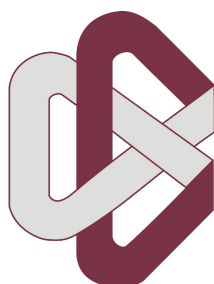


FAUSTINO NERI LARIOS

CARACTERIZACIÓN DE LA ONDA DE CHOQUE
SOBRE ESTRUCTURAS



CIMAT

CENTRO DE INVESTIGACIÓN EN MATEMÁTICAS, A. C.

Tesis:

**CARACTERIZACIÓN DE LA ONDA DE CHOQUE SOBRE
ESTRUCTURAS**

Que para obtener el grado de:

**MAESTRO EN CIENCIAS CON ESPECIALIDAD EN COMPUTACIÓN Y
MATEMÁTICAS INDUSTRIALES**

Presenta:

FAUSTINO NERI LARIOS

Director de tesis:

DR. SALVADOR BOTELLO RIONDA

Codirector de tesis:

DR. JOSÉ FRANCISCO ZÁRATE ARAIZA

Octubre 2011

Centro de Investigación en Matemáticas, A. C., Faustino Neri Larios:
Caracterización de la Onda de Choque Sobre Estructuras, Maestro en Ciencias con Especialidad en Computación y Matemáticas Industriales ,
Octubre 2011.

A mis Padres.

RESUMEN

El diseño y la validación de estructuras en contra de cargas producto de una detonación de material explosivo, es un tema de suma importancia en la sociedad moderna para proteger y salvaguardar a sus ciudadanos.

En los últimos años los explosivos de alta potencia se han convertido en el arma más utilizada en la mayoría de los ataques terroristas. Un aspecto importante en el diseño y protección de dichas estructuras es la predicción precisa de las cargas de la onda de choque sobre los diferentes elementos estructurales (e. g., ventanas, paredes, etc.). Para esto se utilizan herramientas analíticas o numéricas, las cuales pueden tomar en cuenta la complejidad de la estructura, su geometría y el ambiente circundante.

En este trabajo, la carga producto de la onda de choque es modelada utilizando un enfoque empírico basado en la ecuación *Friedlander*. El método desarrollado, reduce drásticamente el costo computacional, al no tener que solucionar el problema de fluido dinámica, esto es esencial en la mayoría de los casos, donde el número de iteraciones en las simulaciones es elevado.

Los métodos Discrete Element Method ([DEM](#)) y Finite Element Method ([FEM](#)), son utilizados para simular el comportamiento de las estructuras bajo ciertas condiciones de carga.

PALABRAS CLAVE: Detonación, Onda de choque, Presión, [DEM](#), [FEM](#).

AGRADECIMIENTOS

El mayor de mis agradecimientos es para mi *Familia*: Verónica Larios Pinto, madre y consejera; Rigoberto Neri Pérez, padre y ejemplo; y Daniel Marcos Neri Larios, hermano y compañero. Gracias a ellos por haberme dado todas las herramientas necesarias tanto para mi desarrollo personal como académico.

Quiero agradecer especialmente a mi tutor, *Dr. Salvador Botello Rionda*, por su excelente guía, paciencia, apoyo y entendimiento a lo largo de mis estudios de posgrado.

Estoy verdaderamente agradecido con mis cotutores, *Dr. Francisco Zarate*¹ y *Carlos Labra*¹, por todo el apoyo y conocimientos otorgados para el desarrollo de mi trabajo de tesis.

Un agradecimiento especial al Centro Internacional de Métodos Numéricos en Ingeniería (CIMNE) y a la Red de Aulas CIMNE, por todas las herramientas otorgadas para el desarrollo de este trabajo.

También quiero agradecer al *Consejo Nacional de Ciencia y Tecnología* (CONACyT), por haberme elegido como becario de su Programa Nacional de Posgrados de Calidad (PNPC) y haber aportado el financiamiento para la realización de mis estudios de posgrado.

Agradezco enormemente a los profesores, que durante mis estudios me impartieron cátedra: Dr. Johan Jozef Lode Van Horebeek, Dr. Jean Bernard Haye, Dr. Arturo Hernández Aguirre, Dr. Mariano José Juan Rivera Meraz, Dr. Salvador Ruíz Correa y a todo el personal tanto académico como administrativo que labora en esta gran institución CIMAT.

Gracias a mi compañeros de generación: Roberto, Aristeo, Roxana, Carlos, Fernando y Martín, por todo el tiempo y consejos compartidos durante nuestros estudios.

Un agradecimiento a Kenya Casillas Meza, por su ayuda y compañía durante la redacción de este documento.

¹ Centro Internacional de Métodos Numéricos en Ingeniería (CIMNE), Barcelona España.

ÍNDICE GENERAL

Índice de figuras	xiii
Índice de tablas	xiv
Lista de algoritmos	xiv
I PRELIMINARES	1
1 INTRODUCCIÓN	3
1.1 Objetivos	4
1.2 Organización	4
2 REVISIÓN DE LA LITERATURA	5
2.1 Fenómeno de Explosión	5
2.2 Métodos de Caracterización	5
2.3 Propiedades de la Onda de Choque Ideal	6
2.3.1 Velocidad del Frente de Choque	7
2.3.2 Velocidad de las Partículas	8
2.3.3 Densidad	8
2.3.4 Presión Dinámica	8
2.3.5 Presión Reflejada	9
2.3.6 Impulso	9
2.4 Interacción con estructuras	9
2.4.1 Difracción	9
2.4.2 Presión dinámica	10
2.4.3 Cargas	10
2.4.4 Estructura en Forma de Caja	12
2.5 Caracterización de la distribución de presión	15
2.5.1 Ecuación Friedlander	16
2.6 Leyes de Escalado	18
2.7 Equivalencia en TNT	19
2.8 Tipos de detonaciones	19
2.8.1 Detonación no confinada	20
2.8.2 Detonación confinada	21
II BASES TEÓRICAS	23
3 PRESIÓN SOBRE ESTRUCTURAS	25
3.1 Discretización del Medio	25
3.2 Presión Combinada	26
3.3 Elementos Poliedros Convexos	27
3.3.1 Fuerza Sobre un Nodo	28
3.4 Elementos Esféricos	29
3.4.1 Fuerza Elemental	29
3.5 Parámetros de la onda de choque	30
3.5.1 Parámetros de una detonación en superficie	30
3.6 Función Distancia	33

3.6.1	Resolviendo la ecuación de <i>Eikonal</i> elemento por elemento	34
3.6.2	Algoritmo	35
3.6.3	Uso de la distancia FEM	35
4	MECÁNICA DE SÓLIDOS	37
4.1	Método de Elementos Finitos	37
4.1.1	Formulación dinámica transitoria no lineal	37
4.1.2	Discretización sobre elementos finitos	39
4.2	Método de Elementos Discretos	41
4.2.1	Ecuaciones de movimiento	41
4.2.2	Integración numérica	41
4.2.3	Fuerzas de contacto	43
4.2.4	Modelo frágil perfectamente elástico	47
	III RESULTADOS	51
5	SIMULACIONES NUMÉRICAS	53
5.1	Fuselaje de avión	53
5.1.1	Características del problema	53
5.1.2	Resultados	54
5.2	Muro	56
5.2.1	Características del problema	56
5.2.2	Resultados	56
5.3	Presa baserca	58
5.3.1	Características del problema	58
5.3.2	Resultados	58
5.4	Comparación con fluido	61
5.4.1	Características del problema	61
5.4.2	Resultados	61
6	CONCLUSIONES Y TRABAJO FUTURO	65
6.1	Conclusiones	65
6.2	Trabajo futuro	66
	IV APÉNDICE	67
A	MANUAL GID	69
A.1	Crear la geometría del problema	69
A.2	Elegir el tipo de problema	69
A.3	Definir las detonaciones	69
A.4	Definir las superficies	71
A.5	Ejecutar el problema	72
	REFERENCIAS	73
	Referencias	73

ÍNDICE DE FIGURAS

Figura 1.1	Explosión <i>Minor Scale</i> , 4 kilotones de TNT [2].	3
Figura 2.1	Conservación a través del frente [9].	6
Figura 2.2	Estados en la difracción de la onda de choque, la línea punteada representa el frente de choque.	10
Figura 2.3	Presión reflejada.	11
Figura 2.4	Onda de choque moviéndose por las caras laterales y superior.	11
Figura 2.5	Onda de choque moviéndose por la cara trasera de la estructura.	12
Figura 2.6	Estructura en forma de caja con dimensiones: $L \times H \times B$	13
Figura 2.7	Distribución de presión sobre la cara frontal. . .	14
Figura 2.8	Distribución de presión sobre las caras laterales y superior.	15
Figura 2.9	Distribución de presión sobre la cara trasera. . .	16
Figura 2.10	Distribución de presión triangular.	17
Figura 2.11	Distribución de presión.	18
Figura 2.12	Categorías.	20
Figura 2.13	Detonación sobre el aire.	21
Figura 2.14	Detonación sobre la superficie.	21
Figura 3.1	Discretización.	25
Figura 3.2	Continuo afectado por la detonación, $\Omega \in \mathbb{R}^2$. . .	26
Figura 3.3	Presión combinada, $p(t)$, con $\alpha = 0.75$	27
Figura 3.4	Ángulo entre una cara elemental y la fuente de detonación.	28
Figura 3.5	Fuerza aplicada sobre un nodo, en una malla de tetraedros.	28
Figura 3.6	Ángulo entre un elemento esférico y la fuente de detonación.	29
Figura 3.7	Fuerza aplicada sobre un elemento esférico. . .	29
Figura 3.8	Detonación en superficie.	30
Figura 3.9	Detonación al aire libre.	30
Figura 3.10	Definición de la interfaz.	36
Figura 4.1	Movimiento de una partícula rígida.	42
Figura 4.2	Descomposición de la fuerza de contacto en componentes normal y tangencial.	43
Figura 4.3	Modelo reológico del contacto.	44
Figura 4.4	Penetración entre dos partículas.	44
Figura 4.5	Fuerza de fricción contra desplazamiento tangencial relativo.	45

Figura 4.6	Fuerza de contacto normal en el modelo perfectamente elástico frágil.	48
Figura 4.7	Fuerza de contacto tangencial en el modelo perfectamente elástico frágil.	49
Figura 4.8	Rotura para el modelo perfectamente elástico frágil.	49
Figura 5.1	Restos recuperados del vuelo TWA 800 [10]. . .	54
Figura 5.2	Fuselaje.	54
Figura 5.3	Desplazamientos del fuselaje.	55
Figura 5.4	Vista del muro.	56
Figura 5.5	Desplazamientos del muro.	57
Figura 5.6	Presa baserca (España).	58
Figura 5.7	Presa.	59
Figura 5.8	Desplazamientos del muro.	60
Figura 5.9	Octante con 0.53kg de TNT.	61
Figura 5.10	Detonación.	62
Figura 5.11	Perfiles de presión.	63
Figura A.1	Problema de ejemplo.	69
Figura A.2	Tipo de problema dentro de <i>GiD</i>	70
Figura A.3	Definición de las detonaciones.	70
Figura A.4	Estructuras afectadas por las detonaciones. . . .	71
Figura A.5	Seleccionar superficies afectadas.	71
Figura A.6	Ejecutar.	72
Figura A.7	Post proceso.	72

ÍNDICE DE TABLAS

Tabla 2.1	Equivalencia en TNT para algunos explosivos.	19
Tabla 2.2	Tipos de detonaciones.	20

LISTA DE ALGORITMOS

Figura 3.1	Coefficiente de decaimiento.	33
Figura 3.2	Función distancia <i>FEM</i>	35

ACRÓNIMOS

FEM Finite Element Method

DEM Discrete Element Method

FMM Fast Marching Method

FIC Finite Calculus

SÍMBOLOS

m_i	Masa de la partícula i
I_i	Momento de inercia de la partícula i
\mathbf{F}_i	Vector de fuerzas en la partícula i
\mathbf{T}_i	Vector de torsión en la partícula i
\mathbf{u}_i	Vector de desplazamiento de la partícula i
\mathbf{x}_i	Posición del centro de la partícula i
$\boldsymbol{\omega}_i$	Velocidad angular
d_{ij}	Distancia entre dos partículas i y j
$\boldsymbol{\sigma}$	Tensor de estrés
$\boldsymbol{\varepsilon}$	Tensor de esfuerzos
E	Módulo de young
ν	Poisson ratio
μ	Coefficiente de Coulomb de fricción
k_n	Rigidez de contacto en la dirección normal
k_t	Rigidez de contacto en la dirección tangencial
c_n	Amortiguado de contacto en la dirección normal
R_n	Máxima fuerza de contacto en la dirección normal
R_t	Máxima fuerza de contacto en la dirección tangencial
Δt	Tamaño de paso temporal
P	Presión
ρ	Densidad
U	Velocidad del frente de choque
q	Presión dinámica
p_{s0}	Presión incidente
p_r	Presión refleja
t_a	Tiempo de llegada de la onda de choque
t_o	Duración de la fase positiva
i_s^+	Impulso positivo
i_s^-	Impulso negativo
γ	Relación de calor específico
T	Temperatura
C	Velocidad del sonido

Parte I

PRELIMINARES

INTRODUCCIÓN

El estudio de la onda de choque (producto de detonaciones) y el efecto causado sobre estructuras no había sido tan ampliamente abordado si no hasta el transcurso de la *Primera Guerra Mundial*. Solo algunos reportes científicos fueron publicados hasta antes del comienzo de la *Segunda Guerra Mundial*.

Desde 1945 el estudio tanto analítico como experimental del fenómeno ha aumentado notablemente con grandes avances militares (armas nucleares y cohetes auto-dirigidos). Por ende la mayoría del conocimiento relacionado con el tema ha sido desarrollado por instituciones militares. Mucha de la información generada de estos estudios ha sido restringida para el sector civil.

Esto ha cambiado gradualmente desde el ataque al edificio *Alfred P. Murrah Federal Building*, en la ciudad de Oklahoma el 19 de Abril de 1995. El cual fue el mayor atentado terrorista ocurrido en América hasta antes del 11 de Septiembre del 2001 [11]. El interés y la investigación de la interacción de la onda de choque y estructuras aumente debido a la reciente actividad terrorista (e. g. el colapso de las torres gemelas en la ciudad de Nueva York en el 2001). Por lo que el estudio de la onda de choque se ha convertido en un tema de interés para el diseño de estructuras tanto civiles como militares.

El estudio de la onda de choque y su interacción con estructuras es un problema multidisciplinario en el cual se ven envueltos los siguientes fenómenos físicos: análisis dinámico estructural, comportamiento del material, física de la onda de choque, y balística.

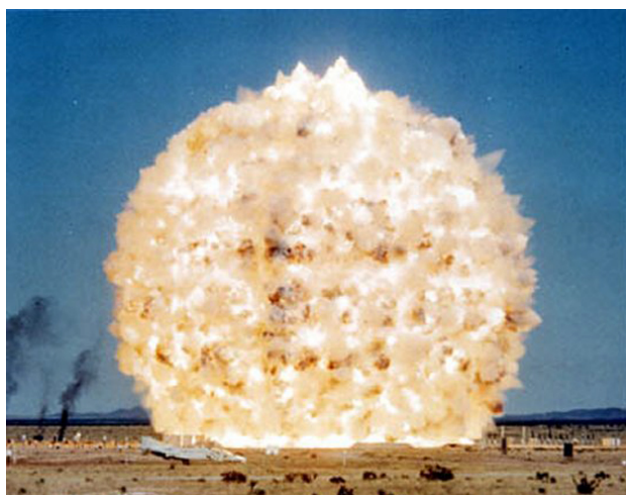


Figura 1.1: Explosión *Minor Scale*, 4 kilotonnes de TNT [2].

A la izquierda de la imagen [Figura 1.1](#), se encuentra un avión *F-4 Phantom* el cual tiene una longitud de 19 m, para mostrar la escala de la detonación.

Para predecir el comportamiento real de las estructuras bajo la carga de la onda de choque, se hace uso de herramientas avanzadas tanto analíticas como numéricas las cuales pueden tomar en cuenta la complejidad de la estructura, su geometría y el ambiente circundante.

1.1 OBJETIVOS

Los objetivos del este trabajo se pueden descomponer de la siguiente forma:

- Revisión detallada de las propiedades físicas de la onda de choque y su interacción con estructuras.
- Desarrollo de una herramienta numérica de predicción de la carga producida por la onda de choque sobre estructuras complejas.
- Análisis y verificación de la herramienta para poder marcar sus ventajas y limitaciones.

1.2 ORGANIZACIÓN

Este trabajo esta organizado en 6 capítulos, de los cuales, los últimos cinco son resumidos a continuación:

2. REVISIÓN DE LA LITERATURA: incluye una revisión del modelo físico detrás de la onda de choque y su interacción con estructuras.
3. CARGA SOBRE ESTRUCTURAS: descripción y desarrollo de los diferentes elementos que conforman el método de caracterización de la onda de choque y cómo se aplica sobre los métodos de análisis estructural [DEM](#) y [FEM](#).
4. MECÁNICA DE SÓLIDOS: se describen los modelos físicos necesarios para simular el comportamiento del material ([DEM](#) y [FEM](#)).
5. SIMULACIONES NUMÉRICAS: contiene el análisis y verificación de los resultados de las simulaciones realizadas.
6. CONCLUSIONES Y TRABAJO FUTURO

BIBLIOGRAFÍA

APÉNDICE: contiene un manual de usuario de la herramienta y su interacción con GiD ¹.

¹ El cual puede ser encontrado en línea
<http://gid.cimne.upc.es/>

REVISIÓN DE LA LITERATURA

2.1 FENÓMENO DE EXPLOSIÓN

Una explosión es el resultado de una liberación extremadamente rápida de energía proveniente de un espacio reducido en un lapso de tiempo muy corto. Las explosiones pueden ser categorizadas según sea su naturaleza ya sea física, nuclear o química.

EXPLOSIÓN FÍSICA: es causada por fenómenos mecánicos como por ejemplo: una falla en un tanque con gas comprimido, una erupción volcánica o incluso mezclando dos líquidos a diferentes temperaturas.

EXPLOSIÓN NUCLEAR: la energía es liberada debido a la formación de diferentes núcleos atómicos por la redistribución de los protones y neutrones dentro del núcleo que entra en interacción.

EXPLOSIÓN QUÍMICA: puede ser causada por la conversión extremadamente rápida de un compuesto sólido o líquido a un gas con alta temperatura, debido a la rápida oxidación de los átomos de hidrógeno y carbono, generando un mayor volumen que la sustancia que generó el fenómeno.

2.2 MÉTODOS DE CARACTERIZACIÓN

El término detonación se refiere a un proceso de combustión supersónica que implica la existencia de una onda expansiva y una zona de reacción detrás de ella. La velocidad de una detonación varía entre [5000, 8000] m/s, para la mayoría de materiales explosivos. La presión tras la detonación se incrementa rápidamente en un rango de [18000, 35000] MPa. En este fenómeno solo una tercera parte de la energía química de la mayoría de los materiales explosivos se libera en el proceso [US-Army](#) [16].

Existen diferentes métodos, con los cuales se puede simular el fenómeno de una detonación (explosión), algunos con menor costo computacional que otros y por lo tanto menor exactitud.

MÉTODOS EMPÍRICOS: Están basados en correlaciones sobre datos experimentales. Este tipo de enfoque pierde exactitud a medida que incrementa la complejidad de la geometría del medio donde se realiza el estudio de la detonación.

MÉTODOS SEMI-EMPIRÍCOS: Están basados en simplificaciones de modelos físicos. La complejidad de la geometría del ambiente

puede ser mayor (e. g., una detonación dentro de un edificio). Su exactitud es generalmente mayor que la otorgada por los métodos empíricos.

