



Centro de Investigación en Matemáticas, A. C.

Optimización de Portafolios bajo Medidas de Riesgo Distorsionadas

Tesina que para obtener el título de
**Maestro en Ciencias con Orientación en
Probabilidad y Estadística**

presenta:

Luis Daniel Cahuich Ramírez

Sínodo:

Presidente: Dr. Begoña Fernández Fernández (UNAM)

Secretario: Dr. Erick Treviño Aguilar (UG)

Vocal y director de tesina: Dr. Daniel Hernández Hernández (CIMAT)

Julio de 2011

Guanajuato, México

A mis padres, Daniel y Rosa,

a mis hermanas, Ivette y Grisel.

Agradecimientos

Es muy difícil mencionar a todas las personas e instituciones que colaboraron de alguna forma en la elaboración de este trabajo.

En primer lugar, agradezco a mis padres que me han apoyado de manera incondicional durante toda mi vida. Les agradezco el amor que me han regalado y todos los consejos que me han dado.

Este trabajo no sería posible sin el apoyo de mi asesor, el Dr. Daniel Hernández Hernández, a quien le reconozco y agradezco su tiempo, paciencia y dedicación.

Agradezco a mis sinodales, la Dr. Begoña Fernández Fernández y el Dr. Erick Treviño Aguilar, por todo el tiempo que les tomó revisar este trabajo y por sus valiosas sugerencias.

Quiero expresar mi agradecimiento con el CIMAT y el CONACYT por todas las becas y apoyos que me otorgaron a lo largo de la maestría.

Índice general

Introducción	ix
1. Medidas de Riesgo	1
1.1. Medidas de Riesgo Coherentes	3
1.1.1. Invarianza en Ley	11
1.1.2. Comonotonicidad	12
1.2. Familias Paramétricas de Medidas de Riesgo	13
1.2.1. Medidas de Riesgo Distorsionadas	14
1.2.2. Familias Paramétricas de Distorsiones	17
1.3. Estimación e Implementación Computacional	21
1.3.1. Estimación Estadística	21
1.3.2. Implementación Computacional	22
2. Optimización de Portafolios	25

2.1. Modelo de Mercado Financiero	27
2.1.1. Estrategias Admisibles	28
2.1.2. Arbitraje	31
2.1.3. Completez	33
2.2. Algunas Modelos de Selección	34
2.3. El Modelo Vía Cuantiles	39
3. Selección de Portafolio Bajo Medidas de Riesgo Distorsionadas	43
3.1. Formulación del Problema	45
3.2. Esquema de la Solución	47
3.3. Ejemplos	56
3.3.1. Utilidad Logarítmica y Distorsión PO	57
3.3.2. Utilidad Logarítmica y Distorsión GA	57
Discusión y Conclusiones	59
A. Teoremas Importantes	61
Bibliografía	62

Introducción

En la actualidad, la selección de un portafolio óptimo que satisfaga una restricción de riesgo, es un problema que ha despertado gran interés por parte de los practicantes y profesionales en la industria financiera. Para hacer un buen estudio de este problema es deseable conocer tanto teoría como trabajos desarrollados sobre medidas de riesgo y optimización de portafolios. El conocimiento de medidas de riesgo proporciona herramientas para decidir como se cuantificarán las posibles pérdidas de un portafolio. Conocer resultados en el área de optimización de portafolios, ayuda a elegir el modelo de selección con el cual se trabajará.

Con la aparición de los Acuerdos de Basilea sobre Supervisión Bancaria (Basilea I en 1988, Basilea II en 2004 y Basilea III en 2011), la medición del riesgo ha cobrado gran importancia dentro de las instituciones financieras. La incorporación del Valor en Riesgo a los Acuerdos de Basilea en 1996, ha hecho de esta medida el estándar industrial en la cuantificación del riesgo. Es bien sabido que esta medida tiene deficiencias como penalizar diversificación en muchas ocasiones y no tomar en cuenta la magnitud de las pérdidas. Estos problemas motivaron la propuesta de las medidas de riesgo coherentes hecha por Artzner, Delbaen, Eber y Heath [5]. Con la publicación de este trabajo surge la versión coherente del Valor en Riesgo que se conoce como Déficit Esperado y el desarrollo de diversas clases de medidas tales como las convexas, distorsionadas, espectrales, etc. En este

trabajo, utilizaremos una clase particular de medidas de riesgo distorsionadas introducida por Tsukahara [28]. En esta clase, las medidas resultan ser coherentes, invariantes en ley, comonótonas y comparables en cierto sentido con el Déficit Esperado. Un buen resumen de resultados sobre medidas de riesgo puede ser encontrado en Föllmer y Schied [11].

El estudio sobre optimalidad de portafolios fue iniciado con la publicación de Harry Markowitz [24] en 1952, donde estableció los fundamentos de la teoría de selección de portafolio transformando la preferencia de una inversión en un diagrama riesgo-retorno y midiendo el riesgo con la desviación estándar. Después de este trabajo surgió la versión en tiempo continuo estudiada principalmente por Merton [24] y Samuelson [27], en donde se considera el problema bajo un esquema de maximización de utilidad. Se han propuesto modelos de selección alternativos, cada uno con sus características particulares. Entre los más comunes están los trabajos de Browne [7], Kahneman y Tversky [17], Lopes [21] y Yaari [30]. Nosotros utilizaremos un modelo de selección recién propuesto por He y Zhou [15], el cual cubre al menos los modelos mencionados anteriormente. Este modelo tiene la particularidad que la variable de decisión es la función cuantil de los pagos admisibles y no el pago mismo.

No cabe duda que desde que inició la regulación bancaria, un problema al que se enfrentan día a día las instituciones, es el de escoger un portafolio que de buenos rendimientos sin que el riesgo asociado exceda el nivel dado por los reguladores. Los autores Basak y Shapiro [6] abordaron este problema por primera vez y utilizaron el Valor en Riesgo para la cuantificación del riesgo. Otros trabajos en esta misma línea son los de Gundel y Weber [12], Acerbi y Simonetti [2]. Ninguno de estos trabajos aborda el problema en un marco general de selección, como el propuesto por He y Zhou [15]. Algunos son flexibles en la medida de riesgo que se utiliza pero no en el modelo de selección. Esto nos motivó a estudiar el problema de optimización de portafolios con una restricción de riesgo en un marco general tanto de selección como de la cantidad de medidas de riesgo que pueden escogerse.

Esta tesina está organizada como sigue. En el Capítulo 1 se da un breve pero intensivo estudio sobre las medidas de riesgo. Empezamos con los resultados clásicos de medidas de riesgo coherentes y se estudian las propiedades de invarianza en ley y comonotonicidad, para luego introducir las medidas de riesgo distorsionadas propuestas por Tsukahara [28]. El entendimiento de los últimos resultados de este capítulo son de vital importancia para el desarrollo del trabajo.

En el Capítulo 2 se plantea el modelo de mercado con el que trabajaremos, se proporcionan las herramientas necesarias para entender el problema de optimización de portafolios y se da a conocer el modelo de selección que utilizaremos. El planteamiento del modelo vía cuantiles de He y Zhou [15] es un ingrediente importante para el problema que abordaremos.

El Capítulo 3 se dedica al planteamiento y análisis del problema principal de este trabajo. Los resultados de este capítulo constituyen nuestra aportación principal. El modelo aquí propuesto y todo lo relacionado con éste, hasta donde sabemos no puede ser encontrado en la literatura.

Por último, se incluye un apartado de conclusiones en el que se describen los resultados mas importantes que se obtuvieron y se proponen algunas posibles generalizaciones del problema aquí estudiado. Con la intención de hacer este trabajo lo más independiente posible, al final del mismo se incluye un apéndice con la demostración de un resultado de caracterización de medidas de riesgo, dado por Tsukahara [28].

Capítulo 1

Medidas de Riesgo

La medición del riesgo de una posición financiera es uno de los temas centrales en la era moderna de la administración de riesgos. La necesidad de cuantificar el riesgo por parte de los profesionales, ha motivado a la comunidad científica al desarrollo de distintas medidas de riesgo, las cuales pueden ser utilizadas en la práctica para distintos fines. Entre los más destacados se encuentran los siguientes:

- **Determinación del capital de riesgo y adecuación de capital.** Una de las funciones principales de la administración de riesgos en el sector financiero es determinar la cantidad de capital que una institución financiera necesita tener como un amortiguador frente a inesperadas pérdidas futuras en su cartera con el fin de satisfacer a un regulador, que está interesado en la solvencia de la institución.
- **Herramienta de gestión.** Las medidas de riesgo son frecuentemente utilizadas como una herramienta para limitar la cantidad de riesgo que una unidad dentro de una empresa puede tener. Por ejemplo, los operadores de un banco son a menudo limitados por la regla de que el Valor en Riesgo diario al nivel 95 % de su posición, no debe exceder un determinado límite.

- **Primas de seguro.** Las primas que recibe una compañía de seguros, son una compensación por asumir el riesgo de los objetos asegurados. El tamaño de esta compensación, puede ser vista como una medida del riesgo que poseen estos objetos.

Como se podrá observar más adelante, se describirá una posición financiera por una variable aleatoria X sobre un conjunto de escenarios posibles. Cuando se tiene especificada una medida de probabilidad sobre el conjunto de los posibles escenarios, podríamos fijarnos en la distribución de X y medir el riesgo en términos de los momentos o cuantiles. Dado que lo que nos interesa es una estimación de lo que se podría perder en una inversión (downside risk en inglés), es evidente que una medida de riesgo clásica como la varianza no refleja la asimetría básica en la interpretación financiera de X . Esta asimetría es tomada en cuenta por medidas de riesgo tales como el Valor en Riesgo, la cual esta basada en los cuantiles para la cola inferior de la distribución del valor de la posición. Sin embargo, el Valor en Riesgo no satisface algunos requerimientos naturales y esto ha motivado una investigación sistemática de medidas de riesgo que satisfagan ciertos axiomas básicos.

En este capítulo se discutirá el problema de cuantificar el riesgo de una posición financiera. Se expondrán los conceptos y resultados más importantes sobre medidas de riesgo; principalmente nos enfocaremos en aquellos que están estrechamente relacionados con el problema que se resolverá en este trabajo. En la Sección 1.1 se estudiarán las llamadas medidas de riesgo coherentes, cuya aproximación axiomática fue iniciada por Artzner, Delbaen, Eber y Heath [5]. También, dado que en este trabajo estamos interesados en las medidas de riesgo que además de ser coherentes satisfacen los axiomas de invarianza en ley y comonotonidad, dedicaremos unos párrafos a examinar estas propiedades. La primera parte de la Sección 1.2 se dedica al estudio de las llamadas medidas de riesgo distorsionadas, las cuales juegan un rol muy importante para la presentación del trabajo de Tsukahara [29] sobre familias paramétricas de medidas riesgo, que se hará en la última parte de esta sección. Para finalizar el capítulo, en la Sección 1.3 se mencionarán algunos resultados so-

bre la estimación y simulación de la clase de medidas de riesgo propuesta por Tsukahara [29]. Cabe destacar que los resultados de la Sección 1.2 sobre el trabajo de Tsukahara [29] constituyen una parte fundamental para el planteamiento de nuestro problema, pues como podrá verse en el Capítulo 3 utilizaremos este tipo de medidas para limitar el riesgo de ciertas posiciones financieras.

1.1. Medidas de Riesgo Coherentes

El propósito de esta sección es introducir formalmente el concepto de medida de riesgo coherente, así como dar las interpretaciones de las propiedades que caracterizan a esta clase de medidas. Todas las demostraciones de los resultados que a continuación se presentan pueden ser consultadas en Föllmer y Schied [11]. Para empezar, considere un espacio de probabilidad $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$ y denote por $L^\infty := L^\infty(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$ el conjunto de las variables aleatorias (v.a.) que son \mathbf{P} esencialmente acotadas. A lo largo de este trabajo, un elemento de L^∞ modelará el valor descontado de una posición financiera al final de algún horizonte de tiempo dado, y nos referiremos a éstos simplemente como posiciones financieras sin especificar que pertenecen al conjunto L^∞ .

Para efectos prácticos, puede pensarse que X representa el valor descontando de un determinado portafolio al término de cierto periodo de transacción. Dicho portafolio puede estar constituido por un conjunto de acciones y bonos, un libro de derivados, una colección de préstamos de alto riesgo o incluso la posición de una institución financiera sobre todos sus activos con riesgo. Lo que se quiere es cuantificar el riesgo de cualquier posición financiera X por algún número $\rho(X)$.

Definición 1.1.1. Un funcional $\rho : L^\infty \rightarrow \mathbb{R}$ es una *medida de riesgo*, si para cualesquiera $X, Y \in L^\infty$ satisface las siguientes condiciones:

- Monotonía Inversa [MI]: Si $X \leq Y$, entonces $\rho(X) \geq \rho(Y)$.

- Invariante en Traslación [IT]: Si $m \in \mathbb{R}$, entonces $\rho(X + m) = \rho(X) - m$.

La interpretación financiera de la propiedad [MI] es la siguiente: posiciones financieras que son mejores en cualquier escenario, deben tener un menor riesgo. La propiedad [IT] está motivada por la interpretación de $\rho(X)$ como requerimiento de capital, es decir, $\rho(X)$ es la cantidad que debe ser agregada a la posición X , para hacerla aceptable desde el punto de vista de una agencia supervisora. Entonces, si se agrega la cantidad m a la posición y se invierte en una manera libre de riesgo, el requerimiento de capital se reduce por la misma cantidad. En particular, [IT] implica:

$$\rho(X + \rho(X)) = 0, \quad (1.1)$$

$$\rho(m) = \rho(0) - m \quad \text{para toda } m \in \mathbb{R}. \quad (1.2)$$

Ahora, nos enfocaremos en la clase de medidas de riesgo que satisfacen dos propiedades adicionales: subaditividad y homogeneidad positiva. Imponer estas condiciones, nos lleva a la definición de medida de riesgo coherente dada inicialmente por Artzner, Delbaen, Eber y Heath [5].

Definición 1.1.2. Una medida de riesgo $\rho : L^\infty \rightarrow \mathbb{R}$ es llamada *medida de riesgo coherente* si para cualesquiera $X, Y \in L^\infty$ satisface las siguientes condiciones:

- Subaditividad [SA]: $\rho(X + Y) \leq \rho(X) + \rho(Y)$.
- Homogeneidad Positiva [HP]: Si $\lambda \geq 0$, entonces $\rho(\lambda X) = \lambda \rho(X)$.

Los autores Artzner, Delbaen, Eber y Heath [5] resumen la razón de pedir la propiedad [SA] en la siguiente frase: “*una fusión no crea riesgo extra*”. Ésta propiedad es la más discutida de las cuatro que caracterizan a las medidas de riesgo coherentes, posiblemente porque descarta al Valor en Riesgo como una buena medida (ver Ejemplo 1.1.3). Enseguida

se exponen algunos argumentos que explican porque la propiedad [SA] es un requerimiento razonablemente necesario.

- La subaditividad refleja la idea de que el riesgo puede reducirse mediante la diversificación. Esto constituye un principio que ha sido utilizado desde hace muchos años en finanzas y economía.
- El uso de una medida de riesgo no subaditiva para determinar el capital regulatorio de una institución financiera, podría incentivar a la empresa a separarse legalmente en varias filiales, con el fin de reducir los requerimientos de su capital regulatorio.
- La subaditividad permite descentralizar la tarea de administrar el riesgo derivado de una colección de distintas posiciones. Es decir, si los límites de riesgo se dan por separado a dos posiciones diferentes, entonces el límite de la posición global, está acotado por la suma de los límites de riesgo individuales.

Asumiendo que [SA] se satisface, la razón de pedir la propiedad [HP] se puede justificar fácilmente, ya que para toda $n \in \mathbb{N}$ y cualquier posición X , se cumple lo siguiente:

$$\rho(nX) = \rho(X + \dots + X) \leq n\rho(X), \quad (1.3)$$

y debido a que no hay diversificación o compensación alguna en el valor del portafolio, es natural pedir que se de la igualdad en la ecuación anterior.

La propiedad [HP] ha sido criticada por algunas personas, pues no penaliza la concentración de riesgo. De otro modo, para valores grandes de λ se debería cumplir $\rho(\lambda X) > \lambda\rho(X)$, y como lo indica la ecuación (1.3), esto es imposible para una medida de riesgo subaditiva. Esta observación ha llevado al estudio de las llamadas *medidas de riesgo convexas*, las cuales forman una clase muy amplia de medidas de riesgo. En esta clase, las propiedades [SA] y [PH] son substituidas por una condición más débil,

- Convexidad [CO]: $\rho(\lambda X + (1 - \lambda)Y) \leq \lambda\rho(X) + (1 - \lambda)\rho(Y)$.

No es difícil verificar que bajo homogeneidad positiva, la convexidad es equivalente a la subaditividad. La justificación económica de [CO] es de nuevo la idea de que la diversificación reduce el riesgo. El estudio de las medidas de riesgo convexas en el contexto de gestión de riesgos y matemáticas financieras, empezó con Föllmer y Schied [10]. Una muy buena discusión se puede encontrar en Föllmer y Schied [11]. Una conexión interesante entre medidas de riesgo convexas y modelos de riesgo en la valuación de derivados puede encontrarse en Cont [8].

