CIMAT

Centro de Investigación en Matemáticas A.C.

Sistemas Anti-ortogonales en Espacios con Producto Interno

T E S I S

que para obtener el grado de

Maestro en Ciencias

con especialidad en

Matemáticas Aplicadas

P R E S E N T A :

Laura Villafuerte Altúzar

DIRECTOR DE TESIS:

Dr. Raúl Felipe Parada

Junio de 2004

Guanajuato, Gto. México

Índice general

Agradecimientos

- Deseo agradecer al Dr. Lázaro Raúl Felipe Parada por dirigirme en la elaboración de este trabajo y por sus valiosos consejos.

- A la comisión revisora integrada por Dr. Fausto Antonio Ongay Larios y Dr. Francisco Sánchez Sánchez por el tiempo dedicado a la revisión de este trabajo.

- A los Doctores del área de Matemática Aplicada por su labor docente.

Capítulo 1

Introdución

Los polinomios ortogonales aparecen y se utilizan en diferentes áreas dentro de las Matemáticas, como la aproximación de funciones de variable real o compleja, la solución de ecuaciones diferenciales no lineales (sistemas completamente integrables) o la estadística; y en áreas más teóricas, en relación con ciertos problemas clásicos del análisis, como el problema de los momentos para una medida positiva.

Los polinomios anti-ortogonales apaceren como polinomios característicos de matrices aleatorias, B. Eynard[4]. Dichas matrices surgen en matemática estadística por Hsu, Wishart, y otros autores, en 1930. Diez años después, Wingner estudió la conexión entre las propiedades de las matrices aleatorias y la física nuclear, Mandan [9]. Hoy en día las matrices aleatorias son una herramienta fundamental para determinar las propiedades estadísticas de sistemas caóticos, estos sistemas resultan de la mecánica cuántica y clásica.

Por otra parte, la teoría de los sistemas integrables en dimensión infinia (para ecuaciones en derivadas parciales), se ha convertido en una de las partes más activas de la física matemática; uno de los objetivos principales en este caso es el estudio de jerarquías de ecuaciones no lineales en derivadas parciales y un problema importante en contexto, es encontrar soluciones de dichas jerarquías. Una de las jerarquías que ha recibido mayor interés en los últimos años, es la llamada jerarquía de Pfaff(que es un análogo de simpléctico de la jerarquía KP discreta), M. Alder et al.[12]. Precisamente los polinomios anti-ortogonales surgen en las soluciones de dichas jerarquías. He aquí la motivación de estudiar sistemas anti-ortogonales.

El objetivo fundamental de esta tesis consiste en lo siguiente: incluir el concepto de polinomio anti-ortogonal en una noción más general sobre espacios con producto interno; es decir, así como los polinomios ortogonales clásicos son un caso particular de sistemas ortogonales en espacios de Hilbert. Nosotros creemos y en parte se ha visto en esta tesis que los polinomios anti-ortogonales son un caso particular de lo que hemos llamado sistemas anti-ortogonales en espacios con producto interno. Esperamos que estos sistemas que hemos introducido tengan variadas aplicaciones, de hecho esperamos que este sea el caso en la teoría de aproximación de funciones de variable compleja.

Esta tesis contiene una introducción a los polinomios ortogonales (Akhiezer[2], Charles and Yuan[5] y Gabor [7]) con el fin de preparar el camino para obtener algunos sistemas anti-ortogonales (como son los polinomios ortogonales clásicos de Hermite, Laguerre y Jacobi); como se verá en este trabajo de tesis, los polinomios ortogonales juegan un papel fundamental en el cálculo de sistemas anti-ortogonales en ciertos espacios de funciones.

En esta tesis se presenta como punto de partida, algunos resultados de funcionales bilineales dentro de los que se destaca un resultado que será de vital importancia para construir sistemas anti-ortogonales. Los resultados sobre funcionales bilineales anti-simétricos obtenidos en esta tesis arrojan luz sobre la manera de construir polinomios anti-ortogonales. Luego se expone parte del trabajo abordado por M. Adler, P.J. Forrester, T. Nagao y P. van Moerbeke en el artículo *Classical skew orthogonal polynomials and random matrices*, publicado en 1999, donde se dan de manera explícita algunos sistemas anti-ortogonales asociados a los polinomios ortogonales clásicos ya mencionados y con ellos un resultado que nos permite construir operadores anti-simétricos en algunos espacios de funciones.

La aportación de esta tesis consiste en dar de manera explícita sistemas anti-ortogonales en espacios con producto interno en particular en espacios de Hilbert. Probablemente el mayor aporte consiste en el cálculo por primera vez de sistemas anti-ortogonales en términos de polinomios ortogonales discretos, es decir, para medidas discretas, a saber, los polinomios de Charlier y Meixner. La relevancia de estos polinomios radica en las funciones de peso; ya que estas son distribucioens de Poisson y Pascal respectivamente.

La tesis se divide en cuatro capítulos, el segundo trata en gran parte de la construcción de un sistema anti-ortogonal que es una combinación de los polinomios mónicos de Hermite, además de dos sistemas anti-ortogonales en el espacio $l^2(\mathbb{R})$. En el tercer y cuarto capítulo se dan de manera explícita los polinomios anti-ortogonales en términos de los polinomios de Charlier y Meixner.

En este trabajo sólo se presenta funcionales bilineales reales anti-simétricos, un problema interesante para el futuro, es construir funcionales bilineales anti-simétricos en espacios de funciones sobre una curva cerrada. Un primer caso a tratar sería

$$\Omega(f,g) = \int_\gamma f(z)g(-z)h(z)dz.$$

Esperamos que en este caso se puedan introducir un análogo anti-ortogonal de aproximante de Padé, es decir, funciones racionales cuyo denominador sean precisamente polinomios anti-ortogonales con respecto a una cierta medida positiva y con ayuda de estos aproximantes de Padé aproximar funciones meromorfas sobre el plano complejo.

1.1. Polinomios ortogonales

En este capítulo veremos algunos resultados importantes de polinomios ortogonales en $\mathbb{R}$ y $\mathbb{N}$.

Definición 1.1.1 *Se llama espacio L^2_w al espacio de funciones reales de cuadrado integrable en (a,b) con la función peso $w(x) > 0$, es decir:*

$$\{f : (a,b) \to \mathbb{R}; \int_a^b |f(x)|^2 w(x)dx < \infty\}.$$

En este espacio el producto escalar de dos funciones f y g se define mediante la integral

$$\langle f,g\rangle = \int_a^b f(x)g(x)w(x)dx,$$

y la norma vendrá dada por $||f|| = \sqrt{\langle f,f\rangle}$.

Definiremos los momentos de $w(x)$ mediante

$$c_n = \int_a^b x^n w(x)dx, \qquad n = 0,1,2,...$$

En adelante supondremos que todos los momentos son finitos.
Observemos que si los momentos son finitos, entonces para toda $n \in \mathbb{N}$ se tiene que $x^n \in L^2_w$.

Definición 1.1.2 *Dada una sucesión de polinomios $\{p_n\}_n$, diremos que $\{p_n\}_n$ es una sucesión de polinomios ortogonales con respecto a $\langle .,.\rangle$ si se cumple que:*

1. *p_n es un polinomio de grado n.*
2. *$\langle p_n, p_m\rangle = 0$, $m \neq n$, para todo, $m, n = 0,1,2,...$,*
3. *$\langle p_n, p_n\rangle \neq 0$, para todo $n = 0,1,2,...$*

1.1.1. Propiedades generales

Teorema 1.1.3 *Es posible construir una sucesión de polinomios ortogonales $\{p_n\}_n$ sobre un intervalo (a,b) respecto a una función peso $w(x)$ medible, definida sobre este intervalo.*

Demostración. La prueba se sigue del proceso ortogonalización de Schmidt, tomando el conjunto linealmente independiente x^n $(n = 0,1,2,...)$ sobre (a,b) $\blacksquare$.

Recordemos que si $\{p_n\}_n$ es una sucesión de polinomios de grado n, no necesariamente ortogonales, todo polinomio de grado m puede escribirse:

$$p(x) = \sum_{n=0}^{m} b_n p_n(x)$$

donde los b_n son coeficientes numéricos que dependen de n y $p(x)$.

Teorema 1.1.4 *Una condición necesaria y suficiente para que una sucesión de polinomios $\{p_n(x)\}_n$ con el grado de p_n igual a n, sea ortogonal es que:*

$$\int_a^b x^k p_n(x)w(x)dx = 0 \qquad k = 0,...,n-1,$$

para todo $n \in \mathbb{N}$.

Demostración. Sea $n \in \mathbb{N}$. Supongamos que

$$\int_a^b x^k p_n(x)w(x)dx = 0 \qquad k = 0, ..., n-1.$$

Sean $p_m(x)$ y $p_n(x)$ con $n \neq m$ y supongamos que $m < n$. Entonces

$$p_m(x) = \sum_{k=0}^{m} a_k x^k$$

luego

$$\langle p_n, p_m \rangle = \int_a^b p_n(x)p_m(x)w(x)dx = \sum_{k=0}^{m} \left[a_k \int_a^b x^k p_n(x)w(x)dx \right] = 0,$$

por lo tanto la sucesión de polinomios $\{p_n\}_n$ es ortogonal. Por otro lado, supongamos que

$$\int_a^b p_n(x)p_m(x)w(x)dx = 0 \quad (m \neq n),$$

entonces para todo $k < n$ escribimos

$$x^k = \sum_{m=0}^{k} a_m p_m(x)$$

luego

$$\int_a^b x^k p_n(x)w(x)dx = \sum_{m=0}^{k} \left[a_m \int_a^b p_m(x)p_n(x)w(x)dx \right] = 0$$

puesto que $m \neq n$ $(m = 0, 1, 2, ..., k)$ ■.

Nótese que si $p(x)$ es un polinomio de grado m y $\{p_n\}_n$ una sucesión de polinomios ortogonales, entonces

$$p(x) = \sum_{n=0}^{m} b_n p_n(x) \qquad con \qquad b_n = \frac{\langle p_n, p \rangle}{\langle p_n, p_n \rangle}.$$

Teorema 1.1.5 *Si $\{p_n\}_n$ es una sucesión de polinomios ortogonales, existen números A_n, B_n y C_n tales que para $n \geq 1$:*

$$xp_n(x) = A_n p_{n+1}(x) + B_n p_n(x) + C_n p_{n-1}(x).$$

Demostración. El polinomio xp_n de grado $n+1$ puede escribirse de la forma:

$$xp_n(x) = \sum_{k=0}^{n+1} \alpha_k p_k(x)$$

con

$$\alpha_k = \frac{\langle p_k, xp_n \rangle}{\langle p_k, p_k \rangle}$$

pero como

$$\langle p_k, xp_n \rangle = \langle p_n, xp_k \rangle = 0$$

si $n > k+1$, es decir, $k < n-1$ entonces sólo los coeficientes α_{n-1}, α_n y α_{n+1} intervienen en el desarrollo.

Así pues, tomando

$$A_n = \alpha_{n+1}, \qquad B_n = \alpha_n \qquad C_n = \alpha_{n-1}.$$

la demostración queda terminada ■.

1.2. Polinomios ortogonales clásicos

En esta sección estudiaremos algunas sucesiones de polinomios ortogonales, tales como: polinomios de Hermite, polinomios de Laguerre y polinomios de Jacobi. Los resultados aquí enunciados, se pueden encontrar en Akhiezer[2], Charles and Yaun[5], y Gabor[7].

1.2.1. Polinomios de Hermite

Definición 1.2.1 *Definimos los polinomios de Hermite por:*

$$H_n(x) = (-1)^n e^{x^2} \frac{d^n}{dx^n} e^{-x^2}$$

Observemos que $H_n(-x) = (-1)^n H_n(x)$, es decir, H_n es par si n es par, e impar si n es impar.

Los primeros polinomios de Hermite son:

$$H_0(x) = 1$$

$$H_1(x) = 2x$$
$$H_2(x) = 4x^2 - 2$$
$$H_3(x) = 8x^3 - 12x$$

La función peso para los polinomios de Hermite es $w(x) = e^{-x^2}$ definida en $\mathbb{R}$.

Proposición 1.2.2 *Para $0 \leq m < n$, se cumplen las afirmaciones:*

$$\int_{\mathbb{R}} x^m H_n(x) e^{-x^2} dx = 0$$

y

$$\int_{\mathbb{R}} \left[H_n(x)\right]^2 e^{-x^2} dx = 2^n n! \pi^{1/2} \delta_{n,m}$$

Proposición 1.2.3 *Los polinomios de Hermite cumplen con las afirmaciones siguientes:*

$$\frac{d}{dx} H_n(x) = 2n H_{n-1}(x)$$

$$\frac{d^2}{dx^2} H_n(x) - 2x \frac{d}{dx} H_n(x) + 2n H_n(x) = 0$$

1.2.2. Polinomios de Laguerre

Sea $\alpha > -1$, la función peso para los polinomios de Laguerre es $w(x) = x^\alpha e^{-x}$ definida en todo $\mathbb{R}_+ = \{x : x \geq 0\}$.

Definición 1.2.4 *Para $n \geq 0$, los polinomios de Laguerre se definen como:*

$$L_n^\alpha = \frac{1}{n!} x^{-\alpha} e^{-x} \left(\frac{d}{dx}\right)^n (x^{n+\alpha} e^{-x}).$$

Proposición 1.2.5 *Para $0 \leq m < n$, se cumple*

$$\int_0^\infty x^m L_n^\alpha(x) x^\alpha e^{-x} dx = 0.$$

Proposición 1.2.6 *La relación de tres términos recurrentes para los polinomios de Laguerre es:*

$$L_{n+1}^\alpha = \frac{1}{n+1}(-x + 2n + 1 + \alpha) L_n^\alpha(x) - \frac{n+\alpha}{n+1} L_{n-1}^\alpha.$$

Proposición 1.2.7 *Los polinomios de Laguerre satisfacen las siguientes relaciones:*

$$\frac{d}{dx} L_n^\alpha(x) = -L_{n-1}^{\alpha+1}(x)$$

$$x \frac{d^2}{dx^2} L_n^\alpha(x) + (\alpha + 1 - x) \frac{d}{dx} L_n^\alpha(x) + n L_n^\alpha(x) = 0$$

1.2.3. Polinomios de Jacobi

Para $\alpha, \beta > -1$, la función peso para los polinomios de Jacobi es $w(x) = (1-x)^\alpha (1+x)^\beta$ definida sobre $-1 < x < 1$.

Definición 1.2.8 *Para $n \geq 0$ definimos a los polinomios de Jacobi como:*

$$P_n^{(\alpha,\beta)}(x) = \frac{(-1)^n}{2^n n!} (1-x)^{-\alpha} (1+x)^{-\beta} \frac{d^n}{dx^n} \Big((1-x)^{\alpha+n} (1+x)^{\beta+n}\Big)$$

Definición 1.2.9 *El símbolo de Pochhammer se define como:*

$$(x)_0 = 1,$$

$$(x)_n = x(x+1)(x+2)...(x+n-1), \qquad x \in \mathbb{R}, \forall n \geq 0$$

Proposición 1.2.10 *Para $0 \leq m < n$ se cumple*

$$\int_{-1}^1 x^m P_n^{(\alpha,\beta)}(x) (1-x)^\alpha (1+x)^\alpha dx = 0$$

Proposición 1.2.11 *Para $n \geq 1$,*

$$\frac{d}{dx}P_n^{(\alpha,\beta)}(x) = \frac{n+\alpha+\beta+1}{2}P_{n-1}^{(\alpha+1,\beta+1)}(x)$$

y $P_n^{(\alpha,\beta)}(x)$ es el único polinomio solución de

$$(1-x^2)f''(x) - (\alpha-\beta+(\alpha+\beta+2)x)f'(x) + n(n+\alpha+\beta+1)f(x) = 0$$

y $f(1) = (\alpha+1)_n/n!$.

Proposición 1.2.12 *Para $n \geq 0$, se cumple*

$$P_{n+1}^{(\alpha,\beta)}(x) = \frac{(2n+\alpha+\beta+1)(2n+\alpha+\beta+2)}{2(n+1)(n+\alpha+\beta+1)}xP_n^{(\alpha,\beta)}(x)$$
$$+\frac{(2n+\beta+\alpha+1)(\alpha^2-\beta^2)}{2(n+1)(n+\alpha+\beta+1)(2n+\alpha+\beta)}P_n^{(\alpha,\beta)}(x)$$
$$-\frac{(\alpha+n)(\beta+n)(2n+\alpha+\beta+2)}{(n+1)(n+\alpha+\beta+1)(2n+\alpha+\beta)}P_{n-1}^{(\alpha,\beta)}(x).$$

1.3. Polinomios ortogonales discretos

Además de los polinomios ortogonales clásicos continuos, existen otras familias llamadas *ortogonales discretas* ya que su ortogonalidad está dada mediante sumas(que es equivalente a considerar medidas discretas).

Los polinomios ortogonales discretos fuerón introducidos por la siguiente idea: interporlar una función cuando a los valores dados de la función se le asignan unos pesos de acuerdo a cierta ley de probabilidad. El caso más sencillo es cuando el peso $\rho(x) = 1$ (distribución uniforme), este problema conduce a los polinomios de Chebyshev. Otros casos importantes es cuando las distribuciones son: de Poisson (polinomios de Charlier) y de Pascal(polinomios de Meixner) las cuales utilizaremos en los últimos capítulos de esta tesis.

En seguida veremos una breve introducción a la teoría general de polinomios discretos.

Sea $\rho(x) > 0$ y definamos al espacio L_ρ^2 como:

$$L_\rho^2 = \{f \mid \sum_{k=0}^{b-1}|f(k)|^2\rho(k) < \infty\},$$

donde $b \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$. En este espacio el producto escalar de f y g está dado mediante:

$$\langle f, g \rangle = \sum_{k=0}^{b-1} f(k)g(k)\rho(k).$$

y la norma será $\|f\| = \sqrt{\langle f, f \rangle}$.

Definamos los momentos con respecto a $\rho(x)$ por:

$$\rho_n = \sum_{k=0}^{b-1} k^n\rho(k).$$

En lo que sigue supondremos que los momentos con respecto a ρ son finitos.

Definición 1.3.1 *Dada una sucesión de polinomios $\{p_n\}_n$, diremos que $\{p_n\}_n$ es una sucesión de polinomios ortogonales discretos con respecto a $\langle .,. \rangle$ si se cumple:*

1. *p_n es un polinomio de grado n.*
2. *$\langle p_n, p_m \rangle = 0$, $m \neq n$, $\forall n, m = 0, 1, 2, ...$*
3. *$\langle p_n, p_n \rangle \neq 0$, $\forall n = 0, 1, 2, ...$*

Dos de los operadores lineales que juegan un papel importante en esta teoría son ∇ y $\triangle$ y se definen como:

$$\triangle f(x) = f(x+1) - f(x) \qquad \nabla f(x) = f(x) - f(x-1)$$

y que cumplen con las propiedades siguientes:

$$\triangle f(x) = \nabla f(x+1), \tag{1.3.1}$$

$$\nabla\triangle f(x) = \triangle\nabla f(x) = f(x+1) - 2f(x) + f(x-1). \tag{1.3.2}$$

En seguida daremos un resultado muy utilizado en el tercer y cuarto capítulo.

