solución de (1.1) en* $[0, T)$*,* $T > 0$ *un tiempo de paro, si* W *es un* $\mathcal{G}_t-$*Movimiento browniano y*

$$X_t = X_0 + \int_0^T b\left(s, X_s\right)\mathrm{d}s + \int_0^T \sigma\left(s, X_s\right)\mathrm{d}W_s,\ \forall t \in [0, T).$$

ii) (X, W) *es una solución fuerte de (1.1) si* X *es adaptado a* $\left(\mathcal{G}_t^W\right)_{t\in\mathbb{R}^+}$*, donde* $\mathcal{G}_t^W = \sigma_c\left(W_s, s \leq t\right)$ *es la* $\sigma-$*álgebra generada por* $W_s,\ s \leq t$*, que fue completada con todos los conjuntos que tienen medida cero bajo* Q*.*

iii) (X, W) *es una solución débil de (1.1) si no es una solución fuerte.*

Definición 1.19 (Unicidad de Soluciones) *i) Se dice que la unicidad por trayectorias para (1.1) se cumple si para cualesquiera dos soluciones* (X', W') *y* (X, W) *definidas en el mismo espacio de probabilidad filtrado,* $X_0 = X_0'$*,* $W = W'$ *implica que* X *y* X' *son indistinguibles, i.e. para* $P-$*casi toda* $\omega \in \Omega$*,* $X_t(\omega) = X_t'(\omega)$*, o de forma equivalente*

$$P\left(\sup_{t\in[0,\infty)} \left\|X_t - X_t'\right\| > 0\right) = 0.$$

ii) Existe unicidad en ley para (1.1), si cualesquiera dos soluciones (X', W') *y* (X, W) *con posibles movimientos brownianos independientes* W*,* W' *(en particular si* (X', W') *y* (X, W) *están definidos en espacios de probabilidad filtrados distintos) y* X_0*,* X_0' *tienen la misma distribución, entonces las leyes* P^X *y* $P^{X'}$ *son iguales. En otras palabras ,* X *y* X' *son dos versiones del mismo proceso: tienen las mismas distribuciones finito dimensionales (véase [15, pág 2]).*

Observación 1.1 **i)** *Unicidad por trayectorias implica unicidad en ley, pero no es cierto la otra dirección. Véase [15, Proposición 3.20, pág 309].*

ii) *El enunciado anterior tiene como consecuencia el que la existencia de una solución débil y la unicidad por trayectorias implica solución fuerte. Véase [15, Corolario 3.23, pág 310]*

iii) *La definición de unicidad de trayectorias implica que existe a lo más una solución fuerte de (1.1) módulo indistinguibilidad.*

El siguiente teorema proporciona condiciones para la existencia fuerte de solución a una ecuación diferencial estocástica hasta un tiempo de paro T y describe el comportamiento de la solución para cuando $t \to T$. Este resultado es importante porque permite estudiar la existencia del proceso de Wishart general. Se puede encontrar este resultado en [21, pág 17].

Teorema 1.10 (Existencia y Solución de EDE a Partir de Semimartingalas Continuas) *Sea U un subconjunto abierto de $\mathcal{M}_{d,n}(\mathbb{R})$ y $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión creciente de conjuntos convexos cerrados tales que $U_n \subset U$ y $\cup_{n\in\mathbb{N}} U_n = U$. Supóngase que $f : U \to \mathcal{M}_{d,m}(\mathbb{R})$ es una función localmente Lipschitz y $Z \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{R})$ es una semimartingala continua. Entonces para cada condición inicial X_0 que es U-valuada y medible existe un tiempo de paro T y una única U-valuada solución fuerte X de la ecuación diferencial estocástica*

$$\mathrm{d}X_t = f(X_t)\,\mathrm{d}Z_t \tag{1.2}$$

hasta el tiempo $T > 0$ c.s. En $T < \infty$ se tiene que X alcanza la frontera ∂U o explota. Si f satisface la condición de crecimiento lineal

$$\|f(X)\|^2 \leq K\left(1 + \|X\|^2\right) \tag{1.3}$$

para alguna constante $K \in \mathbb{R}^+$, entonces no puede ocurrir una explosión.

Para garantizar la unicidad de soluciones de una ecuación diferencial estocástica, se utiliza la condición usual a las ecuaciones diferenciales ordinarias: condiciones de Lipschitz.

Definición 1.20 (Localmente Lipschitz) *Sean* $(U, \|\cdot\|_U)$ *y* $(V, \|\cdot\|_V)$ *dos espacios normados y* $W \subset U$ *un abierto. Entonces la función* $f : W \to V$ *es localmente Lipschitz , si para toda* $x \in W$ *existe una vecindad abierta* $\mathcal{U}(x) \subset W$ *y una constante* $C(x) \in \mathbb{R}^+$ *tal que*

$$\|f(z) - f(y)\|_V \leq C(x) \|z - y\|_U \quad \forall z, y \in \mathcal{U}(x).$$

Como en el caso clásico de las ecuaciones diferenciales estocásticas la solución de (1.2) es un proceso de Markov (Teorema 1.11), ahora matricial.

Definición 1.21 (Proceso Creciente) *Un proceso cádlág adaptado* X *con valores en* $\mathcal{S}_p$ *es llamado* $\mathcal{S}_p^+ -$ *creciente si* $X_t \geq X_s$ *c.s. para toda* $t > s \geq 0$. *Éste proceso es de variación finita en compactos por [2, Lema 5.21] y entonces una semimartingala.*

Definición 1.22 (Proceso de Puro Salto) *Un proceso creciente es llamado de puro salto si*

$$X_t = X_0 + \sum_{0<s\leq t} \Delta X_s,$$

donde $\Delta X_s = X_s - X_{s-}$.

Para una semimartingala X se denota por X^c su parte continua. En este trabajo de tesis todas las semimartingalas tendrán parte discontinua de variación finita, es decir, $\sum_{0<s\leq t} \|\Delta X_s\|$ es finita para toda $t \in \mathbb{R}^+$, y se define

$$X_t^c = X_t - \sum_{0<s\leq t} \Delta X_s. \tag{1.4}$$

Definición 1.23 (Proceso de Markov) *Sea* $U \subset \mathcal{M}_p(\mathbb{R})$ *un conjunto abierto. Sea* Z *un proceso con valores en* U*, el cual es adaptado a la filtración* $(\mathcal{F}_t)_{t\in\mathbb{R}^+}$.

i) Z *es un proceso de Markov con respecto a la filtración* $(\mathcal{F}_t)_{t\in\mathbb{R}^+}$ *sí y sólo si*

$$\mathbb{E}(g(Z_u) | F_t) = \mathbb{E}(g(Z_u) | Z_t)$$

para toda $t \in \mathbb{R}^+$, $u \geq t$ *y* $g \in U \to \mathbb{R}$ *acotada y Borel medible.*

ii) *Sea Z un proceso de Markov y defínase para toda $s,t \in \mathbb{R}^+$, $s \leq t$ la función de transición $P_{s,t}(Z_s, g) := \mathbb{E}(g(Z_s)|Z_t)$ con $g : U \to \mathbb{R}$ acotada y borel medible. Si*

$$P_{s,t} = P_{0,t-s} =: P_{t-s} \text{ para toda } s,t \in \mathbb{R}^+, \; s \leq t$$

entonces se dice que el proceso de Markov Z es homogéneo en el tiempo.

iii) *Un proceso de Markov homogéneo es llamado proceso de Markov fuerte si*

$$\mathbb{E}(g(Z_{T+s})|F_T) = P_s(Z_T, g) = \mathbb{E}(g(Z_{T+s})|Z_T)$$

para toda $g : U \to \mathbb{R}$ acotada y Borel medible y todo tiempo de paro T finito casi seguramente.

En analogía al caso univariado, para poder tener condiciones iniciales arbitrarias al problema de ecuaciones diferenciales estocásticas es necesario agrandar el espacio de probabilidad.

Definición 1.24 (Espacio de Probabilidad Agrandado) *Sea $\left(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_t)_{t\in\mathbb{R}^+}, P\right)$ un espacio de probabilidad filtrado donde $(\mathcal{F}_t)_{t\in\mathbb{R}^+}$ es continuo por la derecha y toda $\mathcal{F}_t$ es completada con conjuntos de $\mathcal{F}$ que tienen P-probabilidad 0. Sea $U \subset \mathcal{M}_p(\mathbb{R})$ un subconjunto abierto de $\mathcal{M}_p(\mathbb{R})$.*

El espacio de probabilidad $\left(\overline{\Omega}, \overline{\mathcal{F}}, (\overline{\mathcal{F}}_t)_{t\in\mathbb{R}^+}, (\overline{P}^y)_{y\in U}\right)$ con

$$\begin{aligned} \overline{\Omega} &= \Omega \times U, \; \overline{\mathcal{F}}_t = \cap_{u>t}\sigma(\mathcal{B}(U) \times \mathcal{F}_u), \\ \overline{F} &= \sigma(\mathcal{B}(U) \times \mathcal{F}), \; \overline{P}^y = \delta_y \times P \end{aligned}$$

es llamado la expansión de $\left(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_t)_{t\in\mathbb{R}^+}, P\right)$. La medida δ_y es la medida de Dirac con respecto a $y \in U$.

Una matriz aleatoria $Z : \Omega \to \mathcal{M}_p(\mathbb{R})$ se extiende sobre $\overline{\Omega}$ como $Z((y, \omega)) = Z(\omega)$.

El resultado siguiente es especialmente importante para estudiar el generador infinitesimal de un proceso de Wishart.

Teorema 1.11 (Propiedad de Markov de Solución de una EDE) *Supónganse las hipótesis del Teorema 1.10 a excepción del crecimiento lineal, pero supóngase que Z es un movimiento browniano con deriva en $\mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{R})$. Supóngase además que $T = \infty$ para todo valor inicial U.*

Considérese el espacio de probabilidad expandido $\left(\overline{\Omega}, \overline{\mathcal{F}}, \left(\overline{\mathcal{F}}_t\right)_{t\in\mathbb{R}^+}, \left(\overline{P}^y\right)_{y\in U}\right)$ *y defínase* X_0 *como* $X_0\left((y,\omega)\right) := y$ *para toda* $y \in U$*. Entonces la única solución fuerte* X *de*

$$\mathrm{d}X_t = f\left(X_t\right)\mathrm{d}Z_t \tag{1.5}$$

es un proceso de Markov homogéneo en el tiempo en U *bajo cualquier medida de probabilidad de la familia* $\left(\overline{P}^y\right)_{y\in U}$*.*

El Teorema de Girsanov es un resultado clásico y una herramienta crucial de la teoría de las ecuaciones diferenciales estocásticas. Permite construir una medida de probabilidad Q tal que el movimiento browniano con deriva sobre la medida de probabilidad P es un movimiento browniano matricial sobre Q. Antes de enunciar este teorema se define la exponencial estocástica matricial.

Definición 1.25 (Exponencial Estocástica) *Sea* X *una semimartingala. La única solución* $Z = \xi\left(X\right)$ *de*

$$\mathrm{d}Z_t = Z_t\mathrm{d}X_t,\ Z_0 = 1$$

es llamado exponencial estocástica de X*.*

Teorema 1.12 (de Girsanov para matrices aleatorias) *Sea* $T > 0$*,* $W \sim \mathcal{BM}_p$ *y* U *un proceso estocástico adaptado y continuo con valores en* $\mathcal{M}_p\left(\mathbb{R}\right)$ *tal que*

$$\left(\xi\left(\mathrm{Tr}\left(-\int_0^t U_s^\top \mathrm{d}W_s\right)\right)\right)_{t\in[0,\infty)}$$

es una martingala, por ejemplo que satisfaga la condición de Novikov:

$$\mathbb{E}\left(\exp\left\{\mathrm{Tr}\left(\tfrac{1}{2}\int_0^T U^\top U \mathrm{d}t\right)\right\}\right) < \infty.$$

Entonces

$$\widehat{Q} = \int \xi\left(\mathrm{Tr}\left(-\int_0^T U_t^\top \mathrm{d}W_t\right)\right)\mathrm{d}P$$

es una medida de probabilidad equivalente y

$$\widehat{W_t} = \int_0^t U_s \mathrm{d}s + W_t$$

es un $\widehat{Q}$-movimiento browniano en $[0, T)$.

El siguiente resultado se prueba en [17, Lema 4.3]. Es utilizado para mostrar que el proceso de Wishart existe y usa el concepto de movimiento browniano W^h en $[0, T)$, con T un tiempo de paro predecible.

Definición 1.26 (Movimiento Browniano en $[0, T)$) *Sea T un tiempo de paro. Una martingala local continua W en $[0, T)$ es un movimiento Browniano en $[0, T)$, si $[W, W]_t = t$ en $[0, T)$.*

Lema 1.1 *Sea $X \in \mathcal{S}_p^+$ un proceso estocástico adaptado cádlág en el intervalo estocástico $[0, T)$ con T un tiempo de paro predecible, $W \sim \mathcal{BM}_p$ y $h : \mathcal{M}_p(\mathbb{R}) \to \mathcal{M}_p(\mathbb{R})$. Entonces existe un movimiento browniano W^h en $[0, T)$ tal que*

$$\operatorname{Tr}\left(\int_0^t h(X_{u-})\,\mathrm{d}W_u\right) = \int_0^t \sqrt{\operatorname{Tr}\left(h(X_{u-})^\top h(X_{u-})\right)}\mathrm{d}W_u^h.$$

El lema que sigue es utilizado para mostrar en la Sección 2.2 que algunos procesos que se definen en esa misma sección son procesos cuadrados de Bessel.

Lema 1.2 *Sea $X \in \mathcal{S}_p^+$ un proceso estocástico, $W \sim \mathcal{BM}_p$ y $h : \mathcal{M}_p(\mathbb{R}) \to \mathcal{M}_p(\mathbb{R})$. Entonces existe un movimiento browniano W^h en $\mathbb{R}$ tal que*

$$\operatorname{Tr}\left(\int_0^t h(X_u)\,\mathrm{d}W_u\right) = \int_0^t \sqrt{\operatorname{Tr}\left(h(X_u)^\top h(X_u)\right)}\mathrm{d}W_u^h.$$

Demostración. El movimiento browniano que se busca es

$$W_T^h = \sum_{i,n=1}^{p} \int_0^T \frac{h(X_t)}{\sqrt{\operatorname{Tr}\left(h(X_t)^\top h(X_t)\right)}}\mathrm{d}W_{t,ni}.$$

Para mostrar que W_T^h es movimiento browniano se utiliza el Teorema de caracterización de Lévy (Teorema 1.9).

Una demostración detallada puede encontrarse en [21, pág 32].

Otra forma de probar este lema es utilizando directamente el Lema 1.1 con $T = \infty$. ■

El siguiente resultado se utiliza para mostrar una modificación del argumento de McKean (Teorema 1.4) que se propone en este trabajo.

Teorema 1.13 *Sea $\tau_0 < \infty$ un tiempo de paro y M una martingala local continua en el intervalo $[0, \tau_0)$. Sea*

$$T_t := \inf \{s : [M, M]_s > t\}$$

(con la convención de que $\inf \{\emptyset\} = \infty$) entonces $W_t := M_{T_t}$ es un $\mathcal{F}_{T_t}-$movimiento browniano parado en el intervalo $\left[0, [M, M]_{\tau_0}\right)$, es decir un movimiento browniano con respecto a la σ-álgebra

$$\mathcal{F}_{T_t} = \left\{A \in \mathcal{F} : A \cap \{T_t \leq t\} \in \mathcal{F}_t,\ t \in \mathbb{R}^+\right\}$$

que está parado en $[M, M]_{\tau_0}$. Además, $M_t = W_{[M,M]_t}$, es decir que M es un cambio de tiempo del movimiento browniano parado.

Para la demostración del teorema anterior ver [21, pag 21].

En el siguiente teorema, con su respectiva demostración, es una modificación del argumento de McKean. Esta versión del argumento de McKean se desarrolló en este trabajo para generalizar un resultado de [5] que describe el comportamiento dinámico de los eigenvalores del proceso de Wishart, en particular, permitirá en la sección 5.3 demostrar que los eigenvalores de un proceso de Wishart no colisionan c.s.

Teorema 1.14 (Argumento de McKean II) *Sea r un proceso estocástico en $\mathbb{R}^{p+}$ continuo tal que*

$$P\left(r_i\left(0\right) = r_j\left(0\right) \text{ para algún } i \neq j\right) = 0$$

y $h : \mathbb{R}^{p+} \to \mathbb{R}$ tal que

i) $h\left(r\right)$ es una martingala local continua en el intervalo $[0, \tau_0)$ para

$$\tau_0 = \inf \left\{s : r_i\left(s\right) = r_j\left(s\right) \text{ alguna } i \neq j\right\},$$

ii) $\lim\limits_{\substack{x_i - x_j \to 0 \\ i \neq j}} h\left(x_1, ..., x_p\right) = \infty$ o respectivamente $\lim\limits_{\substack{x_i - x_j \to 0 \\ i \neq j}} h\left(x_1, ..., x_p\right) = -\infty$.

Entonces $\tau_0 = \infty$ casi seguramente.

Demostración. Nótese que τ_0 es un tiempo de paro porque si se define

$$\tau_{ij} = \inf \{s : r_i(s) - r_j(s) = 0\}$$

para $1 \leq i < j \leq p$ que son tiempos de paro entonces τ_0 se puede escribir como $\tau_0 = \min\{\tau_{ij}\}$ lo que implica que τ_0 es también un tiempo de paro.

Supongamos que $\tau_0 < \infty$.

Definase $M := h(r)$ y T_t como en el Teorema 1.13. M es una martingala local continua en $[0, \tau_0]$ y por el Teorema 1.13 se concluye que $W_t := M_{T_t}$ es un movimiento browniano parado en $\left[h(r_0), [M, M]_{\tau_0}\right)$. Nótese que $P(r_i(0) = r_j(0) \text{ para algún } i \neq j) = 0$ implica que $\tau_0 > 0$.

Considérese el caso $\lim\limits_{\substack{x_i - x_j \to 0 \\ i \neq j}} h(x_1, ..., x_p) = \infty$. En el intervalo $[0, \tau_0)$, el proceso $h(r_t)$ toma todos los valores en $\left[\acute{h}(r_0), \infty\right)$, en particular $[h(r), h(r)]_{\tau_0} = [M, M]_{\tau_0} > 0$. Para $\tau_0 < \infty$ se tiene $\lim_{t \to [M,M]_{\tau_0}} T_t = \tau_0$ por lo que $lim_{r_{T_t} \to r_{\tau_0}} W_t = \infty$.

Se tiene dos casos:

- $[M, M]_{\tau_0} < \infty$ entonces se llega a una contradicción porque un movimiento browniano no puede ir a ∞ en una cantidad finita de tiempo.

- $[M, M]_{\tau_0} = \infty$, implica que W es un movimiento browniano en $\mathbb{R}^+$ que converge a ∞ c.s. lo que es una contradicción porque

$$P(W_t \leq 0 \text{ un número infinito de veces para } t \to \infty) = 1$$

Ambos casos implican una contradicción por lo que se concluye que $\tau = \infty$ c.s.

El caso $\lim\limits_{\substack{x_i - x_j \to 0 \\ i \neq j}} h(x_1, ..., x_p) = -\infty$ es análogo. ■

1.4 Proceso de Cuadrado de Bessel

En esta sección se presenta el proceso cuadrado de Bessel con el enfoque de cálculo estocástico. Este proceso es un elemento importante del cálculo estocástico ([13, pág 237]) y bastante conocido por sus aplicaciones a la teoría en finanzas ([7], [23]). Así mismo, es de especial interés en esta tesis ya que el proceso de Wishart es el análogo matricial del proceso cuadrado de Bessel y también se encuentra relacionado con el proceso de eigenvalores.

Definición 1.27 (Proceso Cuadrado de Bessel) *Sea $\alpha \geq 0$ y W un movimiento browniano en $\mathbb{R}$. Una solución fuerte de*

$$\mathrm{d}X_t = 2\sqrt{|X_t|}\mathrm{d}W_t + \alpha \mathrm{d}t,\ \ X_0 = x \tag{1.6}$$

es llamado proceso cuadrado de Bessel de dimensión α y denotado por $X \sim BESQ\,(\alpha, x)$.

Observación 1.2 *Se define el proceso cuadrado de Bessel con $|\cdot|$ dentro de la raíz porque no se sabe a priori si el proceso se mantiene no negativo. Se muestra más adelante que el proceso es no negativo y se elimina el valor absoluto dentro de la raíz.*

La razón por la que se le nombra proceso cuadrado de Bessel es porque las primeras definiciones involucran sumas de cuadrados de movimiento brownianos independientes. Se explica con más detalle este punto en la Sección 2.1.

El siguiente teorema proporciona un resultado clásico de cálculo estocástico. La demostración se puede encontrar en [28]. Este resultado es importante porque permite mostrar que el proceso de Bessel existe y es único.

Teorema 1.15 (Unicidad de Trayectorias) *Sea*

$$\mathrm{d}X_t = \sigma\left(X_t\right)\mathrm{d}W_t + b\left(X_t\right)\mathrm{d}t \tag{1.7}$$

una ecuación diferencial estocástica en $\mathbb{R}$ donde $b, \sigma : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ son funciones continuas y W un movimiento browniano. Supóngase que existen funciones crecientes $\rho, \kappa : (0, \infty) \to (0, \infty)$ tales que

$$\begin{gathered} \left|\sigma\left(\xi\right) - \sigma\left(\eta\right)\right| \leq \rho\left(\left|\xi - \eta\right|\right),\ \forall \xi, \eta \in \mathbb{R} \\ \textit{con}\ \int_0^1 \rho^{-2}\left(u\right)\mathrm{d}u = \infty \end{gathered} \tag{1.8}$$

y

$$\begin{gathered} \left|b\left(\xi\right) - b\left(\eta\right)\right| \leq \kappa\left(\left|\xi - \eta\right|\right),\ \forall \xi, \eta \in \mathbb{R} \\ \textit{con}\ \int_0^1 \kappa^{-1}\left(u\right)\mathrm{d}u = \infty \end{gathered}$$

entonces la unicidad por trayectorias para (1.7) se cumple.

Una de las características principales del proceso cuadrado de Bessel es que siempre se mantiene estrictamente no negativo. Esto se puede demostrar usando el argumento de McKean (Teorema 1.4) definiendo τ_0 como el primer momento en que la solución a (1.6) se anula. Sin embargo, aquí se presenta una prueba alternativa utilizando el siguiente resultado.

El teorema que sigue permite comparar soluciones de dos ecuaciones diferenciales a partir de los parámetros de las ecuaciones. Es utilizado para mostrar que el proceso cuadrado de Bessel es no negativo.

Teorema 1.16 (Comparación de Soluciones) *Considérese las siguientes dos ecuaciones*

$$\mathrm{d}X_t = \sigma\left(X_t\right)\mathrm{d}W_t + b^1\left(X_t\right)\mathrm{d}t$$

$$\mathrm{d}X_t = \sigma\left(X_t\right)\mathrm{d}W_t + b^2\left(X_t\right)\mathrm{d}t.$$

Ambas ecuaciones poseen soluciones únicas. Además, b^1, b^2 son dos funciones Borel medibles y acotadas tales que $b^1 \geq b^2$ en todas partes y una de ellas es Lipschitz. Si $\left(X^1, W\right)$ es una solución de la primera ecuación diferencial estocástica y $\left(X^2, W\right)$ es una solución de la segunda con respecto al mismo W y si $X_0^1 \geq X_0^2$ c.s. entonces

$$\mathbb{P}\left(X_t^1 \geq X_t^2 \ \forall t \in \mathbb{R}^+\right) = 1.$$

Observación 1.3 *Skorokhod estudió la existencia de soluciones débiles de una ecuación diferencial estocástica que incluye a la ecuación (1.1). De acuerdo a Skorokhod [24, pág 59],*

$$\mathrm{d}X_t = 2\sqrt{|X_t|}\mathrm{d}W_t + \alpha\mathrm{d}t,\ X_0 = x \tag{1.9}$$

siempre tiene una solución débil (aunque no necesariamente única). En esta situación, si la unicidad de (1.9) se cumple entonces existe una solución fuerte y única.

El siguiente enunciado es el resultado principal de esta sección. Proporciona la existencia, unicidad y la no negatividad del proceso de Bessel. La idea de la demostración para la existencia y unicidad es mostrar que se cumplen las hipótesis del Teorema 1.15. La no negatividad se muestra primero para el caso particular $\alpha = 0$ y $x = 0$ y posteriormente se utiliza la solución de este caso particular y se compara con la solución del caso general utilizando el Teorema 1.16.

Teorema 1.17 (Existencia, Unicidad y no-negatividad de Bessel) *Para $\alpha \geq 0$ y $x_0 \geq 0$ existe una única solución fuerte no negativa X de*

$$X_t = x_0 + 2\int_0^t \sqrt{X_s}\mathrm{d}W_s + \alpha t \tag{1.10}$$

en el intervalo $[0, \infty)$. Además, si $\alpha \geq 2$ y $x_0 > 0$ la solución X es positiva c.s. en $[0, \infty)$.

Demostración. Por las Observaciones 1.1 (pág. 16) y 1.3 existe una solución débil a (1.10). Si se muestra que la solución es única se habrá mostrado que la solución es fuerte. Con el Teorema 1.15 se muestra la unicidad de solución para la ecuación diferencial estocástica siguiente

$$X_t = 2\sqrt{|X_t|}\mathrm{d}W_t + \alpha \mathrm{d}t,\ X_0 = x_0. \tag{1.11}$$

Sabemos que $\left|\sqrt{z} - \sqrt{z'}\right| \leq \sqrt{|z - z'|}\ \forall z, z' \geq 0$, entonces

$$2\left|\sqrt{|\xi|} - \sqrt{|\eta|}\right| \leq 2\sqrt{||\xi| - |\eta||} \leq 2\sqrt{|\xi - \eta|} = \rho\left(|\xi - \eta|\right)\ \forall \xi, \eta \in \mathbb{R},$$

además con $\rho(u) = 2\sqrt{u}$, es claro que

$$\int_0^1 \rho^{-2}(u)\,\mathrm{d}u = \frac{1}{4}\int_0^1 \frac{1}{u}\mathrm{d}u = \infty.$$

Por lo tanto si existe una solución a (1.11), ésta es única. La existencia y unicidad de solución fuerte de (1.11) se ha mostrado.

A continuación se muestra que la solución nunca se vuelve negativa utilizando el Teorema 1.16.

Considérese el caso $x_0^1 = 0$ y $\alpha^1 = 0$. En este caso, es claro que la única solución de (1.11) es $X \equiv 0$. Además, para α general se mostró que existe una solución única X^2. Por el Teorema de comparación (Teorema 1.16) se concluye que

$$\mathbb{P}\left[X_t^2 \geq X_t^1\ \forall t \in \mathbb{R}^+\right] = \mathbb{P}\left[X_t^2 \geq 0\ \forall t \in \mathbb{R}^+\right] = 1.$$

Entonces X_t^2 es no negativa para toda t casi seguramente. Entonces X_t^2 nunca se vuelve negativa y podemos descartar $|\cdot|$ en (1.11). Se ha mostrado que el proceso de Bessel es no negativo.

Para mostrar que el proceso cuadrado de Bessel es positivo c.s. es suficiente suponer $\alpha \geq 2$ y $x > 0$. Utilizando un comentario de Revuz y Yor [22, pág 442] se obtiene que $\{0\}$ es polar, es decir que

$$P\left(\inf\{s : X_s = 0\} < \infty\right) = 0,$$

para todo valor inicial $x_0 > 0$. Entonces en este caso la única solución fuerte X es un proceso positivo c.s. ∎

Capítulo 2

Proceso de Wishart

En este capítulo se define de forma general el proceso de Wishart y se recopilan resultados recientes y generales sobre su existencia y unicidad y de procesos definidos de forma más general. Se presentan las pruebas de los resultados más importantes.

