CENTRO DE INVESTIGACIÓN EN MATEMÁTICAS A.C.

CIMAT

Automorfismos de variedades casi-cuaterniónicas hermitianas y holonomía de variedades con spinors puros paralelos

TESIS

que para obtener el grado de Doctor en Ciencias con Orientación en Matemáticas Básicas

PRESENTA

Noemí Santana Medina

DIRECTOR DE TESIS

Dr. Rafael Herrera Guzmán

Guanajuato, Gto., 02 de diciembre de 2011

Agradecimientos

El presente trabajo es un esfuerzo que involucra, de manera directa o indirecta, la participación de muchas personas, leyendo, corrigiendo, dando ánimo, teniendo paciencia, acompañando.

Agradezco el apoyo económico otorgado por el CONACYT, bajo el programa de becas para doctorado. Agradezco al CIMAT, por darme la oportunidad de realizar este trabajo bajo condiciones muy favorables.

Doy infinitas gracias a mi director de tesis, Dr. Rafael Herrera Guzmán, por confiar en mi y por toda la paciencia que me otorgo en estos años. De igual manera agradezco al Dr. Omegar Calvo, al Dr. José Luis Cisneros, al Dr. Carlos Valero, y al Dr. Ramón Reyes, miembros del comité para realizar mi examen doctoral, por las observaciones realizadas.

Mi familia, parte fundamental de mí y del hecho de que este trabajo este concluido. A ellos, infinitas gracias. Gracias a mis amigos, que gracias al cielo son demasiados.

Índice general

Introducción

En esta tesis, estudiamos dos problemas geométricos en los que los grupos de Lie juegan papeles predominantes:

- como grupos de automorfismos de variedades de tipo cuaterniónico;
- como grupos de estructura y de holonomía de ciertas variedades.

Así, la tesis se encuentra dividida en dos partes independientes y, a continuación, describimos brevemente el contenido de cada una de ellas.

El grupo de difeomorfismos de una variedad riemanniana es un grupo de Lie de dimensión infinita que tiene como álgebra de Lie al conjunto de campos vectoriales diferenciables. Al imponer mayores condiciones a los difeomorfismos, se obtiene, en algunos casos, un grupo de Lie de dimensión finita, como es el caso en el que se pide que los difeomorfismos preserven alguna estructura. Por ejemplo, al considerar el subgrupo de difeomorfismos de una variedad riemanniana de dimensión n, que preserva un tensor métrico, se deduce que la dimensión máxima de tal subgrupo es $\frac{1}{2}n(n+1)$; dicho grupo es el grupo de isometrías. Un resultado clásico en este área, es que las variedades que admiten un grupo de isometrías de dimensión máxima son: la esfera, el espacio proyectivo real, el espacio euclídeo real y el espacio hiperbólico real, todos ellos dotados con sus métricas estándar de curvatura seccional constante. Determinar las variedades que admiten un grupo de isometrías de una dimensión dada, no es fácil. En las generalizaciones de los resultados de Montgomery y Zippin, Mann demuestra que, en una dimensión dada, no todo número entero positivo puede ser la dimensión de un grupo de isometrías de una variedad riemanniana conexa.

Posteriormente, Tanno trabajó con el grupo de isometrías que preservan una estructura casi-compleja compatible con la métrica en variedades casi-hermitianas y demostró que la dimensión máxima de dicho grupo de automorfismos es $n(n+2)$, siendo $2n$ la dimensión de la variedad, y que las variedades casi-hermitianas que admiten un grupo de automorfismos de tal dimensión son sólo el espacio proyectivo complejo, el plano complejo y una bola abierta con estructura kaehleriana. Todos estos espacios están dotados con sus métricas estándar de curvatura seccional holomorfa constante, y su estructura casi-compleja es integrable.

Es natural preguntarnos: ¿qué sucede si consideramos una estructura de tipo cuaterniónico? Así, consideraremos variedades casi-cuaterniónicas hermitianas, es decir, variedades riemannianas tales que en cada punto admiten tres estructuras casi-complejas locales y compatibles con la métrica. Las preguntas inmediatas son:

- ¿Cuál es la dimensión máxima del grupo de automorfismos de una variedad casi-cuaterniónica hermitiana?
- ¿Qué espacios casi-cuaterniónicos hermitianos admiten un grupo de automorfismos de dimensión máxima?

Dado que todo automorfismo infinitesimal está determinado por su valor y el de su derivada covariante en un punto, derivamos nuestros resultados trabajando con el álgebra de automorfismos infinitesimales. En primera instancia, calculamos la dimensión máxima del grupo de automorfismos de una variedad casi-cuaterniónica hermitiana. En el caso casi-hermitiano, Tanno determinó los espacios que admiten un grupo de automorfismos de dimension máxima utilizando resultados de movilidad libre holomorfa y curvatura seccional holomorfa constante. Nosotros, en cambio, no desarrollamos nuestra investigación en los términos análogos para el caso cuaterniónico (que sí existen en la literatura), sino que trabajamos directamente con el subgrupo de isotropía, obteniendo así que las variedades que admiten un grupo de automorfismos de dimensión máxima son espacios simétricos cuaterniónicos kaehler con curvatura de Ricci constante. Mediante lo anteriormente señalado, también determinamos las variedades casi-cuaterniónicas hermitianas que admiten un grupo de automorfismos de dimensión cercana a la máxima.

Iniciaremos este trabajo mencionando, en el capítulo **??**, algunos resultados de grupos de automorfismos de dimensión grande en los casos real y complejo. Después de haber descrito los casos que motivaron nuestro estudio, presentamos algunos conceptos y resultados técnicos del caso casi-cuaterniónico, así como el teorema principal de este capítulo.

La segunda parte de este trabajo es independiente de la primera, pues nos dedicamos al estudio de variedades que admiten cierto tipo de campos spinor, a los que llamamos puros. Los spinors puros clásicos fueron definidos por E. Cartan, quien deseaba realizar una clasificación de las estructuras complejas en variedades spin mediante estos. Cartan observó que el álgebra de Lie de $SO(n)$ tiene representaciones que no se levantan a representaciones de $SO(n)$, pero que sí se levantan al grupo $Spin(n)$: el doble cubriente simplemente conexo de $SO(n)$. Los spinors pueden ser definidos como los vectores de una representación irreducible del grupo $Spin(n)$, que es un grupo contenido en un álgebra de Clifford.

Implícito en un trabajo de A. Moroianu se encuentra el estudio de lo que podría llamarse spinors puros de tipo complejo. Esto nos llevo a tratar de generalizar el concepto de spinor puro a los casos cuaterniónico y octoniónico. Hemos de mencionar que al momento de intentar definir spinors octoniónicos, la falta de asociatividad de los octoniones se volvió un impedimento para el desarrollo de las generalizaciones naturales que ya habiamos observado en el caso cuaterniónico. Por ello decidimos formular nuestra definición utilizando el grupo de Lie más cercano a los octoniones, es decir, $Spin(7)$. Así, el objetivo principal del segundo capítulo es introducir los conceptos de estructuras spin torcidas de rango $r > 2$, sus haces vectoriales asociados, los spinors puros, y estudiar las consecuencias geométricas derivadas de su existencia. Bajo ciertas condiciones necesarias, podemos derivar resultados acerca de la holonomía de las variedades que admiten tales spinors.

Iniciamos el segundo capítulo estableciendo la notación y las convenciones requeridas de: las álgebras de Clifford, el grupo $Spin(n)$, los spinors, los haces vectoriales asociados, conexiones, etc. Los resultados principales consisten en recobrar las holonomías de tipo kaehler, cuaterniónico-kaehler y excepcionales ($Spin(7)$ y G_2) en variedades que admiten spinors puros paralelos maximalmente transversales para estructuras spin torcidas de tipo $Spin(n) \times_{\mathbb{Z}_2} Spin(2)$, $Spin(n) \times_{\mathbb{Z}_2} Spin(3)$ y $Spin(n) \times_{\mathbb{Z}_2} Spin(7)$, respectivamente.

Cabe mencionar que de este estudio se desprenden gran cantidad de ideas por desarrollar y conjeturas por demostrar.

CAPÍTULO 1

Variedades casi-cuaterniónicas hermitianas con acciones de grupos de automorfismos grandes

El estudio de grupos de automorfismos inició con el análisis de grupos de transformaciones continuas realizado por Lie, quien desarrolló una amplia teoría al respecto. Cartan, en su tesis, continuó con el estudio referido, empleando un lenguaje más formal y riguroso que el utilizado por Lie. Al inicio de este capítulo, expondremos resultados desarrollados más recientemente que, sin embargo, no dejan de ser clásicos. En la primera sección, expondremos algunos resultados del grupo de automorfismos de una variedad riemanniana. Las demostraciones de los resultados que expondremos en esta podrán ser consultados en [?] y [?]. También enunciaremos los conceptos de estructura casi-compleja, 2-forma fundamental y variedad kaehler; esto con el fin de exponer los resultados realizados por Ishihara [?] y Tanno [?] para el caso complejo.

En la segunda parte del capítulo que nos ocupa, expondremos definiciones detalladas y establecidas con anterioridad para el caso cuaterniónico. Asimismo, calcularemos la dimensión máxima del grupo de automorfismos de una variedad casi-cuaterniónica hermitiana, para concluir dando una clasificación propia de variedades casi-cuateriónicas hermitianas con grupo de automorfismos de dimensión grande.

1.1. Automorfismos de variedades riemannianas y de variedades casi-complejas

Denotaremos a una variedad riemanniana por (M, g), donde M denota una variedad diferenciable y g denota una métrica riemanniana, ocasionalmente denotaremos a (M, g) por M. El grupo de difeomorfismos de M, denotado por $\mathrm{Diff}(M)$, no necesariamente es de dimensión finita. La restricción al subgrupo de isometrías es un grupo de dimensión finita y permite realizar algunos cálculos y llegar a resultados sorprendentes.

Para (M, g) una variedad riemanniana, una **isometría** de M es un difeomorfismo $\varphi : M \to M$ que deja invariante la métrica g, es decir,

$$g = \varphi^* g.$$

Este conjunto de isometrías es un grupo, que será denotado por $I(M)$. Para cada punto $p \in M$ se define el subgrupo de isotropía de p por

$$I_p(M) = \{\varphi \in I(M) \mid \varphi(p) = p\}.$$

Definición 1.1.1. Un campo vectorial X sobre M es un ***campo vectorial de Killing*** si

$$L_X g = 0,$$

donde L denota la derivada de Lie y g denota la métrica riemanniana. A un campo vectorial de Killing también se le conoce como ***isometría infinitesimal***. Esta definición es equivalente a que X genere un subgrupo local a un parámetro de difeomorfismos locales

$$\Phi : (-\varepsilon, \varepsilon) \times M \longrightarrow M,$$

tal que $\Phi(t, \cdot) := \varphi_t : M \to M$ es una isometría local para todo $t \in (-\varepsilon, \varepsilon)$. El conjunto de todas las isometrías infinitesimales forman un álgebra de Lie, denotada por $i(M)$; si X, Y son isometrías infinitesimales, entonces $[X, Y]$ es una isometría infinitesimal, donde $[\cdot, \cdot]$ denota el corchete de Lie.

Teorema 1.1.2. *Sea M una variedad riemanniana.*

i) Si M está formada de un número finito de componentes conexas, entonces el grupo de isometrías $I(M)$ es un grupo de Lie con respecto a la topología compacto-abierta en M.

ii) Si M es geodésicamente completa, entonces el álgebra de Lie de $I(M)$ es naturalmente isomorfa con el álgebra de Lie de las isometrías infinitesimales $i(M)$.

iii) Si M es compacta, entonces $I(M)$ es compacto.

Una isometría infinitesimal queda completamente determinada por su valor, y el de su derivada, en un punto. De este hecho se deduce la dimensión máxima del grupo de isometrías y los espacios que admiten un grupo de dicha dimensión.

Teorema 1.1.3. *Si M es una variedad riemanniana n-dimensional, entonces $i(M)$ es de dimensión a lo mas $\frac{1}{2}n(n+1)$. Si $dim(i(M)) = \frac{1}{2}n(n+1)$, entonces M es isométrica a uno de los siguientes espacios de curvatura seccional constante:*

1. *El espacio euclídeo de dimensión n, $\mathbb{R}^n$.*
2. *La esfera de dimensión n, S^n.*
3. *El espacio proyectivo de dimensión n, $\mathbb{R}P^n$.*
4. *El espacio hiperbólico simplemente conexo de dimensión n.*

La demostración de este teorema puede ser consultada en **??**. Otro caso extremo para $i(M)$ es el teorema de Bochner [**?**], en el que se muestran condiciones en las que no existen isometrías infinitesimales.

Teorema 1.1.4. *(Bochner) Si la curvatura de Ricci de una variedad riemanniana compacta es negativa, entonces tal variedad carece de campos vectoriales de Killing no nulos.*

No todo entero positivo puede ser la dimensión de un grupo de isometrías de una variedad riemanniana. Hay saltos en las posibles dimensiones de $I(M)$. Por ejemplo, en 1947 Wang [**?**] demostró el siguiente teorema de salto:

Teorema 1.1.5. *(Wang) Si M es una variedad riemanniana de dimensión $n \neq 4$, entonces el grupo de isometrías no contiene subgrupos cerrados de dimensión r para*

$$\frac{1}{2}n(n-1) + 1 < r < \frac{1}{2}n(n+1).$$

De este resultado se sigue que no existen variedades riemannianas que admitan un álgebra de isometrías infinitesimales de dimensión r, con

$$\frac{1}{2}n(n-1) + 1 < r < \frac{1}{2}n(n+1).$$

Antes de pasar al caso complejo, vale la pena mencionar que existen otros teoremas sobre grupos de isometrías en el caso real, que no son presentados aquí.

Para V un espacio vectorial real de dimensión finita, una ***estructura compleja*** en V es un endomorfismo $J : V \to V$, tal que $J^2 = -Id$. Una variedad ***casi-compleja*** M, es una variedad diferenciable (de dimensión par), tal que cada espacio tangente tiene una estructura compleja y dichas estructuras complejas varían suavemente. M es una variedad ***casi-hermitiana*** si tiene una métrica riemanniana g, tal que

$$g(JX, JY) = g(X, Y)$$

se satisface para cualquier par de campos vectoriales X, Y. La ***2-forma fundamental*** ω está dada por

$$\omega(X, Y) = g(X, JY).$$

Si la derivada exterior de ω se anula ($d\omega = 0$), entonces M es llamada variedad ***casi-kaehler***. Si la derivada covariante de ω se anula ($\nabla\omega = 0$), entonces M es llamada variedad ***kaehler***.

Sea X un campo vectorial sobre una variedad casi-hermitiana M. X es un ***automorfismo infinitesimal*** si X es un campo vectorial de Killing y además satisface

$$L_X\omega = 0,$$

donde L denota la derivada de Lie y ω la 2-forma fundamental.

La clasificación de las variedades casi-hermitianas que admiten un grupo de automorfismos de dimensión maximal fue hecha por Tanno [**?**].

Teorema 1.1.6. *(Tanno) Sea M una $2n$-variedad casi-hermitiana y conexa. M admite un grupo de automorfismos de dimensión máxima $n(n+2)$, si y sólo si M es kaehler y es uno de los siguientes espacios:*

1. *un espacio unitario de dimensión n, CE^n,*
2. *una bola abierta con una estructura kaehleriana de curvatura seccional holomorfa constante negativa,*
3. *un espacio proyectivo complejo de dimensión n, $\mathbb{C}P^n$.*

Al igual que en el caso real, en el caso complejo también hay saltos en las dimensiones del grupo de automorfismos. En 1954, Ishihara [**?**] demostró un teorema de salto para el grupo de automorfismos que preservan la estructura compleja:

Teorema 1.1.7. *(Ishihara) El grupo de automorfismos de una variedad kaehler de dimensión $2n$, con $n > 4$, no tiene subgrupos cerrados de dimensión r, para*

$$n^2 + 2 < r < n^2 + 2n - 1.$$

Estas ideas serán generalizadas para los cuaterniones, en la siguiente sección.

1.2. Automorfismos infinitesimales en variedades casi-cuaterniónicas hermitianas

Sea V un espacio vectorial real de dimensión finita. Una ***estructura cuaterniónica*** sobre V, es una terna $H = (I, J, K)$, con I, J, K, estructuras complejas en V que satisfacen las relaciones de los cuaternios imaginarios: $I^2 = J^2 = K^2 = -1$,

$$IJ = -JI = K,$$

$$KI = -KI = J,$$

$$JK = -KJ = I.$$

$Q =< H >= \mathbb{R}I \oplus \mathbb{R}J \oplus \mathbb{R}K$, es una subálgebra 3-dimensional del álgebra de Lie de endomorfismos $\mathrm{End}(V)$.

Una estructura cuaterniónica Q con una métrica hermitiana es llamada ***estructura cuaterniónica hermitiana*** si satisface $g(AX, AY) = g(X, Y)$, para $A = I, J, K$ y para todo par de elementos X, Y en V.

Definición 1.2.1. Una $4n$-variedad diferenciable M, admite una estructura ***casi-cuaterniónica*** si existe un subhaz $\mathcal{G}$ de $\mathrm{End}(TM)$, de rango 3, que en cada punto $p \in M$ tiene una base que constituye una estructura cuaterniónica en el espacio tangente T_pM.

Si (M, g) es una variedad riemanniana que admite una estructura casi-cuaterniónica, entonces (M, g) se dice ***casi-cuaterniónica hermitiana*** si en cada punto $p \in M$,

$$g_p(A_pX_p, A_pY_p) = g_p(X_p, Y_p),$$

para $A_p = I_p, J_p, K_p \in \mathcal{G}_p$ y $X_p, Y_p \in T_pM$.

Definición 1.2.2. Dada una variedad casi-cuaterniónica hermitiana M, se define la ***4-forma fundamental*** Ω como:

$$\Omega = \omega_I \wedge \omega_I + \omega_J \wedge \omega_J + \omega_K \wedge \omega_K,$$

donde

$$\omega_I(X, Y) = g(X, IY),$$

$$\omega_J(X, Y) = g(X, JY),$$

$$\omega_K(X, Y) = g(X, KY)$$

denotan las 2-formas fundamentales locales; determinadas por la estructura casi-cuaterniónica hermitiana.

Si I', J', K' es otra base en el punto $p \in M$ que satisface las propiedades de los cuaternios imaginarios, entonces

$$I' = B_{11}I + B_{12}J + B_{13}K,$$
$$J' = B_{21}I + B_{22}J + B_{23}K,$$
$$K' = B_{31}I + B_{32}J + B_{33}K,$$

de la linealidad y de las propiedades que satisfacen las dos bases tenemos:

$$\omega_{I'} = B_{11}\omega_I + B_{12}\omega_J + B_{13}\omega_K,$$
$$\omega_{J'} = B_{21}\omega_I + B_{22}\omega_J + B_{23}\omega_K,$$
$$\omega_{K'} = B_{31}\omega_I + B_{32}\omega_J + B_{33}\omega_K,$$

con $(B)_{ij} \in SO(3)$. De las propiedades del producto cuña:

$$\Omega' = \omega_{I'} \wedge \omega_{I'} + \omega_{J'} \wedge \omega_{J'} + \omega_{K'} \wedge \omega_{K'} = (B_{11}^2 + B_{21}^2 + B_{31}^2)\omega_I \wedge \omega_I +$$
$$2(B_{11}B_{12} + B_{21}B_{22} + B_{31}B_{32})\omega_I \wedge \omega_J + 2(B_{11}B_{13} + B_{21}B_{23} + B_{31}B_{33})\omega_I \wedge \omega_K +$$
$$(B_{12}^2 + B_{22}^2 + B_{32}^2)\omega_J \wedge \omega_J + 2(B_{12}B_{13} + B_{22}B_{23} + B_{32}B_{33})\omega_J \wedge \omega_K +$$
$$(B_{13}^2 + B_{23}^2 + B_{33}^2)\omega_K \wedge \omega_K = \omega_I \wedge \omega_I + \omega_J \wedge \omega_J + \omega_K \wedge \omega_K = \Omega.$$

En tanto, Ω es una forma global sobre M.

Si $\nabla\Omega = 0$ para la conexión riemanniana ∇, entonces M es llamada ***cuaterniónica kaehler***.

En analogía al caso complejo, definimos un automorfismo en una variedad casi-cuaterniónica hermitiana como una isometría que preserva la estructura.

Definición 1.2.3. Sea (M, g) una $4n$-variedad casi-cuaterniónica hermitiana. Un **automorfismo de** M es una isometría $\varphi : M \to M$ que deja invariante la 4-forma fundamental Ω, es decir φ satisface:

$$g = \varphi^* g,$$
$$\Omega = \varphi^* \Omega.$$

El conjunto de automorfismos de M; $\mathrm{Aut}(M)$, es un grupo de Lie.