Enseguida se presentan unos ejemplos de medidas de riesgo. Especial atención tendrán las medidas conocidas como Valor en Riesgo y Déficit Esperado.

Ejemplo 1.1.1 (Peor Escenario). Considere el funcional definido de la siguiente manera:

$$\rho_{\text{máx}}(X) = - \inf_{\omega \in \Omega} X(\omega), \quad (1.4)$$

para cualquier posición X . El valor de $\rho_{\text{máx}}(X)$ indica la cota inferior más pequeña de la pérdida potencial que se puede tener en cualquier escenario. Se puede verificar que $\rho_{\text{máx}}(X)$ es una medida de riesgo coherente. Ésta es la medida de riesgo más conservadora en el sentido de que cualquier medida de riesgo ρ sobre L^∞ satisface:

$$\rho(X) \leq \rho\left(\inf_{\omega \in \Omega} X(\omega)\right) = \rho_{\text{máx}}(X). \quad (1.5)$$

◇

Ejemplo 1.1.2 (La Integral de Choquet). Sea $c : \mathcal{F} \rightarrow [0, 1]$ cualquier función normalizada y monótona en el sentido de que $c(\emptyset) = 0$, $c(\Omega) = 1$ y $c(A) \leq c(B)$ si $A \subset B$. Por ejemplo, $c(\cdot)$ puede estar dada por $c(A) := \psi(\mathbf{P}(A))$, con $\psi : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$ tal que $\psi(0) = 0$ y $\psi(1) = 1$. Para una función medible y acotada $X \geq 0$, se define la *integral de Choquet* con respecto a $c(\cdot)$ como

$$\int X dc := \int_0^\infty c(X > x) dx. \quad (1.6)$$

Cuando $c(\cdot)$ es una medida de probabilidad, el teorema de Fubini implica que $\int Xdc$ coincide con la integral usual. Observe que para una función $X \in L^\infty$ arbitraria y $m \in \mathbb{R}$ tal que $X + m \geq 0$,

$$\int (X + m)dc - m = \int_{-m}^0 (c(X > x) - 1)dx + \int_0^\infty c(X > x)dx. \quad (1.7)$$

El lado derecho de la igualdad anterior es independiente de $m \geq -\inf X$, por lo cual tiene sentido extender la definición de integral de Choquet para toda $X \in L^\infty$, de la siguiente manera:

$$\int Xdc := \int_{-\infty}^0 (c(X > x) - 1)dx + \int_0^\infty c(X > x)dx, \quad (1.8)$$

De aquí es evidente que,

$$\int \lambda Xdc = \lambda \int Xdc \quad \text{y} \quad \int (X + m)dc = \int Xdc + m, \quad (1.9)$$

para cualesquiera $\lambda \geq 0$ y $m \in \mathbb{R}$. Más aún,

$$\int Ydc \geq \int Xdc \quad \text{para } Y \geq X. \quad (1.10)$$

Entonces, la integral de Choquet de la pérdida

$$\rho(X) := \int (-X)dc, \quad (1.11)$$

es una medida de riesgo sobre L^∞ que satisface [HP]. Se puede demostrar que $\rho(\cdot)$ es coherente si y sólo si $c(\cdot)$ es *submodular*, es decir,

$$c(A \cup B) + c(A \cap B) \leq c(A) + c(B), \quad \text{para cualesquiera } A, B \in \mathcal{F}. \quad (1.12)$$

◇

Ejemplo 1.1.3 (Valor en Riesgo). Probablemente, la medida de riesgo más utilizada en las instituciones financieras es el Valor en Riesgo (Value at Risk en inglés). Ésta medida ha tenido una gran trayectoria dentro del marco de regulación de capital Basel II. Antes de definirla formalmente se recordará el concepto de cuantil.

Definición 1.1.3. Para $\lambda \in (0, 1)$ se define el λ -cuantil de una v.a. X como cualquier número real q con la siguiente propiedad:

$$\mathbf{P}(X \leq q) \geq \lambda \quad \text{y} \quad \mathbf{P}(X < q) \leq \lambda. \quad (1.13)$$

El conjunto de todos los λ -cuantiles de X es el intervalo $[q_X^-(\lambda), q_X^+(\lambda)]$, donde

$$q_X^-(t) = \inf\{x : \mathbf{P}(X \leq x) \geq t\} \quad \text{y} \quad q_X^+(t) = \inf\{x : \mathbf{P}(X \leq x) > t\} \quad (1.14)$$

son la función cuantil inferior y superior de X , respectivamente. A lo largo de este trabajo también usaremos la notación $F_X^{-1}(t) := q_X^-(t)$.

Definición 1.1.4. Sea $\lambda \in (0, 1)$ un nivel (de confianza) dado. Para una posición financiera X , se define el *Valor en Riesgo* (VaR) al nivel λ como sigue:

$$VaR_\lambda(X) := -q_X^+(\lambda) = q_{-X}^-(1 - \lambda) = \inf\{m \in \mathbb{R} : \mathbf{P}(X + m < 0) \leq \lambda\}. \quad (1.15)$$

En términos probabilísticos, $VaR_\lambda(X)$ no es más que un cuantil de la distribución de X y los valores típicos de λ son 0.05 o 0.01. En administración de riesgo de mercado el horizonte de tiempo es usualmente uno o diez días, en administración de riesgo de crédito y operacional el horizonte es por lo general de un año. En términos financieros, $VaR_\lambda(X)$ representa la menor cantidad de capital que debe ser agregada a la posición X e invertida en activos sin riesgo, con el fin de mantener la probabilidad de un resultado negativo debajo del nivel λ . Observe que el VaR controla la probabilidad de la pérdida pero no provee ninguna información acerca de la severidad de dicha pérdida, en caso de que ésta ocurra.

Es inmediato de la representación del VaR como el cuantil de una distribución, que satisface las propiedades [MI], [IT] y [HP]. Sin embargo, en general no cumple con la propiedad [CO], lo cual hace que el VaR no sea una medida de riesgo convexa. Dado que estamos bajo [HP], es equivalentemente establecer que el VaR no satisface la propiedad [SA] y por lo tanto no es una medida de riesgo coherente. Enseguida se introduce el concepto

de continuidad por arriba de las medidas de riesgo para luego dar un resultado que indica que no existe la medida de riesgo convexa más pequeña que domine al VaR .

Definición 1.1.5. Se dice que una medida de riesgo es *continua por arriba* si satisface la siguiente propiedad:

- Continuidad por Arriba [CA]: Para cualquier sucesión $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ con $X_n \downarrow X$, se cumple $\rho(X_n) \uparrow \rho(X)$.

Proposición 1.1.1. Para cada $X \in L^\infty$ y cada $\lambda \in (0, 1)$,

$$VaR_\lambda(X) = \inf\{\rho(X) : \rho(\cdot) \text{ es convexa, continua por arriba y } \rho(\cdot) \geq VaR_\lambda(\cdot)\}. \quad (1.16)$$

El VaR ha sido bastante criticado pues como ya se ha mencionado, no es una medida de riesgo coherente ya que no cumple con la propiedad [SA]. Al no poseer esta propiedad, se pueden dar situaciones en las que el VaR penalice la diversificación en vez de fomentarla. Otro problema surge al momento de hacer optimización de portafolios con respecto al VaR , pues podría conducir a un portafolio concentrado en un sólo activo con una probabilidad de bancarrota pequeña, pero con exposición a pérdidas grandes. \diamond

Ejemplo 1.1.4 (Expectativa Condicionada a lo Peor). Considere \mathcal{Q} la clase de todas las distribuciones condicionales $\mathbf{P}(\cdot|A)$ tales que $A \in \mathcal{F}$ y $\mathbf{P}(A) > \lambda$ para algún nivel $\lambda \in (0, 1)$. La medida de riesgo coherente inducida por \mathcal{Q} ,

$$WCE_\lambda(X) := \sup\{\mathbb{E}[-X|A] : A \in \mathcal{F} \text{ y } \mathbf{P}(A) > \lambda\}, \quad (1.17)$$

es conocida como la Expectativa Condicionada a lo Peor (Worst Conditional Expectation en inglés) al nivel λ . \diamond

Ejemplo 1.1.5 (Déficit Esperado). En la actualidad, el Déficit Esperado (Expected Shortfall en inglés) es una medida de riesgo que en la practica ha sido adoptada por algunos administradores de riesgo. De hecho, se prefiere ante el VaR , pues satisface por completo las propiedades de coherencia.

Definición 1.1.6. Sea $\lambda \in (0, 1)$ un nivel (de confianza) dado. El Déficit Esperado (ES) al nivel λ de la posición X está dado por

$$ES_\lambda(X) := \frac{1}{\lambda} \int_0^\lambda VaR_\gamma(X) d\gamma. \quad (1.18)$$

En la literatura, también se conoce como Promedio del Valor en Riesgo (Average Value at Risk en inglés) o Valor en Riesgo Condicional (Conditional Value at Risk en inglés). Discusiones y resultados interesantes sobre el ES pueden encontrarse en Acerbi y Tasche [3], Tasche [28] y Acerbi, Nordio y Sirtori [1].

Lema 1.1.2. Para todo $\lambda \in (0, 1)$ y cualquier $q \in [q_X^-(\lambda), q_X^+(\lambda)]$,

$$ES_\lambda(X) = \frac{1}{\lambda} \mathbb{E}[(q - X)^+] - q = \frac{1}{\lambda} \inf_{r \in \mathbb{R}} (\mathbb{E}[(r - X)^+] - \lambda r). \quad (1.19)$$

Algunos autores utilizan la representación dada por la última igualdad en la ecuación anterior como definición del ES .

Proposición 1.1.3. Para cualquier $X \in L^\infty$,

$$\begin{aligned} ES_\lambda(X) &\geq WCE_\lambda(X) \\ &\geq \mathbb{E}[-X | -X \geq VaR_\lambda(X)] \\ &\geq VaR_\lambda(X). \end{aligned} \quad (1.20)$$

Más aún, las primeras dos desigualdades son de hecho igualdades si

$$P(X \leq q_\lambda^+(X)) = \lambda, \quad (1.21)$$

es decir, cuando X tiene distribución continua.

Lo que este último resultado expresa, es que el ES coincide con el WCE cuando el espacio de probabilidad posee algunas características deseables. \diamond

Como se pudo observar, la Proposición 1.1.1 indica que no existe la medida de riesgo más pequeña que domine al VaR . Pero si nos restringimos a las medidas de riesgo que no sólo dominan al VaR , sino que también sólo dependen de la distribución de la v.a., entonces la situación es diferente. Para ilustrar esta situación, ahora nos enfocaremos en las medidas de riesgo que sólo dependen de la distribución de la posición financiera.

1.1.1. Invarianza en Ley

Es evidente de la definición del VaR y el ES , que sus valores sólo involucran la distribución de la posición X bajo la medida de probabilidad \mathbf{P} . En lo siguiente se estudiarán las medidas de riesgo que comparten esta propiedad de invarianza en ley.

Definición 1.1.7. Una medida de riesgo $\rho : L^\infty \rightarrow \mathbb{R}$ es llamada *invariante en ley* si satisface la siguiente propiedad:

- Invarianza en Ley [IL]: Para $X, Y \in L^\infty$ con la misma distribución bajo \mathbf{P} , se tiene que $\rho(X) = \rho(Y)$.

A partir de ahora, se asumirá que en el espacio de probabilidad $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$ se puede definir una v.a. con distribución continua. Es un hecho conocido, que esta condición se satisface si y sólo si el espacio de probabilidad no tiene átomos. Para establecer el primer resultado de esta sección, denote por $\mathcal{M}_1((0, 1])$ el conjunto de todas las medidas de probabilidad sobre el $(0, 1]$. El siguiente teorema, además de proveer una caracterización para las medidas de riesgo coherentes que satisfacen [IL] y [CA], muestra que el ES juega un papel fundamental en esta clase de medidas.

Teorema 1.1.4. *Una medida de riesgo coherente $\rho(\cdot)$ es invariante en ley y continua por arriba si y sólo si*

$$\rho(X) = \sup_{\mu \in \mathcal{M}_1((0,1])} \int_{(0,1]} ES_\lambda(X) \mu(d\lambda) \quad (1.22)$$

para algún $\mathcal{M} \subset \mathcal{M}_1((0, 1])$.

En contraste con la Proposición 1.1.1, el siguiente resultado indica que el ES es la mejor aproximación conservadora del VaR en la clase de todas las medidas de riesgo convexas que son continuas por arriba e invariantes en ley.

Teorema 1.1.5. *El ES es la medida de riesgo convexa más pequeña que satisface invarianza en ley, la cual es continua por arriba y domina al VaR .*

1.1.2. Comonotonicidad

En situaciones en las que una posición X sirve como cobertura contra los cambios adversos en otra posición Y , el riesgo de la posición diversificada $X + Y$ es estrictamente menor que el riesgo de las posiciones individuales. Por otro lado, si no hay manera de que X funcione como una cobertura de Y , se quisiera que el riesgo de la posición global sea simplemente la suma de los riesgos individuales. Para hacer precisa esta idea, se introducirá el concepto de comonotonicidad.

Definición 1.1.8. Se dice que dos funciones medibles X y Y sobre (Ω, \mathcal{F}) son *comonótonas* si satisfacen,

$$(X(\omega) - X(\omega'))(Y(\omega) - Y(\omega')) \geq 0 \quad \text{para todo } (\omega, \omega') \in \Omega \times \Omega. \quad (1.23)$$

Definición 1.1.9. Una medida de riesgo $\rho : L^\infty \rightarrow \mathbb{R}$ es llamada *comonótona* si satisface la siguiente propiedad:

- Comonotonicidad [CO]: Para $X, Y \in L^\infty$ comonótonas, se tiene que $\rho(X + Y) = \rho(X) + \rho(Y)$.

El siguiente resultado provee una manera de verificar la comonotonicidad de dos variables aleatorias, al mismo tiempo que muestra como construir variables aleatorias con esta propiedad.

Lema 1.1.6. *Dos funciones medibles X y Y sobre (Ω, \mathcal{F}) son comonótonas si y sólo si existe una tercera función medible Z sobre (Ω, \mathcal{F}) y dos funciones no decrecientes sobre \mathbb{R} tales que $f(Z) = X$ y $g(Z) = Y$.*

Enseguida se presenta un teorema de caracterización para las medidas de riesgo que poseen todas las propiedades que hemos venido estudiando. En este teorema, de nuevo se hace notable la importancia del ES .

Teorema 1.1.7. *En un espacio de probabilidad sin átomos, la clase de medidas de riesgo*

$$\rho(X) = \int_{(0,1]} ES_\lambda(X) \mu(d\lambda), \quad \mu \in \mathcal{M}_1((0,1]), \quad (1.24)$$

es precisamente la clase de todas las medidas de riesgo convexas e invariantes en ley, que son comonótonas. En particular, cualquier medida de riesgo convexa que satisface invarianza en ley y comonotonicidad es también coherente y continua por arriba.

La demostración de este importante resultado se basa principalmente en identificar la expresión (1.24) con una integral de Choquet y en la existencia de una correspondencia uno a uno entre medidas de probabilidad definidas en el intervalo $[0, 1]$ y funciones cóncavas crecientes $\psi : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$ tales que $\psi(0) = 0$ y $\psi(1) = 1$. Al Teorema 1.1.7 se le conoce como Teorema de Representación de Kusuoka y como se podrá observar en la siguiente sección existe otra versión basada en funciones de distorsión.

1.2. Familias Paramétricas de Medidas de Riesgo

El objetivo principal de esta sección es dar a conocer el trabajo de Tsukahara [29], en el cual se introducen las familias paramétricas de medidas de riesgo distorsionadas. Como se podrá observar a lo largo de esta sección, la manera en la que Tsukahara logra obtener dichas familias, esencialmente está basada en el Teorema de Representación de Kusuoka

[20] para medidas de riesgo coherentes que son comonótonas e invariantes en ley, y en la imposición de ciertas condiciones de comparabilidad con el ES . Antes de empezar a desarrollar el trabajo de Tsukahara, dedicaremos unas líneas a discutir sobre las medidas de riesgo distorsionadas.

1.2.1. Medidas de Riesgo Distorsionadas

Las medidas de riesgo distorsionadas tienen su origen en la teoría dual de elección bajo riesgo de Yaari [30]. La idea de Yaari consiste en medir el riesgo de una posición financiera X , aplicando una función de distorsión a la distribución $F_X(\cdot)$ de dicha posición. Enseguida se definen formalmente los conceptos antes mencionados.

Definición 1.2.1. Una *función de distorsión* es una función $f : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$ tal que $f(0) = 0$, $f(1) = 1$, es no decreciente y continua por la derecha. Es decir, es una función de distribución en el intervalo $[0, 1]$.

Definición 1.2.2. Se dice que $\rho_f : L^\infty \rightarrow \mathbb{R}$ es un *medida de riesgo distorsionada*, si para cualquier $X \in L^\infty$

$$\rho_f(X) = - \int_{\mathbb{R}} x d(f \circ F_X)(x), \quad (1.25)$$

donde $f(\cdot)$ es una función de distorsión.