Se menciona brevemente los procesos afines y su relación con el proceso de Wishart. Al final del capítulo se presenta el generador infinitesimal del proceso de Wishart y algunas de sus propiedades.

2.1 Proceso de Wishart Estándar

Sean $Y_1, ..., Y_n$, n variables aleatorias independientes normales estándar. Es bien conocido que $Z = \sum_{i=1}^{n} Y_i^2$ se distribuye como una $ji - cuadrada$ con n grados de libertad. La distribución ji-cuadrada aparece en una gran variedad de aplicaciones en la Inferencia Estadística.

Una generalización a las matrices aleatorias de la distribución $ji - cuadrada$ es la distribución de Wishart (Definición B.13). El descubrimiento en 1928 de la distribución de Wishart ha contribuido al desarrollo del análisis estadístico multivariado, ver por ejemplo a Muirhead en [19]. La distribución de Wishart se puede obtener considerando $S \sim \mathcal{N}_{p,n}(0, \Sigma \otimes I_n)$ una matriz aleatoria de tamaño $p \times n$ con distribución normal (Definición B.12) y definiendo $X = SS^\top$. Entonces X tiene distribución de Wishart central $WIS_p(n, \Sigma)$ (Teorema 3.2.2 [11, pág 88]).

Considérese ahora un movimiento browniano matricial $N_t = (n_{i,j}(t))$ real en $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$ con condición inicial $N_0 = (n_{i,j}(0))$ (Definición 1.11); definase $X_t = N_t^\top N_t$. Para $t \in \mathbb{R}^+$ fija, X_t tiene una distribución de Wishart no central (Teorema 3.5.1 [11, pág 116]). Para el caso en que $p = 1$

se obtiene el proceso cuadrado de Bessel como la suma de cuadrados de movimiento brownianos independientes.

Veremos a continuación que $(X_t)_{t\geq 0}$ puede ser estudiado como la solución de una ecuación diferencial estocástica matricial. Definase W de la siguiente forma

$$\mathrm{d}W_t = \left(\sqrt{X_t}\right)^{-1} N_t^\top \mathrm{d}N_t \tag{2.1}$$

que es un movimiento browniano (por caracterización de Lévy, Teorema 1.9), donde la raíz de una matriz semipositiva definida X_t es como en A.1. Por otro lado, por la fórmula de Itô (Teorema 1.6) y por definición de X

$$\mathrm{d}X_t = N_t^\top (\mathrm{d}N_t) + (\mathrm{d}N_t)^\top \mathrm{d}N_t + n\mathrm{I}_p\mathrm{d}t, \tag{2.2}$$

luego, despejando $\mathrm{d}N_t$ de (2.1) y sustituyendo en (2.2)

$$\mathrm{d}X_t = \sqrt{X_t}\mathrm{d}W_t + \mathrm{d}W_t^\top \sqrt{X_t} + n\mathrm{I}_p\mathrm{d}t.$$

Así, una forma alternativa de definir el proceso de Wishart es utilizando la ecuación diferencial estocástica anterior pero considerando $n \in \mathbb{R}^+$. De forma más general y en analogía con un proceso cuadrado de Bessel, Bru [5] da la siguiente definición.

Definición 2.1 (Wishart Estándar) *Un proceso de Wishart* $(X_t^x)_{t\geq 0}$ *es una solución fuerte en* $\overline{\mathcal{S}_p^+}$ *a la siguiente ecuación diferencial estocástica (si es que existe):*

$$\mathrm{d}X_t^x = \sqrt{X_t^x}\mathrm{d}W_t + \mathrm{d}W_t^\top \sqrt{X_t^x} + \alpha\mathrm{I}_p\mathrm{d}t,\ X_0^x = x \in \overline{\mathcal{S}_p^+},\ \alpha > 0. \tag{2.3}$$

Esta definición se puede generalizar aún más y es con la que se trabaja en la siguiente sección.

2.2 Proceso de Wishart General

Esta sección tiene el propósito de definir el proceso de Wishart general y describir resultados generales de existencia y unicidad de este proceso. El proceso de Wishart general fue definido por primera vez por Bru [5] utilizando condiciones en los parámetros. Pfaffel [21] retomó la idea de la definición y es la que se describe a continuación.

Definición 2.2 *Sea $W \sim \mathcal{BM}_p$, $Q, K \in \mathcal{M}_p(\mathbb{R})$ matrices arbitrarias, $x \in \overline{S_p^+}$ el valor inicial y $\alpha > 0$ un número real no negativo. Entonces a la siguiente ecuación diferencial estocástica se le llama la ecuación diferencial estocástica de Wishart:*

$$\mathrm{d}X_t^x = \sqrt{X_t^x}\mathrm{d}W_t Q + Q^\top \mathrm{d}W_t^\top \sqrt{X_t^x} + \left(X_t^x K + K^\top X_t^x + \alpha Q^\top Q\right)\mathrm{d}t, \; X_0 = x. \tag{2.4}$$

Definición 2.3 (Proceso de Wishart) *A una solución fuerte de (2.4) en $\overline{S_p^+}$ se le conoce como un proceso de Wishart (de dimensión $p \times p$) con parámetros Q, K, α, x.*

Observación 2.1 *El proceso de Wishart ha sido definido como un proceso en $\overline{S_p^+}$ y con condición inicial también en $\overline{S_p^+}$. Sin embargo los teoremas de existencia y unicidad del proceso de Wishart que se describen en este capítulo muestran que siempre se mantiene en S_p^+ siempre que $x \in S_p^+$ y proporcionan condiciones sobre los parámetros para que este proceso sí exista.*

Notación 2.1 *Se denotará por $WIS_p(x, \alpha, K, Q)$ la ley de $(X_t^x)_{t\geq 0}$ un proceso de Wishart y como $WIS_p(x, \alpha, K, Q; t)$ la distribución marginal de X_t^x.*

Procesos estocásticos matriciales más generales que el proceso de Wishart han sido considerados recientemente por [17] bajo el nombre de difusiones afines.

Definición 2.4 (Difusiones Afines) *Sean $x, \overline{\alpha} \in \overline{\mathcal{S}_p^+}$, $Q \in \mathcal{M}_p(\mathbb{R})$, $B \in \mathcal{L}(\mathcal{S}_p(\mathbb{R}))$ una función lineal en $\mathcal{S}_p(\mathbb{R})$ y $W \sim \mathcal{BM}_p$. Un proceso afín es una solución (fuerte o débil) a la siguiente ecuación diferencial estocástica*

$$X_t^x = x + \int_0^t \left(\overline{\alpha} + B\left(X_s^x\right)\right)\mathrm{d}s + \int_0^t \left(\sqrt{X_s^x}\mathrm{d}W_s Q + Q^\top \mathrm{d}W_s \sqrt{X_s^x}\right). \tag{2.5}$$

Observemos que efectivamente un proceso de Wishart es un proceso afín: si $\exists \alpha \geq 0$ tal que $\overline{\alpha} = \alpha Q^\top Q$ y $\exists K \in \mathcal{M}_p(\mathbb{R})$ tal que $\forall x \in \mathcal{S}_p$, $B(x) = K^\top x + xK$.

En esta tesis consideramos sólo el caso de procesos de Wishart como elemento de las difusiones a fines, debido a que, por un lado este trabajo tiene como objetivo recopilar varios aspectos de este proceso matricial para el cuál aún existen varios problemas por estudiar. Por otro lado consideramos dejar para un estudio posterior procesos afines más generales que incluyen procesos con saltos, mientras que el proceso de Wishart es un proceso continuo.

Sin embargo, algunos resultados relacionados con procesos afines serán enunciados por lo que se introduce la notación $AFF_p\left(x, \overline{\alpha}, B, a\right)$ para un proceso afín con condición inicial x y parámetros $\overline{\alpha}, B, a$.

Por otro lado, para mostrar la existencia y unicidad de solución fuerte de (2.4) se muestra en esta sección que existe solución a una ecuación más general que se describe a continuación.

Sean $b \in \mathcal{S}_p,\ Q, K \in \mathcal{M}_p,\ J$ un proceso con valores en $\mathcal{S}_p$,

$$\Gamma : \mathcal{S}_p^+ \longrightarrow \overline{\mathcal{S}_p^+},$$

$$g : \mathcal{S}_p^+ \longrightarrow \mathbb{R}^+$$

funciones y considérese la siguiente ecuación diferencial estocástica matricial con condición inicial $X_0^x = x \in \mathcal{S}_p^+$

$$\begin{aligned} \mathrm{d}X_t^x &= \sqrt{X_{t-}^x}\mathrm{d}W_t Q + Q^\top \mathrm{d}W_t^\top \sqrt{X_{t-}^x} \\ &\quad + \left(X_{t-}^x K + K^\top X_{t-}^x + \Gamma\left(X_{t-}^x\right) + b\right)\mathrm{d}t + g\left(X_{t-}^x\right)\mathrm{d}J_t, \end{aligned} \tag{2.6}$$

Por el momento no se pedirán condiciones sobre los parámetros de la ecuación (2.6), pero sí serán necesarias ciertas restricciones para mostrar que existe solución fuerte a esta ecuación y por consiguiente que existe el proceso de Wishart.

Antes de continuar con los teoremas de existencia y unicidad se proporciona a continuación una interpretación intuitiva de (2.4) el objeto principal de estudio de este capítulo.

Véase la siguiente aproximación usual para $h > 0$ pequeño:

$$\begin{aligned} X_{t+h}^x &= X_t^x + \sqrt{X_t^x}\int_t^{t+h} \mathrm{d}W_t Q + Q^\top \int_t^{t+h} \mathrm{d}W_t^\top \sqrt{X_t^x} \\ &\quad \left(X_t^x K + K^\top X_t^x + \alpha Q^\top Q\right)\mathrm{d}t \\ X_0^x &= x. \end{aligned}$$

Obsérvese que Q controla la covarianza de las fluctuaciones distribuidas normalmente y estas distribuciones son proporcionales a la raíz cuadrada del proceso:

$$\sqrt{X_t^x}\int_t^{t+h} \mathrm{d}W_t Q | X_t^x \sim \sqrt{X_t^x}\cdot \mathcal{N}_{p,p}\left(0, \mathrm{I}_p \otimes Q^\top Q h\right).$$

Las fluctuaciones decrecen rápido si el proceso se va a cero y como $\alpha Q^\top Q$ es positiva semidefinida, α determina qué tan lejos de cero es la deriva.

Ahora consideremos la ecuación determinista equivalente a (2.4) y estudiaremos el comportamiento para cuando $t \to \infty$, es decir

$$\frac{\mathrm{d}X_t^x}{\mathrm{d}t} = X_t^x K + K^\top X_t^x + Q^\top Q,\ X_0^x = x.$$

Simplificando notación: $\mathcal{C} : \mathcal{S}_p \to \mathcal{S}_p$, $X \longmapsto XK + K^\top X$, $M = \alpha Q^\top Q$, se obtiene

$$\frac{\mathrm{d}X_t^x}{\mathrm{d}t} = \mathcal{C}X_t^x + M,\ X_0^x = x.$$

Resolviendo:

$$X_t^x = \boldsymbol{e}^{\mathcal{C}t}\left(x + \text{constantes}\right) - \mathcal{C}^{-1}M.$$

Entonces si $\mathrm{Re}\left(\sigma\left(K\right)\right) \subseteq (-\infty, 0)$ se tiene que $\lim_{t\to\infty} X_t^x = -\mathcal{C}^{-1}M$.

Como la ecuación determinística converge a $-\mathcal{C}^{-1}M$, entonces la ecuación estocástica fluctuaría alrededor de $-\mathcal{C}^{-1}M$.

Antes de continuar con el estudio del proceso de Wishart es necesario el siguiente lema [17, Lema 4.1].

Lema 2.1 *En $\mathcal{S}_p^+$ se tiene*

(i) $\nabla \det(x) = \det(x)\left(x^{-1}\right)$.

(ii) $\frac{\partial^2}{\partial x_{ij}\partial x_{kl}} \det(x) = \det(x)\left[\left(x^{-1}\right)_{kl}\left(x^{-1}\right)_{ij} - \left(x^{-1}\right)_{ik}\left(x^{-1}\right)_{lj}\right]$.

Es de gran importancia conocer la variación cuadrática del proceso de Wishart, por lo cual se calcula a continuación.

Lema 2.2 (Variación Cuadrática del Proceso de Wishart) *Sea* $X \sim WIS_p(x, \alpha, K, Q)$. *Entonces, siempre que el proceso* $(X_t^x)_{t\geq 0}$ *exista, su variación cuadrática es*

$$\mathrm{d}\left[X_{ij}^x, X_{kl}^x\right]_t = X_{t,ik}^x \left(Q^\top Q\right)_{jl} \mathrm{d}t + X_{t,il}^x \left(Q^\top Q\right)_{jk} \mathrm{d}t + X_{t,jk}^x \left(Q^\top Q\right)_{il} \mathrm{d}t + X_{t,jl}^x \left(Q^\top Q\right)_{ik} \mathrm{d}t.$$

Demostración. La demostración es directa utilizando la ecuación (2.4) y que $[W_i(t), W_j(t)] = \delta_{ij} t$ para movimientos brownianos independientes $W_i's$ y que $[W_i(t), t] = 0$.

Definase

$$\mathrm{d}H_t := \sqrt{X_t^x} \mathrm{d}W_t Q + Q^\top \mathrm{d}W_t^\top \sqrt{X_t^x}$$

y entonces $[H_{ij}, H_{kl}] = \left[X_{ij}^x, X_{kl}^x\right]$.

De la definición de H

$$H_{ij}(t) = \sum_{mn} \left(\sqrt{X_t^x}\right)_{in} \mathrm{d}W_{nm}(t) Q_{mj} + Q_{mi} \mathrm{d}W_{nm}(t) \left(\sqrt{X_t^x}\right)_{nj}$$

entonces el último sumando de $\mathrm{d}[H_{ij}, H_{kl}]$ es

$$\sum_{mn} \left(\sqrt{X_t^x}\right)_{nj} \left(\sqrt{X_t^x}\right)_{nl} Q_{mi} Q_{mk} \mathrm{d}t = X_{t,jl}^x \left(Q^\top Q\right)_{ik} \mathrm{d}t.$$

Los demás sumandos se obtienen de la misma manera. ∎

El siguiente lema, que se encuentra en [17, Lema 4.2], es una generalización del Lema 2.2. La demostración sigue las mismas ideas que el resultado anterior. La notación superíndice c se encuentra descrita por (1.4).

Lema 2.3 *Considérese la solución* X_t^x *de (2.6) en* $[0, T_x)$, *donde*

$$T_x = \inf\left\{t \geq 0 : X_{t-}^x \in \partial \mathcal{S}_p^+ \text{ ó } X_t^x \notin \mathcal{S}_p^+\right\}. \tag{2.7}$$

Entonces

$$\mathrm{d}\left[X_{ij}^x, X_{kl}^x\right]_t^c = \left(X_{t-,ik}^x \left(Q^\top Q\right)_{jl} + X_{t-,il}^x \left(Q^\top Q\right)_{jk} + X_{t-,jk}^x \left(Q^\top Q\right)_{il} + X_{t-,jl}^x \left(Q^\top Q\right)_{ik}\right) \mathrm{d}t.$$

A continuación se describen los teoremas de existencia y unicidad del proceso de Wishart. Para demostrar el teorema más general de esta sección (existencia y unicidad del proceso de Wishart general) se demuestra que existe solución a la ecuación (2.6). La existencia del proceso de Wishart general se demuestra en [21] utilizando el Teorema 1.12 de Girsanov para matrices aleatorias. A continuación se presenta una demostración más directa y menos restrictiva, dada recientemente en el trabajo [17, Teorema 2.2].

Se enuncia y demuestra el primer teorema de existencia y unicidad del proceso de Wishart después de la siguiente importante observación concerniente a la técnica de demostración de estos teoremas.

Observación 2.2 *Una razón por la que no se puede adaptar la demostración del Teorema 1.17 al caso matricial es debido a que el argumento de tipo Yamada-Watanabe del Teorema 1.15 no es aplicable en nuestro caso, como se argumenta a continuación. En la versión matricial del Teorema 1.15, como es descrito por Pfaffel [21, pág 31], la condición* (1.8) *corresponde a*

$$\int_{\substack{\left\{U\in\overline{\mathcal{S}_p^+}:\|U\|\leq 1\right\} \\ U\longmapsto\rho^2(U)U^{-1}\ \text{es cóncava}}} \rho^{-2}\left(U\right)U\mathrm{d}U=\infty.$$

Sin embargo,

$$\int_{\left\{U\in\overline{\mathcal{S}_p^+}:\|U\|\leq 1\right\}} \rho^{-2}\left(U\right)U\mathrm{d}U=\int_{\left\{U\in\overline{\mathcal{S}_p^+}:\|U\|\leq 1\right\}} \mathrm{I}_p\mathrm{d}U<\infty \tag{2.8}$$

para $\rho\left(U\right)=\sqrt{U}$*. Por lo tanto el teorema no puede ser aplicado a este caso. Además, Pfaffel [21, pág 31] menciona que si* (2.8) *se cumple para* $p\geq 3$*, una ecuación diferencial estocástica con dos soluciones puede ser construida y por lo tanto la unicidad de soluciones no es cierto. Sin embargo se muestra que el proceso de Wishart es único.*

Teorema 2.1 (Existencia y Unicidad de Wishart I) *Para todo valor inicial* $x\in\mathcal{S}_p^+$ *existe una única solución* X *a la ecuación diferencial estocástica de Wishart en el cono* $\mathcal{S}_p^+$ *hasta el tiempo de paro*

$$T=\inf\left\{s:\det\left(X_s^x\right)=0\right\}>0\ c.s.$$

Demostración. Para esta prueba se utiliza el Teorema 1.10. Se muestra que se cumplen las hipótesis requeridas.

Definamos $U := S_p^+$.

$\lambda_{\min} : S_p^+ \to (0,\infty) \quad M \mapsto \lambda_{\min}(M) = \min_{\|v\|=1} v^\top M v$ (que es continuamente diferenciable). Definiendo a $U_n := \left\{M \in \mathcal{S}_p^+ : \lambda_{\min}(M) \geq \frac{1}{n}\right\} = \lambda_{\min}^{-1}\left(\left[\frac{1}{n},\infty\right)\right)$ es cerrado.

U_n es convexo porque $\forall M_1, M_2 \in U_n,\ \alpha \in [0,1]$

$$\begin{aligned}
\lambda_{\min}(\alpha M_1 + (1-\alpha) M_2) &= \min_{\|v\|=1} v^\top (\alpha M_1 + (1-\alpha) M_2) v \\
&\geq \alpha \min v^\top M_1 v + (1-\alpha) \min v^\top M_2 v \\
&\geq \alpha \frac{1}{n} + (1-\alpha)\frac{1}{n} = \frac{1}{n}.
\end{aligned}$$

A continuación se reescribe la ecuación diferencial (2.4). Definamos el siguiente operador

$$\begin{aligned}
\mathcal{Z}_{X^x} &= \mathcal{Z}(X^x) : \mathcal{M}_p(\mathbb{R}) \to \mathcal{S}_p \\
Y &\longmapsto \sqrt{X^x} Y Q + Q^\top Y^\top \sqrt{X^x}
\end{aligned}$$

y como antes

$$\mathcal{C} : S_p \to S_p, Y \longmapsto YK + K^\top Y.$$

Entonces reescribimos la ecuación (2.4)

$$\mathrm{d}X_t^x = \sqrt{X_t^x}\mathrm{d}W_t Q + Q^\top \mathrm{d}W_t^\top \sqrt{X_t^x} + \left(X_t^x K + K^\top X_t^x + \alpha Q^\top Q\right)\mathrm{d}t$$

como

$$\begin{aligned}
X_t^x &= \int_0^t \mathcal{Z}_{X_u^x}\mathrm{d}W_u + \int_0^t \left(\mathcal{C}X_u^x + \alpha Q^\top Q\right)\mathrm{d}u \\
&= \int_0^t \binom{\mathcal{Z}(X_u^x)}{\mathcal{C}X_u^x + \alpha Q^\top Q}^\top \mathrm{d}\binom{W_u}{u\mathrm{I}_p} \\
&= \int_0^t f(X_u^x)\,\mathrm{d}Z_u.
\end{aligned}$$

Donde es claro que $Z_u := \binom{W_u}{u\mathrm{I}_p}$ es una semimartingala continua.

Falta mostrar que f es localmente Lipschitz. Para una norma dada en $\mathcal{M}_p(\mathbb{R})$, definase la siguiente norma en $\mathcal{M}_{2p,p}(\mathbb{R})$ como

$$\left\|(Z,Y)^\top\right\|_{\mathcal{M}_{2p,p}(\mathbb{R})} = \|Z\|_{\mathcal{M}_p(\mathbb{R})} + \|Y\|_{\mathcal{M}_p(\mathbb{R})}, \forall Z, Y \in \mathcal{M}_p(\mathbb{R}).$$

Entonces para toda $S, R \in \mathcal{S}_p^+$ se tiene que

$$\|f(S) - f(R)\| = \|\mathcal{Z}_s - \mathcal{Z}_R\| + \|\mathcal{C}(S-R)\|.$$

Pero como $\mathcal{C}$ es un operador acotado (ya que $\dim S_p < \infty$), entonces

$$\|\mathcal{C}(S-R)\| \leq \|\mathcal{C}\| \|(S-R)\| \text{ con } \|\mathcal{C}\| < \infty.$$

Sea S, $R \in \mathcal{S}_p^+$. Para $Y \in \mathcal{M}_p(\mathbb{R})$ arbitrario se tiene que

$$\begin{aligned} \|(\mathcal{Z}_s - \mathcal{Z}_R)Y\| &= \left\|\left(\sqrt{S} - \sqrt{R}\right)YQ + Q^\top Y^\top \left(\sqrt{S} - \sqrt{R}\right)\right\| \\ &\leq 2\left\|\sqrt{S} - \sqrt{R}\right\| \|Y\| \|Q\|. \end{aligned}$$

Entonces

$$\|(\mathcal{Z}_S - \mathcal{Z}_R)\| = \sup_{Y \in \mathcal{M}_p(\mathbb{R}) - \{0\}} \frac{\|(\mathcal{Z}_s - \mathcal{Z}_R)Y\|}{\|Y\|} \leq 2\left\|\sqrt{S} - \sqrt{R}\right\| \|Q\|.$$

Sea $Z \in \mathcal{S}_p^+$. Como la función raíz cuadrada de una matriz es localmente Lipschitz, existe una vecindad abierta $\mathcal{U}(Z)$ de Z tal que para toda $S, R \in \mathcal{U}(Z)$

$$\left\|\sqrt{S} - \sqrt{R}\right\| \leq C(Z)\|S - R\|,$$

entonces

$$\begin{aligned} \|(\mathcal{Z}_s - \mathcal{Z}_R)\| &\leq 2C(Z)\|Q\|\|S-R\| \\ &= : C'(Z)\|S-R\|. \end{aligned}$$

Entonces f es localmente Lipschitz:

$$\begin{aligned}\|f(S)-f(R)\| &= \|\mathcal{Z}_s-\mathcal{Z}_R\|+\|\mathcal{C}(S-R)\| \\ &\leq C'(Z)\|S-R\|+\|\mathcal{C}\|\|(S-R)\| \\ &= \left(C'(Z)+\|\mathcal{C}\|\right)\|S-R\| \\ &= :K\|S-R\|. \end{aligned} \tag{2.9}$$

Hasta ahora se ha probado que se cumplen todas las hipótesis del Teorema 1.10. Se ha mostrado que existe un tiempo de paro T no cero tal que existe un único proceso $\mathcal{S}_p^+$-valuado que es solución fuerte de la ecuación (2.4) para $t\in[0,T)$. Si $T<\infty$, el teorema nos dice que S_T alcanza la frontera de $\mathcal{S}_p^+$ o explota. Se muestra ahora que S_T no puede explotar.

Fíjese $R\in\mathcal{U}(Z)$ y sea $S=Z$, entonces por (2.9)

$$\|f(Z)-f(R)\|\leq K(\|Z\|+\|R\|),$$

entonces

$$\begin{aligned}\|f(Z)-f(R)\|^2 &\leq K^2\left(\|Z\|^2++2\|R\|\|Z\|+\|R\|^2\right) \\ &\leq L\left(1+\|Z\|+\|Z\|^2\right),\end{aligned}$$

con $L=\max\left\{K^2\|R\|^2,2K^2\|R\|,K^2\right\}$. Como $\|Z\|\leq 1+\|Z\|^2$

$$\|f(Z)-f(R)\|^2\leq 2L\left(1+\|Z\|^2\right).$$

Entonces $Z\longmapsto f(Z)-f(R)$ satisface una condición de crecimiento lineal y por lo tanto también f. Se concluye que la solución toca la frontera de $\overline{\mathcal{S}_p^+}$ cuando $t\to T$ c.s. ■

Obsérvese que se concluye que el proceso de Wishart existe siempre que se mantenga en $\mathcal{S}_p^+$. Para mostrar que el proceso de Wishart general existe en $[0,\infty)$ se proporcionan condiciones para que X_t^x se mantenga siempre en $\mathcal{S}_p^+$. Pero antes los siguientes dos resultados.

Teorema 2.2 *Para todo valor inicial $x\in\mathcal{S}_p^+$ existe un tiempo de paro $T>0$ y una única solución fuerte a la ecuación diferencial estocástica de Wishart en $[0,T)$. Supóngase que $T<\infty$. Entonces* *existe una única solución fuerte $(X_t^x)_{t\in[0,T]}$ de la ecuación de Wishart en $[0,T)$ tal que $X_t^x \in \mathcal{S}_p^+$ para toda $t \in [0,T)$ y $X_T^x \in \partial\mathcal{S}_p^+$. Entonces para toda $z \in \mathbb{R}^d$ con $z^\top Q^\top Qz = 1$ el proceso $\left(z^\top X_t^x z\right)_{t\in(0,T]}$ es un proceso cuadrado de Bessel con de dimensión α y condición inicial $z^\top xz$, $\left(z^\top X_t^x z\right)_{t\in(0,T]} \sim BESQ\left(\alpha, z^T xz\right)$. Además, si $\alpha \geq 2$, el proceso $\left(z^\top X_t^x z\right)_{t\in(0,T]}$ pertenece positivo casi seguramente. Además, sí $Q \in \mathcal{G}_p(\mathbb{R})$ entonces para toda $y \in \mathbb{R}^p, y \neq 0$ se cumple $y^\top X_t^x y > 0$ para toda $t \in [0,T]$ c.s.*

Demostración. La solución requerida se obtiene por el Teorema 2.1. Sea $z \in \mathbb{R}^p$ vector arbitrario con $z^\top Q^\top Qz = 1$. La derivada de la función $X \longmapsto z^\top Xz \in \mathbb{R}$ es

$$D\left(z^\top Xz\right) = (z_i z_j)_{i,j} = zz^\top$$

y por lo tanto sus segundas derivadas son cero.

Por la fórmula de Itô (Teorema 1.8):

$$\begin{aligned}
d\left(x^\top S_t x\right) &= \operatorname{Tr}\left(xx^\top \mathrm{d}S_t\right) \\
&= \operatorname{Tr}\left(Qxx^\top \sqrt{S_t}\mathrm{d}B_t\right) + \operatorname{Tr}\left(\sqrt{S_t}xx^\top Q^\top \mathrm{d}B_t^\top\right) + \operatorname{Tr}\left(xx^\top \alpha Q^\top Q\mathrm{d}t\right) \\
&= 2\operatorname{Tr}\left(Qxx^\top \sqrt{S_t}dB_t\right) + \operatorname{Tr}\left(xx^\top \alpha Q^\top Q\mathrm{d}t\right) \\
&= 2\sqrt{\operatorname{Tr}\left(S_t xx^\top Q^\top Qxx^\top\right)}\mathrm{d}B_t + \alpha \operatorname{Tr}\left(x^\top Q^\top x\right)\mathrm{d}t \qquad (2.10) \\
&= 2\sqrt{\operatorname{Tr}\left(S_t xx^\top\right)}\mathrm{d}B_t + \alpha \mathrm{d}t.
\end{aligned}$$

Se utilizó el Lema 1.2 en (2.10). Entonces $\left(z^\top X_t^x z\right)_{t\in[0,T]} \sim BESQ\left(\alpha, z^\top xz\right)$.