Definición 1.2.4. Sea X un campo vectorial sobre una $4n$-variedad casi-cuaterniónica hermitiana M. X es un ***automorfismo infinitesimal*** si X es un campo vectorial de Killing y además satisface:

$$L_X\Omega = 0,$$

donde L denota la derivada de Lie y Ω la 4-forma fundamental. El conjunto de automorfismos infinitesimales forma un álgebra de Lie; $\mathfrak{aut}(M)$, y es el álgebra de Lie de $\mathrm{Aut}(M)$, la relación se observa en el siguiente resultado.

Lema 1.2.5. *Sea X un campo vectorial sobre una variedad casi-cuaterniónica hermitiana, M. X es un automorfismo infinitesimal de M si, y sólo si, X genera un grupo local a un parámetro de difeomorfismos locales,*

$$\varphi : (-\varepsilon, \varepsilon) \times M \longrightarrow M,$$

que preservan la métrica y la 4-forma fundamental. Es decir, satisface:

$$g_p = (\varphi_t^* g)_p,$$

$$\Omega_p = (\varphi_t^* \Omega)_p.$$

Demostración. Supongamos que X es un automorfismo infinitesimal. De la definición, X es una isometría infinitesimal, por tanto genera un subgrupo local a un parámetro de isometrías locales

$$\varphi : (-\varepsilon, \varepsilon) \times M \longrightarrow M.$$

Veremos que este subgrupo preserva, localmente, la 4-forma fundamental. Sea $p \in M$ y denotemos, $\varphi_t := \varphi(t, \cdot)$.

$$0 = (L_X \Omega)_p = \text{lím}\,[\frac{1}{t}(\Omega_p - (\Omega_{\varphi_t^{-1}(p)} d\varphi_t^{-1})].$$

Así, para todo $\epsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que, si $\mid t \mid < \delta$ entonces

$$\mid [\frac{1}{t}(\Omega_p - (\Omega_{\varphi_t^{-1}}(p) d\varphi_t^{-1})] U_p \mid < \epsilon,$$

para todo $U_p = ((Y_1)_p, (Y_2)_p, (Y_3)_p, (Y_4)_p)$, con $(Y_i)_p \in T_pM$, $i = 1, \ldots, 4$. Sea $t_0 \in (-\delta, \delta)$ fijo y $\psi_{t_0} = \Omega_p - (\Omega_{\varphi_{t_0}^{-1}}(p) d\varphi_{t_0}^{-1})$. Entonces $\mid \psi_{t_0}(U_p) \mid < \epsilon$ para todo $U_p = ((Y_1)_p, (Y_2)_p, (Y_3)_p, (Y_4)_p)$. Como ψ_{t_0} es multilineal, $\psi_{t_0} = 0$. En conclusión tenemos que $\Omega_p = \Omega_{\varphi_t^{-1}} d\varphi_t^{-1}$. El recíproco se sigue inmediatamente. □

En semejanza a los casos real y complejo, procederemos a calcular la dimensión máxima de $\text{Aut}(M)$ para el caso cuaterniónico, con tal finalidad enunciaremos un par de lemas técnicos que nos simplificará el cálculo.

Lema 1.2.6. *[?, Lemma 4.1] Sea V un espacio vectorial real de dimensión n y*

$$\Phi : \underbrace{V \times V \cdots \times V}_{k\ veces} \to \mathbb{R}$$

una aplicación multilineal. Si $A_t \in GL(V)$ y $a \in \mathfrak{gl}(V)$ son tales que

$$A_t = e^{ta} = Id + ta + \frac{1}{2}(ta)^2 + \ldots, \qquad t \in \mathbb{R},$$

entonces A_t satisface

$$\Phi(A_t v_1, A_t v_2, \ldots, A_t v_k) = \Phi(v_1, v_2 \ldots, v_k)$$

si, y sólo si,

$$\Phi(a v_1, v_2, \ldots, v_k) + \cdots + \Phi(v_1, v_2, \ldots, a v_k) = 0.$$

Lema 1.2.7. *(Salamon [**?**]) Para $k \geq 2$, el subgrupo de $GL_{4k}(\mathbb{R})$ que preserva Ω es igual a $Sp(k) \cdot Sp(1) = Sp(k) \times_{\mathbb{Z}_2} Sp(1)$.*

Proposición 1.2.8. *Si M es una variedad casi-cuaterniónica hermitiana de dimensión $4n$, entonces:*

$$\dim(\mathrm{Aut}(M)) \leq 2n^2 + 5n + 3.$$

Demostración. Sea X un automorfismo infinitesimal de M. La derivada de Lie de Ω en el punto $p \in M$ puede expresarse por:

$$(L_X\Omega)_p(Y_1, Y_2, Y_3, Y_4) = X_p(\Omega(Y_1, Y_2, Y_3, Y_4)) + \Omega_p(L_X Y_1, Y_2, Y_3, Y_4) + \Omega_p(Y_1, L_X Y_2, Y_3, Y_4) + \\ + \Omega_p(Y_1, Y_2, L_X Y_3, Y_4) + \Omega_p(Y_1, Y_2, Y_3, L_X Y_4).$$

Tomemos un punto arbitrario $p \in M$. Si $X_p = 0$; entonces:

$$(L_X\Omega)_p(Y_1, Y_2, Y_3, Y_4) = \Omega_p([X, Y_1], Y_2, Y_3, Y_4) + \Omega_p(Y_1, [X, Y_2], Y_3, Y_4) + \\ + \Omega_p(Y_1, Y_2, [X, Y_3], Y_4) + \Omega_p(Y_1, Y_2, Y_3, [X, Y_4]).$$

Utilizando la conexión de Levi-Civita tenemos:

$$(L_X\Omega)_p(Y_1, Y_2, Y_3, Y_4) = \Omega_p(\nabla_{Y_1} X, Y_2, Y_3, Y_4) + \Omega_p(Y_1, \nabla_{Y_2} X, Y_3, Y_4) + \\ + \Omega_p(Y_1, Y_2, \nabla_{Y_3} X, Y_4) + \Omega_p(Y_1, Y_2, Y_3, \nabla_{Y_4} X).$$

Denotemos por $DX := \nabla_{(\cdot)} X$. Por las propiedades de la conexión, $DX : T_pM \to T_pM$ es una aplicación lineal y $DX \in \mathfrak{gl}(T_pM)$. De la última igualdad y del hecho de que X es automorfismo infinitesimal, DX satisface:

$$\Omega_p(DX(Y_1), Y_2, Y_3, Y_4) + \Omega_p(Y_1, DX(Y_2), Y_3, Y_4) +$$

$$\Omega_p(Y_1, Y_2, DX(Y_3), Y_4) + \Omega_p(Y_1, Y_2, Y_3, DX(Y_4)) = 0.$$

Por **??**, $A_t = e^{tDX}$ preserva Ω. Por **??**, $A_t \in Sp(n) \cdot Sp(1)$ y $DX \in \mathfrak{sp}(n) + \mathfrak{sp}(1)$ (el álgebra de Lie de $Sp(n) \cdot Sp(1)$). Así, la dimensión máxima del conjunto de pares $(0, (DX)_p)$ es $n(2n+1) + 3$, ya que $Sp(n) \cdot Sp(1)$ es conexo. Ahora, si consideramos el conjunto de los vectores $X_p \neq 0$, dicho conjunto tiene dimensión máxima $4n$. Como un campo de Killing está determinado por sus valores X_p y $(DX)_p$ en un punto, tenemos que la dimensión máxima del álgebra de Lie de automorfismos infinitesimales es $(n(2n+1)+3) + 4n = 2n^2 + 5n + 3$. □

Una vez calculada la dimensión máxima, procederemos a encontrar propiedades de las variedades que admiten un grupo de automorfismos de dimensión cercana a la máxima.

Lema 1.2.9. *Sea M una $4n$-variedad casi-cuaterniónica hermitiana, $n \geq 2$. Si*

$$2n^2 + 5n \leq \dim(\mathrm{Aut}(M)) \leq 2n^2 + 5n + 3,$$

entonces el subgrupo de isotropía A_p, para cualquier punto $p \in M$, es conjugado a uno de los siguientes grupos:

1. $Sp(n)$,
2. $Sp(n) \cdot U(1) = Sp(n) \times_{\mathbb{Z}_2} U(1)$,
3. $Sp(n) \cdot Sp(1) = Sp(n) \times_{\mathbb{Z}_2} U(1)$.

Demostración. Sabemos que para cualquier punto $p \in M$, el subgrupo de isotropía A_p es un subgrupo de $Sp(n) \cdot Sp(1)$, por tanto:

$$\dim(A_p) \leq \dim(Sp(n) \cdot Sp(1)) = n(2n+1) + 3.$$

Por otro lado,

$$\dim(\mathrm{Aut}(M)) - \dim(A_p) \leq 4n.$$

De estos hechos,

$$\dim(A_p) \geq \dim(\mathrm{Aut}(M)) - 4n \geq 2n^2 + n = \dim(Sp(n)).$$

El álgebra de Lie $\mathfrak{a}_p$ de A_p está contenida en el álgebra $\mathfrak{sp}(n) \oplus \mathfrak{sp}(1)$, ya que para cualquier $X \in \mathfrak{a}_p$ no trivial, si $X_p = 0$, entonces $(DX)_p$ es necesariamente distinto de cero. Consideremos las proyecciones a los dos factores:

$$\rho_1 : \mathfrak{a}_p \longrightarrow \mathfrak{sp}(n), \qquad \rho_2 : \mathfrak{a}_p \longrightarrow \mathfrak{sp}(1).$$

Las imagenes $\rho_1(\mathfrak{a}_p)$ y $\rho_2(\mathfrak{a}_\mathfrak{p})$ son subálgebras de $\mathfrak{sp}(n)$ y $\mathfrak{sp}(1)$ respectivamente.

La subálgebra $\rho_1(\mathfrak{a}_p)$ es igual a $\mathfrak{sp}(n)$, ó está contenida en una subálgebra maximal propia de $\mathfrak{sp}(n)$. La subálgebra maximal de $\mathfrak{sp}(n)$ de dimensión máxima es

$$\mathfrak{sp}(n-1) + \mathfrak{sp}(1)$$

([?]), con dimensión $(n-1)(2n-1)+3 = 2n^2-3n+4$. La subálgebra $\mathfrak{a}_p$ no está contenida en $\mathfrak{sp}(n-1) + \mathfrak{sp}(1)$ debido a la cota inferior $2n^2 + 5n \leq \dim(\mathrm{Aut}(M))$. Así,

$$\rho_1(\mathfrak{a}_p) = \mathfrak{sp}(n).$$

Ahora, $\rho_2(\mathfrak{a}_p)$ puede ser trivial, ó una subálgebra de dimensión 1 ó $\mathfrak{sp}(1)$. De aquí las dimensiones posibles para A_p son:

$$n(2n+1),\ n(2n+1)+1,\ n(2n+1)+3$$

y las opciones para A_p son:

$$Sp(n),\ Sp(n) \cdot H,\ Sp(n) \cdot Sp(1),$$

donde H es un subgrupo de $Sp(1)$ isomorfo a $U(1)$. □

Sea $p \in M$ y A_p su grupo de isotropía. El espacio tangente T_pM puede ser identificado con $\mathbb{H}^n$. Sabemos que $A_p = Sp(n)$, $Sp(n) \cdot U(1)$ ó $Sp(n) \cdot Sp(1)$.

- Si $A_p = Sp(n) \cdot Sp(1)$, entonces tenemos la acción

$$\begin{array}{rcl} Sp(n) \cdot Sp(1) \times \mathbb{H}^n & \longrightarrow & \mathbb{H}^n \\ ([(A,q)],v) & \mapsto & Avq^{-1}, \end{array}$$

  vía el grupo de estructura de una variedad casi-cuaterniónica hermitiana. En este caso el elemento de $Sp(n) \cdot Sp(1)$ representado, ya sea por $(Id,-1)$, o por $(-Id,1)$ actúa sobre $\mathbb{H}^n$ como $-Id_{\mathbb{H}^n}$.

- Si $A_p = Sp(n) \cdot U(1)$, entonces tenemos la acción

$$\begin{array}{rcl} Sp(n) \cdot U(1) \times \mathbb{H}^n & \longrightarrow & \mathbb{H}^n \\ ([(A,q)],v) & \mapsto & Avq^{-1}, \end{array}$$

  vía el grupo de estructura de una variedad casi-cuaterniónica hermitiana. En este caso el elemento de $Sp(n) \cdot U(1)$ representado, ya sea por $(Id,-1)$, o por $(-Id,1)$ actúa sobre $\mathbb{H}^n$ como $-Id_{\mathbb{H}^n}$.

- Si $A_p = Sp(n)$, entonces tenemos la acción

$$\begin{array}{rcl} Sp(n) \times \mathbb{H}^n & \longrightarrow & \mathbb{H}^n \\ (A,v) & \mapsto & Av, \end{array}$$

  vía el grupo de estructura de una variedad casi-cuaterniónica hermitiana. En este caso, el elemento $-Id \in Sp(n)$ actúa sobre $\mathbb{H}^n$ como $-Id_{\mathbb{H}^n}$.

En cualquiera de los casos, existe un elemento $f \in A_p$ con derivada $(df)_p = -Id_{T_pM}$, que nos da una simetría en p que es global, de aquí el siguiente resultado:

Proposición 1.2.10. *Si M es una $4n$-variedad casi-cuaterniónica hermitiana, $n \geq 2$, con*

$$2n^2 + 5n \leq \dim(\mathrm{Aut}(M)) \leq 2n^2 + 5n + 3,$$

entonces M es un espacio simétrico.

Lema 1.2.11. *Sea M una $4n$-variedad casi-cuaterniónica hermitiana, con $n \geq 2$ y*

$$2n^2 + 5n \leq \dim(\mathrm{Aut}(M)) \leq 2n^2 + 5n + 3.$$

Si B es un campo tensorial de tipo (r,s) invariante por $\mathrm{Aut}(M)$*, con $r+s$ impar, entonces $B = 0$.*

Demostración. Sea $p \in M$ un punto arbitrario. Por el Lema **??** existe $f \in A_p$, tal que $(f_*)_p = -Id_{T_pM}$, por tanto:
$B_p((Y_1)_p, \ldots, (Y_r)_p, (\alpha_1)_p, \ldots, (\alpha_s)_p) = (f^*B)_p((Y_1)_p, \ldots, (Y_r)_p, (\alpha_1)_p, \ldots, (\alpha_s)_p) =$

$$= B_{f(p)}(df_p(Y_1)_p, \ldots, df_p(Y_r)_p \ldots) = B_p(-Id((Y_1)_p), \ldots, -Id((Y_r)_p), \ldots) =$$
$$= (-1)^{r+s}B_p((Y_1)_p, \ldots, (Y_r)_p, \ldots) = -B_p((Y_1)_p, \ldots, (Y_r)_p, \ldots),$$

donde $Y_i \in T_pM$ y $\alpha_j \in T_p^*M$. De la arbitrariedad del punto p se sigue que $B = 0$. □

Proposición 1.2.12. *. Si M es una $4n$-variedad casi-cuaterniónica hermitiana, con $n \geq 2$ y*

$$2n^2 + 5n \leq \dim(\mathrm{Aut}(M)) \leq 2n^2 + 5n + 3,$$

entonces M es una variedad cuaterniónica kaehler.

Demostración. Sea X un automorfismo infinitesimal sobre M. La derivación de Lie por un campo vectorial de Killing conmuta con la derivada covariante;

$$L_X \nabla\Omega = \nabla L_X \Omega.$$

Por ser X automorfismo infinitesimal, $L_X\Omega = 0$, por tanto

$$0 = \nabla L_X \Omega = L_X \nabla\Omega,$$

lo que implica que $\nabla\Omega$ es invariante por cualquier automorfismo infinitesimal X. Así, $\nabla\Omega$ es un tensor de tipo $(0, 5)$ invariante por $\mathrm{Aut}(M)$. Por el Lema **??**, $\nabla\Omega = 0$, es decir, M es cuaterniónica kaehler. □

De la proposición **??** sabemos que M es un espacio simétrico, y de **??** tenemos que M" es una variedad cuaterniónica kaehler, por [**?**] tenemos que es Einstein, por tanto:

Teorema 1.2.13. *Si M es una $4n$-variedad casi-cuaterniónica hermitiana con $n \geq 2$ y*

$$2n^2 + 5n \leq \dim(\mathrm{Aut}(M)) \leq 2n^2 + 5n + 3,$$

entonces M es isométrico a uno de los siguientes espacios:

- *el espacio euclídeo $\mathbb{H}^n$,*
- *el espacio proyectivo cuaterniónico $\mathbb{HP}^n$,*
- *el espacio hiperbólico cuaterniónico.*

Demostración. Tenemos dos casos: Ricci plano y Ricci no plano. Los espacios simétricos cuaterniónicos kaehler Ricci no planos son espacios de Wolf, y están clasificados en [**?**]. De dicha clasificación vemos que los espacios cuaterniónicos: hiperbólico y proyectivo, son los únicos que satisafacen las condiciones necesarias. Si la variedad M es Ricci plana, sabemos por [**?**] que M es el producto de un espacio euclídeo y un toro. Por tanto, su cubriente universal es $\tilde{M} = \mathbb{R}^{4n} \cong \mathbb{H}^n$. Por **??** el subgrupo de isotropía A_p de $\mathrm{Aut}(M)$ en un punto p de M es uno de los siguientes grupos: $Sp(n) \cdot Sp(1)$, $Sp(n) \cdot U(1)$, $Sp(n)$. La acción de este subgrupo puede ser levantada al cubriente universal, y el correspondiente grupo está contenido en el subgrupo $G = A_p \ltimes \mathbb{R}^{4n}$ de $Sp(n)Sp(1) \ltimes \mathbb{R}^{4n} = \mathrm{Aut}(\mathbb{H}^n)$. Notemos que G también actúa transitivamente sobre $\mathbb{H}^n$ and $\dim(G) = \dim(\mathrm{Aut}(M))$. Por tanto, todo automorfismo infinitesimal en el álgebra de Lie $\mathfrak{g}$ de G está inducido por un automorfismo infinitesimal de M y el subgrupo discreto Γ que satisface $M = \tilde{M}/\Gamma$ está contenido en el centro de G, que es trivial. $\square$

CAPÍTULO 2

Estructuras spin torcidas y spinors puros paralelos

En el artículo de Clifford sobre "álgebra geométrica" hay dos temas principales: álgebra de Grassman y los cuaternios de Hamilton; tres unidades imaginarias i, j, k caracterizados por:

$$i^2 = j^2 = k^2 = ijk = -1.$$

Del estudio de este último es del que se desprende el concepto de álgebra de Clifford: un álgebra asociada de manera natural a un espacio vectorial equipado con una forma cuadrática. En el conjunto de unidades de esta álgebra existe un grupo especial, el grupo $Spin(n)$. En las primeras dos secciones de este capítulo enunciaremos algunos resultados sobre las álgebras de Clifford, el grupo $Spin(n)$ y sus representaciones. A su vez, recordaremos los conceptos correspondientes sobre variedades riemannianas, es decir, los conceptos de variedad spin, estructuras spin sobre haces vectoriales, haces spinoriales asociados, conexiones, etc. Las demostraciones de dichos resultados pueden ser consultadas en [**?**].

En la tercera sección de este capítulo introduciremos los conceptos de spinor puro, spinor maximalmente transversal, y analizaremos algunos casos en los que la existencia de tales spinors determina holonomía especial para la métrica Riemanniana.

2.1. Álgebras de Clifford y grupo Spin

Un **álgebra** A sobre un campo $\mathbb{F}$ es un espacio vectorial A sobre $\mathbb{F}$ dotado de una aplicación bilineal $m : A \times A \to A$, llamada multiplicación. El álgebra A es un álgebra con unidad si existe un elemento no cero, $1 \in A$, tal que $m(a, 1) = m(1, a) = a$. Abreviaremos $m(a, b)$ por $a{\cdot}b$, y por ab en caso de no haber confusión.

Definición 2.1.1. Sea (V, Q) una forma cuadrática sobre un campo $\mathbb{F}$. Un par $(Cl(V, Q), j)$ es llamado un **álgebra de Clifford** para (V, Q) si se satisfacen las siguientes propiedades:

i) $Cl(V, Q)$ es un $\mathbb{F}$-álgebra con 1,

ii) $j : V \longrightarrow Cl(V, Q)$ es una aplicación lineal que satisface:

$$j(v)^2 = Q(v) \cdot 1,$$

para todo $v \in V$.

iii) Si A es cualquier otra $\mathbb{F}$-álgebra con 1 y $u : V \longrightarrow A$ es una aplicación lineal que satisface $(u(v))^2 = Q(v) \cdot 1$, entonces existe un único homomorfismo de álgebras $\tilde{U} : Cl(V, Q) \longrightarrow A$ tal que $u = \tilde{U} \circ j$. Es decir, el diagrama siguiente:

$$\begin{tikzcd} Cl(V,Q) \arrow[dr, "\tilde{U}"] & \\ V \arrow[u, "j"] \arrow[r, "u"] & A \end{tikzcd}$$

conmuta.