MÉTODOS NUMÉRICOS: Están basados en la solución numérica de formulaciones matemáticas, las cuales describen las leyes físicas que gobiernan el fenómeno. Incluyendo conservación de masa, momento y energía. Además de un modelo que describe el comportamiento del material (ecuación de estado). Este tipo de métodos son los que otorgan mayor exactitud, la complejidad de la geometría del ambiente no depende del método.

2.3 PROPIEDADES DE LA ONDA DE CHOQUE IDEAL

Las relaciones Rankine-Hugoniot (R-H) son las expresiones para la conservación de masa, energía y momento a través de un frente de choque. Estas expresan las condiciones en el frente de choque, el cual hasta este punto, es tratado como una discontinuidad.

En la [Figura 2.1](#), se ilustra la forma unidimensional de las ecuaciones de conservación de masa, momento, y energía a través de un frente que viaja con una velocidad, U ; en un gas con una presión ambiental, p_0 ; una densidad ambiental, ρ_0 ; velocidad ambiental del material, u_0 (se asume cero para esta derivación) y una temperatura del ambiente, T_0 .

*Frente de choque,
modelado como una
discontinuidad
repentina de presión.*

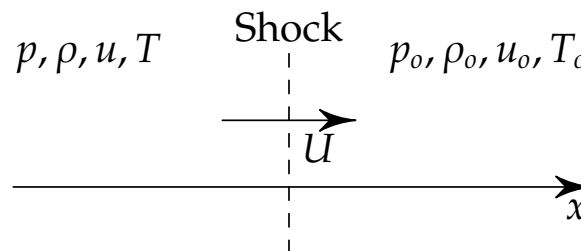


Figura 2.1: Conservación a través del frente [9].

Las propiedades detrás del frente de choque son presión, p ; densidad del gas comprimido en el frente de choque, ρ ; velocidad del material en el frente, u ; y la temperatura del gas comprimido en el frente de choque, T .

Estas ecuaciones de conservación se aplican para cualquier dimensión. Para derivar la ecuación de conservación de masa, se obtiene la masa del gas que es superado por el frente de choque que viaja a una velocidad, U , en un tiempo, t :

$$m_g = \rho_0 U t, \quad (2.1)$$

esta masa es comprimida a una densidad ρ en un volumen $(U - u)t$. Cancelando el tiempo se obtiene la ecuación de conservación de masa:

$$\rho(U - u) = \rho_o U. \tag{2.2}$$

La derivación de las ecuaciones de conservación de momento y energía se realiza de la misma forma que para la ecuación de conservación de masa. La ecuación de estado utilizada mantiene γ constante (i. e., formulación para un gas ideal). Las condiciones R-H son:

Conservación de masa, conservación de momento, conservación de energía, y ecuación de estado.

$$\rho(U - u) = \rho_o U, \tag{2.3}$$

$$p - p_o = \rho_o U u, \tag{2.4}$$

$$E - E_o = \frac{1}{2}(p + p_o) \left(\frac{1}{\rho_o} - \frac{1}{\rho} \right), \tag{2.5}$$

$$p = (\gamma - 1)\rho E. \tag{2.6}$$

Las propiedades del frente de choque en una región no normal a la dirección de propagación, son complejas y dependen del ángulo de incidencia y de la sobre presión. Para una detonación en la superficie, cuando solo existe un sola onda hemisférica y debajo de la región Mach, para una detonación en el aire, las propiedades del frente de choque pueden ser relacionadas simplemente con las condiciones R-H, anteriormente descritas.

A continuación se describen algunas relaciones derivadas de las condiciones R-H.

2.3.1 Velocidad del Frente de Choque

La velocidad del frente de choque es expresado como [9]:

$$U = c_o \left(1 + \frac{(\gamma + 1)p_{so}}{2\gamma p_o} \right)^{1/2}, \tag{2.7}$$

donde c_o , es la velocidad del sonido y γ , es el radio de calor específico en el medio ambiente (por ejemplo, aire). Si, γ , toma el valor igual a 1.4 (el valor de una temperatura ambiental moderada), la ecuación de la velocidad del frente de choque se convierte en:

$$U = c_o \left(1 + \frac{6p_{so}}{7p_o} \right)^{1/2}. \tag{2.8}$$

2.3.2 Velocidad de las Partículas

La velocidad máxima del viento, detrás del frente de choque, u , está dada por [9]:

$$u = \frac{c_o p_{so}}{\gamma p_o} \left(1 + \frac{(\gamma + 1)p_{so}}{2\gamma p_o} \right)^{-1/2}, \quad (2.9)$$

para el aire:

$$u = \frac{5p_{so}}{7p_o} \left(\frac{c_o}{(1 + 6p_{so}/7p_o)^{1/2}} \right). \quad (2.10)$$

2.3.3 Densidad

La densidad, ρ , del aire detrás del frente de choque está relacionado con densidad ambiental, ρ_o , por [9]:

$$\frac{\rho}{\rho_o} = \frac{2\gamma p_o + (\gamma + 1)p_{so}}{2\gamma p_o + (\gamma - 1)p_{so}}, \quad (2.11)$$

para el aire:

$$\frac{\rho}{\rho_o} = \frac{7 + 6p_{so}/p_o}{7 + p_{so}/p_o}. \quad (2.12)$$

2.3.4 Presión Dinámica

La presión dinámica está definida como [9]:

$$q = \frac{\rho u^2}{2}, \quad (2.13)$$

que es la energía cinética por unidad de volumen del aire inmediatamente detrás del frente de choque; esta cantidad tiene la misma dimensión que la presión.

Introduciendo las condiciones de R-H para, ρ y u , dadas anteriormente se puede derivar:

$$q = \frac{p_{so}^2}{2\gamma p_o + (\gamma - 1)p_{so}}, \quad (2.14)$$

para el aire:

$$q = \frac{5p_{so}^2}{2(7p_o + p_{so})}. \quad (2.15)$$

2.3.5 Presión Reflejada

Cuando una onda de choque golpea una superficie plana, tal como una estructura, de una forma normal, la presión instantáneamente alcanza un valor de sobre presión definido por [9]:

$$p_r = 2p_{so} + (\gamma - 1)q, \quad (2.16)$$

para el aire, esto se convierte en:

$$p_r = 2p_{so} \left(\frac{7p_o + 4p_{so}}{7p_o + p_{so}} \right). \quad (2.17)$$

2.3.6 Impulso

Otro parámetro importante en la caracterización de la onda de choque es el impulso, el cual toma en cuenta la duración de la fase positiva y la variación de la sobre presión en el tiempo. El impulso (por unidad de área) puede ser definido como el área bajo la curva de la variación de la sobre presión en el tiempo.

El impulso generado en la fase positiva puede ser expresado matemáticamente como:

$$i_s^+ = \int_{t_a}^{t_a+t_o} [p(t) - p_o] dt. \quad (2.18)$$

De igual forma el impulso generado en la fase negativa es expresado como:

$$i_s^- = \int_{t_a+t_o}^{t_a+t_o+t_o^-} [p(t) - p_o] dt. \quad (2.19)$$

2.4 INTERACCIÓN CON ESTRUCTURAS

El procedimiento usual para realizar la predicción del daño causado por una onda de choque es por análisis, soportado por pruebas de laboratorio en diferentes escalas.

2.4.1 Difracción

Cuando el frente de la onda de choque golpea la cara de una estructura, el fenómeno de difracción ocurre.

En la [Figura 2.2](#), se ilustran los diferentes estados de este fenómeno, desde al arribo del frente hasta que la estructura es completamente envuelta en un campo de presión.

En la [Figura 2.2](#), se ilustran los diferentes estados de la onda de choque al interactuar una estructura sin aperturas.

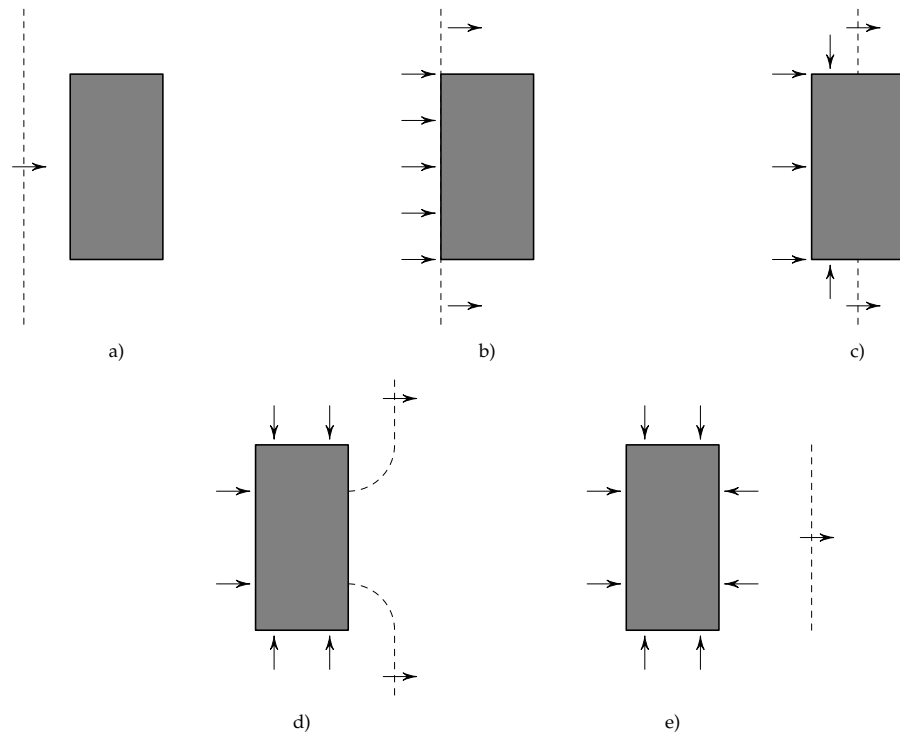


Figura 2.2: Estados en la difracción de la onda de choque, la línea punteada representa el frente de choque.

Como resultado el valor de la sobre presión aumenta rápidamente por lo menos al doble (generalmente es mucho más) que la presión incidente p_{s0} . La presión alcanzada está en función de la sobre presión de la onda de choque incidente y del ángulo de incidencia del frente de choque y la cara de la estructura, a esta presión se le denomina presión reflejada, p_r .

La presión reflejada, puede ser de dos a ocho veces mayor que la presión incidente, como se ilustra en la Figura 2.3.

El cambio de presión se debe a la conversión de energía cinética del aire detrás del frente en energía interna, debido a que el rápido movimiento detrás de la onda es bruscamente desacelerado al entrar en contacto con la cara de la estructura.

2.4.2 Presión dinámica

Durante la fase positiva (y un corto tiempo después), la estructura estará sujeta a la presión dinámica (arrastre), q , debido al viento en movimiento detrás de la onda de choque.

La carga de arrastre persiste mayor tiempo que la carga de difracción.

2.4.3 Cargas

La carga debido a la interacción de la onda choque sobre un objeto, está en función de las características de la onda de choque incidente (e. g.,

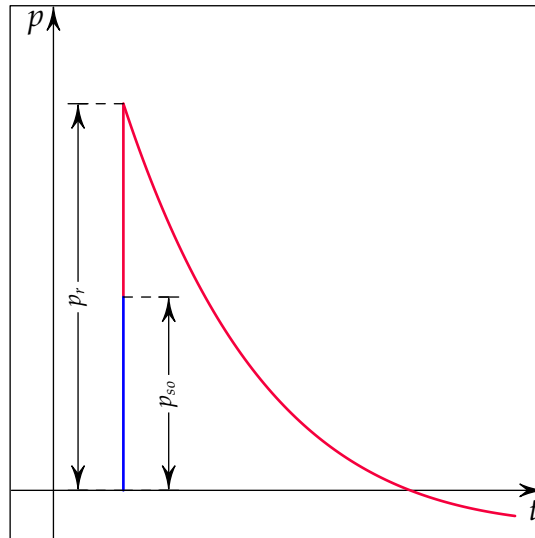


Figura 2.3: Presión reflejada.

máxima sobre presión, presión dinámica y duración) y las características geométricas del objeto (e. g., dimensiones, forma y orientación).

Para obtener una idea general de cómo se caracterizan las cargas en un objeto, se analizará un cubo el cual es alcanzado por una onda de choque por la parte frontal (i. e., normal a la dirección de propagación).

Cuando la onda de choque alcanza la cara frontal, se presenta la reflexión, la cual puede ser de dos a ocho veces más grande que la sobre presión de incidencia.

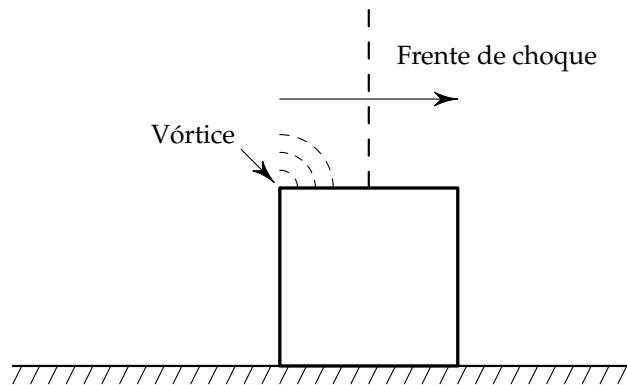


Figura 2.4: Onda de choque moviéndose por las caras laterales y superior.

La onda de choque cubre las caras laterales, superior y trasera, el objeto es envuelto en un campo de alta presión la cual decae al transcurrir el tiempo hasta alcanzar la presión atmosférica. La presión reflejada que actúa sobre la cara frontal del objeto, es mayor en comparación a la presión ejercida en las caras laterales, superior y trasera. La presión reflejada no puede ser mantenida y decae rápidamente hasta la presión de estancamiento, p_s , la cual es la suma de la sobre presión y la presión dinámica.

La Figura 2.4, ilustra la creación de un vórtice en la esquina superior izquierda de la estructura.

En la Figura 2.5, se ilustra la creación de un vórtice en la esquina superior derecha de la estructura.

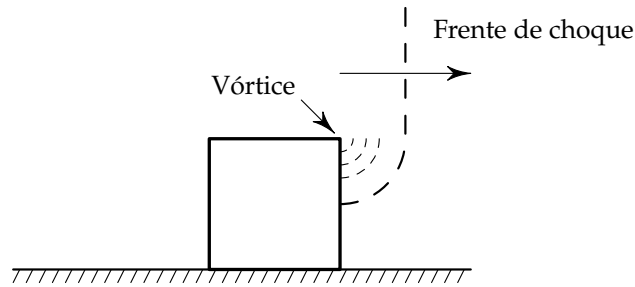


Figura 2.5: Onda de choque moviéndose por la cara trasera de la estructura.

La presión en las demás caras alcanza la sobre presión incidente cuando el frente de choque alcanza los puntos en cuestión. Después se presenta un periodo de baja presión el cual es causado por la formación de un vórtice en el borde frontal del objeto. Cuando el vórtice termina, la presión regresa a la presión de incidencia la cual decae al pasar el tiempo.

El flujo de aire causa una disminución en la carga en las caras laterales y superior debido a que la presión de arrastre tiene un valor negativo. Cuando la onda de choque alcanza la cara posterior del objeto, se difracta alrededor de los bordes y baja recorriendo la parte trasera de éste.

La carga total en una cara dada del objeto es igual a la suma algebraica de la sobre presión incidente, $p(t)$ y de la presión de arrastre. La presión de arrastre está relacionada con la presión dinámica, $q(t)$, por la siguiente expresión:

$$p_d(t) = C_d q(t), \quad (2.20)$$

donde C_d , es el coeficiente de arrastre. El valor de, C_d , depende de la orientación de la cara con respecto al frente de choque y puede ser negativo o positivo.

2.4.4 Estructura en Forma de Caja

Una estructura en forma de caja puede ser representada como un paralelepípedo con las siguientes dimensiones: largo L , alto H y amplitud B , ($L \times H \times B$). Por simplicidad se asume que los muros de la estructura no cuentan con aperturas (e. g., puertas o ventanas). La presión en el interior se considera que permanece alrededor de la presión atmosférica.

En la [Figura 2.6](#) se muestra la estructura, se considera que una de las caras apunta hacia la detonación y que es perpendicular a la dirección de propagación de la onda de choque.

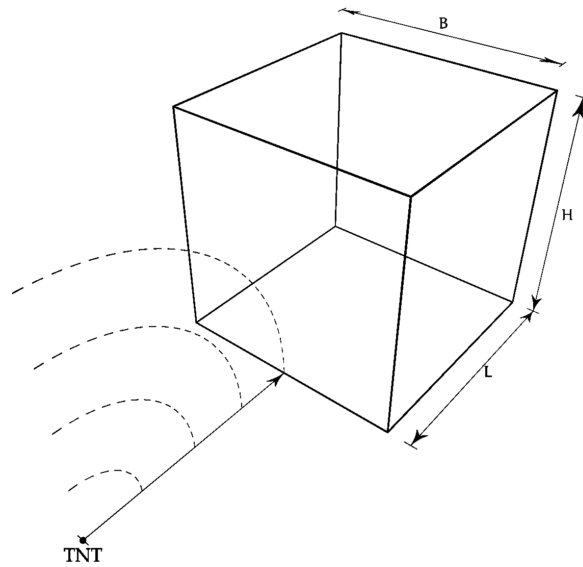


Figura 2.6: Estructura en forma de caja con dimensiones: $L \times H \times B$.

2.4.4.1 Cara Frontal

El primer paso necesario para calcular la distribución de presión promedio sobre la cara frontal consiste en calcular la presión reflejada, p_r . El paso siguiente es calcular el tiempo, t_s , en el cual la presión de estancamiento es alcanzada, p_s . Se ha visto en pruebas de laboratorio que, t_s , puede ser representado, con una buena aproximación por:

$$t_s = \frac{3S}{U}, \quad (2.21)$$

donde S , es igual a H o $B/2$ (el valor que resulte menor) y U es la velocidad del frente de choque.

El coeficiente de arrastre, C_d , para esta cara de la estructura es igual a 1, por lo tanto la presión de arrastre es igual a la presión dinámica (ver [Ecuación 2.20](#)). La presión de estancamiento esta dada de la siguiente forma:

$$p_s = p(t_s) + q(t_s), \quad (2.22)$$

donde $p(t_s)$ y $q(t_s)$ son la sobre presión incidente y la presión dinámica en el tiempo t_s .

En la [Figura 2.7](#), se muestra la distribución de presión sobre la cara frontal, la presión promedio decae con el tiempo como la suma algebraica de la sobre presión y la presión dinámica.

$$p(t) + q(t), \quad (2.23)$$

donde t , es cualquier tiempo entre $[t_s, t_0]$.

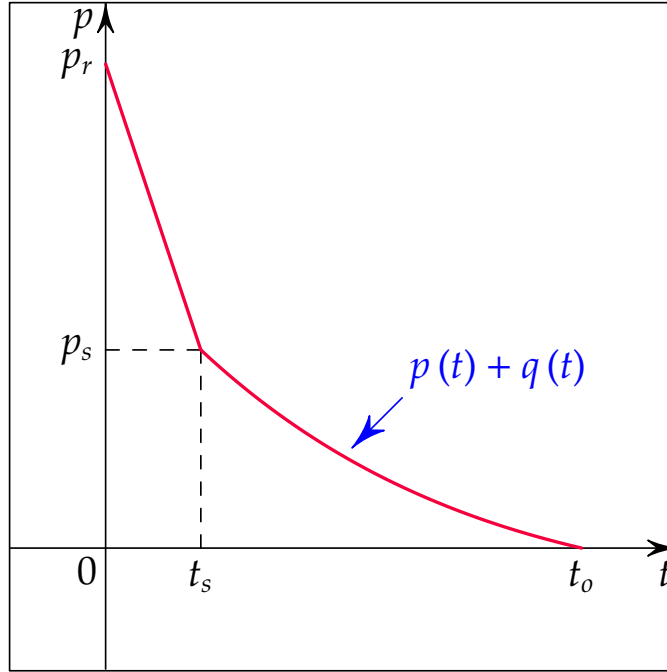


Figura 2.7: Distribución de presión sobre la cara frontal.