Teorema 1.3.2 *Una condición necesaria y suficiente para que la sucesión de polinomios $\{p_n\}_n$ tal que p_n es de grado n, sea ortogonal es que*

$$\sum_{k=0}^{b-1} k^i p_n \rho(k) = 0, \qquad i = 0, ..., n-1,$$

para todo $n \in \mathbb{N}$

Demostración. Supongamos que

$$\sum_{k=0}^{b-1} k^i p_n \rho(k) = 0, \qquad i = 0, ..., n-1,$$

para todo $n \in \mathbb{N}$.

Sea p_n y p_m con $m \neq n$ y supongamos que $m < n$. Entonces

$$p_m(k) = \sum_{i=0}^{m} a_i k^i$$

luego

$$\langle p_n, p_m \rangle = \sum_{k=0}^{b-1} p_n(k) p_m(k) \rho(k) = \sum_{i=0}^{m} \left[a_i \sum_{k=0}^{b-1} k^i p_n(k) \rho(k) \right] = 0.$$

Por otro lado, supongamos que

$$\sum_{k=0}^{b-1} p_n(k) p_m(k) \rho(k) = 0 \qquad (m \neq 0)$$

entonces para todo $i \in \mathbb{N}$ se tiene:

$$k^i = \sum_{m=0}^{i} a_m p_m(k)$$

entonces

$$\sum_{k=0}^{b-1} k^i p_n(k) \rho(k) = \sum_{0}^{i} \left[a_m \sum_{k=0}^{b-1} p_m(k) p_n(k) \rho(k) \right] = 0$$

puesto que $m \neq n$ ■.

En los capítulos 3 y 4 se verán dos sucesiones de polinomios ortogonales discretos que, a su vez son mónicos, a saber, los polinomios de Charlier y Meixner cuyas funciones de peso respectivamente son:

$$\rho(k) = e^{-a} \frac{a^k}{k!}$$

para $a > 0$, y

$$\rho(k) = \frac{\beta^k}{k!} (\gamma)_k$$

con $\gamma > 0$ y $0 < \beta < 1$.

Capítulo 2

Sistemas anti-ortogonales

En este capítulo se tienen algunos resultados generales de sistemas anti-ortogonales, así como ejemplos de sistemas anti-ortogonales en espacios de Hilbert concretos. En la primera sección, se dan resultados de funcionales bilineales en espacios de Hilbert utilizando el teorema de Lax-Milgran. Es importante aclarar que la sección 2.2 y 2.3 son debidas a M. Aldler, P.J. Forrester, et al. [11], las restantes secciones de esta tesis son originales(excepto las citadas), y estan dedicadas a encontrar sistemas anti-ortogonales en espacios con producto interno específicos.

2.1. Funcionales Bilineales

Sea H un espacio de Hilbert real y $\langle .,. \rangle$ el producto interno correspondiente.

Definición 2.1.1 *Un funcional bilineal sobre H es una aplicación*

$$\Omega : H \times H \longrightarrow \mathbb{R}$$

tal que a cada par de elementos $f, g \in H$ le hace corresponder el número real $\Omega(f,g)$ que cumple:

(i) $\Omega(\alpha_1 f_1 + \alpha_2 f_2, g) = \alpha_1 \Omega(f_1, g) + \alpha_2 \Omega(f_2, g)$

(ii) $\Omega(f, \alpha_1 g_1 + \alpha_2 g_2) = \alpha_1 \Omega(f, g_1) + \alpha_2 \Omega(f, g_2)$

Con $f, f_1, f_2, g, g_1, g_2 \in H$ y $\alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R}$.

El siguiente teorema, nos da la representación de un funcional bilineal de operadores lineales acotados definidos en todo el espacio.

Teorema 2.1.2 *(Lax-Milgran) Todo funcional bilineal $\Omega(f,g)$ que cumpla con la propiedad:*

$$\sup_{\|f\|\leq 1, \|g\|\leq 1} |\Omega(f,g)| < \infty,$$

se puede representar de la forma

$$\Omega(f,g) = \langle Af, g \rangle,$$

donde A es un operador lineal acotado con dominio H, el cual, está determinado de manera única por Ω.

Demostración. La demostración de este resultado se encuentra en la página 42 de Akhiezer[1] ■.

Definición 2.1.3 *Decimos que $\Omega : H \times H \to \mathbb{R}$ es un funcional bilineal anti-simétrico si cumple las siguientes propiedades:*

(i) Para $f_1, f_2, g \in H$ y $\alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R}$

$$\Omega(\alpha_1 f_1 + \alpha_2 f_2, g) = \alpha_1 \Omega(f_1, g) + \alpha_2 \Omega(f_2, g)$$

(ii) Para todo $f, g \in H$

$$\Omega(f,g) = -\Omega(g,f).$$

Observación 2.1.4 *Las condiciones (i) y (ii) implican que*

$$\Omega(f, \alpha_1 g_1 + \alpha_2 g_2) = \alpha_1 \Omega(f, g_1) + \alpha_2 \Omega(f, g_2).$$

Teorema 2.1.5 *Sean $f, g \in H$ y Ω un funcional bilineal anti-simétrico que satisface*

$$\sup_{\|f\|\leq 1, \|g\|\leq 1} |\Omega(f,g)| < \infty$$

entonces, existe $A \in C[H,H]$ tal que

$$\Omega(f,g) = \langle Af, g \rangle$$

y además $A^* = -A$.

Demostración. El primer resultado se sigue del lema 2.1.4 y del teorema de Lax-Milgram. Ahora notemos que

$$\langle Af, g\rangle = \Omega(f,g) = -\Omega(g,f)$$
$$= -\langle Ag, f\rangle = -\langle f, Ag\rangle = \langle f, -Ag\rangle$$

luego $A^* = -A$. ■

Proposición 2.1.6 *Sea X un espacio con producto interno real y $A : X \to X$ un operador lineal con dominio igual a todo X, tal que $A^* = -A$. Entonces $\Omega(f,g) = \langle Af, g\rangle$ satisface las siguientes propiedades:*

(i) $\Omega(bf + cg, h) = b\Omega(f,g) + c\Omega g, h)$

(ii) $\Omega(f,g) = -\Omega(g,f)$

donde $f, g \in X$ y $b, c \in \mathbb{R}$.

Demostración. Sean $f, g \in X$ y $b, c \in \mathbb{R}$. Entonces

$$\Omega(bf + cg, h) = \langle A(bf + cg), h\rangle$$

puesto que A es lineal se sigue

$$\Omega(bf + cg, h) = b\langle Af, h\rangle + c\langle Ag, h\rangle = b\Omega(f,h) + c\Omega(g,h),$$

de modo que la afirmación (i) se cumple.

Por otro lado,

$$\Omega(f,g) = \langle Af, g\rangle = \langle f, -Ag\rangle = -\langle f, Ag\rangle = -\langle Ag, f\rangle = -\Omega(g,f).$$

Por lo tanto se cumple la afirmación (ii)■.

Definición 2.1.7 *Sea Ω como en la proposición 2.1.6. Decimos que el sistema $\{h_n\}_{n=0}^{\infty}$ es anti-ortogonal*[1] *con respecto a Ω, si*

$$\Omega(h_{2n}, h_{2m}) = \Omega(h_{2n+1}, h_{2m+1}) = 0 \qquad (2.1.1)$$

$$\Omega(h_{2n}, h_{2m+1}) = \gamma_n \delta_{nm} \qquad (2.1.2)$$

donde $m, n = 0, 1, 2, \ldots$ y $\{\gamma_n\}$ es una sucesión de números reales diferentes de cero.

[1] En inglés es skew orthogonal system

Lema 2.1.8 *Sea $\{e_0, e_1, e_2, e_3, \ldots\}$ un conjunto numerable linealmente independiente*[2] *en un espacio con producto interno X y $\{\gamma_n\}_{n=0}^{\infty}$ una sucesión de números reales diferentes de cero. Supongamos que el sistema $\{h_n\}_{n=0}^{\infty}$ construido de la siguiente manera:*

$$h_0 = e_0$$
$$h_1 = c_0^1 e_0 + c_1^1 e_1$$
$$\vdots$$
$$h_n = c_0^n e_0 + \cdots + c_n^n e_n$$
$$\vdots$$

satisface las relaciones:

$$\Omega(h_0, h_1) = \gamma_0 \qquad \Omega(h_{2n}, h_{2n+1}) = \gamma_n, \qquad (2.1.3)$$

$$\Omega(h_{2n}, e_m) = 0 \qquad m = 0, 1, \ldots, 2n-1, \qquad (2.1.4)$$

$$\Omega(h_{2n+1}, e_m) = 0 \qquad m = 0, 1, \ldots, 2n-1, \qquad (2.1.5)$$

para n=1,2,.... Entonces el sistema $\{h_n\}_{n=0}^{\infty}$ es anti-ortogonal con respecto a Ω.

Demostración. Demostraremos (2.1.1) cuando $m < n$, entonces tenemos que

$$\Omega(h_{2n}, h_{2m}) = \Omega(h_{2n}, c_0^{2m} e_0 + c_1^{2m} e_1 + \ldots + c_{2m-1}^{2m} e_{2m-1} + c_{2m}^{2m} e_{2m})$$

por la bilinelidad de Ω se obtiene

$$\Omega(h_{2n}, h_{2m}) = c_0^{2m}\Omega(h_{2n}, e_0) + \ldots + c_{2m-1}^{2m}\Omega(h_{2n}, e_{2m-1}) + c_{2m}^{2m}\Omega(h_{2n}, e_{2m})$$

puesto que $m < n$, se sigue de (2.1.4)

$$\Omega(h_{2n}, h_{2m}) = c_0^{2m}\Omega(h_{2n}, e_0) + \ldots + c_{2m-1}^{2m}\Omega(h_{2n}, e_{2m-1}) + c_{2m}^{2m}\Omega(h_{2n}, e_{2m}) = 0$$

Por otro lado, de la bilinealidad de Ω se infiere:

$$\Omega(h_{2n+1}, h_{2m+1}) = \Omega(h_{2n+1}, c_0^{2m+1} e_0 + c_1^{2m+1} e_1 + \ldots + c_{2m}^{2m+1} e_{2m} + c_{2m+1}^{2m+1} e_{2m+1})$$

[2] En particular $\{e_0, e_1, e_2, e_3, \ldots\}$ puede ser un sistema ortogonal de X.

debido a que $m < n$, se tiene que $m \leq n-1$, luego $1 \leq 2m+1 \leq 2n-1$, entonces de (2.1.5)

$$\Omega(h_{2n+1}, h_{2m+1}) = \Omega(h_{2n+1}, c_0^{2m+1}e_0 + c_1^{2m+1}e_1 + \ldots + c_{2m}^{2m+1}e_{2m} + c_{2m+1}^{2m+1}e_{2m+1}) = 0$$

La prueba de (2.1.1) cuando $m > n$ es análoga por la anti-simetría de Ω. Ahora bien, sólo nos falta probar (2.1.1) cuando $n = m$, pero esto también se sigue de la anti-simetría de Ω, puesto que $\Omega(h_{2n}, h_{2n}) = -\Omega(h_{2n}, h_{2n})$ implica que $\Omega(h_{2n}, h_{2n}) = 0$, de la misma forma se tiene que $\Omega(h_{2n+1}, h_{2n+1}) = 0$. Así, hemos probado que

$$\Omega(h_{2n}, h_{2m}) = \Omega(h_{2n+1}, h_{2m+1}) = 0, \qquad \forall m, n \in \mathbb{N}.$$

Ahora demostraremos (2.1.2). En efecto, supongamos $m < n$ entonces

$$\Omega(h_{2n}, h_{2m+1}) = c_0^{2m+1}\Omega(h_{2n}, e_0) + \ldots + c_{2m+1}^{2m+1}\Omega(h_{2n}, e_{2m+1}),$$

puesto que $m < n$, se tiene que $m \leq n-1$, luego $1 \leq 2m+1 \leq 2n-1$ se sigue de (2.1.4)

$$\Omega(h_{2n}, h_{2m+1}) = c_0^{2m+1}\Omega(h_{2n}, e_0) + \ldots + c_{2m+1}^{2m+1}\Omega(h_{2n}, e_{2m+1}) = 0.$$

Por otra parte, la prueba de (2.1.2) para $m > n$ es análoga y la prueba de (2.1.2) cuando $m = n$ es consecuencia de (2.1.3).■

2.2. Operadores anti-simétricos en $\mathbb{R}$

A continuación veremos un sistema anti-ortogonal específico debido a M. Adler, P.J. Forrester, T. Nagao y P. van Moerbeke en un espacio de funciones, formado por polinomios; para esto desarrollemos un poco de la teoría de N. Adler, et al.[11]. Empecemos con la construcción de las expresiones diferenciales anti-simétricas.
Sean $u, \phi \in L_w^2$, tal que u es una función acotada continuamente diferenciable. Consideremos el operador L_u en L_w^2 como:

$$L_u = u\frac{d}{dx} + \frac{u' - \phi}{2},$$

y tomemos $w(x) = e^{-2V(x)}$ donde $V(x)$ es una función real continuamente diferenciable. Entonces producto interno en este espacio es:

$$\langle f, g\rangle = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-2V(x)} f(x)g(x)dx.$$

Como se sabe, muchos espacios bien estudiados son casos particulares de este producto interno. El siguiente lema nos permite construir expresiones diferenciales anti-simétricas.

Lema 2.2.1 *Sean $f, g, u, \phi \in L_w^2$ tal que $u', f', g' \in L_w^2$. Supongamos que la fórmula de integración por partes sea válida y $V(x)$ una función continuamente diferenciable tal que*

$$2V'(x) = \frac{\phi(x)}{u(x)}$$

además supongamos que $f(x)u(x)g(x)e^{-2V(x)}|_{-\infty}^{\infty} = 0$ entonces

$$\langle f, L_u g\rangle = -\langle L_u f, g\rangle$$

es decir el operador L_u es una expresión diferencial anti-simétrica .

Demostración. Sea $h = \frac{u'-\phi}{2}$, entonces

$$\begin{aligned}
\langle f, L_u g\rangle &= \int_{-\infty}^{\infty} e^{-2V(x)} f(x) L_u g(x)dx \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} e^{-2V(x)} f(x)[u(x)g'(x) + h(x)g(x)]dx \\
&= f(x)u(x)g(x)e^{-2V(x)}|_{-\infty}^{\infty} \\
&\quad - \int_{-\infty}^{\infty} g(x)(e^{-2V(x)} f(x)u(x))'dx \\
&\quad + \int_{-\infty}^{\infty} e^{-2V(x)} f(x)h(x)g(x)dx \\
&= -\int_{-\infty}^{\infty} g(x)e^{-2V(x)}(f'(x)u(x) + f(x)u'(x) - 2V'(x)f(x)u(x))dx \\
&\quad + \int_{-\infty}^{\infty} e^{-2V(x)} f(x)h(x)g(x)dx \\
&= -\int_{-\infty}^{\infty} g(x)e^{-2V(x)} f'(x)u(x)dx - \int_{-\infty}^{\infty} g(x)e^{-2V(x)} f(x)u'(x)dx
\end{aligned}$$

$$+\int_{-\infty}^{\infty} g(x)e^{-2V(x)}f(x)2V'(x)u(x)dx+\int_{-\infty}^{\infty} g(x)e^{-2V(x)}f(x)[\frac{u'(x)-\phi(x)}{2}]dx$$

Sustituyendo $2V'(x)$ de la hipótesis del lema (2.2.1)

$$=-\int_{-\infty}^{\infty} g(x)e^{-2V(x)}f'(x)u(x)dx-\int_{-\infty}^{\infty} g(x)e^{-2V(x)}f(x)u'(x)dx$$

$$+\int_{-\infty}^{\infty} e^{-2V(x)}g(x)f(x)\phi(x)dx+\int_{-\infty}^{\infty} g(x)e^{-2V(x)}f(x)[\frac{u'(x)-\phi(x)}{2}]dx$$

reduciendo términos semejantes

$$=-\int_{-\infty}^{\infty} g(x)e^{-2V(x)}f'(x)u(x)dx-\frac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty} g(x)e^{-2V(x)}f(x)u'(x)dx$$

$$+\frac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-2V(x)}g(x)f(x)\phi(x)dx$$

luego

$$=-\int_{-\infty}^{\infty} g(x)e^{-2V(x)}[f'(x)u(x)+h(x)f(x)]dx$$

$$=\langle g, L_u f\rangle=-\langle L_u f, g\rangle$$

■

2.3. Polinomios anti-ortogonales de Hermite

Consideremos en el lema (2.1.2), el caso específico cuando la función peso w es $w(x)=e^{-x^2}$, entonces debemos tener $e^{-2V(x)}=e^{-x^2}$ y como consecuencia $V(x)=\frac{x^2}{2}$ y por lo tanto

$$V'(x)=x. \tag{2.3.6}$$

Por otro lado tenemos que

$$2V'(x)=\frac{\phi(x)}{u(x)} \tag{2.3.7}$$

entonces de (2.3.6) y (2.3.7) se deduce

$$2x=\frac{\phi(x)}{u(x)}.$$

Podemos entonces tomar $\phi(x)=2x$ y $u(x)=1$, y el operador L_u se convierte en

$$L_u=\frac{d}{dx}-x.$$

Observemos que $p(x)q(x)e^{-x^2}|_{-\infty}^{\infty}=0$ si p,q son polinomios, en este caso el operador L_u es anti-simétrico en L_w^2.

Antes de obtener los polinomios anti-simétricos correspondientes a los polinomios mónicos de Hermite, enunciemos el siguiente resultado:

Corolario 2.3.1 *Los polinomios mónicos de Hermite p_n cumplen con las siguientes propiedades*

(i) $p_n'=np_{n-1}$

(ii) $p_n''-2xp_n'+2np_n=0$

(iii) $p_n''=n(n-1)p_{n-2}$

Demostración. Demostremos el inciso (i), en efecto, puesto que

$$p_n=2^{-n}H_n$$

entonces

$$p_n'=2^{-n}H_n'$$

utilizando la proposición 1.2.3 se tiene:

$$p_n'=2^{-n}2nH_{n-1}=np_{n-1}.$$

Los incisos (ii) y (iii) son inmediatos de la proposición 1.2.3.■

Notemos que la afirmación (iii) se sigue de la afirmación (i), para fines prácticos se ha puesto en esta proposición. En la siguiente proposición w será $w(x)=e^{-x^2}$.

Proposición 2.3.2 *Sea $\Omega(f,g)=\langle L_u f, g\rangle$ para todo $f,g\in L_w^2$. Una familia de polinomios anti-ortogonales en términos de los polinomios mónicos de Hermite con respecto a Ω es:*

$$q_{2m+1}(x)=p_{2m+1}(x),\qquad q_{2m}(x)=m!\sum_{n=0}^{m}\frac{1}{n!}p_{2n}(x)$$

además

$$\gamma_m = \Omega(q_{2m}, q_{2m+1}) = -\|p_{2m+1}\|^2$$

para $m \in \mathbb{N}$.

Demostración. Para demostrar este resultado haremos uso del lema 2.1.8, proponemos

$$q_{2m} = p_{2m} + \sum_{k=0}^{2m-1} c_k^{2m} p_k, \qquad q_{2m+1} = p_{2m+1} + \sum_{k=0}^{2m} c_k^{2m+1} p_k.$$

En este caso el sistema linealmente independiente es $\{1, x, x^2, ...\}$.