Dada una forma cuadrática, siempre existe un álgebra de Clifford:

Proposición 2.1.2. *Para toda forma cuadrática (V, Q) existe un álgebra de Clifford $(Cl(V, Q), j)$. Si $(Cl(V, Q), j)$ y $(Cl'(V, Q), j')$ son álgebras de Clifford para la misma forma cuadrática entonces existe un homomorfismo de álgebras $f : Cl(V, Q) \to Cl'(V, Q)$, tal que el diagrama*

$$\begin{tikzcd} Cl(V,Q) \arrow[rr, "f"] & & Cl'(V,Q) \\ & V \arrow[ul, "j"] \arrow[ur, "j'"'] & \end{tikzcd}$$

conmuta.

Mediante j, hay una inclusión inyectiva de V en el álgebra $Cl(V,Q)$, por tanto V puede verse como subespacio lineal de $Cl(V,Q)$.

Proposición 2.1.3. *Para toda álgebra de Clifford $Cl(V,Q)$ existe un homomorfismo de álgebras:*

$$\beta : Cl(V,Q) \longrightarrow Cl(V,Q),$$

que satisface $\beta^2 = Id$.

De este resultado se sigue la descomposición:

$$Cl(V,Q) = Cl^0(V,Q) \oplus Cl^1(V,Q), \tag{2.1}$$

donde $Cl^i(V,Q) = \{x \in Cl(V,Q) \mid \beta(x) = (-1)^i x\}$ son los espacios propios de β. Del hecho de que se preserva el producto, se tiene:

$$Cl^i(V,Q) \cdot Cl^j(V,Q) \subset Cl^{i+j}(V,Q), \tag{2.2}$$

donde los subíndices son tomados módulo 2. Un álgebra que satisface las condiciones **??** y **??** es llamada un **álgebra $\mathbb{Z}_2$-graduada**. El conjunto $Cl^0(V,Q)$ es una subálgebra de $Cl(V,Q)$ llamada la **parte par** de $Cl(V,Q)$. A la parte $Cl^1(V,Q)$ se le llama la **parte impar**, aunque no es una subálgebra.

Toda álgebra de Clifford $Cl(V,Q)$ además de tener una involución

$$\beta : Cl(V,Q) \longrightarrow Cl(V,Q),$$

también tiene una anti-involución $\gamma : Cl(V,Q) \longrightarrow Cl(V,Q)$. El procedimento para construir esta anti-involución es el siguiente: Si A es una $\mathbb{F}$-álgebra definimos otra álgebra A' sobre el conjunto A con el producto:

$$x * y := y \cdot x.$$

Aplicamos este proceso al álgebra $A = (Cl(V,Q))'$. Para la inclusión

$$j : V \longrightarrow A = (Cl(V,Q))'$$

se satisface $j(v) * j(v) = j(v) \cdot j(v) = Q(v) \cdot 1$ en el álgebra A. Por el resultado **??** existe un único homomorfismo de álgebras

$$\gamma : Cl(V,Q) \longrightarrow (Cl(V,Q))'$$

tal que $j(v) = \gamma j(v)$, para $v \in V$. Las propiedades de γ como aplicación de $Cl(V,Q)$ en $Cl(V,Q)$ están dadas en la siguiente proposición:

Proposición 2.1.4. *Para toda álgebra de Clifford $Cl(V,Q)$ existe una aplicación lineal $\gamma : Cl(V,Q) \to Cl(V,Q)$ con las siguientes propiedades:*

i) $\gamma^2 = Id$,

ii) $\gamma(v) = v$, *para todo* $v \in V \subset Cl(V, Q)$,

iii) $\gamma(x \cdot y) = \gamma(y) \cdot \gamma(x)$, *para* $x, y \in Cl(V, Q)$.

En esta tesis, estamos interesados en el álgebra de Clifford asociada a $V = \mathbb{R}^n$ y a la forma cuadrática

$$Q(x) = -(x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2),$$

que será denotada por Cl_n. El siguiente teorema muestra una caracterización de Cl_n que será de gran utilidad en cálculos posteriores.

Teorema 2.1.5. *Si* $e_1, \ldots, e_n$ *es una base de* $V = \mathbb{R}^n$, *tal que*

$$Q(e_i, e_j) = -\delta_{ij},$$

entonces, el álgebra de Clifford Cl_n *es el álgebra multiplicativa generada por los elementos* $e_1, \ldots, e_n$ *(generadores de Clifford) sujetos a las relaciones siguientes:*

1. $e_i^2 = Q(e_i) = -1$, *para* $i = 1, \ldots, n$,
2. $e_i e_j = -e_j e_i$, *para* $i \neq j$.

Una base partícular para el espacio vectorial Cl_n *es la que está formada por el elemento* 1 *y los productos de los generadores de Clifford de la forma*

$$e_{i_1} e_{i_2} \cdots e_{i_k}, \qquad i_1 < i_2 < \cdots < i_k, \quad k = 0, 1, \cdots, n.$$

Ejemplo 2.1.6. La base canónica de Cl_1 es el escalar $1 \in \mathbb{R}$ y el generador de Clifford e_1, por tanto, todo elemento en Cl_1 puede escribirse como $a + be_1$ con $a, b \in \mathbb{R}$. Observemos que para cualesquiera dos elementos $(a_1+b_1e_1)$ y $(a_2+b_2e_1)$ en Cl_1 tenemos

$$(a_1 + b_1e_1) + (a_2 + b_2e_1) = (a_1 + a_2) + (b_1 + b_2)e_1$$

para la suma, y

$$(a_1 + b_1e_1)(a_2 + b_2e_1) = a_1a_2 + (a_1b_2)e_1 + (b_1a_2)e_1 + (b_1b_2)(e_1)^2 =$$
$$= (a_1a_2 - b_1b_2) + (a_1b_2 + b_1a_2)e_1$$

para la multiplicación. Si reemplazamos e_1 por $\sqrt{-1}$ tenemos $Cl_1 = \mathbb{C}$.

Ejemplo 2.1.7. La base canónica de Cl_2 es

$$\{1, e_1, e_2, e_1e_2\},$$

y tenemos $e_1e_2 = -e_2e_1$. Como

$$(e_1e_2)^2 = e_1e_2e_1e_2 = -e_1e_2e_2e_1 = -e_1(-1)e_1 = e_1^2 = -1,$$

podemos identificar a $\{e_1, e_2, e_1e_2\}$ con los tres cuaternios $\{i, j, k\}$ en el orden dado, de tal modo que $Cl_2 \cong \mathbb{H}$, donde $\mathbb{H}$ denota a los cuaternios.

Para una forma cuadrática real (V, Q), se define la complexificación $(V \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C}, Q_{\mathbb{C}})$ por

$$Q_{\mathbb{C}}(v_1 \otimes z, v_2 \otimes w) = Q(v_1, v_2)zw.$$

Si A es un álgebra real entonces su complexificación $A \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C}$ tiene estructura de álgebra compleja, con el producto dado por

$$(a_1 \otimes z) \cdot (a_2 \otimes w) = (a_1a_2) \otimes (zw).$$

El álgebra $Cl_2^{\mathbb{C}} = Cl_2 \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C}$ está generada por los elementos $e_1, e_2 \in \mathbb{R}^n$, sujetos a las relaciones

$$e_1^2 = -1 = e_2^2, \qquad e_1e_2 + e_2e_1 = 0.$$

Por otro lado, el álgebra compleja $M_2(\mathbb{C})$ (matrices de 2×2 con entradas complejas), tiene la siguiente base

$$E = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad g_1 = \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix}, \quad g_2 = \begin{pmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \quad T = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix},$$

con

$$g_1^2 = -1 = g_2^2, \qquad g_1g_2 + g_2g_1 = 0.$$

Esto nos lleva al isomorfismo de álgebras $Cl_2^{\mathbb{C}} = Cl_2 \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C} \cong M_2(\mathbb{C})$. De manera general:

Proposición 2.1.8. *Las álgebras $Cl_{n+2}^{\mathbb{C}}$ y $Cl_n^{\mathbb{C}} \otimes M_2(\mathbb{C})$ son isomorfas. El isomorfismo está dado por*

$$e_1 \mapsto 1 \otimes g_1, \quad e_2 \mapsto 1 \otimes g_2, \quad e_j \mapsto (e_{j-2}^*) \otimes g_1g_2, \quad 3 \leq j \leq n+2,$$

donde $\{e_1, \ldots, e_{n+2}\}$ es el conjunto de elementos que generan al álgebra $Cl_{n+2}^{\mathbb{C}}$, $\{e_1^*, \ldots e_n^*\}$ es el conjunto de elementos que generan al álgebra $Cl_n^{\mathbb{C}}$ y

$$g_1 = \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix} \quad y \quad g_2 = \begin{pmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{pmatrix},$$

son los elementos que generan el álgebra $M_2(\mathbb{C})$.

Proposición 2.1.9. *Con la misma notación del resultado anterior.*

a) Si $n = 2k$, entonces

$$Cl_n^{\mathbb{C}} \cong \underbrace{M_2(\mathbb{C}) \otimes \cdots \otimes M_2(\mathbb{C})}_{k \text{ veces}} \cong \mathrm{End}(\underbrace{\mathbb{C}^2 \otimes \cdots \otimes \mathbb{C}^2}_{k \text{ veces}}) \cong \mathrm{End}(\mathbb{C}^{2^k}).$$

El isomorfismo está dado por:

$$\begin{array}{rcl}
e_1 & \mapsto & Id \otimes Id \otimes \cdots \otimes Id \otimes g_1, \\
e_2 & \mapsto & Id \otimes Id \otimes \cdots \otimes Id \otimes g_2, \\
e_3 & \mapsto & Id \otimes Id \otimes \cdots \otimes g_1 \otimes T, \\
e_4 & \mapsto & Id \otimes Id \otimes \cdots \otimes g_2 \otimes T, \\
\vdots & \vdots & \vdots \\
e_{2k-1} & \mapsto & g_1 \otimes T \otimes \cdots \otimes T \otimes T, \\
e_{2k} & \mapsto & g_2 \otimes T \otimes \cdots \otimes T \otimes T.
\end{array}$$

b) Si $n = 2k+1$, entonces

$$Cl_n^{\mathbb{C}} \cong \{\underbrace{M_2(\mathbb{C}) \otimes \cdots \otimes M_2(\mathbb{C})}_{k \text{ veces}}\} \oplus \{\underbrace{M_2(\mathbb{C}) \otimes \cdots \otimes M_2(\mathbb{C})}_{k \text{ veces}}\} \cong \mathrm{End}(\mathbb{C}^{2^k}) \oplus \mathrm{End}(\mathbb{C}^{2^k}).$$

El isomorfismo está dado por:

$$\begin{array}{rcl}
e_1 & \mapsto & (Id \otimes Id \otimes \cdots \otimes Id \otimes g_1, Id \otimes Id \otimes \cdots \otimes Id \otimes g_1), \\
e_2 & \mapsto & (Id \otimes Id \otimes \cdots \otimes Id \otimes g_2, Id \otimes Id \otimes \cdots \otimes Id \otimes g_2), \\
e_3 & \mapsto & (Id \otimes Id \otimes \cdots \otimes g_1 \otimes T, Id \otimes Id \otimes \cdots \otimes g_1 \otimes T), \\
e_4 & \mapsto & (Id \otimes Id \otimes \cdots \otimes g_2 \otimes T, Id \otimes Id \otimes \cdots \otimes g_2 \otimes T), \\
\vdots & \vdots & \vdots \\
e_{2k-1} & \mapsto & (g_1 \otimes T \otimes \cdots \otimes T \otimes T, g_1 \otimes T \otimes \cdots \otimes T \otimes T), \\
e_{2k} & \mapsto & (g_2 \otimes T \otimes \cdots \otimes T \otimes T, g_2 \otimes T \otimes \cdots \otimes T \otimes T), \\
e_{2k+1} & \mapsto & (iT \otimes \cdots \otimes T \otimes T, -iT \otimes \cdots \otimes T \otimes T).
\end{array}$$

El espacio vectorial de n-spinors complejos es:

$$\Delta_n := \mathbb{C}^{2^k} = \underbrace{\mathbb{C}^2 \otimes \cdots \otimes \mathbb{C}^2}_{k \text{ veces}}, \qquad \text{para } n = 2k, 2k+1.$$

Los elementos de Δ_n son llamados ***campos de spinors complejos*** o simplemente **spinors**.

La **representación spin del álgebra de Clifford** Cl_n, denotada por κ_n, para el caso $n = 2k$, está dada por el isomorfismo dado en la proposición **??**.

$$\kappa_n : Cl_n^{\mathbb{C}} \xrightarrow{\cong} \mathrm{End}(\mathbb{C}^{2^k}).$$

Si $n = 2k+1$ entonces κ_n consiste del isomorfismo $Cl_n^{\mathbb{C}} \cong \mathrm{End}(\mathbb{C}^{2^k}) \oplus \mathrm{End}(\mathbb{C}^{2^k})$ seguido por la proyección sobre la primera componente.

$$\kappa_n : Cl_n^{\mathbb{C}} \xrightarrow{\cong} \mathrm{End}(\mathbb{C}^{2^k}) \oplus \mathrm{End}(\mathbb{C}^{2^k}) \xrightarrow{pr_1} \mathrm{End}(\mathbb{C}^{2^k})$$

Cualquier representación compleja de Cl_n se extiende automáticamente a una representación de $Cl_n \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C} = \mathbb{C}l_n = Cl_n^{\mathbb{C}}$.

2.1.1. Los grupos Pin y Spin

Como mencionamos anteriormente, $\mathbb{R}^n$ es un subespacio lineal de Cl_n. Para todo vector $x \in \mathbb{R}^n$ se cumple la igualdad

$$x \cdot x = \|x\|^2,$$

y de aquí el elemento inverso x^{-1} está dado por:

$$x^{-1} = \frac{-x}{\|x\|^2}.$$

El grupo generado por los elementos $x \in S^{n-1}$ es el **grupo Pin**, denotado $Pin(n)$, es decir, $Pin(n)$ es el grupo generado por los productos $x_1 \cdot \ldots \cdot x_m$, con $x_i \in \mathbb{R}^n, \|x_i\| = 1$. El **grupo Spin** está definido como el grupo generado por los elementos $x_1 \cdot \ldots \cdot x_m$ en $Pin(n)$ con m un número par. Visto de otra manera;

$$Spin(n) = Pin(n) \cap Cl_n^0.$$

Ejemplo 2.1.10. El grupo $Spin(2) \subset Cl_2^0 \cong \mathbb{C}$, por lo que $Spin(2)$ es isomorfo a $U(1)$. De manera análoga, tenemos $Spin(3) \subset Cl_3^0 \cong \mathbb{H}$, por lo que $Spin(3)$ es isomorfo a $Sp(1)$.

Recordemos que en toda álgebra de Clifford existe una anti-involución $\gamma : Cl_n \to Cl_n$, que particularmente cumple con $\gamma(x) = x$, para toda $x \in \mathbb{R}^n \subset Cl_n$. Así, un elemento $x \in Pin(n)$ es por definición un producto $x = x_1 \cdot \ldots \cdot x_m$, de vectores de la esfera $x_i \in S^{n-1}$. Tomemos $e_1 = x_1$ y completemos a una base ortonormal en $\mathbb{R}^n$, tomamos

$$y = \sum_{i=1}^{n} y_i e_i$$

y obtenemos

$$x_1 \cdot y \cdot \gamma(x_1) = e_1 \cdot \left(\sum_{i=1}^{n} y_i e_i \right) \cdot e_1 = -y_1 e_1 + \sum_{i=2}^{n} y_i e_i,$$

lo que muestra que, $x_1 \cdot y \cdot \gamma(x_1)$ es un vector en $\mathbb{R}^n$, y es la imagen de y bajo la reflexión en el plano perpendicular a x_1. Definimos la aplicación

$$\lambda : Pin(n) \to GL(n) \tag{2.3}$$

como

$$\begin{aligned} \lambda(x) : \mathbb{R}^n &\to \mathbb{R}^n \\ (\lambda(x))y &= x \cdot y \cdot \gamma(x). \end{aligned}$$

La función λ es un homomorfismo de grupos, ya que

$$\lambda(x_1 x_2) y = x_1 x_2 \cdot y \cdot \gamma(x_1 x_2) = x_1 x_2 \cdot y \gamma(x_2) \cdot \gamma(x_1) = \lambda(x_1)(\lambda(x_2) y).$$

Denotaremos a λ por λ_n cuando el contexto lo requiera.

Proposición 2.1.11. *Para la aplicación λ definida anteriormente se tienen los siguientes resultados:*

a) *$\lambda : Pin(n) \longrightarrow O(n)$ es un homomorfismo de grupos; suprayectivo y continuo.*

b) *$\lambda^{-1}(SO(n)) = Spin(n)$.*

c) *$ker(\lambda) = \{1, -1\} \cong \mathbb{Z}_2$.*

d) *Para $n \geq 2$, $Spin(n)$ es un grupo conexo.*

e) *Para $n \geq 3$, $Spin(n)$ es simplemente conexo y $\lambda : Spin(n) \to SO(n)$ es el cubriente universal de $SO(n)$.*

Ahora veremos una descripción del álgebra de Lie $\mathfrak{spin}(n)$ del grupo $Spin(n)$.

Proposición 2.1.12.

a) *El subespacio lineal*

$$\mathfrak{m}_2 = Lin(e_i e_j \mid 1 \leq i \leq j \leq n) \subset Cl_n,$$

equipado con el conmutador;

$$[x, y] = xy - yx,$$

es un álgebra de Lie que coincide con el álgebra de Lie del grupo $Spin(n) \subset Cl_n$.

b) La aplicación exponencial $exp : \mathfrak{m}_2 \to Spin(n)$ *está dada por*

$$exp(x) = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{x^i}{i!}.$$

c) Si $\sigma : Cl_n \to \mathrm{End}(W)$ *es una representación (real o compleja) del álgebra de Clifford y*

$$\sigma \mid_{Spin(n)}: Spin(n) \longrightarrow \mathrm{Aut}(W)$$

es el homomorfismo de grupo definido por la restricción, entonces la diferencial

$$(\sigma \mid_{Spin(n)})_* : \mathfrak{spin}(n) = \mathfrak{m}_2 \to \mathrm{End}(W)$$

está dada por la fórmula $(\sigma_{|Spin(n)})_* = \sigma_{|\mathfrak{m}_2}$.

Proposición 2.1.13. *Para la aplicación cubriente universal*

$$\lambda : Spin(n) \to SO(n),$$

la diferencial $\lambda_* : \mathfrak{spin}(n) \longrightarrow \mathfrak{so}(n)$ *satisface:*

$$\lambda_*(e_i e_j) = 2E_{ij},$$

donde

$$E_{ij} = \begin{pmatrix} 0 & \dots & & \dots & 0 & & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & & & & & & & & \vdots \\ 0 & & & & & -1 & & & 0 \\ \vdots & & & & & & & & \vdots \\ 0 & & 1 & & & & & & 0 \\ \vdots & & & & & & & & \vdots \\ 0 & \dots & & & & & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}.$$

2.1.2. La representación estándar del grupo Spin

Consideramos el Cl_n-módulo de n-spinors Δ_n definido en la sección anterior.

Definición 2.1.14. La **representación spin** estándar del grupo $Spin(n)$ es el homomorfismo

$$\kappa_n = \kappa_n \mid_{Spin(n)}: Spin(n) \longrightarrow \mathrm{Aut}(\Delta_n), \tag{2.4}$$

dado por la restricción de la representación $Cl_n^{\mathbb{C}} \xrightarrow{\kappa_n} \mathrm{End}(\Delta_n)$ al grupo $Spin(n) \subset Cl_n \subset Cl_n^{\mathbb{C}}$.

Proposición 2.1.15. *La representación spin estándar es una representación fiel del grupo* $Spin(n)$.

A partir de la inclusión $\mathbb{R}^n \subset Cl_n \subset Cl_n^{\mathbb{C}} \xrightarrow{\kappa_n} \mathrm{End}(\Delta_n)$, un vector $x \in \mathbb{R}^n$ puede ser considerado como un homomorfismo de Δ_n. Esto permite definir la **multiplicación de Clifford de vectores y spinors** por:

$$\mu : \mathbb{R}^n \otimes_{\mathbb{R}} \Delta_n \longrightarrow \Delta_n,$$

$$x \otimes \psi \longmapsto \kappa_n(x)(\psi).$$

En lugar de $\kappa_n(x)(\psi)$, escribiremos simplemente $x \cdot \psi$. Esta multiplicación se puede extender al homomorfismo

$$\mu : \Lambda(\mathbb{R}^n) \otimes_{\mathbb{R}} \Delta_n \longrightarrow \Delta_n$$

de la siguiente manera: todo elemento ω^k del álgebra exterior $\Lambda(\mathbb{R}^n)$ puede ser escrito como

$$\omega^k = \sum_{i_1 < \cdots < i_k} \omega_{i_1 i_2 \ldots i_k} e_{i_1} \wedge \cdots \wedge e_{i_k},$$

donde $e_1, \ldots, e_n$ es la base ortonormal canónica de $\mathbb{R}^n$. Se define

$$\mu(\omega^k \otimes \psi) = \omega^k \cdot \psi = \sum_{i_1 i_2 \ldots i_k} \omega_{i_1 i_2 \ldots i_k} e_{i_1} \cdot \cdots \cdot e_{i_k} \cdot \psi.$$

El álgebra de Clifford Cl_n es isomorfa, como espacio vectorial, al álgebra exterior $\Lambda(\mathbb{R}^n)$, pero no como álgebra; la diferencia radica en la operación "producto":

Lema 2.1.16. *Para todo $x \in \mathbb{R}^n$ y todo multi-vector $\omega^k \in \Lambda(\mathbb{R}^n)$, se satisface*

$$(x \wedge \omega^k) \cdot \psi = x \cdot (\omega^k \cdot \psi) + (x \rfloor \omega^k) \cdot \psi,$$

donde $\rfloor$ denota la operación contracción.