2.4.4.2 Caras Laterales y Superior

Las caras laterales y superior no son completamente cargadas hasta que la onda de choque viaja la distancia, L (i. e., al tiempo $t = L/U$). La presión promedio hasta este tiempo, es la suma de la sobre presión y la presión de arrastre:

$$p_{\alpha} = p \left(\frac{L}{2U} \right) + C_d q \left(\frac{L}{2U} \right), \quad (2.24)$$

el coeficiente de arrastre, C_d , en las caras laterales y superior tiene un valor aproximado dentro del rango $[-0.2, -0.4]$ [US-Army \[16\]](#).

La presión se incrementa hasta p_{α} , en un tiempo L/U . Para un tiempo subsecuente la presión es:

$$p \left(t - \frac{L}{2U} \right) + C_d q \left(t - \frac{L}{2U} \right), \quad (2.25)$$

donde $t \in [L/U, t_0 + L/2U]$, como se muestra en la [Figura 2.8](#).

2.4.4.3 Cara Trasera

La onda de choque arriba a la cara trasera en el tiempo, $(t_{\alpha} - L/U)$, pero se requiere un tiempo adicional para que el valor promedio sea alcanzado, p_b . Donde p_b , está dado aproximadamente por:

$$p_b = p \left(\frac{L + 4S}{U} \right) + C_d q \left(\frac{L + 4S}{U} \right), \quad (2.26)$$

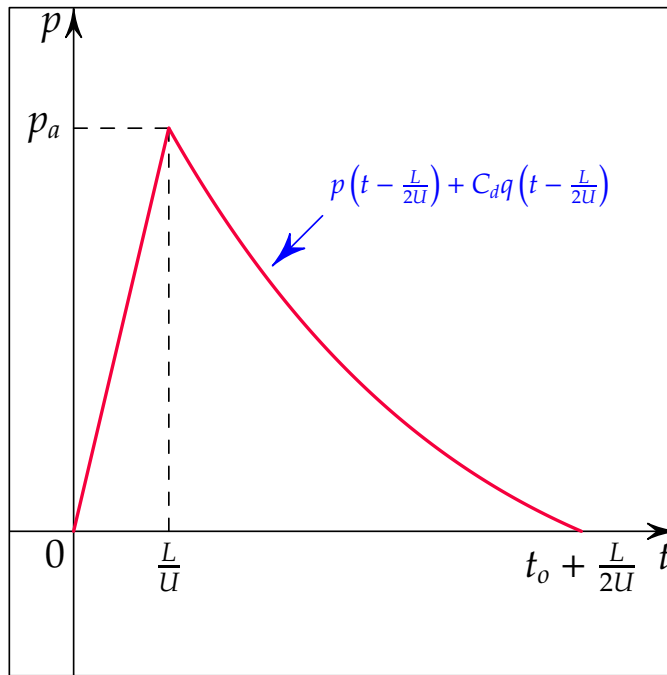


Figura 2.8: Distribución de presión sobre las caras laterales y superior.

donde, S, es igual a H ó B/2 (el valor que resulte menor). El coeficiente de arrastre en la cara trasera es aproximadamente -0.3 .

En la [Figura 2.9](#) se muestra la distribución de presión, el valor de la presión para un tiempo después de alcanzar, p_b , es:

$$p\left(t - \frac{L}{U}\right) + C_d q\left(t - \frac{L}{U}\right), \tag{2.27}$$

donde $t \in [(L + 4S)/U, t_0 + L/U]$.

2.5 CARACTERIZACIÓN DE LA DISTRIBUCIÓN DE PRESIÓN

Cuando una detonación ocurre, una gran liberación de energía hacia la atmósfera resulta en una presión que varía rápidamente en el tiempo (onda de choque). La onda de choque se propaga de manera radial, desde el origen de la detonación hacia todas direcciones con una velocidad supersónica. La forma y magnitud de la onda de choque depende de la cantidad de energía y de la distancia del punto de la detonación.

La onda de choque es usualmente caracterizada como una instantánea subida de presión (ver [Figura 2.1](#)), desde la presión de referencia (presión atmosférica) hasta un valor máximo de sobre presión. Este valor máximo decae exponencialmente hasta alcanzar la presión de referencia, a este lapso de tiempo se le conoce como fase positiva.

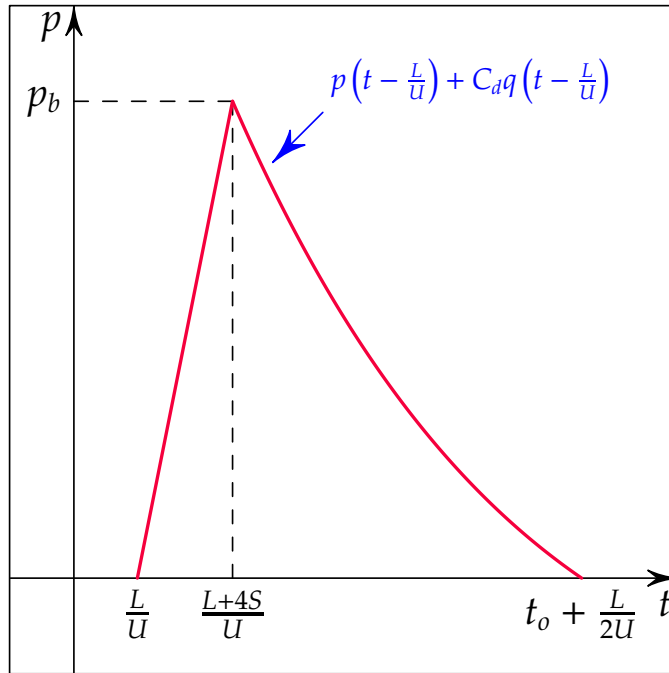


Figura 2.9: Distribución de presión sobre la cara trasera.

Esto es seguido por una onda de presión negativa, durante un lapso de tiempo no mayor al de la fase positiva y es caracterizada por un valor mínimo de presión.

2.5.1 Ecuación Friedlander

Existen en la literatura varias formulaciones con las cuales se puede caracterizar la forma de la distribución temporal de presión.

En la [Figura 2.10](#), se ilustra esta distribución idealizada como un impulso triangular, conociendo la máxima presión, p_{so} , y la duración de la fase positiva, t_o .

$$p(t) = p_o + p_{so} \left(1 - \frac{t - t_a}{t_o} \right), \tag{2.28}$$

donde p_o , es la presión de referencia; p_{so} , la máxima sobre presión alcanzada; t_a es el tiempo de llegada de la onda de choque; t_o la duración de la fase positiva y t , es el tiempo actual.

Basados en la solución de Sedov-Taylor del problema de onda de choque auto-similar [Sedov \[13\]](#), la distribución temporal de una onda de choque esférica, puede ser expresada en la forma de la ecuación de Friedlander [Baker \[3\]](#):

$$p(t) = p_o + p_{so} \left(1 - \frac{t - t_a}{t_o} \right) \exp \left(-\frac{t - t_a}{t_o} \right). \tag{2.29}$$

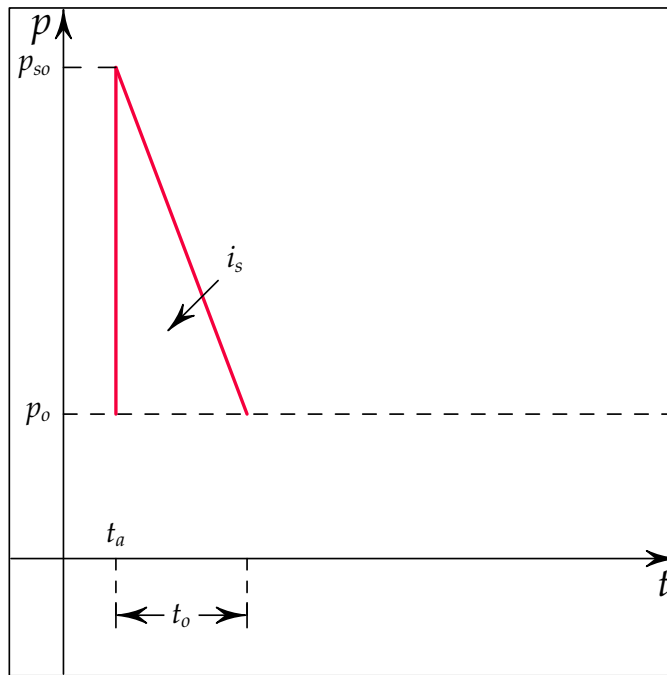


Figura 2.10: Distribución de presión triangular.

En la [Figura 2.11](#), se ilustra la distribución de presión de la ecuación de Friedlander modificada:

$$p(t) = p_o + p_{s0} \left(1 - \frac{t - t_a}{t_o}\right) \exp\left(-a \frac{(t - t_a)}{t_o}\right), \quad (2.30)$$

donde b , es un parámetro (adimensional) que controla el descenso de la presión.

Los parámetros de esta distribución de presión son:

TIEMPO DE LLEGADA: t_a , tiempo que transcurre hasta que la onda de presión arriba al punto en consideración.

PRESIÓN DE REFERENCIA: p_o , presión ambiental (101,325 Pa).

MÁXIMA PRESIÓN: p_{s0} , en el momento que la onda arriba, la presión alcanza su máximo valor en un tiempo extremadamente corto.

DURACIÓN DE LA FASE POSITIVA: t_o , cuando se alcanza la máxima presión, p_{s0} , el valor comienza a descender hasta alcanzar la presión de referencia, p_o .

MÍNIMA PRESIÓN: p_{s0}^- , después de alcanzar la presión de referencia, el valor decae hasta llegar a una presión mínima.

DURACIÓN DE LA FASE NEGATIVA: t_o^- , alcanzada la presión mínima, p_{s0}^- , el valor comienza a subir hasta alcanzar el valor de referencia, p_o .

Modificando la Ecuación 2.28 y utilizando el parámetro, a , se obtiene una mejor aproximación y se logra modelar la fase de succión, $[t_a + t_o, t_a + t_o + t_o^-]$.

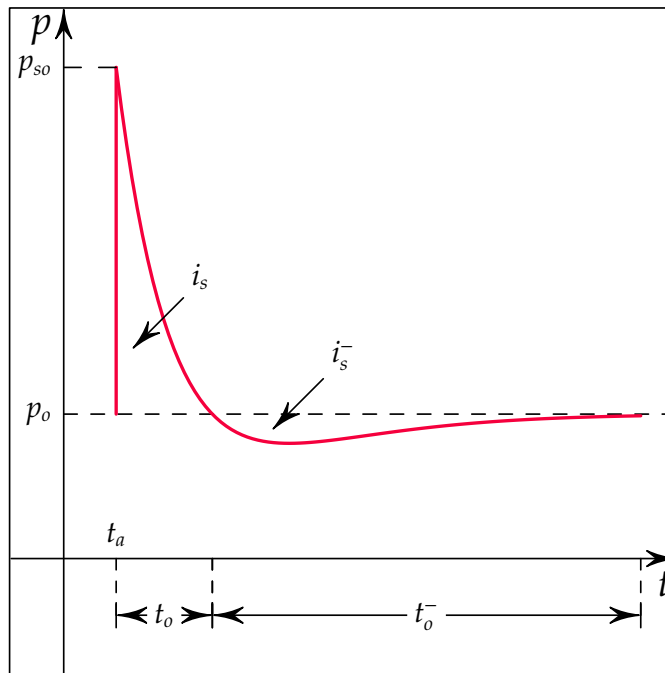


Figura 2.11: Distribución de presión.

IMPULSO POSITIVO: i_s^+ , área bajo la curva de la variación de la sobre presión en la fase positiva.

IMPULSO NEGATIVO: i_s^- , área bajo la curva de la variación de la sobre presión en la fase negativa.

C.N. Kingery y G. Bulmash [4] han desarrollado ecuaciones para predecir estos parámetros para modelos esféricos (detonación en el aire) y hemisféricos (detonación sobre la superficie).

El reporte [4], contiene una compilación de datos de pruebas explosivas, utilizando cargas de menos de 1 kg hasta mas de 40,000 kg. Los autores utilizaron ajustes numéricos para representar los datos con ecuaciones polinomiales de alto grado.

2.6 LEYES DE ESCALADO

La ley de escalado más utilizada en detonaciones es la de *escalado de raíz cúbica*, también conocida como *ley de Hopkinson Baker* [3], la cual establece que si una detonación ocurre a una distancia, R_1 ; con una carga, W_1 ; una segunda explosión con carga, W_2 ; generará la misma sobre presión a un radio, R_2 , como resultado de la siguiente relación:

$$\frac{R_1}{R_2} = \left(\frac{W_1}{W_2} \right)^{1/3} = \lambda. \quad (2.31)$$

El parámetro, λ , es conocido como el factor de rendimiento explosivo. Todos los parámetros de la distribución de presión [Ecuación 2.30](#), están dados en términos de la *distancia escalada*:

$$Z = \frac{R}{W^{1/3}}, \quad (2.32)$$

donde R , es la distancia desde la detonación hasta el punto de análisis y W , es la cantidad de masa expresada en kilogramos del equivalente en TNT.

El uso de la distancia escalada, Z , permite un forma compacta y eficiente de representar los parámetros de la onda de choque, para un rango amplio de situaciones.

2.7 EQUIVALENCIA EN TNT

Para realizar la comparación entre diferentes materiales explosivos, la equivalencia con TNT (Trinitrotolueno) es usada de forma estándar. Se sabe que, 1 kg de TNT libera 4.520×10^6 J.

En la [Tabla 2.1](#), se muestra la equivalencia en TNT disponible para la mayoría de explosivos, adaptada de [5].

EXPLOSIVO	EQUIVALENCIA EN TNT
TNT	1.0
Torpex	1.667
C4	1.34
RDX	1.185
PETN	1.282
Compuesto B (60 % RDX 40 % TNT)	1.148
Pentolita 50/50	1.129
Dinamita	1.3
Semtex	1.250

Tabla 2.1: Equivalencia en TNT para algunos explosivos.

2.8 TIPOS DE DETONACIONES

Las detonaciones pueden dividirse en dos tipos según el confinamiento de la carga (confinadas y no confinadas). Y pueden ser divididas con base en la posición de la carga con respecto a una estructura. Esas categorías se ilustran en la [Figura 2.12](#), se muestran las seis diferentes clases de detonaciones junto con las posibles estructuras de interacción.

En la [Tabla 2.2](#), se muestran las clasificaciones para detonaciones confinadas y no confinadas ilustradas en la [Figura 2.12](#).

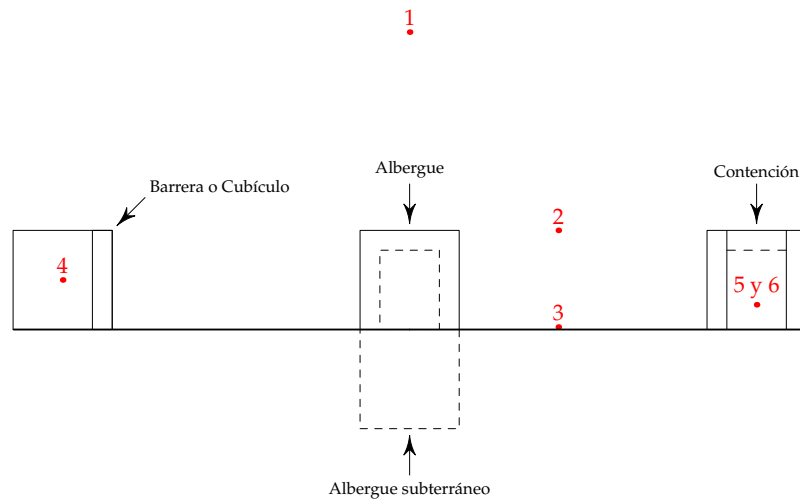


Figura 2.12: Categorías.

CONFINAMIENTO DE LA CARGA	CATEGORÍA
No confinada	1. Detonación al aire libre
	2. Detonación en el aire
	3. Detonación en superficie
Confinada	4. Totalmente ventilada
	5. Parcialmente confinada
	6. Totalmente confinada

Tabla 2.2: Tipos de detonaciones.

2.8.1 Detonación no confinada

En este tipo de detonaciones, la carga no se encuentra cubierta por algún tipo de estructura (e. g., alberque, pared, etc.).

2.8.1.1 Detonación al aire libre

Una detonación que ocurre en el aire libre, produce una onda de choque la cual se propaga hacia todas direcciones desde el centro de la detonación. La onda de choque golpea las estructuras sin amplificar su intensidad.

2.8.1.2 Detonación en el aire

Este tipo de detonación ocurre en el aire, pero al contrario de la *detonación al aire libre*, se presentan reflexiones debido a la interacción con el suelo antes de arribar a la estructura afectada (ver [Figura 2.13](#)).

El material explosivo se encuentra en el aire, por lo que el frente de choque incidente tiene una forma esférica.

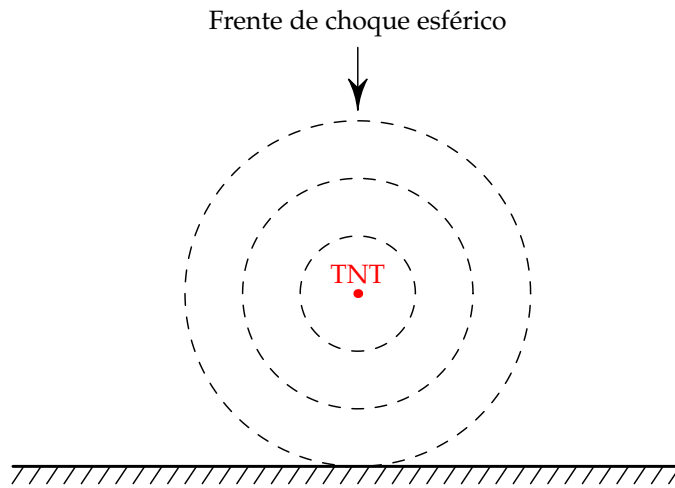


Figura 2.13: Detonación sobre el aire.

2.8.1.3 Detonación en superficie

Una detonación en superficie ocurrirá cuando la carga se encuentre cerca del suelo por lo que el frente es amplificado en el punto de detonación debido a las reflexiones producidas por la interacción con el suelo (ver [Figura 2.14](#)).

El material explosivo se encuentra sobre una superficie plana, por lo que el frente de choque es hemisférico.

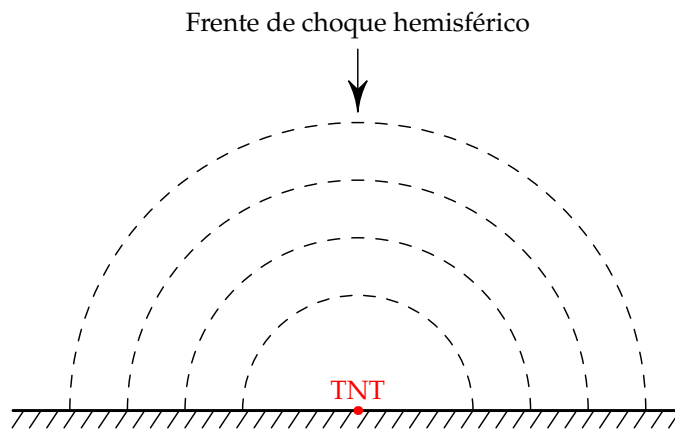


Figura 2.14: Detonación sobre la superficie.

2.8.2 Detonación confinada

Una detonación confinada, ocurre cuando la carga explosiva se encuentra recubierta por una estructura, totalmente sellada ó con aperturas (e. g., ventabas, puertas, etc).