Por obvias razones, a la expresión en el lado de derecho de (1.25) se le conoce comúnmente como *esperanza distorsionada bajo $f(\cdot)$* . Las medidas de riesgo distorsionadas fueron aplicadas por primera vez en el contexto de seguros. Por ejemplo, Wang [31] considera la siguiente función de distorsión,

$$f(p) = \Phi(\Phi^{-1}(p) - \Phi^{-1}(q)), \quad \text{para toda } p \in [0, 1], \quad (1.26)$$

donde $\Phi(\cdot)$ es la función de distribución normal estándar y $0 < q \leq 0.5$ es un parámetro. La medida de riesgo asociada es conocida como la transformada de Wang.

Uno de los resultados más interesantes acerca de las medidas de riesgo distorsionadas, es la siguiente versión del Teorema de Representación de Kusuoka [20].

Teorema 1.2.1. *Una medida de riesgo $\rho_f : L^\infty \rightarrow \mathbb{R}$ es una medida de riesgo coherente que satisface comonotonicidad e invarianza en ley si y sólo si existe una función de distorsión cóncava $f(\cdot)$ tal que*

$$\rho_f(X) = - \int_{[0,1]} F_X^{-1}(u) df(u) = - \int_{\mathbb{R}} xd(f \circ F_X)(x). \quad (1.27)$$

Es evidente de la ecuación anterior, que el efecto de la concavidad en la función de distorsión es dar más peso a los eventos negativos y reducirlo en los eventos positivos. Cuando $f(\cdot) = id(\cdot)$, la medida de riesgo corresponde simplemente a la esperanza $\rho_{id}(X) = -\mathbb{E}[X]$. El valor esperado es la medida de riesgo distorsionada menos pesimista, pues por la concavidad de la función de distorsión se tiene que $f(u) \geq u$ para toda $u \in [0, 1]$, lo cual por la Definición 1.25 implica,

$$\rho_f(X) \geq \rho_{id}(X) = -\mathbb{E}[X].$$

En la literatura sobre medidas de riesgo es muy común encontrar que las variables $X \in L^\infty$ representan la pérdida sobre una posición financiera en vez del valor de la posición. En este caso, existen algunos cambios (obvios y otros no tan obvios) en la teoría y en las interpretaciones que hemos expuesto. Es importante mencionar que no importa bajo que interpretación de $X \in L^\infty$ se trabaje, siempre se puede ir de una a otra con las debidas modificaciones. Como ejemplo de este hecho enseguida se formula el Teorema de Representación de Kusuoka para cuando $X \in L^\infty$ representa pérdida.

Teorema 1.2.2. *Una medida de riesgo $\rho_D : L^\infty \rightarrow \mathbb{R}$ es una medida de riesgo coherente que satisface comonotonicidad e invarianza en ley si y sólo si existe una función de distorsión convexa $D(\cdot)$ tal que*

$$\rho_D(X) = \int_{[0,1]} F_X^{-1}(u) dD(u) = \int_{\mathbb{R}} xd(D \circ F_X)(x). \quad (1.28)$$

Observe que la diferencia entre las expresiones (1.27) y (1.28) es la concavidad o convexidad de la función de distorsión y un signo negativo. Se puede verificar que ambas expresiones y sus respectivas funciones de distorsión están relacionadas de la siguiente manera,

$$\rho_f(-X) = -\rho_D(X) \quad \text{con} \quad f(u) = 1 - D(1 - u), \quad u \in [0, 1], \quad (1.29)$$

para $X \in L^\infty$ representando pérdida.

Con el objetivo de no alterar los resultados de Tsukahara [28] que expondremos en la siguiente sección, en lo queda de este capítulo interpretaremos a $X \in L^\infty$ como pérdida. Para concluir este apartado, se presentan dos ejemplos de medidas de riesgo que pueden representarse como una esperanza distorsionada.

Ejemplo 1.2.1 (*VaR*). Considerando la distorsión $D(u) = \mathbf{1}_{[1-\alpha, 1]}(u)$, $0 < \alpha < 1$ en (1.27), se obtiene el cuantil $(1 - \alpha)$ que es por definición el $VaR(X)$. Como ya se mencionó anteriormente, el VaR no es una medida de riesgo coherente, lo cual desde el punto de vista de las distorsiones, se debe a que $D(\cdot)$ no es una función convexa. \diamond

Ejemplo 1.2.2 (*ES*). Para $0 < \alpha < 1$ considere

$$D_\alpha^{ES}(u) = \frac{1}{\alpha}[u - (1 - \alpha)]_+, \quad (1.30)$$

donde $a_+ = \max(a, 0)$. Sustituyendo en (1.27), la medida de riesgo resultante es el conocido déficit esperado

$$ES_\alpha(X) = \frac{1}{\alpha} \int_{1-\alpha}^1 F_X^{-1}(u) du. \quad (1.31)$$

Es inmediato de la definición de D_α^{ES} , que para $0 < \alpha_1, \alpha_2 < 1$ se satisface

$$D_{\alpha_1}^{ES} \circ D_{\alpha_2}^{ES} = D_{\alpha_1 \alpha_2}^{ES}, \quad (1.32)$$

$$D_1^{ES}(u) = u, \quad \lim_{\alpha \downarrow 0} D_\alpha^{ES} = \mathbf{1}_{\{1\}}(u), \quad (1.33)$$

$$ES_1(X) = \mathbb{E}[X], \quad \lim_{\alpha \downarrow 0} ES_\alpha(X) = \text{ess sup } X. \quad (1.34)$$

\diamond

1.2.2. Familias Paramétricas de Distorsiones

Es bastante deseable en la práctica, que al momento de hacer una cuantificación del riesgo se pueda escoger una medida que refleje la subjetividad que puede haber por parte de un gestor de riesgo. Para esto, algo esencial es tener distintas medidas de riesgo, y de ser posible, que éstas cumplan los axiomas básicos de coherencia. Siguiendo el trabajo de Tsukahara [28], en esta sección se dará la construcción de una familia de funciones de distorsión convexas, a través de la cual se obtiene mediante la representación dada en (1.28) una gran cantidad de medidas de riesgo coherentes que son invariantes en ley y comonótonas.

Considerando como punto de partida las propiedades de la distorsión ES dada en (1.30), se asumirá que para una familia de distorsiones parametrizada $\{D_\theta(\cdot)\}_{\theta>0}$ se satisfacen las siguientes condiciones:

- [A.1]: Para cada $\theta > 0$, $u \rightarrow D_\theta(u)$ es continua.
- [A.2]: Para cada $u \in (0, 1)$, $\theta \rightarrow D_\theta(u)$ es continua y no constante.
- [G]: Para $\theta_1, \theta_2 > 0$, $D_{\theta_1} \circ D_{\theta_2}(\cdot) = D_{\theta_1\theta_2}(\cdot)$.

Observe que cuando $D(\cdot)$ es una distorsión convexa entonces necesariamente es continua en $(0, 1)$. Se puede verificar que bajo [A.2] y [G], la función $\theta \rightarrow D_\theta(u)$ es estrictamente creciente.

Como el siguiente resultado lo indica, Tsukahara obtiene una caracterización de las funciones de distorsión que satisfacen [A.1], [A.2] y [G].

Teorema 1.2.3. *La familia de funciones de distorsión $\{D_\theta(\cdot)\}_{\theta>0}$ satisface [A.1], [A.2] y [G] si y sólo si existe una función de distribución $\Psi(\cdot)$ estrictamente creciente y continua*

sobre \mathbb{R} tal que $D_\theta(\cdot)$ puede ser escrita de la forma

$$D_\theta(u) = \Psi(\Psi^{-1}(u) + \log(\theta)), \quad u \in (0, 1). \quad (1.35)$$

La demostración de este resultado puede encontrarse en el Apéndice A. Observe que la distorsión ES satisface [A.1] y [A.2] pero no cumple [G] cuando se elige $\alpha_2 < 1 < \alpha_1$ y $u < 1 - \alpha_2$. Sin embargo, admite una representación como en (1.35) al considerar $\Psi(\cdot)$ como la distribución exponencial estándar, es decir, $\Psi(x) = 1 - e^{-x}$ para $x > 0$ y $\Psi(x) = 0$ para $x \leq 0$. El Teorema 1.2.3 motiva la siguiente definición.

Definición 1.2.3. Se le llamará *grupo de distorsión con un parámetro* a cualquier familia de distorsiones $\{D_\theta(\cdot)\}_{\theta>0}$ que admita una representación de la forma (1.35) para alguna función de distribución $\Psi(\cdot)$ estrictamente creciente y continua sobre \mathbb{R} .

Este tipo de distorsiones han sido consideradas por Dabrowska, Doksum y Miura [9] en un contexto estadístico y por Arnold [4] en economía para la construcción de curvas de Lorenz.

Con el fin de obtener medidas de riesgo distorsionadas que sean coherentes, invariantes en ley y comonótonas utilizando el Teorema 1.2.2, necesitamos garantizar la convexidad de los elementos del grupo de distorsión con un parámetro $\{D_\theta(\cdot)\}_{\theta>0}$. Enseguida se deducirá una condición necesaria y suficiente para asegurar dicha convexidad. Suponga que $\Psi(\cdot)$ es dos veces diferenciable con primera y segunda derivada $\psi(\cdot)$ y $\psi'(\cdot)$, respectivamente. Haciendo $x = \Psi^{-1}(u)$ y derivando $D_\theta(\cdot)$ se obtiene lo siguiente:

$$d'_\theta(u) := \frac{\partial^2}{\partial u^2} D_\theta(u) = \frac{\psi'(x + \log \theta) - \psi(x + \log \theta)\psi'(x)/\psi(x)}{[\psi(x)]^2}. \quad (1.36)$$

Como se está asumiendo que $\Psi(\cdot)$ es dos veces diferenciable, entonces $D_\theta(\cdot)$ es convexa si y sólo si $d'_\theta(\cdot) \geq 0$. De aquí y de la expresión anterior se sigue que $D_\theta(\cdot)$ es convexa si y sólo si se satisface:

$$\frac{\psi'(x + \log \theta)}{\psi(x + \log \theta)} \geq \frac{\psi'(x)}{\psi(x)} \quad \text{para toda } x \in \mathbb{R}. \quad (1.37)$$

Por otra parte, recuerde que una densidad $h(\cdot)$ fuertemente unimodal es tal que $\log(h(\cdot))$ es una función cóncava. Por lo que escogiendo $\psi(\cdot)$ fuertemente unimodal se tiene que $(\psi'(\cdot)/\psi(\cdot))$ es decreciente, y por lo tanto considerar $\theta \in (0, 1]$ es una condición necesaria y suficiente para la convexidad de $D_\theta(\cdot)$.

Integrando todo lo anterior se puede resumir la aportación principal de Tsukahara [28] de la siguiente manera: *escogiendo $\Psi(\cdot)$ con densidad fuertemente unimodal en el grupo de distorsión con un parámetro, para $0 < \theta \leq 1$ se tiene que $D_\theta(\cdot)$ es convexa y*

$$\rho_\theta(X) := \int_{[0,1]} F_X^{-1}(u) dD_\theta(u) = \int_{\mathbb{R}} x dD_\theta \circ F_X(x) \quad (1.38)$$

es una medida de riesgo coherente que satisface [LI] y [CA]. Además,

$$D_1(u) = u, \quad \lim_{\theta \downarrow 0} D_\theta(u) = \mathbf{1}_{\{1\}}(u), \quad y \quad D_{\theta_1} \circ D_{\theta_2}(\cdot) = D_{\theta_1 \theta_2}(\cdot) \quad (1.39)$$

Entonces, Tsukahara ha obtenido una familia de medidas de riesgo que pueden compararse razonablemente con el déficit esperado. Enseguida se presentan algunos ejemplos de grupos de distorsión con un parámetro.

Ejemplo 1.2.3 (Probabilidades Proporcionales). Considerando la distorsión $D_\theta^{PO}(u) = \theta u[1 - u + \theta u]^{-1}$, $\theta > 0$, se obtiene el modelo conocido como probabilidades proporcionales (proportional odds en inglés). Esta distorsión puede expresarse de la forma (1.35) si se escoge $\Psi(x) = [1 + \exp(-x)]^{-1}$. \diamond

Ejemplo 1.2.4 (Riesgos Proporcionales). La familia $D_\theta^{PH}(u) = 1 - (1 - u)^\theta$, $\theta > 0$ da lugar a las medidas conocidas como riesgos proporcionales (proportional hazards en inglés). La función $\Psi(x) = 1 - \exp(-\exp(x))$ en (1.35) da como resultado dicha familia. Se tiene que $D_\theta^{PH}(\cdot)$ es convexa si $0 < \theta \leq 1$. Esta familia tiene varias aplicaciones en las ciencias actuariales. \diamond

Ejemplo 1.2.5 (γ -Probabilidades Proporcionales). Considerando la siguiente distorsión,

$$D_\theta^{PGO}(u) = \begin{cases} 1 - \left[\frac{(1-u)^\gamma}{\theta - \theta(1-u)^\gamma + (1-u)^\gamma} \right]^{1/\gamma} & \text{si } \gamma > 0, \\ 1 - (1-u)^\theta & \text{si } \gamma = 0, \end{cases} \quad (1.40)$$

se obtiene la familia de medidas de riesgo conocida como γ -probabilidades proporcionales (proportional γ -odds en inglés). Se puede verificar directamente que escogiendo

$$\Psi(x) = 1 - (1 + \gamma \exp(x))^{1/\gamma} \quad (1.41)$$

en la ecuación (1.35) se obtiene esta distorsión. \diamond

Ejemplo 1.2.6 (Gaussiana). Considerando $\Psi(x) = \Phi(x)$ en (1.35) se obtiene la distorsión Gaussiana,

$$D_{\theta}^{GA}(u) = \Phi(\Phi^{-1}(u) + \log \theta). \quad (1.42)$$

Esta distorsión es la misma que la de la ecuación (1.26), sólo que aquí se utiliza vía (1.28) en el contexto de pérdida. \diamond

Es importante notar que si $\theta_1 \geq \theta_2$, entonces $\rho_{\theta_1}(X) \leq \rho_{\theta_2}(X)$, y $\mathbb{E}[X] \leq \rho_{\theta}(X) \leq \text{ess sup } X$; lo cual indica que los valores mas pequeños de θ representan los peores escenarios para el tomador de decisiones. Este hecho, junto con una comparación de algunas de las distorsiones mencionadas anteriormente, puede observarse en la siguiente figura.

No hay que olvidar que los resultados de esta sección se desarrollaron en un contexto en el que $X \in L^{\infty}$ representa la pérdida en una posición. Utilizando la relación (1.29) podemos trasladar estos resultados al contexto en el que $X \in L^{\infty}$ representa el valor de una posición. Es decir, un grupo de distorsión con un parámetro $\{D_{\theta}(\cdot), 0 < \theta \leq 1\}$ que vía (1.28) sirve para cuantificar riesgo cuando X representa pérdida, induce un *grupo de distorsión dual* dado por $\{\tilde{D}_{\theta}(\cdot) := 1 - D_{\theta}(1 - (\cdot)), 0 < \theta \leq 1\}$ que vía (1.27) sirve para medir riesgo cuando X representa valor. Las medidas de riesgo generadas por cada grupo reflejan la misma actitud hacia el riesgo, en sus respectivas interpretaciones.

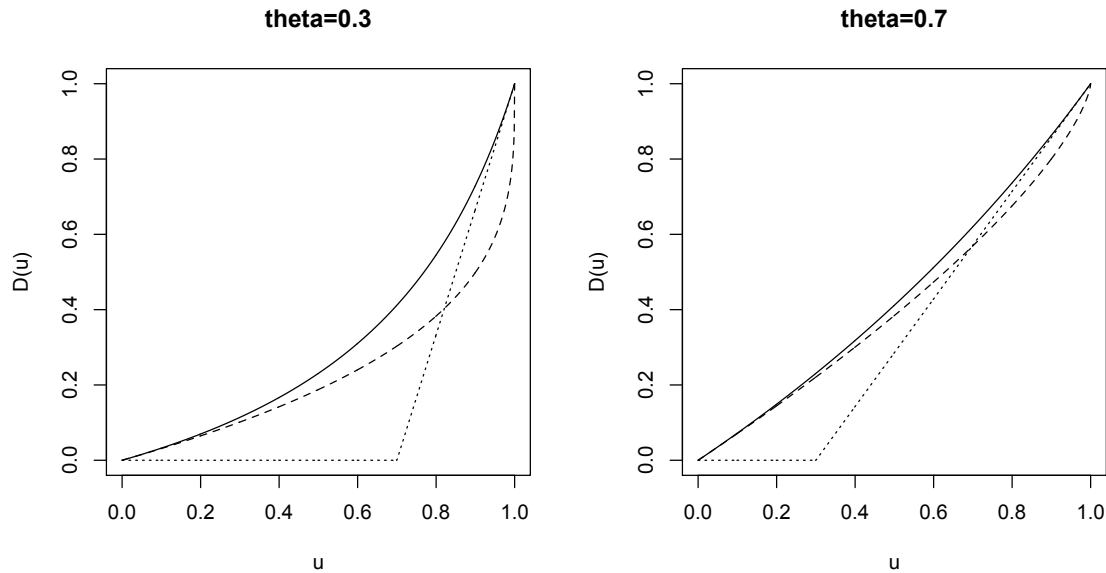


Figura 1.1: — Distorsión PO , - - - Distorsión PH , \dots Distorsión ES

1.3. Estimación e Implementación Computacional

En las siguientes líneas se expondrán algunos resultados sobre la estimación y simulación de una medida de riesgo distorsionada. Recuerde que estamos interpretando a $X \in L^\infty$ como pérdida. Así que en caso de requerir los resultados para la interpretación de valor, es necesario hacer las modificaciones correspondientes.