De la expresión de q_{2m} se tiene, para $m = 0$, que $q_0 = 1$. Calculemos γ_0 y q_1 haciendo uso del lema 2.1.8; en efecto, de la expresión de q_{2m+1} para $m = 0$ se sigue

$$q_1 = p_1 + c_0^1.$$

luego

$$\langle L_u 1, p_1(x) + c_0^1 \rangle = \gamma_0;$$

en consecuencia

$$\langle L_u 1, p_1(x) + c_0^1 \rangle = \langle -x, p_1(x) + c_0^1 \rangle = \langle -x, p_1(x) \rangle + \langle -x, c_0^1 \rangle = \gamma_0.$$

Puesto que

$$\langle -x, c_0^1 \rangle = -c_0^1 \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} x = -c_0^1 \langle x, 1 \rangle = 0,$$

la constante c_0^1 puede ser cualquiera, así tomemos $c_0^1 = 0$; por lo tanto $q_1 = p_1$, además $\gamma_0 = -\|p_1\|^2$, ya que $p_1(x) = x$. Procedamos a calcular el resto de los polinomios anti-ortogonales con ayuda del lema 2.1.8; es decir, suponiendo

$$\langle L_u q_{2m}, x^i \rangle = 0 \quad y \quad \langle L_u q_{2m+1}, x^i \rangle = 0 \quad i = 0, ..., 2m-1. \tag{2.3.8}$$

para $m = 1, 2, ...$; luego, calculemos

$$L_u p_k = p_k' - p_k x, \qquad \forall k \in \mathbb{N}.$$

Utilizando la afirmación (i) del corolario 2.3.1 en el primer término y multiplicando y dividiendo por $k+1$ el segundo término

$$L_u p_k = k p_{k-1} - \frac{k+1}{k+1} p_k x$$

de nuevo usando la afirmación (i) del corolario 2.3.1 en el segundo término y multiplicando y dividiendo por 2 el segundo término

$$L_u p_k = k p_{k-1} + \frac{2}{2(k+1)} p_{k+1}' x$$

usando la afirmación (iii) del corolario 3.2.1 en segundo término

$$L_u p_k = k p_{k-1} - \frac{p_{k+1}'' + 2(k+1) p_{k+1}}{2(k+1)}$$

utilizando la afirmación (iii) del corolario 3.2.1 en el segundo término

$$L_u p_k = k p_{k-1} - \frac{(k+1) k p_{k-1} + 2(k+1) p_{k+1}}{2(k+1)}$$

finalmente

$$L_u p_k = \frac{k}{2} p_{k-1} - p_{k+1}$$

luego

$$\langle L_u q_{2m}, x^i \rangle = \langle m p_{2m-1} - p_{2m+1} + \sum_{k=0}^{2m-1} c_k^{2m} \frac{k}{2} p_{k-1} - \sum_{k=0}^{2m-1} c_k^{2m} p_{k+1}, x^i \rangle \tag{2.3.9}$$

Tomando $i = 0$ en (2.3.9)

$$\langle L_u q_{2m}, 1 \rangle = \langle m p_{2m-1} - p_{2m+1} + \sum_{k=0}^{2m-1} c_k^{2m} \frac{k}{2} p_{k-1} - \sum_{k=0}^{2m-1} c_k^{2m} p_{k+1}, 1 \rangle$$

debido a la ortogonalidad de los polinomios de Hermite, sólo nos queda un término cuando $k = 1$ en la primera suma, es decir

$$\langle L_u q_{2m}, 1 \rangle = \frac{c_1^{2m}}{2} \langle p_0, 1 \rangle = 0$$

por lo tanto

$$c_1^{2m} = 0, \qquad m = 1, 2, ... \tag{2.3.10}$$

Sea $m > 1$ y $s \in \mathbb{N}$ tal que $0 < 2s < 2m-1$ y tomemos $i = 2s$ entonces de (2.3.9)

$$\langle L_u q_{2m}, x^{2s} \rangle = \langle m p_{2m-1} - p_{2m+1} + \sum_{k=0}^{2m-1} c_k^{2m} [\frac{k}{2} p_{k-1} - p_{k+1}], x^{2s} \rangle.$$

Por la ortogonalidad de los polinomios de Hermite, nos quedan dos términos cuando $k = 2s+1$ en la primera suma y cuando $k = 2s-1$ en la segunda suma

$$\langle L_u q_{2m}, x^{2s}\rangle = \frac{2s+1}{2} c_{2s+1}^{2m}\langle p_{2s}, x^{2s}\rangle - c_{2s-1}^{2m}\langle p_{2s}, x^{2s}\rangle = 0$$

de donde se infiere

$$c_{2s+1}^{2m} = \frac{2}{2s+1} c_{2s-1}^{2m}, \qquad s = 1, ..., m-1.$$

de esta última relación y de (2.3.10) se deduce

$$c_{2s+1}^{2m} = 0, \qquad s = 1, ..., m-1.$$

Observemos que (2.3.10) y la última afirmación significan que los coeficientes impares de q_{2m} son cero.

Supongamos que $m > 1$ y $s \in \mathbb{N}$ tal que $0 < 2s+1 < 2m-1$ y tomemos $i = 2s+1$ en (2.3.9) de modo que

$$\langle L_u q_{2m}, x^{2s+1}\rangle = \langle m p_{2m-1} - p_{2m+1} + \sum_{k=0}^{2m-1} c_k^{2m}\frac{k}{2} p_{k-1} - \sum_{k=0}^{2m-1} c_k^{2m} p_{k+1}, x^{2s+1}\rangle.$$

Por la ortogonalidad de los polinomios de Hermite se tienen dos términos cuando $k = 2s+2$ en la primera suma y cuando $k = 2s$ en la segunda suma, así

$$\langle L_u q_{2m}, x^{2s+1}\rangle = c_{2s+2}^{2m}\frac{2s+2}{2}\langle p_{2s+1}, x^{2s+1}\rangle - c_{2s}^{2m}\langle p_{2s+1}, x^{2s+1}\rangle = 0$$

luego

$$c_{2s}^{2m} = (s+1)c_{2s+2}^{2m} \qquad s = 0, ..., m-2.$$

Ahora bien, supongamos que $m \geq 1$ y tomemos $i = 2m-1$ en (2.3.9)

$$\langle L_u q_{2m}, x^{2m-1}\rangle = \langle m p_{2m-1} - p_{2m+1} + \sum_{k=0}^{2m-1} c_k^{2m}\frac{k}{2} p_{k-1} - \sum_{k=0}^{2m-1} c_k^{2m} p_{k+1}, x^{2m-1}\rangle.$$

luego

$$\langle L_u q_{2m}, x^{2m-1}\rangle = m\langle p_{2m-1}, x^{2m-1}\rangle - c_{2m-2}^{2m}\langle p_{2m-1}, x^{2m-1}\rangle = 0$$

se sigue

$$c_{2m-2}^{2m} = m.$$

Finalmente tenemos:

$$q_{2m} = m![p_0 + \frac{1}{1!}p_2 + \frac{1}{2!}p_2 + ... + \frac{1}{(m-1)!}p_{2m-2} + \frac{p_{2m}}{m!}],$$

por lo tanto

$$q_{2m}(x) = m!\sum_{n=0}^{m}\frac{1}{n!}p_{2n}(x).$$

Por otro lado, procedamos a calcular los coeficientes de los polinomios anti-ortogonales de grado impar, esos cálculos serán semejantes a los anteriores, por eso no pondremos todos los pasos. Entonces

$$\langle L_u q_{2m+1}, x^i\rangle = \langle q'_{2m+1} - q_{2m+1}x, x^i\rangle$$

$$= \langle p'_{2m+1} + \sum_{k=0}^{2m} c_k^{2m+1} p'_k - p_{2m+1}x - \sum_{k=0}^{2m} c_k^{2m+1} p_k x, x^i\rangle$$

reordenando los términos

$$\langle L_u q_{2m+1}, x^i\rangle = \langle p'_{2m+1} - p_{2m+1}x + \sum_{k=0}^{2m} c_k^{2m+1}\left[p'_k - p_k x\right], x^i\rangle$$

por los cálculos hechos para $L_u p_k$ se tiene

$$\langle L_u q_{2m+1}, x^i\rangle = \langle \frac{2m+1}{2}p_{2m} - p_{2m+2} + \sum_{k=0}^{2m} c_k^{2m+1}\frac{k}{2}p_{k-1} - \sum_{k=0}^{2m} c_k^{2m+1}p_{k+1}, x^i\rangle = 0 \tag{2.3.11}$$

Tomando $i = 0$ en (2.3.11) se obtiene

$$\langle L_u q_{2m+1}, 1\rangle = \langle \frac{2m+1}{2}p_{2m} - p_{2m+2} + \sum_{k=0}^{2m} c_k^{2m+1}\frac{k}{2}p_{k-1} - \sum_{k=0}^{2m} c_k^{2m+1}p_{k+1}, 1\rangle = 0$$

Debido a la ortogonalidad de los polinomios de Hermite se tiene sólo un término cuando $k = 1$ en la primera suma entonces:

$$\langle L_u q_{2m+1}, 1\rangle = \frac{1}{2}c_1^{2m+1}\langle p_0, 1\rangle = 0,$$

se sigue

$$c_1^{2m+1} = 0, \qquad m = 1, 2, ... \qquad (2.3.12)$$

Supongamos que $m > 1$ y $s \in \mathbb{N}$ tal que $0 < 2s < 2m$ entonces tomando $i = 2s$ en (2.3.11) se obtiene

$$\langle L_u q_{2m+1}, x^{2s}\rangle = \langle \frac{2m+1}{2} p_{2m} - p_{2m+2} + \sum_{k=0}^{2m} c_k^{2m+1} \frac{k}{2} p_{k-1} - \sum_{k=0}^{2m} c_k^{2m+1} p_{k+1}, x^{2s}\rangle = 0$$

luego de la ortogonalidad de los polinomios de Hermite nos quedan dos términos cuando $k = 2s+1$ en la primera suma y cuando $k = 2s-1$ en la segunda suma, es decir

$$\langle L_u q_{2m+1}, x^{2s}\rangle = c_{2s+1}^{2m+1} \frac{2s+1}{2} \langle p_{2s}, x^{2s}\rangle - c_{2s-1}^{2m+1} \langle p_{2s}, x^{2s}\rangle = 0$$

se sigue

$$c_{2s+1}^{2m+1} = \frac{2}{2s+1} c_{2s-1}^{2m+1}, \qquad s = 1, ..., m-1.$$

De (2.3.12) y del último aserto se tiene:

$$c_{2s+1}^{2m+1} = 0 \qquad s = 1, ..., m-1.$$

es decir, que los coeficientes impares de q_{2m+1} son cero excepto c_{2m+1}^{2m+1}.

Consideremos que $m > 1$ y $s \in \mathbb{N}$ tal que $0 < 2s+1 < 2m+1$ y tomemos $i = 2s+1$ en (2.3.11) entonces

$$\langle L_u q_{2m+1}, x^{2s+1}\rangle = \langle \frac{2m+1}{2} p_{2m} - p_{2m+2} + \sum_{k=0}^{2m} c_k^{2m+1} \frac{k}{2} p_{k-1} - \sum_{k=0}^{2m} c_k^{2m+1} p_{k+1}, x^{2s+1}\rangle = 0$$

luego de la ortogonalidad sólo nos quedan dos términos cuando $k = 2s+2$ en la primera suma y cuando $k = 2s$ en la segunda suma, de modo que

$$\langle L_u q_{2m+1}, x^{2s+1}\rangle = c_{2s+2}^{2m+1} \frac{2s+2}{2} \langle p_{2s+1}, x^{2s+1}\rangle - c_{2s}^{2m+1} \langle p_{2s+1}, x^{2s+1}\rangle = 0$$

por lo tanto

$$c_{2s}^{2m+1} = (s+1) c_{2s+2}^{2m+1} \qquad s = 0, ..., m-2.$$

Por último, supongamos que $m \geq 1$ y tomemos $i = 2m-1$ en (2.3.11) entonces

$$\langle L_u q_{2m+1}, x^{2m-1}\rangle = \langle \frac{2m+1}{2} p_{2m} - p_{2m+2} + \sum_{k=0}^{2m} c_k^{2m+1} \frac{k}{2} p_{k-1} - \sum_{k=0}^{2m} c_k^{2m+1} p_{k+1}, x^{2m-1}\rangle = 0$$

luego de la ortogonalidad

$$\langle L_u q_{2m+1}, x^{2m-1}\rangle = \frac{2m}{2} c_{2m}^{2m+1} \langle p_{2m-1}, x^{2m-1}\rangle - c_{2m-2}^{2m+1} \langle p_{2m-1}, x^{2m-1}\rangle = 0$$

es decir

$$c_{2m-2}^{2m+1} = m c_{2m}^{2m+1}.$$

Entonces los polinomios q_{2m+1} se pueden escribir como

$$q_{2m+1} = p_{2m+1} + c_{2m}^{2m+1} p_{2m} + m c_{2m}^{2m+1} p_{2m-2} + m(m-1) c_{2m}^{2m+1} p_{2(m-2)} + ... + m! c_{2m}^{2m+1} p_0$$

Tomando $c_{2m}^{2m+1} = 0$ se obtiene

$$q_{2m+1} = p_{2m+1}.$$

Procedamos a calcular γ_m, para $m = 1, 2...$ en efecto,

$$\gamma_m = \Omega(q_{2m}, q_{2m+1}) = \langle L_u q_{2m}, q_{2m+1}\rangle = \langle L_u \Big(m! \sum_{n=0}^{m} \frac{1}{n!} p_{2n} \Big), p_{2m+1}\rangle$$

$$\gamma_m = \langle m! \sum_{n=0}^{m} \frac{1}{n!} L_u p_{2n}, p_{2m+1}\rangle = \langle m! \sum_{n=0}^{m} \frac{1}{n!} \Big[p'_{2n} - x p_{2n} \Big], p_{2m+1}\rangle$$

por el cálculo hecho para $L_u p_k$ se tiene

$$\gamma_m = \langle m! \sum_{n=0}^{m} \frac{1}{n!} \Big[n p_{2n-1} - p_{2n+1} \Big], p_{2m+1}\rangle$$

luego, por la ortogonalidad de los polinomios de Hermite, sólo nos queda el término cuando $n = m$ en el segundo término de la suma, así

$$\gamma_m = -\langle p_{2m+1}, p_{2m+1}\rangle = -\|p_{2m+1}\|^2 \qquad \blacksquare.$$

Proposición 2.3.3 *El sistema anti-ortogonal*

$$q_{2m+1} = p_{2m+1}$$

$$q_{2m}(x) = m! \sum_{n=0}^{m} \frac{1}{n!} p_{2n}(x)$$

es solución de

$$y'' - 2xy' + (2m+1)y = 0$$

y

$$y'' - 2xy' + 2my = 0$$

respectivamente.

Demostración. La demostración se sigue del corolario 3.2.1 y del teorema anterior ■.

2.4. Sistemas anti-ortogonales en $l^2(\mathbb{R})$

En esta sección calcularemos sistemas anti-ortogonales en el espacio $l^2(\mathbb{R})$, construyendo operadores anti-simétricos y utilizando un conjunto numerable ortogonal que a su vez es una base de $l^2(\mathbb{R})$.

Sea $H = l^2(\mathbb{R})$ y tomemos el conjunto linealmente independiente $\{e_0, ..., e_i, ...\}$ en H tal que $e_i = (0, ..., 1_{i+1}, 0, ...)$ y

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & \cdots \\ -1 & 0 & 0 & 0 & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \cdots \\ 0 & 0 & -1 & 0 & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix}.$$

Si $x, y \in H$ son $x = (x_0, x_1, ..., x_{2i}, x_{2i+1}, ...)$ y $y = (y_0, y_1, ..., y_{2i}, y_{2i+1}, ...)$ entonces

$$\langle Ax, y\rangle = \langle (x_1, -x_0, ..., x_{2i+1}, -x_{2i}, ...), (y_0, y_1, ..., y_{2i}, y_{2i+1}, ...)\rangle$$

$$= x_1y_0 - x_0y_1 + ... + x_{2i+1}y_{2i} - x_{2i}y_{2i+1} + ...$$

Por otro lado tenemos:

$$\langle x, Ay\rangle = \langle (x_0, x_1, x_2 ..., x_{2i}, x_{2i+1}, ...), (y_1, -y_0, ..., y_{2i+1}, -y_{2i}, ...)\rangle$$

$$= -[x_1y_0 - x_0y_1 + ... + x_{2i+1}y_{2i} - x_{2i}y_{2i+1} + ...] = -\langle Ax, y\rangle,$$

es decir $\langle Ax, y\rangle = \langle x, -Ay\rangle$ para todo $x, y \in l^2(\mathbb{R})$, esto prueba que $A^* = -A$. Para este operador A tenemos el siguiente teorema:

Teorema 2.4.1 *Sea $\Omega(x, y) = \langle Ax, y\rangle$ para todo $x, y \in l^2(\mathbb{R})$. Entonces un sistema anti-ortogonal con respecto a Ω es:*

$$h_{2n} = c_{2n}^{2n} e_{2n}, \qquad h_{2n+1} = c_{2n}^{2n+1} e_{2n} - \frac{1}{c_{2n}^{2n}} e_{2n+1}$$

para $n = 0, 1, 2, ...$; $c_{2n}^{2n} \neq 0$ y $c_0^0 = 1$.