2.8.2.1 Detonación totalmente ventilada

Una detonación ventilada se produce dentro o adyacente a una barrera o estructura en forma de cubículo con una o más superficies abier-

tas. El frente inicial, es amplificado por las superficies rígidas de la estructura.

2.8.2.2 *Detonación parcialmente confinada*

Este tipo de detonación se produce dentro de una barrera o una estructura tipo cubículo la cual cuenta con aperturas o alguna superficie frágil. La onda inicial es amplificada por las superficies rígidas y frágiles. El confinamiento de los productos de la detonación, que consisten en la acumulación de altas temperaturas y productos gaseosos, se asocia con una acumulación de presión cuasi-estática. Esta presión tiene una larga duración en comparación con la de la onda de presión.

2.8.2.3 *Detonación totalmente confinada*

La detonación totalmente confinada es el confinamiento total de la detonación dentro de una estructura. La presión interna consistirá de un frente sin ventilación generando una presión de larga duración la cual esta en función del grado de confinamiento.

Parte II

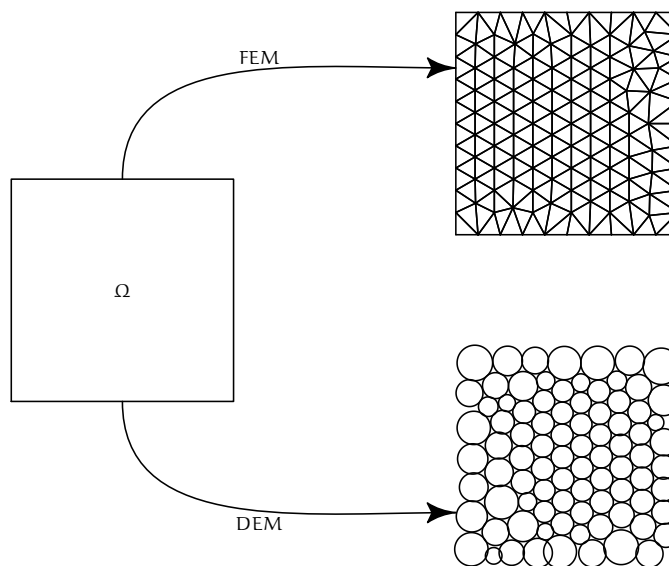
BASES TEÓRICAS

PRESIÓN SOBRE ESTRUCTURAS

3.1 DISCRETIZACIÓN DEL MEDIO

En condiciones reales la onda de choque interactúa con superficies complejas y a diferentes ángulos de incidencia. La presión generada debido a la detonación de un material explosivo, es aplicada como una condición en la frontera, Γ ; sobre un continuo, Ω ; que se discretiza, en un número, n ; de elementos, e_i (e. g., líneas en 1D, triángulos en 2D y tetraedros en 3D).

$$\Omega \approx \bigcup_{i \in \{0, \dots, n\}} e_i. \quad (3.1)$$



Discretización del medio, Ω , en elementos triangulares (FEM) y en elementos circulares (DEM).

Figura 3.1: Discretización.

En la [Figura 3.2](#) se muestra el continuo, Ω ; afectado por la detonación, TNT. En los elementos, $e_j \cap \Gamma$, se debe realizar el análisis de presión.

El método implementado en este trabajo está basado en un modelo empírico, además de tomar en cuenta el ángulo de incidencia del frente de choque. Éste puede ser aplicado a dos diferentes tipos de elementos:

- i Poliedros convexos: este tipo de elementos son utilizados en la discretización del medio, para problemas que se resuelven utilizando [FEM](#).

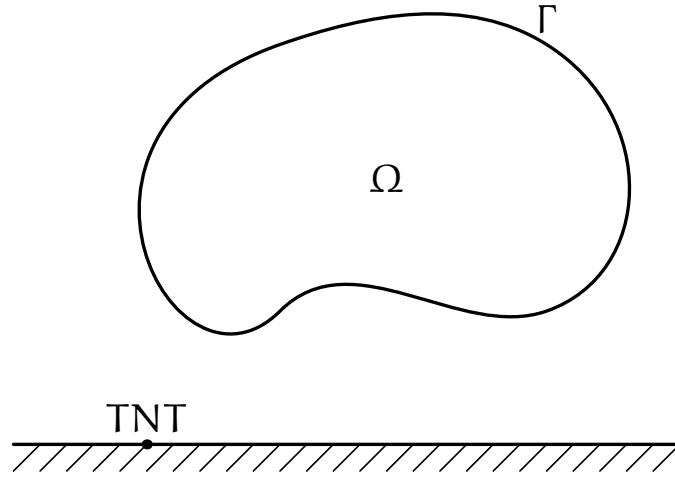


Figura 3.2: Continuo afectado por la detonación, $\Omega \in \mathbb{R}^2$.

- ii Esferas: este tipo de elementos son utilizados en el método [DEM](#), el cual es utilizado para modelar materiales granulares y tipo roca.

3.2 PRESIÓN COMBINADA

La función de presión, $p(t)$, que se aplica sobre la frontera, Γ , es una combinación de dos variables, presión incidente, p_{so} y presión reflejada, p_r . La presión incidente y la presión reflejada, se pueden combinar con la siguiente formulación [Glenn Randers-Pehrson y Kenneth A. Bannister \[8\]](#):

$$p(t) = \alpha^2 p_r(t) + (1 + \alpha - 2\alpha) p_{so}(t), \quad (3.2)$$

donde α , está relacionado con el ángulo de incidencia de la onda de choque:

$$\alpha = \text{máx}(\cos(\theta), 0). \quad (3.3)$$

En la [Ecuación 3.2](#), se aprecia que si, $\alpha = 1$, la cara esta de frente a la detonación por lo tanto:

$$p(t) = p_r(t), \quad (3.4)$$

y si, $\alpha = 0$, la cara del elemento apunta hacia la dirección contraria al punto de detonación, por consecuencia:

$$p(t) = p_{so}(t). \quad (3.5)$$

Las dos funciones, $p_{so}(t)$ y $p_r(t)$, siguen una distribución *Friedlander*:

$$\{p_{so}(t), p_r(t)\} \sim \text{Friedlander}. \quad (3.6)$$

En la [Figura 3.3](#), se muestra la fase positiva de una distribución de presión, resultado de la combinación de las presiones, $p_{so}(t)$ y $p_r(t)$, con un $\alpha = 0.75$.

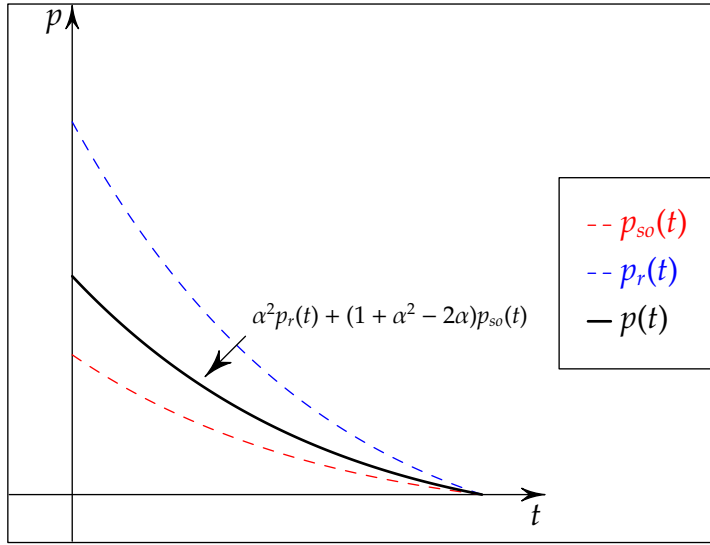


Figura 3.3: Presión combinada, $p(t)$, con $\alpha = 0.75$.

La fuerza total, resultado de la detonación, que es aplicada sobre un elemento, e_i , se define como:

$$\mathbf{F}_i^{\text{blast}}(t) = -(Ap(t))\mathbf{n}, \tag{3.7}$$

donde \mathbf{n} , es un vector normal al elemento y A , es el área relacionada a este elemento.

3.3 ELEMENTOS POLIEDROS CONVEXOS

En la [Figura 3.4](#), se muestra una cara de un tetraedro (triángulo en 3D) en la cual la onda de choque incidirá con un ángulo, θ . Este ángulo de incidencia se calcula de la siguiente manera:

$$\cos(\theta) = \mathbf{n} \cdot \mathbf{d}, \tag{3.8}$$

donde:

$$\begin{aligned} \mathbf{c} &= \frac{1}{3} (\mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2 + \mathbf{v}_3), \\ \mathbf{n} &= (\mathbf{v}_2 - \mathbf{v}_1) \times (\mathbf{v}_3 - \mathbf{v}_2), \\ \mathbf{d} &= \text{TNT} - \mathbf{c}, \end{aligned}$$

\mathbf{c} , es el centro del elemento; \mathbf{n} , es un vector que apunta hacia afuera del elemento y \mathbf{d} , es un vector que apunta del centro hacia el punto de la detonación.

De lo anterior se deduce que si, $\cos(\theta) = 1$, el elemento está de frente al punto de detonación y si, $\cos(\theta) = -1$, el elemento no está encarando el punto de detonación (i. e., la presión incidente es aplicada).

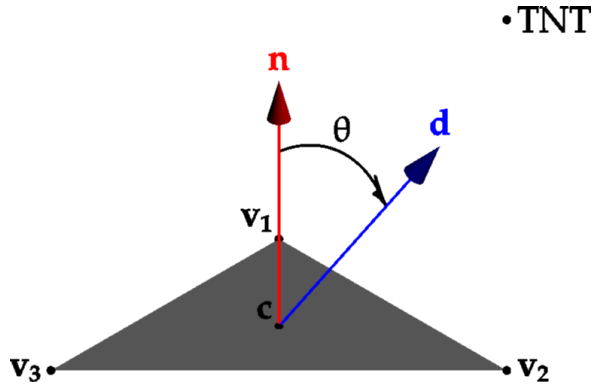


Figura 3.4: Ángulo entre una cara elemental y la fuente de detonación.

3.3.1 Fuerza Sobre un Nodo

En los problemas de mecánica de sólidos, que se resuelven utilizando FEM, la fuerza debe ser calculada en cada nodo de la malla, n_i , que representa la frontera afectada, Γ , por la detonación.

En la Figura 3.5, se muestra como todos los elementos vecinos, e_j , del nodo, n_i , aportan una proporción, $\frac{A_j}{3}$, de su presión para calcular la fuerza ejercida sobre el nodo.

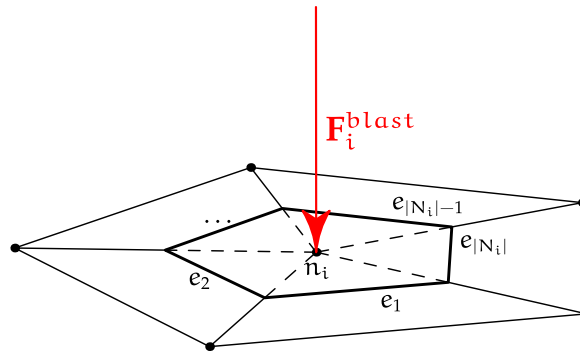


Figura 3.5: Fuerza aplicada sobre un nodo, en una malla de tetraedros.

El vector de fuerza, F_i^{blast} , se calcula de la siguiente forma:

$$F_i^{blast} = - \left(\sum_{j \in N_i} \frac{A_j}{3} p_j \right) n. \tag{3.9}$$

3.4 ELEMENTOS ESFÉRICOS

Este tipo de elementos son utilizados para la solución de problemas de mecánica de sólidos, en el método, DEM. De forma análoga que para los elementos, FEM, se debe calcular el ángulo de incidencia, θ , entre el frente de choque y el elemento (ver Figura 3.6).

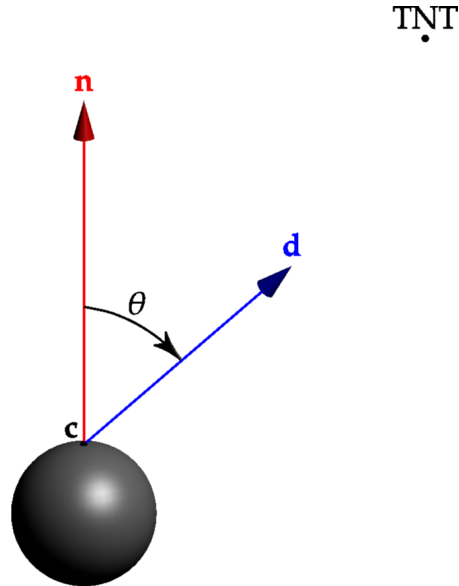


Figura 3.6: Ángulo entre un elemento esférico y la fuente de detonación.

3.4.1 Fuerza Elemental

En la Figura 3.7, se muestra como en el método DEM se aplica la fuerza sobre una partícula (elemento), la fuerza es aplicada como si esta actuara en el centro del elemento.

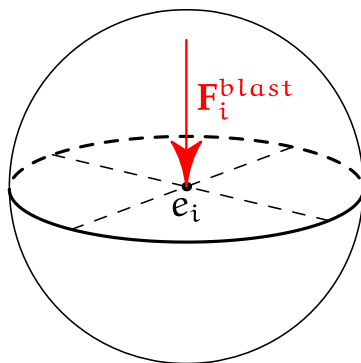


Figura 3.7: Fuerza aplicada sobre un elemento esférico.

El vector de fuerza, $\mathbf{F}_i^{\text{blast}}$, se calcula de la siguiente forma:

$$\mathbf{F}_i^{\text{blast}} = -(A_i p_i) \mathbf{n}. \quad (3.10)$$

3.5 PARÁMETROS DE LA ONDA DE CHOQUE

Existen en la literatura varios conjuntos de ecuaciones, para predecir los parámetros asociados a la caracterización de la onda de choque, principalmente para la presión incidente. Estos modelos están basados en análisis teóricos, cálculos numéricos, o en el análisis de un gran número de datos experimentales.

3.5.1 Parámetros de una detonación en superficie

El tipo de detonación utilizada en este trabajo es *detonación en superficie*. En este tipo de detonación el material explosivo se encuentra sobre una superficie rígida, por lo que la amplitud de la onda de choque inicial aumenta debido a la reflexión resultado de la interacción con esta superficie como se ilustra en la [Figura 3.8](#).

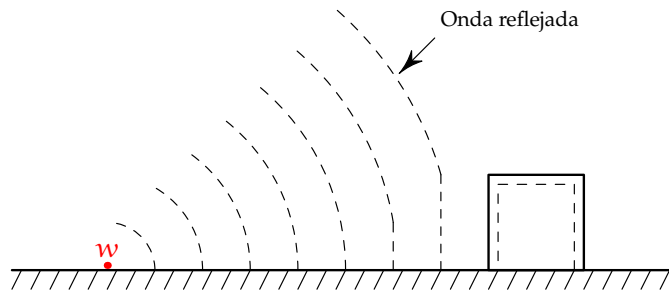


Figura 3.8: Detonación en superficie.

Al usar este tipo de detonación se simplifica la interacción entre la onda de choque y las estructuras bajo análisis debido a que la reflexión existente se presenta en el instante de la detonación, lo cual no ocurre en las detonaciones al aire libre en donde el fenómeno de reflexión ocurrirá hasta que la onda de choque alcance la superficie donde se localizan ubicadas las estructuras, ver [Figura 3.9](#).

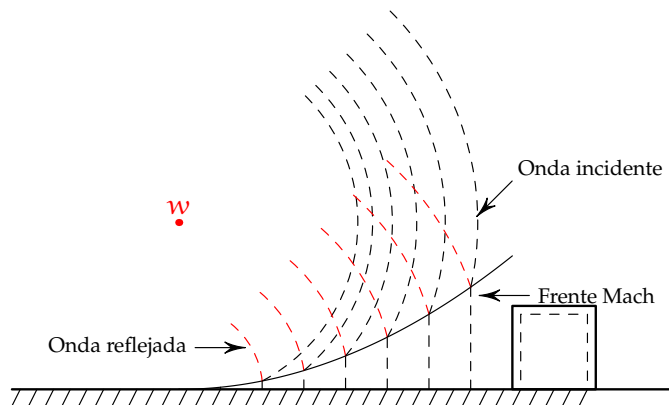


Figura 3.9: Detonación al aire libre.

En este trabajo, el modelo utilizado para la predicción de los parámetros es el propuesto por Swisdak [15]:

$$f(Z, \mathbf{x}) = \exp \left(\sum_{i=0}^6 x_i \ln(Z)^i \right), \quad (3.11)$$

donde, Z , es la distancia escalada, y $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^6$, es un vector que varía en función al parámetro a predecir. Este modelo está basado en la compilación de C.N. Kingery y G. Bulmash [4].

El modelo propuesto [15], tiene dos características importantes:

- i Las ecuaciones son mas fáciles de implementar que las ecuaciones propuestas por [4].
- ii Estas ecuaciones predicen el resultado de [4], con un error promedio menor al 1 %.

A continuación se muestra el valor del vector, \mathbf{x} , para cada parámetro necesario en la caracterización de la onda de choque. El resultado de la evaluación del modelo Ecuación 3.11 utilizando como argumento las Ecuaciones 3.14 - 3.17, debe de ser multiplicado por $w^{1/3}$, para obtener el valor deseado de los parámetros: $\{t_a, t_o, i_s^+, i_{sr}^+\}$.

3.5.1.1 Presión incidente, p_{so} (kPa)

$$\mathbf{x} = \begin{cases} \langle 7.2106, -2.1069, -0.3229, 0.1117, & \text{si } Z \in [0.2, 2.9] \\ 0.0685, 0, 0 \rangle \\ \langle 7.5938, -3.0523, 0.40977, 0.0261, & \text{si } Z \in (2.9, 23.8] \\ -0.01267, 0, 0 \rangle \\ \langle 6.0536, -1.4066, 0, 0, 0, 0 \rangle & \text{si } Z \in (23.8, 198.5] \end{cases} \quad (3.12)$$

3.5.1.2 Presión reflejada, p_r (kPa)

$$\mathbf{x} = \begin{cases} \langle 9.006, -2.6893, -0.6295, 0.1011, & \text{si } Z \in [0.06, 2] \\ 0.29255, 0.13505, 0.019736 \rangle \\ \langle 8.8396, -1.733, -2.64, 2.293, & \text{si } Z \in (2, 40] \\ -0.8232, 0.14247, -0.0099 \rangle \end{cases} \quad (3.13)$$

3.5.1.3 *Tiempo de llegada, $t_a/W^{1/3}$ (ms/kg^{1/3})*

$$\mathbf{x} = \begin{cases} \langle -0.7604, 1.8058, 0.1257, -0.0437, & \text{si } Z \in [0.06, 1.5] \\ -0.0310, -0.00669, 0 \rangle \\ \langle -0.7137, 1.5732, 0.5561, -0.4213, & \text{si } Z \in (1.5, 40] \\ 0.1054, -0.00929, 0 \rangle \end{cases} \quad (3.14)$$

3.5.1.4 *Duración de la fase positiva, $t_o/W^{1/3}$ (ms/kg^{1/3})*

$$\mathbf{x} = \begin{cases} \langle 0.5426, 3.2299, -1.5931, -5.9667, & \text{si } Z \in [0.2, 1.02] \\ -4.0815, -0.9149, 0 \rangle \\ \langle 0.5440, 2.7082, -9.7354, 14.3425, & \text{si } Z \in (1.02, 2.8] \\ -9.7791, 2.8535, 0 \rangle \\ \langle -2.4608, 7.1639, -5.6215, 2.2711, & \text{si } Z \in (2.8, 40] \\ -0.44994, 0.03486, 0 \rangle \end{cases} \quad (3.15)$$

3.5.1.5 *Impulso incidente, $i_s^+/W^{1/3}$ (kPa – ms/kg^{1/3})*

$$\mathbf{x} = \begin{cases} \langle 5.522, 1.117, 0.6, -0.292, -0.087, 0, 0 \rangle & \text{si } Z \in [0.2, 0.96] \\ \langle 5.465, -0.308, -1.464, 1.362, & \text{si } Z \in (0.96, 2.38] \\ -0.432, 0, 0 \rangle \\ \langle 5.2749, -0.4677, -0.2499, 0.0588, & \text{si } Z \in (2.38, 33.7] \\ -0.00554, 0, 0 \rangle \\ \langle 5.9825, -1.062, 0, 0, 0, 0, 0 \rangle & \text{si } Z \in (33.7, 158.7] \end{cases} \quad (3.16)$$

3.5.1.6 *Impulso reflejado, $i_{sr}^+/W^{1/3}$ (kPa – ms/kg^{1/3})*

$$\mathbf{x} = \langle 6.7853, -1.3466, 0.101, -0.01123, 0, 0, 0 \rangle \quad \text{si } Z \in [0.06, 40] \quad (3.17)$$

3.5.1.7 *Coefficiente de decaimiento, a (adimensional)*

Uno de los parámetros más importantes en la predicción de la distribución de presión es el parámetro de decaimiento. Para calcularlo

se utiliza un método iterativo [Glenn Randers-Pehrson y Kenneth A. Bannister](#) [8], en el cual se toma en cuenta el área bajo esta distribución (i. e., el impulso i_o^+ en la fase positiva), la presión incidente, y la duración de la fase positiva:

Algoritmo 3.1 Coeficiente de decaimiento.

```

 $p_x = p_{so}(t_o/i_o^+)$ 
 $a = x - 1$ 
 $f_a = a^2 - p_x(a + e^{-a} - 1)$ 
while  $|f_a| > \epsilon$  do
   $f_{pa} = 2a - p_x(1 - e^{-a})$ 
   $a = a - \frac{f_a}{f_{pa}}$ 
   $f_a = a^2 - p_x(a + e^{-a} - 1)$ 
end while

```

3.6 FUNCIÓN DISTANCIA

El uso de la distancia, *Euclidiana*, está restringido para los puntos que no encaran la fuente de detonación (i. e., $\cos(\theta) < 0$), es por esto que para encontrar el campo escalar de distancia, se necesita una función, $d(\text{TNT}, \mathbf{x}_i)$, que tomando en cuenta la parte conocida (i. e., $d(\text{TNT}, \mathbf{x}_i) = \text{Euclidiana}$) se pueda calcular el resto del campo escalar.