Si $\alpha \geq 2$, por Teorema 1.17, el proceso $\left(z^\top X_t^x z\right)_{t\in[0,T]}$ es estrictamente positivo para toda $t \in [0,T]$ c.s. porque la condición inicial es mayor que cero.

Supóngase que $Q \in \mathcal{G}_p(\mathbb{R})$. Para $y \in \mathbb{R}^p$, $y \neq 0$, entonces para $z = \left(y^\top Q^\top Qy\right)^{-\frac{1}{2}} y$ se cumple que $z^\top Qz = 1$ y por lo anterior $z^\top Qz > 0$ $\forall t \in [0,T]$ c.s. Entonces también se obtiene que $y^\top X_t^x y > 0$ $\forall t \in [0,T]$. ■

Teorema 2.3 *La traza del proceso de Wishart estándar $(S_t)_{t\geq 0}$ es un proceso cuadrado de Bessel de dimensión αp.*

Demostración. Con la notación de la fórmula de Itô (Teorema 1.8) y Lema 1.2, sea $h(X) = \mathrm{Tr}X$, entonces $Dh = \mathrm{I}_p$ y las segundas derivadas de h son cero. Aplicando la fórmula de Itô:

$$\begin{aligned} \mathrm{d}(\mathrm{Tr}S_t) &= \mathrm{Tr}(\mathrm{d}S_t) \\ &= 2\mathrm{Tr}\left(\sqrt{S_t}\mathrm{d}W_t\right) + \mathrm{Tr}(\alpha \mathrm{I}_p)\,\mathrm{d}t \\ &= 2\mathrm{Tr}\left(\sqrt{S_t}\mathrm{d}W_t\right) + \alpha p \mathrm{d}t \\ &= 2\mathrm{Tr}(S_t)\,\mathrm{d}\beta_t + \alpha p \mathrm{d}t. \end{aligned}$$

Por lo tanto $\mathrm{Tr}S_t$ es un proceso cuadrado de Bessel de dimensión αp y condición inicial $\mathrm{Tr}S_0$. ∎

A continuación se enuncia el resultado que asegura la existencia de solución fuerte a la ecuación (2.6) en toda la recta positiva. Este resultado da como caso particular la existencia y unicidad del proceso de Wishart general en $[0,\infty)$.

Teorema 2.4 *Sean $b \in \mathcal{S}_p$, $Q, K \in \mathcal{M}_p$ y consideremos la ecuación (2.6) en donde:*

i) J es un proceso cádlág adaptado con valores en $\mathcal{S}_p$ el cuál es $\overline{\mathcal{S}_p^+}$ − creciente y de tipo puro salto,

ii) $\Gamma : \mathcal{S}_p^+ \longrightarrow \overline{\mathcal{S}_p^+}$ una función localmente Lipschitz con crecimiento lineal,

iii) $g : \mathcal{S}_p^+ \longrightarrow \mathbb{R}^+$ una función localmente Lipschitz con crecimiento lineal.

Si $b \geq (p+1)\,Q^\top Q$, entonces la (2.6) tiene una única solución fuerte $(X_t^x)_{t\in\mathbb{R}^+}$ en $\mathcal{S}_p^+$ la cual es adaptada y cádlág. En particular se tiene que

$$\begin{aligned} T_x \quad : &= \inf\left\{t \geq 0 : X_{t-}^x \in \partial\mathcal{S}_p^+ \text{ ó } X_t^x \notin \mathcal{S}_p^+\right\} \\ &= \inf\left\{t \geq 0 : X_{t-}^x \in \partial\mathcal{S}_p^+\right\} = \infty \ \ c.s. \end{aligned}$$

Demostración. Por facilidad en la notación, en esta demostración se denota X_t^x como X_t.

Como los coeficientes de (2.6) son localmente Lipschtiz y por el crecimiento lineal, teoría estándar de ecuaciones diferenciales estocásticas implica la existencia de un única solución fuerte local adaptada, cádlág no explosiva hasta el tiempo de paro T_x. La demostración detallada de estas afirmaciones sigue la misma línea de ideas que el Teorema 2.1. Entonces solamente basta mostrar que $T_x = \infty$ c.s. Para ello se hace uso de una generalización del argumento de McKean (Teorema 1.3).

De las suposiciones sobre g y J, se tiene que todos los saltos deben ser semipostivos definidos y por lo tanto la solución no puede salirse de $\mathcal{S}_p^+$. Esto implica que

$$T_x = \inf\left\{t \geq 0 : X_{t-}^x \in \partial\mathcal{S}_p^+\right\}.$$

Por la continuidad por la derecha de X_t, $T_x > 0$ c.s.

Sea

$$T_n = \inf\left\{t \in \mathbb{R}^+ : \mathrm{d}\left(X_t, \partial S_p^+\right) \leq n \text{ ó } \|X_t\| \geq n\right\}.$$

Entonces $(T_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es una sucesión creciente de tiempos de paro tal que

$$\lim_{n\to\infty} T_n = T_x,$$

por lo que T_x es predecible.

Introduzcamos la siguiente notación:

$$\begin{aligned} Z_t &:= \det\left(e^{-Kt} X_t e^{-K^\top t}\right), \\ h(z) &:= \ln(z), \\ r_t &:= h(Z_t), \end{aligned}$$

con lo que T_x se reescribe como

$$T_x = \inf\{t > 0 : r_{t-} = 0\}.$$

Por el Lema 2.1 (i) se obtiene

$$\mathrm{Tr}\left(\nabla\left(\det\left(X_{t-}\right)\right) dX_t^c\right) = \det\left(X_{t-}\right)\left[2\sqrt{\mathrm{Tr}\left(Q^\top Q X_{t-}^{-1}\right)}\mathrm{d}W_t + \mathrm{Tr}\left(\left(b + \Gamma\left(X_{t-}\right)\right) X_{t-}^{-1}\right) + 2\mathrm{Tr}\left(K\right)\right]\mathrm{d}t$$

para algún movimiento browniano unidimendional W en $[0, T_x)$ dado por el Lema 1.1. Además, por el Lema 2.1 (ii), el Lema 2.3 y cálculos directos se obtiene

$$\frac{1}{2}\sum_{i,j,k,l}\frac{\partial^2}{\partial x_{ij}\partial x_{kl}}\det\left(X_{t-}\right)\mathrm{d}\left[X_{ij}, X_{kl}\right]_t^c = \det\left(X_{t-}\right)\left[(1-p)\operatorname{Tr}\left(Q^\top Q\right)X_{t-}^{-1}\right]\mathrm{d}t.$$

Por la fórmula de Itô (Teorema 1.7) y sumando las dos últimas ecuaciones se obtiene lo siguiente,

$$\begin{aligned} d\left(\det\left(X_t\right)\right) &= 2\det\left(X_{t-}\right)\sqrt{\operatorname{Tr}\left(Q^\top Q X_{t-}^{-1}\right)}\mathrm{d}W_t + \det\left(X_t\right) - \det\left(X_{t-}\right) \\ &\quad + \det\left(X_{t-}\right)\left[\operatorname{Tr}\left(\left(b + \Gamma\left(X_{t-}\right) + (1-p)\,Q^\top Q\right)X_{t-}^{-1}\right) + 2\operatorname{Tr}\left(K\right)\right]\mathrm{d}t. \end{aligned}$$

Usando nuevamente la fórmula de Itô se tiene

$$\begin{aligned} d\left(\ln\left(\det\left(X_t\right)\right)\right) &= 2\sqrt{\operatorname{Tr}\left(Q^\top Q X_{t-}^{-1}\right)}\mathrm{d}W_t + \ln\left(\det\left(X_t\right)\right) - \ln\left(\det\left(X_{t-}\right)\right) \\ &\quad + \operatorname{Tr}\left[\left(b + \Gamma\left(X_{t-}\right) - (p+1)\,Q^\top Q\right)X_{t-}^{-1}\right]\mathrm{d}t + 2\operatorname{Tr}\left(K\right)\mathrm{d}t. \end{aligned}$$

Recuérdese que la matriz exponencial satisface $\det\left(e^A\right) = e^{\operatorname{Tr}A}$ para $A \in \mathcal{M}_p$. Usando esta propiedad de la matriz exponencial se demuestra que

$$r_t = \ln\left(\det\left(X_t\right)\right) - 2\operatorname{Tr}\left(K\right)t$$

y por lo tanto r satisface la siguiente ecuación:

$$\begin{aligned} \mathrm{d}r_t &= 2\sqrt{\operatorname{Tr}\left(Q^\top Q X_{t-}^{-1}\right)}\mathrm{d}W_t + \operatorname{Tr}\left[\left(b + \Gamma\left(X_{t-}\right) - (p+1)\,Q^\top Q\right)X_{t-}^{-1}\right]\mathrm{d}t \\ &\quad + \ln\left(\det\left(X_t\right)\right) - \ln\left(\det\left(X_{t-}\right)\right). \end{aligned}$$

Definamos

$$\begin{aligned} M_t &= 2\int_0^t \sqrt{\operatorname{Tr}\left(Q^\top Q X_{s-}^{-1}\right)}\mathrm{d}W_s \text{ y} \\ P_t &= \int_0^t \operatorname{Tr}\left[\left(b + \Gamma\left(X_{s-}\right) - (p+1)\,Q^\top Q\right)X_{s-}^{-1}\right]\mathrm{d}s + \sum_{0<s\le t}\ln\left(\det\left(X_s\right)\right) - \ln\left(\det\left(X_{s-}\right)\right). \end{aligned}$$

Como

$$M_t^{(n)} = \int_0^t \sqrt{\operatorname{Tr}\left(Q^\top Q \left(X_{s-}^{T_n}\right)^{-1}\right)}\mathrm{d}W_s, \ t \geq 0$$

es una martingala continua y satisface que $M_t = M_t^{(n)}$ en $\{t < T_n\}$, entonces M es martingala local en $[0, T_x)$. En forma similar se puede mostrar que P es no negativa y localmente acotada en $[0, T_x)$ y que para toda $s \in [0, T)$, $X_s - X_{s-} \geq 0$; por lo tanto $\det(X_s) \geq \det(X_{s-})$ usando el Corolario A.1.

Finalmente por la generalización del Argumento de McKean (Teorema 1.3) se tiene que $T_x = \infty$.

■

La existencia del proceso de Wishart general en $\mathbb{R}^+$ se sigue entonces del teorema anterior al elegir $g \equiv 0$, $\Gamma \equiv \bar{0}$ y $b = \alpha Q^\top Q$. Este resultado se enuncia a continuación.

Teorema 2.5 (Existencia y Unicidad de Wishart II) *Para todo valor inicial $x \in \mathcal{S}_p^+$ y $\alpha \geq p+1$ existe una única solución fuerte a la ecuación diferencial estocástica de Wishart en el cono $\mathcal{S}_p^+$.*

En esta sección se han presentado los teoremas de existencia fuerte y unicidad del proceso de Wishart general que fueron probados por Pfaffel [21] y por Mayerhofer, Pfaffel y Stelzer [17].

Cabe hacer mención que en [17] se demostró que para $\alpha \geq p-1$ existe una solución débil a la ecuación diferencial estocástica de Wishart, mientras que aquí se pide $\alpha \geq p+1$ para la existencia fuerte del proceso de Wishart en $\mathbb{R}^+$.

A partir de ahora, mientras no se exprese otra cosa, siempre que se invoque un proceso de Wishart se supondrá lo necesario para que el proceso de Wishart exista.

A continuación se describe una caracterización del proceso de Wishart general. Una versión de este resultado se puede encontrar sin demostración en [5, pág 746].

Teorema 2.6 (Caracterización del Proceso de Wishart) *Las siguientes dos afirmaciones son equivalentes:*

i) *X_t^x es solución de (2.4).*

ii) *M_t es una martingala local continua cuadrado integrable y*

$$dX_t^x = \mathrm{d}M_t + \left(X_t^x K + K^\top X_t^x + \alpha Q^\top Q\right)\mathrm{d}t$$
$$\mathrm{d}\left[X_{ij}^x, X_{kl}^x\right]_t = X_{t,ik}^x \left(Q^\top Q\right)_{jl}\mathrm{d}t + X_{t,il}^x \left(Q^\top Q\right)_{jk}\mathrm{d}t + X_{t,jk}^x \left(Q^\top Q\right)_{il}\mathrm{d}t + X_{t,jl}^x \left(Q^\top Q\right)_{ik}\mathrm{d}t.$$

Demostración. Si X_t^x es solución de (2.4) entonces la afirmación *ii*) es cierta porque X_t^x es una semimartingala continua cuadrado integrable y en este caso M_t definida como

$$\mathrm{d}M_t = \sqrt{X_t^x}\mathrm{d}W_t Q + Q^\top \mathrm{d}W_t^\top \sqrt{X_t^x}$$

es la parte martingala local de la solución. La expresión $\mathrm{d}\left[X_{ij}^x, X_{kl}^x\right]_t$ se sigue del Lema 2.2.

Si la afirmación *ii*) es cierta entonces el recíproco es intuitivamente claro porque

$$\mathrm{d}\left[X_{ij}^x, X_{kl}^x\right]_t = \mathrm{d}\left[\textit{Parte martingala de } X_{ij}^x, \textit{Parte martingala de } X_{kl}^x\right]_t$$

ya que los términos que contengan la parte de variación finita de X_{ij}^x se anulan. Aquí lo que se busca es obtener una especie de recíproco del lema 2.2 y encontrar que $\mathrm{d}M_t = \sqrt{X_t^x}\mathrm{d}W_t Q + Q^\top \mathrm{d}W_t^\top \sqrt{X_t^x}$. Ésto se hace mostrando que las hipótesis del Teorema 1.5 se cumplen con $d = p^2$.

Considérese el proceso

$$\Psi_{ij,kl}(t) := \left(\sqrt{X_t}\right)_{ik} Q_{lj} + Q_{li}\left(\sqrt{X_t}\right)_{kj}$$

con $i,j,k,l \in \{1,2,...,p\}$ que cumple $\int_0^t \left|\Psi_{ij,kl}(s)\right|^2 \mathrm{d}s < \infty$ porque $(X_t)_{t\geq 0}$ lo cumple y porque $\left|\Psi_{i,k}(t)\right|^2$ es una combinación lineal de X_t.

Sea

$$
\begin{aligned}
\Phi_{ij,kl}(t) \quad : &= \sum_{r,q} \Psi_{ij,rq}(t)\,\Psi_{kl,rq}(t) \\
&= \sum_{r,q}\left[\left(\sqrt{X_t}\right)_{ir} Q_{qj} + Q_{qi}\left(\sqrt{X_t}\right)_{rj}\right]\left[\left(\sqrt{X_t}\right)_{kr} Q_{ql} + Q_{qk}\left(\sqrt{X_t}\right)_{rl}\right] \\
&= \sum_{r,q}\left(\sqrt{X_t}\right)_{ir}\left(\sqrt{X_t}\right)^{\top}_{rk} Q^{\top}_{jq}Q_{ql} + \sum_{r,q}\left(\sqrt{X_t}\right)_{ir}\left(\sqrt{X_t}\right)_{rl} Q^{\top}_{jq}Q_{qk} \\
&\quad + \sum_{r,q}\left(\sqrt{X_t}\right)_{kr}\left(\sqrt{X_t}\right)_{rj} Q^{\top}_{iq}Q_{ql} + \sum_{r,q}\left(\sqrt{X_t}\right)^{\top}_{jr}\left(\sqrt{X_t}\right)_{rl} Q^{\top}_{iq}Q_{qk} \\
(X_t \text{ es simétrica}) \quad &= \sum_{q}(X_t)_{ik} Q^{\top}_{jq}Q_{ql} + \sum_{q}(X_t)_{il} Q^{\top}_{jq}Q_{qk} \\
&\quad + \sum_{q}(X_t)_{kj} Q^{\top}_{iq}Q_{ql} + \sum_{q}(X_t)_{jl} Q^{\top}_{iq}Q_{qk} \\
&= (X_t)_{ik}\left(Q^{\top}Q\right)_{jl} + (X_t)_{il}\left(Q^{\top}Q\right)_{jk} + (X_t)_{kj}\left(Q^{\top}Q\right)_{il} + (X_t)_{jl}\left(Q^{\top}Q\right)_{ik}.
\end{aligned}
$$

Obsérvese que $\int_0^t |\Phi_{ij,kl}(s)|\,\mathrm{d}s < \infty$ porque $(X_t)_{t\geq 0}$ lo cumple y porque $|\Phi_{ij,kl}(t)|$ es una combinación lineal de X_t. De estos cálculos se obtiene que se cumple la siguiente igualdad

$$
[M_{ij}, M_{kl}]_t = \int_0^t \Phi_{i,j}(s)\,\mathrm{d}s.
$$

Entonces por el Teorema 1.5 existe un movimiento browniano matricial $W \in \mathcal{M}_{p\times p}(\mathbb{R})$ tal que

$$
\begin{aligned}
\mathrm{d}M_{ij}(t) &= \sum_{kl} \Psi_{ij,kl}(t)\,\mathrm{d}W_{kl}(t) \\
&= \sum_{kl}\left[\left(\sqrt{X_t}\right)_{ik} Q_{lj} + Q_{li}\left(\sqrt{X_t}\right)_{kj}\right]\mathrm{d}W_{kl}(t) \\
&= \sum_{kl}\left(\sqrt{X_t}\right)_{ik}\mathrm{d}W_{kl}(t)\,Q_{lj} + \sum_{kl} Q_{ki}\mathrm{d}W_{lk}(t)\left(\sqrt{X_t}\right)_{lj} \\
&= \left(\sqrt{X_t}\mathrm{d}W_t Q\right)_{ij} + \left(Q^{\top}\mathrm{d}W_t^{\top}\sqrt{X_t}\right)_{ij}
\end{aligned}
$$

Entonces $X \sim WIS_p(x, \alpha, K, Q)$. $\blacksquare$

2.3 Generador Infinitesimal

En esta sección se presenta el generador infinitesimal del proceso de Wishart y se expone en un caso particular una forma de separar el generador infinitesimal en operadores simples.

El generador infinitesimal del proceso de Wishart (Definición B.8) es el siguiente [1, pág 3].

Proposición 2.1 (Generador Infinitesimal en $\mathcal{M}_p(\mathbb{R})$) *El generador infinitesimal en $\mathcal{M}_p(\mathbb{R})$ asociado a $X \sim WIS_p(x, \alpha, K, Q)$ es*

$$L^{\mathcal{M}} = \operatorname{Tr}\left(\left[\alpha Q^\top Q + \left(K^\top x + xK\right)\right] D^{\mathcal{M}}\right) + \frac{1}{2}\left\{\begin{array}{c} 2\operatorname{Tr}\left(xD^{\mathcal{M}}Q^\top Q D^{\mathcal{M}}\right) + \\ \operatorname{Tr}\left(x\left(D^{\mathcal{M}}\right)^\top Q^\top Q D^{\mathcal{M}}\right) \\ +\operatorname{Tr}\left(xD^{\mathcal{M}}Q^\top Q\left(D^{\mathcal{M}}\right)^\top\right) \end{array}\right\}, \tag{2.11}$$

donde $D^{\mathcal{M}} = (\partial_{i,j})_{1\le i,j\le p}$.

Demostración. *La parte de deriva de $L^{\mathcal{M}}$ es*

$$\sum_{k,l=1}^{p}\left(\alpha Q^\top Q\right)_{kl}\partial_{kl} + \sum_{k,l=1}^{p}\left(K^\top x + xK\right)_{kl}\partial_{kl} = \operatorname{Tr}\left(\left[\alpha Q^\top Q + \left(K^\top x + xK\right)\right] D^{\mathcal{M}}\right).$$

La parte de difusión del operador $L^{\mathcal{M}}$ se obtiene del Lema 2.2:

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{2}\sum_{n,m,i,j=1}^{p}\left[X_{t,im}^{x}\left(Q^\top Q\right)_{jn} + X_{t,in}^{x}\left(Q^\top Q\right)_{jm} + X_{t,jm}^{x}\left(Q^\top Q\right)_{in} + X_{t,jn}^{x}\left(Q^\top Q\right)_{im}\right]\partial_{ij}\partial_{mn}\\
=\ &\frac{1}{2}\sum_{n,m,i,j=1}^{p}X_{t,im}^{x}\left(Q^\top Q\right)_{jn}\partial_{ij}\partial_{mn} + \frac{1}{2}\sum_{n,m,i,j=1}^{p}X_{t,in}^{x}\left(Q^\top Q\right)_{jm}\partial_{ij}\partial_{mn}\\
&+\frac{1}{2}\sum_{n,m,i,j=1}^{p}X_{t,jm}^{x}\left(Q^\top Q\right)_{in}\partial_{ij}\partial_{mn} + \frac{1}{2}\sum_{n,m,i,j=1}^{p}X_{t,jn}^{x}\left(Q^\top Q\right)_{im}\partial_{ij}\partial_{mn}\\
=\ &\frac{1}{2}\left[\operatorname{Tr}\left(xD^{\mathcal{M}}Q^\top Q\left(D^{\mathcal{M}}\right)^\top\right) + \operatorname{Tr}\left(xD^{\mathcal{M}}Q^\top QD^{\mathcal{M}}\right) + \operatorname{Tr}\left(xD^{\mathcal{M}}Q^\top QD^{\mathcal{M}}\right) + \operatorname{Tr}\left(x\left(D^{\mathcal{M}}\right)^\top Q^\top QD^{\mathcal{M}}\right)\right]\\
=\ &\frac{1}{2}\left[\operatorname{Tr}\left(xD^{\mathcal{M}}Q^\top Q\left(D^{\mathcal{M}}\right)^\top\right) + 2\operatorname{Tr}\left(xD^{\mathcal{M}}Q^\top QD^{\mathcal{M}}\right) + \operatorname{Tr}\left(x\left(D^{\mathcal{M}}\right)^\top Q^\top QD^{\mathcal{M}}\right)\right].
\end{aligned}$$

■

Se sabe que el proceso de Wishart toma valores en $\mathcal{S}_p^+ \subset \mathcal{S}_p$. Bajo esa afirmación se puede buscar el generador infinitesimal del proceso de Wishart en $\mathcal{S}_p$ (Definición B.9).

Para $f : \mathcal{S}_p \to \mathbb{R}$ dos veces continuamente diferenciable denótese como $\partial_{\{i,j\}} f$ la derivada con respecto a las coordenadas $x_{\{i,j\}}$. Sea

$$\begin{array}{rcl} \pi & : & \mathcal{M}_p(\mathbb{R}) \to \mathcal{S}_p \\ x & \to & \dfrac{x + x^\top}{2}, \end{array}$$

entonces $\pi(x) = x$ solo para $x \in \mathcal{S}_p$. Es claro que $f \circ \pi$ es dos veces continuamente diferenciable y

$$L^{\mathcal{S}} f(x) = L^{\mathcal{M}} f \circ \pi(x).$$

Por la regla de la cadena, se tiene que para $x \in \mathcal{S}_p$, $\partial_{ij} f \circ \pi(x) = \left(1_{i=j} + \frac{1}{2} 1_{i \neq j}\right) \partial_{\{i,j\}} f(x)$. Se obtiene el siguiente resultado.

Corolario 2.1 (Generador Infinitesimal en $\mathcal{S}_p$) *El generador infinitesimal en $\mathcal{S}_p(\mathbb{R})$ asociado a $X \sim WIS_p(x, \alpha, K, Q)$ es*

$$L^{\mathcal{S}} = \mathrm{Tr}\left(\left[\alpha Q^\top Q + \left(K^\top x + xK\right) D^{\mathcal{S}}\right]\right) + 2\mathrm{Tr}\left(x D^{\mathcal{S}} Q^\top Q D^{\mathcal{S}}\right), \tag{2.12}$$

donde $D^{\mathcal{S}}$ está definido como $D^{\mathcal{S}}_{i,j} = \left(1_{i=j} + \frac{1}{2} 1_{i \neq j}\right) \partial_{\{i,j\}}$, para $1 \leq i, j \leq p$.

La ventaja de utilizar el operador $L^{\mathcal{S}}$ es que contiene la información de que el proceso de Wishart se encuentra en las matrices simétricas y además facilita los cálculos, por lo que a partir de ahora se hace uso solamente del generador $L^{\mathcal{S}}$ y se escribirá L.

El siguiente teorema explica cómo separar el generador infinitesimal de un proceso $X_t^x \sim WIS_p\left(x, \alpha, 0, \mathrm{I}_p^n\right)$ como la suma de generadores infinitesimales de procesos más simples que conmutan. Este resultado es fundamental para generar el proceso de Wishart general.

Teorema 2.7 *Sea L el generador infinitesimal asociado al proceso de Wishart $WIS_p\left(x, \alpha, 0, \mathrm{I}_p^n\right)$ y L_i el generador asociado a $WIS_p\left(x, \alpha, 0, e_p^i\right)$ para $i \in \{1, ..., p\}$. Entonces se tiene*

$$L = \sum_{i=1}^{p} L_i \;\; y \;\; (\forall i, j) \;\; L_i L_j = L_j L_i. \tag{2.13}$$

Demostración. *Por la expresión de L dada en el Corolario 2.1 y como $\mathrm{I}_p^n = \sum_{i=1}^n e_p^i$ se obtiene que*

$L = \sum_{i=1}^{p} L_i$. *Para mostrar la conmutatividad es necesario hacer un cálculo directo pero laborioso. Para la demostración completa refiérase a [1, Teorema 10, pág 7].* ■

Más allá de la conmutatividad, otras dos propiedades de (2.13) que son importantes notar son:

i) Los operadores L_i y L_j son los mismos a excepción de cambios de coordenadas i, j.

ii) Los procesos $WIS_p\left(x, \alpha, 0, \mathrm{I}_p^n\right)$ y $WIS_p\left(x, \alpha, 0, e_p^i\right)$ están bien definidos bajo la misma hipótesis $\alpha \geq p-1$ y $x \in \overline{\mathcal{S}_p^+}$.

Esta segunda propiedad permite la composición que se explica a continuación. Considérese $t > 0$ y $x \in \overline{\mathcal{S}_p^+}$. Definiendo iterativamente

$$\begin{aligned}
X_t^{1,x} &\sim WIS_p\left(x, \alpha, 0, e_p^1; t\right), \\
X_t^{2, X_t^{1,x}} &\sim WIS_p\left(X_t^{1,x}, \alpha, 0, e_p^2; t\right), \\
X_t^{3, X_t^{2, X_t^{1,x}}} &\sim WIS_p\left(X_t^{1,x}, \alpha, 0, e_p^2; t\right), \\
&\dots \\
X_t^{n, \dots, X_t^{1,x}} &\sim WIS_p\left(X_t^{n-1, \dots, X_t^{1,x}}, \alpha, 0, e_p^n; t\right).
\end{aligned}$$

Proposición 2.2 *Sea $X_t^{n, \dots, X_t^{1,x}}$ definido como arriba. Entonces*

$$X_t^{n, \dots, X_t^{1,x}} \sim WIS_p\left(x, \alpha, 0, \mathrm{I}_p^n; t\right).$$

Nótese que gracias a esta proposición se puede generar una muestra de acuerdo a $WIS_p\left(x, \alpha, 0, \mathrm{I}_p^n; t\right)$ si es que se pueden generar matrices con distribución $WIS_p\left(x, \alpha, 0, e_p^n; t\right)$. Estas leyes son las mismas que $WIS_p\left(x, \alpha, 0, \mathrm{I}_p^1; t\right)$, salvo por la permutación de la primera e i-ésima coordenada. En la Sección 4.1 se explica como generar variables aleatorias con distribución $WIS_p\left(x, \alpha, 0, \mathrm{I}_p^1; t\right)$.