Demostración. Proponemos a h_{2n} y h_{2n+1} como siguen:

$$h_{2n} = c_0^{2n} e_0 + c_1^{2n} e_1 + ... + c_{2n}^{2n} e_{2n}, \qquad h_{2n+1} = c_0^{2n+1} e_0 + c_1^{2n+1} e_1 + ... + c_{2n+1}^{2n+1} e_{2n+1}.$$

Tomemos $h_0 = e_0$. Ahora bien, con ayuda del lema 2.1.8 en el caso que la sucesión es $\{\gamma_n = 1\}_{n=0}^{\infty}$, debemos tener:

$$\Omega(e_0, h_1) = \langle Ae_0, h_1\rangle = 1.$$

En vista que $\langle Ae_0, h_1\rangle = \langle (0, -1, 0, ...), (c_0^1, c_1^1, 0, ...)\rangle = -c_1^1$, las expresiones de h_0 y h_1 son las siguientes:

$$h_0 = e_0, \qquad h_1 = c_0^1 e_0 - e_1.$$

Consideremos que $n \geq 1$. De nuevo por el lema 2.1.8 debemos tener:

$$\langle Ah_{2n}, e_i\rangle = 0, \qquad i = 0, 1, ..., 2n-1. \tag{2.4.1}$$

Si $s \in \mathbb{N}$ es tal que $0 \leq 2s \leq 2n-1$ y tomemos $i = 2s$ en (2.4.1) entonces

$$\langle Ah_{2n}, e_{2s}\rangle = \langle (c_1^{2n}, -c_0^{2n}, ..., c_{2s+1}^{2n}, -c_{2s}^{2n}, ..., 0, -c_{2n}^{2n}, 0, ...), (0, ..., 1_{2s+1}, ...)\rangle = 0$$

donde c_{2s+1}^{2n} está en el lugar $2s+1$ y $-c_{2s}^{2n}$ está en el lugar $2s+2$. Luego,

$$\langle Ah_{2n}, e_{2s}\rangle = c_{2s+1}^{2n} = 0, \qquad s = 0, 1, 2, ..., n-1. \tag{2.4.2}$$

Supongamos que $s \in \mathbb{N}$ tal que $0 < 2s+1 \leq 2n-1$ y tomemos $i = 2s+1$ en (2.4.1) de (2.4.2) resulta:

$$\langle Ah_{2n}, e_{2s+1}\rangle = \langle (0, -c_0^{2n}, ..., 0, -c_{2s}^{2n}, ..., 0, -c_{2n}^{2n}, 0, ...), (0, ..., 1_{2s+2}, ...)\rangle = 0,$$

puesto que $-c_{2s}^{2n}$ está en el lugar $2s+2$ se deduce:

$$c_{2s}^{2n} = 0, \qquad s = 0, 1, 2, ..., n-1. \tag{2.4.3}$$

En definitiva de los resultados de (2.4.2) y (2.4.3) se tiene:

$$h_{2n} = c_{2n}^{2n} e_{2n}, \qquad n = 0, 1, 2, ...$$

Análogamente, por el lema 2.1.8 debemos tener:

$$\langle Ah_{2n+1}, e_i\rangle = 0, \qquad i = 0, 1, 2, ..., 2n-1. \tag{2.4.4}$$

Si $s \in \mathbb{N}$ es tal que $0 \leq 2s \leq 2n-1$ y tomamos $i = 2s$ en (2.4.4) entonces:

$$\langle Ah_{2n+1}, e_{2s}\rangle = \langle (c_1^{2n+1}, -c_0^{2n+1}, ..., c_{2s+1}^{2n+1}, -c_{2s}^{2n+1}, ..., c_{2n+1}^{2n+1}, -c_{2n}^{2n+1}, 0, ...), e_{2s}\rangle = 0$$

donde c_{2s+1}^{2n} está en el lugar $2s+1$ y $-c_{2s}^{2n}$ está en el lugar $2s+2$. Luego,

$$\langle Ah_{2n+1}, e_{2s}\rangle = c_{2s+1}^{2n+1} = 0, \qquad s = 0, 1, 2, ..., n-1. \tag{2.4.5}$$

Consideremos que $s \in \mathbb{N}$ tal que $0 < 2s+1 \leq 2n-1$ y tomemos $i = 2s+1$ en (2.4.4) de (2.4.5) resulta:

$$\langle Ah_{2n+1}, e_{2s+1}\rangle = \langle (0, -c_0^{2n+1}, ..., 0, -c_{2s}^{2n+1}, ..., c_{2n+1}^{2n+1}, -c_{2n}^{2n+1}, 0, ...), e_{2s+1}\rangle = 0,$$

puesto que $-c_{2s}^{2n+1}$ está en el lugar $2s+2$ se deduce:

$$c_{2s}^{2n+1} = 0, \qquad s = 0, 1, 2, ..., n-1. \tag{2.4.6}$$

En consecuencia de los resultados de (2.4.5) y (2.4.6) se tiene:

$$h_{2n+1} = c_{2n}^{2n+1} e_{2n} + c_{2n+1}^{2n+1} e_{2n+1} \qquad n = 0, 1, 2, ...$$

De nuevo por lema 2.1.8 tenemos:

$$\langle Ah_{2n}, h_{2n+1}\rangle = \langle (0, ..., 0, -c_{2n}^{2n}, 0, ...), (0, ..., 0, c_{2n}^{2n+1}, c_{2n+1}^{2n+1}, 0, ...)\rangle = 1,$$

puesto que $-c_{2n}^{2n}$ y c_{2n+1}^{2n+1} estan en el lugar $2n+2$ se infiere:

$$\langle Ah_{2n}, h_{2n+1}\rangle = -c_{2n}^{2n} c_{2n+1}^{2n+1} = 1,$$

se sigue:

$$c_{2n+1}^{2n+1} = -\frac{1}{c_{2n}^{2n}}.$$

De manera que:

$$h_{2n+1} = c_{2n}^{2n+1} e_{2n} - \frac{1}{c_{2n}^{2n}} e_{2n+1}. \qquad \blacksquare$$

Veamos ahora un operador anti-simétrico más general que el anterior y calculemos el sistema anti-ortogonal utilizando el mismo conjunto ortogonal.

Tomemos $H = l^2(\mathbb{R})$ y el conjunto linealmente independiente $\{e_0, e_1, e_2, ...\}$ en H tal que $e_i = (0, ..., 1_{i+1}, 0, ..)$. Sea

$$\mathbf{B} = \begin{pmatrix} 0 & b_0 & 0 & 0 & \dots \\ -b_0 & 0 & b_1 & 0 & \dots \\ 0 & -b_1 & 0 & b_2 & \dots \\ 0 & 0 & -b_2 & 0 & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix}.$$

Sea $x, y \in H$ tal que $x = (x_0, x_1, ..., x_n, .)$ y $y = (y_0, y_1, ..., y_n, ...)$, entonces

$$\langle Bx, y\rangle = \langle (b_0x_1, -b_0x_0 + b_1x_2, ..., -b_nx_n + b_{n+1}x_{n+2}, ...), (y_0, y_1, ..., y_n, y_{n+1} ...)\rangle$$

observemos que $-b_nx_n + b_{n+1}x_{n+2}$ y y_{n+1} están en la posición $n+2$ se sigue

$$\langle Bx, y\rangle = b_0x_1y_0 - b_0x_0y_1 + ... + b_nx_{n+1}y_n - b_nx_ny_{n+1} + b_{n+1}x_{n+2}y_{n+1} - b_{n+1}x_{n+1}y_{n+2}.$$

Por otro lado

$$\langle x, By\rangle = \langle (x_0, x_1, ..., x_n, x_{n+1} ...), (b_0y_1, -b_0y_0 + b_1y_2, ..., -b_ny_n + b_{n+1}y_{n+2}, ...)\rangle$$

se sigue

$$\langle x, By\rangle = -[b_0y_0x_1 - b_0x_0y_1 + ... - b_ny_{n+1}x_n + b_ny_nx_{n+1} - b_{n+1}y_{n+2}x_{n+1} + b_{n+1}y_{n+1}x_{n+2} + ...]$$

De aquí se deduce que $\langle Bx, y\rangle = -\langle x, By\rangle$; así, B es un operador anti-simétrico.

Teorema 2.4.2 *Sean* $\{b_n\}_{n=0}^{\infty}$ *una sucesión de números reales tal que* $b_{2n} \neq 0$ *y* $\left[b_{2n}b_{2n-2} - (b_{2m-1})^2\right] \neq 0$ *para* $n = 0, 1, 2, ...;$ *y* $\Omega(x, y) = \langle Bx, y\rangle$ *para todo* $x, y \in l^2(\mathbb{R})$. *Entonces un sistema anti-ortogonal con respecto a* Ω *es:*

$$h_{2m} = c_{2m}^{2m}e_{2m} + \frac{b_{2m-1}}{b_{2m-2}}c_{2m}^{2m}e_{2m-2} + ... + \frac{b_1b_3...b_{2m-1}}{b_0b_2...b_{2m-2}}c_{2m}^{2m}e_0$$

$$h_{2m+1} = c_{2m+1}^{2m+1}e_{2m+1} + c_{2m}^{2m+1}e_{2m} + \frac{b_{2m-1}}{b_{2m-2}}c_{2m}^{2m+1}e_{2m-2} + ... + \frac{b_1b_3...b_{2m-1}}{b_0b_2...b_{2m-2}}c_{2m}^{2m+1}e_0.$$

Demostración. Denotemos a

$$h_{2m} = c_0^{2m}e_0 + c_1^{2m}e_1 + ... + c_{2m}^{2m}e_{2m}, \qquad h_{2m+1} = c_0^{2m+1}e_0 + c_1^{2m+1}e_1 + ... + c_{2m+1}^{2m+1}e_{2m+1}.$$

Tomemos $h_0 = e_0$. Utilizando el lema 2.1.8 en el caso que $\{\gamma_n = 1\}_{n=0}^{\infty}$ tenemos que:

$$\langle Ae_0, h_1\rangle = 1.$$

Debido a que $\langle Ae_0, h_1\rangle = \langle (0, -b_0, 0, ...), (c_0^1, c_1^1, 0, ...\rangle = -b_0c_1^1 = \gamma_0$, las expresiones de h_0 y h_1 son:

$$h_0 = e_0, \qquad h_1 = c_0^1 - \frac{1}{b_0}e_1.$$

De nuevo por el lema 2.1.8 debemos tener:

$$\langle Bh_{2m}, e_i\rangle = 0 \qquad i = 0, 1, ..., 2m-1. \tag{2.4.7}$$

Haciendo el análisis para $i = 0$ en (2.4.7) tenemos:

$$\langle Bh_{2n}, e_0\rangle = \langle (b_0c_1^{2m}, ...), (1, 0, ...)\rangle = b_0c_1^{2m} = 0,$$

puesto que $b_0 \neq 0$ entonces

$$c_1^{2m} = 0, \qquad m = 1, ... \tag{2.4.8}$$

Supongamos que $m > 1$ y $s \in \mathbb{N}$ tal que $0 < 2s < 2m-1$ y tomemos $i = 2s$ en (2.4.7) de (2.4.7) y (2.4.8) se obtiene:

$$\langle Bh_{2m}, e_{2s}\rangle = \langle (0, -b_0x_0 + b_1x_2, ..., -b_{2s-1}c_{2s-1}^{2m} + b_{2s}c_{2s+1}^{2m}, ...), (0, ..., 1_{2s+1}, 0, ...)\rangle$$

como $-b_{2s-1}c_{2s-1}^{2m} + b_{2s}c_{2s+1}^{2n}$ está en el lugar $2s+1$, se sigue

$$\langle Bh_{2m}, e_{2s}\rangle = -b_{2s-1}c_{2s-1}^{2m} + b_{2s}c_{2s+1}^{2m} = 0 \qquad s = 1, 2, ..., m-1,$$

luego

$$c_{2s+1}^{2m} = \frac{b_{2s-1}}{b_{2s}}c_{2s-1}^{2m} \qquad s = 1, 2, ..., m-1.$$

Puesto que $c_1^{2m} = 0$ para $m = 1, ...$, se sigue del último resultado

$$c_{2s+1}^{2m} = 0, \qquad s = 1, 2, ..., m-1. \tag{2.4.9}$$

Supongamos que $m > 1$ y $s \in \mathbb{N}$ tal que $0 < 2s+1 < 2m-1$ y tomemos $i = 2s+1$ en (2.4.7), de (2.4.7)-(2.4.9) resulta:

$$\langle Bh_{2m}, e_{2s+1}\rangle = \langle (0, ..., -b_{2s}c_{2s}^{2m} + b_{2s+1}c_{2s+2}^{2m}, ...), (0, ..., 1_{2s+1}, 0, ...)\rangle$$

ya que $-b_{2s}c_{2s}^{2m} + b_{2s+1}c_{2s+2}^{2m}$ está en el lugar $2s+1$, se sigue

$$\langle Bh_{2m}, e_{2s+1}\rangle = -b_{2s}c_{2s}^{2m} + b_{2s+1}c_{2s+2}^{2m} = 0$$

luego

$$c_{2s}^{2m} = \frac{b_{2s+1}}{b_{2s}}c_{2s+2}^{2m}, \qquad s = 0, 1, ..., m-1.$$

Ahora bien, tomemos $i = 2m-1$ en (2.4.7), entonces de (2.4.7)-(2.4.9) se infiere

$$\langle Bh_{2m}, e_{2m-1}\rangle = \langle (0, ..., -b_{2m-2}c_{2m-2}^{2m} + b_{2m-1}c_{2m}^{2m}, ...), (0, ..., 1_{2m}, 0, ...)\rangle,$$

debido que $-b_{2m-2}c_{2m-2}^{2m} + b_{2m-1}c_{2m}^{2m}$ está en el lugar $2m$ se infiere

$$-b_{2m-2}c_{2m-2}^{2m} + b_{2m-1}c_{2m}^{2m} = 0$$

ya que $b_{2m-2} \neq 0$ se obtiene

$$c_{2m-2}^{2m} = \frac{b_{2m-1}}{b_{2m-2}}c_{2m}^{2m} \qquad \text{para} \qquad m = 1, 2, ...$$

Finalmente tenemos:

$$h_{2m} = c_{2m}^{2m}e_{2m} + \frac{b_{2m-1}}{b_{2m-2}}c_{2m}^{2m}e_{2m-2} + ... + \frac{b_1b_3...b_{2m-1}}{b_0b_2...b_{2m-2}}c_{2m}^{2m}e_0$$

Análogamente, por el lema 2.1.8 debemos tener:

$$\langle Bh_{2m+1}, e_i\rangle = 0 \qquad i = 0, ..., 2m-1. \tag{2.4.10}$$

Haciendo el análisis para $i=0$ en (2.4.10) se sigue

$$\langle Bh_{2m+1}, e_0\rangle = \langle (b_0 c_1^{2m+1}, ...), (1,0,...)\rangle = b_0 c_1^{2m+1} = 0,$$

puesto que $b_0 \neq 0$ se sigue

$$c_1^{2m+1} = 0, \qquad m = 1,2,.... \tag{2.4.11}$$

Si $s \in \mathbb{N}$ es tal que $0 < 2s < 2m-1$ y tomemos $i = 2s$ en (2.4.10),de (2.4.10) y (2.4.11) se infiere:

$$\langle Bh_{2m+1}, e_{2s}\rangle = \langle (0,..., -b_{2s-1}c_{2s-1}^{2m+1} + b_{2s}c_{2s+1}^{2m+1}, ...), (0,..., 1_{2s+1}, 0, ...)\rangle = 0$$

puesto que $-b_{2s-1}c_{2s-1}^{2m+1} + b_{2s}c_{2s+1}^{2m+1}$ está en el lugar $2s+1$ se sigue

$$\langle Bh_{2m+1}, e_{2s}\rangle = -b_{2s-1}c_{2s-1}^{2m+1} + b_{2s}c_{2s+1}^{2m+1} = 0,$$

como $b_{2s} \neq 0$ se obtiene

$$c_{2s+1}^{2m+1} = \frac{b_{2s-1}}{b_{2s}} c_{2s-1}^{2m+1}, \qquad s = 1,2,...,m-1.$$

De (2.4.11) y del último resultado se sigue

$$c_{2s+1}^{2m+1} = 0, \qquad s = 0,1,2,...,n-1. \tag{2.4.12}$$

Por otro lado, supongamos que $m > 1$ y $s \in \mathbb{N}$ tal que $0 < 2s+1 < 2m-1$ y tomemos $i = 2s+1$ en (2.4.10), entonces de (2.4.10)-(2.4.12) se sigue

$$\langle Bh_{2m+1}, e_{2s+1}\rangle = \langle (0,..., -b_{2s}c_{2s}^{2m+1} + b_{2s+1}c_{2s+2}^{2m+1}, ...), (0,..., 1_{2s+2}, 0, ...)\rangle = 0$$

debido a que $-b_{2s}c_{2s}^{2m+1} + b_{2s+1}c_{2s+2}^{2m+1}$ se encuentra en el lugar $2s+2$ se obtiene

$$\langle Bh_{2m+1}, e_{2s+1}\rangle = -b_{2s}c_{2s}^{2m+1} + b_{2s+1}c_{2s+2}^{2m+1} = 0$$

ya que $b_{2s} \neq 0$ se infiere

$$c_{2s}^{2m+1} = \frac{b_{2s+1}}{b_{2s}} c_{2s+2}^{2m+1}, \qquad s = 0,1,..,m-1.$$

Finalmente suponiendo $m \geq 1$ y tomando $i = 2m-1$ en (2.4.10) se obtiene

$$\langle Bh_{2m+1}, e_{2m-1}\rangle = \langle (0,..., -b_{2m-2}c_{2m-2}^{2m+1} + b_{2m-1}c_{2m}^{2m+1}, ...), (0,..., 1_{2m}, 0, ...)\rangle = 0$$

como $-b_{2m-2}c_{2m-2}^{2m+1} + b_{2m-1}c_{2m}^{2m+1}$ está en el lugar $2m$ se sigue

$$-b_{2m-2}c_{2m-2}^{2m+1} + b_{2m-1}c_{2m}^{2m+1} = 0$$

luego

$$c_{2m-2}^{2m+1} = \frac{b_{2m-1}}{b_{2m-2}} c_{2m}^{2m+1}.$$

En definitiva:

$$h_{2m+1} = c_{2m+1}^{2m+1}e_{2m+1} + c_{2m}^{2m+1}e_{2m} + \frac{b_{2m-1}}{b_{2m-2}}c_{2m}^{2m+1}e_{2m-2} + ... + \frac{b_1 b_3 ... b_{2m-1}}{b_0 b_2 ... b_{2m-2}} c_{2m}^{2m+1} e_0.$$

En vista que

$$\Omega(q_{2m}, q_{2m+1}) = 1$$

se tiene

$$\Omega(q_{2m}, q_{2m+1}) = (c_{2m}^{2m}e_{2m} + \frac{b_{2m-1}}{b_{2m-2}}c_{2m}^{2m}e_{2m-2} + ... + \frac{b_1 b_3 ... b_{2m-1}}{b_0 b_2 ... b_{2m-2}} c_{2m}^{2m} e_0,$$

$$c_{2m+1}^{2m+1}e_{2m+1} + c_{2m}^{2m+1}e_{2m} + \frac{b_{2m-1}}{b_{2m-2}}c_{2m}^{2m+1}e_{2m-2} + ... + \frac{b_1 b_3 ... b_{2m-1}}{b_0 b_2 ... b_{2m-2}} c_{2m}^{2m+1} e_0)$$

luego

$$\Omega(q_{2m}, q_{2m+1}) = (c_{2m}^{2m}e_{2m} + \frac{b_{2m-1}}{b_{2m-2}}c_{2m}^{2m}e_{2m-2} + ... + \frac{b_1 b_3 ... b_{2m-1}}{b_0 b_2 ... b_{2m-2}} c_{2m}^{2m} e_0,$$

$$c_{2m+1}^{2m+1}e_{2m+1} + c_{2m}^{2m+1}e_{2m})$$

$$\Omega(q_{2m}, q_{2m+1}) = \langle B(\frac{b_1 b_3 ... b_{2m-1}}{b_0 b_2 ... b_{2m-2}} c_{2m}^{2m}, ..., \frac{b_{2m-1}}{b_{2m-2}}c_{2m}^{2m}, 0, c_{2m}^{2m}, 0, ...)\rangle,$$

$$(0,...,0, c_{2m}^{2m+1}, c_{2m+1}^{2m+1}, 0, ...))$$

$$\Omega(q_{2m}, q_{2m+1}) = \langle (0,..., -b_{2m-1}\frac{b_{2m-1}}{b_{2m-2}}c_{2m}^{2m} + b_{2m}c_{2m}^{2m}, 0, ...), (0,...,0, c_{2m}^{2m+1}, c_{2m+1}^{2m+1}, 0, ...))\rangle$$

puesto que $-b_{2m-1}\frac{b_{2m-1}}{b_{2m-2}}c_{2m}^{2m} + b_{2m}c_{2m}^{2m}$ y c_{2m}^{2m+1} están en el lugar $2m+1$ entonces

$$\Omega(q_{2m}, q_{2m+1}) = -b_{2m-1}\frac{b_{2m-1}}{b_{2m-2}}c_{2m}^{2m} + b_{2m}c_{2m}^{2m}c_{2m}^{2m+1} = 1$$

por lo tanto

$$c_{2m}^{2m+1} = \frac{1}{-b_{2m-1}\frac{b_{2m-1}}{b_{2m-2}}c_{2m}^{2m} + b_{2m}c_{2m}^{2m}}$$

Así hemos probado el teorema (2.4.4) ■.

Capítulo 3

Polinomios anti-ortogonales con respecto a los polinomios de Charlier

La meta de este capítulo es construir sistemas anti-ortogonales en términos de los polinomios de Charlier. Para esto, usaremos los operadores lineales $\triangle$ y ∇ y sus propiedades dadas en la sección 1.3 del primer capítulo.