Una función distancia, también denominado campo escalar de distancias, puede ser definido como un campo escalar donde para cada punto dentro de este campo se conoce la distancia de este punto a una superficie de un objeto.

[Sethian](#) [14] utilizó la idea del cruce en tiempo para desarrollar el método Fast Marching Method (FMM). Este método es utilizado para calcular el tiempo de llegada de un frente temporal. Esto se logra resolviendo la ecuación de *Eikonal* para una cierta condición de frontera. La ecuación de *Eikonal* se define como:

$$\|\nabla T\|F = 1, \quad (3.18)$$

donde $F \geq 0$, es la velocidad del frente y T , es el tiempo de llegada.

Dado un punto, \mathbf{x} , el tiempo de llegada, $T(\mathbf{x})$, es el tiempo en el cual el frente pasa por el punto, \mathbf{x} . Si la velocidad del frente es, $F = 1$, el tiempo de llegada al punto, \mathbf{x} , es simplemente la distancia de, \mathbf{x} , al punto mas cercano del frente en un tiempo, 0.

A continuación se describe el método desarrollado por [Elias et al.](#) [6], para el cálculo de la función distancia sobre mallas no estructuradas. El método esta basado en la interpolación, FEM, para mantener la propiedad de *Eikonal*, ($\|\nabla \phi\| = 1$), a nivel elemental sobre el dominio.

3.6.1 Resolviendo la ecuación de Eikonal elemento por elemento

La ecuación de *Eikonal* en su forma, **FEM**, puede ser expresada a nivel elemental de la siguiente manera:

$$\|\nabla\varphi^e\| = \|\mathbf{B}^T \mathbf{d}\| = 1, \quad (3.19)$$

donde φ^e , es la función distancia elemental; \mathbf{b} , es el vector distancia elemental y \mathbf{B} , es el operador gradiente discreto.

Para un triángulo en \mathbb{R}^3 , \mathbf{b} , y \mathbf{B} pueden ser expresados como:

$$\mathbf{d} = [d_1, d_2, d_3]^T, \quad (3.20)$$

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} N_{1,x} & N_{1,y} & N_{1,z} \\ N_{2,x} & N_{2,y} & N_{2,z} \\ N_{3,x} & N_{3,y} & N_{3,z} \end{bmatrix}, \quad (3.21)$$

donde $N_{i,j}$, es la derivada de la función de interpolación del nodo, i , en la dirección, j .

Así se obtiene el gradiente de la función distancia a nivel elemental:

$$\begin{bmatrix} \varphi_{,x}^e \\ \varphi_{,y}^e \\ \varphi_{,z}^e \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} N_{1,x}d_1 & N_{2,x}d_2 & N_{3,x}d_3 \\ N_{1,y}d_1 & N_{2,y}d_2 & N_{3,y}d_3 \\ N_{1,z}d_1 & N_{2,z}d_2 & N_{3,z}d_3 \end{bmatrix}, \quad (3.22)$$

lo cual nos deja la siguiente restricción de tal forma que se mantenga la propiedad de *Eikonal* a nivel elemental:

$$(\varphi_{,x}^e)^2 + (\varphi_{,y}^e)^2 + (\varphi_{,z}^e)^2 = 1. \quad (3.23)$$

Expandiendo la **Ecuación 3.23**, se puede calcular la distancia del tercer nodo, de la siguiente forma:

$$(d_x + N_{3,x}d_3)^2 + (d_y + N_{3,y}d_3)^2 + (d_z + N_{3,z}d_3)^2 = 1, \quad (3.24)$$

donde:

$$d_x = N_{1,x}d_1 + N_{2,x}d_2,$$

$$d_y = N_{1,y}d_1 + N_{2,y}d_2,$$

$$d_z = N_{1,z}d_1 + N_{2,z}d_2.$$

La forma cuadrática de la **Ecuación 3.24**, se puede definir como:

$$\underbrace{(N_{3,x}^2 + N_{3,y}^2 + N_{3,z}^2)}_a d_3^2 + \quad (3.25)$$

$$\underbrace{(2d_x N_{3,x} + 2d_y N_{3,y} + 2d_z N_{3,z})}_b d_3 + \quad (3.26)$$

$$\underbrace{(d_x^2 + d_y^2 + d_z^2 - 1)}_c = 0. \quad (3.27)$$

De acuerdo con Sethian [14], se asume que la distancia del nodo restante puede ser tomada como el máximo de las dos raíces reales:

$$d_3 = \max \left(\frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{4ac}, \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{4ac} \right). \quad (3.28)$$

3.6.2 Algoritmo

A continuación se describe el algoritmo utilizado para resolver las Ecuaciones 3.27 y 3.28 sobre todo el dominio. El algoritmo está basado en, FMM, propuesto por Sethian [14].

Las estructuras de datos necesarias para el desarrollo del algoritmo son las siguientes:

ELEMENTSTOSOLVE: es una lista que contiene los elementos con al menos dos distancias conocidas (esto para mallas de triángulos).

KNOWNNODES: es una lista que contiene el número de nodos con la distancia conocida por cada elemento de la malla.

ELEMENTSPERNODES: es una tabla que contiene los elementos vecinos de un nodo.

Algoritmo 3.2 Función distancia FEM.

```

i = 0
while Existan elementos en ElementsToSolve do
  Recuperar el elemento ElementsToSolve(i)
  if El numero de nodos conocidos es 2 then
    Calcular el nodo no conocido resolviendo Ecuación 3.27
    if Se encontraron raíces reales then
      Almacenar la distancia calculada
      Descartar el nodo recién calculado
    repeat
      Recuperar el elemento de ElementsPerNodes
      Incrementar KnownNodes para este elemento
      if Si el elemento suma 2 nodos conocidos then
        Insertar el elemento en ElementsToSolve
      end if
    until Elemento vecino del nodo calculado
  end if
end if
end while

```

3.6.3 Uso de la distancia FEM

En la Figura 3.10, se muestra una esfera encarando un punto de detonación, en la Figura 3.10a, se muestra el ángulo de incidencia,

$\cos(\theta) \in [-1, 1]$, con respecto al punto de detonación, TNT, este campo escalar nos indica el área del objeto que esta encarando al punto de detonación, ($\cos(\theta) > 0$), y que área esta oculta, ($\cos(\theta) < 0$). En la Figura 3.10, se muestran las dos distancias, *Euclidiana* (R_j), y distancia *FEM* (R_i), hacia el punto mas alejado de la detonación.

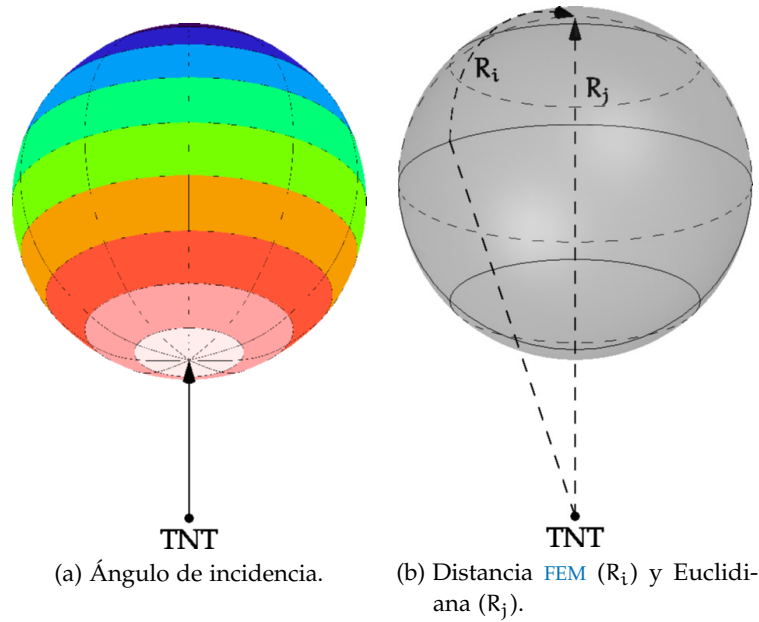


Figura 3.10: Definición de la interfaz.

Así, podemos definir la interfaz (nodos conocidos), necesaria para utilizar el método descrito anteriormente. La distancia, $\forall x_i$, sobre la superficie del objeto se puede definir de la siguiente forma:

$$d(\text{TNT}, x_i) = \begin{cases} \text{Euclidiana} & \text{si } \cos(\theta) > 0 \\ \text{FEM} & \text{si } \cos(\theta) \leq 0 \end{cases}$$

dada una malla de elementos triangulares en 3D, la cual representa la frontera, Γ , sujeta a la presión producida por la detonación.

El uso de la función distancia basada en *FEM*, se justifica para aquellos puntos que no están encarando la detonación, ($\cos(\theta) < 0$), como se observa en la Figura 3.10b, donde la distancia del punto de detonación, TNT, al punto mas lejano sobre el objeto, $\cos(\theta) = -1$, no puede ser medida utilizando la distancia Euclidiana.

4.1 MÉTODO DE ELEMENTOS FINITOS

La simulación del comportamiento de materiales no frágiles (e. g., metales) se realizó con el método FEM. La formulación de elasticidad lineal, no es suficiente en la simulación de detonaciones debido a que las estructuras son expuestas a una gran fuerza y estas presentan grandes deformaciones.

El método Finite Calculus (FIC), se utiliza en la integración temporal cuando se tiene combinado DEM con FEM, esta combinación estabiliza la integración temporal y reduce el tiempo de cálculo, aumentando el tiempo crítico.

4.1.1 Formulación dinámica transitoria no lineal

Las ecuaciones transitorias de equilibrio utilizando el método FIC se pueden escribir de la siguiente forma Oñate et al. [12]:

$$r_i - \frac{h_k}{2} \frac{\partial r_i}{\partial x_k} = 0 \text{ in } \Omega, k \in 1, \dots, n_d, \quad (4.1)$$

donde n_d , es la dimensión del problema y

$$r_i = -\rho \frac{\partial^2 u_i}{\partial t^2} + \frac{\partial^2 \sigma_{ij}}{\partial x_j^2} + b_i, \quad (4.2)$$

donde ρ , es la densidad; t , es el tiempo; σ_{ij} , es el tensor de estrés; b_i , son las fuerzas sobre el sólido y h_k son las longitudes de las distancias características de un dominio arbitrario donde se considera el equilibrio de fuerzas.

Las ecuaciones Ecuación 4.1 y Ecuación 4.2, son completadas con las condiciones de frontera para los desplazamientos, u_i , y de equilibrio de las tracciones sobre la superficie:

$$u_i - \bar{u}_i = 0 \text{ on } \Gamma_u \quad (4.3)$$

$$\sigma_{ij} n_j - \bar{t}_i - \frac{1}{2} h_k n_k r_i = 0 \text{ on } \Gamma_t, \quad (4.4)$$

donde \bar{u}_i y \bar{t}_i , son desplazamientos y tracciones prescritas sobre las fronteras Γ_u y Γ_t , n_i , son los componentes del vector normal y h_k , son las longitudes características.

Empleando una división estándar del tensor de estrés en partes *desviadora* y *volumétrica*, s_{ij} y p :

$$\sigma_{ij} = s_{ij} + p\delta_{ij}. \quad (4.5)$$

Las ecuaciones **FIC**, mezclando desplazamiento y presión pueden ser escritas de la siguiente forma:

$$-\rho \frac{\Delta v_i}{\Delta t} + \frac{\partial s_{ij}}{\partial x_j} + \frac{\partial p}{\partial x_i} + b_i - \frac{h_k}{2} \frac{\partial r_i}{\partial x_i} = 0, \quad (4.6)$$

$$\frac{\Delta u_i}{\Delta t} - v_i^{n+1/2} = 0, \quad (4.7)$$

$$\frac{\Delta p}{K} - \frac{\partial(\Delta u_i)}{\partial x_i} - \sum_{i=1}^{n_d} \tau_i \frac{\partial r_i}{\partial x_i} = 0, \quad (4.8)$$

donde K , es el módulo de volumen y τ_i , son los parámetros intrínsecos del tiempo, dados por:

$$\tau_i = \frac{3h_i^2}{8G}, \quad (4.9)$$

donde G , es el módulo de corte.

El residuo, r_i , es dividido como:

$$r_i = \pi_i + \frac{\partial p}{\partial x_i}, \quad (4.10)$$

donde:

$$\pi_i = -\rho \frac{\partial v_i}{\partial t} + \frac{\partial s_{ij}}{\partial x_j} + b_i. \quad (4.11)$$

Note que, π_i , es la parte de, r_i , que no contiene el gradiente de presión y puede ser considerado como la proyección negativa del gradiente de presión. En un escenario discreto, π_i , puede ser considerado que pertenece a un espacio ortogonal al de los términos del gradiente de presión.

Finalmente, la forma residual ponderada de las ecuaciones es escrita de la siguiente forma:

$$\int_{\Omega} \delta u_i \rho \frac{\Delta v_i}{\Delta t} d\Omega + \int_{\Omega} \delta \epsilon_{ij} \sigma_{ij} d\Omega - \int_{\Omega} \delta u_i b_i d\Omega - \int_{\Gamma} \delta u_i \bar{t}_i d\Gamma_t = 0, \quad (4.12)$$

$$\int_{\Omega} \delta v_i \left[\frac{\Delta u_i}{\Delta t} - v_i \right] d\Omega = 0, \quad (4.13)$$

$$\int_{\Omega} q \left(\frac{\Delta p}{K} - \frac{\partial(\Delta u_i)}{\partial x_i} \right) d\Omega + \int_{\Omega} \left[\sum_{i=1}^{n_d} \frac{\partial q}{\partial x_i} \tau_i \left(\frac{\partial p}{\partial x_i} + \pi_i \right) \right] d\Omega = 0, \quad (4.14)$$

$$\int_{\Omega} \left[\sum_{i=1}^{n_d} \omega_i \tau_i \left(\frac{\partial p}{\partial x_i} + \pi_i \right) \right] d\Omega = 0. \quad (4.15)$$

La estabilización de la ecuación de momento es necesaria en problemas de convección dominante, esto no es relevante para problemas de mecánica de sólidos es por eso que los términos relacionados con las derivadas espaciales si las longitudes características han sido omitidas en la ecuación [Ecuación 4.12](#). Lo contrario ocurre para el término de estabilización dado en la última integral el cual es esencial en la [Ecuación 4.14](#).

4.1.2 Discretización sobre elementos finitos

En esta formulación se utilizó interpolación lineal continua para los desplazamientos, presión, y proyección de gradiente de la presión, π_i , sobre todos los nodos del elemento. Las interpolaciones lineales se escriben de la siguiente forma:

$$u_i = \sum_{j=1}^n N_j \bar{u}_i^j, \quad (4.16)$$

$$p_i = \sum_{j=1}^n N_j \bar{p}_i^j, \quad (4.17)$$

$$\pi_i = \sum_{j=1}^n N_j \bar{\pi}_i^j, \quad (4.18)$$

donde $n = 3$, para 2D y $n = 4$, para 3D y $\{\bar{u}_i, \bar{p}_i, \bar{\pi}_i\}$ son los valores en los nodos.

Sustituyendo las aproximaciones en las Ecuaciones [4.12-4.15](#), resulta el siguiente sistema discreto de ecuaciones:

$$\mathbf{M} \frac{\Delta \bar{\mathbf{v}}}{\Delta t} - \mathbf{R}_v + \mathbf{f}_d = 0, \quad (4.19)$$

$$\frac{\Delta \bar{\mathbf{u}}}{\Delta t} - \bar{\mathbf{v}} = 0, \quad (4.20)$$

$$\mathbf{C}^T \Delta \bar{\mathbf{u}} - \mathbf{M}_p \Delta \bar{\mathbf{p}} - \mathbf{L} \bar{\mathbf{p}} - \mathbf{Q} \bar{\boldsymbol{\pi}} = 0, \quad (4.21)$$

$$\mathbf{Q}^T \bar{\mathbf{p}} + \bar{\mathbf{G}} \bar{\boldsymbol{\pi}} = 0. \quad (4.22)$$

En donde las contribuciones de los elementos están dadas por:

$$\begin{aligned} \mathbf{L} &= \int_{\Omega} (\nabla \mathbf{N})^T \boldsymbol{\tau} \nabla \mathbf{N} d\Omega, & \bar{\mathbf{G}} &= \int_{\Omega} \mathbf{N}^T \boldsymbol{\tau} \mathbf{N} d\Omega, \\ \mathbf{f}_d &= \int_{\Omega} \mathbf{B}^T \boldsymbol{\sigma} d\Omega, & \mathbf{Q} &= \int_{\Omega} (\nabla \mathbf{N})^T \boldsymbol{\tau} \mathbf{N} d\Omega, \end{aligned} \quad (4.23)$$

donde \mathbf{B} , es el operador lineal de tensión-deformación, y

$$\boldsymbol{\tau} = \begin{bmatrix} \tau_1 & 0 & 0 \\ 0 & \tau_2 & 0 \\ 0 & 0 & \tau_3 \end{bmatrix}. \quad (4.24)$$

Las matrices $\{\mathbf{M}, \mathbf{M}_p, \mathbf{C}, \mathbf{R}_v\}$, están definidas de la siguiente forma:

$$\begin{aligned} \mathbf{M} &= \int_{\Omega} \rho \mathbf{N}_v^T \mathbf{N}_v d\Omega, & \mathbf{M}_p &= \int_{\Omega} \frac{1}{K} \mathbf{N}_p^T \mathbf{N}_p d\Omega, \\ \mathbf{R}_v &= \int_{\Gamma} \mathbf{N}_p^T \hat{\mathbf{t}} d\Gamma + \int_{\Omega} \mathbf{N}_p^T \mathbf{b} d\Omega, & \mathbf{C} &= \int_{\Omega} \mathbf{N}_v^T \nabla \mathbf{N}_p d\Omega. \end{aligned} \quad (4.25)$$

En el caso de solución explícita, las dos matrices \mathbf{M} y \mathbf{M}_p , son usualmente diagonalizadas. En el procedimiento de discretización la misma interpolación ha sido asumida para todas las variables: $\mathbf{N}_v = \mathbf{N}_p = \mathbf{N}_{\pi} = \mathbf{N}$.