Capítulo 3

Propiedades Distribucionales del Proceso de Wishart

En este capítulo se presenta la transformada de Laplace del proceso de Wishart. Se enuncian diversos resultados relacionados con las propiedades distribucionales del proceso de Wishart. Se muestra que los momentos del proceso de Wishart en el caso estándar pueden ser calculadas por recurrencia al multiplicar entre sí algunas matrices que se proporcionan explícitamente. La técnica para encontrar los momentos está basada en el cálculo de Itô y permite calcular los momentos de la forma $\mathbb{E}\left(X_t^x\right)^k$ y la esperanza de los polinomios

$$R_I\left(X_t\right) = \left(\mathrm{Tr}\left(X_t\right)\right)^{i_1}\left(\mathrm{Tr}\left(X_t^2\right)\right)^{i_2}\ldots\left(\mathrm{Tr}\left(X_t^{k+1}\right)\right)^{i_{k+1}} X_t^j$$

donde I es un multi-índice $I = (j, \mathbf{i}) = (j, i_1, i_2, ..., i_{k+1})$.

Los resultados principales de este capítulo se encuentran en [1] y [25].

3.1 Transformada de Laplace y Transformaciones Lineales

Esta sección inicia con la expresión de la transformada de Laplace:

Proposición 3.1 (Transformada de Laplace) *Sea* $X_t^x \sim WIS_p\left(x, \alpha, K, Q; t\right)$,

$$q_t = \int_0^t \exp\left(sK^\top\right) Q^\top Q \exp\left(sK\right) \mathrm{d}s$$

y

$$m_t = \exp\left(tK^\top\right).$$

Se introduce el conjunto de convergencia de la transformada de Laplace de X_t^x:

$$\mathcal{D}_{K,Q;t} = \{v \in \mathcal{S}_p(\mathbb{R}) : \mathbb{E}\left[\exp\left(\operatorname{Tr}\left(vX_t^x\right)\right)\right] < \infty\}.$$

Entonces $\mathcal{D}_{K,Q;t}$ es un conjunto convexo abierto y está dado explícitamente por

$$\mathcal{D}_{K,Q;t} = \{v \in \mathcal{S}_p : \forall s \in [0,t] \;\; \mathrm{I}_p - 2q_s v \in \mathcal{G}_p(\mathbb{R})\}. \tag{3.1}$$

Además la transformada de Laplace de X_t^x está bien definida para $v = v_R + iv_I$ con $v_R \in \mathcal{D}_{K,Q;t}$, $v_I \in \mathcal{S}_p(\mathbb{R})$ y está dada por

$$\mathbb{E}\left[\exp\left(\operatorname{Tr}\left(vX_t^x\right)\right)\right] = \frac{\exp\left(\operatorname{Tr}\left[v\left(\mathrm{I}_p - 2q_t v\right)^{-1} m_t x m_t^\top\right]\right)}{\det\left(\mathrm{I}_p - 2q_t v\right)^{\frac{\alpha}{2}}}. \tag{3.2}$$

Nótese que para $\tilde{X}_t^x \sim WIS_p\left(x, \alpha, 0, \mathrm{I}_p^n; t\right)$, la fórmula (3.2) es simple y se tiene que para $v = v_R + iv_I$ tal que $v_R \in \mathcal{D}_{b,a;t}$, $v_I \in \mathcal{S}_p$:

$$\mathbb{E}\left[\exp\left(\operatorname{Tr}\left(v\tilde{X}_t^x\right)\right)\right] = \frac{\exp\left(\operatorname{Tr}\left[v\left(\mathrm{I}_p - 2t\mathrm{I}_p^n v\right)^{-1} x\right]\right)}{\det\left(\mathrm{I}_p - 2t\mathrm{I}_p^n v\right)^{\frac{\alpha}{2}}}. \tag{3.3}$$

Demostración. *La idea de la demostración es utilizar que la transformada de Laplace se puede expresar en términos de soluciones ecuaciones diferenciales ordinarias. Estas ecuaciones se pueden resolver explícitamente en el caso del proceso de Wishart general. Demostración completa en [1, pág 31, proposición 5].* ■

Observación 3.1 *La transformada de Laplace de $X_t^x \sim WIS_p(x, n, K, Q; t)$ para $n \in \mathbb{N}$ es la transformada de Laplace de $Y \sim WIS_p\left(n, q_t, q_t^{-1} m_t x m_t\right)$ (utilizando Teorema B.1) es decir que X_t^x se distribuye como Wishart no central. Para $\alpha \in \mathbb{R}^+$ se distribuye como una extensión de una Wishart no central.*

Las siguientes proposiciones son propiedades distribucionales de un proceso afín (Definición 2.4), en particular aplican para un proceso de Wishart.

Proposición 3.2 *Las siguientes identidades se cumplen:*

i) $AFF_p(x, \overline{\alpha}, B, a) \overset{\mathcal{L}}{=} AFF_p\left(x, \overline{\alpha}, B, \sqrt{a^\top a}\right)$ *(igualdad en ley).*

ii) (Transformación lineal) Sea $q \in \mathcal{G}_p(\mathbb{R})$, *entonces*

$$q^\top AFF_p(x, \overline{\alpha}, B, a)\, q \overset{\mathcal{L}}{=} AFF_p\left(q^\top x q, q^\top \overline{\alpha} q, B_{q^{-1}}, aq\right)$$

donde $B_{q^{-1}}$ *esta definido como* $\forall y \in \mathcal{S}_p(\mathbb{R})$, $B_{q^{-1}} \overset{\mathcal{L}}{=} q^\top B\left(\left(q^\top\right)^{-1} y q^{-1}\right) q$.

Demostración. [1, Proposición 7] ■

Una consecuencia importante de la Proposición 3.2 es que un proceso afín se puede expresar como una transformación lineal de un proceso afín mucho más simple. Esta afirmación se describe en el siguiente corolario.

Corolario 3.1 *Sea* $X \sim AFF_p(x, \overline{\alpha}, B, a)$ *y* $n = \mathrm{Rk}(a)$ *el rango de* $a^\top a$. *Entonces existe una matriz diagonal* $\overline{\delta}$ *y* $u \in \mathcal{G}_p(\mathbb{R})$ *tal que* $\overline{\alpha} = u^\top \delta u$, *y* $a^\top a = u^\top \mathrm{I}_p^n u$, *y se tiene que:*

$$(X_t^x)_{t \geq 0} \underset{ley}{=} u^\top AFF\left(\left(u^{-1}\right)^\top x u^{-1}, \overline{\delta}, B_u, \mathrm{I}_p^n\right) u,$$

donde $\forall y \in \mathcal{S}_p(\mathbb{R})$ $B_u = \left(u^{-1}\right)^\top B\left(u^\top y u\right) u^{-1}$.

Demostración. [1, Corolario 8] ■

La siguiente proposición es crucial para la generación del proceso de Wishart sin alguna restricción en los parámetros. Utilizando (3.4) se puede generar cualquier distribución de Wishart si se puede muestrear exactamente la distribución de $WIS_p\left(x, \alpha, 0, \mathrm{I}_p^n; t\right)$ para toda $x \in \overline{\mathcal{S}_p^+}$.

Proposición 3.3 *Sea* $t > 0$ $K, Q \in \mathcal{M}_p(\mathbb{R})$ *y* $\alpha \geq p - 1$. *Sea*

$$m_t = \exp\left(tK^\top\right),$$

$$q_t = \int_0^t \exp\left(sK^\top\right) Q^\top Q \exp(sK)\, \mathrm{d}s$$

y $n = \mathrm{Rk}\left(q_t\right)$. *Entonces existe* $\theta_t \in \mathcal{G}_p\left(\mathbb{R}\right)$ *tal que* $q_t = t\theta_t \mathrm{I}_p^n \theta_t^\top$, *y se tiene que*

$$WIS_p\left(x,\alpha,K,Q;t\right) \underset{ley}{=} \theta_t WIS_p\left(\theta_t^{-1} m_t x m_t^\top \left(\theta_t^{-1}\right)^\top, \alpha, 0, \mathrm{I}_p^n; t\right)\theta_t^\top. \tag{3.4}$$

Demostración. Aplicando Lema A.1 a $q_t/t \in \overline{\mathcal{S}_p^+}$ y considérese (p, c_n, k_n) una descomposición extendida de Cholesky de q_t/t. Póngase $\theta_t = p^{-1}\begin{pmatrix} c_n & 0 \\ k_n & I_{d-n}\end{pmatrix}$. Entonces θ_t es invertible y

$$q_t = t\theta_t \mathrm{I}_p^n \theta_t^\top.$$

Ahora, obsérvese que para $v \in \mathcal{S}_p$

$$\begin{aligned}\det\left(\mathrm{I}_p - 2iq_t v\right) &= \det\left(\theta_t\left(\theta_t^{-1} - 2it\mathrm{I}_p^n\theta_t^\top v\right)\right)\\ &= \det\left(\mathrm{I}_p - 2it\mathrm{I}_p^n\theta_t^\top v\theta_t\right),\end{aligned}$$

y

$$\begin{aligned}\mathrm{Tr}\left[iv\left(\mathrm{I}_p - 2iq_t v\right)^{-1} m_t x m_t^\top\right] &= \mathrm{Tr}\left[i\left(\theta_t^{-1}\right)^\top\theta_t^\top v\left(\theta_t\theta_t^{-1} - 2it\theta_t\mathrm{I}_p^n\theta_t^\top v\theta_t\theta_t^{-1}\right)^{-1} m_t x m_t^\top\right]\\ &= \mathrm{Tr}\left[i\theta_t^\top v\theta_t\left(\mathrm{I}_p - 2it\mathrm{I}_p^n\theta_t^\top v\theta_t\right)^{-1}\theta_t^{-1} m_t x m_t^\top\left(\theta_t^{-1}\right)^\top\right].\end{aligned}$$

Sea $X_t^x \sim WIS_p\left(x,\alpha,K,\mathrm{I}_p^n;t\right)$ y $\tilde{X}_t^x \sim WIS_p\left(x,\alpha,0,\mathrm{I}_p^n;t\right)$. Entonces por (3.2) y (3.3) se tiene que

$$\begin{aligned}\mathbb{E}\left[\exp\left(i\mathrm{Tr}\left(vX_t^x\right)\right)\right] &= \mathbb{E}\left[\exp\left(i\mathrm{Tr}\left(\theta_t^\top v\theta_t\tilde{X}^{\theta_t^{-1}m_t x m_t^\top\left(\theta_t^{-1}\right)^\top}\right)\right)\right]\\ &= \mathbb{E}\left[\exp\left(i\mathrm{Tr}\left(v\theta_t\tilde{X}^{\theta_t^{-1}m_t x m_t^\top\left(\theta_t^{-1}\right)^\top}\theta_t^\top\right)\right)\right],\end{aligned}$$

lo que implica la igualdad de las transformadas de Laplace y la igualdad en distribución. ∎

3.2 Momentos del Proceso de Wishart Estándar

En esta sección se describe un algoritmo para calcular los momentos $\mathbb{E}\left(X_t^x\right)^k$ del proceso de Wishart estándar X_t^x, así como las esperanzas de los polinomios

$$R_I\left(X_t\right) = \left(\mathrm{Tr}\left(X_t^x\right)\right)^{i_1} \left(\mathrm{Tr}\left(X_t^x\right)^2\right)^{i_2} ... \left(\mathrm{Tr}\left(X_t^x\right)^{k+1}\right)^{i_{k+1}} X_t^j$$

donde I es un multi-índice $I = (j, \mathbf{i}) = (j, i_1, i_2, ..., i_{k+1})$. Los resultados presentados en esta sección son una recopilación y resumen de los resultados principales de [25].

Con el propósito de no complicar la notación, en esta sección se expresa X_t^x un proceso de Wishart como X_t.

Como X es una semimartingala continua también lo es la k-ésima potencia $X^k = \left(X_t^k\right)_{t\geq 0}$ para cualquier $k \in \mathbb{N}$. De acuerdo a la descomposición de semimartingala

$$X_t^k = M_t^{(k)} + A_t^{(k)} \tag{3.5}$$

donde $M^{(k)} = \left(M_t^{(k)}\right)_{t\geq 0}$ es una martingala local continua y $A^{(k)} = \left(A_t^{(k)}\right)_{t\geq 0}$ es un proceso predecible de variación finita. Cuando $k = 1$ se escribirá $X_t = M_t + A_t$ con

$$\begin{aligned} \mathrm{d}M_t &= \sqrt{X_t^x}\mathrm{d}W_t + \sqrt{X_t^x}\mathrm{d}W_t \\ \mathrm{d}A_t &= \alpha \mathrm{I}_p \mathrm{d}t \end{aligned}$$

por la definición del proceso de Wishart estándar.

Proposición 3.4 *Para cualquier $k \in \mathbb{N}$ y $t \geq 0$*

$$\mathrm{d}M_t^{(k+1)} = \mathrm{d}M_t X_t^k + X_t \mathrm{d}M_t^{(k)} \tag{3.6}$$

$$\mathrm{d}A^{(k+1)} = \mathrm{d}A_t X_t^k + X_t \mathrm{d}A_t^{(k)} + \mathrm{d}\left[M, M^{(k)}\right]_t \tag{3.7}$$

y además

$$\mathrm{d}M_t^{(k+1)} = \sum_{r=0}^{k} X_t^r \mathrm{d}M_t X_t^{k-r}, \tag{3.8}$$

$$\mathrm{d}A_t^{(k+1)} = \mathrm{d}A_t X_t^k + X_t \mathrm{d}A_t^{(k)} + \mathrm{d}\left[M, M^{(k)}\right]_t. \tag{3.9}$$

Demostración. Las siguientes ecuaciones se obtienen por una aplicación directa de la fórmula matricial de Itô (Teorema 1.6) a X^{k+1} :

$$\begin{aligned}
\mathrm{d}X_t^{k+1} &= \mathrm{d}X_t X_t^k + X_t \mathrm{d}X_t^k + \mathrm{d}\left[M, M^{(k)}\right]_t \\
&= \left(\mathrm{d}M_t + \mathrm{d}A_t\right) X_t^k + X_t \left(\mathrm{d}M_t^{(k)} + \mathrm{d}A_t^{(k)}\right) + \mathrm{d}\left[M, M^{(k)}\right]_t \\
&= \mathrm{d}M_t X_t^k + X_t \mathrm{d}M_t^{(k)} + \mathrm{d}A_t X_t^k + X_t \mathrm{d}A_t^{(k)} + \mathrm{d}\left[M, M^{(k)}\right]_t
\end{aligned}$$

e identificando las partes martingala local y de variación finita se tiene (3.6) y (3.7). Las ecuaciones (3.8) y (3.9) se obtienen con inducción matemática. ■

De la descomposición de semimartingala de $\left(X_t^{(k+1)}\right)_{t\geq 0}$ y definiendo (τ_n) una sucesión de tiempos de paros que localizan la sucesión para convertir a $M^{(k+1)}$ en una martingala (Definición 1.12), se tiene

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}X_{t\wedge\tau_n}^{k+1} &= \mathbb{E}A_{t\wedge\tau_n}^{(k+1)} + \mathbb{E}M_{t\wedge\tau_n}^{(k+1)} \\
(\textit{porque } M \textit{ es martingala}) &= \mathbb{E}A_{t\wedge\tau_n}^{(k+1)} + \mathbb{E}M_0^{(k+1)} \\
(\textit{porque } A_0 \textit{ es } 0 \textit{ c.s.}) &= \mathbb{E}A_{t\wedge\tau_n}^{(k+1)} + \mathbb{E}X_0^{k+1} \\
(\textit{condición inicial determinista c.s.}) &= \mathbb{E}A_{t\wedge\tau_n}^{(k+1)} + X_0^{k+1}.
\end{aligned} \tag{3.10}$$

Ahora recuérdese que la traza del proceso de Wishart estándar es un proceso cuadrado de Bessel de dimensión αp (Teorema 2.3). Obsérvese también que el supremo del proceso cuadrado de Bessel es integrable para cualquier potencia positiva y en cualquier intervalo finito porque es una semimartingala continua. Se utilizan estas afirmaciones junto con el Teorema 1.1 para mostrar que $\left(\left\|X_{t\wedge\tau_n}^k\right\|\right)_{n\in\mathbb{N}}$ es uniformemente integrable (Definición 1.7) para t y k fijas. Se utiliza la norma Schatten que en este caso de matrices positivas semidefinidas es la suma de los eigenvalores, i.e., la traza. Comprobando que se cumplen las hipótesis del Teorema 1.1:

i)

$$\mathbb{E}\left\|X_{t\wedge\tau_n}^k\right\| \leq \mathbb{E}\left[\|X_{t\wedge\tau_n}\|^k\right] = \mathbb{E}\left[\left(\mathrm{Tr}\left(X_{t\wedge\tau_n}\right)\right)^k\right] < \infty;$$

la primera desigualdad es por propiedades de la norma, la igualdad por definición de la norma y la última desigualdad es porque $\mathrm{Tr}\left(X_t\right)$ es una ji-cuadrada (usando que $\{\mathrm{Tr}\left(X_t\right)\}_{t>0}$ es un proceso cuadrado de Bessel, que para cada t se distribuye como Wishart de dimensión 1 que es una ji-cuadrada) y $\tau_n < \infty$ *c.s.*

ii) Obsérvese $\forall n \in \mathbb{N}$ y $\forall \xi > 0$ $\exists T \in \mathbb{R}$ tal que $P\left(\tau_n \geq T\right) < \xi$, basta que escojamos T tal que $P\left(\tau_1 > T\right) < \xi$, tal T existe porque $\tau_1 < \infty$ c.s. y esa misma T cumple $\forall i > 1$ $P\left(\tau_i > T\right) < \xi$ porque $\tau_n < \tau_{n+1}$. Luego, para $E \in \mathcal{F}$

$$\begin{aligned}
\int_E \left\|X_{t\wedge\tau_n}^k\right\| \mathrm{d}P &\leq \int_E \|X_{t\wedge\tau_n}\|^k \,\mathrm{d}P \\
&= \int_E \left(\mathrm{Tr}X_{t\wedge\tau_n}\right)^k \mathrm{d}P \\
&\leq \int_E \left(\sup_s \mathrm{Tr}X_{s\wedge\tau_n}\right)^k \mathrm{d}P \\
&= \int_{E\cap\{\tau_n>T\}} \left(\sup_s \mathrm{Tr}X_{s\wedge\tau_n}\right)^k \mathrm{d}P + \int_{E\cap\{\tau_n\leq T\}} \left(\sup_s \mathrm{Tr}X_{s\wedge\tau_n}\right)^k \mathrm{d}P \\
&\leq \int_{\{\tau_n>T\}} \left(\sup_s \mathrm{Tr}X_{s\wedge\tau_n}\right)^k \mathrm{d}P + \int_E \left(\sup_s \mathrm{Tr}X_{s\wedge T}\right)^k \mathrm{d}P \qquad (3.11)
\end{aligned}$$

pero si se escoge ξ suficientemente pequeño entonces $P\left(\tau_n > T\right)$ será suficientemente pequeño como para que $\int_{\{\tau_n>T\}} \left(\sup_s \mathrm{Tr}X_{s\wedge\tau_n}\right)^k \mathrm{d}P < \frac{\epsilon}{2}$, por otro lado, como $\sup_s\left(\mathrm{Tr}X_{s\wedge T}\right)$ es integrable para cualquier potencia positiva y en cualquier intervalo finito se puede escoger $E \in \mathcal{F}$ tal que $P\left(E\right)$ es suficientemente pequeña para que $\int_E \left(\sup_s \mathrm{Tr}X_{s\wedge T}\right)^k \mathrm{d}P < \frac{\epsilon}{2}$. De estas afirmaciones y de (3.11) se concluye que $\int_E \left\|X_{t\wedge\tau_n}^k\right\| \mathrm{d}P < \infty$ para toda n.

Entonces por el Teorema 1.1 $\left(\left\|X_{t\wedge\tau_n}^k\right\|\right)_{n\geq 1}$ es uniformemente integrable. Se muestra que $\left(\left\|A_{t\wedge\tau_n}^{(k)}\right\|\right)_{n\geq 1}$ es uniformemente integrable de una forma análoga.

Por el Teorema 1.2, como $X_{t\wedge\tau_n}^k \stackrel{n\to\infty}{\to} X_t^k$ y $A_{t\wedge\tau_n}^{(k)} \stackrel{n\to\infty}{\to} A_t^{(k)}$ en probabilidad y lo probado de integrabilidad uniforme entonces se puede meter el límite a la esperanza: $\mathbb{E}X_{t\wedge\tau_n}^k \stackrel{n\to\infty}{\to} \mathbb{E}X_t^k$ y $\mathbb{E}A_{t\wedge\tau_n}^{(k)} \stackrel{n\to\infty}{\to} \mathbb{E}A_t^{(k)}$.

Por (3.5) y esto último

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}X_t^{k+1} - \mathbb{E}A_t^{(k+1)} &= \lim_{n\to\infty} \mathbb{E}M_{\tau_n \wedge t}^{(k+1)} \\
(\textit{por ser martingala}) &= \lim_{n\to\infty} \mathbb{E}M_0^{(k+1)} \\
&= X_0^{k+1}.
\end{aligned}$$

Es decir que $\mathbb{E}X_t^{k+1} = \mathbb{E}A_t^{(k+1)} + X_0^{k+1}$.

Esto quiere decir que si uno desea calcular los momentos del proceso de Wishart entonces basta con mostrar explícitamente el proceso $A^{(k+1)}$. Para hacer esto es necesario calcular el proceso predecible $\left[M, M^{(r)}\right]_t$. La siguiente proposición muestra cómo calcular el proceso y algunas otras identidades relacionadas con $M^{(r)}$ y trazas.

Proposición 3.5 *Sea $r, l \in \mathbb{N}$ y $t \geq 0$. Se tienen las siguientes igualdades*

$$\begin{aligned}
\left[M, M^{(r)}\right]_t &= (2r+p)\int_0^t X_s^r ds \\
&\quad + 2\sum_{q=1}^{r-1}\int_0^t \operatorname{Tr}\left(X_r^q\right) X_r^{r-q} ds + \int_0^t \operatorname{Tr}\left(X_s^r\right) \mathrm{I}_p ds \qquad (3.12) \\
\left[\operatorname{Tr}\left(M^{(r)}\right)\mathrm{I}_p, M^{(l)}\right]_t &= 4rl\int_0^t X_s^{r+l-1} ds, \qquad (3.13) \\
\left[\operatorname{Tr}\left(M^{(r)}\right), \operatorname{Tr}\left(M^{(l)}\right)\right]_t &= 4rl\int_0^t \operatorname{Tr} X_s^{r+l-1} ds \qquad (3.14)
\end{aligned}$$

Demostración. No se proporciona la demostración detallada (se puede encontrar en [25, pág 16]). La idea de la demostración es utilizar la ecuación (3.8) junto el cálculo la variación cuadrática de la integral de Itô de varios procesos. ■

Proposición 3.6 *Sea $k \in \mathbb{N}$ y $t \geq 0$ se tiene*

$$A_t^{(k)} = (\alpha k + (k-1)(k+p))\int_0^t X_s^{k-1} \mathrm{d}s + \sum_{r=1}^{k-1}(2r-1)\int_0^t \operatorname{Tr}\left(X_s^{k-r}\right) X_s^{r-1} \mathrm{d}s. \qquad (3.15)$$

Demostración. Usando (3.9), (3.12) y $\mathrm{d}A_t = \alpha \mathrm{I}_p \mathrm{d}t$ se obtiene

$$\begin{aligned}
\mathrm{d}A_t^{(k)} &= \sum_{r=0}^{k-1} X_t^r \mathrm{d}A_t X_t^{k-r-1} + \sum_{r=1}^{k-1} X_t^{k-r-1} \mathrm{d}\left[M, M^{(r)}\right]_t \\
&= \alpha k X_t^{k-1}\mathrm{d}t + \sum_{r=1}^{k-1} X_t^{k-r-1}\left[(2r+p) X_t^r + 2\sum_{s=1}^{r-1} \mathrm{Tr}\left(X_t^s\right) X_t^{r-s} + \mathrm{Tr}\left(X_t^r\right)\mathrm{I}_p\right]\mathrm{d}t \\
&= \left(\alpha k + (k-1)p + (k-1)k\right) X_t^{k-1}\mathrm{d}t + \sum_{r=1}^{k-1} (2k-2r-1)\,\mathrm{Tr}\left(X_t^r\right) X_t^{k-r-1}\mathrm{d}t \\
&= \left(\alpha k + (p+k)(k-1)\right) X_t^{k-1}\mathrm{d}t + \sum_{r=1}^{k-1} (2r-1)\,\mathrm{Tr}\left(X_t^{k-r}\right) X_t^{r-1}\mathrm{d}t.
\end{aligned}$$

■

Obsérvese que la Proposición 3.6 muestra una relación de recurrencia entre la esperanza $\mathbb{E}X_t^k = \mathbb{E}A_t^{(k)} + X_0^k$ y $\mathbb{E}\mathrm{Tr}\left(X_t^{k-r}\right) X_t^{r-1}$ para toda $r = 1, ..., k$. Si se buscara continuar con el estudio de $\mathrm{Tr}\left(X_t^{k-1}\right) X_t^{r-1}$ aplicando la fórmula de Itô se obtendrían dificultades desde el principio pues se obtienen expresiones complicadas.

Otra forma de atacar este problema y poder proporcionar una fórmula de recurrencia para $\mathbb{E}X_t^k$ es definir un vector de procesos estocásticos matriciales que es estable bajo la aplicación de la fórmula de Itô.

Para $I = (j, \mathbf{i}) = (j, i_1, ..., j_{k+1}) \in \mathbb{N}^{k+2}$ un multi-índice, tal que

$$j + \sum_{r=1}^{k+1} r i_r = k+1,$$

y una matriz $B \in \mathcal{M}_p(\mathbb{R})$ se introduce el siguiente polinomio con dominio en las matrices

$$R_I = \left(\mathrm{Tr}\,(B)^{i_1}\right)\left(\mathrm{Tr}\left(B^2\right)\right)^{i_2} ... \left(\mathrm{Tr}\left(B^{k+1}\right)\right)^{i_k+1} B^j$$

y el siguiente vector

$$\boldsymbol{Q}^{(k+1)}(B) = \begin{pmatrix} B^{k+1} & \mathrm{Tr}\,(B)\,B^k & (\mathrm{Tr}B)^2 B^{k-1} & \mathrm{Tr}\left(B^2\right) B^{k-1} & \cdots & \mathrm{Tr}\left(B^{k+1}\right)\mathrm{I}_p \end{pmatrix}^\top.$$

La dimensión del vector $\boldsymbol{Q}^{(k)}(B)$ es igual a

$$d_k = \sum_{r=0}^{k} \boldsymbol{p}(r)$$

donde $\boldsymbol{p}(r)$ es el número de particiones del entero r en una suma de enteros positivos, es decir, $\boldsymbol{p}(r)$ es el número de formas en que r se puede representar como la suma de enteros positivos, dos representaciones son la misma si solo difieren en el orden de los sumandos ($p(0) = 1$). Se tiene $p(1) = 1$, $p(2) = 2$, $p(3) = 3$, $p(4) = 5$.