3.1. El operador anti-simétrico L_c

En esta sección construiremos un operador anti-simétrico apartir de un funcional bilineal anti-simétrico en el caso específico de la función de peso

$$\rho(k) = e^{-a}\frac{a^k}{k!}$$

que es debida a la distribución de Poisson.

Construyamos un funcional como sigue:

$$\Omega(f,g) = \langle \triangle f, g\rangle - \langle f, \triangle g\rangle.$$

Es claro que $\Omega(f,g) = -\Omega(g,f)$. Además Ω es lineal en el primer argumento, en efecto,

$$\Omega(bf+ch,g) = \langle \triangle(bf+ch), g\rangle - \langle bf+ch, \triangle g\rangle$$

donde $f,g,h \in L^2_\rho$ y $b,c \in \mathbb{R}$. Utilizando la linealidad de $\triangle$ se deduce

$$\Omega(bf+ch,g) = b\langle \triangle f, g\rangle + c\langle \triangle h, g\rangle - b\langle f, \triangle g\rangle - c\langle h, \triangle g\rangle$$

es decir;

$$\Omega(bf+ch,g) = b[\langle \triangle f, g\rangle - \langle f, \triangle g\rangle] + c[\langle \triangle h, g\rangle - \langle h, \triangle g\rangle]$$

por lo tanto

$$\Omega(bf+ch,g) = b\Omega(f,g) + c\Omega(h,g).$$

Por el lema 2.1.2 se sigue que Ω es lineal en el segundo argumento. Por lo tanto, Ω es un funcional bilineal anti-simétrico.

En el caso concreto cuando la función de peso ρ es:

$$\rho(k) = e^{-a}\frac{a^k}{k!},$$

Construiremos explícitamente un operador L_c antisimétrico, tal que $\Omega(f,g) = \langle L_c f, g\rangle$, en efecto,

$$\Omega(f,g) = \langle \triangle f, g\rangle - \langle f, \triangle g\rangle$$

$$\Omega(f,g) = \langle f(x+1), g(x)\rangle - \langle f(x), g(x)\rangle + \langle f(x), g(x)\rangle - \langle f(x), g(x+1)\rangle \tag{3.1.1}$$

Haciendo $A = \langle f(x+1), g(x)\rangle - \langle f(x), g(x)\rangle + \langle f(x), g(x)\rangle$ (3.1.1) se convierte en:

$$\Omega(f,g) = A - e^{-a}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{a^k}{k!}f(k)g(k+1)$$

tomando $i = k+1$, se tiene:

$$\Omega(f,g) = A - \frac{e^{-a}}{a}\sum_{i=1}^{\infty}\frac{ia^i}{(i)!}f(i-1)g(i) = A - \frac{e^{-a}}{a}\sum_{i=0}^{\infty}\frac{ia^i}{(i)!}f(i-1)g(i)$$

De este último resultado se deduce que:

$$\Omega(f,g) = \langle L_c f, g\rangle$$

donde definimos

$$L_c f(x) = \triangle f(x) + \Lambda f(x)$$

con $\Lambda f(x) = f(x) - \frac{x}{a}f(x-1)$. Observemos que ignoramos que L_c sea acotado; por lo tanto el teorema de Lax-Milgran no se aplica en este caso.

Proposición 3.1.1 *El operador L_c es anti-simétrico.*

Demostración. Sean $f, g \in L^2_\rho$ entonces

$$\langle L_c f, g\rangle = \langle (\Delta+\Lambda)f, g\rangle = e^{-a}[\sum_{k=0}^{\infty}\frac{a^k}{k!}f(k+1)g(k) - \sum_{k=1}^{\infty}\frac{a^{k-1}}{(k-1)!}f(k-1)g(k)]$$

Por otro lado tenemos

$$\langle f, -L_c g\rangle = -\langle f, L_c g\rangle = -\langle f(x), g(x+1)-g(x)\rangle - \langle f(x), g(x) - \frac{x}{a}g(x-1)\rangle.$$

$$= -e^{-a}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{a^k}{k!}f(k)g(k+1) + e^{-a}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{a^{k-1}}{(k-1)!}f(k)g(k-1)$$

haciendo un cambio de variable para $i = k+1$ en la primera suma y $i = k-1$ en la segunda suma se obtiene:

$$\langle f, -L_c g\rangle = -e^{-a}\sum_{i=1}^{\infty}\frac{a^{i-1}}{(i-1)!}f(i-1)g(i) + e^{-a}\sum_{i=-1}^{\infty}\frac{a^i}{(i)!}f(i+1)g(i)$$

luego

$$\langle f, -L_c g\rangle = -e^{-a}\sum_{i=1}^{\infty}\frac{a^{i-1}}{(i-1)!}f(i-1)g(i) + e^{-a}\sum_{i=0}^{\infty}\frac{a^i}{(i)!}f(i+1)g(i)$$

de donde

$$\langle L_c f, g\rangle = \langle f, -L_c g\rangle. \qquad \blacksquare$$

En seguida veamos que los todos los momentos de $\rho(k) = e^{-a}\frac{a^k}{k!}$ son finitos, es decir;

$$\sum_{k=0}^{\infty} e^{-a}\frac{a^k}{k!}k^m < \infty \tag{3.1.2}$$

En el caso concreto que $m = 0$ en (3.1.2) resulta:

$$\sum_{k=0}^{\infty} e^{-a}\frac{a^k}{k!} = e^{-a}e^{a} = 1$$

Supongamos que (3.1.2) es cierto para toda $n \leq m$, es decir;

$$\sum_{k=0}^{\infty} e^{-a}\frac{a^k}{k!}k^n < \infty$$

probemos que (3.1.2) es válido para $m+1$, en efecto,

$$\sum_{k=0}^{\infty} e^{-a}\frac{a^k}{k!}k^{m+1} = \sum_{k=1}^{\infty} e^{-a}\frac{a^k}{(k-1)!}k^m$$

haciendo $i = k-1$,

$$\sum_{k=0}^{\infty} e^{-a}\frac{a^k}{k!}k^{m+1} = \sum_{i=0}^{\infty} e^{-a}\frac{a^{i+1}}{i!}(i+1)^m$$

por el teorema del binomio tenemos que

$$\sum_{k=0}^{\infty} e^{-a}\frac{a^k}{k!}k^{m+1} = a\sum_{i=0}^{\infty} e^{-a}\frac{a^i}{i!}\sum_{j=0}^{m}\frac{m!}{j!(m-j)!}i^j = a\sum_{j=0}^{m}\frac{m!}{j!(m-j)!}\left[\sum_{i=0}^{\infty} e^{-a}\frac{a^i}{i!}i^j\right]$$

este último resultado prueba por inducción completa que los momentos son finitos.

3.2. Polinomios discretos ortogonales de Charlier

Definición 3.2.1 *Para $a > 0$ y $x \in \mathbb{N}$ los polinomios discretos de Charlier son:*

$$c_n^{(a)}(x) = \sum_{k=0}^{n}\frac{n!}{k!(n-k)}\frac{x!}{(x-k)!}(-a)^{n-k}$$

Las relaciones discretas de ortogonalidad que satisfacen los polinomios de Charlier son:

$$\langle c_n^{(a)}(x), c_m^{(a)}(x)\rangle = \sum_{x=0}^{\infty} e^{-a}\frac{a^x}{x!}c_n^{(a)}(x)c_m^{(a)}(x) = a^n n!\delta_{mn}. \tag{3.2.3}$$

$$\langle c_n^{(a)}(x), x^i\rangle = 0, \qquad i = 0, 1, ..., n-1. \tag{3.2.4}$$

Los resultados anteriores y la siguiente proposición se puede encontrar en J. Arvesú, et al. [8] y T. M. Dunster , et al.[13].

Proposición 3.2.2 *Los polinomios de Charlier cumplen con las siguientes propiedades:*

(1) $\triangle c_n^{(a)}(x) = nc_{n-1}^{(a)}(x)$

(2) $xc_n^{(a)}(x) = c_{n+1}^{(a)}(x) + (n+a)c_n^{(a)}(x) + anc_{n-1}^{(a)}(x)$

(3) $x\triangle\nabla c_n^{(a)}(x) + (a-x)\triangle c_n^{(a)}(x) + nc_n^{(a)}(x) = 0$

3.3. Polinomios anti-ortogonales de Charlier

Teorema 3.3.1 *Sea* $\Omega(f,g) = \langle L_c f, g\rangle$ *para todo* $f, g \in L_\rho^2$. *Entonces una familia de polinomios anti-ortogonales en términos de los polinomios de Charlier y con respecto al operador* Ω *es:*

$$q_{2m} = 2^m a^m m! \sum_{n=0}^{m} \frac{1}{2^n a^n n!} c_{2n}^{(a)}(x), \qquad q_{2m+1} = c_{2m+1}^{(a)}(x).$$

además

$$\gamma_m = -\frac{1}{a}\|c_{2m+1}^{(a)}\|^2.$$

Demostración. Sean

$$q_{2m} = c_{2m}^{(a)}(x) + \sum_{k=0}^{2m-1} b_k^{2m} c_k^{(a)}(x), \qquad q_{2m+1} = c_{2m+1}^{(a)}(x) + \sum_{k=0}^{2m} b_k^{2m+1} c_k^{(a)}(x)$$

nuestra propuesta de polinomios anti-ortogonales, donde b_k^{2m} y b_k^{2m+1} son constantes a determinar. De la expresión de q_{2m} cuando $m = 0$, se tiene $q_0 = 1$ y de la expresión de q_{2m+1} cuando $m = 0$ resulta $q_1 = c_1^a(x) + b_0^1$. Con ayuda del lema 2.1.8 calculemos b_0^1 y γ_0, entonces debemos tener:

$$\langle L_c 1, c_1^{(a)}(x) + b_0^1\rangle = \gamma_0$$

en consecuencia

$$\langle L_c 1, c_1^{(a)}(x)\rangle = \langle \triangle 1 + \Lambda 1, c_1^{(a)}(x) + b_0^1\rangle = \gamma_0;$$

pero $\triangle 1 = 0$, de modo que

$$\langle L_c 1, c_1^{(a)}(x)\rangle = \langle 1 - \frac{x}{a}, c_1^{(a)}(x) + b_0^1\rangle = \gamma_0;$$

luego

$$\langle L_c 1, c_1^{(a)}(x)\rangle = \langle 1, b_0^1\rangle - \langle \frac{x}{a}, c_1^{(a)}(x)\rangle - \langle \frac{x}{a}, b_0^1\rangle = \gamma_0, \tag{3.3.5}$$

puesto que $\langle 1, c_1^{(a)}(x)\rangle = 0$.

En vista que:

$$\langle 1, b_0^1\rangle = e^{-a}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{a^k}{k!}b_0^1 = e^{-a}e^a b_0^1 = b_0^1$$

y

$$\langle \frac{x}{a}, b_0^1\rangle = e^{-a}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{a^k}{k!}\frac{k}{a}b_0^1 = e^{-a}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{a^k}{k!}\frac{k}{a}b_0^1 = e^{-a}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{a^{k-1}}{(k-1)!}b_0^1 = e^{-a}\sum_{i=0}^{\infty}\frac{a^i}{i!}b_0 = b_0^1$$

aquí $i = k-1$, se sigue de (3.3.5) que b_0^1 es arbitrario y

$$\gamma_0 = -\langle \frac{x}{a}, c_1^{(a)}(x)\rangle = -\langle \frac{x}{a}, c_1^{(a)}(x)\rangle - \frac{1}{a}\langle -a, c_1^a(x)\rangle$$

luego

$$\gamma_0 = -\frac{1}{a}\|c_1^a\|^2.$$

puesto que $c_1^a(x) = x - a$ y $\frac{1}{a}\langle -a, c_1^a(x)\rangle = 0$. Ahora bien, como b_0^1 es arbitrario, tomemos $b_0^1 = 0$, por lo tanto

$$q_1 = c_1^{(a)}(x).$$

Supongamos que $m > 1$. De nuevo por el lema 2.1.8 tenemos:

$$\langle L_c q_{2m}, x^i\rangle = 0 \qquad i = 0, 1, ..., 2m-1,$$

luego

$$\langle L_c q_{2m}, x^i\rangle = \langle \triangle c_{2m}^{(a)}(x) + \sum_{k=0}^{2m-1} b_k^{2m}\triangle c_k^{(a)}(x) + \Lambda c_{2m}^{(a)}(x) + \sum_{k=0}^{2m-1} b_k^{2m}\Lambda c_k^{(a)}(x), x^i\rangle$$

de la referencia (1) de la proposición (3.2.2) y de la definición de Λ se obtiene

$$\langle L_c q_{2m}, x^i\rangle = \langle 2mc_{2m-1}^{(a)}(x) + k\sum_{k=0}^{2m-1} b_k^{2m} c_{k-1}^{(a)}(x) + c_{2m}^{(a)}(x), x^i\rangle$$

$$+\langle\sum_{k=0}^{2m-1} b_k^{2m} c_k^{(a)}(x) - \frac{x}{a} c_{2m}^{(a)}(x-1) - \frac{x}{a}\sum_{k=0}^{2m-1} b_k^{2m} c_k^{(a)}(x-1), x^i\rangle.$$

Con el fin de tener los polinomios de Charlier sólo en la variable x y no en $x-1$, hagamos los siguientes cálculos (ver 1.3.2) para todo k:

$$\nabla\triangle c_k^{(a)}(x) = c_k^{(a)}(x+1) - 2c_k^{(a)}(x) + c_k^{(a)}(x-1);$$

despejando $c_k^{(a)}(x-1)$

$$c_k^{(a)}(x-1) = \nabla\triangle c_k^{(a)}(x) - c_k^{(a)}(x+1) + 2c_k^{(a)}(x) = \nabla\triangle c_k^{(a)}(x) - \triangle c_k^{(a)}(x) + c_k^{(a)}(x).$$

Ahora bien,

$$xc_k^{(a)}(x-1) = x\nabla\triangle c_k^{(a)}(x) - x\triangle c_k^{(a)}(x) + xc_k^{(a)}(x),$$

Utilizando la afirmación (3) de la proposición 3.2.2 se sigue,

$$xc_k^{(a)}(x-1) = -(a-x)\triangle c_k^{(a)}(x) - kc_k^{(a)}(x) - x\triangle c_k^{(a)}(x) + xc_k^{(a)}(x);$$

reduciendo términos

$$xc_k^{(a)}(x-1) = -a\triangle c_k^{(a)}(x) - kc_k^{(a)}(x) + xc_k^{(a)}(x),$$

y de la afirmación (2) de la proposición 3.2.2 se sigue

$$xc_k^{(a)}(x-1) = -a\triangle c_k^{(a)}(x) - kc_k^{(a)}(x) + c_{k+1}^{(a)}(x) + (k+a)c_k^{(a)}(x) + akc_{k-1}^{(a)}(x).$$

Luego de la afirmación (1) de la proposición 3.2.2

$$xc_k^{(a)}(x-1) = -akc_{k-1}^{(a)}(x) - kc_k^{(a)}(x) + c_{k+1}^{(a)}(x) + (k+a)c_k^{(a)}(x) + akc_{k-1}^{(a)}(x),$$

y finalmente se tiene:

$$xc_k^{(a)}(x-1) = ac_k^{(a)}(x) + c_{k+1}^{(a)}(x).$$

Entonces

$$\langle L_c q_{2m}, x^i\rangle = \langle 2mc_{2m-1}^{(a)}(x) + k\sum_{k=0}^{2m-1} b_k^{2m} c_{k-1}^{(a)}(x) + c_{2m}^{(a)}(x) + \sum_{k=0}^{2m-1} b_k^{2m} c_k^{(a)}(x), x^i\rangle$$

$$+\langle -\frac{1}{a} c_{2m+1}^{(a)}(x) - c_{2m}^{(a)}(x) - \sum_{k=0}^{2m-1} b_k^{2m} c_k^{(a)}(x) - \frac{1}{a}\sum_{k=0}^{2m-1} b_k^{2m} c_{k+1}^{(a)}(x), x^i\rangle$$

y finalmente:

$$\langle L_c q_{2m}, x^i\rangle = \langle 2mc_{2m-1}^{(a)}(x) + k\sum_{k=0}^{2m-1} b_k^{2m} c_{k-1}^{(a)}(x), x^i\rangle$$

$$+\langle \frac{-1}{a} c_{2m+1}^{(a)}(x) - \frac{1}{a}\sum_{k=0}^{2m-1} b_k^{2m} c_{k+1}^{(a)}(x), x^i\rangle = 0 \tag{3.3.6}$$

para $i = 0, 1, ..., 2m-1$. Haciendo el análisis para $i = 0$ en (3.3.6) se obtiene:

$$\langle L_c q_{2m}, 1\rangle = \langle 2mc_{2m-1}^{(a)}(x) + k\sum_{k=0}^{2m-1} b_k^{2m} c_{k-1}^{(a)}(x), 1\rangle$$

$$+\langle \frac{-1}{a} c_{2m+1}^{(a)}(x) - \frac{1}{a}\sum_{k=0}^{2m-1} b_k^{2m} c_{k+1}^{(a)}(x), 1\rangle = 0$$

Por la ortogonalidad de los polinomios de Charlier, sólo nos queda en la primera suma el término cuando $k = 1$, entonces

$$\langle L_c q_{2m}, 1\rangle = b_1^{2m}\langle c_0^{(a)}(x), 1\rangle = 0 \qquad m = 1, 2, ...,$$

y puesto que $\langle c_0^{(a)}(x), 1\rangle \neq 0$ se tiene

$$b_1^{2m} = 0.$$

Ahora bien, sean $m > 1$ y $s \in \mathbb{N}$ tal que $0 < 2s < 2m-1$; luego haciendo el análisis para $i = 2s$ en (3.3.6) se infiere:

$$\langle L_c q_{2m}, x^{2s}\rangle = \langle 2mc_{2m-1}^{(a)}(x) + k\sum_{k=0}^{2m-1} b_k^{2m} c_{k-1}^{(a)}(x), x^{2s}\rangle$$

$$+\langle \frac{-1}{a} c_{2m+1}^{(a)}(x) - \frac{1}{a}\sum_{k=0}^{2m-1} b_k^{2m} c_{k+1}^{(a)}(x), x^{2s}\rangle = 0.$$

Debido a la relación de ortogonalidad de los polinomios de Charlier, sólo nos quedan dos términos, cuando $k = 2s+1$ en la primera suma y cuando $k = 2s-1$ en la segunda suma, así tenemos la expresión siguiente:

$$\langle L_c q_{2m}, x^{2s}\rangle = \langle (2s+1)b_{2s+1}^{2m} c_{2s+1}^{2m}, x^{2s}\rangle - \frac{1}{a}\langle b_{2s-1}^{2m} c_{2s}^{(a)}(x), x^{2s}\rangle = 0.$$

Puesto que $\langle c_{2s}^{(a)}(x), x^{2s}\rangle \neq 0$ tenemos la siguiente relación para los coeficientes impares

$$b_{2s+1}^{2m} = \frac{1}{a(2s+1)} b_{2s-1}^{2m} \qquad s = 1, ..., m-1$$

de esta última relación se deduce que

$$b_{2s+1}^{2m} = 0 \qquad s = 1, ..., m-1$$

puesto que $b_1^{2m} = 0$. Supongamos que $m > 1$ y $s \in \mathbb{N}$ es tal que $0 < 2s+1 < 2m-1$ entonces tomando $i = 2s+1$ en (3.3.6)

$$\langle L_c q_{2m}, x^{2s+1}\rangle = \langle 2m c_{2m-1}^{(a)}(x) + k\sum_{k=0}^{2m-1} b_k^{2m} c_{k-1}^{(a)}(x), x^{2s+1}\rangle$$

$$+\langle \frac{-1}{a} c_{2m+1}^{(a)}(x) - \frac{1}{a}\sum_{k=0}^{2m-1} b_k^{2m} c_{k+1}^{(a)}(x), x^{2s+1}\rangle = 0$$