1.3.1. Estimación Estadística

Para hacer la estimación estadística de $\rho_\theta(X)$ se asumirá que se tiene un proceso $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ estrictamente estacionario con distribución $F_X(\cdot)$ y denotaremos por $\mathbb{F}_n(\cdot)$ la función de distribución empírica basada en la muestra X_1, \dots, X_n .

Un estimador natural para $\rho_\theta(X)$ es el siguiente,

$$\hat{\rho}_\theta^n(X) = \int_0^1 \mathbb{F}_n^{-1}(u) dD_\theta(u) = \sum_{i=1}^n X_{(i)} \left[D_\theta\left(\frac{i}{n}\right) - D_\theta\left(\frac{i-1}{n}\right) \right], \quad (1.43)$$

es decir, reemplazamos $F_X(\cdot)$ por la función de distribución empírica. Concluiremos este apartado con un resultado sobre la propiedad de consistencia fuerte.

Proposición 1.3.1. *Sea $D_\theta(\cdot)$ una función de distorsión convexa, $1 \leq p, q \leq \infty$ tales que $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. Suponga que $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ es una sucesión ergódica estacionaria y que $d_\theta(\cdot) \in L^p(0, 1)$ y $F_X^{-1}(\cdot) \in L^q(0, 1)$. Entonces,*

$$\hat{\rho}_\theta^n(X) \rightarrow \rho_\theta(X), \text{ c.s.} \quad (1.44)$$

1.3.2. Implementación Computacional

Por razones técnicas se ha supuesto que la variable aleatoria X que representa pérdida pertenece al conjunto L^∞ . Sin embargo, al momento de hacer aplicaciones es necesario evaluar $\rho_\theta(\cdot)$ incluso cuando X parezca no estar acotada. Antes de cualquier cálculo se debe verificar que para $D_\theta(\cdot)$, $F_X(\cdot)$ y $0 < \theta \leq 1$ dadas,

$$\rho_\theta(X) = \int_{[0,1]} F_X^{-1}(u) dD_\theta(u) = \int_{\mathbb{R}} x dD_\theta \circ F_X(x) < \infty. \quad (1.45)$$

Note que si X no está acotada, la distorsión $D_\theta(\cdot)$ no puede asignar masa al uno y por lo tanto debe ser continua en $[0, 1]$. En este caso, se obtiene

$$\rho_\theta(X) = \int_{[0,1]} F_X^{-1}(u) d_\theta(u) du = \int_{\mathbb{R}} x d_\theta(F_X(x)) dF_X(x), \quad (1.46)$$

donde $d_\theta(\cdot)$ es la derivada de $D_\theta(\cdot)$. La expresión anterior indica que el crecimiento de $F_X^{-1}(\cdot)$ y el comportamiento de $d_\theta(\cdot)$ cerca del uno, son factores decisivos para que $\rho_\theta(X)$ sea finita. Mediante un simple análisis puede demostrarse que una condición suficiente es la existencia de $\delta > 0$ que satisfaga,

$$|F_X^{-1}(u) d_\theta(u)| \leq (1 - u)^{\delta-1}, \quad u \in [0, 1]. \quad (1.47)$$

Con esta sencilla condición se puede asegurar que se cumple (1.45), lo cual al momento de hacer aplicaciones garantiza que las medidas de riesgo estén bien definidas.

Enseguida describiremos como hacer simulaciones del valor de una medida de riesgo distorsionada. Lo que haremos será presentar una comparación numérica del VaR , ES y PO , utilizando dos diferentes modelos para la distribución $F_X(\cdot)$ de las pérdidas. El primer modelo será una distribución normal con media cero y desviación estándar 126.5; el segundo una distribución t -student con cuatro grados de libertad, escalada para tener una desviación estándar de 126.5. Se utilizará la última expresión en (1.46) para el cálculo de la medida de riesgo PO . Específicamente, se generarán 100,000 observaciones X_i de $F_X(\cdot)$ y se calculará la media de $X_i d_\theta^{PO}(F_X(X_i))$. Esto se repetirá 1,000 veces y tomaremos la media como el valor de la medida de distorsión. La siguiente tabla muestra los resultados obtenidos.

Capítulo 2

Optimización de Portafolios

Los trabajos iniciales acerca del problema de selección de portafolio en tiempo continuo, fueron los de Samuelson [27] y Merton [24]. Desde entonces, el estudio de este problema se ha centrado principalmente en el modelo de maximización de la utilidad esperada, que junto con el modelo media-varianza de Markowitz [22], representan los criterios de decisión en selección de portafolio más predominantes. En cada uno de estos modelos se establece un conjunto de restricciones, entre las cuales siempre se encuentra la conocida comúnmente como restricción de capital.

La maximización de utilidad bajo la restricción de capital es un problema fundamental en el área de Matemáticas Financieras, por lo que ha sido estudiado en una gran cantidad de artículos, en los cuales se han desarrollado esencialmente dos aproximaciones para resolverlo. Una es la aproximación por control estocástico o programación dinámica, propuesta inicialmente por Merton [24] y [25], en la que el problema se transforma en resolver la ecuación diferencial parcial conocida como la ecuación de Hamilton-Jacobi-Bellman (HJB). La otra es la aproximación martingala, que ha sido estudiada por Harrison y Kreps [13], Harrison y Pliska [14] y Pliska [26], en la cual se emplea el Teorema de Representación de

Martingalas para convertir la ecuación que satisface el capital en una restricción estática y entonces identificar el capital final óptimo resolviendo un problema de optimización estático. En el caso del mercado completo, la estrategia óptima es simplemente la que replica el capital final óptimo.

Desde hace varios años se sabe que algunos de los principios básicos del modelo de maximización de utilidad esperada son constantemente violado en la práctica. Por ejemplo, en la teoría de utilidad esperada la actitud del agente frente al riesgo y la actitud frente a la riqueza están estrechamente ligadas. Fundamentalmente, la aversión al riesgo y la utilidad marginal de la riqueza que son sinónimos en esta teoría, son dos cosas muy diferentes. el primero expresa una actitud hacia el riesgo mientras que el segundo una actitud hacia la riqueza. Esto ha motivado el desarrollo de modelos en los que estos conceptos puedan ser separados uno del otro. Una de las alternativas más destacadas está expuesta en el trabajo de Yaari [30] y se conoce como “teoría de elección dual” de Yaari. Esta teoría propone que en vez de distorsionar el capital final con una función de utilidad, se aplique una distorsión a la cola de su función de distribución. Otros trabajos importantes, desarrollados bajo esta misma línea de investigación, de involucrar funciones de distorsión, son el de Lopes [21] donde propone el llamado modelo SP/A de Lopes y el de Kahneman y Tversky [17] quienes desarrollan lo que ahora se conoce como teoría de perspectiva de Kahneman y Tversky, por mencionar algunos.

El objetivo principal de este capítulo es dar a conocer una formulación general del problema de selección de portafolio, desarrollada por He y Zhou [15]. Para poder lograr esto, en la Sección 2.1, se planteará el modelo de mercado financiero sobre el cual se hará la selección del portafolio óptimo. Con el fin de destacar la generalidad del modelo de He y Zhou, la Sección 2.2 se dedica a exponer algunos de los modelos de selección más conocidos, para finalmente, exponer en la Sección 2.3 el modelo de selección, el cual abarca las formulaciones antes mencionadas y muchas otras.

2.1. Modelo de Mercado Financiero

Basandonos en el libro de Karatzas y Shreve [18], en esta sección se definirá el modelo de mercado financiero en tiempo continuo, sobre el cual evolucionará el valor de las posiciones financieras de las que se hizo mención en el capítulo anterior. A lo largo de este trabajo, denotaremos por A^\top la transpuesta de una matriz A y para toda $a \in \mathbb{R}$ se denotará por $a_+ := \max(a, 0)$ y $a_- := \max(-a, 0)$ la parte positiva y negativa de a , respectivamente.

Se considerará un modelo de mercado financiero, en el cual se podrá invertir continuamente en $m + 1$ activos, durante algún horizonte de tiempo finito $0 < T < \infty$. El primero de éstos, es un activo libre de riesgo llamado *bono*, cuyo precio $S_0(t)$ al tiempo $0 \leq t \leq T$ evoluciona de acuerdo a la siguiente ecuación:

$$dS_0(t) = r(t)S_0(t)dt, \quad S_0(0) = s_0 > 0. \quad (2.1)$$

En este trabajo, adicionalmente se asumirá que existen $s_2 \geq s_1 > 0$ tales que

$$s_1 \leq S_0(T) \leq s_2. \quad (2.2)$$

Los otros m activos están sujetos a cierto riesgo y comúnmente se les conoce como *stocks*. La dinámica del precio $S_i(t)$ del i -ésimo stock al tiempo $0 \leq t \leq T$, se modela con la siguiente ecuación diferencial estocástica:

$$dS_i(t) = S_i(t) \left[b_i(t)dt + \sum_{j=1}^n \sigma_{ij} dW^j(t) \right], \quad S_i(0) = s_i > 0, \quad i = 1, \dots, m. \quad (2.3)$$

En este mercado, la fuente de riesgo al tiempo t se modela con las componentes independientes de un movimiento browniano n -dimensional $W(t) = (W^1(t), \dots, W^n(t))^\top$, $0 \leq t \leq T$. Con esta interpretación, los coeficientes de volatilidad $\sigma_{ij}(t)$ en la ecuación (2.1) modelan la intensidad instantánea con la cual la j -ésima fuente de incertidumbre afecta el precio del i -ésimo stock al tiempo $0 \leq t \leq T$. El movimiento browniano W está definido sobre

un espacio de probabilidad completo $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$; denotaremos por $\mathbb{F} = \{\mathcal{F}_t, 0 \leq t \leq T\}$ la completación bajo \mathbf{P} de la filtración natural

$$\mathcal{F}_t^W = \sigma\{W(s) : 0 \leq s \leq t\}, \quad 0 \leq t \leq T, \quad (2.4)$$

generada por W .

El proceso de *tasa de interés* $\{r(t), 0 \leq t \leq T\}$, el proceso vectorial de *tasa de apreciación* $\{b(t) = (b_1(t), \dots, b_m(t))^\top, 0 \leq t \leq T\}$ y el proceso matricial de *volatilidades* $\{\sigma(t) = (\sigma_{ij}(t))_{m \times n}, 0 \leq t \leq T\}$, son conocidos conjuntamente como los *coeficientes* del modelo de mercado. Se asumirá que estos coeficientes son progresivamente medibles con respecto a \mathbb{F} y que satisfacen las siguientes condiciones,

$$\int_0^T |r(t)| < \infty, \quad c.s., \quad (2.5)$$

$$\int_0^T \left[\sum_{i=1}^m |b_i(t)| + \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n |\sigma_{ij}(t)|^2 \right] dt < \infty, \quad c.s.. \quad (2.6)$$

El requerimiento de que los coeficientes sean adaptados a \mathbb{F} , esencialmente los hace funcionales de la trayectoria del movimiento browniano $\{W(s), 0 \leq s \leq t\}$ hasta el tiempo t , para toda $0 \leq t \leq T$. Esta condición excluye cualquier anticipación al futuro de los precios, pero permite la dependencia sobre los precios pasados; dos características deseables. A partir de ahora, nos referiremos al modelo de mercado planteado anteriormente como modelo de mercado \mathcal{M} .

2.1.1. Estrategias Admisibles

Ahora, se introducirá al modelo de mercado \mathcal{M} , un *pequeño inversionista* (aquel cuya participación en el mercado no afecta de manera importante el comportamiento de los precios), quien puede decidir en cada instante de tiempo $0 \leq t \leq T$, cuanto dinero $\pi_i(t)$, $i = 1, \dots, m$, invertirá en cada uno de los stocks disponibles. Naturalmente, esta decisión

debe ser hecha de una manera no anticipada, es decir, sin conocimiento sobre eventos futuros. En otros términos, $\pi_i(t)$, $i = 1, \dots, m$, debe ser una v.a. \mathcal{F}_t -medible.

Si denotamos por $X(t)$ la ganancia al tiempo $0 \leq t \leq T$ de un inversionista que inicia con capital $X(0) = x_0 \geq 0$ y definimos la *tasa de exceso de retorno* como $B(t) := (b_1(t) - r(t), \dots, b_m(t) - r(t))^\top$, se tiene que el proceso de capital $\{X(t), 0 \leq t \leq T\}$ satisface la siguiente ecuación (ver Karatzas y Shreve [18]):

$$dX(t) = [r(t)X(t) + B(t)^\top \pi(t)]dt + \pi(t)^\top \sigma(t)dW(t), \quad X(0) = x_0, \quad (2.7)$$

donde, $\pi(t) = (\pi_1(t), \dots, \pi_m(t))^\top$ es el vector que indica las cantidades de capital invertidas al tiempo $0 \leq t \leq T$ en cada stock, es decir, el *portafolio* en dicho tiempo. No es difícil verificar que la solución a esta ecuación diferencial estocástica lineal con coeficientes aleatorios, está dada por

$$\gamma(t)X(t) = x_0 + \int_0^t \gamma(s)\pi(s)^\top [\sigma(s)dW(s) + B(s)ds], \quad 0 \leq t \leq T, \quad (2.8)$$

donde,

$$\gamma(t) := \frac{1}{S_0(t)} = \exp\left(-\int_0^t r(s)ds\right), \quad (2.9)$$

es el *factor de descuento* en el mercado \mathcal{M} . La ecuación (2.8) expresa que el proceso de capital descontado es la suma del capital inicial más las *ganancias descontadas* al tiempo t , que resultan de haber invertido en los activos con riesgo. Enseguida se dan las definiciones precisas de los procesos ya mencionados.

Definición 2.1.1. Un proceso vectorial $\pi = \{\pi(t) := (\pi_1(t), \dots, \pi_m(t))^\top, 0 \leq t \leq T\}$ con valores en \mathbb{R}^m y progresivamente medible con respecto a \mathbb{F} , es una *estrategia de inversión* si satisface,

$$\int_0^T \|\sigma(t)^\top \pi(t)\|^2 dt < \infty \quad \text{y} \quad \int_0^T \|B(t)^\top \pi(t)\| dt < \infty, \quad c.s.. \quad (2.10)$$

Definición 2.1.2. Para $x \geq 0$ y una estrategia de inversión π , el proceso $\{X^{x,\pi}(t), 0 \leq t \leq T\}$ caracterizado por (2.7) es llamado *proceso de capital* correspondiente a la estrategia

de inversión π y capital inicial x . Al proceso $\{\tilde{X}^{x,\pi}(t) := \gamma(t)X^{x,\pi}(t), 0 \leq t \leq T\}$ se le conoce como *proceso de capital descontado*.

Observe que se están permitiendo ventas en corto de los stocks y prestamos a una tasa de interés $r(\cdot)$. Esto hace necesaria una restricción sobre las estrategias que se considerarán como admisibles.

Definición 2.1.3. Se dice que una estrategia de inversión π es *dominada* (tame en inglés), si el proceso asociado de ganancias descontadas

$$M^\pi(t) := \int_0^t \gamma(s)\pi(s)^\top [\sigma(s)dW(s) + B(s)ds], \quad 0 \leq t \leq T, \quad (2.11)$$

es acotado inferiormente *c.s.* por alguna constante (que puede depender de π).

En la literatura sobre modelos de mercado en tiempo continuo, es estándar pedir que las estrategias sean dominadas para excluir las conocidas *estrategias suicidas*, con las cuales se pueden construir portafolios que generen al tiempo $t = T$ un capital arbitrariamente grande con probabilidad uno, iniciando con capital cero.

A una estrategia de inversión se le llama admisible si satisface todas las restricciones dadas. Para los fines de este capítulo, consideraremos admisible una estrategia π , si esta es dominada. Denotaremos por Π al conjunto de todas las *estrategias admisibles*. Es importante notar que Π no depende del capital inicial x . Note que para un capital inicial x fijo, cada $\pi \in \Pi$ da lugar a una posición $\tilde{X}^{x,\pi}$, lo cual induce un conjunto \mathbb{X} de *posiciones admisibles*, es decir, $\mathbb{X} = \{\tilde{X}^{x,\pi} : x \in \mathbb{R} \text{ y } \pi \in \Pi\}$. Podría haber otro tipo de restricciones sobre las estrategias de inversión en cada problema particular tales como prohibición de ventas en corto y no bancarota.

Antes de pasar al tema de arbitraje, nos gustaría establecer la conexión entre las medidas de riesgo y los conceptos desarrollados hasta el momento en este capítulo. Con este fin, piense en un inversionista (o institución) que tiene un capital inicial $x \geq 0$, con el cual

decide invertir en el mercado \mathcal{M} siguiendo una estrategia de inversión dominada π . De acuerdo a la Definición 2.1.2, al final del periodo de transacción el inversionista (o institución) tendrá un capital descontado dado por $\tilde{X}^{x,\pi}(T)$. Asumiendo que $\tilde{X}^{x,\pi}(T) \in L^\infty$, el inversionista podría cuantificar el riesgo que tiene que asumir al invertir con la estrategia π , calculando simplemente $\rho(\tilde{X}^{x,\pi}(T))$ para alguna medida de riesgo $\rho(\cdot)$ que decida utilizar. La medida estándar en las instituciones financieras es el *VaR*.