Considerando que $\Delta p = p^{n+1} - p^n$ y $\Delta \mathbf{u} = \mathbf{u}^{n+1} - \mathbf{u}^n$, son los incrementos de la presión y desplazamientos, respectivamente, y se acepta $\Delta r_i = r_i^{n+1} \equiv r_i$, como las ecuaciones de equilibrio infinitesimal se asume que se satisfacen al tiempo t_n (y por lo tanto $r_i^n = 0$).

Se puede entonces definir un algoritmo semi-implícito de integración el cual consta de cuatro pasos:

Paso 1 Calcular las velocidades de los nodos $\bar{\mathbf{v}}^{n+1/2}$

$$\bar{\mathbf{v}}^{n+1/2} = \bar{\mathbf{v}}^{n-1/2} + \Delta t \mathbf{M}^{-1} (\mathbf{R}_v^n - \mathbf{f}_d^n). \quad (4.26)$$

Paso 2 Calcular los desplazamientos de los nodos $\bar{\mathbf{u}}^{n+1}$

$$\bar{\mathbf{u}}^{n+1} = \bar{\mathbf{u}}^{n-1} + \Delta t \bar{\mathbf{v}}^{n+1/2}. \quad (4.27)$$

Paso 3 Calcular la presión de los nodos $\bar{\mathbf{p}}^{n+1}$

$$\bar{\mathbf{u}}^{n+1} = [\mathbf{M}_p - \mathbf{L}]^{-1} [\Delta t \mathbf{C}^T \bar{\mathbf{v}}^{n+1/2} + \mathbf{M}_p \bar{\mathbf{p}}^n - \mathbf{Q} \bar{\boldsymbol{\pi}}^n]. \quad (4.28)$$

Paso 4 Calcular la presión proyectada sobre el gradiente de los nodos $\bar{\boldsymbol{\pi}}^{n+1}$

$$\bar{\boldsymbol{\pi}}^{n+1} = -\bar{\mathbf{G}}^{-1} \mathbf{Q}^T \bar{\mathbf{p}}^{n+1}. \quad (4.29)$$

Las matrices $\{\mathbf{M}, \mathbf{M}_p, \mathbf{L}, \mathbf{C}, \mathbf{Q}, \mathbf{G}\}$, son evaluadas en el tiempo t_{n+1} .

Se puede notar que los pasos (1), (2), y (4) son completamente explícitas. Para obtener un algoritmo completamente explícito se debe de calcular, $\bar{\mathbf{p}}^{n+1}$, en el paso (3) de la [Ecuación 4.28](#) como:

$$\bar{\mathbf{p}}^{n+1} = \mathbf{M}_p^{-1} [\Delta t \mathbf{C}^T \bar{\mathbf{v}}^{n+1/2} + (\mathbf{M}_p - \mathbf{L}) \bar{\mathbf{p}}^n - \mathbf{Q} \bar{\boldsymbol{\pi}}^n]. \quad (4.30)$$

La solución explícita es eficiente si se utiliza la forma diagonal de las matrices $\{\mathbf{M}, \mathbf{M}_p, \bar{\mathbf{G}}\}$. La solución explícita es posible si se asume compresibilidad (i. e., $K \neq 0$). Si $K \rightarrow \infty$, la presión debe de ser obtenida utilizando un esquema implícito dado por la [Ecuación 4.28](#).

4.2 MÉTODO DE ELEMENTOS DISCRETOS

Para la simulación del comportamiento de materiales frágiles (e. g., roca, concreto, arena.) el método utilizado fue el [DEM](#).

En el método [DEM](#), el material se modela como un conjunto de partículas rígidas las cuales interactúan unas contra otras. Las leyes de contacto para la cohesión y para la fricción determinan el comportamiento de todo el sistema. Estas leyes pueden ser vistas como la formulación del material a escala microscópica. Lo que permite la simulación de fracturas en el material es la rotura de los enlaces cohesivos que existen entre las partículas [Eugenio Oñate y Jerzy Rojek \[7\]](#).

La formulación básica del método de elementos discretos utiliza elementos esféricos o cilíndricos.

4.2.1 Ecuaciones de movimiento

Cada elemento discreto es tratado como un cuerpo rígido, el cual es gobernado por el conjunto de ecuaciones [Ecuación 4.31](#) y [Ecuación 4.32](#) mejor conocida como ecuaciones de Newton-Euler. Para la i -ésima partícula se tiene:

$$m_i \ddot{\mathbf{u}}_i = \mathbf{F}_i, \quad (4.31)$$

$$I_i \dot{\boldsymbol{\omega}}_i = \mathbf{T}_i, \quad (4.32)$$

donde:

- \mathbf{u}_i Desplazamiento.
- $\boldsymbol{\omega}_i$ Velocidad angular.
- m_i Masa
- I_i Momento de inercia
- \mathbf{F}_i Fuerza resultante
- \mathbf{T}_i Momento resultante

4.2.2 Integración numérica

[Ecuación 4.31](#) y [Ecuación 4.32](#) son integradas con respecto al tiempo utilizando un esquema de diferencias centradas. La integración de la

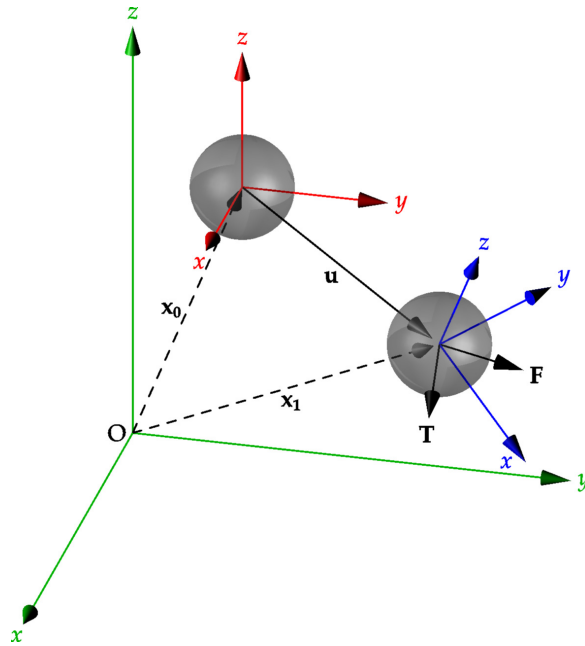


Figura 4.1: Movimiento de una partícula rígida.

ecuación de translación para el tiempo n -ésimo es expresada de la siguiente forma:

$$\ddot{\mathbf{u}}_i^n = \frac{\mathbf{F}_i}{m_i}, \quad (4.33)$$

$$\dot{\mathbf{u}}_i^{n+1/2} = \dot{\mathbf{u}}_i^{n-1/2} + \ddot{\mathbf{u}}_i^n \Delta t, \quad (4.34)$$

$$\mathbf{u}_i^{n+1} = \mathbf{u}_i^n + \dot{\mathbf{u}}_i^{n+1/2} \Delta t. \quad (4.35)$$

De manera análoga a la integración de la [Ecuación 4.31](#), la operación para la ecuación rotacional se expresa como:

$$\dot{\boldsymbol{\omega}}_i^n = \frac{\mathbf{T}_i}{I_i}, \quad (4.36)$$

$$\boldsymbol{\omega}_i^{n+1/2} = \boldsymbol{\omega}_i^{n-1/2} + \dot{\boldsymbol{\omega}}_i^n \Delta t. \quad (4.37)$$

De esta forma el vector necesario para incrementar la rotación de la partícula, $\Delta\theta = [\Delta\theta_x, \Delta\theta_y, \Delta\theta_z]^T$, es calculado de la siguiente forma:

$$\Delta\theta_i = \boldsymbol{\omega}_i^{n+1/2} \Delta t. \quad (4.38)$$

4.2.3 Fuerzas de contacto

Cada vez que se detecta un contacto entre dos partículas, las fuerzas que ocurren en el punto de contacto se calculan. Por la tercera ley de Newton las fuerzas de estos cuerpos \mathbf{F}_i y \mathbf{F}_j , satisfacen:

$$\mathbf{F}_i = -\mathbf{F}_j. \quad (4.39)$$

La fuerza de contacto, $\mathbf{F} = \mathbf{F}_i$, es descompuesta en parte tangencial y parte normal con respecto al plano en el punto de contacto (ver [Figura 4.2](#)).

$$\begin{aligned} \mathbf{F} &= \mathbf{F}_1, \\ \mathbf{F} &= \mathbf{F}_n + \mathbf{F}_T, \\ \mathbf{F} &= F_n \mathbf{n} + \mathbf{F}_T. \end{aligned}$$

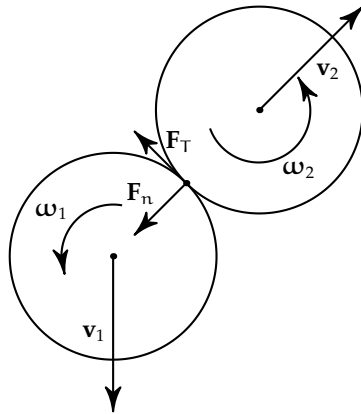


Figura 4.2: Descomposición de la fuerza de contacto en componentes normal y tangencial.

Las fuerzas de contacto \mathbf{F}_n y \mathbf{F}_T , son obtenidas utilizando un modelo constitutivo formulado para el contacto entre dos esferas rígidas (o círculos en 2D) [Figura 4.2](#).

En la [Figura 4.3](#) se ilustra la interfaz de contacto en esta formulación la cual es caracterizada por los siguientes parámetros:

- k_n Rigidez normal
- k_T Rigidez tangencial
- μ Coeficiente de Coulomb
- c_n Coeficiente de amortiguado

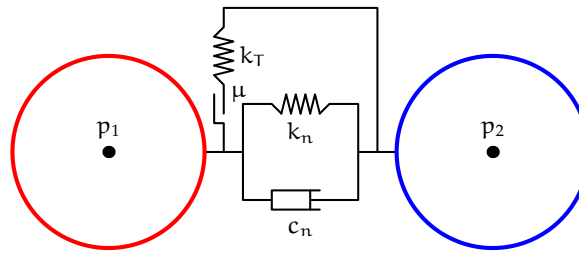


Figura 4.3: Modelo reológico del contacto..

4.2.3.1 Fuerza normal

La fuerza normal, F_n , es descompuesta en parte elástica, F_{ne} , y fuerza de amortiguado, F_{nd} , de la siguientes forma:

$$F_n = F_{ne} + F_{nd}. \quad (4.40)$$

La fuerza elástica, F_{ne} , está definida en proporción a la penetración entre las partículas, u_{rn} , ver [Figura 4.4](#). La constante de proporcionalidad es la rigidez normal, k_n .

$$F_{ne} = k_n u_{rn}. \quad (4.41)$$

La penetración es calculada como:

$$u_{rn} = d - r_1 - r_2. \quad (4.42)$$

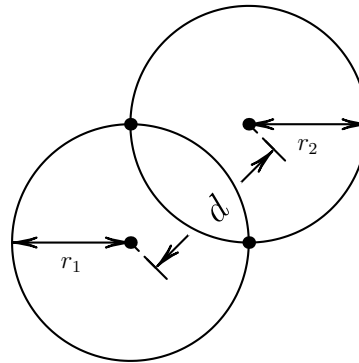


Figura 4.4: Penetración entre dos partículas.

La fuerza de amortiguamiento, F_{nd} , es proporcional a la velocidad normal relativa, v_{rn} , donde la constante de proporcionalidad es el coeficiente de amortiguamiento, c_n .

$$F_{nd} = c_n v_{rn}. \quad (4.43)$$

La velocidad normal relativa está definida como:

$$\mathbf{v}_{rn} = (\dot{\mathbf{u}}_2 - \dot{\mathbf{u}}_1) \cdot \mathbf{n}. \quad (4.44)$$

El coeficiente de amortiguado, c_n , puede ser tomado como una proporción del amortiguado crítico, C_{cr} , del sistema formado por los dos cuerpos rígidos con masas m_1 y m_2 , conectados con un resorte de rigidez, k_n :

$$c_{cr} = 2\sqrt{\frac{m_1 m_2 k_n}{m_1 + m_2}}. \quad (4.45)$$

4.2.3.2 Fuerza tangencial

En la ausencia de cohesión la fuerza tangencial, \mathbf{F}_T , aparece debido a la fricción resultado de la oposición al movimiento relativo en el punto de contacto. La velocidad tangencial relativa al punto de contacto se define como:

$$\mathbf{v}_{rT} = \mathbf{v}_r - (\mathbf{v}_r \cdot \mathbf{n})\mathbf{n}, \quad (4.46)$$

donde:

$$\mathbf{v}_r = (\dot{\mathbf{u}}_2 + \boldsymbol{\omega}_2 \times \mathbf{r}_{c2}) - (\dot{\mathbf{u}}_1 + \boldsymbol{\omega}_1 \times \mathbf{r}_{c1}), \quad (4.47)$$

donde $\dot{\mathbf{u}}_1$, $\dot{\mathbf{u}}_2$ y $\boldsymbol{\omega}_1$, $\boldsymbol{\omega}_2$ son las velocidades de translación y rotación de las partículas y \mathbf{r}_{c1} y \mathbf{r}_{c2} son vectores que conectan los centros de las partículas con los puntos de contacto.

El modelo clásico de Coulomb puede producir oscilaciones de la fuerza de fricción debido a posibles cambios en la dirección en la velocidad de deslizamiento

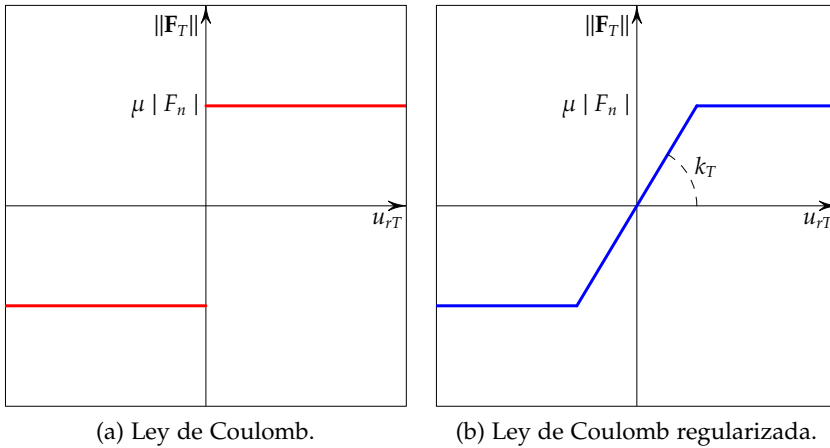


Figura 4.5: Fuerza de fricción contra desplazamiento tangencial relativo.

Para prevenir oscilaciones el modelo de Coulomb debe ser regularizado. El procedimiento de regularización descompone la velocidad

tangencial relativa en partes reversible e irreversible, \mathbf{v}_{rT}^r y \mathbf{v}_r^{ir} , respectivamente:

$$\mathbf{v}_{rT} = \mathbf{v}_{rT}^r + \mathbf{v}_r^{ir}. \quad (4.48)$$

Esto es equivalente a formular la fricción en el contacto como un problema análogo al de elasto-plasticidad, el cual se puede ver en la relación de la fuerza-tangencial y fricción contra desplazamiento de la Figura 4.5b. Esta analogía nos permite calcular la fuerza de fricción utilizando el algoritmo estándar de retorno radial. El primer paso es calcular un estado de prueba de la siguiente forma:

$$\mathbf{F}_T^{\text{trial}} = \mathbf{F}_T^{\text{old}} - k_T \mathbf{v}_{rT} \Delta t, \quad (4.49)$$

después la condición de deslizamiento se comprueba:

$$\phi^{\text{trial}} = \|\mathbf{F}_T^{\text{trial}}\| - \mu |F_n|, \quad (4.50)$$

con la siguiente condición:

$$\mathbf{F}_T^{\text{new}} = \begin{cases} \mathbf{F}_T^{\text{trial}} & \text{si } \phi^{\text{trial}} \leq 0 \\ \mu |F_n| \frac{\mathbf{F}_T^{\text{trial}}}{\|\mathbf{F}_T^{\text{trial}}\|} & \text{si } \phi^{\text{trial}} > 0 \end{cases}. \quad (4.51)$$

4.2.3.3 Amortiguado

En esta formulación DEM se consideran dos tipos de amortiguado viscoso y no viscoso. En ambos casos los términos de amortiguado $\mathbf{F}_i^{\text{damp}}$ y $\mathbf{T}_i^{\text{damp}}$, son agregados a las ecuaciones de movimiento Ecuación 4.31 y Ecuación 4.32:

$$m_i \ddot{\mathbf{u}}_i = \mathbf{F}_i + \mathbf{F}_i^{\text{damp}}, \quad (4.52)$$

$$I_i \dot{\boldsymbol{\omega}}_i = \mathbf{T}_i + \mathbf{T}_i^{\text{damp}}. \quad (4.53)$$

Amortiguado viscoso:

$$\mathbf{F}_i^{\text{damp}} = -\alpha^{vt} m_i \dot{\mathbf{u}}_i, \quad (4.54)$$

$$\mathbf{T}_i^{\text{damp}} = -\alpha^{vr} I_i \dot{\boldsymbol{\omega}}_i. \quad (4.55)$$

Amortiguado no viscoso:

$$\mathbf{F}_i^{\text{damp}} = -\alpha^{nvt} \|\mathbf{F}_i\| \frac{\dot{\mathbf{u}}_i}{\|\dot{\mathbf{u}}_i\|}, \quad (4.56)$$

$$\mathbf{T}_i^{\text{damp}} = -\alpha^{\text{nv}t} \|\mathbf{T}_i\| \frac{\boldsymbol{\omega}_i}{\|\boldsymbol{\omega}_i\|}, \quad (4.57)$$

donde α^{vt} , α^{vr} , $\alpha^{\text{nv}t}$, y $\alpha^{\text{nv}r}$ son constantes de amortiguado y \mathbf{F}_i , \mathbf{T}_i se definen como:

$$\mathbf{F}_i = \sum_{c=1}^{n_c} \mathbf{F}_{ic} + \mathbf{F}_i^{\text{ext}} + \mathbf{F}^{\text{blast}}, \quad (4.58)$$

$$\mathbf{T}_i = \sum_{c=1}^{n_c} (\mathbf{I}_i^c \times \mathbf{F}_i^c + \mathbf{q}_i^c) + \mathbf{T}_i^{\text{ext}}. \quad (4.59)$$

Se puede observar que la fuerza de amortiguado son opuestas a la velocidad. El amortiguado viscoso es proporcional a la magnitud de la velocidad, mientras que el amortiguado no viscoso es proporcional a la magnitud de la fuerza resultante y momento resultante.

Un estado casi estático de equilibrio de todo el sistema de partículas puede ser alcanzado aplicándole un amortiguado apropiado. El amortiguado aplicado a este tipo de problema debe ser lo suficientemente alto para poder obtener una respuesta que no muestra oscilaciones. Por otra parte el amortiguado no debe de ser tan alto, se ha mostrado que un valor razonable para el amortiguado es tomar un valor cercano al amortiguado crítico de la frecuencia natural más baja que toma el sistema discreto la cual puede ser estimada por análisis del sistema no amortiguado y tomando el periodo de la respuesta estructural.