De la ortogonalidad de los polinomios de Charlier, nos quedan dos términos, cuando $k = 2s+2$ en primera suma y cuando $k = 2s$ en la segunda suma; así tenemos que:

$$\langle L_c q_{2m}, x^{2s+1}\rangle = \langle (2s+2) b_{2s+2}^{2m} c_{2s+1}^{(a)}, x^{2s+1}\rangle - \frac{1}{a}\langle b_{2s}^{2m} c_{2s+1}^{(a)}, x^{2s+1}\rangle = 0.$$

Por lo tanto la relación entre los coeficientes pares es:

$$b_{2s}^{2m} = 2a(s+1) b_{2(s+1)}^{2m} \qquad s = 0, 1, ..., m-2 \qquad m > 1. \tag{3.3.7}$$

Supongamos que $m \geq 1$ y hagamos el análisis cuando $i = 2m-1$ en (3.3.6) entonces:

$$\langle L_c q_{2m}, x^{2m-1}\rangle = \langle 2m c_{2m-1}^{(a)}(x) + k\sum_{k=0}^{2m-1} b_k^{2m} c_{k-1}^{(a)}(x), x^{2m-1}\rangle$$

$$+\langle \frac{-1}{a} c_{2m+1}^{(a)}(x) - \frac{1}{a}\sum_{k=0}^{2m-1} b_k^{2m} c_{k+1}^{(a)}(x), x^{2m-1}\rangle = 0$$

Teniendo en cuenta la ortogonalidad de los polinomios de Charlier nos queda:

$$\langle L_c q_{2m}, x^{2m-1}\rangle = \langle 2m c_{2m-1}^{(a)}(x), x^{2m-1}\rangle - \frac{1}{a}\langle b_{2m-2}^{2m} c_{2m-1}^{(a)}(x), x^{2m-1}\rangle = 0$$

luego,

$$b_{2m-2}^{2m} = 2am. \tag{3.3.8}$$

Puesto que los coeficientes impares se anulan, de (3.3.7) y (3.3.8) se sigue:

$$q_{2m} = c_{2m}^{(a)}(x) + 2am c_{2(m-1)}^{(a)}(x) + 2^2 a^2 m(m-1) c_{2(m-2)}^{(a)}(x) + ... + 2^m a^m m! c_0^{(a)}(x),$$

que se puede escribir como:

$$q_{2m} = 2^m a^m m! \sum_{n=0}^{m} \frac{1}{2^n a^n n!} c_n^{(a)}(x).$$

Calculemos ahora los coeficientes para los polinomios anti-ortogonales impares en efecto;

$$\langle L_c q_{2m+1}, x^i\rangle = 0 \qquad i = 0, 1, ..., 2m-1.$$

Entonces

$$\langle L_c q_{2m+1}, x^i\rangle = \langle \triangle c_{2m+1}^{(a)}(x) + \sum_{k=0}^{2m} b_k^{2m+1} \triangle c_k^{(a)}(x) + \Lambda c_{2m+1}^{(a)}(x) + \sum_{k=0}^{2m} b_k^{2m+1} \Lambda c_k^{(a)}(x), x^i\rangle$$

de la afirmación (1) de la proposición 3.2.2 y de la definición de Λ se sigue ahora

$$\langle L_c q_{2m+1}, x^i\rangle = \langle (2m+1) c_{2m}^{(a)}(x) + c_{2m+1}^{(a)}(x) + k\sum_{k=0}^{2m} b_k^{2m+1} c_{k-1}^{(a)}(x), x^i\rangle$$

$$+\langle \sum_{k=0}^{2m} b_k^{2m+1} c_k^{(a)}(x) - \frac{x}{a}\sum_{k=0}^{2m} b_k^{2m+1} c_k^{(a)}(x-1) - \frac{x}{a} c_{2m+1}^{(a)}(x-1), x^i\rangle$$

y sustituyendo a $c_k^{(a)}(x-1)$ y a $c_{2m+1}^{(a)}(x-1)$

$$\langle L_c q_{2m+1}, x^i\rangle = \langle (2m+1)c_{2m}^{(a)}(x) + c_{2m+1}^{(a)}(x) + k\sum_{k=0}^{2m} b_k^{2m+1} c_{k-1}^{(a)}(x), x^i\rangle$$

$$+\langle \sum_{k=0}^{2m} b_k^{2m+1} c_k^{(a)}(x) - \sum_{k=0}^{2m} b_k^{2m+1} c_k^{(a)}(x) - \frac{1}{a}\sum_{k=0}^{2m} b_k^{2m+1} c_{k+1}^{(a)}(x) - c_{2m+1}^{(a)}(x) - \frac{1}{a}c_{2m+2}^{(a)}(x), x^i\rangle;$$

reduciendo términos

$$\langle L_c q_{2m+1}, x^i\rangle = \langle (2m+1)c_{2m}^{(a)}(x) - \frac{1}{a}c_{2m+2}^{(a)}(x) + \sum_{k=0}^{2m} b_k^{2m+1}[kc_{k-1}^{(a)}(x) - \frac{1}{a}c_{k+1}^{(a)}(x)], x^i\rangle.$$

Finalmente:

$$\langle L_c q_{2m+1}, x^i\rangle = \langle (2m+1)c_{2m}^{(a)}(x) - \frac{1}{a}c_{2m+2}^{(a)}(x), x^i\rangle$$

$$+\langle \sum_{k=0}^{2m} b_k^{2m+1}[kc_{k-1}^{(a)}(x) - \frac{1}{a}c_{k+1}^{(a)}(x)], x^i\rangle = 0 \qquad (3.3.9)$$

para $i = 1, .., 2m-1$. Haciendo el análisis para $i = 0$ en (3.3.9) se obtiene:

$$\langle L_c q_{2m+1}, 1\rangle = \langle (2m+1)c_{2m}^{(a)}(x) - \frac{1}{a}c_{2m+2}^{(a)}(x), 1\rangle$$

$$+\langle \sum_{k=0}^{2m} b_k^{2m+1}[kc_{k-1}^{(a)}(x) - \frac{1}{a}c_{k+1}^{(a)}(x)], 1\rangle = 0;$$

de la ortogonalidad de los polinomios de Charlier, se sigue

$$\langle L_c q_{2m+1}, 1\rangle = \langle b_1^{2m} c_0^{(a)}(x), 1\rangle = 0;$$

luego,

$$b_1^{2m+1} = 0. \qquad (3.3.10)$$

Ahora bien, sea $m > 1$ y $s \in \mathbb{N}$ tal que $0 < 2s < 2m-1$, haciendo el análisis para $i = 2s$ en (3.3.9) se deduce:

$$\langle L_c q_{2m+1}, x^{2s}\rangle = \langle (2m+1)c_{2m}^{(a)}(x) - \frac{1}{a}c_{2m+2}^{(a)}(x), x^{2s}\rangle$$

$$+\langle \sum_{k=0}^{2m} b_k^{2m+1}[kc_{k-1}^{(a)}(x) - \frac{1}{a}c_{k+1}^{(a)}(x)], x^{2s}\rangle = 0$$

debido a la ortogonalidad de los polinomios de Charlier, nos quedan dos términos, cuando $k = 2s+1$ en la primera suma y $k = 2s-1$ en la segunda suma; es decir:

$$\langle L_c q_{2m+1}, x^{2s}\rangle = \langle (2s+1)b_{2s+1}^{2m+1} c_{2s}^{(a)}(x), x^{2s}\rangle - \frac{1}{a}\langle b_{2s-1}^{2m+1} c_{2s}^{(a)}(x), x^{2s}\rangle = 0,$$

luego

$$b_{2s+1}^{2m+1} = \frac{1}{a(2s+1)} b_{2s-1}^{2m+1}, \qquad s = 1, ..., m-1.$$

De esta última relación y de (3.3.10) se deduce

$$b_{2s+1}^{2m+1} = 0, \qquad s = 1, ..., m-1. \qquad (3.3.11)$$

Sean $m > 1$ y $s \in \mathbb{N}$ tal que $0 < 2s+1 < 2m-1$ y tomemos $i = 2s+1$ (3.3.9) se sigue:

$$\langle L_c q_{2m+1}, x^{2s+1}\rangle = \langle (2m+1)c_{2m}^{(a)}(x) - \frac{1}{a}c_{2m+2}^{(a)}(x), x^{2s+1}\rangle$$

$$+\langle \sum_{k=0}^{2m} b_k^{2m+1}[kc_{k-1}^{(a)}(x) - \frac{1}{a}c_{k+1}^{(a)}(x)], x^{2s+1}\rangle = 0$$

De la ortogonalidad de los polinomios de Charlier nos quedan dos términos, cuando $k = 2(s+1)$ en la primera suma y cuando $k = 2s$ en la segunda suma, es decir;

$$\langle L_c q_{2m+1}, x^{2s+1}\rangle = \langle 2(s+1)b_{2(s+1)}^{2m+1} c_{2s+1}^{(a)}(x), x^{2s+1}\rangle - \frac{1}{a}\langle b_{2s}^{2m+1} c_{2s+1}^{(a)}(x), x^{2s+1}\rangle = 0$$

resulta que:

$$b_{2s}^{2m+1} = 2a(s+1)b_{2(s+1)}^{2m+1} \qquad s = 0, 1, ..., m-2 \qquad m > 1. \qquad (3.3.12)$$

Ahora bien, cuando $i = 2m-1$ en (3.3.9) se tiene:

$$\langle L_c q_{2m+1}, x^{2m-1}\rangle = \langle (2m+1)c_{2m}^{(a)}(x) - \frac{1}{a}c_{2m+2}^{(a)}(x), x^{2m-1}\rangle$$

$$+\langle\sum_{k=0}^{2m} b_k^{2m+1}[k c_{k-1}^{(a)}(x) - \frac{1}{a} c_{k+1}^{(a)}(x)], x^{2m-1}\rangle = 0$$

De la ortogonalidad de los polinomios de Charlier nos quedan dos términos, cuando $k = 2m$ en la primera suma y cuando $k = 2m-2$ en la segunda suma; entonces:

$$\langle L_c q_{2m+1}, x^{2m-1}\rangle = \langle 2m b_{2m}^{2m+1} c_{2m-1}^{(a)}(x), x^{2m-1}\rangle - \frac{1}{a}\langle b_{2m-2}^{2m+1} c_{2m-1}^{(a)}(x), x^{2m-1}\rangle = 0,$$

de donde resulta:

$$b_{2m-2}^{2m+1} = 2am b_{2m}^{2m+1}. \tag{3.3.13}$$

Entonces de (3.3.10)-(3.3.13) se sigue:

$$q_{2m+1} = c_{2m+1}^{(a)}(x) + b_{2m}^{2m+1} c_{2m}^{(a)}(x) + 2am b_{2m}^{2m+1} c_{2m-2}^{(a)}(x) + \ldots + 2^m a^m m! b_{2m}^{2m+1} c_0^{(a)}(x)$$

y tomando $b_{2m}^{2m+1} = 0$ se obtiene:

$$q_{2m+1} = c_{2m+1}^{(a)}(x).$$

Por otra parte, calculemos γ_m para $m = 1, 2, \ldots$, entonces

$$\gamma_m = \Omega(q_{2m}, q_{2m+1}) = \langle L_c q_{2m}, q_{2m+1}\rangle = \langle \triangle q_{2m} + \Lambda q_{2m}, q_{2m+1}\rangle;$$

luego

$$\gamma_m = \langle \triangle\Big(2^m a^m m! \sum_{n=0}^{m} \frac{1}{2^n a^n n!} c_{2n}^{(a)}(x)\Big) + \Lambda\Big(2^m a^m m! \sum_{n=0}^{m} \frac{1}{2^n a^n n!} c_{2n}^{(a)}(x)\Big), c_{2m+1}^{(a)}(x)\rangle;$$

por la linealidad de $\triangle$ y Λ se sigue

$$\gamma_m = \langle\Big(2^m a^m m! \sum_{n=0}^{m} \frac{1}{2^n a^n n!} \triangle c_{2n}^{(a)}(x)\Big) + \Big(2^m a^m m! \sum_{n=0}^{m} \frac{1}{2^n a^n n!} \Lambda c_{2n}^{(a)}(x)\Big), c_{2m+1}^{(a)}(x)\rangle;$$

por la definición de $\triangle$ y Λ se sigue

$$\gamma_m = \langle 2^m a^m m! \sum_{n=0}^{m} \frac{1}{2^n a^n n!} 2n c_{2n-1}^{(a)}(x), c_{2m+1}^{(a)}(x)\rangle$$

$$+\langle 2^m a^m m! \sum_{n=0}^{m} \frac{1}{2^n a^n n!} c_{2n}^{(a)}(x) - \frac{x}{a} 2^m a^m m! \sum_{n=0}^{m} \frac{1}{2^n a^n n!} c_{2n}^{(a)}(x-1), c_{2m+1}^{(a)}(x)\rangle.$$

Luego

$$\gamma_m = \langle 2^m a^m m! \sum_{n=0}^{m} \frac{1}{2^n a^n n!} 2n c_{2n-1}^{(a)}(x) + 2^m a^m m! \sum_{n=0}^{m} \frac{1}{2^n a^n n!} c_{2n}^{(a)}(x), c_{2m+1}^{(a)}(x)\rangle$$

$$-\langle 2^m a^m m! \sum_{n=0}^{m} \frac{1}{2^n a^n n!}\Big[c_{2n}^{(a)}(x) + \frac{1}{a} c_{2n+1}^{(a)}(x)\Big], c_{2m+1}^{(a)}(x)\rangle;$$

y de la ortogonalidad de los polinomios de Charlier se sigue

$$\gamma_m = -\frac{1}{a}\langle c_{2m+1}^{(a)}(x), c_{2m+1}^{(a)}(x)\rangle,$$

es decir;

$$\gamma_m = -\frac{1}{a}\|c_{2m+1}^{(a)}\|^2. \quad \blacksquare$$

Capítulo 4

Polinomios anti-ortogonales con respecto a los polinomios de Meixner

4.1. El operador anti-simétrico L_γ

En seguida construiremos un operador anti-simétrico en L^2_ρ en el caso concreto de la función de peso $\rho(k) = \frac{\beta^k}{k!}(\gamma)_k$, a partir de un funcional bilineal anti-simétrico .

Sean $f, g \in L^2_\rho$ y Ω como sigue:

$$\Omega(f,g) = \langle Jf, g\rangle - \langle f, Jg\rangle$$

donde $Jf(x) = \frac{x}{\beta}f(x-1)$. Es claro que J es un operador lineal y Ω un funcional bilineal tal que $\Omega(f,g) = -\Omega(g,f)$.

Ahora construyamos a partir de este funcional un operador anti-simétrico en el espacio L^2_ρ. En efecto,

$$\Omega(f,g) = \langle Jf, g\rangle - \langle f, Jg\rangle = \langle Jf, g\rangle - \sum_{k=0}^{\infty}\frac{k}{\beta}f(k)g(k-1)\frac{\beta^k}{k!}(\gamma)_k;$$

haciendo el cambio de variable $i = k-1$

$$\Omega(f,g) = \langle Jf, g\rangle - \sum_{i=0}^{\infty}\frac{(i+1)}{\beta}f(i+1)g(i)\frac{\beta^{i+1}}{(i+1)!}(\gamma)_{i+1}.$$

De este último resultado se infiere que

$$\Omega(f,g) = \langle L_\gamma f, g\rangle,$$

donde por definición

$$L_\gamma f(x) = \frac{x}{\beta}f(x-1) - (x+\gamma)f(x+1).$$

Proposición 4.1.1 *El operador L_γ es anti-simétrico.*

Demostración. Sean $f, g \in L^2_\rho$, entonces

$$\langle L_\gamma f, g\rangle = \langle \frac{x}{\beta}f(x-1) - (x+\gamma)f(x+1), g(x)\rangle$$

luego

$$\langle L_\gamma f, g\rangle = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{k}{\beta}f(k-1)g(k)\frac{\beta^k}{k!}(\gamma)_k - \sum_{k=0}^{\infty}(k+\gamma)f(k+1)g(k)\frac{\beta^k}{k!}(\gamma)_k$$

y entonces

$$\langle L_\gamma f, g\rangle = \sum_{k=1}^{\infty}f(k-1)g(k)\frac{\beta^{k-1}}{(k-1)!}(\gamma)_k - \sum_{k=0}^{\infty}f(k+1)g(k)\frac{\beta^k}{k!}(\gamma)_{k+1}.$$

Por otra parte

$$\langle f, L_\gamma g\rangle = \langle f(x), \frac{x}{\beta}g(x-1) - (x+\gamma)g(x+1)\rangle;$$

se sigue

$$= \sum_{k=0}^{\infty}\frac{k}{\beta}f(k)g(k-1)\frac{\beta^k}{k!}(\gamma)_k - \sum_{k=0}^{\infty}(k+\gamma)f(k)g(k+1)\frac{\beta^k}{k!}(\gamma)_k;$$

haciendo los cambios de variable $i = k-1$ en la primera suma e $i = k+1$ en la segunda suma se tiene

$$= \sum_{i=-1}^{\infty}\frac{i+1}{\beta}f(i+1)g(i)\frac{\beta^{i+1}}{(i+1)!}(\gamma)_{i+1} - \sum_{i=1}^{\infty}(\gamma+i-1)f(i-1)g(i)\frac{\beta^{i-1}}{(i-1)!}(\gamma)_{i-1};$$

por lo tanto

$$\langle f, L_\gamma g\rangle = \sum_{i=0}^{\infty}f(i+1)g(i)\frac{\beta^i}{i!}(\gamma)_{i+1} - \sum_{i=1}^{\infty}f(i-1)g(i)\frac{\beta^{i-1}}{(i-1)!}(\gamma)_i;$$

luego $\langle L_\gamma f, g\rangle = -\langle f L_\gamma g\rangle$; es decir, el operador L_γ es anti-simétrico $\blacksquare$.

4.2. Polinomios ortogonales de Meixner

Definición 4.2.1 *Sean γ y β números reales tales que $\gamma > 0$ y $0 < \beta < 1$. Entonces los polinomios clásicos de Meixner son:*

$$M_n^{(\gamma,\beta)}(x) = \Big(\frac{\beta}{\beta - 1}\Big)\sum_{k=0}^{n}\frac{n!}{k!(n-k)!}(\gamma + k)_{n-k}(x - k + 1)_k\Big(1 - \frac{1}{\beta}\Big)$$

donde $n \geq 0$.

Los dos resultados siguientes sobre los polinomios de Meixner se pueden en contrar en J. Arvesú et al.[8] y Maria Álvarez, et al. [10]. El hecho que los momentos con respecto a ρ son finitos se afirma en Arnold F. Nikiforov, et al.[3].