Proposición 2.1.17. *La multiplicación de Clifford $\mu : \Lambda(\mathbb{R}^n) \otimes_{\mathbb{R}} \Delta_n \to \Delta_n$ es un homomorfismo de $Spin(n)$-representaciones.*

El resultado de la multiplicación de vectores y multi-vectores por un spinor es siempre un spinor, y esta multiplicación es equivariante bajo la acción del grupo $Spin(n)$.

La representación spin $\kappa_n : Spin(n) \to GL(\Delta_n)$ es la representación de un grupo compacto en un espacio vectorial complejo; de aquí que siempre exista un producto escalar Hermitiano en Δ_n que es $Spin(n)$-equivariante.

Proposición 2.1.18. *La representación spin $\kappa_n : Spin(n) \to GL(\Delta_n)$ es una representación unitaria. Más aún,*

$$\det(\kappa_n(g)) = 1,$$

para todo elemento $g \in Spin(n)$, de tal modo que

$$\kappa_n : Spin(n) \to SU(\Delta_n).$$

2.2. El grupo $Spin^r(n)$ y algunas representaciones

Siguiendo la línea de estudio realizada para variedades de tipo $Spin^c$ y $Spin^q$ en [?] y [?], en esta sección definiremos el grupo spin torcido $Spin^r(n)$ y las variedades de tipo $Spin^r(n)$.

Definición 2.2.1. El **grupo Spin torcido** $Spin^r(n)$ lo definimos como el grupo de clases de equivalencia de pares $(g, z) \in Spin(n) \times Spin(r)$ bajo la relación de equivalencia $(g, z) \sim (-g, -z)$, es decir:

$$Spin^r(n) = (Spin(n) \times Spin(r))/\{\pm(Id, Id)\} = Spin(n) \times_{\mathbb{Z}_2} Spin(r).$$

Con la aplicación $\lambda_n : Spin(n) \to SO(n)$ definida en (**??**), definimos el homomorfismo $\lambda_{n,r} : Spin^r(n) \to SO(n) \times SO(r)$ por

$$\lambda_{n,r}[g_1, g_2] = (\lambda_n(g_1), \lambda_r(g_2)). \tag{2.5}$$

donde $g_1 \in Spin(n)$ y $g_2 \in Spin(r)$.

Las representaciones naturales que consideraremos más adelante son de la forma

$$\kappa^l_{n,r} : Spin^r(n) \longrightarrow \mathrm{Aut}(\Delta_n \otimes \Delta_r^{\otimes l}),$$

donde

$$\Delta_n \otimes \Delta_r^{\otimes l} = \Delta_n \otimes (\underbrace{\Delta_r \otimes \cdots \otimes \Delta_r}_{l-veces}),$$

$$\kappa^l_{n,r}[g_1, g_2](\varphi_1 \otimes \varphi_2) = (\kappa_n(g_1)\varphi_1 \otimes \kappa_r(g_2)^{\otimes l}\varphi_2),$$

$$\kappa_r(g_2)^{\otimes l} = \underbrace{\kappa_r(g_2) \otimes \cdots \otimes \kappa_r(g_2)}_{l-veces}.$$

Notemos que tales productos tensoriales heredan un producto escalar hermitiano de los productos escalares hermitianos de cada uno de los factores.

2.2.1. Estructuras Spin sobre haces vectoriales

Sea E un haz vectorial riemanniano orientado de rango n sobre una variedad M. Sea $P_{SO}(E)$ su haz de marcos ortonormales orientados. Se define una **estructura spin** sobre E como un $Spin(n)$-haz principal $P_{Spin}(E)$ junto con un mapeo de haces principales dos a uno

$$\xi : P_{Spin}(E) \longrightarrow P_{SO}(E),$$

tal que $\xi(pg) = \xi(p)\lambda_n(g)$ para toda $p \in P_{Spin}(E)$ y para toda $g \in Spin(n)$. Donde la aplicación $\lambda_n : Spin(n) \to SO(n)$ es el homomorfismo cubriente universal con kernel $\{Id, -Id\} \cong \mathbb{Z}_2$.

Dada una sucesión exacta corta de grupos topológicos

$$1 \longrightarrow K \xrightarrow{i} G \xrightarrow{j} G' \longrightarrow 1 ,$$

la cohomología de Čech sobre una variedad compacta M nos da la sucesión exacta de conjuntos (punteados)

$$\{\star\} \longrightarrow H^0(M;K) \xrightarrow{i_*} H^0(M;G) \xrightarrow{j_*} H^0(M;G')$$

$$\longrightarrow H^1(M;K) \xrightarrow{i_*} H^1(M;G) \xrightarrow{j_*} H^1(M;G') ,$$

donde $H^0(M;G)$ es el conjunto de 0-cociclos y está definido como el espacio de aplicaciones continuas de M a G. Si el grupo K es abeliano, entonces $H^2(M;G)$ está definido y la sucesión se puede extender a

$$\cdots \longrightarrow H^1(M;K) \xrightarrow{i_*} H^1(M;G) \xrightarrow{j_*} H^1(M;G') \longrightarrow H^2(M;K) .$$

Definición 2.2.2. Para la sucesión

$$0 \longrightarrow SO(n) \longrightarrow O(n) \longrightarrow \mathbb{Z}_2 \longrightarrow 0$$

la aplicación inducida en cohomología

$$\omega_1 : H^1(M;O(n)) \longrightarrow H^1(M;\mathbb{Z}_2)$$

es llamada la **primera clase de Stiefel-Whitney**. De la exactitud se sigue que $\omega_1(P) = 0$ si y sólo si P proviene de un $SO(n)$-haz, es decir si P es orientable.

Definición 2.2.3. Para la sucesión

$$0 \longrightarrow \mathbb{Z}_2 \longrightarrow Spin(n) \xrightarrow{\lambda_n} SO(n) \longrightarrow 0$$

tenemos que $\mathbb{Z}_2$ es un grupo abeliano, por lo que $H^2(M;\mathbb{Z}_2)$ está definido y la aplicación inducida

$$\omega_2 : H^1(M;SO(n)) \longrightarrow H^2(M;\mathbb{Z}_2)$$

es llamada la **segunda clase de Stiefel-Whitney**.

Un G-haz principal P está dado por el par $\{\mathfrak{U}, \{g_{\alpha\beta}\}\}$, donde $\mathfrak{U}$ es una cubierta abierta y $\{g_{\alpha\beta}\}$ las funciones de transición. Si la intersección $U_\alpha \cap U_\beta$ de cualesquiera dos U_α, $U_\beta \in \mathfrak{U}$ es simplemente conexa y se satisface la condición de cociclo;

$$g_{\alpha\beta} g_{\beta\gamma} g_{\gamma\alpha} \equiv 1$$

en $U_\alpha \cap U_\beta \cap U_\gamma$, entonces para cada aplicación $g_{\alpha\beta}$ tenemos el levantamiento $\overline{g}_{\alpha\beta} : U_\alpha \cap U_\beta \to Spin(n)$, y podemos definir

$$\omega_{\alpha\beta\gamma} = \overline{g}_{\alpha\beta} \overline{g}_{\beta\gamma} \overline{g}_{\gamma\alpha}$$

en el abierto $U_\alpha \cap U_\beta \cap U_\gamma$. Como se satisface la condición de cociclo,

$$\lambda_n(\omega_{\alpha\beta\gamma}) = 1.$$

De aquí, tenemos que

$$\omega_{\alpha\beta\gamma} : U_\alpha \cap U_\beta \cap U_\gamma \longrightarrow \mathbb{Z}_2.$$

Observemos que si la variedad es spin, entonces los levantamientos

$$\overline{g}_{\alpha\beta} : U_\alpha \cap U_\beta \to Spin(n)$$

quedan sin ambiguedad. Así, los $\mathbb{Z}_2$-cociclos $\omega_{\alpha\beta\gamma}$ "miden" la existencia de una estructura spin.

Teorema 2.2.4. *[?] Sea E un haz vectorial riemanniano orientado sobre una variedad suave M. La segunda clase de Stiefel-Whitney de E es cero si, y sólo si, existe una estructura spin sobre E. Más aún, si $w_2(E) = 0$ entonces las distintas estructuras spin sobre E estan en correspondencia uno a uno con los elementos de $H^1(M; \mathbb{Z}_2)$.*

Definición 2.2.5. Sea $P_{SO(n)}$ un $SO(n)$-haz principal sobre una variedad suave orientada M. Una **estructura** $Spin^r(n)$ **en** $P_{SO(n)}$ consiste de un $Spin^r(n)$-haz principal $P_{Spin^r(n)}$ sobre M, un $SO(r)$-haz principal $P_{SO(r)}$ sobre M y una aplicación $Spin^r(n)$-equivariante

$$\xi^r : P_{Spin^r(n)} \longrightarrow P_{SO(n)} \tilde{\times} P_{SO(r)},$$

Es decir, ξ^r satisface:

$$\xi^r(pg) = \xi^r(p) \lambda_{n,r}(g),$$

para toda $p \in P_{Spin^r(n)}$ y para toda $g = [(g_1, g_2)] \in Spin^r(n)$, donde

$$\lambda_{n,r}[g_1, g_2] = (\lambda_n(g_1), \lambda_r(g_2))$$

y $\tilde{\times}$ denota el producto fibrado.

$\mathbb{Z}_2$ es un subgrupo de $Spin^r(n)$, y es el kernel de la aplicación $\lambda_{n,r}$, de aquí la existencia de la sucesión exacta corta

$$1 \longrightarrow \mathbb{Z}_2 \longrightarrow Spin^r(n) \overset{\lambda_{n,r}}{\longrightarrow} SO(n) \times SO(r) \longrightarrow 1, \tag{2.6}$$

de la que se sigue la existencia de la sucesión exacta larga de conjuntos punteados

$$\cdots \to H^1(M; Spin(n) \times Spin(r)) \to H^1(M; SO(n)) \oplus H^1(M; SO(r)) \overset{\omega_2 + \tilde{\omega_2}}{\longrightarrow} H^2(M; \mathbb{Z}_2) \to \cdots .$$

Proposición 2.2.6. *Sea $P_{SO(n)}$ un $SO(n)$-haz principal sobre la variedad M. El haz $P_{SO(n)}$ admite una estructura $Spin^r(n)$ si, y sólo si,*

$$\omega_2(P_{SO(n)}) = \omega_2(P_{SO(r)}),$$

para algún $SO(r)$-haz principal sobre M, $r \in \mathbb{N}$.

El grupo $Spin(2)$ es isomorfo al grupo $U(1)$. Así, el grupo $Spin^2(n)$ es isomorfo al grupo $Spin^c(n)$ y la estructura $Spin^2(n)$ es igual a la estructura $Spin^c(n)$ dada en [**?**]. De manera análoga, el grupo $Spin(3)$ es isomorfo al grupo $Sp(1)$ y el grupo $Spin^3(n)$ es isomorfo al grupo $Spin^q$, por lo que la estructura $Spin^3(n)$, aquí definida, coincide con la de estructura $Spin^q$ definida en [**?**].

Si E es un haz vectorial riemanniano de rango n, orientado sobre una variedad suave M, entonces definimos una **estructura** $Spin^r(n)$ sobre E como una estructura $Spin^r(n)$ sobre el $SO(n)$-haz principal $P_{SO(n)}(E)$. Así mismo, una $Spin^r(n)$-**variedad** la definimos como una n-variedad riemanniana orientada y con una estructura $Spin^r(n)$ sobre su haz tangente. Particularmente en la siguiente sección estudiaremos los casos $r = 2, 3, 7$.

2.2.2. Haces spinoriales asociados y conexiones en haces spinoriales

Definición 2.2.7. Sea E un haz vectorial sobre una variedad suave M. Una **derivada covariante** en E es un operador

$$\nabla : \Gamma(E) \longrightarrow \Gamma(T^*M \otimes E),$$

tal que

$$\nabla(fe) = df \otimes e + f\nabla e,$$

para toda $f \in C^\infty(M)$ y para toda $e \in \Gamma(E)$.

Si además, el haz E es riemanniano y orientado, podemos tomar un marco ortonormal local de $P_{SO(n)}$, $\mathfrak{E} = (e_1, e_2, \ldots, e_n)$, de tal modo que ∇ puede expresarse como

$$\nabla e_i = \sum_{j=1}^{n} \omega_{ji} \otimes e_j, \tag{2.7}$$

donde ω_{ji} son las 1-formas que vienen de $\omega = \mathfrak{E}^* \eta$, con η la 1-forma de conexión en $P_{SO(n)}$. Más aún, se puede pedir que la derivada covariante sea compatible con la métrica $\langle \cdot, \cdot \rangle$ on E,

$$X\langle e, e' \rangle = \langle \nabla_X e, e' \rangle + \langle e, \nabla_X e' \rangle,$$

para todo $X \in TM$ y para $e, e' \in \Gamma(E)$.

La derivada covariante se extiende a $T^*M \otimes E$ por

$$\nabla : \Gamma(T^*M \otimes E) \longrightarrow \Gamma(\Lambda^2 T^*M \otimes E)$$

$$\nabla(\alpha \otimes e) = d\alpha \otimes e - \alpha \wedge \nabla e,$$

y satisface que

$$\nabla(\nabla e_i) = \nabla(\sum_{j=1}^{n} \omega_{ji} \otimes e_j) = \sum_{j=1}^{n} \Omega_{ji} \otimes e_j,$$

donde,

$$\Omega_{ji} = d\omega_{ji} + \sum_{k=1}^{n} \omega_{jk} \wedge \omega_{ki}.$$

Si F es otro haz vectorial sobre M, dotado con una derivada covariante ∇^F, podemos definir una derivada covariante para secciones del haz producto tensorial $E \otimes F$ por la formula

$$\nabla^{E \otimes F}(e \otimes f) = \nabla^E(e) \otimes f + e \otimes \nabla^F(f).$$

Esta fórmula es válida aún cuando los factores E y F solo sean haces vectoriales localmente definidos.

Si el haz E admite una estructura $Spin(n)$, entonces la conexión en $P_{SO(E)}$ se levanta a una conexión en $P_{Spin(E)}$ y define una derivada covariante ∇^s en cualquier haz spinorial $\Delta(E)$

$$\nabla^s \sigma = d\sigma + \frac{1}{2} \sum_{i<j} \omega_{ji} \otimes e_i e_j \cdot \sigma,$$

donde$(e_1, e_2, \ldots, e_n)$ es un marco ortonormal local de M, y σ es un spinor.

Ahora supondremos que M es una n-variedad Spin, P una estructura Spin dada sobre M y $E = TM$. El **haz spinorial** $\Delta(M)$ sobre M se define como el haz vectorial asociado a la representación $\kappa_n : Spin(n) \to \mathrm{Aut}(\Delta_n)$, es decir,

$$\Delta(M) = P \times_{\kappa_n} \Delta_n,$$

donde $(p, \varphi) \sim (p, \varphi) \cdot g = (p \cdot g, g^{-1} \cdot \varphi) = (p \cdot g, \kappa_n(g^{-1})(\varphi))$, para $p \in P$, $\varphi \in \Delta_n$. introduciremos el concepto de haz spinorial torcido para la estructura $Spin^r(n)$.

Definición 2.2.8. Sea M una $Spin^r(n)$-variedad. Definimos el **haz spinorial torcido** $\Delta(M)^l_{n,r}$ para la estructura $Spin^r(n)$, como el haz vectorial asociado al $Spin^r(n)$-haz principal y a la representación $\Delta_n \otimes \Delta_r^{\otimes l}$ del grupo $Spin^r(n)$, es decir

$$\Delta(M)^l_{n,r} = P_{Spin^r(n)} \times_{\kappa^l_{n,r}} (\Delta_n \otimes \Delta_r^{\otimes l}).$$

Una sección $\varphi \in \Gamma(\Delta(M)^l_{n,r})$ será llamada **campo spinorial** o simplemente **spinor**.

Por lo descrito anteriormente, si el $SO(r)$-haz auxiliar $P_{SO(r)}$ está dotado con una conexión, entonces los haces $\Delta(M)^l_{n,r}$ también pueden ser dotados con conexiones.

2.3. Spinors puros y spinors maximalmente transversales

En esta sección definimos los objetos centrales de este capítulo: los spinors puros y los spinors maximalmente transversales para variedades de tipo $Spin^r(n)$.

Primeramente, sea $Im(Cl^0_r)$ el complemento ortogonal a $\mathbb{R}$ en Cl^0_r, es decir,

$$Im(Cl^0_r) \cong \mathbb{R}^r \oplus \Lambda^2\mathbb{R}^r \oplus \ldots \oplus \Lambda^r\mathbb{R}^r \subset Cl^0_r.$$

Definición 2.3.1. Sea M una $Spin^r(n)$-variedad. Para una $l \in \mathbb{N}$ dada, un spinor $\varphi \in \Gamma(\Delta(M)^l_{n,r})$, no cero en todos lados, es llamado **puro** si

$$(T_pM \cdot \varphi) \cap (T_pM \cdot Im(Cl^0_r) \cdot \varphi)$$

es de dimensión n.

En términos de un marco local $(e_1, \ldots, e_r)$ de $P_{SO(r)}$, la definición se puede reescribir como sigue: para todo $X \in T_pM$ existen $Y_{i_1 i_2 \ldots i_{2s}} \in T_pM$ tales que

$$X \cdot \varphi = Y_{12} \cdot e_1 e_2 \cdot \varphi + Y_{13} \cdot e_1 e_3 \cdot \varphi + \ldots + Y_{i_1 i_2 \ldots i_s} e_{i_1} e_{i_2} \ldots e_{i_{2s}} \cdot \varphi + \ldots + Y_{1 \ldots r} e_1 e_2 \ldots e_r \cdot \varphi,$$

para r par, y

$X\cdot\varphi = Y_{12}\cdot e_1e_2\cdot\varphi + Y_{13}\cdot e_1e_3\cdot\varphi + \ldots + Y_{i_1i_2\ldots i_s}e_{i_1}e_{i_2}\ldots e_{i_{2s}}\cdot\varphi + \ldots + Y_{2\ldots r}e_2e_3\ldots e_r\cdot\varphi,$

si r es impar.

Con $e_{i_1} < e_{i_2} < \cdots < e_{i_{2s}}$.

Definición 2.3.2. Sea M una $Spin^r(n)$-variedad. Para una $l \in \mathbb{N}$ dada, un spinor $\varphi \in \Gamma(\Delta(M)^l_{n,r})$, no cero en todos lados, es llamado **spinor maximalmente transversal** si

$$\dim(T_pM \cdot Im(Cl^0_r) \cdot \varphi) = (2^r - 1)n.$$

Una vez más, en términos de un marco local, un spinor φ es maximalmente transversal si

$TM\cdot Im(Cl^0_r)\cdot\varphi = TM\cdot e_1e_2\cdot\varphi \oplus TM\cdot e_1e_3\cdot\varphi \oplus \ldots \oplus TM\cdot e_{i_1}e_{i_2}\cdots e_{i_{2s}}\cdot\varphi \oplus \ldots \oplus TM\cdot e_1e_2\cdots e_r\cdot\varphi,$

si r es par, y

$TM\cdot Im(Cl^0_r)\cdot\varphi = TM\cdot e_1e_2\cdot\varphi \oplus TM\cdot e_1e_3\cdot\varphi \oplus \ldots \oplus TM\cdot e_{i_1}e_{i_2}\cdots e_{i_{2s}}\cdot\varphi \oplus \ldots \oplus TM\cdot e_2e_3\cdots e_r\cdot\varphi,$

si r es impar.

2.3.1. Consecuencias geométricas de la existencia de spinors puros y spinors maximalmente transversales

A continuación expondremos resultado geométricos obtenidos de la existencia de spinors puros y maximalmente transversales para los casos $r = 2, 3, 7$.