4.2.4 Modelo frágil perfectamente elástico

Este modelo de contacto está caracterizado por un comportamiento elástico y lineal cuando los enlaces de cohesión están activos. Cuando la resistencia del enlace es excedido, instantáneamente el enlace existente entre las partículas se rompe. Cuando existe un enlace entre dos partículas la fuerza normal y tangencial se calcula de la siguiente relación lineal constitutiva:

$$\sigma = k_n u_n, \quad (4.60)$$

$$\tau = k_t u_t, \quad (4.61)$$

donde σ y τ , son las fuerzas de contacto normal y tangencial; k_n y k_t , son la rigidez en la dirección normal y tangencial y u_n y u_t , los desplazamientos relativos normal y tangencial.

Los enlaces son rotos cuando se excede la resistencia de la interfase en la dirección de la fuerza de contacto tangencial o en la dirección normal por la fuerza de tensión del contacto. La condición de rotura (para \mathbb{R}^2) esta definida como:

$$|\tau| \leq R_t, \quad (4.62)$$

$$|\tau| \leq R_t, \quad (4.63)$$

donde R_n y R_t , son las resistencias de la interfase en la dirección normal y tangencial.

En la ausencia de cohesión, la fuerza de contacto normal es solo de compresión:

$$\sigma \leq 0, \quad (4.64)$$

donde la fuerza (positiva) de contacto tangencial está dada por:

$$\tau = \mu |\sigma|, \quad (4.65)$$

si $\sigma < 0$ o cero en otro caso. La fuerza de fricción está dada por la [Ecuación 4.65](#) la cual expresa la ley de fricción de Coulomb, donde μ , es el coeficiente de fricción de Coulomb.

Las leyes de contacto para la dirección normal y tangencial en el modelo perfectamente elástico frágil se muestran en la [Figura 4.6](#) y [Figura 4.7](#). La rotura para este modelo está definida por las condiciones [4.62](#) y [4.63](#), se muestra en la [Figura 4.8](#).

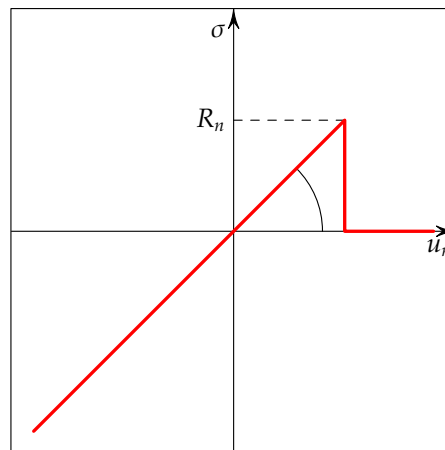


Figura 4.6: Fuerza de contacto normal en el modelo perfectamente elástico frágil.

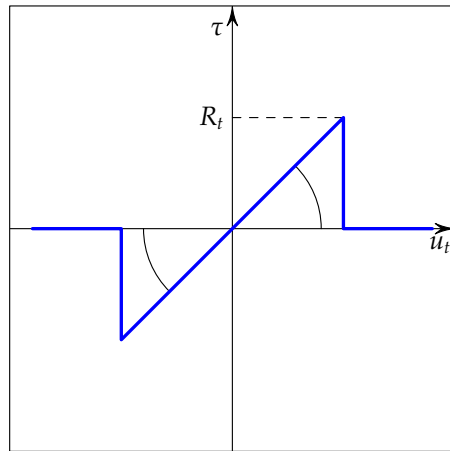


Figura 4.7: Fuerza de contacto tangencial en el modelo perfectamente elástico frágil.

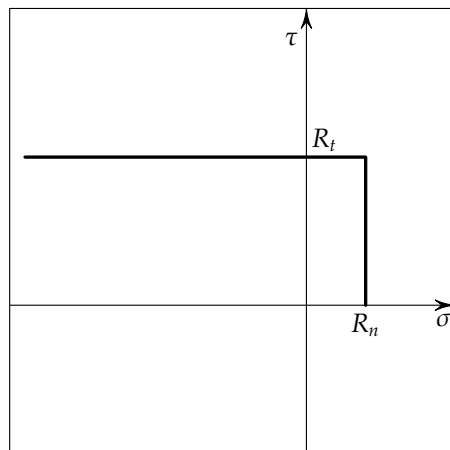


Figura 4.8: Rotura para el modelo perfectamente elástico frágil.

Parte III

RESULTADOS

SIMULACIONES NUMÉRICAS

El método desarrollado interactuó con el software, *DEMPack*¹, desarrollado en el *Centro Internacional de Métodos Numéricos en Ingeniería*. *DEMPack* es una herramienta numérica para resolver una gran variedad de problemas de interacción de materiales tipo roca y estructuras.

Esta herramienta implementa los métodos FEM y DEM para la simulación de mecánica de materiales.

Se realizaron diferentes simulaciones para verificar el comportamiento del método. Las mallas FEM y los sistemas de partículas DEM utilizadas en las simulaciones fueron elaboradas con base en estructuras reales.

5.1 FUSELAJE DE AVIÓN

Desde el inicio de la aviación el tema de las detonaciones ha sido de suma importancia debido a que estas estructuras se exponen en diferente medida a la fuerza de materiales explosivos. A lo largo de la historia se han presentado una gran variedad de accidentes aéreos ya sea en ámbito civil o militar (e.g., Primera y Segunda Guerra Mundial).

Un ejemplo es el accidente ocurrido el 17 de Julio, de 1996 el vuelo *Trans World Airlines Flight 800* (TWA 800), un avión Boeing 747 – 131 explotó y se impactó en el Océano Atlántico tras 12 minutos de haber despegado del aeropuerto de la ciudad de Nueva York con destino a Roma, en el incidente murieron 230 personas.

Tras una larga investigación por parte de la National Transportation Safety Board (NTSB), se concluyó que la probable causa del accidente fue una explosión de vapor de aire y combustible en un tanque, aunque no se comprobó con certeza, la mas probable causa de la explosión fue un corto circuito. Como resultado de la investigación, nuevos requerimientos para aviones fueron desarrollados para prevenir futuras explosiones en tanques de combustible [10].

5.1.1 Características del problema

Este tipo de accidentes permiten poder realizar una comparación inicial del modelo desarrollado.

¹ Web oficial
<http://www.cimne.com/dem/>



Figura 5.1: Restos recuperados del vuelo TWA 800 [10].

Para el desarrollo de esta simulación, se tomó un corte longitudinal de un fuselaje de avión, las características del problema:

MATERIAL: acero.

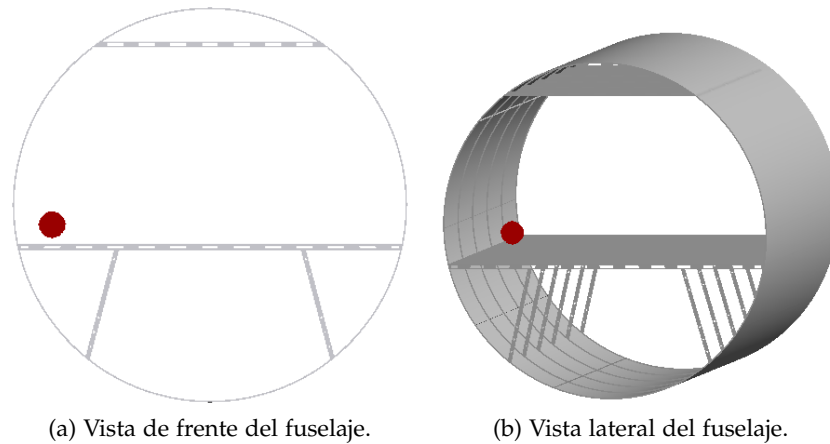
DIMENSIONES: radio = 2.5 m y longitud 3.5 m.

TIPO DE ELEMENTO: triángulos en 3D.

CANTIDAD DE CARGA: 5 kg de TNT.

DISTANCIA A LA CARGA: 0.5 m.

En la [Figura 5.2](#) se muestran dos vistas del corte del fuselaje, la esfera roja representa la posición de la carga TNT.



(a) Vista de frente del fuselaje.

(b) Vista lateral del fuselaje.

Figura 5.2: Fuselaje.

5.1.2 Resultados

En la [Figura 5.3](#), se muestra el desplazamiento de la malla en un rango de tiempo $[0.0001, 0.0017]$ ms. En la [Figura 5.3a](#), la máxima sobre presión es de 8.344×10^5 Pa, esta presión instantáneamente

destruye el material hasta que la unión entre materiales es completamente separada (i. e., generación de una grieta) como se ilustra en la Figura 5.3f.

A pesar de no simular las condiciones de presión a las que este tipo de estructuras son expuestas en vuelo. Se puede realizar una comparativa del daño real que se produce en un detonación (ver Figura 5.1).

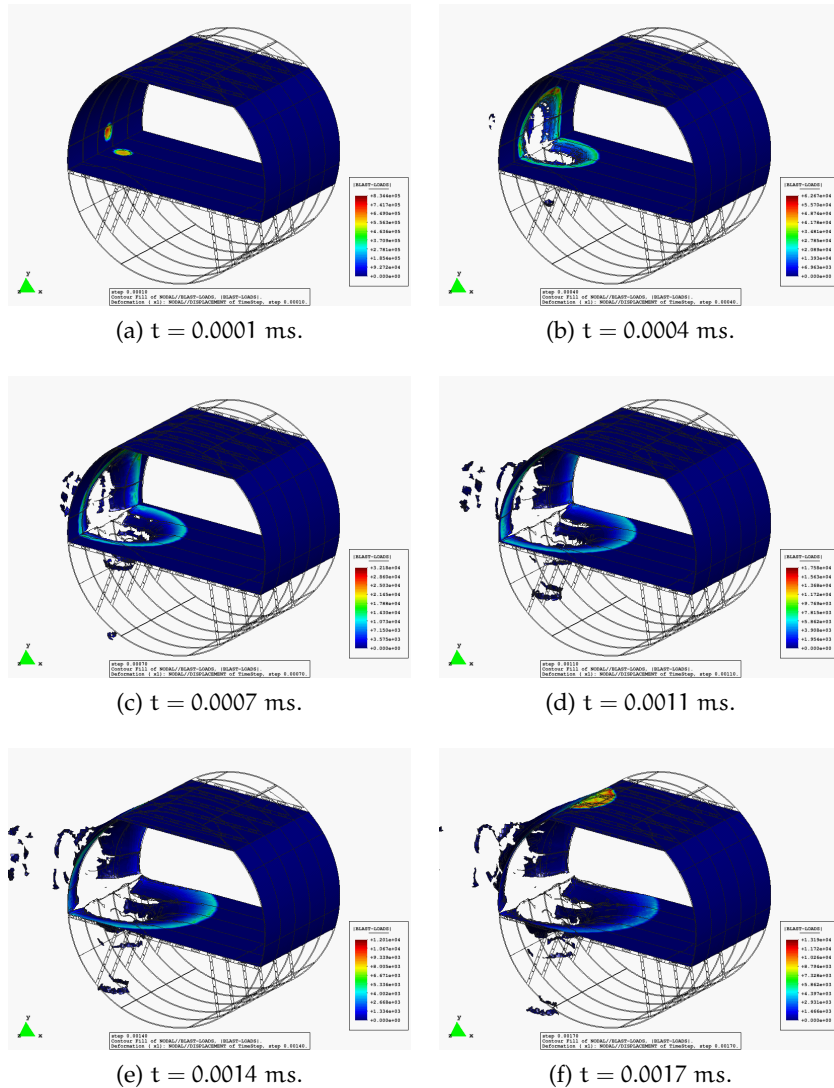


Figura 5.3: Desplazamientos del fuselaje.

5.2 MURO

En los últimos años, numerosos accidentes relacionados con la detonación de materiales explosivos debido a actividades militares y terroristas han ocurrido en todo el mundo. Este tipo de incidentes causan no solo gran daño sobre las estructuras sino que también son la causa de muchas víctimas humanas.

Generalmente, el concreto es conocido por tener propiedades mecánicas las cuales le dan relativamente mucha resistencia a las detonaciones en comparación con otros materiales utilizados en la construcción.

5.2.1 Características del problema

Para esta simulación se hizo uso del método DEM, para la simulación del comportamiento del material tipo concreto, las características del problema son las siguientes:

MATERIAL: concreto.

DIMENSIONES: $2\text{m} \times 1\text{m} \times 0.1\text{m}$.

TIPO DE ELEMENTO: esférico.

CANTIDAD DE CARGA: 10 kg de TNT.

DISTANCIA A LA CARGA: 1 m.

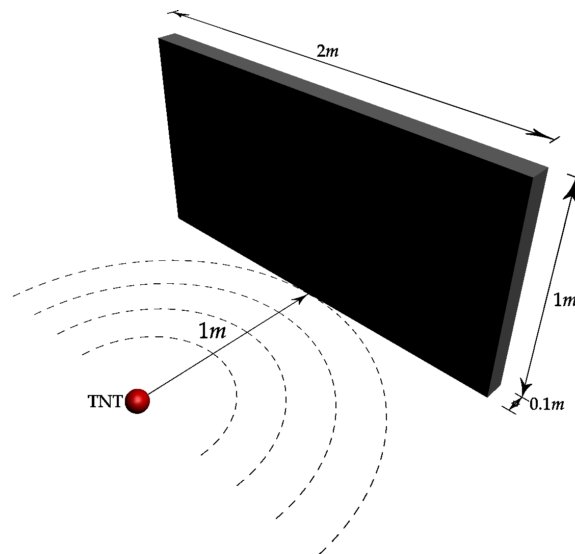


Figura 5.4: Vista del muro.

5.2.2 Resultados

En la [Figura 5.5](#), se ilustra el desplazamiento de sistema de partículas con el cual se modela el material, el tiempo total de simulación es de

0.120 ms. El mayor daño sobre la estructura se presenta en la base, debido a que la onda de choque incide normalmente (i. e., la presión es reflejada, p_r).

Al no contar con un armado metálico interno, la estructura es arrancada casi instantáneamente desde su base, como se ilustra en la Figura 5.5c. Con base en los resultados obtenidos, este tipo de estructuras necesitan un mayor reforzamiento en la base ya que es donde se presenta la mayor sobre presión.

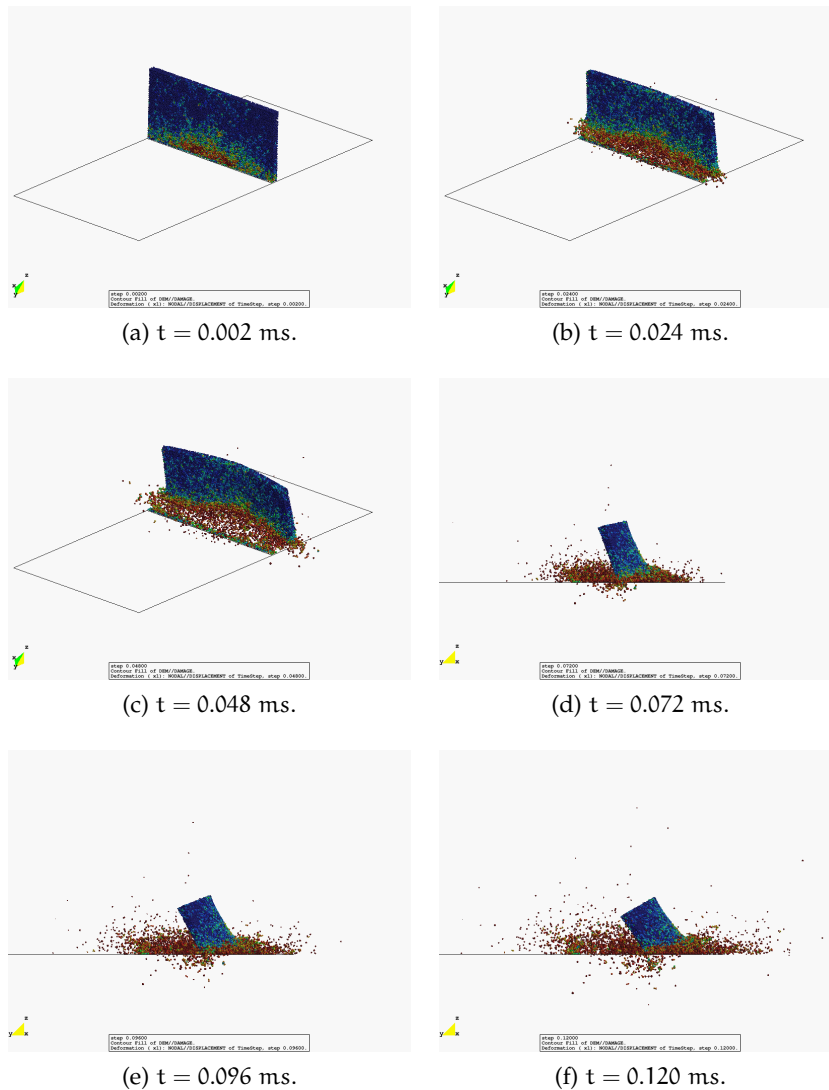


Figura 5.5: Desplazamientos del muro.

5.3 PRESA BASERCA

En la sociedad moderna existen estructuras que cuentan con mucha importancia, una de estas estructuras son las presas hidroeléctricas las cuales generan aproximadamente el 20 % de la electricidad mundial y representan alrededor del 88 % de la electricidad proveniente de fuentes renovables.



Figura 5.6: Presa baserca (España).

5.3.1 Características del problema

En la [Figura 5.6](#), se ilustra la presa *Baserca* ubicada en España, para el desarrollo de esta simulación se utilizó un modelo tridimensional con las mismas dimensiones que la presa original. Las características del problema son las siguientes:

MATERIAL: concreto.

DIMENSIONES: 25.5m × 8.5m × 1.5m.

TIPO DE ELEMENTO: esféricos/hexaedros.

CANTIDAD DE CARGA: 10 kg de TNT.

DISTANCIA A LA CARGA: 1 m.

5.3.2 Resultados

Los desplazamientos de la estructura se ilustran en la [Figura 5.8](#), estos son mínimos en comparación con las dimensiones de la estructura. En la base de la estructura se realizó la interacción FEM-DEM, debido a que es donde se espera que la estructura sufra mayor daño.

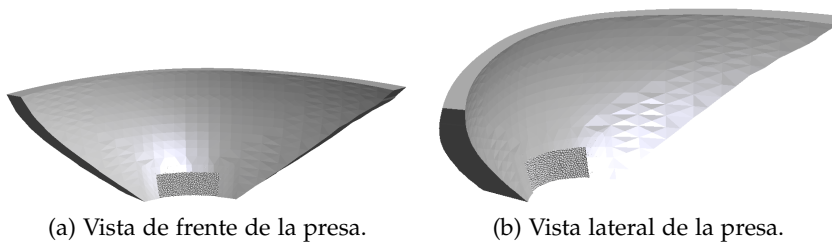


Figura 5.7: Presa.

En esta simulación, no se toma en cuenta la presión hidráulica ejercida sobre la parte trasera de la presa. Con base en la simulación, se puede concluir que esta estructura resistirá la onda de choque.

En condiciones reales, es necesario realizar ambos cálculos de presión: hidráulica y de la onda de choque debido a que una pequeña falla estructural ocasionará una gran inestabilidad en la estructura.