Proposición 4.2.2 *Los polinomios de Meixner cumplen con la relación tres recurrente*

$$xM_n^{(\gamma,\beta)}(x) = M_{n+1}^{(\gamma,\beta)}(x) + \Big(\frac{n(1+\beta)+\beta\gamma}{1-\beta}\Big)M_n^{(\gamma,\beta)}(x) + \Big(\frac{n\beta(n-1+\gamma)}{(\beta-1)^2}\Big)M_{n-1}^{(\gamma,\beta)}(x)$$

para toda $n \geq 0$, aquí $M_0^{(\gamma,\beta)}(x) = 1$ y $M_{-1}^{(\gamma,\beta)}(x) = 0$.

Proposición 4.2.3 *Sea $\gamma > 0$ y $0 < \beta < 1$. Entonces los polinomios de Meixner satisfacen las siguientes propiedades:*

$$\Big(\frac{x+\gamma}{n}\Big)\triangle M_n^{(\gamma,\beta)}(x) = M_n^{(\gamma,\beta)}(x) + \Big(\frac{\gamma+n-1}{1-\beta}\Big)M_{n-1}^{(\gamma,\beta)}(x) \qquad (4.2.1)$$

$$\frac{x}{n}\nabla M_n^{(\gamma,\beta)}(x) = M_n^{(\gamma,\beta)}(x) + \Big(\frac{\beta}{\beta-1}\Big)(1-\gamma-n)M_{n-1}^{(\gamma,\beta)}(x) \qquad (4.2.2)$$

4.3. Polinomios anti-ortogonales de Meixner

Teorema 4.3.1 *Sea $\Omega(f,g) = \langle L_\gamma f, g\rangle$ para todo $f, g \in L_w^2$. Una familia de polinomios anti-ortogonales en términos de los polinomios de Meixner con respecto Ω es:*

$$q_{2m}^{\gamma}(x) = \frac{2^m\beta^m m!(\gamma+1)_{(2m,2)}}{(\beta-1)^{2m}}\sum_{n=0}^{m}\frac{(\beta-1)^{2n}}{2^n\beta^n n!(\gamma+1)_{(2n,2)}}M_{2n}^{(\gamma,\beta)}(x)$$

y

$$q_{2m+1}^{\gamma}(x) = M_{2m+1}^{(\gamma,\beta)}(x).$$

Además

$$\gamma_m = \frac{(1-\beta)}{\beta}||M_{2m+1}^{\gamma,\beta}(x)||^2,$$

donde $m = 0, 1, 2...$, $(\gamma+1)_{(2m,2)} = (\gamma+1)(\gamma+1+2)...(\gamma+1+2m-2)$.

Demostración. Proponemos

$$q_{2m}^{\gamma}(x) = M_{2m}^{(\gamma,\beta)}(x) + \sum_{k=0}^{2m-1} d_k^{2m} M_k^{(\gamma,\beta)}(x)$$

y

$$q_{2m+1}^{\gamma}(x) = M_{2m+1}^{\gamma,\beta}(x) + \sum_{k=0}^{2m} d_k^{2m+1} M_k^{(\gamma,\beta)}(x).$$

donde d_k^{2m} y d_k^{2m+1} son constantes por determinar. De la expresión de $q_{2m}^{\gamma}(x)$ se deduce que $q_0^{\gamma} = 1$. Luego de la expresión de $q_{2m+1}^{\gamma}(x)$ la forma de $q_1^{\gamma} = M_1^{\gamma,\beta}(x) + d_0^1$, calculemos d_0^1 y γ_0 con ayuda del lema 2.1.8, entonces debemos tener:

$$\langle L_\gamma 1, q_1^{\gamma}\rangle = \gamma_0,$$

de donde

$$\gamma_0 = \langle L_\gamma 1, M_1^{(\gamma,\beta)}(x) + d_0^1\rangle = \langle\frac{x}{\beta} - (x+\gamma), M_1^{(\gamma,\beta)}(x) + d_0^1\rangle$$

$$= \langle\frac{x}{\beta}, M_1^{(\gamma,\beta)}(x)\rangle + \langle\frac{x}{\beta}, d_0^1\rangle - \langle(x+\gamma), M_1^{(\gamma,\beta)}(x)\rangle - \langle(x+\gamma), d_0^1\rangle$$

$$= \langle\frac{x}{\beta} - x, M_1^{(\gamma,\beta)}(x)\rangle + \langle\frac{x}{\beta}, d_0^1\rangle - \langle\gamma, M_1^{(\gamma,\beta)}(x)\rangle - \langle(x+\gamma), d_0^1\rangle.$$

Puesto que $\langle\gamma, M_1^{(\gamma,\beta)}(x)\rangle = 0$ se sigue

$$\gamma_0 = \langle\frac{x}{\beta} - x, M_1^{(\gamma,\beta)}(x)\rangle + \langle\frac{x}{\beta}, d_0^1\rangle - \langle(x+\gamma), d_0^1\rangle.$$

Ahora bien, calculemos $\langle(x+\gamma), d_0^1\rangle$; entonces

$$\langle(x+\gamma), d_0\rangle = \sum_{k=0}^{\infty} d_0^1(k+\gamma)\frac{\beta^k}{k!}(\gamma)_k = \sum_{k=0}^{\infty} d_0^1\frac{\beta^k}{k!}(\gamma)_{k+1}.$$

Por otra parte tenemos que

$$\langle \frac{x}{\beta}, d_0^1 \rangle = \sum_{k=0}^{\infty} d_0^1 \frac{k}{\beta} \frac{\beta^k}{k!} (\gamma)_k = \sum_{k=1}^{\infty} d_0^1 \frac{\beta^{(k-1)}}{(k-1)!} (\gamma)_k = d_0^1 \sum_{i=0}^{\infty} \frac{\beta^i}{i!} (\gamma)_{i+1},$$

aquí $i = k-1$. Por lo tanto:

$$\gamma_0 = \langle \frac{x}{\beta} - x, M_1^{(\gamma,\beta)}(x) \rangle = \Big(\frac{1-\beta}{\beta}\Big) \langle x, M_1^{(\gamma,\beta)}(x) \rangle + \Big(\frac{1-\beta}{\beta}\Big) \langle \gamma, M_1^{(\gamma,\beta)}(x) \rangle$$

puesto que $\left(\frac{1-\beta}{\beta}\right) \langle \gamma, M_1^{(\gamma,\beta)}(x) \rangle = 0$; luego

$$\gamma_0 = \Big(\frac{1-\beta}{\beta}\Big) \langle x+\gamma, M_1^{(\gamma,\beta)}(x) \rangle = \Big(\frac{1-\beta}{\beta}\Big) \langle M_1^{(\gamma,\beta)}(x), M_1^{(\gamma,\beta)}(x) \rangle$$

es decir

$$\gamma_0 = \Big(\frac{1-\beta}{\beta}\Big) \| M_1^{(\gamma,\beta)}(x) \|^2.$$

y d_0^1 es cualquier número real. Para fines prácticos tomaremos $d_0^1 = 0$ y en consecuencia $q_1 = M_1^{(\gamma,\beta)}(x)$.

Calculemos el resto de los polinomios anti-ortogonales. Por el lema 2.1.8 debemos tener:

$$\langle L_\gamma q_{2m}^\gamma, x^i \rangle = 0,$$

para $m = 1, 2, \ldots$ y $i = 0, 1, \ldots, 2m-1$. Entonces

$$\langle L_\gamma q_{2m}^\gamma(x), x^i \rangle = \langle L_\gamma M_{2m}^{(\gamma,\beta)}(x) + \sum_{k=0}^{2m-1} d_k^{2m} L_\gamma M_k^{(\gamma,\beta)}(x), x^i \rangle;$$

luego

$$\langle L_\gamma q_{2m}^\gamma(x), x^i \rangle = \langle \frac{x}{\beta} M_{2m}^{(\gamma,\beta)}(x-1) - (\gamma+x) M_{2m}^{(\gamma,\beta)}(x+1), x^i \rangle$$

$$+ \sum_{k=0}^{2m-1} d_k^{2m} \langle \frac{x}{\beta} M_k^{(\gamma,\beta)}(x-1) - (\gamma+x) M_k^{(\gamma,\beta)}(x+1), x^i \rangle.$$

Para no hacer engorrosos los cálculos, hagamos éstos por partes, calculando la siguiente expresión para toda $k \in \mathbb{N}$. Sea

$$I = \frac{x}{\beta} M_k^{(\gamma,\beta)}(x-1) - (\gamma+x) M_k^{(\gamma,\beta)}(x+1);$$

puesto que

$$\triangle M_k^{(\gamma,\beta)}(x) = M_k^{(\gamma,\beta)}(x+1) - M_k^{(\gamma,\beta)}(x)$$

y

$$\nabla M_k^{(\gamma,\beta)}(x) = M_k^{(\gamma,\beta)}(x) - M_k^{(\gamma,\beta)}(x-1),$$

se sigue

$$I = \frac{x}{\beta} M_k^{(\gamma,\beta)}(x) - \frac{x}{\beta} \nabla M_k^{(\gamma,\beta)}(x) - (\gamma+x) \triangle M_k^{(\gamma,\beta)}(x) - (\gamma+x) M_k^{(\gamma,\beta)}(x),$$

multiplicando y dividiendo por k el segundo y tercer término tenemos:

$$I = \frac{x}{\beta} M_k^{(\gamma,\beta)}(x) - \frac{k}{\beta} \Big[\frac{x}{k} \nabla M_k^{(\gamma,\beta)}(x)\Big] - k \Big[\frac{(\gamma+x)}{k} \triangle M_k^{(\gamma,\beta)}(x)\Big] - (\gamma+x) M_k^{(\gamma,\beta)}(x).$$

Luego de (4.2.1) y (4.2.2)

$$I = \frac{x}{\beta} M_k^{(\gamma,\beta)}(x) - \frac{k}{\beta} \Big[M_k^{(\gamma,\beta)}(x) + \Big(\frac{\beta}{1-\beta}\Big)(1-\gamma-k) M_{k-1}^{(\gamma,\beta)}(x)\Big]$$

$$-k \Big[M_k^{(\gamma,\beta)}(x) + \Big(\frac{\gamma+k-1}{1-\beta}\Big) M_{k-1}^{(\gamma,\beta)}(x)\Big] - (x+\gamma) M_k^{(\gamma,\beta)}(x);$$

entonces

$$I = \frac{x}{\beta} M_k^{(\gamma,\beta)}(x) - \frac{k}{\beta} M_k^{(\gamma,\beta)}(x) - \Big(\frac{k}{\beta-1}\Big)(1-\gamma-k) M_{k-1}^{(\gamma,\beta)}(x)$$

$$-k M_k^{(\gamma,\beta)}(x) - k \frac{(k+\gamma-1)}{1-\beta} M_{k-1}^{(\gamma,\beta)}(x) - (x+\gamma) M_k^{(\gamma,\beta)}(x);$$

reduciendo términos

$$I = \Big(\frac{1-\beta}{\beta}\Big) x M_k^{(\gamma,\beta)}(x) - \Big(\frac{k(\beta+1)+\beta\gamma}{\beta}\Big) M_k^{(\gamma,\beta)}(x) + \frac{2k(k+\gamma-1)}{\beta-1} M_{k-1}^{(\gamma,\beta)}(x).$$

Por otra parte, por la relación tres recurrente tenemos que (ver proposición (4.2.2))

$$\Big(\frac{1-\beta}{\beta}\Big) x M_k^{(\gamma,\beta)}(x) = \Big(\frac{1-\beta}{\beta}\Big) M_{k+1}^{(\gamma,\beta)}(x) + \Big(\frac{k(\beta+1)+\beta\gamma}{\beta}\Big) M_k^{(\gamma,\beta)}(x)$$

$$+ \Big(\frac{1-\beta}{\beta}\Big) \frac{k\beta(k-1+\gamma)}{(\beta-1)^2} M_{k-1}^{(\gamma,\beta)}(x);$$

entonces

$$I=\Big(\frac{1-\beta}{\beta}\Big)M_{k+1}^{(\gamma,\beta)}(x)+\Big(\frac{k(\beta+1)+\beta\gamma}{\beta}\Big)M_{k}^{(\gamma,\beta)}(x)$$

$$-\frac{k(k-1+\gamma)}{(\beta-1)}M_{k-1}^{(\gamma,\beta)}(x)-\Big(\frac{k(\beta+1)+\beta\gamma}{\beta}\Big)M_{k}^{(\gamma,\beta)}(x)+\frac{2k(k+\gamma-1)}{\beta-1}M_{k-1}^{(\gamma,\beta)}(x).$$

Nótese que el segundo y cuarto término se anulan, luego

$$I=\Big(\frac{1-\beta}{\beta}\Big)M_{k+1}^{(\gamma,\beta)}(x)-\frac{k(k-1+\gamma)}{(\beta-1)}M_{k-1}^{(\gamma,\beta)}(x)+\frac{2k(k+\gamma-1)}{\beta-1}M_{k-1}^{(\gamma,\beta)}(x);$$

y de nuevo reduciendo términos

$$I=\Big(\frac{1-\beta}{\beta}\Big)M_{k+1}^{(\gamma,\beta)}(x)+\frac{k}{\beta-1}(k+\gamma-1)M_{k-1}^{(\gamma,\beta)}(x).$$

Entonces

$$\langle L_\gamma q_{2m}^\gamma, x^i\rangle=\langle\frac{(\beta-1)}{\beta}M_{2m+1}^{(\gamma,\beta)}(x)+\frac{2m}{\beta-1}(2m+\gamma-1)M_{2m-1}^{(\gamma,\beta)}(x),x^i\rangle$$

$$+\sum_{k=0}^{2m-1}d_k^{2m}\langle\frac{(\beta-1)}{\beta}M_{k+1}^{(\gamma,\beta)}(x)+\frac{k}{\beta-1}(k+\gamma-1)M_{k-1}^{(\gamma,\beta)}(x),x^i\rangle=0, \quad (4.3.3)$$

para $m=1,2,...$ y $i=0,1,...,2m-1$.

Haciendo el análisis para $i=0$ en (4.3.3) se tiene:

$$\langle L_\gamma q_{2m}^\gamma, 1\rangle=\langle\frac{(\beta-1)}{\beta}M_{2m+1}^{(\gamma,\beta)}(x)+\frac{2m}{\beta-1}(2m+\gamma-1)M_{2m-1}^{(\gamma,\beta)}(x),1\rangle$$

$$+\sum_{k=0}^{2m-1}d_k^{2m}\langle\frac{(\beta-1)}{\beta}M_{k+1}^{(\gamma,\beta)}(x)+\frac{k}{\beta-1}(k+\gamma-1)M_{k-1}^{(\gamma,\beta)}(x),1\rangle=0;$$

de la ortogonalidad de los polinomios de Meixner sólo nos queda el término cuando $k=1$ en el segundo término de la suma, es decir

$$\langle L_\gamma q_{2m}^\gamma, 1\rangle=\frac{d_1^{2m}\gamma}{\beta-1}\langle M_0^{(\gamma,\beta)}(x),1\rangle=0;$$

y puesto que $\gamma>0$, $0<\beta<1$ y $\langle M_0^{(\gamma,\beta)}(x),1\rangle\neq 0$ se infiere:

$$b_1^{2m}=0, \qquad m=1,2,... \qquad (4.3.4)$$

Consideremos que $m>1$ y $s\in\mathbb{N}$ tal que $0<2s<2m-1$, haciendo el análisis para $i=2s$ en (4.3.3) se deduce:

$$\langle L_\gamma q_{2m}^\gamma, x^{2s}\rangle=\langle\frac{(\beta-1)}{\beta}M_{2m+1}^{(\gamma,\beta)}(x)+\frac{2m}{\beta-1}(2m+\gamma-1)M_{2m-1}^{(\gamma,\beta)}(x),x^{2s}\rangle$$

$$+\sum_{k=0}^{2m-1}d_k^{2m}\langle\frac{(\beta-1)}{\beta}M_{k+1}^{(\gamma,\beta)}(x)+\frac{k}{\beta-1}(k+\gamma-1)M_{k-1}^{(\gamma,\beta)}(x),x^{2s}\rangle=0;$$

luego, de la ortogonalidad de los polinomios de Meixner sólo nos quedan dos términos, cuando $k=2s-1$ en el primera suma y cuando $k=2s+1$ en la segunda suma; por lo tanto

$$\langle L_\gamma q_{2m}^\gamma, x^{2s}\rangle=d_{2s-1}^{2m}\frac{(1-\beta)}{\beta}\langle M_{2s}^{(\gamma,\beta)}(x),x^{2s}\rangle$$

$$+d_{2s+1}^{2m}\frac{(2s+1)(2s+\gamma)}{\beta-1}\langle M_{2s}^{(\gamma,\beta)}(x),x^{2s}\rangle=0;$$

debido a que $2s+1\neq 0$ y $2s+\gamma\neq 0$ ya que $s\in\mathbb{N}$ se tiene:

$$d_{2s+1}^{2m}=\frac{(\beta-1)^2}{\beta(2s+1)(2s+\gamma)}d_{2s-1}^{2m}$$

para $m=2,3,...$ y $s=1,...,m-1$. De esta última relación y de (3.5.16) se deduce que

$$d_{2s+1}^{2m}=0 \qquad s=1,...,m-1.$$

Obeservemos que hasta aquí tenemos que todos los coeficientes impares de q_{2m} se anulan.

Continuando con este análisis, supongamos que $m>1$ y $s\in\mathbb{N}$ tal que $0<2s+1<2m-1$, entonces tomando $i=2s+1$ en (4.3.3) se tiene:

$$\langle L_\gamma q_{2m}^\gamma, x^{2s+1}\rangle=\langle\frac{(\beta-1)}{\beta}M_{2m+1}^{(\gamma,\beta)}(x)+\frac{2m}{\beta-1}(2m+\gamma-1)M_{2m-1}^{(\gamma,\beta)}(x),x^{2s+1}\rangle$$

$$+\sum_{k=0}^{2m-1}d_k^{2m}\langle\frac{(\beta-1)}{\beta}M_{k+1}^{(\gamma,\beta)}(x)+\frac{k}{\beta-1}(k+\gamma-1)M_{k-1}^{(\gamma,\beta)}(x),x^{2s+1}\rangle=0;$$

luego, por la ortogonalidad de los polinomios de Meixner, nos quedan dos términos, cuando $k = 2s$ en la primera suma y cuando $k = 2s + 2$ en la segunda suma, es decir

$$\langle L_\gamma q^\gamma_{2m}, x^{2s+1}\rangle = d^{2m}_{2s}\frac{(1-\beta)}{\beta}\langle M^{(\gamma,\beta)}_{2s+1}(x), x^{2s+1}\rangle$$

$$+d^{2m}_{2s+2}\frac{(2s+2)(2s+1+\gamma)}{\beta-1}\langle M^{(\gamma,\beta)}_{2s+1}(x), x^{2s+1}\rangle = 0;$$

debido a que $2s+2 \neq 0$, $2s+1+\gamma \neq 0$, $\langle M^{(\gamma,\beta)}_{2s+1}(x), x^{2s+1}\rangle \neq 0$ se tiene:

$$d^{2m}_{2s}\frac{(1-\beta)}{\beta} + d^{2m}_{2s+2}\frac{(2s+2)(2s+1+\gamma)}{\beta-1} = 0;$$

luego la relación para los coeficientes pares de los polinomios anti-ortogonales de grado par es:

$$d^{2m}_{2s} = d^{2m}_{2s+2}\frac{2\beta(s+1)(\gamma+2s+1)}{(\beta-1)^2}, \qquad (4.3.5)$$

para $m = 2, 3, \ldots$ y $s = 1, .., m-1$.