Obsérvese que para cada $t \geq 0$ fija todos los componentes de $\boldsymbol{Q}^{(k+1)}(X_t)$ son integrables. Además, como $(\mathrm{Tr}(X_t))_{t\geq 0}$ es un proceso cuadrado de Bessel de dimensión αp (Teorema 2.3), $\mathrm{Tr}(X_t)$ tiene los momentos de todos los órdenes positivos y para toda $k \in \mathbb{N}$ y $0 \leq r \leq k+1$ se obtiene

$$\begin{aligned} \mathbb{E}\left\|X_t^k\right\| &= \mathbb{E}\left(\sqrt{\left(X_t^k, X_t^k\right)}\right) = \mathbb{E}\left(\sqrt{\mathrm{Tr}X_t^{2k}}\right) \leq \mathbb{E}\left(\mathrm{Tr}X_t\right)^k < \infty, \\ \mathbb{E}\left\|X_t^{r-1}\mathrm{Tr}\left(X_t^{k+1-r}\right)\right\| &= \mathbb{E}\left(\sqrt{\mathrm{Tr}X_t^{2r-2}}\mathrm{Tr}\left(X_t^{k+1-r}\right)\right) \leq \mathbb{E}\left(\mathrm{Tr}X_t\right)^k < \infty. \end{aligned}$$

A continuación se enuncia el teorema más importante de esta sección. Proporciona una manera explícita de calcular los momentos del proceso de Wishart estándar que hace uso de la siguiente tabla.

Linea	I	I'	$\widetilde{D}_{II'}$
1	$j \geq 1$	$(j-1, \boldsymbol{i})$	$\alpha_j + (j-1)(j+p)$
2	$j \geq 2$	$(l, \boldsymbol{i} + e_{j-l-1})$ para alguna l, $l = 0, ..., j-2$	$2l+1$
3	$j \geq 1, i_r \geq 1$ *para algún* r, $2 \leq r \leq k+1$	$(j+r-1, \boldsymbol{i} - e_r)$	$4jri_r$
4	$i_1 \geq 1$	$(j, \boldsymbol{i} - e_1)$	$(4j + \alpha p)\, i_1$
5	$i_r \geq 1$ *para alguna* r $1 < r \leq k+1$	$(j, \boldsymbol{i} + e_{r-1} - e_r)$	$(\alpha r + (r-1)(r+m) + m)\, i_r$
6	$i_r \geq 1$ *para alguna* r $2 < r \leq k+1$	$(j, \boldsymbol{i} - e_r + e_{l-1} + e_{r-l})$ *para alguna* l $2 \leq l < r$	$(2l-1)\, i_r$
7	$i_r \geq 2$ *para alguna* $r \geq 1$	$(j, \boldsymbol{i} - 2e_r + e_{2r-1})$	$2r^2 (i_r - 1)\, i_r$
8	$i_r,\ i_l \geq 1$ *para alguna* r, l $1 \leq l < r \leq k+1$	$(j, \boldsymbol{i} - e_r - e_l + e_{r+l-1})$	$4rli_ri_l$

Teorema 3.1 *Para toda $k \in \mathbb{N}$ existe una matriz $D_k \in \mathcal{M}_{d_{k+1} \times d_k}$ tal que para toda $t > 0$*

$$\mathbb{E}\left[\boldsymbol{Q}^{(k+1)}(X_t)\right] = \boldsymbol{Q}^{(k+1)}(X_0) + D_k \int_0^t \mathbb{E}\boldsymbol{Q}^{(k)}(X_s)\, ds. \tag{3.16}$$

Consecuentemente

$$\mathbb{E}\left[\boldsymbol{Q}^{(k+1)}(X_t)\right] = \boldsymbol{Q}^{(k+1)}(X_0) + \sum_{r=1}^{k+1} \frac{t^r}{r!} D_k D_{k-1} ... D_{k-r+1} \boldsymbol{Q}^{(k-r+1)}(X_0) \tag{3.17}$$

con la convención de que $\boldsymbol{Q}^{(0)}(X_0) = \mathrm{I}_p$ y con las matrices $D_r,\ r = 0, 1, ..., k,$ dadas explícitamente *en la Tabla 1. En particular, cuando $X_0 = 0$, se tiene*

$$\mathbb{E}\left[\boldsymbol{Q}^{(k+1)}\left(X_t\right)\right] = \frac{t^{k+1}}{(k+1)!} D_k D_{k-1} ... D_0 \boldsymbol{Q}^{(k-r+1)} \mathrm{I}_p. \tag{3.18}$$

De importancia es la demostración como la interpretación de la tabla que describe D_k. Se interpreta a continuación la tabla y la forma de aplicarla.

Descripción de la matriz D_k.

Sea $k \geq 0$ fijo y sea $D_k = (D_{II'})$, donde $I = (j, \mathbf{i})$ e $I' = (j', \mathbf{i}')$ son multi-índices que verifican $\mathbf{i} = (i_1.,,,.i_{k+1})$, $j + \sum_{r=1}^{k+1} r i_r = k+1$ y $\mathbf{i}' = (i'_1, ..., i'_k)$, $j' + \sum_{r=1}^{k} r' i_r = k$. Los coeficientes de $D_{II'}$ son todos ceros excepto por los casos mencionados en la tabla. Para proporcionar los coeficientes distintos de cero, denótese por e_1, e_2, ..., e_{k+1} los vectores de la base canónica de $\mathbb{R}^k$ y se extiende $I^{'}$, sin cambio en la notación a $I' = (j', \mathbf{i}', 0)$ para igualar las dimensiones de I e I'. La tabla contiene ocho líneas y por lo tanto ocho tipos de coeficientes correspondientes a condiciones particulares verificadas por el multi-índice I. Tomemos ejemplos para explicar la tabla. La condición $j \geq 2$ en la segunda línea de la tabla significa que la fila sólo aplica a $I = (j, \mathbf{i})$ con $j \geq 2$. Similarmente, la condición $i_r \geq 1$ en la fila cinco significa que esa línea sólo aplica a multi-índices $I = (j, \mathbf{i})$ que contengan al menos un coeficiente $i_r \geq 1$ para algún $1 < r \leq k+1$.

La tercera columna de la tabla proporciona los multi-índices I' correspondientes a los coeficientes no cero. Las primeras tres filas de la tabla contienen los coeficientes relacionados con el cambio de j en el multi-índice I. Las filas cuatro a ocho proporcionan los coeficientes que provienen del cambio de la segunda parte $\mathbf{i}$ de I.

Para obtener el coeficiente $D_{II'}$ correspondiente a los multi-índices I, I', se debe seleccionar las filas correspondientes a I e I' y sumar los correspondientes valores de $D_{II'}$.

Ilustremos el uso de la tabla con unos ejemplos. Tómese $k = 10$ e $I = (11, \mathbf{0})$. Como $\mathbf{i} = \mathbf{0}$, sólo las primeras dos líneas de la tabla aplican a este multi-índice. Para $I' = (10, \mathbf{0})$ utilizando la primera columna se obtiene $D_{II'} = 11\alpha + 10p + 110$, donde α y p son los parámetros del proceso de Wishart. Para $I' = (0, e_{10}), (1, e_9), ..., (9, e_1)$ se obtiene, utilizando la segunda fila, los coeficientes $D_{II'} = 1, 3, ..., 19$ respectivamente. Aún para $k = 10$, si $I = (4, 2e_1 + e_2 + e_3)$, entonces todas las líneas aplican, algunas de ellas varias veces. Sea $I' = (4, e_1 + e_2 + e_3)$; entonces se aprecia que la cuarta fila aplica una vez y la séptima fila aplica una vez (porque $i_1 \geq 2$ y $i_2 < 2$, $i_3 < 2$) y la octava fila aplica dos veces (para $l = 1$ y $r = 2, 3$). Entonces los coeficientes son

$$D_{II'} = 2\left(16 + \alpha p\right) + 4 + 16 + 24 = 2\alpha p + 76.$$

Para obtener los coeficientes de la matriz D_k uno debe escribir los multi-índices I y I' en orden lexicográfico y luego utilizar la tabla para encontrar $D_{II'}$. Sea $k = 3$, entonces se tiene

$$\boldsymbol{Q}^{(3)}\left(X_t\right) = \begin{pmatrix} X_t^3 \\ X_t^2 \mathrm{Tr} X_t \\ X_t \left(\mathrm{Tr} X_t\right)^2 \\ X_t \mathrm{Tr}\left(X_t^2\right) \\ \left(\mathrm{Tr} X_t\right)^3 \mathrm{I}_p \\ \mathrm{Tr} X_t \mathrm{Tr}\left(X_t^2\right) \mathrm{I}_p \\ \mathrm{Tr}\left(X_t^3\right) \mathrm{I}_p \end{pmatrix}$$

que corresponden a los multi-índices I en el siguiente orden:

$$(3;0,0,0)\,,(2;1,0,0)\,,(1;2,0,0)\,,(1;0,1,0)\,,(0;3,0,0)\,,(0;1,1,0)\,,(0;0,0,1)\,.$$

Haciendo lo mismo para $k = 2$ se obtiene que los multi-índices para I' son

$$(2;0,0)\,,(1;1,0)\,,(0;2,0)\,,(0;0,1)\,.$$

La matriz D_2 requerida para calcular los momentos de $\mathbb{E}\boldsymbol{Q}^{(3)}\left(X_t\right)$ de tercer orden es

$$D_2 = \begin{pmatrix} 3\alpha + 2p + 6 & 3 & 0 & 1 \\ \alpha p + 8 & 2\alpha + p + 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2\alpha p + 12 & \alpha & 0 \\ 8 & 2\alpha + 2p + 2 & 0 & \alpha \\ 0 & 0 & 3\alpha p + 12 & 0 \\ 0 & 0 & 2\alpha + 2p + 2 & \alpha p + 8 \\ 0 & 0 & 3 & 3\alpha + 3p + 6 \end{pmatrix}.$$

Demostración del Teorema 3.1. A continuación la idea de la demostración; detalles ver [25, Teorema 3.1, pág 617].

Tenemos que

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}\boldsymbol{Q}^{(k+1)}(X_t) &= \begin{pmatrix} \mathbb{E}X_t^{k+1} \\ \mathbb{E}\left[\mathrm{Tr}(X_t)X_t^k\right] \\ \vdots \\ \mathbb{E}\left[\mathrm{Tr}\left(X_t^{k+1}\right)\mathrm{I}_p\right] \end{pmatrix} \\
&= \boldsymbol{Q}^{k+1}(X_0) + \begin{pmatrix} \mathbb{E}AX_t^{k+1} \\ \mathbb{E}A\left(\mathrm{Tr}(X_t)X_t^k\right) \\ \vdots \\ \mathbb{E}A\left(\mathrm{Tr}\left(X_t^{k+1}\right)\mathrm{I}_p\right) \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

donde $A(Y)$ es la parte predecible en la descomposición semimartingala de Y. Supóngase que se ha mostrado que

$$\begin{pmatrix} AX_t^{k+1} \\ A\left(\mathrm{Tr}(X_t)X_t^k\right) \\ \vdots \\ A\left(\mathrm{Tr}\left(X_t^{k+1}\right)\mathrm{I}_p\right) \end{pmatrix} = \int_0^t D_k\boldsymbol{Q}^{(k+1)}(X_s)\,ds. \tag{3.19}$$

Entonces la ecuación (3.16) se obtiene al aplicar la esperanza a (3.19). Utilizando también (3.19) se obtiene que

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\mathbb{E}\boldsymbol{Q}^{k+1}(X_t) = D_k\mathbb{E}\boldsymbol{Q}^{(k+1)}(X_t)$$

y por inducción

$$\frac{\mathrm{d}^r}{\mathrm{d}t^r}\mathbb{E}\boldsymbol{Q}^{k+1}(X_t) = D_k \ldots D_{k+1-r}\mathbb{E}\boldsymbol{Q}^{(k+1-r)}(X_t). \tag{3.20}$$

Para obtener la relación (3.17) obsérvese que primero que $U(t) = \mathbb{E}\boldsymbol{Q}^{k+1}(X_t)$ es un polinomio de grado $k+1$ porque su derivada $k+1$ no depende de t: de (3.20) se obtiene para $r = k+1$

$$\frac{\mathrm{d}^{k+1}}{\mathrm{d}t^{k+1}}\mathbb{E}\boldsymbol{Q}^{k+1}(X_t) = D_k \ldots D_0\mathrm{I}_p$$

es una constante que no depende de t. Como $U(t)$ es un polinomio éste se puede escribir en su forma de Taylor:

$$U(t) = \sum_{r=0}^{k+1} \frac{U^{(r)} t^r}{r!}$$

de donde se sigue (3.17).

Para que la demostración del Teorema 3.1 esté completa es necesario justificar (3.19). ■

El siguiente corolario describe el caso $p = 1$. Se utilizan los polinomios de Laguerre recordando que están definidos como

$$L_n^{(\alpha)}(x) = \frac{x^{-\alpha} \boldsymbol{e}^x}{n!} \frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}x^n} \left(\boldsymbol{e}^{-x} x^{n+\alpha} \right).$$

Corolario 3.2 *Sea $X \sim BESQ(\alpha, x)$ un proceso cuadrado de Bessel con $x \geq 0$. Entonces para $k \in \mathbb{N}$*

$$\mathbb{E}X_t^k = k! t^k L_k^{(\alpha-1)} \left(-\tfrac{x}{t} \right),$$

donde $\left\{ L_k^{(\alpha-1)}(x) \right\}_{k \geq 0}$ es la familia ortogonal de polinomios de Laguerre con parámetro $\alpha - 1$. En particular cuando $x = 0$,

$$\mathbb{E}X_t^k = (\alpha)_k t^k,$$

donde $(x)_k = x(x+1)\ldots(x+k-1)$ es el símbolo de Pochammer.

Demostración. La demostración es directa pero ingeniosa; véase [25, pág 623]. ■

Entonces el proceso cuadrado de Bessel posee todos los momentos enteros positivos y se pueden describir explícitamente.

En resumen, el método propuesto por Vostrikova y Graczyc en [25] para calcular los momentos del proceso de Wishart estándar es el siguiente.

Al expresar la descomposición semimartingala de las potencias del proceso de Wishart estándar como

$$X_t^k = M_t^{(k)} + A_t^{(k)}$$

se obtiene que

$$\mathbb{E}X_t^k = X_0^k + \mathbb{E}A_t^{(k)}.$$

Entonces para calcular $\mathbb{E}X_t^k$ basta calcular $\mathbb{E}A_t^{(k)}$. La Proposición 3.6 relaciona $\mathbb{E}A_t^{(k)}$ con

$$\mathbb{E}\mathrm{Tr}\left(X_t^{k-r} \right) X_t^{r-1}$$

corriendo r en $\{1,...,k-1\}$ y con $\mathbb{E}X_t^{k-1}$. Para lidiar con $\mathbb{E}\mathrm{Tr}\Big(X_t^{k-r}\Big)X_t^{r-1}$ se utiliza el Teorema 3.1.

El cálculo para describir completamente los coeficientes de $D_{I,I'}$, aunque laboriosos, se pueden programar directamente.

Capítulo 4

Generación del Proceso de Wishart

En este capítulo se presenta un algoritmo para generar el proceso de Wishart. Este método se basa en la descomposición del generador infinitesimal de un caso particular del proceso de Wishart y se simula el caso general mediante el uso de propiedades distribucionales del proceso de Wishart detallados en capítulos anteriores. Los resultados de este capítulo se encuentran principalmente en [1].

4.1 Generación en un Caso Particular

Se describe a continuación una forma general de generar $WIS_p\left(x,\alpha,0,\mathrm{I}_p^1;t\right)$. Se utilizan diversos resultados obtenidos en los Capítulos 2.3 y 3. Este método de generación fue propuesto por [1] y permite generar un proceso de Wishart sin restricción en los parámetros.

En esta sección se escribirá $A_{\{i,j\}}$ para expresar la entrada i,j y hacer énfasis en que la matriz A es simétrica.

Escribiendo explícitamente de (2.12) el generador infinitesimal de $WIS_p\left(x,\alpha,0,\mathrm{I}_p^1;t\right)$ para $x\in\overline{\mathcal{S}_p^+}$:

$$\begin{aligned} L_1 f(x) &= \alpha\partial_{\{1,1\}}f(x)+2x_{\{1,1\}}\partial^2_{\{1,1\}}f(x)+2\sum_{1<m\le p}x_{\{1,m\}}\partial_{\{1,m\}}\partial_{\{1,1\}}f(x) \\ &\quad+\frac{1}{2}\sum_{1<m,l\le p}x_{\{m,l\}}\partial_{\{l,m\}}\partial_{\{1,l\}}f(x). \end{aligned} \tag{4.1}$$

La idea es construir una ecuación diferencial estocástica que tiene el mismo generador infinitesimal L_1 y que puede ser resuelto explícitamente. Se utilizan resultados de descomposición de matrices. Como la ecuación diferencial estocástica dependerá del rango de la submatriz $(x_{i,j})_{2\leq i,j\leq p}$, se define $r = \mathrm{Rk}\left((x_{i,j})_{2\leq i,j\leq p}\right) \in \{0, ..., p-1\}$.

Primero considérese el caso donde $\exists\ c_r \in \mathcal{G}_r(\mathbb{R})$ triangular inferior, $k_r \in \mathcal{M}_{p-1-r\times r}(\mathbb{R})$, tal que

$$(x)_{2\leq i,j\leq p} = \begin{pmatrix} c_r & 0 \\ k_r & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_r^\top & k_r^\top \\ 0 & 0 \end{pmatrix} =: cc^\top. \tag{4.2}$$

Con un poco de abuso de notación, se considera que esta descomposición también es cierta cuando $r = 0$ con $c = 0$. Cuando $r = p-1$, $c = c_r$ es la descomposición de Cholesky usual de $(x_{i,j})_{2\leq i,j\leq p}$. Como se verá en el Corolario 4.1, se puede obtener tal descomposición con permutación las de coordenadas $\{2, ..., p\}$.

Teorema 4.1 *Considérese $x \in \overline{\mathcal{S}_p^+}$ tal que (4.2) se cumple. Sea $\left(Z_t^l\right)_{1\leq l\leq r+1}$ un vector de movimientos brownianos estándar independientes. Entonces la siguiente ecuación diferencial estocástica (con la convención de que $\sum_{k=1}^r (\ldots) = 0$ cuando $r = 0$)*

$$\begin{aligned} \mathrm{d}\,(X_t^x)_{\{1,1\}} &= \alpha \mathrm{d}t + 2\sqrt{(X_t^x)_{\{1,1\}} - \sum_{k=1}^r \left(\sum_{l=1}^r \left(c_r^{-1}\right)_{k,l} (X_t^x)_{\{1,l+1\}}\right)^2}\,\mathrm{d}Z_t^1 \\ &\quad + 2\sum_{k=1}^r \sum_{l=1}^r \left(c_r^{-1}\right)_{k,l} (X_t^x)_{\{1,l+1\}}\,\mathrm{d}Z_t^{k+1} \\ \mathrm{d}\,(X_t^x)_{\{1,i\}} &= \sum_{k=1}^r c_{i-1,k}\mathrm{d}Z_t^{k+1},\ i = 2, ..., p \\ \mathrm{d}\left((X_t^x)_{\{l,k\}}\right)_{2\leq k,l\leq p} &= 0 \end{aligned} \tag{4.3}$$

tiene una única solución fuerte $(X_t^x)_{t\geq 0}$ empezando en x, toma valores en $\overline{S_p^+}$ y tiene el generador infinitesimal L_1. Además la solución está dada explícitamente por:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & c_r & 0 \\ 0 & k_r & \mathrm{I}_{p-r-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} (U_t^u)_{\{1,1\}} + \sum\limits_{k=1}^r \left((U_t^u)_{\{1,k+1\}}\right)^2 & \left((U_t^u)_{\{1,l+1\}}\right)_{1\leq l\leq r}^\top & 0 \\ \left((U_t^u)_{\{1,l+1\}}\right)_{1\leq l\leq r} & \mathrm{I}_r & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & c_r^\top & k_r^\top \\ 0 & 0 & \mathrm{I}_{p-r-1} \end{pmatrix}, \tag{4.4}$$

donde

$$\begin{aligned}
\mathrm{d}\left(U_t^n\right)_{\{1,1\}} &= (\alpha - r)\,\mathrm{d}t + 2\sqrt{\left(U_t^n\right)_{\{1,1\}}}\mathrm{d}Z_t^1, \\
\mathrm{d}\left(\left(U_t^n\right)_{\{1,l+1\}}\right)_{1\leq l\leq r} &= \left(\mathrm{d}Z_t^{l+1}\right)_{1\leq l\leq r}, \\
u_{\{1,1\}} &= x_{\{1,1\}} - \sum_{k=1}^{r}\left(u_{\{1,k+1\}}\right)^2 \geq 0, \\
\left(u_{\{1,l+1\}}\right)_{1\leq l\leq r} &= c_r^{-1}\left(x_{\{1,l+1\}}\right)_{1\leq l\leq r}.
\end{aligned} \tag{4.5}$$

Demostración. Se menciona aquí la idea de la demostración. La prueba completa se encuentra en [1, pág 34, Teorema 13].

Se siguen dos pasos para la demostración. El primer paso es mostrar que la ecuación (4.3) tiene una única solución fuerte y ésta está bien definida en $\overline{\mathcal{S}_p^+}$, además que la solución está dada por (4.4) utilizando la descomposición de $(X_{i,j})_{2\leq i,j\leq p}$ dada por (4.2). El segundo paso es mostrar que L_1 es el generador infinitesimal asociado al proceso $(X_t^x)_{t\geq 0}$. Una forma de hacer esto es comparando las partes de variación cuadrática y de deriva de X_t^x con L_1. ■

Cuando $r = 0$, (4.4) debe interpretarse como

$$X_t^x = \begin{pmatrix} \left(U_t^u\right)_{\{1,1\}} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Nótese que X_t^x se puede ver como función de U_t^u de la siguiente forma:

$$\begin{aligned}
\left(U_t^u\right)_{\{i,j\}} &= u_{\{i,j\}} = x_{\{i,j\}} \text{ para } i,j \geq 2 \text{ y} \\
\left(U_t^u\right)_{\{1,j\}} &= u_{\{1,j\}} = 0 \text{ para } r+1 \leq j \leq p.
\end{aligned}$$

Entonces $(c_r, k_r, \mathrm{I}_{p-1})$ es una descomposición extendida de $\left(\left(U_t^u\right)_{i,j}\right)_{2\leq i,j\leq p}$ y puede verse como una función de U_t^u. Se obtiene de (4.4) que

$$X_t^x = h\left(U_t^u\right), \text{ con } h(u) = \sum_{r=0}^{p-1} \mathbf{1}_{r=\mathrm{Rk}\left[(u_{i,j})_{2\le i,j\le p}\right]} h_r(u) \text{ y} \tag{4.6}$$

$$h_r(u) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & c_r(u) & 0 \\ 0 & k_r(u) & \mathrm{I}_{p-r-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_{\{1,1\}} + \sum_{k=1}^{r} \left(u_{\{1,k+1\}}\right)^2 & \left(u_{\{1,l+1\}}\right)_{1\le l\le r}^{\top} & 0 \\ \left(u_{\{1,l+1\}}\right)_{1\le l\le r} & \mathrm{I}_r & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & c_r(u)^{\top} & k_r(u)^{\top} \\ 0 & 0 & \mathrm{I}_{p-r-1} \end{pmatrix},$$

donde $(c_r(u), k_r(u), \mathrm{I}_{p-1})$ es la descomposición extendida de Cholesky de $(u_{i,j})_{2\le i,j\le p}$ dado por algún algoritmo (Véase por ejemplo [10, Algoritmo 4.2.4, pág 143]).

El Teorema 4.1 permite generar la distribución $WIS_p\left(x, \alpha, 0, \mathrm{I}_p^1; t\right)$ simplemente simulando distribuciones ji-cuadradas no centrales para $(U_t^u)_{\{1,1\}}$ y r variables aleatorias independientes gaussianas. Nótese que el proceso Cox-Ingersoll-Ross $\left((U_t^u)_{\{1,1\}}\right)_{t\ge 0}$ está bien definido para cualquier $r \in \{1, ..., p-1\}$, porque la condición $\alpha - (p-1)$ se cumple ya que fue requerida para el proceso $WIS_p\left(x, \alpha, 0, \mathrm{I}_p^1\right)$.

El Teorema 4.1 asume que la condición inicial $x \in \overline{\mathcal{S}_p^+}$ satisface (4.2). Ahora se explica porque es posible en el caso general mediante permutaciones estar en ese caso particular.

Corolario 4.1 *Sea* $(X_t^x)_{t\ge 0} \sim WIS_p\left(x, \alpha, 0, \mathrm{I}_p^1\right)$ *y* (c_r, k_r, p) *una descomposición extendida de Cholesky de* $(x_{i,j})_{2\le i,j\le p}$ *(usando Lema A.1). Entonces* $\pi = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & p \end{pmatrix}$ *es una matriz de permutación y*

$$(X_t^x)_{t\ge 0} \overset{ley}{=} \pi^{\top} WIS_p\left(\pi x \pi^{\top}, \alpha, 0, \mathrm{I}_p^1\right) \pi$$

y

$$\left(\left(\pi x \pi^{\top}\right)_{i,j}\right)_{2\le i,j\le p} = \begin{pmatrix} c_r & 0 \\ k_r & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_r^{\top} & k_r^{\top} \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

satisface (4.2).

Demostración. Nótese que π es una matriz de permutación porque p es una matriz de permutación y entonces $\pi^{\top} = \pi^{-1}$. Por otro lado $\pi \mathrm{I}_p^1 \pi^{\top} = \mathrm{I}_p^1$. El resultado se obtiene aplicando la Proposición 3.2. ■

Entonces combinando el Teorema 4.1 y el Corolario 4.1 se obtiene una forma simple de construir explícitamente un proceso que tiene generador infinitesimal L_1 para cualquier condición inicial $x \in \overline{\mathcal{S}_p^+}$. En particular se ha obtenido una forma de generar exactamente la distribución de Wishart $WIS_p\left(x, \alpha, 0, \mathrm{I}_p^1; t\right)$.

En resumen, el procedimiento para generar $X \sim WIS_p\left(x, \alpha, 0, \mathrm{I}_p^1; t\right)$ es el siguiente dados $x \in \mathcal{S}_p^+$, $\alpha \geq p-1$ y $t > 0$:

i) Se calcula la descomposición de Cholesky (p, k_r, c_r) de $(x_{i,j})_{2\leq i,j\leq p}$ dado por el Lema A.1 para $r \in \{0, ..., p-1\}$ (Un algoritmo para calcular la descomposición de Cholesky se puede encontrar en [10, pág 145]).

ii) Póngase

$$
\begin{aligned}
\pi &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & p \end{pmatrix}, \\
\bar{x} &= \pi x \pi^\top, \\
\left(u_{\{1,l+1\}}\right)_{1\leq l\leq r} &= (c_r)^{-1}\left(\bar{x}_{\{1,l+1\}}\right)_{1\leq l\leq r} \text{ y} \\
u_{\{1,1\}} &= \bar{x}_{\{1,1\}} - \sum_{k=1}^{r}\left(u_{\{1,k+1\}}\right)^2 \geq 0.
\end{aligned}
$$

iii) Genérese r variables aleatorias independientes $N_2,...,N_{r+1} \sim N(0,1)$ y $(U_t^u)_{\{1,1\}}$ como un proceso CIR al tiempo t empezando por $u_{\{1,1\}}$ resolviendo

$$
\mathrm{d}\left(U_t^u\right)_{\{1,1\}} = (\alpha - 1)\,\mathrm{d}t + 2\sqrt{\left(U_t^u\right)_{\{1,1\}}}\mathrm{d}Z_t^1.
$$

iv) Póngase $(U_t^u)_{\{1,l+1\}} = u_{\{1,l+1\}} + \sqrt{t}N_{l+1}$ y calcúlese

$$
\begin{aligned}
X &= \pi^\top \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & c_r & 0 \\ 0 & k_r & \mathrm{I}_{p-r-1} \end{pmatrix} \\
& \begin{pmatrix} (U_t^u)_{\{1,1\}} + \sum_{k=1}^{r} \left((U_t^u)_{\{1,k+1\}}\right)^2 & \left((U_t^u)_{\{1,l+1\}}\right)_{1\le l\le r}^\top & 0 \\ \left((U_t^u)_{\{1,l+1\}}\right)_{1\le l\le r} & \mathrm{I}_r & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & c_r^\top & k_r^\top \\ 0 & 0 & \mathrm{I}_{p-r-1} \end{pmatrix} \pi.
\end{aligned}
$$

4.2 Generación del Proceso de Wishart General

En este apartado se utilizan resultados obtenidos en la Sección 3.1 para generar el proceso de Wishart general. Se utilizan primero la Proposición 2.2, y el método de la Sección 4.1 para obtener una generación de $WIS_p\left(x, \alpha, 0, \mathrm{I}_p^n; t\right)$. Como segundo paso se utiliza la identidad (3.4) para obtener finalmente cualquier distribución de Wishart $WIS_p\left(x, \alpha, K, Q; t\right)$.