2.1.2. Arbitraje

Existe toda una teoría de arbitraje para la valuación de activos financieros, aquí sólo se presentarán los conceptos fundamentales sobre lo que es una oportunidad de arbitraje sin tratar el tema de valuación de activos con esta teoría, que fundamentalmente consiste en determinar un precio para un activo, de tal manera que no genere arbitraje. Intuitivamente, una oportunidad de arbitraje es una estrategia de inversión que con probabilidad positiva nos da una ganancia sin asumir ningún riesgo.

Definición 2.1.4. Un estrategia dominada π que satisface

$$\mathbf{P}(M^\pi(T) \geq 0) = 1 \quad \text{y} \quad \mathbf{P}(M^\pi(T) > 0) > 0, \quad (2.12)$$

es llamada *oportunidad de arbitraje*. Se dirá que el mercado \mathcal{M} es *libre de arbitraje* si no existen tales estrategias.

La existencia de oportunidades de arbitraje se debe a que el mercado es ineficiente en el sentido de que los precios de los activos no fueron dados de manera razonable. En el mundo real, las oportunidades de arbitraje son muy difíciles de encontrar y por lo general duran muy poco tiempo, ya que si se detecta una oportunidad de arbitraje, ésta genera una gran demanda así que los precios se ajustan y la oportunidad desaparece. Por supuesto, es deseable que en el mercado no existan oportunidades de arbitraje, para lo cual basta imponer algunas restricciones sobre el modelo de mercado.

Teorema 2.1.1. (i) Si \mathcal{M} es libre de arbitraje, entonces existe un proceso $\theta : [0, T] \times \Omega \rightarrow \mathbb{R}^n$ progresivamente medible con respecto a \mathbb{F} , conocido como proceso de premio de mercado al riesgo (*market price of risk* en inglés), tal que

$$B(t) = \sigma(t)\theta(t), \text{ c.s. } 0 \leq t \leq T. \quad (2.13)$$

(ii) Recíprocamente, si el proceso $\theta(\cdot)$ existe y además de (2.13) satisface,

$$\int_0^T \|\theta(t)\|^2 dt < \infty, \text{ c.s.}, \quad (2.14)$$

$$\mathbb{E} \left[\exp \left(- \int_0^T \theta(t)^\top dW(t) - \frac{1}{2} \int_0^T \|\theta(t)\|^2 dt \right) \right] = 1, \quad (2.15)$$

entonces \mathcal{M} es libre de arbitraje.

Como se puede observar, este resultado ofrece una manera de verificar si en el modelo de mercado \mathcal{M} existen oportunidades de arbitraje. Enseguida se da una definición motivada por la existencia del proceso de premio de mercado al riesgo en el modelo de mercado.

Definición 2.1.5. Un modelo de mercado \mathcal{M} es llamado *estándar*, si $m \leq n$ y existe un proceso $\theta : [0, T] \times \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ progresivamente medible con respecto a \mathbb{F} que satisface (2.13), (2.14) y (2.15).

Este tipo de mercados son los más utilizados en la literatura. Note que pedir $m \leq n$ realmente no es una restricción, porque de otro modo, el número de stocks podría ser siempre reducido, duplicando alguno de ellos como una combinación lineal de los otros.

Cabe mencionar que el Teorema de Novikov (ver Karatzas y Shreve [18]) indica que para que se cumplan las condiciones (2.14) y (2.15), es suficiente que

$$\mathbb{E} \left[\exp \left(\frac{1}{2} \int_0^T \|\theta(t)\|^2 dt \right) \right] < \infty, \quad (2.16)$$

en particular, esto sucede si el proceso $\theta(\cdot)$ es uniformemente acotado en (t, ω) .

2.1.3. Completez

Un tema clave en matemáticas financieras es el análisis de los llamados activos contingentes, es decir, activos cuyo valor depende del comportamiento de otros activos. Para poder dar la definición precisa de este tipo de activos, asumiremos que estamos en un modelo de mercado \mathcal{M} estándar. Esta suposición nos permite definir un proceso $\{\nu(t), 0 \leq t \leq T\}$ en términos del proceso de prima de mercado al riesgo, dado por

$$\nu(t) := \exp \left\{ - \int_0^t [r(s) + \frac{1}{2} \|\theta(s)\|^2] ds - \int_0^t \theta(s)^\top dW(s) \right\}. \quad (2.17)$$

A este proceso se le conoce como *kernel de precios*. Definiendo $\nu := \nu(T)$, es evidente que las condiciones (2.2) y (2.16) implican que $0 < \nu < \infty$ c.s. y $0 < \mathbb{E}[\nu] < \infty$.

Definición 2.1.6. Un *activo contingente* es una v.a. \mathcal{F}_T -medible $Y : \Omega \rightarrow [0, \infty)$ que satisface

$$\mathbb{E}[\nu Y] < \infty. \quad (2.18)$$

Un activo contingente Y es *replicable*, si existe $u_0 \in \mathbb{R}$ y un portafolio dominado π tales que

$$X^{u_0, \pi}(T) = Y \text{ c.s.} \quad (2.19)$$

A la cantidad u_0 y a la estrategia π en (2.19) se les conoce como el costo de replicación y estrategia de replicación, respectivamente. Un mercado en el que cualquier activo contingente es replicable es llamado *completo*; de otro modo es llamado *incompleto*. Para un modelo de mercado estándar, existe un criterio muy simple para decidir cuando un mercado es completo.

Teorema 2.1.2. *Un modelo de mercado \mathcal{M} estándar es completo si y sólo si $m = n$ y para toda $0 \leq t \leq T$ la matriz $\sigma(t)$ es invertible c.s.. Bajo estas condiciones, es claro que existe solamente un proceso $\theta(\cdot)$ que satisface (2.13), el cual está dado por*

$$\theta(t) = \sigma^{-1}(t)B(t), \quad 0 \leq t \leq T. \quad (2.20)$$

2.2. Algunas Modelos de Selección

En lo siguiente se explicará en que consiste el problema de selección de portafolios y se discutirán algunos de los modelos de selección más conocidos. El escenario sobre el que se trabajará, será un modelo de mercado estándar \mathcal{M} , el cual es completo y cuyo (único) proceso de premio de mercado al riesgo satisface la condición de Novikov (2.16).

Para la formulación de ciertos modelos de selección de portafolio óptimo, un concepto muy importante es el de función utilidad. Desde los primeros resultados de Merton [24] y Samuelson [27], se involucra una función de utilidad como una medida de preferencia sobre las posiciones financieras.

Definición 2.2.1. Dado $S \subset \mathbb{R}$ un intervalo, una función $u : S \rightarrow \mathbb{R}$ es llamada *función de utilidad* si es continuamente diferenciable, estrictamente creciente y estrictamente cóncava.

En nuestro contexto, el conjunto S representa el intervalo de los posibles valores que tiene una posición X al final de un horizonte de tiempo dado. De acuerdo al modelo de mercado que se está considerando, el horizonte de tiempo es T . La monotonía de la función de utilidad indica que siempre se preferirá una posición que tenga mayor rendimiento. La concavidad expresa la aversión al riesgo por parte del inversionista, que en términos elementales significa que siempre se preferirá algo seguro a algo aleatorio. Enseguida se presentan algunas de las clases de funciones de utilidad más conocidas.

Ejemplo 2.2.1 (CARA). Considere $\alpha > 0$ y defina

$$u(x) = 1 - \exp(-\alpha x). \quad (2.21)$$

Esta es la clase de funciones conocida como Aversión al Riesgo Absoluta Constante (Constant Absolut Risk Aversion en Inglés). \diamond

Ejemplo 2.2.2 (HARA). Sea $\gamma < 1$ y $S = (0, \infty)$. La clase de funciones de utilidad conocida como Aversión al Riesgo Absoluta Hiperbólica (Hyperbolic Absolute Risk Aversión

en Inglés) está dada por,

$$\begin{aligned} u(x) &= \log(x) \quad \text{para } \gamma = 0, \\ u(x) &= \frac{1}{\gamma} x^\gamma \quad \text{para } \gamma \neq 0. \end{aligned}$$

◇

En este trabajo sólo consideraremos funciones de utilidad para las que $S = (0, \infty)$ y que satisfagan las condiciones de Inada,

$$u'(\infty) := \lim_{x \rightarrow \infty} u'(x) = 0, \quad (2.22)$$

$$u'(0) := \lim_{x \downarrow x_u} u'(x) = \infty, \quad (2.23)$$

La inversa de la derivada de la función de utilidad $I(\cdot) = (u')^{-1}(\cdot)$ jugará un papel crucial en el análisis del problema principal de nuestro trabajo. Existe toda una teoría de utilidad que puede ser consultada en Föllmer y Schied [11]. Para lo fines de este trabajo, es suficiente con lo ya mencionado.

Con el fin de describir el problema de optimización de portafolio, piense en un agente con un capital inicial x_0 , el cual evalúa cada estrategia admisible π vía cierta medida de rendimiento (o preferencia) denotada por $J(x_0, \pi)$. La forma explícita de $J(x_0, \pi)$ varía según el problema. Entonces, el objetivo del problema de selección de portafolio es que para un capital inicial x_0 , se escoja una estrategia óptima π^* en el sentido de que el valor de la medida de rendimiento $J(x_0, \pi^*)$ evaluada en esta estrategia, alcance el supremo de $J(x_0, \cdot)$ sobre Π . Para todas las medidas de preferencia que consideraremos en este trabajo, se asumirá que para un capital inicial x_0 y un estrategia admisible π , si $\hat{x}_0 > x_0$ entonces existe una estrategia admisible $\hat{\pi}$ tal que

$$J(\hat{x}_0, \hat{\pi}) > J(x_0, \pi). \quad (2.24)$$

La interpretación económica de la hipótesis anterior es la siguiente: con un capital mayor siempre se puede lograr un mejor resultado. Dado que esta es una propiedad bastante débil,

cualquier modelo de selección de portafolio que no la cumpla, debe ser considerado como anormal. Recuerde que para cada estrategia admisible se tiene una posición admisible, por lo que podríamos cambiar la variable de decisión de π a X ; es así como se utilizará. Enseguida se expondrán algunos modelos concretos del problema de selección de portafolio. A simple vista, estos modelos parecen ser ligeramente diferentes con respecto a sus interpretaciones financieras y formulaciones matemáticas.

Ejemplo 2.2.3 (Maximización de Utilidad Esperada).

$$\begin{aligned} & \max_{X \in \mathbb{X}} && E[u(X)] && (2.25) \\ \text{subjeto a} & && E[\nu X] = x_0, \quad X \geq 0, \quad X \text{ es } \mathcal{F}_T \text{ medible,} \end{aligned}$$

donde $u(\cdot)$ es una función de utilidad, $E[\nu X] = x_0$ es la restricción de capital y $X \geq 0$ es la restricción de no bancarrota (la cual es omitida en algunas variantes del modelo). Este es el modelo clásico de utilidad iniciado por Samuelson [27] y Merton [24]. Con la suposición de concavidad en la función de utilidad, no es difícil resolver este problema de optimización vía multiplicadores de Lagrange. La solución X^* a este problema de optimización es el pago terminal que se piensa alcanzar. El portafolio óptimo será aquel que replica a X^* . \diamond

Ejemplo 2.2.4 (Alcance de Objetivo).

$$\begin{aligned} & \max_{X \in \mathbb{X}} && P(X \geq b) && (2.26) \\ \text{subjeto a} & && E[\nu X] = x_0, \quad X \geq 0, \quad X \text{ es } \mathcal{F}_T \text{ medible,} \end{aligned}$$

donde $b \in \mathbb{R}$ es el nivel de capital que se quiere alcanzar al final del periodo de transacción. Este es el llamado problema de alcance de objetivo (goal reaching problem en Inglés), el cual fue propuesto por Kulldorff [19] y Heath [16]. Un buen estudio y algunas extensiones fueron desarrolladas por Browne [7]. Económicamente, este problema es diferente del modelo de maximización de utilidad, pues aquí lo que se desea es encontrar la posición que aumente las oportunidades de alcanzar el nivel b sin tomar en cuenta la actitud hacia el riesgo

por parte del inversionista. Técnicamente, no se puede cubrir con el modelo estándar de utilidad esperada, pues

$$P(X \geq b) = \int_0^\infty \mathbf{1}_{(x \geq b)} dF_X(x), \quad (2.27)$$

y la función indicadora no es una función cóncava. Para encontrar la solución óptima en este modelo, Browne [7] utilizó programación dinámica y las ecuaciones HJB. \diamond

Ejemplo 2.2.5 (Teoría Dual de Yaari).

$$\begin{aligned} & \max_{X \in \mathbb{X}} \int_0^\infty w(P(X > x)) dx & (2.28) \\ \text{subjeto a} & \quad E[\nu X] = x_0 \quad X \geq 0, \quad X \text{ es } \mathcal{F}_T \text{ medible,} \end{aligned}$$

donde $w(\cdot)$ es una función de distorsión de acuerdo a la Definición 1.2.1. Este modelo fue propuesto por Yaari [30] como una teoría dual de elección bajo riesgo a la teoría de utilidad esperada. Como ya se ha mencionado, en este trabajo tienen su origen las medidas de riesgo distorsionadas. Mediante el Teorema de Fubini, puede verificarse directamente que

$$\int_0^\infty w(P(X > x)) dx = \int_0^\infty x d[-w(1 - F_X(x))]. \quad (2.29)$$

Lo cual hace ver que en contraste con la utilidad esperada que distorsiona el pago, la medida de rendimiento de Yaari distorsiona la función de distribución de éste. Un resultado en Yaari [30] muestra que la actitud hacia el riesgo es capturada por la función de distorsión; específicamente el agente es averso al riesgo si y sólo si w es convexa. Entre las dificultades técnicas en resolver (2.28) se encuentra la no concavidad en X de (2.29) debida a la presencia de $w(\cdot)$, y la no linealidad de (2.29). \diamond

Ejemplo 2.2.6 (Teoría SP/A de Lopes).

$$\begin{aligned} & \max_{X \in \mathbb{X}} \int_0^\infty w(P(X > x)) dx & (2.30) \\ \text{subjeto a} & \quad P(X \geq A) \geq \alpha, \\ & \quad E[\nu X] = x_0, \quad X \geq 0, \quad X \text{ es } \mathcal{F}_T \text{ medible,} \end{aligned}$$

donde en la terminología de Lopes, $w(\cdot)$ es la función decumulativa ponderada, A es el nivel de aspiración y α es nivel de confianza de que el capital final exceda la aspiración. La teoría SP/A desarrollada en Lopes [21] es considerada como un modelo de toma de decisiones en las que influye un factor psicológico; donde SP se interpreta como el criterio de seguridad potencial (security-potential en inglés) y A es el criterio de aspiración (aspiration en inglés). Observe que este modelo es muy similar al de Yaari excepto por la restricción adicional del nivel de aspiración. En Lopes [21] se especifica que $w(\cdot)$ es una combinación de funciones convexas y una cóncava, donde la convexidad representa la aversión al riesgo y la concavidad captura la búsqueda de riesgo. \diamond

Ejemplo 2.2.7 (Teoría de Perspectiva Kahneman y Tversky).

$$\begin{aligned}
& \max_{X \in \mathbb{X}} && \int_0^\infty w_+(P(u_+((X - B)_+) > x)) dx \\
& && - \int_0^\infty w_-(P(u_-((X - B)_-) > x)) dx \\
\text{subjeto a} &&& P(X \geq A) \geq \alpha, \\
&&& E[\nu X] = x_0, \quad X \text{ es } \mathcal{F}_T \text{ medible y c.s. acotada por abajo,}
\end{aligned} \tag{2.31}$$

donde B es una v.a. \mathcal{F}_T -medible que representa un punto de referencia (reference point en inglés) en el capital, $u_+(\cdot)$ y $u_-(\cdot)$ son funciones de utilidad y desutilidad de las ganancias (excesos de capital sobre B) y pérdidas (caídas debajo de B) respectivamente, y $w_+(\cdot)$ y $w_-(\cdot)$ son distorsiones sobre las ganancias y pérdidas respectivamente. Este modelo fue propuesto y desarrollado por Kahneman y Tversky [17]. \diamond

No es difícil verificar que todas la medidas de rendimiento involucradas en los modelos presentados, satisfacen la condición (2.24). Así como estos modelos, existen muchos otros en la literatura de selección de portafolio, cada uno con sus restricciones particulares. En la siguiente sección se expondrá un modelo general de selección de portafolio, el cual abarca todos los modelos presentados en esta sección.