Caso $Spin^2(n)$

Proposición 2.3.3. *Si una $Spin^2(n)$-variedad M admite un spinor puro $\varphi \in \Gamma(\Delta(M)^l_{n,2})$ para alguna $l \in \mathbb{N}$, entonces M admite una estructura casi-compleja ortogonal J. Es decir, M es una variedad casi-hermitiana.*

Demostración. Supongamos que (M, g) es una $Spin^2(n)$-variedad que tiene un spinor puro φ. Por definición, para todo $X \in T_pM$ existe un $Y \in T_pM$ tal que

$$X \cdot \varphi = Y \cdot e_1e_2 \cdot \varphi \tag{2.8}$$

Definimos $J(X) = Y$, en el punto $p \in M$. Si tomamos otra base $\{e'_1, e'_2\}$ de $\mathbb{R}^2$, con la misma orientación que la de $\{e_1, e_2\}$, entonces $e_1 \cdot e_2$ produce el mismo elemento que $e'_1 \cdot e'_2$, por lo que el endomorfismo J está globalmente definido. Notemos que J es una estructura casi-compleja: si multiplicamos la ecuación **??** por $-e_1e_2$ obtenemos

$$X \cdot \varphi = J(X) \cdot e_1 e_2 \cdot \varphi.$$

Por otro lado, si sustituimos a X por $J(X)$ en **??**, tenemos

$$J(X) \cdot \varphi = J(J(X)) \cdot \varphi$$

$$J(X) \cdot \varphi = -X \cdot e_1 e_2 \cdot \varphi,$$

de tal modo que $J(J(X)) = -X$. Más aún, J es ortogonal ya que

$$X \cdot X \cdot \varphi = X \cdot J(X) \cdot e_1 e_2 \cdot \varphi$$

y

$$J(X) \cdot J(X) \cdot \varphi = -J(X) \cdot X \cdot e_1 e_2 \cdot \varphi.$$

Si a esta última ecuación le restamos la penúltima obtenemos

$$\big((-|X|^2 + |J(X)|^2) + (2g(X, J(X))) \cdot e_1 e_2 \cdot\big) \cdot \varphi = 0,$$

y si multiplicamos por la izquierda por el elemento $\big((-|X|^2 + |J(X)|^2) - (2g(X, J(X))) \cdot e_1 e_2\big)$ nos queda:

$$\big((-|X|^2 + |J(X)|^2)^2 + (2g(X, J(X)))^2\big) \cdot \varphi = 0.$$

Dado que $\varphi \neq 0$ y de la arbitrariedad de X, concluimos que

$$\begin{aligned} |X|^2 &= |J(X)|^2, \\ g(X, J(X)) &= 0; \end{aligned}$$

por lo tanto (M, J, g) es una variedad casi-hermitiana. □

Caso $Spin^3(n)$

En el caso de una $Spin^3(n)$-variedad tenemos el siguiente resultado:

Proposición 2.3.4. *Si una $Spin^3(n)$-variedad M admite un spinor puro maximalmente transversal $\varphi \in \Gamma(\Delta(M)^l_{n,3})$ para alguna $l \in \mathbb{N}$, entonces M admite una estructura casi-cuaterniónica.*

Demostración. Dado que M admite un spinor maximalmente transversal $\varphi \in \Gamma(\Delta(M)^l_{n,3})$, para todo $X \in T_pM$ existen vectores, únicos, $Y_1, Y_2, Y_3 \in T_pM$ tal que

$$X \cdot \varphi = Y_1 \cdot e_1 e_2 \cdot \varphi \oplus Y_2 \cdot e_1 e_3 \cdot \varphi \oplus Y_3 \cdot e_2 e_3 \cdot \varphi. \tag{2.9}$$

Por consiguiente, podemos definir, de manera local, estructuras casi complejas ortogonales, J_{12}, J_{13} y J_{23} por $J_{12}(X) = Y_1$, $J_{13}(X) = Y_2$, $J_{23}(X) = Y_3$. Primero veremos que el subhaz $\mathfrak{G} \in \mathrm{End}(M)$, generado por estas tres estructuras está bien definido. Dada otro marco (e'_1, e'_2, e'_3) de $\mathbb{R}^3$ tal que,

$$\begin{aligned}
e'_1 &= a_{11}e_1 + a_{12}e_2 + a_{13}e_3, \\
e'_2 &= a_{21}e_1 + a_{22}e_2 + a_{23}e_3, \\
e'_3 &= a_{31}e_1 + a_{32}e_2 + a_{33}e_3,
\end{aligned}$$

con $A = (a)_{ij} \in SO(3)$, tenemos

$$\begin{aligned}
e'_1e'_2 &= Ae_1 \cdot Ae_2 \\
&= (a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21})e_1e_2 + (a_{11}a_{23} - a_{13}a_{21})e_1e_3 + (a_{12}a_{23} - a_{13}a_{22})e_2e_3, \\
e'_1e'_3 &= Ae_1 \cdot Ae_3 \\
&= (a_{11}a_{32} - a_{12}a_{31})e_1e_2 + (a_{11}a_{33} - a_{13}a_{31})e_1e_3 + (a_{12}a_{33} - a_{13}a_{32})e_2e_3, \\
e'_2e'_3 &= Ae_2 \cdot Ae_3 \\
&= (a_{21}a_{32} - a_{22}a_{31})e_1e_2 + (a_{21}a_{33} - a_{23}a_{31})e_1e_3 + (a_{22}a_{33} - a_{23}a_{32})e_2e_3.
\end{aligned}$$

Definimos

$$\begin{aligned}
b_{11} &= a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}, \\
b_{12} &= a_{11}a_{23} - a_{13}a_{21}, \\
b_{13} &= a_{12}a_{23} - a_{13}a_{22}, \\
b_{21} &= a_{11}a_{32} - a_{12}a_{31}, \\
b_{22} &= a_{11}a_{33} - a_{13}a_{31}, \\
b_{23} &= a_{12}a_{33} - a_{13}a_{32}, \\
b_{31} &= a_{21}a_{32} - a_{22}a_{31}, \\
b_{32} &= a_{21}a_{33} - a_{23}a_{31}, \\
b_{33} &= a_{22}a_{33} - a_{23}a_{32},
\end{aligned}$$

de tal modo que la matriz $B = (b)_{ij}$ pertenece al grupo $SO(3)$. El marco (e'_1, e'_2, e'_3) nos determina las estructuras $J'_{12}, J'_{13}, J'_{23}$, y en términos de estas estructuras, $X \cdot \varphi$ se expresa como:

$$X \cdot \varphi = J'_{12}(X) \cdot e'_1e'_2 \cdot \varphi + J'_{13}(X) \cdot e'_1e'_3 \cdot \varphi + J'_{23}(X) \cdot e'_2e'_3 \cdot \varphi.$$

Sustituyendo la notación previa,

$$\begin{aligned}
X \cdot \varphi &= J'_{12}(X) \cdot e'_1e'_2 \cdot \varphi + J'_{13}(X) \cdot e'_1e'_3 \cdot \varphi + J'_{23}(X) \cdot e'_2e'_3 \cdot \varphi \\
&= J'_{12}(X)(b_{11}e_1e_2 + b_{12}e_1e_3 + b_{13}e_2e_3) \cdot \varphi \\
&\quad + J'_{13}(X)(b_{21}e_1e_2 + b_{22}e_1e_3 + b_{23}e_2e_3) \cdot \varphi \\
&\quad + J'_{23}(X)(b_{31}e_1e_2 + b_{32}e_1e_3 + b_{33}e_2e_3) \cdot \varphi,
\end{aligned}$$

y reagrupando llegamos a

$$\begin{aligned} X \cdot \varphi &= (b_{11} J'_{12}(X) + b_{21} J'_{13}(X) + b_{31} J'_{23}(X)) \cdot e_1 e_2 \cdot \varphi \\ &\quad + (b_{12} J'_{12}(X) + b_{22} J'_{13}(X) + b_{32} J'_{23}(X)) \cdot e_1 e_3 \cdot \varphi \\ &\quad + (b_{13} J'_{12}(X) + b_{23} J'_{13}(X) + b_{33} J'_{23}(X)) \cdot e_2 e_3 \cdot \varphi. \end{aligned}$$

Por otro lado, $X \cdot \varphi = J_{12}(X) \cdot e_1 e_2 \cdot \varphi + J_{13}(X) \cdot e_1 e_3 \cdot \varphi + J_{23}(X) \cdot e_2 e_3 \cdot \varphi$, por lo tanto,

$$\begin{aligned} J_{12} &= b_{11} J'_{12} + b_{21} J'_{13} + b_{31} J'_{23}, \\ J_{13} &= b_{12} J'_{12} + b_{22} J'_{13} + b_{32} J'_{23}, \\ J_{23} &= b_{13} J'_{12} + b_{23} J'_{13} + b_{33} J'_{23}, \end{aligned}$$

y concluimos que las ternas están relacionadas por la matriz ortogonal B^T y, de aquí, el subhaz $\mathfrak{G}$ está bien definido. Ahora veremos que estas estructuras forman una estructura casi-cuaterniónica. Para esto procedemos de la siguiente manera: la ecuación (**??**) es válida para $J_{12}(X)$, esto es,

$$J_{12}(X) \cdot \varphi = J_{12}(J_{12}(X)) \cdot e_1 e_2 \cdot \varphi + J_{13}(J_{12}(X)) \cdot e_1 e_3 \cdot \varphi + J_{23}(J_{12}(X)) \cdot e_2 e_3 \cdot \varphi,$$

por otro lado, si despejamos de (**??**) tenemos

$$J_{12}(X) \cdot \varphi = (-X) \cdot e_1 e_2 \cdot \varphi + (-J_{23}(X)) \cdot e_1 e_3 \cdot \varphi + J_{13}(X) \cdot e_2 e_3 \cdot \varphi.$$

Como la expresión para $J_{12}(X)$ es única, tenemos $J_{12}(J_{12}(X)) = -X$, $J_{13}(J_{12}(X)) = -J_{23}(X)$ y $J_{23}(J_{12}(X)) = J_{13}(X)$. Procediendo de manera análoga para $J_{13}(X)$ y $J_{23}(X)$ llegamos a que J_{12}, J_{13} y J_{23} son tres estructuras casi-complejas que satisfacen las relaciones de los cuaternios. Así, φ determina una estructura casi-cuaterniónica en M. □

Caso $Spin^7(n)$

Ahora analizaremos el caso de un spinor maximalmente transversal sobre una $Spin^7(n)$-variedad.

Proposición 2.3.5. *Si una $Spin^7(n)$-variedad M admite un spinor puro maximalmente transversal $\varphi \in \Gamma(\Delta(M)^l_{n,7})$ para alguna $l \in \mathbb{N}$, entonces*

- *φ determina un encaje de Cl^0_7 en $\mathrm{End}(TM)$ tal que TM es una representación no trivial y sin sumandos triviales.*
- *$n \equiv 0$ (mod 8).*
- *Existe una copia del álgebra de Lie $\mathfrak{spin}(7)$ encajada en $\mathrm{End}(TM)$ de tal modo que TM se descompone en la suma de un número finito de copias de $\mathbb{R}^8$ como representación irreducible de $\mathfrak{spin}(7)$.*

Demostración. La existencia de un spinor puro maximalmente transversal $\varphi \in \Gamma(\Delta^l_{n,7})$ implica, usando un marco local $(e_1,\ldots,e_7)$ de $P_{SO(7)}$, la existencia de vectores $Y_{12},...,Y_{234567} \in T_pM$, determinados de manera única, tal que

$$\begin{aligned} X\cdot\varphi &= \sum_{1\leq i_1<i_2\leq 7} Y_{i_1i_2}\cdot e_{i_1i_2}\cdot\varphi + \sum_{1\leq j_1<j_2<j_3<j_4\leq 7} Y_{j_1j_2j_3j_4}\cdot e_{j_1j_2j_3j_4}\cdot\varphi \\ &+ \sum_{1\leq k_1<k_2<k_3<k_4<k_5<k_6\leq 7} Y_{k_1k_2k_3k_4k_5k_6}\cdot e_{k_1k_2k_3k_4k_5k_6}\cdot\varphi, \end{aligned} \tag{2.10}$$

donde hemos denotado a $e_{i_1}e_{i_2}$ por $e_{i_1i_2}$, etc. Dada la existencia y unicidad de los elementos $Y_{12},...,Y_{234567} \in T_pM$, podemos definir endomorfismos de manera local, por $J_{i_1i_2\ldots i_s}(X) = Y_{i_1i_2\ldots i_s}$, para $s = 2,4,6$. Estos endomorfismos generan un álgebra que es isomorfa al álgebra Cl^0_7. Sustituyendo $J_{i_1i_2\ldots i_s}(X) = Y_{i_1i_2\ldots i_s}$ en (**??**)

$$\begin{aligned} X\cdot\varphi &= \sum_{1\leq i_1<i_2\leq 7} J_{i_1i_2}(X)\cdot e_{i_1i_2}\cdot\varphi \\ &+ \sum_{1\leq j_1<j_2<j_3<j_4\leq 7} J_{j_1j_2j_3j_4}(X)\cdot e_{j_1j_2j_3j_4}\cdot\varphi \\ &+ \sum_{1\leq k_1<k_2<k_3<k_4<k_5<k_6\leq 7} J_{k_1k_2k_3k_4k_5k_6}(X)\cdot e_{k_1k_2k_3k_4k_5k_6}\cdot\varphi. \end{aligned} \tag{2.11}$$

y procediendo de manera análoga a los casos $r = 2,3$, reemplazamos X por $J_{12}(X)$, para obtener

$$\begin{aligned} J_{12}(X)\cdot\varphi &= \sum_{1\leq i_1<i_2\leq 7} J_{i_1i_2}(J_{12}(X))\cdot e_{i_1i_2}\cdot\varphi \\ &+ \sum_{1\leq j_1<j_2<j_3<j_4\leq 7} J_{j_1j_2j_3j_4}(J_{12}(X))\cdot e_{j_1j_2j_3j_4}\cdot\varphi \\ &+ \sum_{1\leq k_1<k_2<k_3<k_4<k_5<k_6\leq 7} J_{k_1k_2k_3k_4k_5k_6}(J_{12}(X))\cdot e_{k_1k_2k_3k_4k_5k_6}\cdot\varphi. \end{aligned}$$

De este modo, TM es un espacio de representación de Cl^0_7 sin sumandos triviales debido a que los endomorfismos J_{ij} son estructuras casi-complejas (locales). Recordemos que $Cl^0_7 \cong Cl_6 \cong \mathrm{End}(\mathbb{R}^8)$ y que, por ser (isomorfa a) un álgebra de matrices, solo tiene una representación real irreducible, que es $\mathbb{R}^8$. Por tanto, TM se descompone como una suma de copias de $\mathbb{R}^8$.

Por otra parte, Cl^0_7 contiene una copia de

$$\mathfrak{spin}(7) = span\{e_ie_j | i<j\},$$

que se manda isomorfamente a

$$\mathfrak{spin}(7) = span\{J_{ij} | i<j\} \subset \mathrm{End}(TM),$$

donde consideramos el corchete

$$[J_{ij}, J_{kl}] = J_{ij} \circ J_{kl} - J_{kl} \circ J_{ij}.$$

Es fácil verificar que

$$\begin{array}{rcl} J_{ij} & = & -J_{ji}, \\ J_{ij}^2 & = & -Id \quad \text{donde } i < j, \\ J_{ij} \circ J_{ik} & = & J_{jk} \quad \text{para } i, j, k \text{ mutuamente distintos,} \\ J_{ij} \circ J_{kl} & = & J_{kl} \circ J_{ij} \quad \text{para } i, j, k, l \text{ mutuamente distintos.} \end{array}$$

De estos resultados se pueden calcular los conmutadores y las constantes de estructura del álgebra, y verificar el isomorfismo. □

2.4. Spinors paralelos y holonomía

Usando la conexión de Levi-Civita de M y una conexión dada en $P_{SO(r)}$, se puede definir una conexión y una derivada covariante ∇ en el haz spinorial torcido $\Delta_{n,r}^l$, con fibra $\Delta_n \otimes \Delta_r^{\otimes l}$, $l \in \mathbb{N}$.

Definición 2.4.1. Sea M una $Spin^r(n)$-variedad y $\Delta_{n,r}^l$ un haz spinorial torcido sobre M con la conexión descrita anteriormente. Decimos que un spinor $\varphi \in \Gamma(\Delta_{n,r}^l)$ es **paralelo** si

$$\nabla_X \varphi = 0$$

para todo $X \in \Gamma(TM)$.

Caso $Spin^2(n)$

Proposición 2.4.2. *Si M es una $Spin^2(n)$-variedad que admite un spinor puro maximalmente transversal y paralelo $\varphi \in \Gamma(\Delta_{n,2}^l)$ para alguna $l \in \mathbb{Z}$, entonces la estructura casi-compleja J_{12} inducida por φ es paralela, es decir M es una variedad kaehler.*

Demostración. Sea $\varphi \in \Gamma(\Delta^{2,l})$ un spinor puro maximalmente transversal y paralelo. Del resultado **??** sabemos que existe la estructura casi-compleja J_{12} determinada por la ecuación

$$X \cdot \varphi = Y \cdot e_1 e_2 \cdot \varphi, \tag{2.12}$$

para todo $X \in \Gamma(TM)$, donde (e_1, e_2) es un marco de $\mathbb{R}^2$. Derivando (**??**) con respecto a $Z \in \Gamma(TM)$ tenemos

$$\nabla_Z X \cdot \varphi + X \cdot \nabla_Z \varphi = \nabla_Z(J_{12}(X)) \cdot e_1 e_2 \cdot \varphi + J_{12}(X) \cdot \nabla_Z(e_1 e_2) \cdot \varphi + J_{12}(X) \cdot e_1 e_2 \cdot \nabla_Z \varphi.$$

De la definición de derivada covariante dada en (**??**) se sigue

$$\begin{aligned} \nabla(e_1 e_2) &= (\nabla e_1) e_2 + e_1(\nabla e_2) \\ &= (\omega_{11} \otimes e_1 + \omega_{21} \otimes e_2) e_2 + e_1(\omega_{12} \otimes e_1 + \omega_{22} \otimes e_2) \\ &= \omega_{12}(e_2 e_2 - e_1 e_1) \\ &= 0, \end{aligned} \tag{2.13}$$

ya que $\omega_{ij} = -\omega_{ji}$. En consecuencia,

$$\nabla_Z X \cdot \varphi = \nabla_Z(J_{12}(X)) \cdot e_1 e_2 \cdot \varphi,$$

ya que φ es paralelo.