El siguiente algoritmo utiliza una permutación de la primera y la $k-ésima$ coordenada para generar de acuerdo a $WIS_p\left(x, \alpha, 0, e_p^k; t\right)$ para $k \in \{1, ..., p\}$. Entonces por la Proposición 2.2 se obtiene un método para generar $WIS_p\left(x, \alpha, 0, \mathrm{I}_p^n; t\right)$. El método está dado explícitamente por el siguiente algoritmo.

Para $x \in \overline{S_p^+}$, $n \le p$, $\alpha \ge p-1$ y $t > 0$ se genera $X \sim WIS_p\left(x, \alpha, 0, \mathrm{I}_p^n; t\right)$.

Hágase $y = x$.

Para $k = 1$ hasta n

i) póngase $p_{k,1} = p_{1,k} = p_{i,i} = 1$, $i \notin \{1, k\}$, y $p_{i,j} = 0$ en otro caso (permutación de la primera y k-ésima coordenada)

ii) $y = pYp$ donde Y es muestreado de acuerdo a $WIS_p\left(x, \alpha, 0, \mathrm{I}_p^1; t\right)$ utilizando la Sección 4.1.

Al hacer $X = y$ se ha generado una matriz con distribución $WIS_p\left(x, \alpha, 0, \mathrm{I}_p^n; t\right)$.

Ahora, gracias a la identidad (3.4) se describe a continuación un método de generación para $WIS_p\left(x, \alpha, K, Q; t\right)$. El algoritmo se presenta continuación. Nótese que el método de generación funciona para cualquier $\alpha \ge p-1$ y para cualquier distribución de Wishart no central.

Input: $x \in \overline{S_p^+}$, $\alpha \geq p-1$, $K, Q \in \mathcal{M}_p(\mathbb{R}) \in$ y $t > 0$.

Output: $X \sim WIS_p(x, \alpha, K, Q; t)$.

i) Calcular $q_t = \int_0^t \exp(sK) Q^\top Q \exp\left(sK^\top\right) \mathrm{d}s$ y (p, c_n, k_n) una descomposición de Cholesky de q_t/t.

ii) Póngase $\theta_t = p^{-1} \begin{pmatrix} c_n & 0 \\ k_n & \mathrm{I}_{p-n} \end{pmatrix}$ y $m_t = \exp(tK)$.

iii) $X = \theta_t Y \theta_t^\top$ donde $Y \sim WIS_p\left(\theta_t^{-1} m_t x m_t^\top \left(\theta_t^{-1}\right)^\top, \alpha, 0, \mathrm{I}_p^n; t\right)$ se obtiene usando el algoritmo anterior.

Capítulo 5

Comportamiento Dinámico de los Eigenvalores

En este capítulo se considera el comportamiento dinámico de los eigenvalores del proceso de Wishart. Se presenta primero el caso Wishart estándar que fue estudiado por Bru [5] y posteriormente los detalles del caso general, incluyendo una conjetura. Así mismo se da una interpretación del comportamiento dinámico de los eigenvalores y como resultado de esta interpretación se plantea un problema abierto sobre un proceso de Wishart todavía más general que el estudiado hasta ahora.

5.1 Eigenvalores del Proceso de Wishart Estándar

Bru [4] propone una ecuación diferencial estocástica para estudiar el espectro de matrices varianza-covarianza brownianas; motivada por el análisis de componentes principales. También utiliza esta ecuación para realizar un análisis espectral de matrices de correlación. La importancia de este artículo es que realiza los primeros estudios del comportamiento dinámico de los eigenvalores del proceso de Wishart en el caso $WIS_p\,(x, n, 0, \mathrm{I}_p)$ con $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$; encuentra una ecuación diferencial estocástica que satisfacen los eigenvalores en este caso particular para toda $t \in \mathbb{R}^+$ c.s.

Posteriormente Bru [5] proporciona una generalización de los resultados obtenidos en [4] para el caso del proceso de Wishart estándar y obtiene algunas propiedades este proceso. El resultado más general referente al comportamiento dinámico de los eigenvalores del proceso de Wishart estándar que se obtuvo en [5] es el siguiente.

Teorema 5.1 *Si $W \sim \mathcal{BM}_p$ entonces para toda $x \in \overline{\mathcal{S}_p^+}$ con eigenvalores distintos*

$$\lambda_1(0) > ... > \lambda_p(0) \geq 0$$

y para una solución fuerte de (2.3), con probabilidad 1 los eigenvalores de tal solución nunca colisionan para toda $t > 0$ y satisfacen la siguiente ecuación diferencial estocástica:

$$\mathrm{d}\lambda_i(t) = 2\sqrt{\lambda_i(t)}\mathrm{d}\nu_i(t) + \left(\alpha + \sum_{k \neq i} \frac{\lambda_i(t) + \lambda_k(t)}{\lambda_i(t) - \lambda_k(t)}\right)\mathrm{d}t,\ 1 \leq i \leq p \tag{5.1}$$

donde $\nu_1(t), ..., \nu_p(t)$ son movimiento brownianos independientes.

Si se reescribe (5.1) de la siguiente manera

$$\mathrm{d}\lambda_i(t) = \left(2\sqrt{\lambda_i(t)}\mathrm{d}\nu_i(t) + \alpha\mathrm{d}t\right) + \sum_{k \neq i} \frac{\lambda_i(t) + \lambda_k(t)}{\lambda_i(t) - \lambda_k(t)}\mathrm{d}t,$$

se puede concluir que los eigenvalores del proceso de Wishart estándar se comportan como un proceso cuadrado de Bessel $BESQ(\alpha, x)$ mas una expresión que impide la colisión de los eigenvalores.

5.2 Eigenvalores del Proceso de Wishart General

El objetivo principal de esta sección es mostrar el siguiente resultado, generalización de los resultados más generales obtenidos en [5] para el comportamiento dinámico de los eigenvalores.

Teorema 5.2 *Sea $X \sim WIS_p(x, \alpha, K, Q)$ un proceso de Wishart. Supóngase que $x \in S_p^+$ posee p eigenvalores distintos*

$$\lambda_1(0) > \lambda_2(0) > \ldots > \lambda_p(0).$$

Sea

$$\tau = \inf\{s : \lambda_i(s) = \lambda_j(s) \text{ para una pareja } i \neq j\}.$$

Entonces para $t < \tau$, el proceso $(\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_p)$ satisface la ecuación diferencial estocástica

$$\begin{aligned} \mathrm{d}\lambda_i(t) &= 2\sqrt{\lambda_i(t) R_{ii}(t)}\mathrm{d}\nu_i(t) + 2\lambda_i(t)\left(H_t^\top K H_t\right)_{ii}\mathrm{d}t + \alpha R_{ii}(t)\,\mathrm{d}t \\ &\quad + \sum_{k\neq i} \frac{R_{ii}(t)\lambda_k(t) + R_{kk}(t)\lambda_i(t)}{\lambda_i(t) - \lambda_k(t)}\mathrm{d}t \end{aligned}$$

donde $(H_t)_{t\geq 0}$ es el proceso de matrices ortogonales tal que, para cada $t \geq 0$, H_t diagonaliza X_t, $R(t) = H_t^\top Q^\top Q H_t$ y $\nu_1, \nu_2, \ldots, \nu_p$ son movimientos brownianos reales independientes.

La idea de la demostración sigue el siguiente esquema:

i) Utilizar que un proceso de Wishart al estar siempre en el cono $\mathcal{S}_p^+$ es diagonalizable a Λ_t.

ii) Utilizar la fórmula de Itô (Teorema 1.6), el Lema 2.2 y definir varias matrices auxiliares para expresar $\mathrm{d}\Lambda_t$ de una forma conveniente y extraer de la diagonal los $\mathrm{d}\lambda_i's$.

iii) De la expresión favorable de $\mathrm{d}\Lambda_t$ se extraen las partes martingalas local y de variación finita de los $\mathrm{d}\lambda_i's$ utilizando el Teorema 1.5.

Recuérdese que la notación $(\mathrm{d}X)(\mathrm{d}Y)$ significa $\mathrm{d}[X, Y]$.

Para demostrar el Teorema 5.2 se diagonaliza X_t^x (paso i de la idea de la demostración) y se definen ciertos procesos matriciales auxiliares (paso ii de la idea de la demostración). A continuación se desarrollan estos pasos.

Sea $X \sim WIS_p(x, \alpha, K, Q)$ un proceso de Wishart tal que $x \in \mathcal{S}_p^+$ posee p eigenvalores distintos

$$\lambda_1(0) > \lambda_2(0) > \ldots > \lambda_p(0) > 0$$

y definase el tiempo del primer choque de eigenvalores

$$\tau = \inf\{s : \lambda_i(s) = \lambda_j(s) \text{ para una pareja } i \neq j\}.$$

Los eigenvalores $(\lambda_i(t))_{1\leq i\leq p}$ son semimartingalas porque son funciones $\mathcal{C}^\infty$ de $\left\{X_{ij}^x(t)\right\}$ semimartingalas ([13]). Escójase una familia H_t de matrices ortogonales, continuas en t que diagonaliza

X_t^x (Teorema A.1):

$$H_t^\top X_t^x H_t = \Lambda_t = diag\left(\lambda_i\left(t\right)\right). \tag{5.2}$$

Nótese que los coeficientes de H_t son funciones $\mathcal{C}^\infty$ de $\left\{X_{ij}^x\left(t\right)\right\}$ y $\left\{\lambda_i\left(t\right)\right\}$ lo que asegura que las entradas de H_t sean semimartingalas para $t < \tau$ [13].

Aplicando el Teorema 1.6 a (5.2) y utilizando que X_t^x es simétrica para toda $t \geq 0$ se obtiene

$$\begin{aligned}
\mathrm{d}\Lambda &= H^\top \mathrm{d}\left(X^x H\right) + \left(\mathrm{d}H\right)^\top X^x H + \left(\mathrm{d}H\right)^\top \mathrm{d}\left(X^x H\right) \\
&= H^\top \left[X^x \mathrm{d}H + \left(\mathrm{d}X^x\right) H + \left(\mathrm{d}X^x\right)\left(\mathrm{d}H\right)\right] + \left(\mathrm{d}H\right)^\top X^x H \\
&\quad + \left(\mathrm{d}H\right)^\top \left[X^x \mathrm{d}H + \left(\mathrm{d}X^x\right) H + \left(\mathrm{d}X^x\right)\left(\mathrm{d}H\right)\right] \\
&= \left(\mathrm{d}H\right)^\top X^x H + H^\top \left(\mathrm{d}X^x\right) H + H^\top X^x \mathrm{d}H + \left(\mathrm{d}H\right)^\top \left(\mathrm{d}X^x\right) H \\
&\quad + \left(\mathrm{d}H\right)^\top X^x \mathrm{d}H + H^\top \left(\mathrm{d}X^x\right)\left(\mathrm{d}H\right) + \left(\mathrm{d}H\right)^\top \left(\mathrm{d}X^x\right)\left(\mathrm{d}H\right)
\end{aligned}$$

pero $\left(\mathrm{d}H\right)^\top \left(\mathrm{d}X^x\right)\left(\mathrm{d}H\right) = 0$ utilizando la convencional "tabla de multiplicar"

	$\mathrm{d}t$	$\mathrm{d}W_t$	$\mathrm{d}\overline{W}_t$
$\mathrm{d}t$	0	0	0
$\mathrm{d}W_t$	0	$\mathrm{d}t$	0
$\mathrm{d}\overline{W}_t$	0	0	$\mathrm{d}t$

(5.3)

para $\overline{W}_t$, W_t movimientos brownianos independientes, ya que cada sumando de cada entrada de $\left(\mathrm{d}H\right)^\top \left(\mathrm{d}X^x\right)\left(\mathrm{d}H\right)$ contiene productos $\mathrm{d}t\mathrm{d}W_t$ y $\mathrm{d}W_t\mathrm{d}\overline{W}_t$ para distintos e independientes movimientos brownianos.

Por lo tanto

$$\begin{aligned}
\mathrm{d}\Lambda &= \left(\mathrm{d}H\right)^\top X^x H + H^\top \left(\mathrm{d}X^x\right) H + H^\top X^x \mathrm{d}H + \left(\mathrm{d}H\right)^\top \left(\mathrm{d}X^x\right) H \\
&\quad + \left(\mathrm{d}H\right)^\top X^x \mathrm{d}H + H^\top \left(\mathrm{d}X^x\right)\left(\mathrm{d}H\right).
\end{aligned} \tag{5.4}$$

Introduzcamos las siguientes matrices auxiliares.

· $A(t)$ (Logaritmo de H_t) tal que

$$A(0) = 0, \mathrm{d}A = H^{\top}(\mathrm{d}H) + \frac{1}{2}(\mathrm{d}H)^{\top}(\mathrm{d}H)$$

en todo tiempo t, $A(t)$ es antisimétrica y

$$\mathrm{d}H = H(\mathrm{d}A) + \tfrac{1}{2}(\mathrm{d}A)(\mathrm{d}A) \tag{5.5}$$

· $\mathrm{d}\Gamma = \frac{1}{2}(\mathrm{d}A)(\mathrm{d}A)$, $\Gamma(0) = 0$ es un proceso de variación finita porque es la variación cuadrática de A y 5.5 se reescribe como

$$\mathrm{d}H = H(\mathrm{d}A + \mathrm{d}\Gamma) \tag{5.6}$$

· $\mathrm{d}\Phi = H^{\top}(\mathrm{d}X)H(\mathrm{d}A)$.

· $\mathrm{d}\Upsilon = (\mathrm{d}A)^{\top}\Lambda(\mathrm{d}A)$.

Con estas nuevas matrices (5.4) se reescribe como

$$\begin{aligned} \mathrm{d}\Lambda \;\; = \;\; & H^{\top}(\mathrm{d}X^{x})H + \Big((\mathrm{d}A)^{\top}\Lambda + \Lambda(\mathrm{d}A)\Big) \\ & + \Big((\mathrm{d}\Gamma)^{\top}\Lambda + \Lambda(\mathrm{d}\Gamma)\Big) + \mathrm{d}\Phi + \mathrm{d}\Phi^{\top} + \mathrm{d}\Upsilon. \end{aligned} \tag{5.7}$$

Ahora continuamos desarrollando el paso iii) de la idea de la demostración del Teorema principal de esta sección: encontrar la parte martingala local de $\mathrm{d}\lambda_i(t)$ y la parte de variación finita de $\mathrm{d}\lambda_i(t)$.

Proposición 5.1 *Siguiendo con la misma notación e hipótesis del Teorema 5.2, para* $i \in \{1, 2, ...p\}$

$$[\textit{Parte martingala de } \mathrm{d}\lambda_i(t)] = 2\sqrt{\lambda_i(t)\left(H_t^{\top}Q^{\top}QH_t\right)_{ii}}\mathrm{d}\nu_i(t)$$

para $\nu_1(t), \nu_2(t), \ ... \ \nu_p(t)$, *$p$ movimientos brownianos reales independientes.*

Demostración. Obsérvese que como A es antisimétrica entonces $a_{ii} = 0$, $i = 1, ..., p$ por lo que $\Big((\mathrm{d}A)^{\top}\Lambda + \Lambda(\mathrm{d}A)\Big)_{ii} = 0$.

Obsérvese que $\lambda_i(t)\,\mathrm{d}\gamma_{ii}(t)$ es un proceso de variación finita por lo que $\Big((\mathrm{d}\Gamma)^{\top}\Lambda + \Lambda(\mathrm{d}\Gamma)\Big)_{ii}$ es un proceso de variación finita. Además $\mathrm{d}\phi_{ii}$ y $\mathrm{d}\Upsilon_{ii}$ son procesos de variación finita.

Entonces de la parte diagonal de (5.7) se obtiene

$$\begin{aligned}
[\text{Parte martingala de } \mathrm{d}\lambda_i] &= \left[H^\top \left(\mathrm{d}X^x\right) H\right]_{ii} \\
&= \sum_{k,l}^{n} h_{ki} h_{li} \mathrm{d}X^x_{kl}
\end{aligned}$$

Utilizando la ecuación anterior y $(\mathrm{d}M_t)(\mathrm{d}N_t) := \mathrm{d}[M,N]_t$ por facilidad en la notación se obtiene

$$\begin{aligned}
(\mathrm{d}\lambda_i)(\mathrm{d}\lambda_j) &= \left(\sum_{k,l}^{n} h_{ki}h_{li}\mathrm{d}X^x_{kl}\right)\left(\sum_{p,q}^{n} h_{pj}h_{qj}\mathrm{d}X^x_{pq}\right) \\
&= \sum_{k,l,p,q}^{n} h_{ki}h_{li}h_{pj}h_{qj}\left(\mathrm{d}X^x_{kl}\right)\left(\mathrm{d}X^x_{pq}\right) \\
\text{(por Lema 2.2)} \quad &= \sum_{k,l,p,q}^{n} h_{ki}h_{li}h_{pj}h_{qj}\left[X^x_{pk}\left(Q^\top Q\right)_{ql} + X^x_{pl}\left(Q^\top Q\right)_{qk} + X^x_{qk}\left(Q^\top Q\right)_{pl} + X^x_{ql}\left(Q^\top Q\right)_{pk}\right]\mathrm{d}t \\
&= \sum_{k,l,p,q}^{n} h_{ki}h_{li}h_{pj}h_{qj}X^x_{pk}\left(Q^\top Q\right)_{ql}\mathrm{d}t + \sum_{k,l,p,q}^{n} h_{ki}h_{li}h_{pj}h_{qj}X^x_{pl}\left(Q^\top Q\right)_{qk}\mathrm{d}t \\
&\quad + \sum_{k,l,p,q}^{n} h_{ki}h_{li}h_{pj}h_{qj}X^x_{qk}\left(Q^\top Q\right)_{pl}\mathrm{d}t + \sum_{k,l,p,q}^{n} h_{ki}h_{li}h_{pj}h_{qj}X^x_{ql}\left(Q^\top Q\right)_{pk}\mathrm{d}t \\
&= \sum_{k,l,p,q}^{n} h_{ki}X^x_{pk}h_{pj}h_{qj}\left(Q^\top Q\right)_{ql}h_{li}\mathrm{d}t + \sum_{k,l,p,q}^{n} h_{pj}X^x_{pl}h_{li}h_{ki}\left(Q^\top Q\right)_{qk}h_{qj}\mathrm{d}t \\
&\quad + \sum_{k,l,p,q}^{n} h_{ki}X^x_{qk}h_{qj}h_{pj}\left(Q^\top Q\right)_{ql}h_{li}\mathrm{d}t + \sum_{k,l,p,q}^{n} h_{qj}X^x_{ql}h_{li}h_{ki}\left(Q^\top Q\right)_{pk}h_{pj}\mathrm{d}t \\
&= 2\sum_{k,l,p,q}^{n}\left(h_{ki}X^x_{pk}h_{pj}\right)\left(h_{qj}\left(Q^\top Q\right)_{ql}h_{li}\right)\mathrm{d}t + 2\sum_{k,l,p,q}^{n}\left(h_{pj}X^x_{pl}h_{li}\right)\left(h_{ki}\left(Q^\top Q\right)_{qk}h_{qj}\right)\mathrm{d}t \\
&= 2\left(\sum_{k,p}^{n} h_{ki}X^x_{pk}h_{pj}\right)\left(\sum_{l,q}^{n} h_{qj}\left(Q^\top Q\right)_{ql}h_{li}\right)\mathrm{d}t \\
&\quad 2\left(\sum_{l,p}^{n} h_{pj}X^x_{pl}h_{li}\right)\left(\sum_{k,q}^{n} h_{ki}\left(Q^\top Q\right)_{qk}h_{qj}\right)\mathrm{d}t \\
&= 2\left(H^\top\left(X^x\right)^\top H\right)_{ij}\left(H^\top Q^\top Q H\right)_{ji}\mathrm{d}t + 2\left(H^\top\left(X^x\right)^\top H\right)_{ji}\left(H^\top Q^\top Q H\right)_{ij}\mathrm{d}t \\
&= 2\lambda_i\left(H^\top Q^\top Q H\right)_{ii}\delta_{ij}\mathrm{d}t + 2\lambda_i\left(H^\top Q^\top Q H\right)_{ii}\delta_{ij}\mathrm{d}t \\
&= 4\lambda_i\left(H^\top Q^\top Q H\right)_{ii}\delta_{ij}\mathrm{d}t. \qquad (5.8)
\end{aligned}$$

A continuación se utiliza el Teorema 1.5 para concluir. Se muestra que se cumplen las hipótesis. Siguiendo la notación del Teorema 1.5 defínanse los siguientes procesos y recuérdese que λ_i es una semimartingala porque es función continua de X^x el proceso de Wishart que es semimartingala por lo que λ_i se escribe como la suma de una martingala local y un proceso de variación finita:

$$\begin{aligned}
M_t^i &: = [\text{Parte martingala local de } \lambda_i]_t\,,\\
\Phi_{i,j}(t) &: = 4\lambda_i(t)\left(H_t^\top Q^\top Q H_t\right)_{i,i}\delta_{i,j},\\
\Psi_{i,j}(t) &: = 2\sqrt{\lambda_i(t)\left(H_t^\top Q^\top Q H_t\right)_{i,i}}\delta_{i,j}.
\end{aligned}$$

Las condiciones sobre la integrabilidad de M_t^i, $\Phi_{i,j}(t)$ y $\Psi_{i,j}(t)$ que se piden se cumplen porque son funciones continuas de X^x solución de una ecuación diferencial estocástica. Además se cumplen las siguientes relaciones:

$$\begin{aligned}
\left[M^i, M^j\right]_t &= [\lambda_i, \lambda_j]_t\\
\text{por (5.8)} &= \int_0^t 4\lambda_i(s)\left(H_s^\top Q^\top Q H_s\right)_{ii}\delta_{ij}\mathrm{d}s\\
&= \int_0^t \Phi_{i,j}(s)\,\mathrm{d}s,
\end{aligned}$$

y

$$\begin{aligned}
\Phi_{i,j}(t) &= 4\lambda_i(t)\left(H_t^\top Q^\top Q H_t\right)_{i,i}\delta_{i,j}\\
&= \left(2\sqrt{\lambda_i(t)\left(H_t^\top Q^\top Q H_t\right)_{i,i}}\right)\left(2\sqrt{\lambda_i(t)\left(H_t^\top Q^\top Q H_t\right)_{i,i}}\right)\delta_{i,j}\\
&= \sum_{k=1}^{p}\Psi_{ik}(t)\,\Psi_{jk}(t)\,.
\end{aligned}$$

Por Teorema 1.5 existen p movimientos brownianos reales independientes $\nu_1(t), ..., \nu_p(t)$ tales que en una extensión del espacio original

$$[\text{Parte martingala de } \mathrm{d}\lambda_i(t)] = 2\sqrt{\lambda_i(t)\left(H_t^\top Q^\top Q H_t\right)_{ii}}\mathrm{d}\nu_i(t)\,.$$

■

Ahora se calcula la parte de variación finita de $\mathrm{d}\lambda_i$.

Proposición 5.2 *Siguiendo con la notación e hipótesis del Teorema 5.2, si* $R_t = H_t^\top Q^\top Q H_t$ *entonces*

$$\left[\begin{array}{c} \textit{Parte variación} \\ \textit{finita de } \mathrm{d}\lambda_i \end{array}\right] = \left(2\lambda_i \left(H^\top K H\right)_{ii} + \alpha R_{ii} + \sum_{k\neq i} \frac{R_{ii}\lambda_{kk} + R_{kk}\lambda_{ii}}{\lambda_i - \lambda_k}\right) \mathrm{d}t \tag{5.9}$$

Antes de mostrar esta proposición será necesario enunciar las siguientes proposiciones auxiliares cuyas demostraciones se encuentran en el Apéndice C.

Proposición 5.3 *Si* $q \neq j$ *entonces*

$$\begin{aligned} (\mathrm{d}a_{qj})\,(\mathrm{d}X_{kl}^x) \;&=\; \left[\left(H^\top Q^\top Q\right)_{jl}\left(H^\top X^x\right)_{qk} + \left(H^\top Q^\top Q\right)_{jk}\left(H^\top X^x\right)_{ql}\right]\frac{\mathrm{d}t}{(\lambda_j - \lambda_q)} \\ &+ \left[\left(H^\top Q^\top Q\right)_{ql}\left(H^\top X^x\right)_{jk} + \left(H^\top Q^\top Q\right)_{qk}\left(H^\top X^x\right)_{jl}\right]\frac{\mathrm{d}t}{(\lambda_j - \lambda_q)}. \end{aligned} \tag{5.10}$$

Proposición 5.4

$$\mathrm{d}\phi_{jj} = \sum_{q\neq j} \frac{\left(HQ^\top QH\right)_{jj}\lambda_{qq} + \left(H^\top Q^\top QH\right)_{qq}\lambda_{jj}}{\lambda_j - \lambda_q}\mathrm{d}t. \tag{5.11}$$

Proposición 5.5 *Si* $i \neq k$

$$(\lambda_i - \lambda_k)^2 (\mathrm{d}a_{ki})^2 = \lambda_i \left(H^\top Q^\top QH\right)_{kk}\mathrm{d}t + \lambda_{kk}\left(H^\top Q^\top QH\right)_{ii}\mathrm{d}t \tag{5.12}$$

Proposición 5.6 *Si* $i \neq k$

$$-(\lambda_i - \lambda_k)^2 (\mathrm{d}a_{ik})(\mathrm{d}a_{ki}) = \lambda_i \left(H^\top Q^\top QH\right)_{kk} + \lambda_{kk}\left(H^\top Q^\top QH\right)_{ii}\mathrm{d}t. \tag{5.13}$$

Siguiendo con ecuaciones auxiliares obsérvese que de la parte diagonal de (5.7) se obtiene

$$\begin{aligned} [\text{Parte ver finita de } \mathrm{d}\lambda_i] \;&=\; \left[\text{Parte ver finita de } \mathrm{d}\lambda_i \text{ de } \left[H^\top (\mathrm{d}X^x)\,H\right]_{ii}\right] \\ &\quad +2\lambda_i \mathrm{d}\gamma_{ii} + 2\mathrm{d}\phi_{ii} + \mathrm{d}\Upsilon_{ii} \end{aligned} \tag{5.14}$$

y de la parte no diagonal de (5.7) se obtiene

$$\begin{aligned}(\lambda_j - \lambda_i)(\mathrm{d}a_{ij}) &= \sum_{k,l} h_{ki} h_{ij} \mathrm{d}x_{kl} \\ &\quad + (\lambda_j + \lambda_i)\,\mathrm{d}\gamma_{ij} + \mathrm{d}\phi_{ij} + \mathrm{d}\phi_{ji} + \mathrm{d}\Upsilon_{ij}\end{aligned} \tag{5.15}$$

siempre que $i \neq j$.