2.3. El Modelo Vía Cuantiles

Como se pudo observar en la sección anterior, existen varios modelos del problema de optimización de portafolios, algunos de los cuales involucran funciones de distorsión. Es un hecho conocido que para estos últimos, los métodos más comunes como dualidad convexa y programación dinámica, no funcionan. Por este motivo, esta sección se dedica a encontrar condiciones bajo las cuales se pueda establecer un marco general que cubra al mismo tiempo los cinco modelos ya explicados y algunos otros. Los resultados de esta sección están basados en el trabajo de He y Zhou [15]; específicamente nos enfocaremos en explicar la formulación para el problema de selección de portafolio que ellos proponen.

Para empezar, observe que todas las medidas de preferencia en los modelos de la sección anterior, pueden ser escritas de la siguiente forma general:

$$C(X) := \int_{-\infty}^{\infty} u(x)d[w(F_X(x))] \quad (2.32)$$

donde $u(\cdot)$ es una función de utilidad y $w(\cdot)$ es una función de distorsión. En esencia, $C(X)$ es una media modificada del flujo de efectivo X , donde el flujo de efectivo mismo y su distribución, están distorsionadas. De primera impresión, parece que $C(X)$ no es una medida del tipo utilidad esperada, debido principalmente a la presencia de la función $D(\cdot)$. Observe que si en (2.32) sustituimos $z = F_X(x)$ y además suponemos que $w(\cdot)$ es una función diferenciable, se obtiene que

$$\begin{aligned} C(X) &= \int_0^1 u(F_X^{-1}(z))d(w(z)), \\ &= \int_0^1 u(F_X^{-1}(z))w'(z)dz, \\ &= \mathbb{E}[u(G(Z))w'(Z)], \end{aligned} \quad (2.33)$$

donde $Z \sim U(0, 1)$ es cualquier v.a. con distribución uniforme en el $(0, 1)$ y $G(\cdot) = F_X^{-1}(\cdot)$ es la función cuantil de la v.a X . Entonces, considerando la función $G(\cdot)$ como la variable de decisión, se recupera una esperanza lineal. Equivalentemente, se puede considerar la v.a.

$Y := G(Z)$ como la variable de decisión y entonces (2.33) se reduce al clásico modelo de maximización de utilidad bajo una nueva medida de probabilidad que tiene densidad de Radon-Nikodym $w'(Z)$ con respecto a \mathbf{P} . Observe que X y $G(Z)$ son iguales en ley pero no lo son como variables aleatorias.

Es importante notar que la invarianza en ley de la medida de rendimiento $C(X)$ es una propiedad esencial para poder cambiar la variable de decisión. De aquí que lo único que faltaría para completar la formulación en términos de la función cuantil, sería expresar la restricción de capital en términos de ésta. Un obstáculo para este paso es que ν y X son dos v.a. posiblemente correlacionadas, y su correlación es en general desconocida. Para atacar este inconveniente, a partir de ahora asumiremos que la variable ν no admite átomos. En particular, esto se satisface cuando $r(\cdot)$ y $\theta(\cdot)$ son determinísticos con $\int_0^T \|\theta(t)\|^2 dt \neq 0$ (en cuyo caso ν es una v.a no degenerada con distribución lognormal).

Denote por $F_\nu(\cdot)$ la función de distribución de ν y defina $Z_\nu := 1 - F_\nu(\nu)$. Observe que como ν no tiene átomos se tiene que $Z_\nu \sim U(0, 1)$ y entonces se puede expresar ν en términos de Z_ν como $\nu = F_\nu^{-1}(1 - Z_\nu)$ c.s.. El siguiente lema es un resultado crucial para finalizar con el inconveniente en cuestión.

Lema 2.3.1. *Asumiendo que ν no tiene átomos, se satisface que $\mathbb{E}[\nu G(Z_\nu)] \leq \mathbb{E}[\nu X]$ para cualquier v.a. X acotada con función cuantil $G(\cdot)$. Más aún, si $\mathbb{E}[\nu G(Z_\nu)] < \infty$, entonces la desigualdad se convierte en igualdad si y sólo si $X = G(Z_\nu)$, c.s..*

La interpretación económica de este resultado es que siempre se puede reemplazar el pago X por un pago $Y := G(Z_\nu)$ que tenga la misma ley de probabilidad que X , sin que esto genere un costo mayor. Observe que debido a la invarianza en ley de $\mathbb{E}[\nu X]$ (en X), este reemplazo no cambia el valor de la medida de preferencia en (2.33). Un argumento dual, muestra que la solución óptima X^* debe satisfacer que $E[\nu G^*(Z_\nu)] = E[\nu X^*]$ donde $G^*(\cdot)$ es la función cuantil de X^* . Incluso, si $y_0 := \mathbb{E}[\nu G^*(Z_\nu)] < \mathbb{E}[\nu X^*] =: x_0$, entonces $G^*(Z_\nu)$ alcanzaría el mismo valor de rendimiento con un capital inicial estrictamente menor. Pero

por (2.24), el agente podría incrementar el valor de rendimiento con el capital original $x_0 > y_0$, contradiciendo la optimalidad de X^* . Debido al Lema 2.3.1, esto nos lleva a que $X^* = G^*(Z_\nu)$ *c.s.*.

La discusión de arriba muestra que la solución óptima X^* de todos los modelos que se han mencionado en este capítulo, o incluso de cualquier modelo en tiempo continuo en el cual ν no admita átomos y satisfaga (2.24), debe ser de la forma $G^*(Z_\nu)$ donde $G^*(\cdot)$ es una función cuantil y $Z_\nu = 1 - F_\nu(\nu)$ es una v.a. con distribución uniforme. En otras palabras, para encontrar una solución óptima sólo necesitamos buscar entre todas las v.a. de la forma $G(Z_\nu)$ donde $G(\cdot)$ corresponda a la función cuantil de una posición financiera aceptable, es decir, $G \in \mathbb{G}$ con

$$\mathbb{G} := \{F_X^{-1}(\cdot) : X \in \mathbb{X}\}. \quad (2.34)$$

Como $\nu = F_\nu^{-1}(1 - Z_\nu)$ *c.s.*, podemos reemplazar la restricción de capital $\mathbb{E}[\nu X] = x_0$ por,

$$\mathbb{E}[F_\nu^{-1}(1 - Z_\nu)G(Z_\nu)] = x_0. \quad (2.35)$$

y la restricción de no bancarrota $X \geq 0$ se puede plantear en términos de la función cuantil pidiendo que ésta pertenezca al conjunto $\mathbb{M} := \{G(\cdot) \in \mathbb{G} : G(0+) \geq 0\}$. Con esto, podemos formular el modelo general de selección de portafolio vía cuantiles, dado por He y Zhou [15],

$$\begin{aligned} & \max_{G(\cdot) \in \mathbb{M}} && U(G(\cdot)) = E[u(G(Z_\nu))w'(Z_\nu)] \\ \text{subject to} &&& E[F_\nu^{-1}(1 - Z_\nu)G(Z_\nu)] = x_0. \end{aligned} \quad (2.36)$$

donde $Z_\nu = 1 - F_\nu(\nu)$. Algunas veces es más conveniente considerar la siguiente versión integral de (2.36),

$$\begin{aligned} & \max_{G(\cdot) \in \mathbb{M}} && U(G(\cdot)) = \int_0^1 u(G(z))w'(z)dz \\ \text{subject to} &&& \int_0^1 F_\nu^{-1}(1 - z)G(z)dz = x_0. \end{aligned} \quad (2.37)$$

Con esto se muestra que formulación de arriba generaliza los cinco modelos mencionados en la sección anterior. De hecho, es lo suficientemente general como para cubrir muchos otros modelos que involucran explícitamente al VaR , ES o funciones cuantil en la medida de rendimiento o en las restricciones. Algo que es muy importante no olvidar, es que la formulación dada depende fuertemente de la completez del mercado, pues involucra explícitamente el kernel de precios. Para el caso en el que el mercado es incompleto, He y Zhou [15] hacen otro tipo análisis, el cual no explicaremos en este trabajo.

Hasta ahora, se han mostrado diversos resultados sobre medidas de riesgo y optimización de portafolios por separado, lo que sigue es ver de manera conjunta el problema de elegir un portafolio óptimo y medir o limitar el riesgo.

Capítulo 3

Selección de Portafolio Bajo

Medidas de Riesgo Distorsionadas

La selección de medidas de riesgo en el contexto de optimización de portafolios es un tema que ha generado una intensa investigación en la gestión de carteras, ya que muchas de las medidas propuestas tienen algunos inconvenientes y limitadas aplicaciones. Uno de los objetivos primordiales por parte de los investigadores ha sido encontrar una “buena” medida de riesgo que pueda aplicarse al problema de selección de portafolio. En los intentos para lograr esto, se ha descubierto que una de las complejidades principales es que el concepto de riesgo es altamente subjetivo, porque cada inversionista tiene su propia percepción del riesgo. Un buen punto de partida en la búsqueda de dicha medida, sería considerar aquellas que satisfagan al menos las propiedades de coherencia, pues como ya se ha explicado en el Capítulo 1, son propiedades deseables de una “buena” medida de riesgo.

Uno de los primeros trabajos en los que se integra la gestión de riesgos en el marco de optimización de portafolios, fue el de Basak y Shapiro [6]. En este trabajo, bajo el modelo (de selección de portafolio) de maximización de utilidad, Basak y Shapiro piensan en un

inversionista que quiere limitar su riesgo al mismo tiempo que maximiza su utilidad. En particular, ellos asumen que el inversionista tiene la restricción de mantener el VaR de la posición que representa el capital final descontado sobre cierto horizonte de tiempo, a un nivel especificado. En otras palabras, el inversionista tiene la restricción, de mantener la probabilidad de que el valor de su posición en el horizonte de tiempo este debajo de cierta cantidad, menor que un nivel especificado.

Hoy en día, existe una gran número de trabajos que integran la gestión del riesgo en el contexto de optimización de portafolio. Las diferencias esenciales en cada uno de estos trabajos son dos: la medida de rendimiento y la medida con la que se cuantifica el riesgo de la posición. Algunos trabajos sobre esta línea de investigación son el de Acerbi y Simonetti [2] en el que se utilizan las conocidas como *medidas de riesgo espectrales* en el modelo de Markowitz; otro trabajo es de Gundel y Weber [12] en el que se analiza la selección de portafolio con el criterio de maximización de utilidad en un modelo general de mercado financiero a tiempo continuo, bajo la restricción de capital y de riesgo conjuntamente. Las medidas de riesgo que se utilizan son las conocidas como medidas de déficit esperado basadas en utilidad (utility based shortfall risk UBSR).

Pensar conjuntamente el problema de optimización de portafolios junto con una restricción de riesgo, tiene un gran uso en la practica, pues el segundo pilar de regulación en Basilea II tiene que ver con el control de los modelos internos usados por los bancos para medir y monitorear el riesgo en los activos de sus portafolios. Es decir, para un portafolio generado por la estrategia π y un horizonte dado h , la practica consiste en estimar la distribución de los rendimientos del portafolio para el periodo de transacción y en deducir el riesgo asociado. Este riesgo puede ser medido por un cuantil de la distribución de los rendimientos como lo es el caso del VaR , medidas basadas en cuantiles como el ES o más generalmente por una medida de riesgo distorsionada. Dadas estas restricciones, la institución podría utilizar algún modelo de selección, agregar la restricción de riesgo y encontrar

la estrategia que genere un mayor rendimiento.

Considerando la familia de medidas de riesgo propuesta por Tsukahara [28] y el modelo de selección de portafolio vía cuantiles desarrollado por He y Zhou [15], en este capítulo se investigará el problema de encontrar el capital final óptimo bajo una restricción de capital y una restricción de riesgo de manera conjunta. Cabe destacar que este capítulo constituye la aportación principal de este trabajo y, a nuestro leal saber y entender estos resultados no pueden ser encontrados en la literatura.

La organización de este capítulo es la siguiente. En la Sección 3.1 se presenta detalladamente el problema de maximización que estudiaremos. La Sección 3.2 está dedicada a desarrollar un esquema de solución a dicho problema basado en el uso de multiplicadores de Lagrange. En este esquema, la mayor parte de los resultados son demostrados, faltando únicamente garantizar la existencia de los multiplicadores que hacen cumplir las condiciones. Finalmente, en la Sección 3.3 se muestran algunos ejemplos específicos.

3.1. Formulación del Problema

Empecemos considerando el modelo de selección de portafolio vía cuantiles dado por (2.37). Implícitamente, se está pensando en un inversionista que cuenta con un capital inicial $x_0 > 0$, quien desea invertir de manera óptima en el mercado financiero planteado en la Sección 2.1. Lo innovador, será contemplar que el inversionista además de querer invertir óptimamente, desea limitar el riesgo en la elección de su portafolio mediante una medida de riesgo distorsionada, la cual está generada por una distorsión que pertenece al dual de un grupo de distorsión con un parámetro. En términos matemáticos, lo anterior significa que en el modelo de selección de He y Zhou [15], agregaremos una restricción de riesgo a las posiciones financieras aceptables $X \in \mathbb{X}$, es decir, para un nivel de riesgo x_1 dado, se

pedirá que

$$\rho_{D_\theta}(X) \leq x_1, \quad (3.1)$$

donde $\rho_{D_\theta}(\cdot)$ es de la forma (1.27) con $f(\cdot) = D_\theta(\cdot)$ perteneciente al dual de un grupo de distorsión con un parámetro. Esto último hace que $\rho_{D_\theta}(\cdot)$ resulte una medida de riesgo coherente que es invariante en ley, comonótona y además puede compararse en cierto sentido con el *ES*. El parámetro $0 < \theta \leq 1$ en la función de distorsión $D_\theta(\cdot)$ reflejará la actitud que el inversionista tiene hacia el riesgo. La forma explícita de (3.1) es la siguiente,

$$\rho_{D_\theta}(X) = - \int_{\mathbb{R}} x d(D_\theta \circ F_X)(x) \leq x_1. \quad (3.2)$$

Para que la expresión anterior esté bien definida en el sentido de la teoría desarrollada en el Capítulo 1, es necesario pedir que $X \in L^\infty$. Por este motivo en el nuevo modelo de selección bajo riesgo que proponemos, el conjunto de las posiciones admisibles estará dado por $\mathcal{X} := \{X \in \mathbb{X} : X \in L^\infty\}$. Denote por $\mathcal{G} = \{F_X^{-1}(\cdot) \in \mathbb{M} : X \in \mathcal{X}\}$ el conjunto de las funciones cuantil correspondientes a posiciones admisibles que además satisfacen la condición de no bancarrota $X \geq 0$. Haciendo un cambio de variable, podemos plantear la restricción de riesgo para la posición X en términos de su función cuantil $G(\cdot)$ como sigue,

$$\rho_{D_\theta}(G(\cdot)) = - \int_{[0,1]} G(u) dD_\theta(u) \leq x_1. \quad (3.3)$$

Esto nos permite incluir la restricción de riesgo en el modelo (2.37) propuesto por He y Zhou [15], ya que en esta restricción la variable en cuestión es la función cuantil de la posición. Siguiendo la misma notación de los capítulos anteriores, el modelo de selección de portafolio vía cuantiles con restricciones de capital y de riesgo de manera conjunta, queda de la siguiente forma,

$$\begin{aligned} \max_{G(\cdot) \in \mathcal{G}} \quad & U(G(\cdot)) = \int_0^1 u(G(z)) w'(z) dz \\ \text{sujeto a} \quad & \int_0^1 F_\nu^{-1}(1-z) G(z) dz = x_0, \quad - \int_0^1 G(z) d\theta(z) dz \leq x_1. \end{aligned} \quad (3.4)$$

Entre algunas situaciones de aplicación comunes, se podría pensar en una compañía a la que el regulador le impone una restricción en el riesgo de sus inversiones, el gerente de una

institución financiera que pide a sus operadores permanecer con algún límite de riesgo o un inversionista que desea acotar su exposición al riesgo.

Observe que este es un modelo de selección muy general en tres direcciones. La primera es que por los resultados de He y Zhou [15] expuestos en el Capítulo 2, cubre una gran cantidad de modelos de selección, pues estamos distorsionando el flujo de efectivo y la distribución de éste. La segunda es que la limitación en el riesgo de la posición financiera se puede realizar a través de una extensa gama de medidas de riesgo que son coherentes, invariantes en ley y comonótonas. La tercera es que se está considerando un modelo de mercado general que por supuesto incluye al muy utilizado modelo de Black y Scholes así como modelos con volatilidad local. Estas tres características hacen atractiva esta propuesta en el marco del problema de selección de portafolio.

Las preguntas que surgen de manera natural son las siguientes: ¿Cuándo existe una solución al problema de optimización dado por (3.4)? En caso de tener una solución al problema (3.4) ¿Es ésta única?. En la siguiente sección trataremos de dar respuesta a estas dos preguntas.

3.2. Esquema de la Solución

El objetivo de esta sección es dar un esquema general de la solución al problema de maximización (3.4). Este esquema tiene como base el uso de multiplicadores de Lagrange. En la primera parte daremos demostraciones formales de resultados que constituyen la mayor parte de la solución general al problema en cuestión. Esta parte incluye una propuesta de la forma general que podría tener la función cuantil óptima. Finalizaremos proponiendo un procedimiento para tratar de demostrar la existencia de los multiplicadores que hacen que las restricciones se satisfagan. Sin embargo, dejaremos la demostración de dicha existencia como un problema abierto. Bajo algunas condiciones sobre las funciones $F_\nu^{-1}(\cdot)$, $d_\theta(\cdot)$ y

$w'(\cdot)$, encontraremos un único candidato a solución del problema de maximización (3.4).