Para el último caso de este análisis supongamos que $m \geq 1$ y tomemos $i = 2m-1$ en (4.3.3) luego

$$\langle L_\gamma q^\gamma_{2m}, x^{2m-1}\rangle = \langle\frac{(\beta-1)}{\beta}M^{(\gamma,\beta)}_{2m+1}(x) + \frac{2m}{\beta-1}(2m+\gamma-1)M^{(\gamma,\beta)}_{2m-1}(x), x^{2m-1}\rangle$$

$$+\sum_{k=0}^{2m-1} d^{2m}_k\langle\frac{(\beta-1)}{\beta}M^{(\gamma,\beta)}_{k+1}(x) + \frac{k}{\beta-1}(k+\gamma-1)M^{(\gamma,\beta)}_{k-1}(x), x^{2m-1}\rangle = 0;$$

como consecuencia de la ortogonalidad de los polinomios de Meixner sólo nos quedan el segundo término y el primer término de la suma cuando $k = 2m-2$, es decir

$$\langle L_\gamma q^\gamma_{2m}, x^{2m-1}\rangle = \frac{2m}{\beta-1}(2m+\gamma-1)\langle M^{(\gamma,\beta)}_{2m-1}(x), x^{2m-1}\rangle$$

$$+d^{2m}_{2m-2}\frac{(1-\beta)}{\beta}\langle M^{(\gamma,\beta)}_{2m-1}(x), x^{2m-1}\rangle = 0;$$

esto significa

$$d^{2m}_{2m-2} = \frac{2m\beta(2m+\gamma-1)}{(\beta-1)^2} \qquad m = 1, 2, \ldots \qquad (4.3.6)$$

Finalmente de (4.3.5) y (4.3.6) se infiere

$$q^\gamma_{2m} = M^{(\gamma,\beta)}_{2m}(x) + \frac{2\beta m(\gamma+2m-1)}{(\beta-1)^2}M^{(\gamma,\beta)}_{2m-2}(x) + \ldots + \frac{2^m\beta^m m!(\gamma+1)_{2m,2}}{(\beta-1)^{2m}}M^{(\gamma,\beta)}_0(x),$$

que se puede escribir como:

$$q^\gamma_{2m}(x) = \frac{2^m\beta^m m!(\gamma+1)_{(2m,2)}}{(\beta-1)^{2m}}\sum_{n=0}^{m}\frac{(\beta-1)^{2n}}{2^n\beta^n n!(\gamma+1)_{(2n,2)}}M^{(\gamma,\beta)}_{2n}(x).$$

Por otro lado, calculemos los coeficientes para los polinomios anti-ortogonales de Meixner de grado impar. De nuevo por el lema 2.1.8 debemos tener:

$$\langle L_\gamma q^\gamma_{2m+1}, x^i\rangle = 0 \qquad i = 0, 1, \ldots, 2m-1.$$

Entonces

$$\langle L_\gamma q^\gamma_{2m+1}(x), x^i\rangle = \langle L_\gamma M^{(\gamma,\beta)}_{2m+1}(x) + \sum_{k=0}^{2m} d^{2m+1}_k L_\gamma M^{(\gamma,\beta)}_k(x), x^i\rangle;$$

luego

$$\langle L_\gamma q^\gamma_{2m+1}(x), x^i\rangle = \langle\frac{x}{\beta}M^{(\gamma,\beta)}_{2m+1}(x-1) - (\gamma+x)M^{(\gamma,\beta)}_{2m+1}(x+1), x^i\rangle$$

$$+\sum_{k=0}^{2m} d^{2m+1}_k\langle\frac{x}{\beta}M^{(\gamma,\beta)}_k(x-1) - (\gamma+x)M^{(\gamma,\beta)}_k(x+1), x^i\rangle.$$

Por los cálculos anteriores se sabe:

$$\frac{x}{\beta}M^{(\gamma,\beta)}_k(x-1) - (\gamma+x)M^{(\gamma,\beta)}_k(x+1) = \left(\frac{1-\beta}{\beta}\right)M^{(\gamma,\beta)}_{k+1}(x) + \frac{k}{\beta-1}(k+\gamma-1)M^{(\gamma,\beta)}_{k-1}(x),$$

luego:

$$\langle L_\gamma q^\gamma_{2m+1}, x^i\rangle = \langle\frac{(\beta-1)}{\beta}M^{(\gamma,\beta)}_{2m+2}(x) + \frac{2m+1}{\beta-1}(2m+\gamma)M^{(\gamma,\beta)}_{2m}(x), x^i\rangle$$

$$+\sum_{k=0}^{2m} d_k^{2m+1}\langle \frac{(\beta-1)}{\beta}M_{k+1}^{(\gamma,\beta)}(x)+\frac{k}{\beta-1}(k+\gamma-1)M_{k-1}^{(\gamma,\beta)}(x),x^i\rangle=0, \quad (4.3.7)$$

para $i=1,...,2m-1$.

Haciendo el análisis para $i=0$ en (4.3.7) se tiene:

$$\langle L_\gamma q_{2m+1}^\gamma,1\rangle=\langle\frac{(\beta-1)}{\beta}M_{2m+2}^{(\gamma,\beta)}(x)+\frac{2m+1}{\beta-1}(2m+\gamma)M_{2m}^{(\gamma,\beta)}(x),1\rangle$$

$$+\sum_{k=0}^{2m} d_k^{2m+1}\langle \frac{(\beta-1)}{\beta}M_{k+1}^{(\gamma,\beta)}(x)+\frac{k}{\beta-1}(k+\gamma-1)M_{k-1}^{(\gamma,\beta)}(x),1\rangle=0;$$

de la ortogonalidad de los polinomios de Meixner, sólo nos queda el término cuando $k=1$ en el segundo término de la suma, es decir

$$\langle L_\gamma q_{2m+1}^\gamma,1\rangle=\frac{d_1^{2m+1}\gamma}{\beta-1}\langle M_0^{(\gamma,\beta)}(x),1\rangle=0;$$

puesto que $\gamma>0$, $0<\beta<1$ y $\langle M_0^{(\gamma,\beta)}(x),1\rangle\neq 0$ se deduce:

$$b_1^{2m+1}=0 \qquad m=1,2,... \quad (4.3.8)$$

Consideremos que $m>1$ y $s\in\mathbb{N}$ tal que $0<2s<2m-1$, haciendo el análisis para $i=2s$ en (4.3.7) se obtiene:

$$\langle L_\gamma q_{2m+1}^\gamma,x^{2s}\rangle=\langle\frac{(\beta-1)}{\beta}M_{2m+2}^{(\gamma,\beta)}(x)+\frac{2m+1}{\beta-1}(2m+\gamma)M_{2m}^{(\gamma,\beta)}(x),x^{2s}\rangle$$

$$+\sum_{k=0}^{2m} d_k^{2m+1}\langle \frac{(\beta-1)}{\beta}M_{k+1}^{(\gamma,\beta)}(x)+\frac{k}{\beta-1}(k+\gamma-1)M_{k-1}^{(\gamma,\beta)}(x),x^{2s}\rangle=0;$$

luego, de la ortogonalidad de los polinomios de Meixner sólo nos quedan dos términos cuando $k=2s-1$ en el primera suma y cuando $k=2s+1$ en la segunda suma; por lo tanto

$$\langle L_\gamma q_{2m+1}^\gamma,x^{2s}\rangle=d_{2s-1}^{2m+1}\frac{(1-\beta)}{\beta}\langle M_{2s}^{(\gamma,\beta)}(x),x^{2s}\rangle$$

$$+d_{2s+1}^{2m+1}\frac{(2s+1)(2s+\gamma)}{\beta-1}\langle M_{2s}^{(\gamma,\beta)}(x),x^{2s}\rangle=0;$$

debido a que $2s+1\neq 0$ y $2s+\gamma\neq 0$ ya que $s\in\mathbb{N}$ se tiene:

$$d_{2s+1}^{2m+1}=\frac{(\beta-1)^2}{\beta(2s+1)(2s+\gamma)}d_{2s-1}^{2m+1} \qquad s=1,...,m-1.$$

De esta última relación y de (4.3.8) se deduce que

$$d_{2s+1}^{2m+1}=0 \qquad s=1,...,m-1.$$

Observemos que estos dos últimos resultados nos dicen que los coeficientes impares de q_{2m+1} son cero, excepto d_{2m+1}^{2m+1}.

Supongamos que $m>1$ y $s\in\mathbb{N}$ tal que $0<2s+1<2m-1$, entonces tomando $i=2s+1$ en (4.3.7) se tiene:

$$\langle L_\gamma q_{2m+1}^\gamma,x^{2s+1}\rangle=\langle\frac{(\beta-1)}{\beta}M_{2m+2}^{(\gamma,\beta)}(x)+\frac{2m+1}{\beta-1}(2m+\gamma)M_{2m}^{(\gamma,\beta)}(x),x^{2s+1}\rangle$$

$$+\sum_{k=0}^{2m} d_k^{2m+1}\langle \frac{(\beta-1)}{\beta}M_{k+1}^{(\gamma,\beta)}(x)+\frac{k}{\beta-1}(k+\gamma-1)M_{k-1}^{(\gamma,\beta)}(x),x^{2s+1}\rangle=0;$$

luego, por la ortogonalidad de los polinomios de Meixner, nos quedan dos términos cuando $k=2s$ en la primera suma y cuando $k=2s+2$ en la segunda suma, es decir

$$\langle L_\gamma q_{2m+1}^\gamma,x^{2s+1}\rangle=d_{2s}^{2m+1}\frac{(1-\beta)}{\beta}\langle M_{2s+1}^{(\gamma,\beta)}(x),x^{2s+1}\rangle$$

$$+d_{2s+2}^{2m+1}\frac{(2s+2)(2s+1+\gamma)}{\beta-1}\langle M_{2s+1}^{(\gamma,\beta)}(x),x^{2s+1}\rangle=0;$$

ya que $2s+2\neq 0$, $2s+1+\gamma\neq 0$, $\langle M_{2s+1}^{(\gamma,\beta)}(x),x^{2s+1}\rangle\neq 0$ se tiene:

$$d_{2s}^{2m+1}\frac{(1-\beta)}{\beta}+d_{2s+2}^{2m+1}\frac{(2s+2)(2s+1+\gamma)}{\beta-1}=0.$$

Luego, la relación para los coeficientes pares de los polinomios anti-ortogonales de grado impar es:

$$d_{2s}^{2m+1}=d_{2s+2}^{2m+1}\frac{2\beta(s+1)(\gamma+2s+1)}{(\beta-1)^2}, \quad (4.3.9)$$

para $m = 2, 3, ..$ y $s = 1, .., m-1$. Así pues, supongamos $m \geq 1$ y veamos que pasa cuado $i = 2m-1$ en (4.3.7):

$$\langle L_\gamma q^\gamma_{2m+1}, x^{2m-1}\rangle = \langle \frac{(\beta-1)}{\beta} M^{(\gamma,\beta)}_{2m+2}(x) + \frac{2m+1}{\beta-1}(2m+\gamma) M^{(\gamma,\beta)}_{2m}(x), x^{2m-1}\rangle$$

$$+\sum_{k=0}^{2m} d^{2m+1}_k \langle \frac{(\beta-1)}{\beta} M^{(\gamma,\beta)}_{k+1}(x) + \frac{k}{\beta-1}(k+\gamma-1) M^{(\gamma,\beta)}_{k-1}(x), x^{2m-1}\rangle = 0;$$

como consecuencia de la ortogonalidad de los polinomios de Meixner, sólo nos queda

$$\langle L_\gamma q^\gamma_{2m+1}, x^{2m-1}\rangle = d^{2m+1}_{2m} \frac{2m}{\beta-1}(2m+\gamma-1)\langle M^{(\gamma,\beta)}_{2m-1}(x), x^{2m-1}\rangle$$

$$+d^{2m+1}_{2m-2} \frac{(1-\beta)}{\beta}\langle M^{(\gamma,\beta)}_{2m-1}(x), x^{2m-1}\rangle = 0;$$

luego

$$d^{2m+1}_{2m-2} = d^{2m+1}_{2m} \frac{2m\beta(2m+\gamma-1)}{(\beta-1)^2} \qquad m = 1, 2, ... \tag{4.3.10}$$

Entonces de los resultados de (4.3.8)-(4.3.10)

$$q^\gamma_{2m+1} = M^{(\gamma,\beta)}_{2m+1}(x) + d^{2m+1}_{2m} M^{(\gamma,\beta)}_{2m}(x)$$

$$+d^{2m+1}_{2m} \frac{2\beta m(\gamma+2m-1)}{(\beta-1)^2} M^{(\gamma,\beta)}_{2m-2}(x) + ... + d^{2m+1}_{2m} \frac{2^m\beta^m m!(\gamma+1)_{2m,2}}{(\beta-1)^{2m}} M^{(\gamma,\beta)}_0(x).$$

Luego, haciendo $d^{2m+1}_{2m} = 0$ tenemos que:

$$q^\gamma_{2m} = M^{(\gamma,\beta)}_{2m+1}(x).$$

Por otro lado, tenemos que

$$\gamma_m = \Omega(q_{2m}, q_{2m+1}) = \langle L_\gamma q_{2m}, q_{2m+1}\rangle$$

$$\gamma_m = \langle L_\gamma\Big(\frac{2^m\beta^m m!(\gamma+1)_{(2m,2)}}{(\beta-1)^{2m}} \sum_{k=0}^{m} \frac{(1-\beta)^{2n}}{2^n\beta^n n!(\gamma+1)_{(2n,2)}} M^{\gamma,\beta}_{2n}(x)\Big), M^{\gamma,\beta}_{2m+1}(x)\rangle;$$

y por la linealidad de L_γ

$$\gamma_m = \langle \frac{2^m\beta^m m!(\gamma+1)_{(2m,2)}}{(\beta-1)^{2m}} \sum_{k=0}^{m} \frac{(1-\beta)^{2n}}{2^n\beta^n n!(\gamma+1)_{(2n,2)}} L_\gamma\Big(M^{\gamma,\beta}_{2n}(x)\Big), M^{\gamma,\beta}_{2m+1}(x)\rangle.$$

Ahora bien, hagamos

$$G_m = \frac{2^m\beta^m m!(\gamma+1)_{(2m,2)}}{(\beta-1)^{2m}}$$

y

$$H_n = \frac{(1-\beta)^{2n}}{2^n\beta^n n!(\gamma+1)_{(2n,2)}};$$

entonces

$$\gamma_m = \langle G_m \sum_{k=0}^{m} H_n L_\gamma\Big(M^{\gamma,\beta}_{2n}(x)\Big), M^{\gamma,\beta}_{2m+1}(x)\rangle$$

luego, de la definición de L_γ se infiere

$$= \langle G_m \sum_{k=0}^{m} H_n\Big[\frac{x}{\beta} M^{(\gamma,\beta)}_{2n}(x-1) - (x+\gamma) M^{(\gamma,\beta)}_{2n}(x+1)\Big], M^{(\gamma,\beta)}_{2m+1}\rangle,$$

y por el cálculo de I se sigue

$$\gamma_m = \langle G_m \sum_{k=0}^{m} H_n\Big[\frac{(1-\beta)}{\beta} M^{(\gamma,\beta)}_{2n+1}(x) + \frac{2n}{\beta-1}(2n+\gamma-1) M^{(\gamma,\beta)}_{2n}(x)\Big], M^{(\gamma,\beta)}_{2m+1}\rangle;$$

debido a la ortogonalidad de los polinomios de Meixner sólo nos queda el primer término de la suma cuando $k = m$, es decir

$$\gamma_m = \frac{(1-\beta)}{\beta}\langle M^{(\gamma,\beta)}_{2m+1}, M^{(\gamma,\beta)}_{2m+1}\rangle;$$

por lo tanto

$$\gamma_m = \frac{(1-\beta)}{\beta}\|M^{(\gamma,\beta)}_{2m+1}\|^2 \qquad \blacksquare.$$

Conclusión

En este trabajo se introdujo el concepto de sistema anti-ortogonal en espacios con producto interno. Se vio que el estudio de estos sistemas está muy relacionado con la teoría de operadores lineales anti-simétricos sobre estos espacios. Esta generalidad nos permitió estudiar sistemas anti-ortogonales que no están compuestos únicamente por polinomios.

Para la existencia de estos sistemas anti-ortogonales, como se ha visto en esta tesis, el funcional bilineal Ω, su operador lineal anti-simétrico y el sistema linealmente independiente seleccionados deben satisfacer algunas relaciones a priori que permitan usar de manera eficiente el lema 2.1.8.

Un punto importante que se ha visto en esta tesis, es la falta de unicidad de los sistemas anti-ortogonales; puesto que en el caso de los polinomios anti-ortogonales con respecto a los polinomios mónicos de Hermite, se vio que teniamos libertad para escoger las funciones u y ϕ en la construcción del operador L_u; además podiamos elegir arbitrariamente algunas constantes. En el caso discreto también elegiamos arbitrariamente algunas constantes para obtener un sistema anti-ortogonal. Así pues, los sitemas anti-ortogonales no son únicos.

Nosotros esperamos que esta teoría pueda ser formalizada aún más y que esto a su vez permita una mayor aplicación a teorías como:

1. Las fórmulas de cuadratura para aproximar intergrales.
2. La aproximación de funciones meromorfas usando un análogo anti-simétrico de los aproximantes de Padé.

Bibliografía

[1] Akhiezer N.I., and Glazman I.M., *Theory of Linear operators in Hilbert Space,* Frederick ungar plublishing co New York, 1978.

[2] Akhiezer, N. I. *The Classical Moment Problem,* Oliver and London,1965.

[3] Arnold F. Nikiforov and Vasilii B. Uvarov *Special Functions of Mathematical Physics,* Birkhäuser Basel.Boston, 1988.

[4] B. Eynard, *Asymtotics of skew orthogonal polynomials,* Service de Physique Théorique de Saclay, F-91191 Gif-sur-Yvette Cedex, France, 2000.

[5] Charles F. Dunkl and Yuan Xu, *Ortogonal Polynomials of Several Variables,* Encyclopedia of Mathematics, Cambrige, 2001.

[6] E.M. Nikishin, V.N. Sorokin, *Rational Approximations and Orthogonality,* Translations of Mathematical Monographs, AMS,1988.

[7] Gabor Szego, *Orthogonal polynomials,* Colluquium publications, Volumen 23, 1939.

[8] J. Arvesú. J. Coussement, W. Van Asseche, *Some discrete multiple orthogonal polynomials,* INTAS proyec 00-272 and by proyect G.0184.02 of FWO-Vlaanderen, september 26, 2001.

[9] Mandan Lal Mehta, *Random Matrices,* Academic press, INC.,1991.

[10] Maria Álvarez de Morales, Teresa E. Pérez, Miguel A. Piar and André Ronveaux, *Non-standard orthogonality for Meixner polynomial,* Electronic Transactions on Numerical Analysis, Vol. 9, 1999, pp. 1-25.

[11] M. Adler, P.J. Forrester, T. Nagao and P. van Moerbeke, *Classical skew orthogonal polynomials and random matrices,* 1999.

[12] M. Adler and P. van Moerbeke, *The Pfaff Lattice, matrix integrals and a map from Toda to Pfaff,* preprint 1999.

[13] T.M. Dunster, *Uniform Asymptotic Expansions for Charlier Plynomials,* Journal of aproximation Theory 112, 93-133(2001)

[14] Walter Van Assche, *Differential Equations for Multiple Charlier and Meixner polynomials,* Department of Mathematics Katholieke Univesiteit, Belgium.