Además

$$\begin{aligned}\text{(por definición) } \mathrm{d}\gamma_{ii} &= \tfrac{1}{2}\sum_{k\neq i} (\mathrm{d}a_{ik})(\mathrm{d}a_{ki}) \\ \text{(usando (5.13))} &= -\tfrac{1}{2}\sum_{k\neq i} \frac{\lambda_i \left(H^\top Q^\top Q H\right)_{kk} + \lambda_k \left(H^\top Q^\top Q H\right)_{ii}}{(\lambda_i - \lambda_k)^2}\mathrm{d}t\end{aligned} \tag{5.16}$$

$$\begin{aligned}\text{(por definición) } \mathrm{d}\Upsilon_{ii} &= \sum_{k\neq i} (\mathrm{d}a_{ki})^2 \lambda_k \\ \text{(por 5.12)} &= \sum_{k\neq i} \frac{\lambda_i \left(H^\top Q^\top Q H\right)_{kk} + \lambda_k \left(H^\top Q^\top Q H\right)_{ii}}{(\lambda_i - \lambda_k)^2}\lambda_k \mathrm{d}t\end{aligned} \tag{5.17}$$

Ahora sí se puede demostrar la Proposición 5.2.

Demostración de la Proposición 5.2. La primera de las siguientes igualdades se obtiene utilizando (2.4)

$$\begin{aligned}\begin{bmatrix} \textit{Parte variación} \\ \textit{finita de } \left(H^\top (\mathrm{d}S) H\right)_{ii} \end{bmatrix} &= \left[H^\top \left(SK + K^\top S + \alpha Q^\top Q\right) H\right]_{ii} \mathrm{d}t \\ &= \left(H^\top S K H + H^\top K^\top S H + \alpha H^\top Q^\top Q H\right)_{ii} \mathrm{d}t \\ \text{(usando que } H^\top H \text{ es } \mathrm{I}_d) &= \left(H^\top S H H^\top K H + H^\top K^\top H H^\top S H + \alpha H^\top Q^\top Q H\right)_{ii} \mathrm{d}t \\ &= \left(\Lambda H^\top K H\right)_{ii} \mathrm{d}t + \left(H^\top K^\top H \Lambda\right)_{ii} \mathrm{d}t + \alpha \left(H^\top Q^\top Q H\right)_{ii} \mathrm{d}t \\ &= \lambda_i \left(H^\top K H\right)_{ii} \mathrm{d}t + \left(\Lambda^\top H^\top K H\right)_{ii} \mathrm{d}t + \alpha \left(H^\top Q^\top Q H\right)_{ii} \mathrm{d}t \\ &= \left[2\lambda_i \left(H^\top K H\right)_{ii} + \alpha \left(H^\top Q^\top Q H\right)_{ii}\right] \mathrm{d}t.\end{aligned} \tag{5.18}$$

Entonces por (5.14), (5.16), (5.17), (5.11) y (5.18) y usando la notación $R_t = H_t^\top Q^\top Q H_t$.

$$
\begin{aligned}
\begin{bmatrix} \textit{Parte variación} \\ \textit{finita de } \mathrm{d}\lambda_i \end{bmatrix} &= 2\lambda_i \left(H^\top K H\right)_{ii} \mathrm{d}t + \alpha R_{ii} \mathrm{d}t \\
&\quad -2\lambda_i \tfrac{1}{2} \sum_{k\neq i} \frac{\lambda_i R_{kk} + \lambda_k R_{ii}}{(\lambda_i - \lambda_k)^2} \mathrm{d}t + 2 \sum_{k\neq i} \frac{R_{ii}\lambda_k + R_{kk}\lambda_i}{\lambda_i - \lambda_k} \mathrm{d}t \\
&\quad + \sum_{k\neq i} \frac{\lambda_i R_{kk} + \lambda_k R_{ii}}{(\lambda_i - \lambda_k)^2} \lambda_k \mathrm{d}t \\
&= 2\lambda_i \left(H^\top K H\right)_{ii} \mathrm{d}t + \alpha \left(H^\top Q^\top Q H\right)_{ii} \mathrm{d}t \\
&\quad + \sum_{k\neq i} \frac{\left(\lambda_i R_{kk} + \lambda_{kk} R_{ii}\right)\lambda_k - \left(\lambda_i R_{kk} + \lambda_k R_{ii}\right)\lambda_i}{(\lambda_i - \lambda_k)^2} \mathrm{d}t \\
&\quad + 2 \sum_{k\neq i} \frac{R_{ii}\lambda_{kk} + R_{kk}\lambda_{ii}}{\lambda_i - \lambda_k} \mathrm{d}t \\
&= 2\lambda_i \left(H^\top K H\right)_{ii} \mathrm{d}t + \alpha \left(H^\top Q^\top Q H\right)_{ii} \mathrm{d}t \\
&\quad + \sum_{k\neq i} \frac{\left(\lambda_i R_{kk} + \lambda_{kk} R_{ii}\right)\left(\lambda_k - \lambda_i\right)}{(\lambda_i - \lambda_k)^2} \mathrm{d}t + 2 \sum_{k\neq i} \frac{R_{ii}\lambda_{kk} + R_{kk}\lambda_{ii}}{\lambda_i - \lambda_k} \mathrm{d}t \\
&= 2\lambda_i \left(H^\top K H\right)_{ii} \mathrm{d}t + \alpha \left(H^\top Q^\top Q H\right)_{ii} \mathrm{d}t \\
&\quad - \sum_{k\neq i} \frac{\left(\lambda_i R_{kk} + \lambda_{kk} R_{ii}\right)}{\lambda_i - \lambda_k} \mathrm{d}t + 2 \sum_{k\neq i} \frac{R_{ii}\lambda_{kk} + R_{kk}\lambda_{ii}}{\lambda_i - \lambda_k} \mathrm{d}t \\
&= 2\lambda_i \left(H^\top K H\right)_{ii} \mathrm{d}t + \alpha \left(H^\top Q^\top Q H\right)_{ii} \mathrm{d}t + \sum_{k\neq i} \frac{R_{ii}\lambda_{kk} + R_{kk}\lambda_{ii}}{\lambda_i - \lambda_k} \mathrm{d}t.
\end{aligned}
$$

■

El Teorema 5.2 se ha probado al utilizando las Proposiciones 5.1 y 5.2.

5.3 Imposibilidad de Colisión

El objetivo de esta sección es probar que los eigenvalores de $X \sim WIS_p\left(x, \alpha, K, Q\right)$ de un proceso de Wishart nunca colisionan para todo tiempo $t \geq 0$ siempre que los eigenvalores de $x \in \mathcal{S}_p^+$, la condición inicial, sean distintos. Es decir, el objetivo es mostrar que

$$
\tau = \inf\left\{s : \lambda_i\left(s\right) = \lambda_j\left(s\right) \ \text{para una pareja } i \neq j\right\}
$$

es ∞ casi seguramente.

No se ha podido demostrar aún que $\tau = \infty$ c.s. pero se dan los detalles de una posible demostración:

i) La idea es encontrar una función real U que funcione para utilizar el argumento de McKean. La función debe estar definida en la cámara de Wely

$$d = \{(x_1, x_2, ..., x_p) \in \mathbb{R}^p : x_1 > x_2 > ... > x_p\}$$

con derivadas continuas y tal que $\mathfrak{U}(t) = U(\lambda_1(t), \lambda_2(t), ..., \lambda_p(t))$ es una martingala local que tiende a ∞ o $-\infty$ cuando dos eigenvalores se acercan entre sí. Una vez encontrada la función U se procede por contradicción suponiendo que $\tau < \infty$ y se utiliza el argumento de McKean (Teorema 1.14) junto con el proceso $\mathfrak{U}(t)$ para llegar a la contradicción deseada y concluir. A continuación los detalles.

ii) Ya se ha establecido que $\mathrm{d}\lambda_i = \mathrm{d}m_i + \psi_i \mathrm{d}t$ donde m_i es una martingala local.

iii) Aplicando la fórmula de Itô a $\mathfrak{U}(t)$, se obtiene

$$\mathrm{d}\mathfrak{U} = \sum_i^p \frac{\partial U}{\partial \lambda_i} \mathrm{d}m_i + \sum_i^p \frac{\partial U}{\partial \lambda_i} \psi_i \mathrm{d}t + \frac{1}{2} \sum_{i,j}^p \frac{\partial^2 U}{\partial \lambda_i \partial \lambda_j} (\mathrm{d}\lambda_i)(\mathrm{d}\lambda_j) \tag{5.19}$$

como $(\mathrm{d}\lambda_i)(\mathrm{d}\lambda_j) = 4\lambda_i \left(H^\top Q^\top Q H\right)_{ii} \delta_{ij} \mathrm{d}t$ es de variación finita, entonces $\mathfrak{U}(t)$ es una martingala local si la parte de variación finita de (5.19) es cero, es decir que:

$$\sum_i^p \frac{\partial U}{\partial \lambda_i} \left(\begin{array}{c} 2\lambda_i(t) \left(H_t^\top K H_t\right)_{ii} \\ +\alpha R_{ii}(t) + \sum_{k \neq i} \frac{R_{ii}(t)\lambda_k(t) + R_{kk}(t)\lambda_i(t)}{\lambda_i(t) - \lambda_k(t)} \end{array} \right) + 2 \sum_i^p \frac{\partial^2 U}{\partial \lambda_i^2} \lambda_i R_{ii}(t) = 0 \tag{5.20}$$

es decir que se desea encontrar o al menos demostrar que existe una solución a la ecuación diferencial parcial

$$\sum_i^p \frac{\partial U}{\partial x_i} \left(2\mathrm{d}_i x_i + \alpha R_i + \sum_{k \neq i} \frac{R_i x_k + R_k x_i}{x_i - x_k} \right) + 2 \sum_i^p R_i \frac{\partial^2 U}{d x_i^2} x_i = 0$$

tal que $\lim_{(x_1,...,x_p) \to \mathcal{A}} U(x_1, ..., x_p) = \infty$ o $-\infty$ donde $\mathcal{A} = \cup_{i<j<p} \{x_i = x_j\}$ y las $R_i's$ son

constantes dadas.

iv) Sabiendo que la U requerida existe, entonces se define

$$\mathfrak{U}(t) := U(\lambda_1(t), \lambda_2(t), ..., \lambda_p(t))$$

que es continua en $[0, \tau)$ y tal que

$$\lim_{t \to \tau} \mathfrak{U}(t) = \infty \text{ por ejemplo}$$

es una martingala local. Se concluye que $\tau = \infty$ c.s. utilizando Teorema 1.14 tomando $r_t = (\lambda_1(t), \lambda_2(t), ..., \lambda_p(t))$, y $h = U$.

5.4 Interpretación y Conjetura de Existencia de un Proceso de Wishart más General

En la sección anterior se mostró que el comportamiento de los eigenvalores del proceso de Wishart general es descrito por la siguiente ecuación, condicionado a que los eigenvalores sean distintos

$$\begin{aligned} \mathrm{d}\lambda_i(t) &= 2\sqrt{\lambda_i(t)}\sqrt{R_{ii}(t)}\mathrm{d}\nu_i(t) + 2\lambda_i(t)\left(H_t^\top K H_t\right)_{ii}\mathrm{d}t + \alpha R_{ii}(t)\,\mathrm{d}t \\ &+ \sum_{k \neq i} \frac{R_{ii}(t)\lambda_k(t) + R_{kk}(t)\lambda_i(t)}{\lambda_i(t) - \lambda_k(t)}\mathrm{d}t \end{aligned} \tag{5.21}$$

donde $\{R(t)\}_{t \geq 0}$ es un proceso matricial definido en función del proceso de Wishart según el Teorema 5.2 (con la notación de este teorema es $\{R_t\}_{t \geq 0}$).

En esta sección se describe una posible interpretación de (5.21), a partir de la siguiente propuesta que hacemos de un proceso de Wishart aún más general que el presentado en la Sección 2.2.

Sea $W \sim \mathcal{BM}_p$, $(Q_t)_{t \geq 0}$ y $(K_t)_{t \geq 0}$ procesos matriciales en $\mathcal{M}_p(\mathbb{R})$, $x \in \mathcal{S}_p^+$ el valor inicial y $\alpha > 0$ un número real no negativo. Sea $(X_t^x)_{t \geq 0}$ la "solución" a la siguiente ecuación diferencial estocástica

$$\mathrm{d}X_t^x = \sqrt{X_t^x}\mathrm{d}W_t Q_t + Q_t^\top \mathrm{d}W_t^\top \sqrt{X_t^x} + \left(X_t^x K_t + K_t^\top X_t^x + \alpha Q_t^\top Q_t\right)\mathrm{d}t,\ X_0^x = x. \tag{5.22}$$

Consideremos primero el caso en que Q_t y K_t son funciones matriciales deterministas.

Obsérvese que si $Q_t = Q$ y $K_t = K$ $\forall t \in \mathbb{R}^+$ son constantes entonces la ecuación (5.22) corresponde a el proceso de Wishart general (2.4). .

El proceso $(X_t)_{t\geq 0}$ definido por (5.22), que por el momento supondremos que existe, permite interpretar el comportamiento dinámico de los eigenvalores del proceso de Wishart general de la siguiente manera:

La parte derecha de la ecuación (5.21) es la suma de dos términos. El primero de ellos es el siguiente

$$2\sqrt{\lambda_i(t)}\sqrt{R_{ii}(t)}\mathrm{d}\nu_i(t) + \left[2\lambda_i(t)\left(H_t^\top K H_t\right)_{ii} + \alpha R_{ii}(t)\right]\mathrm{d}t. \tag{5.23}$$

Obsérvese que condicionado al proceso de eigenvectores H_t, para cada t se tiene que $\widetilde{Q}_t = \sqrt{R_{ii}(t)}\Big| H_t$ y $\widetilde{K}_t = \left(H_t^\top K H_t\right)_{ii}\Big| H_t$ son procesos "deterministas" y (5.23) puede interpretarse como un "proceso de Wishart" definido por (5.22) para $p = 1$, o sea un proceso cuadrado de Bessel generalizado.

El segundo término de la parte derecha de la ecuación (5.22) es

$$\sum_{k\neq i} \frac{R_{ii}(t)\lambda_k(t) + R_{kk}(t)\lambda_i(t)}{\lambda_i(t) - \lambda_k(t)}\mathrm{d}t \tag{5.24}$$

y se puede interpretar como un término que impide la colisión de los eigenvalores del proceso de Wishart general, siempre que se haya mostrado que efectivamente los eigenvalores no colisionan, por ejemplo con la modificación del argumento de McKean que conjeturamos en la sección anterior que resuelve este problema.

Consideremos ahora el caso en que $(Q_t)_{t\geq 0}$ y $(K_t)_{t\geq 0}$ son procesos estocásticos matriciales a los que al menos debemos pedirles que sean progresivamente medibles para que su integral de Itô esté bien definida. Creemos que es necesario que estos procesos sean independientes de $(W_t)_{t\geq 0}$ para que en un estudio posterior se obtenga resultados no triviales.

Entonces, el término (5.23) es la solución a (5.22) que es una versión más general del proceso de Wishart. La expresión (5.24) puede ser interpretado como un término que impide la colisión de los eigenvalores del proceso de Wishart.

Obsérvese que el proceso de Wishart propuesto en esta sección tiene problemas de definición para ambos casos en que $(Q_t)_{t\geq 0}$ y $(K_t)_{t\geq 0}$ son deterministas o procesos estocásticos. Es necesario mostrar que $(X_t)_{t\geq 0}$ existe y es único. Es decir, mostrar que existe una solución fuerte, o al menos débil, a la ecuación (5.22).

En principio se puede seguir la demostración del Teorema 2.1 para mostrar que $(X_t)_{t\geq 0}$ sí existe. El mismo argumento es aplicable para proponer a $\mathcal{S}_p^+$ como el espacio donde la solución a (5.22) mantiene c.s. hasta el tiempo de paro correspondiente. Pero es necesaria una extensión del Teorema de existencia y solución de ecuaciones diferenciales estocásticas a partir de semimartingalas continuas (Teorema 1.10): debe ser válido para una f con un dominio de definición más amplio y la condición de Lipschitz sobre f modificada. Un resultado que es un buen candidato para mostrar la existencia y unicidad que se requiere es [18, Sección 6.10].

Una vez mostrado que existe el proceso de Wishart hasta el tiempo de paro τ en que la solución X_t se encuentra en la frontera de $\mathcal{S}_p^+$ hay que mostrar que $\tau = \infty$ c.s. La demostración del Teorema 2.4 y la del Teorema 2.5, que afirma $\tau = \infty$ para Wishart general, se puede tratar de extender a este caso.

Una vez mostrado que el proceso de Wishart definido por (5.22) sí existe y es único se puede estudiar el proceso de los eigenvalores del proceso de Wishart propuesto en esta sección.

Apéndice A

Álgebra de Matrices

Resumimos varios resultados de matrices positivas definidas en el siguiente teorema.

Teorema A.1 (Matrices Positivas Definidas) **i)** *$A \in \mathcal{S}_p^+$ sí y sólo si $x^\top Ax > 0$ para toda $x \in \mathbb{R}^p$ distinta de $\overrightarrow{0}$.*

ii) *$A \in \mathcal{S}_p^+$ sí y sólo si $x^\top Ax > 0$ para toda $x \in \mathbb{R}^p$ tal que $\|x\| = 1$.*

iii) *$A \in \mathcal{S}_p^+$ sí y sólo si A es diagonalizable ortogonalmente con eigenvalores positivos, es decir que existe una matriz ortogonal $U \in \mathcal{M}_p(\mathbb{R})$, $UU^\top = \mathrm{I}_p$, tal que $A = U\Lambda U^\top$ con $\Lambda = diag(\lambda_1, ...\lambda_p)$, donde $\lambda_i > 0$, $i = 1, ...p$, son eigenvalores positivos de A.*

iv) *Si $A \in \mathcal{S}_p^+$ entonces $A^{-1} \in S_p^+$.*

v) *$A^\top A \in \mathcal{S}_p^+$ $\forall A \in \mathcal{G}_p(\mathbb{R})$.*

vi) *$A \in \overline{\mathcal{S}_p^+}$ sí y sólo si $x^\top Ax \geq 0$ $\forall x \in \mathbb{R}^p : x \neq 0$.*

vii *$A \in \overline{\mathcal{S}_p^+}$ sí y sólo si A es diagonalizable ortogonalmente con eigenvalores no negativos.*

viii) *Para toda $M \in \mathcal{M}_p(\mathbb{R})$ $M^\top M \in \overline{\mathcal{S}_p^+}$.*

Definición A.1 (Raíz Cuadrada de una Matriz Semipositiva Definida) *Sea $A \in \overline{\mathcal{S}_p^+}$. De acuerdo al Teorema A.1 existe una matriz ortogonal $U \in \mathcal{M}_p(\mathbb{R})$, $UU^\top = \mathrm{I}_p$, tal que $A = U\Lambda U^\top$ con $\Lambda = diag(\lambda_1, ...\lambda_p)$, donde $\lambda_i \geq 0$, $i = 1, ...p$. Definase $\sqrt{A} = Udiag\left(\sqrt{\lambda_1}, ...\sqrt{\lambda_p}\right)U^\top$.*

Definición A.2 (Función *vec***)** *Sea* $A \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{R})$ *con columnas* $a_i \in \mathbb{R}^m$*,* $i = 1, ..., n$*. Defínase la función* $vec : \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}^{mn}$ *como*

$$vec\,(A) = \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}.$$

Para matrices simétricas se define el siguiente operador.

Definición A.3 (Función *vech***)** *Sea* $S \in \mathcal{S}_p$*. La función* $vech : \mathcal{S}_p \to \mathbb{R}^{\frac{p(p+1)}{2}}$ *se define como*

$$vech\,(S) = \begin{pmatrix} S_{11} \\ S_{21} \\ S_{22} \\ \vdots \\ S_{1p} \\ \vdots \\ S_{pp} \end{pmatrix}.$$

La definición siguiente es necesaria para definir la función Hipergeométrica de matrices, la cual es utilizada en la definición de una distribución de Wishart.

Definición A.4 (Polinomio Homogéneo) *Un polinomio homogéneo simétrico de grado* k *en* $x_1, ...x_m$ *es un polinomio tal que no cambia bajo permutaciones de los subíndices y tal que todo término del polinomio tiene grado* k*.*

A continuación se definirá el polinomio zonal. Para ello se necesitan las siguientes consideraciones. Sea $S \in \mathcal{S}_p$ y V_k un espacio vectorial de polinomios homogéneos $\phi(S)$ de grado k en $\frac{1}{2}p(p+1)$ elementos distintos de S. El espacio V_k se puede descomponer en una suma directa de subespacios irreducibles V_κ donde $\kappa = (k_1, ..., k_p)$, $k_1 + ... + k_p = k$ y $k_1 \geq \ldots \geq k_p$. Entonces el polinomio $(\mathrm{Tr}S)^k$ tiene una descomposición única de polinomios $C_\kappa(S) \in V_\kappa$ como

$$(\mathrm{Tr}S)^k = \sum_\kappa C_\kappa(S).$$

Entonces

Definición A.5 *El polinomio zonal* $C_\kappa(S)$ *es el componente de* $(\mathrm{Tr}S)^k$ *en el subespacio* V_κ.

Ahora se puede definir la función Hipergeométrica.

Definición A.6 (Función Hipergeométrica de Matrices) *La función Hipergeométrica con argumento en las matrices está definida como*

$$_mF_n(a_1,...,a_m;b_1,...,b_n;S)=\sum_{k=0}^{\infty}\sum_{\kappa}\frac{(a_1)_\kappa\ldots(a_m)_\kappa C_\kappa(S)}{(b_1)_\kappa\ldots(b_n)_\kappa k!} \tag{A.1}$$

donde $a_i,\ b_j\in\mathbb{R}$, $S\in\mathcal{S}_p$ *y* $\sum_\kappa$ *es la suma sobre todas las particiones* κ *de* k *y* $(a)_\kappa=\prod_{j=1}^{p}\left(a-\frac{1}{2}(j-1)\right)_{k_j}$ *denota el coeficiente hipergeométrico generalizado con* $(x)_{k_j}=x(x+1)\ldots(x+x_j-1)$.

Para mas detalles acerca de la función Hipergeométrica de matrices, convergencia de (A.1) y de los polinomios zonal refiérase a [11, cap 1.5 y 1.6].

Lema A.1 (Descomposición Cholesky) *Sea* $q\in\overline{\mathcal{S}_p^+}$ *una matriz de rango* r. *Entonces existe una matriz permutación* d, *una matriz triangular inferior invertible* $c_r\in\mathcal{G}_r(\mathbb{R})$ *y* $k_r\in\mathcal{M}_{p-r\times r}(\mathbb{R})$ *tal que:*

$$dqd^\top=cc^\top,\ c=\begin{pmatrix}c_r & 0\\ k_r & 0\end{pmatrix}.$$

La terna (c_r,k_r,d) *es llamada descomposición de Cholesky extendida de* q. *Además,* $\tilde{c}=\begin{pmatrix}c_r & 0\\ k_r & \mathrm{I}_{p-r}\end{pmatrix}\in\mathcal{G}_p(\mathbb{R})$, *y se tiene que*

$$q=\left(\tilde{c}^\top d\right)^\top \mathrm{I}_p^r\tilde{c}^\top p.$$

El siguiente corolario se puede encontrar en [12, Corolario 4.3.3]. Es útil en la demostración de la existencia del proceso de Wishart.

Corolario A.1 *Sean* $A,B\in\mathcal{M}_p$ *hermitianas. Supóngase que* $B\in\overline{S_p^+}$ *y los eigenvalores de* A *y* $A+B$ *se ordenan en forma creciente entonces*

$$\lambda_k(A)\leq\lambda_k(A+B),\ k=1,...,p.$$

Apéndice B

Matrices Aleatorias

En este apéndice se proporcionan algunos resultados y definiciones de matrices aleatorias.

Definición B.1 (Borel-σ-álgebra) *Sea $(X, \mathcal{T})$ un espacio topológico. La Borel-σ-álgebra en X es la σ-álgebra más pequeña que contiene a $\mathcal{T}$. Denotada como $\mathcal{B}(X)$.*

Al trabajar con los espacios $\mathbb{R}^n$ o $\mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{R})$ se asumirá que tiene la topología natural, que es la unión de todas las posibles bolas abiertas, dada la métrica euclidiana. Se escribirá $\mathcal{B}$ en lugar de $\mathcal{B}(\mathbb{R})$, $\mathcal{B}^n$ en lugar de $\mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$ y $\mathcal{B}^{m,n}$ en lugar de $\mathcal{B}(\mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{R}))$.

Definición B.2 (Integral Matricial I) *Sea $f : \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$ una función $\mathcal{B}^{m,n}, \mathcal{B}-$medible y $M \in \mathcal{B}^{m,n}$ un subconjunto medible de $\mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{R})$ y denótese con λ la medida de Lebesgue en $(\mathbb{R}^{mn}, \mathcal{B}^{mn})$. La integral de f sobre M está definida como*

$$\int_M f(X)\, dX := \int_M f(X)\, d(\lambda \circ vec)(X) = \int_{vec(M)} f \circ vec^{-1}(x)\, d\lambda(x).$$

Para la definición de la operación *vec* y *vech* refiérase a las Definiciones A.2 y A.3.

Obsérvese que $\mathcal{S}_p$ es isomorfo a $\mathbb{R}^{\frac{p(p+1)}{2}}$. Es cierto que para $p \geq 2$ $\mathcal{S}_p$ es un subespacio real de $\mathcal{M}_p$ y por lo tanto bajo la medida $\lambda \circ vec$ es un conjunto de medida 0. Entonces se requiere otra medida en el subespacio de matrices simétricas porque la integral definida arriba asigna medida cero sobre subconjunto de $\mathcal{S}_p$.

Definición B.3 (Integral Matricial II) *Sea* $f : \mathcal{S}_p \to \mathbb{R}$ *una función* $\mathcal{B}(\mathcal{S}_p)$ *,* $\mathcal{B}-$*medible y* $M \in \mathcal{B}(\mathcal{S}_p)$ *un subconjunto medible de* $\mathcal{S}_p$ *y denótese con* λ *la medida de Lebesgue en* $\left(\mathbb{R}^{\frac{p(p+1)}{2}}, \mathcal{B}^{\frac{p(p+1)}{2}}\right)$*. La integral de* f *sobre* M *está definida como*

$$\int_M f(X)\, dX := \int_M f(X)\, d(\lambda \circ vech)(X) = \int_{vech(M)} f \circ vech^{-1}(x)\, d\lambda(x).$$

La medida $\lambda \circ vech$ *será llamada medida de Lebesgue en* $(\mathcal{S}_p, \mathcal{B}(\mathcal{S}_p))$*.*

Definición B.4 (Matriz aleatoria) *Una* $m \times n$ *matriz aleatoria* X *es una función medible*

$$X : (\Omega, \mathcal{G}) \to (\mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{R}), \mathcal{B}^{m,n}).$$

Definición B.5 (Esperanza) *Sea* X *una* $m \times n$ *matriz aleatoria. Para toda función*

$$h = (h_{ij})_{i,j} : \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{R}) \to \mathcal{M}_{r,s}(\mathbb{R})$$

con

$$h_{ij} : \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{R}) \to \mathbb{R},\ 1 \leq i \leq r,\ 1 \leq j \leq s,$$

el valor esperado de $h(X)$ *es* $\mathbb{E}(h(X)) \in \mathcal{M}_{r,s}(\mathbb{R})$ *tal que*

$$\mathbb{E}(h(X))_{ij} = \mathbb{E}(h_{ij}(X)) = \int_{\mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{R})} h_{ij}(A)\, P^X(\mathrm{d}A).$$

Definición B.6 (Función Característica) *La función característica de una matriz aleatoria* X *de tamaño* $m \times n$ *con función de densidad* f_X *se define como*

$$\mathbb{E}\left[\exp\left(\mathrm{Tr}\left(iXZ^\top\right)\right)\right] = \int_{\mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{R})} \exp\left[\mathrm{Tr}\left(iAZ^\top\right)\right] f_X(A)\, dA$$

para toda $Z \in \mathcal{M}_p(\mathbb{R})$*.*

Definición B.7 (Transformada de Laplace) *La transformada de Laplace de una matriz aleatoria* X *de tamaño* $p \times p$ *en* $\mathcal{S}_p^+$ *con función de densidad* f_X *está definida por*

$$\mathbb{E}[\exp(\mathrm{Tr}(-ZX))] = \int_{\mathcal{S}_p^+} \exp[\mathrm{Tr}(-ZA)]\, f_X(A)\, dA$$

para toda $Z \in \mathcal{S}_p^+$.