Comenzaremos considerando una familia de problemas de maximización deterministas, cuya solución nos dará el candidato a óptimo. En resultados posteriores se podrá observar el porque de escoger esta familia de problemas.

Lema 3.2.1. *Para cada $y_0 \geq 0$, $y_1 \geq 0$ y $x \in (0, 1)$ fijos, la función $g_{y_0, y_1, x} : (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ definida como,*

$$g_{y_0, y_1, x}(y) := u(y)w'(x) - y_0 F_\nu^{-1}(1-x)y + y_1 d_\theta(x)y, \quad (3.5)$$

tiene las siguientes propiedades:

- (a) *Es estrictamente cóncava y continuamente diferenciable en todo su dominio.*
- (b) *Alcanza su supremo en $(0, \infty)$ si y sólo si $(y_0 F_\nu^{-1}(1-x) - y_1 d_\theta(x)) > 0$. En este caso, el máximo es único y está dado por*

$$y^*(y_0, y_1, x) = \begin{cases} I\left(\frac{y_0 F_\nu^{-1}(1-x) - y_1 d_\theta(x)}{w'(x)}\right) & \text{si } y_0 \neq 0, y_1 \neq 0, \\ I\left(\frac{y_0 F_\nu^{-1}(1-x)}{w'(x)}\right) & \text{si } y_0 \neq 0, y_1 = 0. \end{cases} \quad (3.6)$$

Demostración. (a) Observe que como $w(\cdot)$ es estrictamente creciente en todo su dominio, se tiene que $w'(x) > 0$ para toda $x \in (0, 1)$. Lo cual junto con la concavidad estricta de $u(\cdot)$ garantizan que $u(\cdot)w'(x)$ sea una función estrictamente cóncava para cualquier $x \in (0, 1)$. Esta propiedad de $u(\cdot)w'(x)$ no cambia al sumarle dos funciones lineales, lo cual indica que la función $g_{y_0, y_1, x}(\cdot)$ es estrictamente cóncava. Para mostrar que $g_{y_0, y_1, x}(\cdot)$ es continuamente diferenciable, basta notar que por definición es la suma de funciones continuamente diferenciables.

(b) Observe lo siguiente,

$$g'_{y_0, y_1, x}(y) := \frac{\partial}{\partial y} g_{y_0, y_1, x}(y) = u'(y)w'(x) - y_0 F_\nu^{-1}(1-x) + y_1 d_\theta(x). \quad (3.7)$$

Dado que $u(\cdot)$ satisface las condiciones de Inada se obtiene,

$$\lim_{y \rightarrow \infty} g'_{y_0, y_1, x}(y) = -y_0 F_\nu^{-1}(1-x) + y_1 d_\theta(x),$$

$$\lim_{y \downarrow x_u} g'_{y_0, y_1, x}(y) = \infty.$$

Por la concavidad estricta de $g_{y_0, y_1, x}(\cdot)$ y la continuidad de $g'_{y_0, y_1, x}(\cdot)$, lo anterior indica que una condición necesaria y suficiente para la existencia y unicidad de un máximo para $g_{y_0, y_1, x}(\cdot)$, es que $(y_0 F_\nu^{-1}(1-x) - y_1 d_\theta(x)) > 0$. Procediendo de la manera usual obtenemos que dicho máximo está dado por

$$y^*(y_0, y_1, x) = I \left(\frac{y_0 F_\nu^{-1}(1-x) - y_1 d_\theta(x)}{w'(x)} \right). \quad (3.8)$$

Finalmente, considerando los posibles valores para y_0, y_1 se obtiene la expresión (3.6). \square

El inciso (b) del resultado anterior indica bajo que condiciones se encuentra definida la cantidad $y^*(y_0, y_1, x)$. Con el fin de garantizar que $y^*(y_0, y_1, x)$ esté bien definida para todo $x \in (0, 1)$, denotaremos por

$$\mathcal{A} := \{(z_0, z_1) \in \mathbb{R}_+^2 : \text{Para todo } x \in (0, 1) (z_0 F_\nu^{-1}(1-x) - z_1 d_\theta(x)) > 0\},$$

el conjunto de todos los pares $(y_0, y_1) \in \mathbb{R}_+^2$ para los cuales se cumple que $y^*(y_0, y_1, \cdot)$ es una función. Aprovechamos para definir los conjuntos,

$$\mathcal{A}_0(y) := \{z \in \mathbb{R}_+ : (y, z) \in \mathcal{A}\},$$

$$\mathcal{A}_1(y) := \{z \in \mathbb{R}_+ : (z, y) \in \mathcal{A}\},$$

que mencionaremos al final de la sección. Para proponer a $y^*(y_0, y_1, \cdot)$ como la función cuantil candidata a solución general de (3.4), es necesario extender su dominio al intervalo $[0, 1]$. Para lo anterior sólo hace falta es definirla en $x = 0$ y $x = 1$, de tal manera que no afecte las propiedades de una función cuantil. Haciendo un simple análisis de la expresión

(3.6), se deduce que la extensión natural es la siguiente,

$$\begin{aligned}
y^*(y_0, y_1, 0) &= -\infty & (3.9) \\
y^*(y_0, y_1, 1) &= \begin{cases} I\left(\frac{y_0 F_\nu^{-1}(0) - y_1 d_\theta(1)}{w'(1)}\right) & \text{si } d_\theta(1) > 0, 0 < w'(1) < \infty, \\ I\left(\frac{y_0 F_\nu^{-1}(0)}{w'(1)}\right) & \text{si } d_\theta(1) = 0, 0 < w'(1) < \infty, \\ \infty & \text{si } d_\theta(1) > 0, w'(1) = \infty, \\ \infty & \text{si } d_\theta(1) = 0, w'(1) = \infty. \end{cases} & (3.10)
\end{aligned}$$

De ahora en adelante, siempre asumiremos que el dominio de $y^*(\cdot, \cdot, \cdot)$ es $\mathcal{A} \times [0, 1]$ y que $y^*(y_0, y_1, \cdot)$ está definida como en (3.6), (3.9) y (3.10). Enseguida verificaremos que bajo ciertas condiciones, la función $y^*(y_0, y_1, \cdot)$ es una función cuantil admisible para solución del problema (3.4).

Lema 3.2.2. *Bajo las siguientes condiciones,*

- (a) $0 < w'(1) < \infty$,
- (b) $\frac{y_0 F_\nu^{-1}(1 - (\cdot)) - y_1 d_\theta(\cdot)}{w'(\cdot)}$ es una función no creciente,

la función $y^*(y_0, y_1, \cdot)$ pertenece al conjunto \mathcal{G} .

Demostración. Procederemos a demostrar cada una de las propiedades que caracterizan a los elementos del conjunto de funciones cuantil correspondientes a posiciones admisibles.

(i) Toma valores en $(0, \infty)$: Se sigue directamente de las hipótesis hechas sobre la función de utilidad $u(\cdot)$ y ya que estamos excluyendo el caso $w'(1) = \infty$.

(ii) Es continua por la izquierda: Para $x \in (0, 1)$ es evidente ya que $y^*(y_0, y_1, \cdot)$ es una composición de funciones continuas. Por como se definió la función en los puntos $x = 0$ y $x = 1$, esta propiedad no se ve alterada.

(iii) Es no decreciente: Sean $0 \leq z_1 \leq z_2 \leq 1$. La condición (b) indica que,

$$\frac{y_0 F_\nu^{-1}(1 - z_1) - y_1 d_\theta(z_1)}{w'(z_1)} \geq \frac{y_0 F_\nu^{-1}(1 - z_2) - y_1 d_\theta(z_2)}{w'(z_2)}. \quad (3.11)$$

Dado que $I(\cdot)$ es estrictamente decreciente, se concluye que para cualesquiera $0 \leq z_1 \leq z_2 \leq 1$ se satisface

$$y^*(y_0, y_1, z_1) \leq y^*(y_0, y_1, z_2), \quad (3.12)$$

es decir, $y^*(y_0, y_1, \cdot)$ es no decreciente.

Por lo tanto, de (i), (ii) y (iii) se sigue directamente que $y^*(y_0, y_1, \cdot) \in \mathcal{G}$. □

Hasta ahora, sabemos que la función $y^*(y_0, y_1, \cdot)$ se obtiene a partir de la solución a una familia de problemas de maximización deterministas y que pertenece al conjunto de funciones cuantil admisibles. Procediendo de la manera clásica, el siguiente paso es demostrar que esta función es solución al problema de optimización (3.4) sin las restricciones.

Teorema 3.2.3. *Para $(\lambda_0, \lambda_1) \in \mathcal{A}$, defina*

$$V_{\lambda_0, \lambda_1}(x_0, x_1) = \sup_{G(\cdot) \in \mathcal{G}} U_{\lambda_0, \lambda_1}(G(\cdot)) \quad (3.13)$$

donde,

$$U_{\lambda_0, \lambda_1}(G(\cdot)) = \int_0^1 [u(G(z))w'(z) + \lambda_0(x_0 - F_\nu^{-1}(1-z)G(z)) + \lambda_1(x_1 + G(z)d_\theta(z))] dz.$$

Entonces, bajo las hipótesis del Lema 3.2.2 se sigue que,

$$V_{\lambda_0, \lambda_1}(x_0, x_1) = U_{\lambda_0, \lambda_1}(y^*(\lambda_0, \lambda_1, \cdot)). \quad (3.14)$$

Demostración. Como consecuencia del Lema 3.2.1 se obtiene que para cualquier $G(\cdot) \in \mathcal{G}$,

$$\begin{aligned}
U_{\lambda_0, \lambda_1}(G(\cdot)) &= \int_0^1 [u(G(z))w'(z) + \lambda_0(x_0 - F_\nu^{-1}(1-z)G(z)) \\
&\quad + \lambda_1(x_1 + G(z)d_\theta(z))]dz \\
&\leq \int_0^1 [\sup_{G(\cdot) \in \mathcal{G}} \{u(G(z))w'(z) - \lambda_0 F_\nu^{-1}(1-z)G(z) \\
&\quad + \lambda_1 G(z)d_\theta(z)\} + \lambda_0 x_0 + \lambda_1 x_1]dz \\
&= \int_0^1 [u(y^*(\lambda_0, \lambda_1, z))w'(z) + \lambda_0(x_0 - F_\nu^{-1}(1-z)y^*(\lambda_0, \lambda_1, z)) \\
&\quad + \lambda_1(x_1 + y^*(\lambda_0, \lambda_1, z)d_\theta(z))]dz \\
&= U_{\lambda_0, \lambda_1}(y^*(\lambda_0, \lambda_1, \cdot)). \tag{3.15}
\end{aligned}$$

y de aquí que,

$$\sup_{G(\cdot) \in \mathcal{G}} U_{\lambda_0, \lambda_1}(G(\cdot)) \leq U_{\lambda_0, \lambda_1}(y^*(\lambda_0, \lambda_1, \cdot)).$$

El Lema 3.2.2 permite concluir que la desigualdad anterior es de hecho una igualdad. \square

Con este último resultado podemos confirmar que la función cuantil $y^*(\lambda_0, \lambda_1, \cdot)$ es un excelente candidato para solución del problema (3.4). Para verificar que realmente es la solución al problema (3.4), basta garantizar la existencia de un par $(\lambda_0^*, \lambda_1^*) \in \mathcal{A}$ tal que $y^*(\lambda_0^*, \lambda_1^*, \cdot)$ satisfaga las restricciones dadas, es decir,

$$x_0 = \int_0^1 F_\nu^{-1}(1-z)y^*(\lambda_0^*, \lambda_1^*, z)dz, \tag{3.16}$$

$$x_1 \geq - \int_0^1 y^*(\lambda_0^*, \lambda_1^*, z)d_\theta(z)dz. \tag{3.17}$$

Desafortunadamente, por cuestiones de tiempo no se pudo investigar con detalle dicha existencia. Sin embargo, al final de esta sección indicamos una manera de garantizar que se satisfagan las restricciones. Una primera aproximación, es encontrar la solución al problema (3.4) sin la restricción de riesgo. Es decir, considerar $\lambda_1 = 0$ en los resultados que hemos expuesto anteriormente. Como se muestra enseguida, en este caso se puede encontrar λ_0^* tal que la restricción de capital se satisfice.

Lema 3.2.4. La función $h_0(\cdot)$ definida para todo $\lambda_0 \in \mathcal{A}_1(0) = (0, \infty)$ como

$$h_0(\lambda_0) = \int_0^1 F_\nu^{-1}(1-z)y^*(\lambda_0, 0, z)dz \quad (3.18)$$

tiene las siguientes propiedades,

(a) Es no creciente.

(b) $0 < h_0(\lambda_0) < \infty$

(c) Para $x_0 > 0$ existe un único $\lambda_0^* > 0$ tal que $h_0(\lambda_0^*) = x_0$

Demostración. (a) Se sigue directamente de la definición de $y^*(\lambda_0, 0, \cdot)$.

(b) El resultado se sigue directamente de la continuidad de la función $h_0(\cdot)$ en todo su dominio y de notar que,

$$\begin{aligned} \lim_{\lambda_0 \downarrow 0} h_0(\lambda_0) &= \lim_{\lambda_0 \downarrow 0} \int_0^1 F_\nu^{-1}(1-z)y^*(\lambda_0, 0, z)dz, \\ &= \int_0^1 F_\nu^{-1}(1-z) \lim_{\lambda_0 \downarrow 0} y^*(\lambda_0, 0, z)dz, \\ &= \infty, \end{aligned} \quad (3.19)$$

$$\begin{aligned} \lim_{\lambda_0 \rightarrow \infty} h_0(\lambda_0) &= \lim_{\lambda_0 \rightarrow \infty} \int_0^1 F_\nu^{-1}(1-z)y^*(\lambda_0, 0, z)dz, \\ &= \int_0^1 F_\nu^{-1}(1-z) \lim_{\lambda_0 \rightarrow \infty} y^*(\lambda_0, 0, z)dz, \\ &= 0. \end{aligned} \quad (3.20)$$

(c) Del inciso anterior se sigue que $h_0 : (0, \infty) \rightarrow (0, \infty)$, lo cual junto con la continuidad y monotonía implican que para $x_0 > 0$ existe un único $\lambda_0^* > 0$ tal que $h_0(\lambda_0^*) = x_0$ \square

Observe que el resultado anterior se puede modificar fácilmente para cuando $\lambda_1 \neq 0$. Entre las cosas que cambiarían se encuentran los valores de los límites en (3.19) y (3.20). Enseguida se formula un resultado que cubre el caso fácil de la solución del problema (3.4).

Teorema 3.2.5. Sea $x_0 > 0$ y λ_0^* como en el Lema 3.2.4. Si $x_1 \geq -\int_0^1 I\left(\frac{\lambda_0^* F_\nu^{-1}(1-x)}{w'(x)}\right) d\theta(z) dz$, entonces la única solución al problema (3.4) está dada por

$$G_{\lambda_0^*,0}^*(x) := I\left(\frac{\lambda_0^* F_\nu^{-1}(1-x)}{w'(x)}\right). \quad (3.21)$$

La demostración de éste resultado es directa de lo expuesto anteriormente. Lo que indica es que si $G_{\lambda_0^*,0}^*(\cdot)$ es solución al problema sin la restricción de riesgo, pero ésta satisface la restricción, entonces tiene que ser la solución al problema completo, pues nada mejor se puede hacer. El siguiente resultado muestra que dado cualquier λ_0 se puede encontrar un valor de $\lambda_1 \in \mathcal{A}_0(\lambda_0)$ que haga que la restricción de riesgo de satisfaga. De cierta manera es un resultado análogo al Lema 3.2.4.

Lema 3.2.6. Sea $\lambda_0 > 0$. La función $h_1(\cdot)$ definida para todo $\lambda_1 \in \mathcal{A}_0(\lambda_0)$ como

$$h_1(\lambda_1) = -\int_0^1 y^*(\lambda_0, \lambda_1, z) d\theta(z) dz, \quad (3.22)$$

tiene las siguientes propiedades,

(a) Es no decreciente.

(b) $-\infty =: \xi_d < h_1(\lambda_1) < \xi_u := -\int_0^1 I\left(\frac{\lambda_0^* F_\nu^{-1}(1-z)}{w'(z)}\right) d\theta(z) dz$.

(c) Para $\xi_d < x_1 < \xi_u$ existe un único $\lambda_1^* > 0$ tal que $h_1(\lambda_1^*) = x_1$.

Demostración. (a) El evidente de la definición de la función $h_1(\cdot)$.