Ahora, en la ecuación (**??**) sustituimos a X por $\nabla_Z X$ y obtenemos

$$\nabla_Z X \cdot \varphi = J_{12}(\nabla_Z X) \cdot e_1 e_2 \cdot \varphi.$$

Restando estas dos últimas ecuaciones obtenemos

$$0 = (\nabla_Z(J_{12}(X)) - J_{12}(\nabla_Z X)) \cdot e_1 e_2 \cdot \varphi.$$

Multiplicando esta ecuación por $-e_1 e_2$ y por $(\nabla_Z(J_{12}(X)) - J_{12}(\nabla_Z X))$ obtenemos

$$|(\nabla_Z J_{12})(X)|^2 \cdot \varphi = 0.$$

Como φ es diferente de cero,

$$|(\nabla_Z J_{12})(X)| = 0.$$

Como esto es válido para todo $X \in \Gamma(TM)$ concluimos que

$$\nabla_Z J_{12} = 0$$

para todo $Z \in \Gamma(TM)$. □

Caso $Spin^3(n)$

Proposición 2.4.3. *Si M es una $Spin^3(n)$-variedad que admite un spinor puro maximalmente transversal y paralelo $\varphi \in \Gamma(\Delta^l_{n,3})$ para alguna $l \in \mathbb{N}$, entonces el subhaz de* $\mathrm{End}(TM)$ *generado por las estructuras casi-complejas locales deteminadas por φ es paralelo.*

Demostración. Sea $\varphi \in \Gamma(\Delta^l_{n,3})$ un spinor puro maximalmente transversal y paralelo. Del resultado **??** sabemos que existen las tres estructuras casi-complejas $\{J_{ij}\}$, tal que se satisface la identidad

$$X \cdot \psi = J_{12}(X) \cdot e_1e_2 \cdot \psi + J_{13}(X) \cdot e_1e_3 \cdot \psi + J_{23}(X) \cdot e_2e_3 \cdot \psi. \tag{2.14}$$

En este caso, de la definición de derivada covariante dada en (**??**) se sigue

$$\begin{aligned} \nabla(e_1e_2) &= (\nabla e_1)e_2 + e_1(\nabla e_2) \\ &= (\omega_{11} \otimes e_1 + \omega_{21} \otimes e_2 + \omega_{31} \otimes e_3)e_2 + e_1(\omega_{12} \otimes e_1 + \omega_{22} \otimes e_2 + \omega_{32}e_3) \\ &= -\omega_{13}e_2e_3 + \omega_{23}e_1e_3, \end{aligned} \tag{2.15}$$

ya que $\omega_{ij} = -\omega_{ji}$. De manera similar

$$\begin{aligned} \nabla(e_1e_3) &= -\omega_{12}e_2e_3 + \omega_{23}e_1e_2 \\ \nabla(e_2e_3) &= -\omega_{12}e_1e_3 + \omega_{13}e_1e_2. \end{aligned}$$

Tomamos la derivada covariante de $X \cdot \varphi$ con respecto a $Z \in \Gamma(TM)$

$$\begin{aligned} \nabla_Z X \cdot \varphi + X \cdot \nabla_Z\varphi &= \nabla_Z(J_{12}(X)) \cdot e_1e_2 \cdot \varphi + J_{12}(X) \cdot \nabla_Z(e_1e_2) \cdot \varphi + J_{12}(X) \cdot e_1e_2 \cdot \nabla_Z\varphi \\ &+ \nabla_Z(J_{13}(X)) \cdot e_1e_3 \cdot \varphi + J_{13}(X) \cdot \nabla_Z(e_1e_3) \cdot \varphi + J_{13}(X) \cdot e_1e_3 \cdot \nabla_Z\varphi \\ &+ \nabla_Z(J_{23}(X)) \cdot e_2e_3 \cdot \varphi + J_{23}(X) \cdot \nabla_Z(e_2e_3) \cdot \varphi + J_{23}(X) \cdot e_2e_3 \cdot \nabla_Z\varphi. \end{aligned}$$

Utilizando que φ es paralelo obtenemos

$$\begin{aligned} \nabla_Z X \cdot \varphi &= \nabla_Z(J_{12}(X)) \cdot e_1e_2 \cdot \varphi + J_{12}(X) \cdot \nabla_Z(e_1e_2) \cdot \varphi \\ &+ \nabla_Z(J_{13}(X)) \cdot e_1e_3 \cdot \varphi + J_{13}(X) \cdot \nabla_Z(e_1e_3) \cdot \varphi \\ &+ \nabla_Z(J_{23}(X)) \cdot e_2e_3 \cdot \varphi + J_{23}(X) \cdot \nabla_Z(e_2e_3) \cdot \varphi. \end{aligned}$$

Sustituyendo lo calculado para las derivadas covariantes de e_ie_j

$$\begin{aligned} \nabla_Z X \cdot \varphi &= [\nabla_Z(J_{12}(X)) - \omega_{23}(Z)J_{13}(X) + \omega_{13}(Z)J_{23}(X)] \cdot e_1e_2 \cdot \varphi \\ &+ [\nabla_Z(J_{13}(X)) + \omega_{23}(Z)J_{12}(X) - \omega_{12}(Z)J_{23}(X)] \cdot e_1e_3 \cdot \varphi \\ &+ [\nabla_Z(J_{23}(X)) - \omega_{13}(Z)J_{12}(X) + \omega_{12}(Z)J_{13}(X)] \cdot e_2e_3 \cdot \varphi. \end{aligned}$$

Si reemplazamos X por ∇X en la ecuación (**??**) obtenemos le ecuación

$$\nabla_Z X \cdot \varphi = J_{12}(\nabla_Z X) \cdot e_1e_2 \cdot \varphi + J_{13}(\nabla_Z X) \cdot e_1e_3 \cdot \varphi + J_{23}(\nabla_Z X) \cdot e_2e_3 \cdot \varphi,$$

Si restamos estas dos últimas ecuaciones nos queda

$$\begin{aligned} 0 &= [\nabla_Z(J_{12}(X)) - J_{12}(\nabla_Z X) - \omega_{23}(Z)J_{13}(X) + \omega_{13}(Z)J_{23}(X)] \cdot e_1e_2 \cdot \varphi, \\ &+ [\nabla_Z(J_{13}(X)) - J_{13}(\nabla_Z X) + \omega_{23}(Z)J_{12}(X) - \omega_{12}(Z)J_{23}(X)] \cdot e_1e_3 \cdot \varphi, \\ &+ [\nabla_Z(J_{23}(X)) - J_{23}(\nabla_Z X) - \omega_{13}(Z)J_{12}(X) + \omega_{12}(Z)J_{13}(X)] \cdot e_2e_3 \cdot \varphi. \end{aligned}$$

Dado que $(\nabla_Z J_{ij})(X) = \nabla_Z(J_{ij}(X)) - J_{ij}(\nabla_Z X)$, y que φ es un spinor maximalmente transversal, llegamos a

$$\begin{aligned} \nabla J_{12} &= \omega_{23} \otimes J_{13} - \omega_{13} \otimes J_{23}, \\ \nabla J_{13} &= -\omega_{23} \otimes J_{12} + \omega_{12} \otimes J_{23}, \\ \nabla J_{23} &= \omega_{13} \otimes J_{12} - \omega_{12} \otimes J_{13}. \end{aligned} \tag{2.16}$$

Por tanto, el subhaz de $\mathrm{End}(TM)$ generado $\{J_{12}, J_{13}, J_{23}\}$ es paralelo. □

Proposición 2.4.4. *Si M es una $Spin^3(n)$-variedad que admite un spinor puro maximalmente transversal paralelo $\varphi \in \Gamma(\Delta^l_{n,3})$, para alguna $l \in \mathbb{N}$, entonces M admite una métrica g tal que (M, g) es una variedad cuaterniónica kaehler.*

Demostración. Sea g la métrica original en M y ∇ su conexión de Levi-Civita. Definimos la métrica g_1

$$g_1(X,Y) = g(X,Y) + g(J_{12}(X), J_{12}(Y)) + g(J_{13}(X), J_{13}(Y)) + g(J_{23}(X), J_{23}(Y)),$$

donde J_{ij} son las estructuras casi-complejas determinadas por φ. Utilizando la fórmula de Koszul tenemos que para X, Y, $Z \in \Gamma(TM)$, la conexión de Levi-Civita $\bar{\nabla}$ de g_1 satisface

$$\begin{aligned} 2g_1(\bar{\nabla}_X Y, Z) &= Xg_1(Y,Z) + Yg_1(X,Z) - Zg_1(X,Y) \\ &\quad + g_1([X,Y],Z) - g_1([X,Z],Y) - g_1([Y,Z],X) \\ &= Xg(Y,Z) + Yg(X,Z) - Zg(X,Y) \\ &\quad + g([X,Y],Z) - g([X,Z],Y) - g([Y,Z],X) \\ &\quad + \sum_{i<j} [Xg(J_{ij}(Y), J_{ij}(Z)) + Yg(J_{ij}(X), J_{ij}(Z)) - Zg(J_{ij}(X), J_{ij}(Y)) \\ &\quad + g(J_{ij}([X,Y]), J_{ij}(Z)) - g(J_{ij}([X,Z]), J_{ij}(Y)) - g(J_{ij}([Y,Z]), J_{ij}(X))] \\ &= 2g(\nabla_X Y, Z) \\ &\quad + \sum_{i<j} [g((\nabla_X J_{ij})(Y) + \nabla_Y J_{ij})(X) + 2J_{ij}\nabla_X Y, J_{ij}(Z)) \\ &\quad + g((\nabla_X J_{ij})(Z) - \nabla_Z J_{ij})(X), J_{ij}(Y)) \\ &\quad + g((\nabla_Y J_{ij})(Z) - \nabla_Z J_{ij})(Y), J_{ij}(X))]. \end{aligned}$$

Sustituyendo los valores obtenidos en (**??**) para ∇J_{ij} llegamos a

$$\begin{aligned} 2g_1(\bar{\nabla}_X Y, Z) &= 2g(\nabla_X Y, Z) + 2\sum_{i<j} g(J_{ij}(\nabla_X Y), J_{ij} Z) \\ &= 2g_1(\nabla_X Y, Z), \end{aligned}$$

para todo X, Y, $Z \in \Gamma(TM)$. Por lo tanto, g_1 tiene la misma conexión de Levi-Civita que g y, por tanto, los mismos objetos paralelos.

Así, la estructuras casi-complejas locales J_{ij} son ortogonales, y el 3-subhaz de endomorfismos generado por ellas es paralelo para la conexión de Levi-Civita de g_1, es decir, (M, g_1) es cuaterniónica kaehler. □

Teorema 2.4.5. *Si M es una $Spin^3(4n)$-variedad con métrica g que admite un spinor maximalmente transversal paralelo $\varphi \in \Gamma(\Delta^l_{n,3})$, para alguna $l \in \mathbb{N}$, entonces la métrica original de M es homotética a la métrica promediada sobre la estructura cuaterniónica.*

Demostración. Denotemos a la métrica original por g y a la métrica promediada por g_1. Sabemos que g y g_1 comparten la misma conexión de Levi-Civita y que son paralelas con respecto a ella. Por tanto, consideremos a g y g_1 como tensores de tipo $(1, 1)$

$$g, g_1 \colon TM \longrightarrow T^*M$$

de tal modo que

$$G = g_1^{-1} \circ g \colon TM \longrightarrow TM$$

es un automorfismo paralelo de TM con respecto a la conexión de Levi-Civita común. Por tanto, G es preservado por el grupo de holonomía de (M, g_1) que sabemos esta contenido en $Sp(n) \cdot Sp(1) \subset SO(4n)$. Ahora, en un punto $p \in M$, $Sp(n) \cdot Sp(1)$ se representa irreduciblemente en $T_pM \cong \mathbb{R}^{4n}$ y, por el lema de Schur, el automorfismo G debe ser un múltiplo de la identidad o idéntincamente cero. La segunda posibilidad no puede ocurrir dado que G es automorfismo. □

Caso $Spin^7(n)$

Proposición 2.4.6. *Si M es una $Spin^7(n)$-variedad que admite un spinor puro maximalmente transversal paralelo $\varphi \in \Gamma(\Delta^l_{n,7})$, para alguna $l \in \mathbb{N}$, entonces el subhaz de* $\mathrm{End}(TM)$ *generado por las estructuras casi complejas $\{J_{ij}\}$ determinadas por φ es un subhaz paralelo.*

Demostración. Tenemos que

$$\nabla e_k = \sum_j \omega_{kj} e_j,$$

donde ω_{ij} son 1-formas que vienen de la 1-forma de conexión, por tanto satisfacen $\omega_{ij} = -\omega_{ji}$, de tal modo que

$$\begin{aligned} \nabla(e_k e_l) &= \nabla(e_k)e_l + e_k \nabla(e_l) \\ &= (\sum_i \omega_{ki} e_i) e_l + e_k (\sum_j \omega_{lj} e_j). \end{aligned} \tag{2.17}$$

La existencia de φ nos asegura la existencia de las estructuras casi-complejas locales $\{J_{ij}\}$ que satisfacen

$$X \cdot \varphi = \sum_{1 \leq i_1 < i_2 \leq 7} J_{i_1 i_2}(X) \cdot e_{i_1 i_2} \cdot \varphi + \sum_{1 \leq j_1 < j_2 < j_3 < j_4 \leq 7} J_{j_1 j_2 j_3 j_4}(X) \cdot e_{j_1 j_2 j_3 j_4} \cdot \varphi$$
$$+ \sum_{1 \leq k_1 < k_2 < k_3 < k_4 < k_5 < k_6 \leq 7} J_{k_1 k_2 k_3 k_4 k_5 k_6}(X) \cdot e_{k_1 k_2 k_3 k_4 k_5 k_6} \cdot \varphi.$$

Derivando esta ecuación con respecto a $Z \in \Gamma(TM)$ obtenemos:

$$\begin{aligned}
\nabla_Z(X) \cdot \varphi + X \cdot \nabla_Z \varphi \quad = \quad & \sum_{1 \leq i_1 < i_2 \leq 7} \nabla_Z J_{i_1 i_2}(X) \cdot e_{i_1 i_2} \cdot \varphi \\
+ \quad & \sum_{1 \leq i_1 < i_2 \leq 7} J_{i_1 i_2}(X) \cdot \nabla_Z(e_{i_1 i_2}) \cdot \varphi \\
+ \quad & \sum_{1 \leq i_1 < i_2 \leq 7} J_{i_1 i_2}(X) \cdot e_{i_1 i_2} \cdot \nabla_Z \varphi \\
+ \quad & \sum_{1 \leq j_1 < j_2 < j_3 < j_4 \leq 7} \nabla_Z J_{j_1 j_2 j_3 j_4}(X) \cdot e_{j_1 j_2 j_3 j_4} \cdot \varphi \\
+ \quad & \sum_{1 \leq j_1 < j_2 < j_3 < j_4 \leq 7} J_{j_1 j_2 j_3 j_4}(X) \cdot \nabla_Z(e_{j_1 j_2 j_3 j_4}) \cdot \varphi \\
+ \quad & \sum_{1 \leq j_1 < j_2 < j_3 < j_4 \leq 7} J_{j_1 j_2 j_3 j_4}(X) \cdot e_{j_1 j_2 j_3 j_4} \cdot \nabla_Z \varphi \\
+ \quad & \sum_{1 \leq k_1 < k_2 < k_3 < k_4 < k_5 < k_6 \leq 7} \nabla_Z J_{k_1 k_2 k_3 k_4 k_5 k_6}(X) \cdot e_{k_1 k_2 k_3 k_4 k_5 k_6} \cdot \varphi \\
+ \quad & \sum_{1 \leq k_1 < k_2 < k_3 < k_4 < k_5 < k_6 \leq 7} J_{k_1 k_2 k_3 k_4 k_5 k_6}(X) \cdot \nabla_Z(e_{k_1 k_2 k_3 k_4 k_5 k_6}) \cdot \varphi \\
+ \quad & \sum_{1 \leq k_1 < k_2 < k_3 < k_4 < k_5 < k_6 \leq 7} J_{k_1 k_2 k_3 k_4 k_5 k_6}(X) \cdot e_{k_1 k_2 k_3 k_4 k_5 k_6} \cdot \nabla_Z \varphi,
\end{aligned}$$

que se simplifica a

$$\begin{aligned}
\nabla_Z X \cdot \varphi \quad = \quad & \sum_{1 \leq i_1 < i_2 \leq 7} \nabla(J_{i_1 i_2}(X)) \cdot e_{i_1 i_2} \cdot \varphi \\
+ \quad & \sum_{1 \leq i_1 < i_2 \leq 7} J_{i_1 i_2}(X) \cdot \nabla_Z(e_{i_1 i_2}) \cdot \varphi \\
+ \quad & \sum_{1 \leq j_1 < j_2 < j_3 < j_4 \leq 7} \nabla_Z(J_{j_1 j_2 j_3 j_4}(X)) \cdot e_{j_1 j_2 j_3 j_4} \cdot \varphi \\
+ \quad & \sum_{1 \leq j_1 < j_2 < j_3 < j_4 \leq 7} J_{j_1 j_2 j_3 j_4}(X) \cdot \nabla_Z(e_{j_1 j_2 j_3 j_4}) \cdot \varphi \qquad (2.18) \\
+ \quad & \sum_{1 \leq k_1 < k_2 < k_3 < k_4 < k_5 < k_6 \leq 7} \nabla_Z(J_{k_1 k_2 k_3 k_4 k_5 k_6}(X)) \cdot e_{k_1 k_2 k_3 k_4 k_5 k_6} \cdot \varphi \\
+ \quad & \sum_{1 \leq k_1 < k_2 < k_3 < k_4 < k_5 < k_6 \leq 7} J_{k_1 k_2 k_3 k_4 k_5 k_6}(X) \cdot \nabla_Z(e_{k_1 k_2 k_3 k_4 k_5 k_6}) \cdot \varphi,
\end{aligned}$$

de tal modo que

$$\begin{aligned}\nabla_Z X \cdot \varphi &= \sum_{1\leq i_1<i_2\leq 7} \nabla(J_{i_1i_2}(X)) \cdot e_{i_1i_2} \cdot \varphi \\ &+ \sum_{1\leq i_1<i_2\leq 7} \sum_{i=1}^{7} \omega_{i_1i}(Z) J_{i_1i_2} \cdot e_i e_{i_2} \cdot \varphi \\ &+ \sum_{1\leq i_1<i_2\leq 7} \sum_{i=1}^{7} \omega_{i_2i}(Z) J_{i_1i_2} \cdot e_{i_1} e_i \cdot \varphi \\ &+ \sum_{1\leq j_1<j_2<j_3<j_4\leq 7} \nabla_Z(J_{j_1j_2j_3j_4}(X)) \cdot e_{j_1j_2j_3j_4} \cdot \varphi \ldots\end{aligned}$$

Por otro lado, si en (**??**) sustituimos X por $\nabla_Z X$ tenemos

$$\begin{aligned}\nabla_Z X \cdot \varphi &= \sum_{1\leq i_1<i_2\leq 7} J_{i_1i_2}(\nabla_Z X) \cdot e_{i_1i_2} \cdot \varphi \\ &+ \sum_{1\leq j_1<j_2<j_3<j_4\leq 7} J_{j_1j_2j_3j_4}(\nabla_Z X) \cdot e_{j_1j_2j_3j_4} \cdot \varphi \qquad (2.19) \\ &+ \sum_{1\leq k_1<k_2<k_3<k_4<k_5<k_6\leq 7} J_{k_1k_2k_3k_4k_5k_6}(\nabla_Z X) \cdot e_{k_1k_2k_3k_4k_5k_6} \cdot \varphi.\end{aligned}$$

Al restar las últimas dos ecuaciones, de la pureza y de la transversalidad maximal de φ, los coeficientes vectoriales de cada término de la suma deben ser cero, particularmente el coeficiente vectorial de $e_k e_l \cdot \varphi$;

$$\begin{aligned}0 &= \nabla_Z(J_{kl}(X)) - J_{kl}(\nabla_Z X) + \sum_{i_1<l}\sum_{i=1}^{7} \omega_{i_1k}(Z) J_{i_1l}(X) + \sum_{k<i_2}\sum_{i=1}^{7} \omega_{i_2l}(Z) J_{ki_2}(X) \\ &= \nabla_Z(J_{kl})(X) + \sum_{i_1<l} \omega_{i_1k}(Z) J_{i_1l}(X) + \sum_{k<i_2} \omega_{i_2l}(Z) J_{ki_2}(X) \\ &= \nabla_Z(J_{kl})(X) + \sum_{i=1}^{7} (\omega_{ik}(Z) J_{il}(X) + \omega_{il}(Z) J_{ki}(X)). \qquad (2.20)\end{aligned}$$

Por lo tanto,

$$\nabla J_{kl} = -\sum_i (\omega_{ik} \otimes J_{il} + \omega_{il} \otimes J_{ki})$$

y concluimos que el subhaz generado por $\{J_{ij}\}$ es paralelo. □

Proposición 2.4.7. *Si M es una $Spin^7(n)$-variedad con métrica g que admite un spinor maximalmente transversal y paralelo $\varphi \in \Gamma(\Delta^l_{n,3})$ para alguna $l \in \mathbb{N}$, entonces M admite una métrica g_1 cuya conexión de Levi-Civita coincide con la de conexión de Levi-Civita de g.*

Demostración. Sea g la métrica original en M y ∇ su conexión de Levi-Civita. Definimos la métrica g_1

$$\begin{aligned} g_1(X,Y) &= g(X,Y) + \sum_{1\le i_1<i_2\le 7} g(J_{i_1i_2}(X), J_{i_1i_2}(Y)) \\ &+ \sum_{1\le j_1<j_2<j_3<j_4\le 7} g(J_{j_1j_2j_3j_4}(X), J_{j_1j_2j_3j_4}(Y)) \\ &+ \sum_{1\le k_1<k_2<k_3<k_4<k_5<k_6\le 7} g(J_{k_1k_2k_3k_4k_5k_6}(X), J_{k_1k_2k_3k_4k_5k_6}(Y)) \end{aligned}$$

donde $J_{i_1i_2\ldots 1_s}$, $s = 2,4,6$, son los endomorfismos determinados por φ. Así, la métrica es invariante bajo todos y cada uno de los endomorfismos y, en particular, las estructuras casi-complejas locales son ortogonales.

Como en el caso $Spin^3(n)$, utilizando la fórmula de Koszul, se puede demostrar que la conexión de Levi-Civita de g_1 coincide con la conexión de Levi-Civita de g. $\square$

Lema 2.4.8. *En una $Spin^7(n)$ variedad que admite un spinor puro maximalmente transversal $\varphi \in \Gamma(\Delta^l_{n,7})$ para alguna $l \in \mathbb{N}$, se pueden definir las 2-formas $\eta_{ij}(X,Y) = g_1(J_{ij}X,Y)$, donde g_1 es la nueva métrica en M de la proposición* **??**. *Las 2-formas satisfacen lo siguiente:*

- $\eta_{ij}(J_{kl}X, J_{kl}Y) = -\eta_{ij}(X,Y)$, *para $k = i$ y para i,j,l distintos dos a dos,*
- $\eta_{ij}(J_{kl}X, J_{kl}Y) = \eta_{ij}(X,Y)$, *para $k = j$ y para i,j,l distintos dos a dos,*
- $\eta_{ij}(J_{kl}X, J_{kl}Y) = -\eta_{ij}(X,Y)$, *para $l = i$ y para i,j,k distintos dos a dos,*
- $\eta_{ij}(J_{kl}X, J_{kl}Y) = \eta_{ij}(X,Y)$, *para $l = j$ y para i,j,k distintos dos a dos,*
- $\eta_{ij}(J_{kl}X, J_{kl}Y) = -\eta_{ij}(X,Y)$, *para $(i,j) = (k,l)$*
- $\eta_{ij}(J_{kl}X, J_{kl}Y) = \eta_{ij}(X,Y)$, *para i,j,k,l distintos dos a dos.*

Definición 2.4.9. En una $Spin^7(n)$ variedad que admite un spinor puro maximalmente transversal $\varphi \in \Gamma(\Delta(^l_{n,7}))$ para alguna $l \in \mathbb{N}$, definimos la 4-***forma fundamental*** Ω por

$$\Omega = \sum_{i<j} \eta_{ij} \wedge \eta_{ij}.$$

En el siguiente resultado mostramos algunas propiedades de Ω.