Definición B.8 (Generador Infinitesimal en $\mathcal{M}_p(\mathbb{R})$) *El generador infinitesimal del proceso de Wishart (2.4) en* $\mathcal{M}_p(\mathbb{R})$ *se define para* $x \in \mathcal{S}_p^+$ *y* $f \in \mathcal{C}^2(\mathcal{M}_p(\mathbb{R}), \mathbb{R})$ *con derivadas acotadas como*

$$L^{\mathcal{M}} f(x) = \lim_{t \to 0^+} \frac{\mathbb{E}[f(X_t^x)] - f(x)}{t}.$$

Definición B.9 (Generador Infinitesimal en $\mathcal{S}_p$) *El generador infinitesimal del proceso de Wishart (2.4) en* $\mathcal{S}_p$ *se define para* $x \in \mathcal{S}_p^+$ *y* $f \in \mathcal{C}^2(\mathcal{S}_p, \mathbb{R})$ *con derivadas acotadas como*

$$L^{\mathcal{M}} f(x) = \lim_{t \to 0^+} \frac{\mathbb{E}[f(X_t^x)] - f(x)}{t}.$$

Definición B.10 (Matriz de Covarianzas) *Sea* X *una matriz aleatoria de tamaño* $m \times n$ *y* Y *una matriz aleatoria de tamaño* $p \times q$. *La matriz de covarianzas es una matriz de tamaño* $mn \times pq$ *definida como*

$$\begin{aligned} cov(X, Y) &= cov\left[vec\left(X^\top\right), vec\left(Y^\top\right)\right] \\ &= \mathbb{E}\left[vec\left(X^\top\right) vec\left(Y^\top\right)^\top\right] - \mathbb{E}\left[vec\left(X^\top\right)\right] \mathbb{E}\left[vec\left(Y^\top\right)\right]^\top. \end{aligned}$$

Es decir que $cov(X, Y)$ *es una matriz que tiene* $m \times p$ *bloques. Los bloques representan* $cov\left(\tilde{x}_i^\top, \tilde{y}_j^\top\right) \in \mathcal{M}_{n,q}(\mathbb{R})$, *donde los* $\tilde{x}_i$ *(respectivamente* $\tilde{y}_i$*) denotan las filas de* X *(respectivamente* Y*).*

Definición B.11 (Distribución Multivariada Normal) *Un vector aleatorio* $X \in \mathbb{R}^p$ *tiene distribución multivariada normal con media* $\mu \in \mathbb{R}^p$ *y matriz de covarianza* $\Sigma \in \mathcal{S}_p^+$ *si su densidad es*

$$\frac{1}{(2\pi)^{\frac{p}{2}} \det(\Sigma)^{\frac{1}{2}}} \exp\left[\mathrm{Tr}\left(-\tfrac{1}{2}\Sigma^{-1}(x - \mu)(x - \mu)^\top\right)\right], \ x \in \mathbb{R}^p.$$

Se usa la notación $X \sim \mathcal{N}_p(\mu, \Sigma)$.

Definición B.12 (Distribución Normal Matricial) *Una matriz aleatoria de tamaño* $p \times n$ *tiene distribución Normal con media* $M \in \mathcal{M}_{p,n}(\mathbb{R})$ *y covarianza* $\Sigma \otimes \Psi$ *donde* $\Sigma \in \mathcal{S}_p^+$, $\Psi \in \mathcal{S}_n^+$ *si* $vec\left(X^\top\right) \sim \mathcal{N}_{pn}\left(vec\left(M^\top\right), \Sigma \otimes \Psi\right)$. *Se utiliza la notación* $X \sim \mathcal{N}_{p,n}(M, \Sigma \otimes \Psi)$.

Definición B.13 (Distribución Wishart No-Central) *Una matriz aleatoria X en $\mathcal{S}_p^+$ tiene distribución de Wishart no central con parámetros $p \in \mathbb{N}$, $n \geq p$, $\Sigma \in \mathcal{S}_p^+$ y $\Theta \in \mathcal{M}_p(\mathbb{R})$ si su función de distribución es*

$$f_X(S) = \left(2^{\frac{1}{2}np}\Gamma_p\left(\tfrac{n}{2}\right)\det(\Sigma)^{\frac{n}{2}}\right)^{-1}\exp\left[\mathrm{Tr}\left(-\tfrac{1}{2}\left(\Theta+\Sigma^{-1}S\right)\right)\right]\det(S)^{\frac{1}{2}(n-p-1)}\,{}_0F_1\left(\tfrac{n}{2};\tfrac{1}{4}\Theta\Sigma^{-1}S\right)$$

donde $S \in \mathcal{S}_p^+$ y ${}_0F_1$ es la función Hipergeométrica (ecuación A.1).

Se escribirá $X \sim W_p(n, \Sigma, \Theta)$. El parámetro Θ es llamado parámetro de no centralidad por lo que si $\Theta = 0$ en la definición anterior, se dice que X se distribuye como Wishart central.

Teorema B.1 (Transformada de Laplace de la Distribución Wishart no Central) *Sea*

$$X \sim W_p(n, \Sigma, \Theta).$$

Entonces la transformada de Laplace de X es

$$E\left[\exp\mathrm{Tr}(-UX)\right] = \det\left(\mathrm{I}_p + 2\Sigma U\right)^{-\frac{n}{2}}\exp\mathrm{Tr}\left[-\Theta\left(\mathrm{I}_p+2\Sigma U\right)^{-1}\Sigma U\right]$$

con $U \in \mathcal{S}_p^+$.

Ver [21, pág 12].

Apéndice C

Demostración de Resultados Auxiliares

En este apéndice se encuentran las demostraciones de resultados auxiliares que se utilizan en el Capítulo 5.

Demostración de la Proposición 5.3.

La primera de las siguientes igualdades es por (5.15).

$$
\begin{aligned}
(\lambda_j - \lambda_q)\,(\mathrm{d}a_{qj})\,(\mathrm{d}X^x_{kl}) &= \sum_{rs} h_{rq} h_{ss}\,(\mathrm{d}X^x_{rs})\,(\mathrm{d}X^x_{kl}) \\
\text{(por Lema 2.2)} \quad &= \sum_{rs} h_{rq} h_{sj} X^x_{rk} \left(Q^\top Q\right)_{sl} \mathrm{d}t + \sum_{rs} h_{rq} h_{sj} X^x_{rl} \left(Q^\top Q\right)_{sk} \mathrm{d}t \\
&\quad \sum_{rs} h_{rq} h_{sj} X^x_{sk} \left(Q^\top Q\right)_{rl} \mathrm{d}t + \sum_{rs} h_{rq} h_{sj} X^x_{sl} \left(Q^\top Q\right)_{rk} \mathrm{d}t \\
&= \sum_{rs} h_{sj} \left(Q^\top Q\right)_{sl} h_{rq} X^x_{rk} \mathrm{d}t + \sum_{rs} h_{sj} \left(Q^\top Q\right)_{sk} h_{rq} X^x_{rl} \mathrm{d}t \\
&\quad \sum_{rs} h_{rq} \left(Q^\top Q\right)_{rl} h_{sj} X^x_{sk} \mathrm{d}t + \sum_{rs} h_{rq} \left(Q^\top Q\right)_{rk} h_{sj} X^x_{sl} \mathrm{d}t \\
&= \left(\sum_s h_{sj} \left(Q^\top Q\right)_{sl}\right) \left(\sum_r h_{rq} X^x_{rk}\right) \mathrm{d}t + \left(\sum_s h_{sj} \left(Q^\top Q\right)_{sk}\right) \left(\sum_r h_{rq} S_{rl}\right) \mathrm{d}t \\
&\quad \left(\sum_s h_{rq} \left(Q^\top Q\right)_{rl}\right) \left(\sum_r h_{sj} S_{sk}\right) \mathrm{d}t + \left(\sum_r h_{rq} \left(Q^\top Q\right)_{rk}\right) \left(\sum_s h_{sj} S_{sl}\right) \mathrm{d}t
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&= \left(H^\top Q^\top Q\right)_{jl}\left(H^\top S\right)_{qk}\mathrm{d}t + \left(H^\top Q^\top Q\right)_{jk}\left(H^\top S\right)_{ql}\mathrm{d}t \\
&\quad + \left(H^\top Q^\top Q\right)_{ql}\left(H^\top S\right)_{jk}\mathrm{d}t + \left(H^\top Q^\top Q\right)_{qk}\left(H^\top S\right)_{jl}\mathrm{d}t.
\end{aligned}
$$

Entonces

$$
\begin{aligned}
(\lambda_j - \lambda_q)\left(\mathrm{d}S_{kl}\right)\left(\mathrm{d}a_{ql}\right) &= \left[\left(H^\top Q^\top Q\right)_{jl}\left(H^\top S\right)_{qk} + \left(H^\top Q^\top Q\right)_{jk}\left(H^\top S\right)_{ql}\right]\mathrm{d}t \\
&\quad + \left[\left(H^\top Q^\top Q\right)_{ql}\left(H^\top S\right)_{jk} + \left(H^\top Q^\top Q\right)_{qk}\left(H^\top S\right)_{jl}\right],
\end{aligned}
$$

siempre que $j \neq k$. ■

Demostración de la Proposición 5.4.

Por la definición de Φ se cumple la primera de las igualdades siguientes

$$
\begin{aligned}
\mathrm{d}\phi_{jj} &= \sum_{klq} h_{kj}h_{lq}\mathrm{d}S_{kl}\mathrm{d}a_{qj} \\
(A \text{ es cero en la diagonal}) &= \sum_{\substack{klq \\ q\neq j}} h_{kj}h_{lq}\mathrm{d}S_{kl}\mathrm{d}a_{qj} \\
(\text{por } (5.10)) &= \sum_{\substack{klq \\ q\neq j}} \frac{h_{kj}h_{lq}\left(H^\top Q^\top Q\right)_{jl}\left(H^\top S\right)_{qk}}{\lambda_j - \lambda_q}\mathrm{d}t + \sum_{\substack{klq \\ q\neq j}} \frac{h_{kj}h_{lq}\left(H^\top Q^\top Q\right)_{jk}\left(H^\top S\right)_{ql}}{\lambda_j - \lambda_q}\mathrm{d}t \\
&\quad + \sum_{\substack{klq \\ q\neq j}} \frac{h_{kj}h_{lq}\left(H^\top Q^\top Q\right)_{ql}\left(H^\top S\right)_{jk}}{\lambda_j - \lambda_q}\mathrm{d}t + \sum_{\substack{klq \\ q\neq j}} \frac{h_{kj}h_{lq}\left(H^\top Q^\top Q\right)_{qk}\left(H^\top S\right)_{jl}}{\lambda_j - \lambda_q}\mathrm{d}t \\
&= \sum_{\substack{klq \\ q\neq j}} \frac{h_{lq}\left(Q^\top QH\right)_{lj}\left(H^\top S\right)_{qk}h_{kj}}{\lambda_j - \lambda_q}\mathrm{d}t + \sum_{\substack{klq \\ q\neq j}} \frac{h_{kj}\left(Q^\top QH\right)_{kj}\left(H^\top S\right)_{ql}h_{lq}}{\lambda_j - \lambda_q}\mathrm{d}t \\
&\quad + \sum_{\substack{klq \\ q\neq j}} \frac{h_{lq}\left(Q^\top QH\right)_{lq}\left(H^\top S\right)_{jk}h_{kj}}{\lambda_j - \lambda_q}\mathrm{d}t + \sum_{\substack{klq \\ q\neq j}} \frac{h_{kj}\left(Q^\top QH\right)_{kq}\left(H^\top S\right)_{jl}h_{lq}}{\lambda_j - \lambda_q}\mathrm{d}t
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&= \sum_{\substack{kq\\q\neq j}}\sum_{l} h_{lq}\left(Q^\top QH\right)_{lj}\frac{\left(H^\top S\right)_{qk}h_{kj}}{\lambda_j-\lambda_q}\mathrm{d}t+\sum_{\substack{lq\\q\neq j}}\sum_{k} h_{kj}\left(Q^\top QH\right)_{kj}\frac{\left(H^\top S\right)_{ql}h_{lq}}{\lambda_j-\lambda_q}\mathrm{d}t\\
&\quad+\sum_{\substack{lq\\q\neq j}}\sum_{l} h_{lq}\left(Q^\top QH\right)_{lq}\frac{\left(H^\top S\right)_{jk}h_{kj}}{\lambda_j-\lambda_q}\mathrm{d}t+\sum_{\substack{lq\\q\neq j}}\sum_{k} h_{kj}\left(Q^\top QH\right)_{kq}\frac{\left(H^\top S\right)_{jl}h_{lq}}{\lambda_j-\lambda_q}\mathrm{d}t\\
&= \sum_{\substack{kq\\q\neq j}}\left(H^\top Q^\top QH\right)_{qj}\frac{\left(H^\top S\right)_{qk}h_{kj}}{\lambda_j-\lambda_q}\mathrm{d}t+\sum_{\substack{lq\\q\neq j}}\left(HQ^\top QH\right)_{jj}\frac{\left(H^\top S\right)_{ql}h_{lq}}{\lambda_j-\lambda_q}\mathrm{d}t\\
&\quad+\sum_{\substack{kq\\q\neq j}}\left(HQ^\top QH\right)_{qq}\frac{\left(H^\top S\right)_{jk}h_{kj}}{\lambda_j-\lambda_q}\mathrm{d}t+\sum_{\substack{lq\\q\neq j}}\left(HQ^\top QH\right)_{jq}\frac{\left(H^\top S\right)_{jl}h_{lq}}{\lambda_j-\lambda_q}\mathrm{d}t\\
&= \sum_{\substack{q\\q\neq j}}\sum_{k}\frac{\left(H^\top Q^\top QH\right)_{qj}}{\lambda_j-\lambda_q}\left(H^\top S\right)_{qk}h_{kj}\mathrm{d}t+\sum_{\substack{q\\q\neq j}}\sum_{l}\frac{\left(HQ^\top QH\right)_{jj}}{\lambda_j-\lambda_q}\left(H^\top S\right)_{ql}h_{lq}\mathrm{d}t\\
&\quad+\sum_{\substack{q\\q\neq j}}\sum_{k}\frac{\left(H^\top Q^\top QH\right)_{qq}}{\lambda_j-\lambda_q}\left(H^\top S\right)_{jk}h_{kj}\mathrm{d}t+\sum_{\substack{q\\q\neq j}}\sum_{l}\frac{\left(HQ^\top QH\right)_{jq}}{\lambda_j-\lambda_q}\left(H^\top S\right)_{jl}h_{lq}\mathrm{d}t\\
&= \sum_{q\neq j}\frac{\left(H^\top Q^\top QH\right)_{qj}}{\lambda_j-\lambda_q}\left(H^\top SH\right)_{qj}\mathrm{d}t+\sum_{q\neq j}\frac{\left(HQ^\top QH\right)_{jj}}{\lambda_j-\lambda_q}\left(H^\top SH\right)_{qq}\mathrm{d}t\\
&\quad+\sum_{q\neq j}\frac{\left(H^\top Q^\top QH\right)_{qq}}{\lambda_j-\lambda_q}\left(H^\top SH\right)_{jj}\mathrm{d}t+\sum_{q\neq j}\frac{\left(HQ^\top QH\right)_{jq}}{\lambda_j-\lambda_q}\left(H^\top SH\right)_{jq}\mathrm{d}t\\
&= \sum_{q\neq j}\frac{\left(H^\top Q^\top QH\right)_{qj}\lambda_{qj}}{\lambda_j-\lambda_q}\mathrm{d}t+\sum_{q\neq j}\frac{\left(HQ^\top QH\right)_{jj}\lambda_{qq}}{\lambda_j-\lambda_q}\mathrm{d}t\\
&\quad+\sum_{q\neq j}\frac{\left(H^\top Q^\top QH\right)_{qq}\lambda_{jj}}{\lambda_j-\lambda_q}\mathrm{d}t+\sum_{q\neq j}\frac{\left(HQ^\top QH\right)_{jq}\lambda_{jq}}{\lambda_j-\lambda_q}\mathrm{d}t\\
&= \sum_{q\neq j}\frac{\left(HQ^\top QH\right)_{jj}\lambda_{qq}}{\lambda_j-\lambda_q}\mathrm{d}t+\sum_{q\neq j}\frac{\left(H^\top Q^\top QH\right)_{qq}\lambda_{jj}}{\lambda_j-\lambda_q}\mathrm{d}t\\
&= \sum_{q\neq j}\frac{\left(HQ^\top QH\right)_{jj}\lambda_{qq}+\left(H^\top Q^\top QH\right)_{qq}\lambda_{jj}}{\lambda_j-\lambda_q}\mathrm{d}t.
\end{aligned}
$$

■

Demostración de la Proposición 5.5.

Si $i \neq k$, por (5.15)

$$
\begin{aligned}
(\lambda_i - \lambda_k)^2 (\mathrm{d}a_{ki})^2 &= \left(\sum_{rs} h_{rk} h_{si} \mathrm{d}S_{rs}\right)\left(\sum_{pq} h_{pk} h_{qi} \mathrm{d}S_{pq}\right) \\
&= \sum_{rspq} h_{rk} h_{si} h_{pk} h_{qi} \mathrm{d}S_{rs} \mathrm{d}S_{pq} \mathrm{d}t \\
\text{(por Lema 2.2)} &= \sum_{rspq} h_{rk} h_{si} h_{pk} h_{qi} S_{sp} \left(Q^\top Q\right)_{rq} \mathrm{d}t + \sum_{rspq} h_{rk} h_{si} h_{pk} h_{qi} S_{sq} \left(Q^\top Q\right)_{rp} \mathrm{d}t \\
&\quad + \sum_{rspq} h_{rk} h_{si} h_{pk} h_{qi} S_{rp} \left(Q^\top Q\right)_{sq} \mathrm{d}t + \sum_{rspq} h_{rk} h_{si} h_{pk} h_{qi} S_{rq} \left(Q^\top Q\right)_{sp} \mathrm{d}t \\
\text{(reordenando términos)} &= \sum_{rspq} [h_{si} S_{sp} h_{pk}] \left[h_{rk} \left(Q^\top Q\right)_{rq} h_{qi}\right] \mathrm{d}t + \sum_{rspq} [h_{si} S_{sq} h_{qi}] \left[h_{pk} \left(Q^\top Q\right)_{rp} h_{rk}\right] \mathrm{d}t \\
&\quad + \sum_{rspq} [h_{rk} S_{rp} h_{pk}] \left[h_{si} \left(Q^\top Q\right)_{sq} h_{qi}\right] \mathrm{d}t + \sum_{rspq} [h_{rk} S_{rq} h_{qi}] \left[h_{si} \left(Q^\top Q\right)_{sp} h_{pk}\right] \mathrm{d}t \\
&= \sum_{sp} h_{si} S_{sp} h_{pk} \sum_{rq} h_{rk} \left(Q^\top Q\right)_{rq} h_{qi} \mathrm{d}t + \sum_{sq} h_{si} S_{sq} h_{qi} \sum_{pr} h_{pk} \left(Q^\top Q\right)_{rp} h_{rk} \mathrm{d}t \\
&\quad + \sum_{rp} h_{rk} S_{rp} h_{pk} \sum_{sq} h_{si} \left(Q^\top Q\right)_{sq} h_{qi} \mathrm{d}t + \sum_{rq} h_{rk} S_{rq} h_{qi} \sum_{sp} h_{si} \left(Q^\top Q\right)_{sp} h_{pk} \mathrm{d}t \\
&= \left(H^\top S H\right)_{ik} \left(H^\top Q^\top Q H\right)_{ki} \mathrm{d}t + \left(H^\top S H\right)_{ii} \left(H^\top Q^\top Q H\right)_{kk} \mathrm{d}t \\
&\quad + \left(H^\top S H\right)_{kk} \left(H^\top Q^\top Q H\right)_{ii} \mathrm{d}t + \left(H^\top S H\right)_{ki} \left(H^\top Q^\top Q H\right)_{ik} \mathrm{d}t \\
&= \lambda_i \left(H^\top Q^\top Q H\right)_{kk} \mathrm{d}t + \lambda_{kk} \left(H^\top Q^\top Q H\right)_{ii} \mathrm{d}t.
\end{aligned}
$$

■

Demostración de la Proposición 5.6.

Si $i \neq k$ y por (5.15)la primera igualdad es cierta:

$$\begin{aligned}
-\left(\lambda_i-\lambda_k\right)^2\left(\mathrm{d}a_{ik}\right)\left(\mathrm{d}a_{ki}\right) &= \left(\sum_{rs} h_{ri}h_{sk}\mathrm{d}S_{sr}\right)\left(\sum_{pq} h_{pk}h_{qi}\mathrm{d}S_{pq}\right) \\
&= \sum_{rspq} h_{ri}h_{sk}h_{pk}h_{qi}\mathrm{d}S_{sr}\mathrm{d}S_{pq}\mathrm{d}t \\
\text{(por Lema 2.2)} &= \sum_{rspq} h_{ri}h_{sk}h_{pk}h_{qi}S_{sp}\left(Q^\top Q\right)_{rq}\mathrm{d}t + \sum_{rspq} h_{ri}h_{sk}h_{pk}h_{qi}S_{sq}\left(Q^\top Q\right)_{rp}\mathrm{d}t \\
&\quad + \sum_{rspq} h_{ri}h_{sk}h_{pk}h_{qi}S_{rp}\left(Q^\top Q\right)_{sq}\mathrm{d}t + \sum_{rspq} h_{ri}h_{sk}h_{pk}h_{qi}S_{rq}\left(Q^\top Q\right)_{sp}\mathrm{d}t \\
\text{(reordenando términos)} &= \sum_{rspq}\left[h_{pk}S_{sp}h_{sk}\right]\left[h_{qi}\left(Q^\top Q\right)_{rq}h_{ri}\right]\mathrm{d}t + \sum_{rspq}\left[h_{sk}S_{sq}h_{qi}\right]\left[h_{pk}\left(Q^\top Q\right)_{rp}h_{ri}\right]\mathrm{d}t \\
&\quad + \sum_{rspq}\left[h_{ri}S_{rp}h_{pk}\right]\left[h_{qi}\left(Q^\top Q\right)_{sq}h_{sk}\right]\mathrm{d}t + \sum_{rspq}\left[h_{ri}S_{rq}h_{qi}\right]\left[h_{sk}\left(Q^\top Q\right)_{sp}h_{pk}\right]\mathrm{d}t \\
&= \left(H^\top SH\right)_{kk}\left(H^\top Q^\top QH\right)_{ii}\mathrm{d}t + \left(H^\top SH\right)_{ii}\left(H^\top Q^\top QH\right)_{ki}\mathrm{d}t \\
&\quad + \left(H^\top SH\right)_{ik}\left(H^\top Q^\top QH\right)_{ik}\mathrm{d}t + \left(H^\top SH\right)_{ii}\left(H^\top Q^\top QH\right)_{kk}\mathrm{d}t \\
&= \lambda_i\left(H^\top Q^\top QH\right)_{kk}\mathrm{d}t + \lambda_{kk}\left(H^\top Q^\top QH\right)_{ii}\mathrm{d}t.
\end{aligned}$$

■

Bibliografía

[1] Alfonsi A., Ahdida A. Exact and high order discretization schemes for Wishart processes and their affine extensions. Preprint. 2010.

[2] Barndorff-Nielsen O., Shephard N. Non-Gaussian Ornstein-Uhlenbeck-based models and some of their uses in Financial Economics (with discussion). *Journal of the Royal Statistical Society: Series B (Statistical Methodology).* **Vol 63**, 2001. Pág. 167-241.

[3] Birgit E. The Generalized Bessel Process Corresponding to an Ornstein-Uhlenbeck Process. *Scandinavian Journal of Statistic.* **Vol. 10**, No. 3, 1983. Pág. 247-250.

[4] Bru M.-F. Diffusions of Perturbed Principal Component Analysis. *Journal of Multivariate Analysis.* **Vol. 29**. 1989. Pág. 127-136.

[5] Bru M.-F. Wishart Processes. *Journal of Theoretical Probability.* **Vol. 4**, No. 4, 1991. Pág. 725-751.

[6] Capitaine M., Donati-Martin C. Free Wishart Process. *Journal of Theoretical Probability.* **Vol. 18**, No. 2, 2005. Pág. 413-438.

[7] Carr P. y Schröder M. Bessel Processes, The Integral of Geometric Brownian Motion and Asian Options. *Theory of Probability an Its Applications, SIAM.* **Vol. 48**, No. 3, 2004. Pág. 400-425.

[8] Chung K. *A Course in Probability Theory.* Academic Press 2001. Tercera edición.

[9] Donati-Martin, Doumerc Y., Matsumoto H., Yor M. Some Properties of the Wishart Processes and a Matrix Extension of the Hartman-Watson Laws. *RIMS.* **Vol. 40**, 2004. Pág. 1385-1412.

[10] Golub G. H. y Van Loan C. F. *Matrix Computations*. Johns Hopkins Studies in the Mathematical Sciences. Johns Hopkins University Press, Baltimore, MD, Tercera edición, 1996.

[11] Gupta A. K., Nagar D. K. *Matrix Variate Distribution*. Chapman y Hall/CRC Editorial Board 2000.

[12] Horn R., Johnson C. *Matrix Analysis*. Cambridge University Press, Cambridge. 1985.

[13] Ikeda N., Watanabe S. *Stochastic Differential Equation and Difusion Processes*. North-Holland, Amsterdam. 1989.

[14] Itô K., McKean H. Jr. *Diffusion Processes and their Sample Paths*. Springer. Reimpresión de la edición 1974.

[15] Karatzas I. *Brownian Motion and Stochastic Calculus*. New York: Springer-Verlag 2005. Segunda edición.

[16] McKean H. P. *Stochastic Integrals*. Academic Press, New York. 1969.

[17] Mayerhofer E., Pfaffel O. y Stelzer R. On strong solutions for positive definite jump-diffusions. Preprint, 2009.

[18] Metivier M., Pellaumail J. *Stochastic Integration*. Academic Press. 1980.

[19] Muirhead R. J. *Aspects of Multivariate Statistical Theory*. Wiley Series in Probability and Mathematical Statistics. 1982.

[20] Pérez-Abreu V., Tudor C. On the Traces of Laguerre Processes. El*ectronic Journal of Probability*. **Vol. 14**, 2009. Pág. 2241-2263.

[21] Pfaffel O. *Wishart Processes*. Tesis de Maestría. Technische Universität München, Zentrum Mathematik. 08 de septiembre 2008.

[22] Revuz D, Yor M. *Continuous Martingales and Brownian Motion*. Springer-Verlag 1999.

[23] Shirakawa H. Squared Bessel Processes and Their Applications to the Square Root Interest Rate Model. *Asia-Pacific Financial Markets*. **Vol. 9**, No. 3-4, 2004. Pág. 169-190.

[24] Skorokhod A. V. *Studies in the Theory of Random Processes*. Edición Dover. 1982.

[25] Vostrikova L, Graczyk P. The Moments of Wishart Processes via Itô Calculus. *Theory of Probability and Its Applications SIAM*. **Vol. 51**, No. 4, 2007. Pág. 609-625.

[26] Williams D. *Diffusions, Markov Processes and Martingales, Volume 1: Foundations*. Wiley Series in Probability and Mathematical Statistics. 1979.

[27] Wishart J. The Generalized Product Moment Distribution in Samples from a Normal Multivariate Population. *Biometrika*. **Vol. 20A**, No. 1/2, 1928. Pág. 32-52.

[28] Yamada T., Watanabe S. On the Uniquess of Solution of Stochastic Differential Equations. *J. Math. Kyoto University*. **Vol. 11**, No. 1, 1971. Pág. 155-167.