(b) El resultado se sigue directamente de la continuidad de la función $h_1(\cdot)$ en todo su

dominio y de notar que,

$$\begin{aligned}
\lim_{\lambda_1 \rightarrow \sup \mathcal{A}_0(\lambda_0)} h_1(\lambda_1) &= \lim_{\lambda_1 \rightarrow \sup \mathcal{A}_0(\lambda_0)} \int_0^1 y^*(\lambda_0^*, \lambda_1, z) d\theta(z) dz, \\
&= \int_0^1 \lim_{\lambda_1 \rightarrow \sup \mathcal{A}_0(\lambda_0)} y^*(\lambda_0^*, \lambda_1, z) d\theta(z) dz, \\
&= -\infty,
\end{aligned} \tag{3.23}$$

$$\begin{aligned}
\lim_{\lambda_1 \rightarrow 0} h_1(\lambda_1) &= - \lim_{\lambda_1 \rightarrow 0} \int_0^1 y^*(\lambda_0^*, \lambda_1, z) d\theta(z) dz, \\
&= - \int_0^1 \lim_{\lambda_1 \rightarrow 0} y^*(\lambda_0^*, \lambda_1, z) d\theta(z) dz, \\
&= - \int_0^1 I \left(\frac{\lambda_0^* F_\nu^{-1}(1-z)}{w'(z)} \right) d\theta(z) dz.
\end{aligned} \tag{3.24}$$

(c) Se concluye de manera análoga al lema anterior. \square

Teniendo en cuenta lo anterior, observe que si fijamos $\lambda_1 \geq 0$ se puede encontrar $\lambda_0^*(\lambda_1)$ tal que la restricción de capital se satisface. A partir de

$$\lambda_0^*(\lambda_1),$$

se puede encontrar $\lambda_1^*(\lambda_0^*(\lambda_1))$ tal que la restricción de riesgo se satisface. Entonces, una manera de garantizar la existencia de una solución al problema (3.4) sería demostrar que existe un λ_1 tal que $\lambda_1^*(\lambda_0^*(\lambda_1)) = \lambda_1$, es decir, que se tiene un punto fijo. Naturalmente los valores involucrados pertenecen a los dominios correspondientes. El problema esencial en esta última parte, es que la función está definida implícitamente. También los dominios cambian al variar el valor de λ_1 . Este estudio será un trabajo futuro.

Para casos particulares del modelo de mercado, funciones de utilidad, distorsión de la medida de preferencia y distorsión de la medida de riesgo; computacionalmente se pueden encontrar los multiplicadores que hacen que se satisfagan las restricciones. En la siguiente sección ilustraremos esta afirmación.

3.3. Ejemplos

En esta sección nos enfocaremos en exponer dos casos particulares del modelo de selección bajo riesgo (3.4) que hemos propuesto. El modelo de mercado que consideraremos será el de Black-Scholes con un bono y un activo con riesgo. En otras palabras, se asumirá que la tasa de interés $r(\cdot) = r$ es constante y que el proceso de precios del stock $S(t)$ satisface la siguiente ecuación diferencial estocástica,

$$dS(t) = \mu S(t)dt + \sigma S(t)dW(t). \quad (3.25)$$

Se puede verificar que con las condiciones del modelo de Black-Scholes ν puede expresarse de la siguiente manera,

$$\begin{aligned} \nu &= \exp \left\{ - \int_0^T \left[r(s) + \frac{1}{2} \|\theta(s)\|^2 \right] ds - \int_0^T \theta(s)^\top dW(s) \right\}, \\ &= \exp \left\{ - \int_0^T \left[r + \frac{1}{2} \left\| \frac{\mu - r}{\sigma} \right\|^2 \right] ds - \int_0^T \frac{\mu - r}{\sigma} dW(s) \right\}, \\ &= \exp \left(-rT - \frac{1}{2} \left(\frac{\mu - r}{\sigma} \right)^2 T - \left(\frac{\mu - r}{\sigma} \right) W(T) \right). \end{aligned}$$

Esta última expresión hace evidente que

$$\nu \sim LN \left(-rT - \frac{1}{2} \left(\frac{\mu - r}{\sigma} \right)^2 T, \left(\frac{\mu - r}{\sigma} \right)^2 T \right). \quad (3.26)$$

El poder obtener una distribución conocida para ν fue uno de los motivos por el que escogimos el modelo de Black-Scholes. Además, este modelo es uno de los más aceptados para la valuación de activos en la industria financiera. Cabe mencionar que se puede utilizar cualquier otro modelo en el cual al menos numéricamente se pueda calcular $F_\nu^{-1}(\cdot)$. Una gran cantidad de modelos con esta propiedad pueden obtenerse pidiendo que $r(\cdot)$, $b(\cdot)$ y $\sigma(\cdot)$ sean procesos deterministas.

3.3.1. Utilidad Logarítmica y Distorsión PO

Teorema 3.3.1. *Considere las siguientes funciones en (3.4),*

- *Función de utilidad: $u(x) = \log(x)$, $x > 0$.*
- *Función de distorsión en la medida de rendimiento: $w(x) = x^2$ $x \in [0, 1]$.*
- *Función de distorsión para la medida de riesgo: $D_{0.3}^{PO}(x) = x/(0.3 + 0.7x)$.*
- *$T = 20$, $\mu = 0.2$, $\sigma = 0.3$, $r = 1$, $x_0 = .04$, $x_1 = -1.2$.*

Entonces, la solución al problema de optimización con restricción de capital y riesgo (3.4) está dada por $y^(3.33, 1.23, \cdot)$.*

Con los datos anteriores se obtiene,

$$\begin{aligned} I(x) &= (u')^{-1}(x) = 1/x, \\ w'(x) &= 2x, \\ d_{\theta}^{PO}(x) &= \frac{0.3}{(0.3 + 0.7x)^2}, \\ \nu &\sim LN(17, 1.5). \end{aligned}$$

Sustituyendo y evaluando numéricamente se obtiene el resultado.

3.3.2. Utilidad Logarítmica y Distorsión GA

Teorema 3.3.2. *Considere las siguientes funciones en (3.4),*

- *Función de utilidad: $u(x) = \log(x)$, $x > 0$.*
- *Función de distorsión en la medida de rendimiento: $w(x) = x^2$ $x \in [0, 1]$.*

- *Función de distorsión para la medida de riesgo:* $D_{0.3}^{GA}(x) = \Phi(-\Phi(1-x) - \log(0.3))$.
- $T = 20, \mu = 0.2, \sigma = 0.3, r = 1, x_0 = .01, x_1 = -2.8$.

Entonces, la solución al problema de optimización con restricción de capital y riesgo (3.4) está dada por $y^*(3, 4, \cdot)$.

Con los datos anteriores se obtiene,

$$I(x) = (u')^{-1}(x) = 1/x,$$

$$w'(x) = 2x,$$

$$d_{\theta}^{PO}(x) = \phi(-\Phi(1-x) - \log(0.3))\phi(1-x),$$

$$\nu \sim LN(17, 1.5)$$

Sustituyendo y evaluando numéricamente se obtiene el resultado.

Discusión y Conclusiones

En un modelo general de selección de portafolios y con una clase muy amplia de medidas de riesgo, en este trabajo se estudió el problema de optimización de portafolios con una restricción de riesgo. Para entender el problema fue necesario dar una pequeña pero intensiva introducción sobre medidas de riesgo y optimización de portafolios en los Capítulos 1 y 2, respectivamente. En especial, conocer y entender los trabajos de Tsukahara [28] y He y Zhou [15] fue fundamental para el desarrollo del Capítulo 3, el cual como ya mencionamos es la aportación principal de este trabajo. Enseguida se describen los resultados más destacados sobre los temas clave de este trabajo, así como estudio futuro y posibles extensiones.

Medidas de Riesgo. Lo más novedoso que se expuso sobre medidas de riesgo fue el trabajo de Tsukahara [28], cuya aportación fue la construcción de una familia parametrizada de medidas de riesgo que son coherentes y satisfacen las propiedades de invarianza en ley y comonotonidad. Además, esta familia posee características iguales a las del déficit esperado. Se utilizó esta familia para limitar el riesgo de las posiciones financieras aceptables. Sería muy interesante estudiar con mayor detalle la parte de estimación de las medidas de riesgo distorsionadas propuestas por Tsukahara [28], por ejemplo proponer estimadores asintóticamente normales.

Optimización de Portafolios. Lo más destacado en esta dirección es el trabajo de He y Zhou [15], en el que se propone un modelo general de selección de portafolios vía cuantiles en un mercado completo. En este modelo se distorsiona el flujo de efectivo y la distribución de éste. Esta propuesta cubre una gran cantidad de modelos de selección, aunque un inconveniente es que no se tiene una solución general y por lo tanto para cada caso se debe realizar el análisis correspondiente. Estudios futuros pueden incluir el estudio detallado en mercados incompletos y agregar costos de transacción.

Optimización de Portafolios con Restricción de riesgo. Sobre este problema, en este trabajo propusimos un nuevo modelo de selección bajo riesgo basandonos en los trabajos de Tsukahara [28] y He y Zhou [15]. Esta novedosa propuesta incluye los modelos que cumplen las condiciones dadas sobre las funciones de utilidad y distorsión involucradas. En el desarrollo del esquema general de solución para este problema, se logran dar condiciones suficientes para la existencia de una solución al modelo planteado por He y Zhou [15]. Se deja indicada una manera de construir la solución completa al problema, la cual consiste en algún sentido en encontrar un punto fijo. Computacionalmente se obtuvo la solución completa para casos particulares del modelo. Trabajo futuro incluye indudablemente completar la solución, tratar de relajar las hipótesis sobre las funciones involucradas, considerar mercados incompletos y agregar costos de transacción. Algo más complejo, sería analizar el caso robusto del problema, es decir, cuando se tiene incertidumbre sobre la medida de probabilidad del mercado.

Como se puede notar, el problema principal de este trabajo tiene potenciales aplicaciones en la práctica y establece una base para una gran cantidad de problemas abiertos.

Apéndice A

Teoremas Importantes

El objetivo de este pequeño apéndice es exponer la demostración del que consideramos el teorema principal de los resultados de Tsukahara [28].

Teorema A.0.3. *La familia de funciones de distorsión $\{D_\theta(\cdot)\}_{\theta>0}$ satisface [A.1], [A.2] y [G] si y sólo si existe una función de distribución $\Psi(\cdot)$ estrictamente creciente y continua sobre \mathbb{R} tal que $D_\theta(\cdot)$ puede ser escrita de la forma*

$$D_\theta(u) = \Psi(\Psi^{-1}(u) + \log(\theta)), \quad u \in (0, 1). \quad (\text{A.1})$$

Demostración. El recíproco es obvio. Para demostrar la parte directa considere la transformación $\mu = \log \theta$ y defina $\tilde{D}_\mu(u) = D_{e^\mu}(u)$. Es evidente que $\mu \in \mathbb{R}$ y $\tilde{D}_\mu(\cdot)$ satisfacen $\tilde{D}_{\mu_1} \circ \tilde{D}_{\mu_2}(\cdot) = \tilde{D}_{\mu_1 + \mu_2}(\cdot)$ para cualesquiera $\mu_1, \mu_2 \in \mathbb{R}$.

Ahora, considere $u_0 \in (0, 1)$ fijo y defina $\Psi(x) := \tilde{D}_x(u_0)$, $x \in \mathbb{R}$. Entonces, por [G] se tiene que $\Psi(x + \mu) = \tilde{D}_\mu(\Psi(x))$. Es un hecho conocido que [A.2] y [G] aseguran que $\Psi(\cdot)$ sea estrictamente creciente y por lo tanto tenga una inversa $\Psi^{-1}(\cdot)$. De aquí que $\tilde{D}_\mu(u) = \Psi(\Psi^{-1}(u) + \mu)$ para u en el rango de $\Psi(\cdot)$. Falta verificar que $\lim_{x \rightarrow -\infty} \Psi(x) = 0$ y $\lim_{x \rightarrow \infty} \Psi(x) = 1$. Se mostrará este último límite, el otro se obtiene de manera similar.

Suponga que no es verdad, es decir que $\lim_{x \rightarrow \infty} \Psi(x) = \nu < 1$. Entonces, por [A.2], deben existir μ_1 y μ_2 tales que $\tilde{D}_{\mu_1}(\nu) \neq \tilde{D}_{\mu_2}(\nu)$, y usando la continuidad de $\tilde{D}_\mu(u)$ en u , obtenemos

$$\begin{aligned} \nu &= \lim_{x \rightarrow \infty} \Psi(x + \mu_1) = \lim_{x \rightarrow \infty} \tilde{D}_{\mu_1}(\Psi(x)) = \tilde{D}_{\mu_1}(\nu) \\ &\neq \tilde{D}_{\mu_2}(\nu) = \lim_{x \rightarrow \infty} \tilde{D}_{\mu_2}(\Psi(x)) = \lim_{x \rightarrow \infty} \Psi(x + \mu_2) = \nu, \end{aligned}$$

lo cual es una contradicción y esto demuestra lo requerido. □

Bibliografía

- [1] Acerbi, C., Nardio, C. y Sirtori, C. (2008). Expected Shortfall as a Tool for Financial Risk Management.
- [2] Acerbi, C. y Simonetti, P. (2002). Portfolio Optimization with Spectral Measures of Risk.
- [3] Acerbi, C. y Tasche, D. (2002). On the Coherence of Expected Shortfall. *Journal of Banking and Finance* 26: 1487-1503.
- [4] Arnold, B.C., Robertson, C. A., Brockett, P.L. y Shu, B. Y. (1987). Generating Ordered Families of Lorenz Curves by Strongly Unimodal Distributions. *Journal of Business & Economic Statistics* 5: 305-308.
- [5] Artzner, P., Delbaen, F., Eber, J.M. y Heath, D. (1999). Coherent Measures of Risk. *Mathematical Finance* 9: 203-228.
- [6] Basak, S. y Shapiro, A. (2001). Value-at-Risk Based Risk Management: Optimal Policies and Asset Prices. *The Review of Financial Studies* 14: 371-405.
- [7] Browne, S. (1999). Reaching Goals by a Deadline: Digital Options and Continuous-Time Active Portfolio Management. *Advances in Applied Probability* 31: 551-577.
- [8] Cont, R. (2005). Model Uncertainty and its Impact on the Pricing of Derivative Instruments. *Mathematical Finance* 16: 519-547.

- [9] Dabrowska, D. M., Doksum, K. A. y Miura, R. (1989). Rank Estimates in a Class of Semiparametric Two-Sample Models. *Annals of the Institute of Statistical Mathematics* 41: 63-79.
- [10] Föllmer, H. y Schied, A. (2002). Convex Measures of Risk and Trading Constraints. *Finance and Stochastics* 6: 429-447.
- [11] Föllmer, H. y Schied, A. (2004). *Stochastic Finance An Introduction in Discrete Time*. Berlin: De Gruyter Studies in Mathematics **27**.
- [12] Gundel, A. y Weber, S. (2008). Utility Maximization Under a Shortfall Risk Constraint. *Journal of Mathematical Economics* 44: 1126-1151.
- [13] Harrison, J. M. y Kreps D. M. (1979). Martingales and Arbitrage in Multiperiod Security Markets. *Journal of Economic Theory* 20: 381-408.
- [14] Harrison, J. M. y Pliska, S. R. (1981). Martingales and Stochastic Integrals in the Theory of Continuous Trading. *Stochastic Processes and their Applications* 11: 215-260.
- [15] He X. D. y Zhou X. Y. (2010). Portfolio Choice Via Quantiles. *Mathematical Finance* 21: 203-231.
- [16] Heath, D. (1993). A Continuous Time Version of Kulldorff's Result. Unpublished manuscript.
- [17] Kahneman, D. y Tversky, A. (1979). Prospect Theory: An Analysis of Decision Under Risk. *Econometrica* 47: 263-291.
- [18] Karatzas, I. y Shreve, S. E. (1998). Methods of Mathematical Finance. *Applications of Mathematics* 39: Springer-Verlag.
- [19] Kulldorff, M. (1993). Optimal Control of Favorable Games with a Time Limit. *SIAM. Journal of Control and Optimization* 31.

- [20] Kusuoka, S. (2001). On Law Invariant Coherent Risk Measures. *Advances in Mathematical Economics* 3: 83-95.
- [21] Lopes, L. L. (1987). Between Hope and Fear: The Psychology of Risk. *Advances in Experimental Social Psychology* 20: 255-295.
- [22] Markowitz, H. (1952). Portfolio Selection. *Journal of Finance* 7:77-91.
- [23] McNeil, A. J., Frey, R. y Embrechts, P. (2005). *Quantitative Risk Management*. Princeton University Press.
- [24] Merton, R. C. (1969). Lifetime Portfolio Selection Under Uncertainty: The Continuous-Time Case. *The Review of Economics and Statistics* 51: 247-257.
- [25] Merton, R. C. (1971). Optimum Consumption and Portfolio Rules in a Continuous-Time Model. *Journal of Economic Theory* 3: 373-413.
- [26] Pliska, S. R. (1986). A Stochastic Calculus Model of Continuous Trading: Optimal Portfolios. *Mathematics of Operations Research* 11: 371-382.
- [27] Samuelson, P. A. (1969). Lifetime Portfolio Selection by Dynamic Stochastic Programming. *The Review of Economics and Statistics* 5: 239-246.
- [28] Tasche, D. (2002). Expected Shortfall and Beyond. *Journal of Banking and Finance* 26: 1519-1533.
- [29] Tsukahara, H. (2009). One-Parameter Families of Distortion Risk Measures. *Mathematical Finance* 19: 691-705.
- [30] Yaari, M. E. The Dual Theory of Choice Under Risk. *Econometrica* 55: 95-115.
- [31] Wang, S. S. (2000). A Class of Distortion Operators for Pricing Financial and Insurance Risks. *Journal of Risk Insurance* 67:15-36.