Lema 2.4.10. *Si M es una $Spin^7(n)$-variedad con métrica g que admite un spinor puro maximalmente transversal paralelo $\varphi \in \Gamma(\Delta^{3,l})$ para alguna $l \in \mathbb{N}$, entonces la dimensión de la variedad es un múltiplo de 8 y la 4-forma fundamental Ω satisface lo siguiente:*

i) Ω *es una* 4*-forma no degenerada,*

ii) Ω *es aniquilada por una copia de* $\mathfrak{spin}(7)$*,*

iii) $\nabla_Z \Omega = 0$*, para todo* $Z \in \Gamma(TM)$*.*

Demostración. Para demostrar el punto i) observemos que, en cada punto $p \in M$, tenemos un encaje

$$Cl_7^0 \hookrightarrow \mathrm{End}(T_pM),$$

de tal modo que T_pM es una representación de Cl_7^0. Dado que Cl_7^0 es isomorfa al álgebra de matrices $M_{8\times 8}(\mathbb{R})$, solo tiene una representación irreducible, salvo equivalencia, que es $\mathbb{R}^8$. Así, T_pM se descompone en una suma de copias de $\mathbb{R}^8$ y quizas algunos sumandos triviales. Sin embargo, puesto que J_{12} es una estructura casi-compleja local en T_pM, no existen sumandos triviales en T_pM y por tanto

$$T_pM \cong \mathbb{R}^8 \oplus \ldots \oplus \mathbb{R}^8,$$

lo que demuestra que la dimensión de la variedad es un múltiplo de 8.

Ahora, como $\mathfrak{spin}(7) \subset Cl_7^0$, $\mathfrak{spin}(7)$ preserva cada uno de los sumandos $\mathbb{R}^8$ y su representación es no trivial, y no es la representación adjunta (una vez más $J_{12} \in \mathfrak{spin}(7)$). Restringiendo a un sumando $\mathbb{R}^8$ y eligiendo una base ortonormal, podemos identificar, en un punto, la métrica de la variedad con el producto punto en $\mathbb{R}^8$ y las estructuras casi-complejas J_{ij} con las siguientes matrices que generan la representacion de $\mathfrak{spin}(7)$ en $\mathbb{R}^8$:

$$J_{12} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$J_{13} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$J_{14} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$J_{15} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$J_{16} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$J_{17} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$J_{23} = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$J_{24}=\begin{bmatrix}0&0&0&0&0&0&-1&0\\0&0&0&0&0&0&0&1\\0&0&0&0&-1&0&0&0\\0&0&0&0&0&-1&0&0\\0&0&1&0&0&0&0&0\\0&0&0&1&0&0&0&0\\1&0&0&0&0&0&0&0\\0&-1&0&0&0&0&0&0\end{bmatrix}$$

$$J_{25}=\begin{bmatrix}0&0&0&0&0&0&0&-1\\0&0&0&0&0&0&-1&0\\0&0&0&0&0&-1&0&0\\0&0&0&0&1&0&0&0\\0&0&0&-1&0&0&0&0\\0&0&1&0&0&0&0&0\\0&1&0&0&0&0&0&0\\1&0&0&0&0&0&0&0\end{bmatrix}$$

$$J_{26}=\begin{bmatrix}0&0&0&0&1&0&0&0\\0&0&0&0&0&1&0&0\\0&0&0&0&0&0&-1&0\\0&0&0&0&0&0&0&1\\-1&0&0&0&0&0&0&0\\0&-1&0&0&0&0&0&0\\0&0&1&0&0&0&0&0\\0&0&0&-1&0&0&0&0\end{bmatrix}$$

$$J_{27}=\begin{bmatrix}0&0&0&0&0&1&0&0\\0&0&0&0&-1&0&0&0\\0&0&0&0&0&0&0&-1\\0&0&0&0&0&0&-1&0\\0&1&0&0&0&0&0&0\\-1&0&0&0&0&0&0&0\\0&0&0&1&0&0&0&0\\0&0&1&0&0&0&0&0\end{bmatrix}$$

$$J_{34}=\begin{bmatrix}0&0&0&0&0&0&0&-1\\0&0&0&0&0&0&-1&0\\0&0&0&0&0&1&0&0\\0&0&0&0&-1&0&0&0\\0&0&0&1&0&0&0&0\\0&0&-1&0&0&0&0&0\\0&1&0&0&0&0&0&0\\1&0&0&0&0&0&0&0\end{bmatrix}$$

$$J_{35} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$J_{36} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$J_{37} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$J_{45} = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$J_{46} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$J_{47} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$J_{56} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$J_{57} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$J_{67} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0. \end{bmatrix}$$

Las 2-formas locales pueden escribirse en la forma:

$$\begin{aligned}
\eta_{12} &= dx_1 \wedge dx_4 + dx_2 \wedge dx_3 - dx_5 \wedge dx_8 + dx_6 \wedge dx_7,\\
\eta_{13} &= -dx_1 \wedge dx_3 + dx_2 \wedge dx_4 + dx_5 \wedge dx_7 + dx_6 \wedge dx_8,\\
\eta_{14} &= dx_1 \wedge dx_6 + dx_2 \wedge dx_5 + dx_3 \wedge dx_8 - dx_4 \wedge dx_7,\\
\eta_{15} &= -dx_1 \wedge dx_5 + dx_2 \wedge dx_6 - dx_3 \wedge dx_7 - dx_4 \wedge dx_8,\\
\eta_{16} &= -dx_1 \wedge dx_8 + dx_2 \wedge dx_7 + dx_3 \wedge dx_6 + dx_4 \wedge dx_5,\\
\eta_{17} &= dx_1 \wedge dx_7 + dx_2 \wedge dx_8 - dx_3 \wedge dx_5 + dx_4 \wedge dx_6,\\
\eta_{23} &= dx_1 \wedge dx_2 + dx_3 \wedge dx_4 - dx_5 \wedge dx_6 + dx_7 \wedge dx_8,\\
\eta_{24} &= dx_1 \wedge dx_7 - dx_2 \wedge dx_8 + dx_3 \wedge dx_5 + dx_4 \wedge dx_6,\\
\eta_{25} &= dx_1 \wedge dx_8 + dx_2 \wedge dx_7 + dx_3 \wedge dx_6 - dx_4 \wedge dx_5,\\
\eta_{26} &= -dx_1 \wedge dx_5 - dx_2 \wedge dx_6 + dx_3 \wedge dx_7 - dx_4 \wedge dx_8,\\
\eta_{27} &= -dx_1 \wedge dx_6 + dx_2 \wedge dx_5 + dx_3 \wedge dx_8 + dx_4 \wedge dx_7,
\end{aligned} \tag{2.21}$$

$$\begin{aligned}
\eta_{34} &= dx_1 \wedge dx_8 + dx_2 \wedge dx_7 - dx_3 \wedge dx_6 + dx_4 \wedge dx_5,\\
\eta_{35} &= -dx_1 \wedge dx_7 + dx_2 \wedge dx_8 + dx_3 \wedge dx_5 + dx_4 \wedge dx_6,\\
\eta_{36} &= dx_1 \wedge dx_6 - dx_2 \wedge dx_5 + dx_3 \wedge dx_8 + dx_4 \wedge dx_7,\\
\eta_{37} &= -dx_1 \wedge dx_5 - dx_2 \wedge dx_6 - dx_3 \wedge dx_7 + dx_4 \wedge dx_8,\\
\eta_{45} &= dx_1 \wedge dx_2 - dx_3 \wedge dx_4 + dx_5 \wedge dx_6 + dx_7 \wedge dx_8,\\
\eta_{46} &= dx_1 \wedge dx_3 + dx_2 \wedge dx_4 + dx_5 \wedge dx_7 - dx_6 \wedge dx_8,\\
\eta_{47} &= dx_1 \wedge dx_4 - dx_2 \wedge dx_3 + dx_5 \wedge dx_8 + dx_6 \wedge dx_7,\\
\eta_{56} &= -dx_1 \wedge dx_4 + dx_2 \wedge dx_3 + dx_5 \wedge dx_8 + dx_6 \wedge dx_7,\\
\eta_{57} &= dx_1 \wedge dx_3 + dx_2 \wedge dx_4 - dx_5 \wedge dx_7 + dx_6 \wedge dx_8,\\
\eta_{67} &= -dx_1 \wedge dx_2 + dx_3 \wedge dx_4 + dx_5 \wedge dx_6 + dx_7 \wedge dx_8,
\end{aligned}$$

y la 4-forma fundamental en un sumando se ve como:

$$\begin{aligned}
\Omega \;=\; & 6(-dx_1 \wedge dx_4 \wedge dx_2 \wedge dx_3 - dx_1 \wedge dx_4 \wedge dx_5 \wedge dx_8\\
& +dx_1 \wedge dx_4 \wedge dx_6 \wedge dx_7 - dx_2 \wedge dx_3 \wedge dx_5 \wedge dx_8\\
& +dx_2 \wedge dx_3 \wedge dx_6 \wedge dx_7 + dx_5 \wedge dx_8 \wedge dx_6 \wedge dx_7\\
& -dx_1 \wedge dx_3 \wedge dx_5 \wedge dx_7 - dx_1 \wedge dx_3 \wedge dx_6 \wedge dx_8\\
& +dx_2 \wedge dx_4 \wedge dx_5 \wedge dx_7 + dx_2 \wedge dx_4 \wedge dx_6 \wedge dx_8\\
& -dx_1 \wedge dx_6 \wedge dx_2 \wedge dx_5 + dx_3 \wedge dx_8 \wedge dx_4 \wedge dx_7\\
& +dx_1 \wedge dx_8 \wedge dx_2 \wedge dx_7 - dx_3 \wedge dx_6 \wedge dx_4 \wedge dx_5),
\end{aligned}$$

y su cuadrado

$$\Omega^2 = 504\; dx_1 \wedge dx_2 \wedge dx_3 \wedge dx_4 \wedge dx_5 \wedge dx_6 \wedge dx_7 \wedge dx_8.$$

Dado que $\dim(M) = n = 8m$, en cada uno de los sumandos $\mathbb{R}^8$ tenemos coordenadas $(x_1^{(i)}, x_2^{(i)}, x_3^{(i)}, x_4^{(i)}, x_5^{(i)}, x_6^{(i)}, x_7^{(i)}, x_8^{(i)})$ y la 4-forma fundamental se ve como sigue:

$$\begin{aligned}
\Omega \;=\; & 6\sum_{i=1}^{m}(-dx_1^{(i)}\wedge dx_4^{(i)}\wedge dx_2^{(i)}\wedge dx_3^{(i)} - dx_1^{(i)}\wedge dx_4^{(i)}\wedge dx_5^{(i)}\wedge dx_8^{(i)} \\
& +dx_1^{(i)}\wedge dx_4^{(i)}\wedge dx_6^{(i)}\wedge dx_7^{(i)} - dx_2^{(i)}\wedge dx_3^{(i)}\wedge dx_5^{(i)}\wedge dx_8^{(i)} \\
& +dx_2^{(i)}\wedge dx_3^{(i)}\wedge dx_6^{(i)}\wedge dx_7^{(i)} + dx_5^{(i)}\wedge dx_8^{(i)}\wedge dx_6^{(i)}\wedge dx_7^{(i)} \\
& -dx_1^{(i)}\wedge dx_3^{(i)}\wedge dx_5^{(i)}\wedge dx_7^{(i)} - dx_1^{(i)}\wedge dx_3^{(i)}\wedge dx_6^{(i)}\wedge dx_8^{(i)} \\
& +dx_2^{(i)}\wedge dx_4^{(i)}\wedge dx_5^{(i)}\wedge dx_7^{(i)} + dx_2^{(i)}\wedge dx_4^{(i)}\wedge dx_6^{(i)}\wedge dx_8^{(i)} \\
& -dx_1^{(i)}\wedge dx_6^{(i)}\wedge dx_2^{(i)}\wedge dx_5^{(i)} + dx_3^{(i)}\wedge dx_8^{(i)}\wedge dx_4^{(i)}\wedge dx_7^{(i)} \\
& +dx_1^{(i)}\wedge dx_8^{(i)}\wedge dx_2^{(i)}\wedge dx_7^{(i)} - dx_3^{(i)}\wedge dx_6^{(i)}\wedge dx_4^{(i)}\wedge dx_5^{(i)}),
\end{aligned}$$

que elevado a la potencia $2m$ da un múltiplo no cero de la forma de volumen

$$\Omega^{2m} = 504^m \bigwedge_{i=1}^{m}(dx_1^{(i)}\wedge dx_2^{(i)}\wedge dx_3^{(i)}\wedge dx_4^{(i)}\wedge dx_5^{(i)}\wedge dx_6^{(i)}\wedge dx_7^{(i)}\wedge dx_8^{(i)}).$$

Así, la 4-forma fundamental no solo no es cero, sino además, es no degenerada.

El punto $ii)$ se sigue del resultado **??**. Tomemos J_{kl}, y $X_1, X_2, X_3, X_4 \in \Gamma(TM)$. Entonces

$$\eta_{ij}\wedge\eta_{ij}(X_1, X_2, X_3, X_4) = \sum_{\sigma} sgn(\sigma)\big\langle J_{ij}(X_{\sigma(1)}), X_{\sigma(2)}\big\rangle\big\langle J_{ij}(X_{\sigma(3)}), X_{\sigma(4)}\big\rangle.$$

Observemos que en la suma

$$\Omega(J_{kl}(X_1), X_2, X_3, X_4) + \Omega(X_1, J_{kl}(X_2), X_3, X_4)$$

$$+\Omega(X_1, X_2, J_{kl}(X_3), X_4) + \Omega(X_1, X_2, X_3, J_{kl}(X_4)),$$

para i, j, k, l distintos dos a dos, la suma de los términos

$$\eta_{ij}\wedge\eta_{ij}(J_{kl}(X_1), X_2, X_3, X_4) + \eta_{ij}\wedge\eta_{ij}(X_1, J_{kl}(X_2), X_3, X_4)$$

$$+\eta_{ij}\wedge\eta_{ij}(X_1, X_2, J_{kl}(X_3), X_4) + \eta_{ij}\wedge\eta_{ij}(X_1, X_2, X_3, J_{kl}(X_4))$$

es cero. Para demostrarlo utilizamos que en este caso $J_{ij}J_{kl} = J_{kl}J_{ij}$;

$$
\begin{aligned}
& \eta_{ij} \wedge \eta_{ij}(J_{kl}(X_1), X_2, X_3, X_4) + \eta_{ij} \wedge \eta_{ij}(X_1, J_{kl}(X_2), X_3, X_4) \\
+ \;& \eta_{ij} \wedge \eta_{ij}(X_1, X_2, J_{kl}(X_3), X_4) + \eta_{ij} \wedge \eta_{ij}(X_1, X_2, X_3, J_{kl}(X_4)) \\
= \;& \sum_{\sigma} sgn(\sigma) \big\langle J_{ij}J_{kl}(X_{\sigma_1}), X_{\sigma_2} \big\rangle \big\langle J_{ij}(X_{\sigma_3}), X_{\sigma_4} \big\rangle \\
+ \;& \sum_{\sigma} sgn(\sigma) \big\langle J_{ij}(X_{\sigma_1}), J_{kl}(X_{\sigma_2}) \big\rangle \big\langle J_{ij}(X_{\sigma_3}), X_{\sigma_4} \big\rangle \\
+ \;& \sum_{\sigma} sgn(\sigma) \big\langle J_{ij}(X_{\sigma_1}), X_{\sigma_2} \big\rangle \big\langle J_{ij}J_{kl}(X_{\sigma_3}), X_{\sigma_4} \big\rangle \\
+ \;& \sum_{\sigma} sgn(\sigma) \big\langle J_{ij}(X_{\sigma_1}), X_{\sigma_2} \big\rangle \big\langle J_{ij}(X_{\sigma_3}), J_{kl}(X_{\sigma_4}) \big\rangle \\
= \;& \sum_{\sigma} sgn(\sigma) \big\langle J_{kl}J_{ij}(X_{\sigma_1}), X_{\sigma_2} \big\rangle \big\langle J_{ij}(X_{\sigma_3}), X_{\sigma_4} \big\rangle \\
+ \;& \sum_{\sigma} sgn(\sigma) \big\langle J_{ij}(X_{\sigma_1}), J_{kl}(X_{\sigma_2}) \big\rangle \big\langle J_{ij}(X_{\sigma_3}), X_{\sigma_4} \big\rangle \\
+ \;& \sum_{\sigma} sgn(\sigma) \big\langle J_{ij}(X_{\sigma_1}), X_{\sigma_2} \big\rangle \big\langle J_{kl}J_{ij}(X_{\sigma_3}), X_{\sigma_4} \big\rangle \\
+ \;& \sum_{\sigma} sgn(\sigma) \big\langle J_{ij}(X_{\sigma_1}), X_{\sigma_2} \big\rangle \big\langle J_{ij}(X_{\sigma_3}), J_{kl}(X_{\sigma_4}) \big\rangle \\
= \;& \sum_{\sigma} sgn(\sigma) \big\langle - J_{ij}(X_{\sigma_1}), J_{kl}(X_{\sigma_2}) \big\rangle \big\langle J_{ij}(X_{\sigma_3}), X_{\sigma_4} \big\rangle \\
+ \;& \sum_{\sigma} sgn(\sigma) \big\langle J_{ij}(X_{\sigma_1}), J_{kl}(X_{\sigma_2}) \big\rangle \big\langle J_{ij}(X_{\sigma_3}), X_{\sigma_4} \big\rangle \\
+ \;& \sum_{\sigma} sgn(\sigma) \big\langle J_{ij}(X_{\sigma_1}), X_{\sigma_2} \big\rangle \big\langle - J_{ij}(X_{\sigma_3}), J_{kl}(X_{\sigma_4}) \big\rangle \\
+ \;& \sum_{\sigma} sgn(\sigma) \big\langle J_{ij}(X_{\sigma_1}), X_{\sigma_2} \big\rangle \big\langle J_{ij}(X_{\sigma_3}), J_{kl}(X_{\sigma_4}) \big\rangle = 0.
\end{aligned}
$$

Un cálculo análogo muestra que para $k = j$, con i, j, l distintos dos a dos, ó $l = j$, con i, j, k distintos dos a dos, la suma de los términos

$$
\begin{aligned}
& \eta_{ij} \wedge \eta_{ij}(J_{kl}(X_1), X_2, X_3, X_4) + \eta_{ij} \wedge \eta_{ij}(X_1, J_{kl}(X_2), X_3, X_4) \\
& + \eta_{ij} \wedge \eta_{ij}(X_1, X_2, J_{kl}(X_3), X_4) + \eta_{ij} \wedge \eta_{ij}(X_1, X_2, X_3, J_{kl}(X_4))
\end{aligned}
$$

es cero. Ahora consideremos el par (i, j) con $k = i$ y l, j, i distintos dos a dos. En este caso $J_{ij}J_{il} = J_{jl}$ y obtenemos

$$\begin{aligned}
& \eta_{ij} \wedge \eta_{ij}(J_{kl}(X_1), X_2, X_3, X_4) + \eta_{ij} \wedge \eta_{ij}(X_1, J_{kl}(X_2), X_3, X_4) \\
+ \quad & \eta_{ij} \wedge \eta_{ij}(X_1, X_2, J_{kl}(X_3), X_4) + \eta_{ij} \wedge \eta_{ij}(X_1, X_2, X_3, J_{kl}(X_4)) \\
= \quad & \sum_{\sigma} sgn(\sigma)\big\langle J_{ij}J_{kl}(X_{\sigma_1}), X_{\sigma_2}\big\rangle\big\langle J_{ij}(X_{\sigma_3}), X_{\sigma_4}\big\rangle \\
+ \quad & \sum_{\sigma} sgn(\sigma)\big\langle J_{ij}(X_{\sigma_1}), J_{kl}(X_{\sigma_2})\big\rangle\big\langle J_{ij}(X_{\sigma_3}), X_{\sigma_4}\big\rangle \\
+ \quad & \sum_{\sigma} sgn(\sigma)\big\langle J_{ij}(X_{\sigma_1}), X_{\sigma_2}\big\rangle\big\langle J_{ij}J_{kl}(X_{\sigma_3}), X_{\sigma_4}\big\rangle \\
+ \quad & \sum_{\sigma} sgn(\sigma)\big\langle J_{ij}(X_{\sigma_1}), X_{\sigma_2}\big\rangle\big\langle J_{ij}(X_{\sigma_3}), J_{kl}(X_{\sigma_4})\big\rangle \\
= \quad & \sum_{\sigma} sgn(\sigma)\big\langle J_{ij}J_{il}(X_{\sigma_1}), X_{\sigma_2}\big\rangle\big\langle J_{ij}(X_{\sigma_3}), X_{\sigma_4}\big\rangle \\
+ \quad & \sum_{\sigma} sgn(\sigma)\big\langle J_{ij}(X_{\sigma_1}), J_{il}(X_{\sigma_2})\big\rangle\big\langle J_{ij}(X_{\sigma_3}), X_{\sigma_4}\big\rangle \\
+ \quad & \sum_{\sigma} sgn(\sigma)\big\langle J_{ij}(X_{\sigma_1}), X_{\sigma_2}\big\rangle\big\langle J_{ij}J_{il}(X_{\sigma_3}), X_{\sigma_4}\big\rangle \\
+ \quad & \sum_{\sigma} sgn(\sigma)\big\langle J_{ij}(X_{\sigma_1}), X_{\sigma_2}\big\rangle\big\langle J_{ij}(X_{\sigma_3}), J_{il}(X_{\sigma_4})\big\rangle \\
= \quad & \sum_{\sigma} sgn(\sigma)\big\langle J_{jl}(X_{\sigma_1}), X_{\sigma_2}\big\rangle\big\langle J_{ij}(X_{\sigma_3}), X_{\sigma_4}\big\rangle \\
+ \quad & \sum_{\sigma} sgn(\sigma)\big\langle J_{ij}(X_{\sigma_1}), J_{il}(X_{\sigma_2})\big\rangle\big\langle J_{ij}(X_{\sigma_3}), X_{\sigma_4}\big\rangle \\
+ \quad & \sum_{\sigma} sgn(\sigma)\big\langle J_{ij}(X_{\sigma_1}), X_{\sigma_2}\big\rangle\big\langle J_{jl}(X_{\sigma_3}), X_{\sigma_4}\big\rangle \\
+ \quad & \sum_{\sigma} sgn(\sigma)\big\langle J_{ij}(X_{\sigma_1}), X_{\sigma_2}\big\rangle\big\langle J_{ij}(X_{\sigma_3}), J_{il}(X_{\sigma_4})\big\rangle.
\end{aligned}$$

Observemos que para este par (i, j) existe el par (l, j), utilizando que $J_{lj}J_{lk} = J_{jk}$

y que $k = i$ tenemos

$$
\begin{aligned}
& \eta_{lj} \wedge \eta_{lj}(J_{kl}(X_1), X_2, X_3, X_4) + \eta_{lj} \wedge \eta_{lj}(X_1, J_{kl}(X_2), X_3, X_4) \\
+ \;& \eta_{lj} \wedge \eta_{ij}(X_1, X_2, J_{kl}(X_3), X_4) + \eta_{lj} \wedge \eta_{lj}(X_1, X_2, X_3, J_{kl}(X_4)) \\
= \;& \sum_\sigma sgn(\sigma)\big\langle J_{lj}J_{kl}(X_{\sigma_1}), X_{\sigma_2}\big\rangle\big\langle J_{lj}(X_{\sigma_3}), X_{\sigma_4}\big\rangle \\
+ \;& \sum_\sigma sgn(\sigma)\big\langle J_{lj}(X_{\sigma_1}), J_{kl}(X_{\sigma_2})\big\rangle\big\langle J_{lj}(X_{\sigma_3}), X_{\sigma_4}\big\rangle \\
+ \;& \sum_\sigma sgn(\sigma)\big\langle J_{lj}(X_{\sigma_1}), X_{\sigma_2}\big\rangle\big\langle J_{lj}J_{kl}(X_{\sigma_3}), X_{\sigma_4}\big\rangle \\
+ \;& \sum_\sigma sgn(\sigma)\big\langle J_{lj}(X_{\sigma_1}), X_{\sigma_2}\big\rangle\big\langle J_{lj}(X_{\sigma_3}), J_{kl}(X_{\sigma_4})\big\rangle \\
= \;& \sum_\sigma sgn(\sigma)\big\langle -J_{lj}J_{lk}(X_{\sigma_1}), X_{\sigma_2}\big\rangle\big\langle J_{lj}(X_{\sigma_3}), X_{\sigma_4}\big\rangle \\
+ \;& \sum_\sigma sgn(\sigma)\big\langle J_{lk}J_{lj}(X_{\sigma_1}), J_{lk}J_{kl}(X_{\sigma_2})\big\rangle\big\langle J_{lk}J_{lj}(X_{\sigma_3}), J_{lk}(X_{\sigma_4})\big\rangle \\
+ \;& \sum_\sigma sgn(\sigma)\big\langle J_{lj}(X_{\sigma_1}), X_{\sigma_2}\big\rangle\big\langle -J_{lj}J_{lk}(X_{\sigma_3}), X_{\sigma_4}\big\rangle \\
+ \;& \sum_\sigma sgn(\sigma)\big\langle J_{lk}J_{lj}(X_{\sigma_1}), J_{lk}(X_{\sigma_2})\big\rangle\big\langle J_{lk}J_{lj}(X_{\sigma_3}), J_{lk}J_{kl}(X_{\sigma_4})\big\rangle \\
= \;& \sum_\sigma sgn(\sigma)\big\langle -J_{jk}(X_{\sigma_1}), X_{\sigma_2}\big\rangle\big\langle J_{lj}(X_{\sigma_3}), X_{\sigma_4}\big\rangle \\
+ \;& \sum_\sigma sgn(\sigma)\big\langle J_{kj}(X_{\sigma_1}), X_{\sigma_2}\big\rangle\big\langle J_{kj}(X_{\sigma_3}), J_{lk}(X_{\sigma_4})\big\rangle \\
+ \;& \sum_\sigma sgn(\sigma)\big\langle J_{lj}(X_{\sigma_1}), X_{\sigma_2}\big\rangle\big\langle -J_{jk}(X_{\sigma_3}), X_{\sigma_4}\big\rangle \\
+ \;& \sum_\sigma sgn(\sigma)\big\langle J_{kj}(X_{\sigma_1}), J_{lk}(X_{\sigma_2})\big\rangle\big\langle J_{kj}(X_{\sigma_3}), X_{\sigma_4}\big\rangle \\
= \;& \sum_\sigma sgn(\sigma)\big\langle -J_{ji}(X_{\sigma_1}), X_{\sigma_2}\big\rangle\big\langle J_{lj}(X_{\sigma_3}), X_{\sigma_4}\big\rangle \\
+ \;& \sum_\sigma sgn(\sigma)\big\langle J_{ij}(X_{\sigma_1}), X_{\sigma_2}\big\rangle\big\langle J_{ij}(X_{\sigma_3}), J_{li}(X_{\sigma_4})\big\rangle \\
+ \;& \sum_\sigma sgn(\sigma)\big\langle J_{lj}(X_{\sigma_1}), X_{\sigma_2}\big\rangle\big\langle -J_{ji}(X_{\sigma_3}), X_{\sigma_4}\big\rangle \\
+ \;& \sum_\sigma sgn(\sigma)\big\langle J_{ij}(X_{\sigma_1}), J_{li}(X_{\sigma_2})\big\rangle\big\langle J_{ij}(X_{\sigma_3}), X_{\sigma_4}\big\rangle.
\end{aligned}
$$

Así

$$\begin{aligned} & \eta_{ij}\wedge\eta_{ij}(J_{kl}(X_1),X_2,X_3,X_4)+\eta_{ij}\wedge\eta_{ij}(X_1,J_{kl}(X_2),X_3,X_4) \\ + \quad & \eta_{ij}\wedge\eta_{ij}(X_1,X_2,J_{kl}(X_3),X_4)+\eta_{ij}\wedge\eta_{ij}(X_1,X_2,X_3,J_{kl}(X_4)) \\ + \quad & \eta_{lj}\wedge\eta_{lj}(J_{kl}(X_1),X_2,X_3,X_4)+\eta_{lj}\wedge\eta_{lj}(X_1,J_{kl}(X_2),X_3,X_4) \\ + \quad & \eta_{lj}\wedge\eta_{ij}(X_1,X_2,J_{kl}(X_3),X_4)+\eta_{lj}\wedge\eta_{lj}(X_1,X_2,X_3,J_{kl}(X_4))=0, \end{aligned}$$

para i,l,j distintos dos a dos. Para el caso $(k,l)=(i,j)$ se sigue de cálculos análogos que,

$$\begin{aligned} & \eta_{ij}\wedge\eta_{ij}(J_{kl}(X_1),X_2,X_3,X_4)+\eta_{ij}\wedge\eta_{ij}(X_1,J_{kl}(X_2),X_3,X_4) \\ + \quad & \eta_{ij}\wedge\eta_{ij}(X_1,X_2,J_{kl}(X_3),X_4)+\eta_{ij}\wedge\eta_{ij}(X_1,X_2,X_3,J_{kl}(X_4))=0. \end{aligned}$$

Así, en la suma

$$\Omega(J_{kl}(X_1),X_2,X_3,X_4)+\Omega(X_1,J_{kl}(X_2),X_3,X_4)$$

$$+\Omega(X_1,X_2,J_{kl}(X_3),X_4)+\Omega(X_1,X_2,X_3,J_{kl}(X_4)),$$

para i,j,k,l distintos dos a dos, la suma de los términos

$$\eta_{ij}\wedge\eta_{ij}(J_{kl}(X_1),X_2,X_3,X_4)+\eta_{ij}\wedge\eta_{ij}(X_1,J_{kl}(X_2),X_3,X_4)$$

$$+\eta_{ij}\wedge\eta_{ij}(X_1,X_2,J_{kl}(X_3),X_4)+\eta_{ij}\wedge\eta_{ij}(X_1,X_2,X_3,J_{kl}(X_4))=0$$

y, por tanto, Ω es *aniquilada* por los endormorfismos J_{kl}.

Ahora demostraremos el punto *iii*). Primero calculemos $\nabla_Z(\eta_{kl})$. Por definición de η y de ∇ tenemos

$$\begin{aligned} (\nabla_Z\eta_{kl})(X,Y) &= \nabla_Z(\eta_{kl}(X,Y))-\eta_{kl}(\nabla_ZX,Y)-\eta_{kl}(X,\nabla_ZY) \\ &= Z\big\langle J_{kl}(X),Y\big\rangle-\big\langle J_{kl}(\nabla_ZX),Y\big\rangle-\big\langle J_{kl}(X),\nabla_ZY\big\rangle. \end{aligned}$$

Utilizando la compatibilidad de la métrica

$$\begin{aligned} (\nabla_Z\eta_{kl})(X,Y) &= \big\langle\nabla_Z(J_{kl}(X)),Y\big\rangle+\big\langle J_{kl}(X),\nabla_ZY\big\rangle \\ &\quad -\big\langle J_{kl}(\nabla_ZX),Y\big\rangle-\big\langle J_{kl}(X),\nabla_ZY\big\rangle \\ &= \big\langle\nabla_Z(J_{kl}(X))-J_{kl}(\nabla_Z(X)),Y\big\rangle \\ &= \big\langle(\nabla_ZJ_{kl})(X),Y\big\rangle \\ &= \big\langle(\sum_i(\theta_{ki}(Z)J_{il}(X)+\theta_{li}(Z)J_{ki}(X)),Y\big\rangle \\ &= \sum_i(\theta_{ki}(Z)\eta_{il}(X,Y)+\theta_{li}(Z)\eta_{ki}(X,Y)) \\ &= \sum_i(\theta_{ki}(Z)\eta_{il}(X,Y)+\theta_{li}(Z)\eta_{ki}(X,Y)). \end{aligned}$$

Por tanto

$$\begin{aligned}\nabla_Z(\eta_{kl}\wedge\eta_{kl}) &= \nabla_Z(\eta_{kl})\wedge\eta_{kl}+\eta_{kl}\wedge\nabla_Z(\eta_{kl})\\ &= 2(\nabla_Z(\eta_{kl})\wedge\eta_{kl})\\ &= 2(\sum_i(\theta_{ki}(Z)\eta_{li}+\theta_{li}(Z)\eta_{ik})\wedge\eta_{kl}).\end{aligned}$$

Tomando la suma,

$$\begin{aligned}\sum_{k<l}\nabla_Z(\eta_{kl}\wedge\eta_{kl}) &= \sum_{k<l}\nabla_Z(\eta_{kl})\wedge\eta_{kl}+\eta_{kl}\wedge\nabla_Z(\eta_{kl})\\ &= 2\sum_{k<l}(\nabla_Z(\eta_{kl})\wedge\eta_{kl})\\ &= 2\sum_{k<l}(\sum_i(\theta_{ki}(Z)\eta_{li}+\theta_{li}(Z)\eta_{ik}))\wedge\eta_{kl}.\end{aligned}$$

Observemos, que al tomar la suma, para cada término de la forma

$$\theta_{ki_0}(Z)\eta_{li_0}\wedge\eta_{kl}$$

existe el término

$$\theta_{i_0k}(Z)\eta_{lk}\wedge\eta_{i_0l}=-\theta_{ki_0}(Z)\eta_{li_0}\wedge\eta_{kl},$$

y por tanto, la suma da cero. □

Con la existencia de spinors puros maximalmente trasnversales obtenemos:

Teorema 2.4.11. *Si M es una $Spin^7(8)$-variedad con métrica g que admite un spinor puro maximalmente transversal y paralelo $\varphi\in\Gamma(\Delta^l_{n,3})$ para alguna $l\in\mathbb{N}$. El grupo de holonomía restricto de M está contenido en $Spin(7)\subset SO(8)$.*

Demostración. Ω es una 4-forma globalmente definida, no degenerada y aniquilada por la copia de $\mathfrak{spin}(7)\subset\mathrm{End}(TM)$. Más aún, como Ω es paralela, el álgebra de holonomía de M debe estar contenida en la subálgebra maximal que aniquila a Ω. Dado que la copia de $\mathfrak{spin}(7)$ en $\mathfrak{so}(8)$ es maximal, el resultado se sigue del Lema **??**. □

Teorema 2.4.12. *Si M es una $Spin^7(8)$-variedad con métrica g que admite un spinor puro maximalmente transversal y paralelo $\varphi\in\Gamma(\Delta^l_{n,3})$ para alguna $l\in\mathbb{N}$, entonces la métrica original de M es homotética a la métrica promediada.*

Demostración. Denotemos a la métrica original por g y a la métrica promediada por g_1. Sabemos que comparten la misma conexión de Levi-Civita y que son paralelas con respecto a ella. Por tanto, consideremos a g y g_1 como tensores de tipo $(1,1)$

$$g, g_1 \colon TM \longrightarrow T^*M$$

de tal modo que

$$G = g_1^{-1} \circ g \colon TM \longrightarrow TM$$

es un automorfismo paralelo de TM con respecto a la conexión de Levi-Civita común. Por tanto, G es preservado por el grupo de holonomía de (M, g_1) que sabemos esta contenido en $Spin(7) \subset SO(8)$. El automorfismo G debe ser, por el lema de Schur, un múltiplo de la identidad o idéntincamente cero. La segunda posibilidad no puede ocurrir dado que G es automorfismo. $\square$

Teorema 2.4.13. *Si M es una $Spin^7(8)$-variedad con métrica g que admite un spinor puro maximalmente transversal paralelo $\varphi \in \Gamma(\Delta_{n,3}^l)$ para alguna $l \in \mathbb{N}$, y tal que tiene una corriente de Dirac $\xi \in TM$ nunca cero*

$$\xi = i \sum_{j=1}^{8} (\psi, v_i \cdot \psi) v_i \not\equiv 0,$$

donde $\{v_i\}$ es un marco ortonormal local de M, entonces M es localmente un producto riemanniano de una 7-variedad con grupo de holonomía restricto contenido en el grupo de Lie excepcional G_2 y una copia plana de $\mathbb{R}$.

Demostración. . Notemos que el valor de $(\varphi, v \cdot \varphi)$ es un número complejo imaginario puesto que

$$\begin{aligned} (\psi, v \cdot \psi) &= -(v \cdot \psi, \psi) \\ &= -\overline{(\psi, v \cdot \psi)}. \end{aligned}$$

Ahora, consideremos coordenadas normales en el punto $p \in M$ de tal modo que

$$\begin{aligned} \nabla_X \xi &= \nabla_X (i \sum_{j=1}^{8} (\psi, v_i \cdot \psi) v_i) \\ &= i (\sum_{j=1}^{8} (\nabla_X (\psi, v_i \cdot \psi)) v_i + (\psi, v_i \cdot \psi) \nabla_X v_i) \\ &= i (\sum_{j=1}^{8} (\nabla_X (\psi, v_i \cdot \psi)) v_i \\ &= i (\sum_{j=1}^{8} [(\nabla_X \psi, v_i \cdot \psi) + (\psi, \nabla_X v_i \cdot \psi) + (\psi, v_i \cdot \nabla_X \psi)] v_i \\ &= 0. \end{aligned}$$

Para cualquier $Y \in \Gamma(TM)$, tal que $\langle Y, \xi \rangle = 0$, tenemos

$$\begin{aligned} 0 &= X\langle Y, \xi \rangle \\ &= \langle \nabla_X Y, \xi \rangle + \langle Y, \nabla_X \xi \rangle \\ &= \langle \nabla_X Y, \xi \rangle, \end{aligned}$$

para todo $X \in \Gamma(TM)$. Así, la distribución ortogonal a ξ es paralela y la variedad M es localmente un producto de una 7-variedad y una copia plana de $\mathbb{R}$. El grupo de estructura de la 7-variedad es el estabilizador de un vector en $\mathbb{R}^8$ bajo una representación de $Spin(7) \subset SO(8)$ en $\mathbb{R}^8$. Por tanto, la 7-variedad tiene grupo de holonomía restricto contenido en G_2. $\square$

Bibliografía

[1] Alekseevski, D. V.: *Riemannian spaces with unusual holonomy groups.* (Russian) Funkcional. Anal. i Priloen 2 (1968) no. 2, 1–10.

[2] Alekseevski, D. V.: *Compact quaternion spaces.* Funktsionalñyi Analiz i Ego Prilozhenyia, 2. (1968).

[3] Alekseevski, D. V.; Kimel'fel'd, B. N.: *Structure of homogeneous Riemannian spaces with zero Ricci curvature.* Funkcional. Anal. i Priloen. 9 (1975), no. 2, 5–11.

[4] Alekseevsky, D. V.; Marchiafava, S.: *Quaternionic-like structures on a manifold. II. Automorphism groups and their interrelations.* Atti Accad. Naz. Lincei Cl. Sci. Fis. Mat. Natur. Rend. Lincei (9) Mat. Appl. **4** (1993), no. 1, 53–61

[5] S. Bochner, K. Yano: *Curvature and Betti numbers.* Ann of math. Studies, 32, Princeton, New Jersey, 1953.

[6] Friedrich, T.: *Dirac Operators in Riemannian Geometry.* Volume 25. Graduate Studies in Mathematics.

[7] Herrera, H.; Herrera, R.: *Rigidity and vanishing theorems for almost quaternionic manifolds.* Geom. Dedicata **134** (2008), 139–152.

[8] Ishihara, S.: *Groups of isometries of pseudo-Hermitian spaces.* I, II. Proc. Japan Acad., **30** (1954 y 1955), **31**.

[9] Kobayashi, S.; Nomizu, K.: *Foundations of differential geometry.* Volumen I y II. Wiley, New York (1963).

[10] Kobayashi, S.: *Transformation groups in differential geometry.* Springer, Berlin-Heidelberg-New York, (1972).

[11] Lawson, H. B., Jr.; Michelsohn M.-L.: *Spin Geometry.* Princeton Mathematical Series, 1989.

[12] Moroianu, A.: *parallel and Killing Spinors on Spin^c Manifolds.* Commun. Math. Phys (1997). 187, 417-427

[13] Nagase, M.: Spin^q structures. J. Math. Soc. Japan **47** (1995). No. 1, 93–119.

[14] Mann, L. N.: *Gaps in the dimensions of transformation groups.* Illinois J. Math. **10** (1966). 532–546.

[15] Martin Cabrera, F.; Swann, A.: *The intrinsic torsion of almost quaternion-hermitian manifolds.* Ann. Inst. Fourier (Grenoble) 58 (2008). No. 5, 1455–1497.

[16] Martin Cabrera, F.: *Almost quaternion-Hermitian manifolds. Ann. Global Anal.* Geom. 25 (2004). No. 3, 277–301.

[17] Salamon, S.: *Riemannian geometry and holonomy groups.* Research notes in mathematics series, (1989).

[18] Tanno, S.: *The automorphism groups of almost Hermitian manifolds.* Kodai Math. Sem. Rep. Volumen 25, 2, (1973).

[19] Wang, H. C.: *Finsler spaces with completely integrable equations of Killing.* J. London Math. Soc., 22, (1949).

[20] Wakakuwa, H.: *On n-dimensional Riemannian spaces admitting some groups of motions of order less than* $\frac{1}{2}n(n-1)$. Tôhoku Math. J. (2), (1954).

[21] Wolf, J. A.: *Complex homogeneous contact manifolds and quaternionic symmetric spaces.* J. Math. Mech. **14** (1965). 1033–1047.