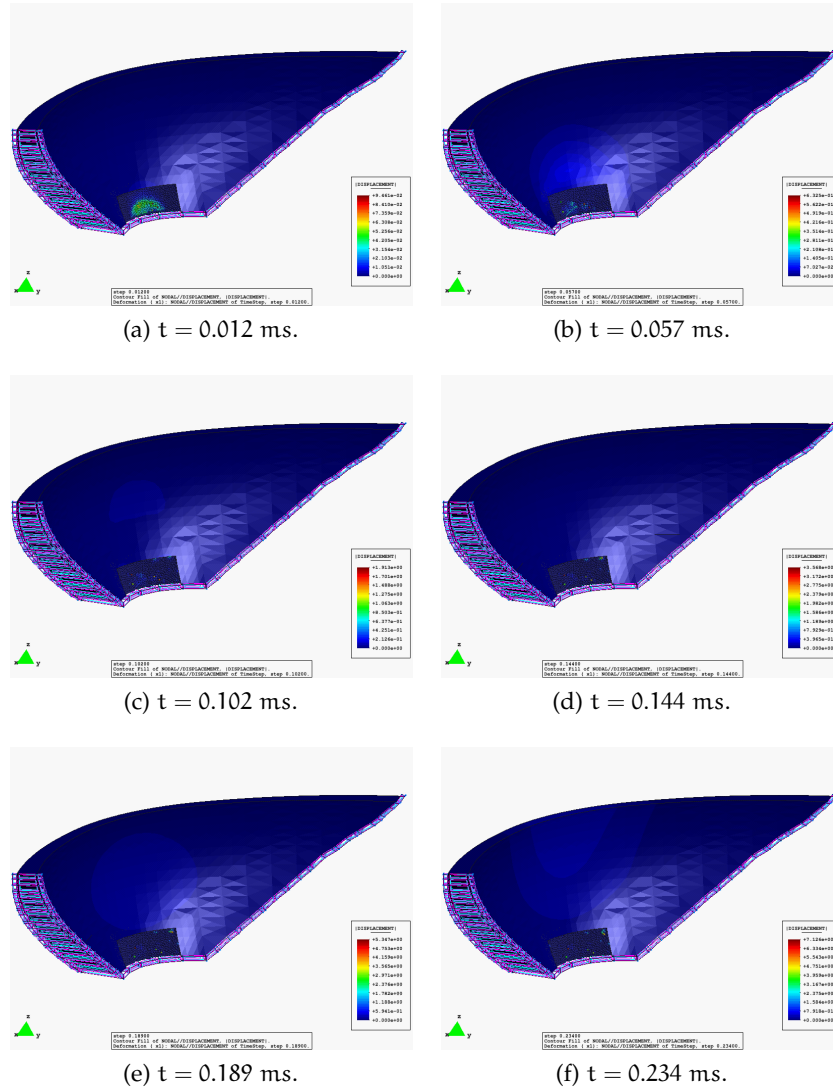


Figura 5.8: Desplazamientos del muro.

5.4 COMPARACIÓN CON FLUIDO

En el desarrollo de herramientas numéricas es de suma importancia que éstas cuenten con una predicción lo más precisa posible. Los métodos empíricos, como el desarrollado en este trabajo son utilizados para la calibración de métodos más sofisticados, debido a la dificultad existente en la experimentación y a que los datos no son de dominio público.

El modelo utilizado en este trabajo sirvió como apoyo en la calibración de un método numérico desarrollado en CIMNE, con el cual se da solución a las ecuaciones de Euler en 3D.

5.4.1 Características del problema

El problema utilizado es el desarrollado por [A. Alia y M. Souli \[1\]](#). Las características del problema son las siguientes:

UBICACIÓN DEL PUNTO DE MEDICIÓN: radio = 1.52 m.

CANTIDAD DE CARGA: 0.53572 kg de TNT.

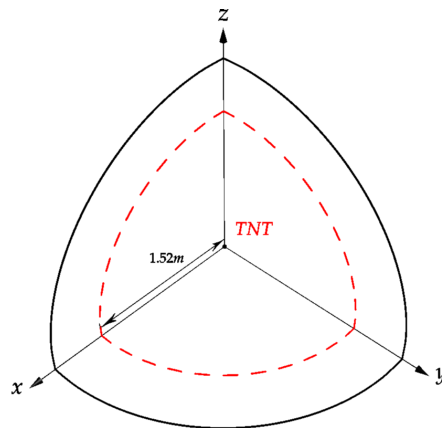


Figura 5.9: Octante con 0.53kg de TNT.

5.4.2 Resultados

En la [Figura 5.10](#), se ilustra el transcurso de la onda de choque. Tanto el tiempo, t_{ad} ; como la presión, p_{ad} , están dados en forma adimensional, para obtener las dimensiones se utilizan las siguientes definiciones:

$$p = C^2 \rho (p_{ad}), \quad (5.1)$$

$$t = \frac{t_{ad}}{C}, \quad (5.2)$$

donde C , es la velocidad del sonido y ρ , es la densidad.

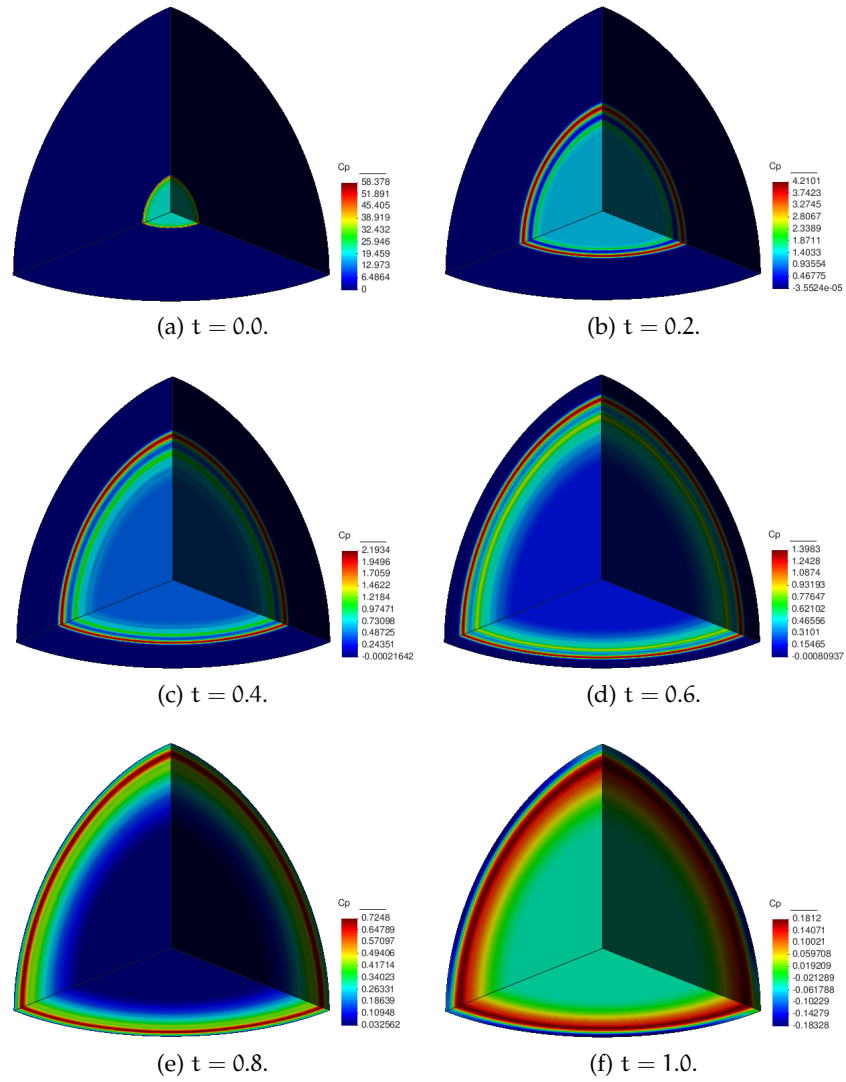


Figura 5.10: Detonación.

En la [Figura 5.11](#), se ilustran las dos distribuciones de presión: empírica y numérica. La diferencia de máxima sobre presión entre los dos modelos es de aproximadamente de 6%, lo cual para fines prácticos es bastante aceptable.

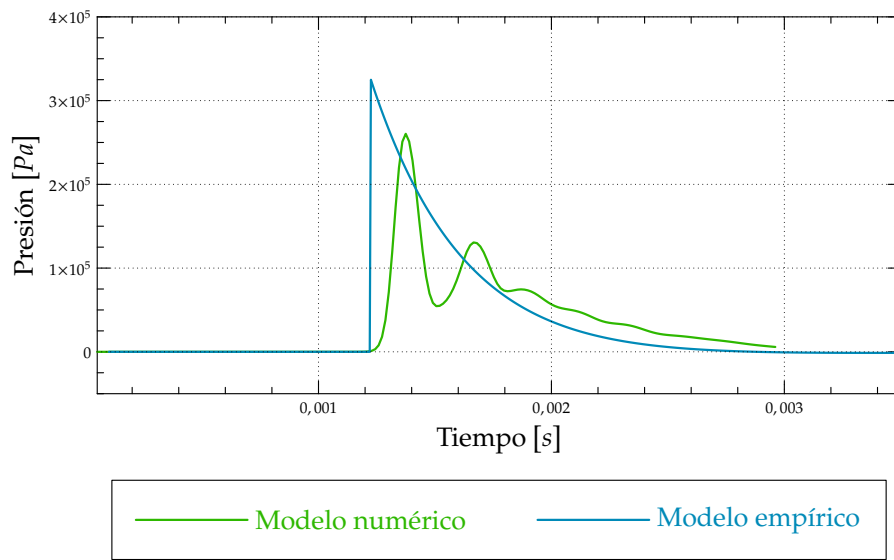


Figura 5.11: Perfiles de presión.

CONCLUSIONES Y TRABAJO FUTURO

6.1 CONCLUSIONES

El análisis dinámico, resultado de la interacción de la onda de choque con estructuras, se ha convertido en un tema de suma importancia en el diseño de éstas en la sociedad moderna, debido al incremento de actividades militares y terroristas en los últimos años. Con la herramienta empírica desarrollada, es posible calcular el campo escalar transitorio de presión, el cual puede ser aplicado en los métodos FEM y DEM.

A continuación se listan las conclusiones y observaciones derivadas de este trabajo:

- i El costo computacional, de calcular el campo de presión utilizando el método desarrollado en este trabajo se reduce considerablemente en comparación con métodos numéricos más avanzados. Esto es de suma importancia principalmente en las simulaciones DEM, donde el tamaño de paso, Δt , es muy pequeño (para asegurar la estabilidad del método) y en consecuencia el tiempo de simulación es muy elevado.
- ii El uso de la distancia FEM, permite simular el avance temporal de la onda de choque sobre la estructura, lo cual le da una mayor precisión a la herramienta y de esta manera poder realizar el análisis sobre estructuras con geometrías más complejas (i. e., cajas, cilindros, etc.).
- iii La combinación de las dos funciones *Friedlander*: presión incidente, $p_{so}(t)$ y presión reflejada, $p_r(t)$, permite aproximar la presión que incide con un ángulo en un rango de $[0^\circ, 90^\circ]$.
- iv En las simulaciones realizadas se mostró que a pesar de estar basada en simplificaciones físicas y al no poder representar fenómenos de difracción, esta herramienta puede ser utilizada como apoyo en el diseño de diferentes tipos de estructuras.
- v La necesidad de mas datos experimentales es una de las limitaciones para poner a prueba diferentes propiedades de la herramienta (e. g., transición de la onda, presión combinada y difracción).
- vi El uso de la distancia escalada, Z , permite manejar de forma compacta los parámetros de la ecuación *Friedlander*, pero el rango de predicción de estos parámetros esta estrictamente acotado por los datos experimentales.

6.2 TRABAJO FUTURO

A continuación se listan los puntos pertenecientes al trabajo futuro:

- i Análisis detallado del daño producto de la onda de choque sobre estructuras, para poder realizar recomendaciones específicas en el diseño de éstas.
- ii Comparación analítica de los resultados con datos experimentales.
- iii Utilizar técnicas de computación de alto rendimiento en las solución de los métodos [FEM](#) y [DEM](#).
- iv Realizar interacción fluido (ecuaciones de Euler con [FEM](#)) y estructura (mecánica de sólidos con [FEM](#) y [DEM](#)).

Parte IV

APÉNDICE

A.1 CREAR LA GEOMETRÍA DEL PROBLEMA

La herramienta desarrollada se agregó al software pre y post procesador *GiD*, como un tipo de problema **BLASTLOAD**. El primer paso fue crear la geometría de nuestro modelo a simular, se soportan dos tipos de elementos:

- i Tetraedros lineales: material modelado con **FEM**.
- ii Esferas: material modelado con **DEM**.

En la **Figura A.1**, se ilustra un modelo donde existen dos estructuras, una de ellas modelada utilizando elementos tipo tetraedros y la otra esferas (solo por ilustración en color rojo se muestran las cargas).

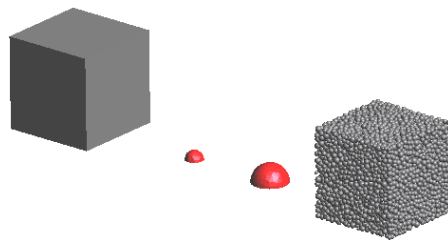


Figura A.1: Problema de ejemplo.

A.2 ELEGIR EL TIPO DE PROBLEMA

Una vez que la geometría del modelo se elaboró, el siguiente paso fue elegir el tipo de problema en el menú principal de *GiD*.

Data → Problem type → BlastLoad. (A.1)

A.3 DEFINIR LAS DETONACIONES

A continuación se definen las diferentes detonaciones del modelo, esto se logra haciendo uso de los materiales. Cada material representara una detonación con diferentes propiedades.

Data → Materials. (A.2)

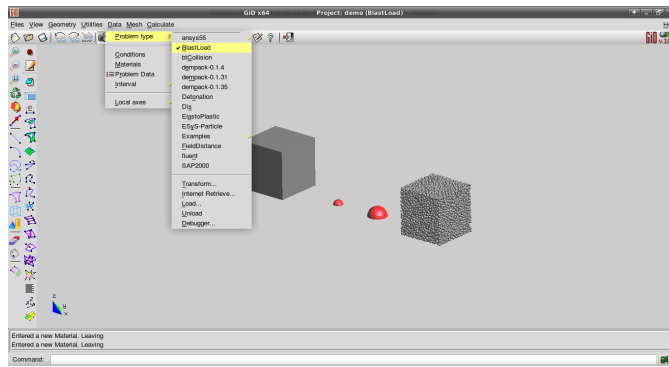
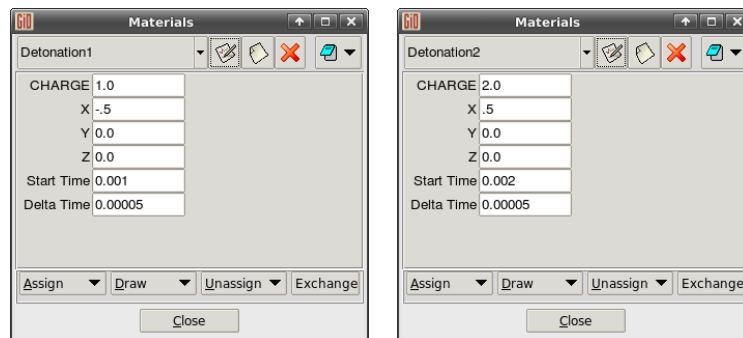


Figura A.2: Tipo de problema dentro de GiD.



(a) Detonación 1.

(b) Detonación 2.

Figura A.3: Definición de las detonaciones.

En la [Figura A.3](#), se ilustran las dos detonaciones definidas para este problema en específico.

Cada detonación definida en el problema cuenta con las siguientes propiedades:

CHARGE: cantidad de carga explosiva expresada en kg de TNT.

X,Y,Z: posición de la carga.

START TIME: tiempo de la detonación.

DELTA TIME: incremento de tiempo.

Una vez que están definidas las detonaciones, lo siguiente fue agregar los volúmenes (estructuras) afectadas por cada detonación, esto se logró estando en la ventana de la detonación deseada:

Assign → Volumes. (A.3)

En la [Figura A.4](#), se muestran las estructuras, cada una de ellas afectada por una detonación distinta, la estructura modelada con **FEM** es afectada por la detonación 1 (color verde) y la estructura modelada con **DEM** por la detonación 2 (color rosa).

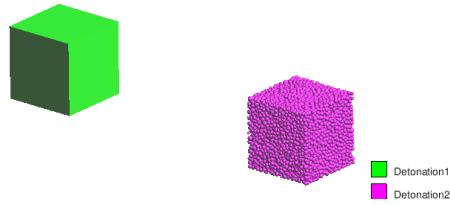


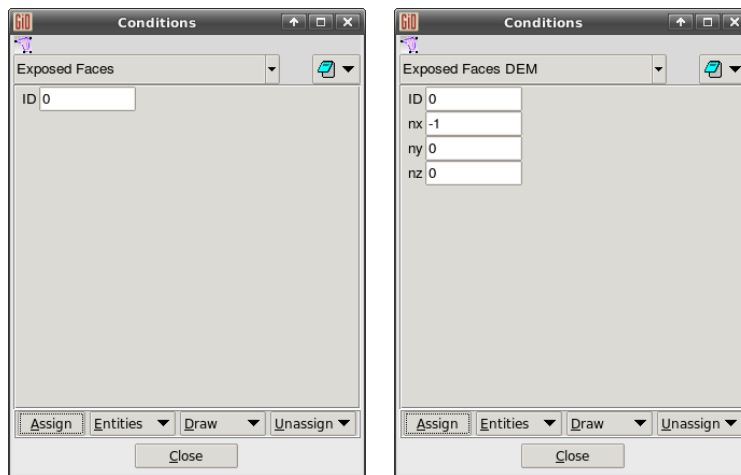
Figura A.4: Estructuras afectadas por las detonaciones.

A.4 DEFINIR LAS SUPERFICIES

El último paso fue indicar las superficies de cada estructura que se verán realmente afectadas por la detonación, para realizar esto se invoca la interfaz de asignación de condiciones desde el menú principal de *GiD*:

Data → Conditions. (A.4)

En la [Figura A.5](#), se ilustran los dos diferentes tipos de asignación de superficies *FEM* y *DEM*.



(a) Seleccionar superficie *FEM*.

(b) Seleccionar superficie *DEM*.

Figura A.5: Seleccionar superficies afectadas.

En el tipo *Exposed Faces* [Figura A.5a](#), se asignan las superficies *FEM* y en el tipo *Exposed Faces DEM* [Figura A.5b](#), se asignan las superficies *DEM*, en este tipo de asignación se deben de agregar las componentes del vector normal a la superficie, $\mathbf{n} = [n_x, n_y, n_z]$.

A.5 EJECUTAR EL PROBLEMA

Finalmente ejecutamos el tipo de problema BLASTLOAD, desde el menú principal:

Calculate → Calculate. (A.5)

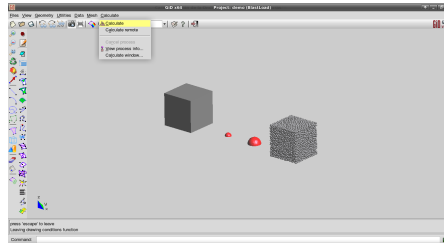


Figura A.6: Ejecutar.

Al finalizar el cálculo, aparecerá un cuadro de dialogo [Figura A.7](#) con las opciones: *Ok* y *Postprocess*, si se selecciona la primera opción seguiremos en la perspectiva de *GiD* pre-proceso con la segunda opción cambiamos la perspectiva a post-proceso.

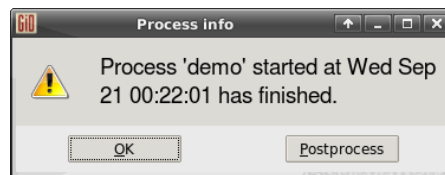


Figura A.7: Post proceso.

El el post-proceso se visualizará el campo escalar de presión, $p(t)$, y el campo vectorial de fuerzas, $F^{\text{blast}}(t)$.

REFERENCIAS

- [1] A. Alia y M. Souli. High Explosive Simulation Using Multi-material Formulations. 2005.
- [2] United States Defense Nuclear Agency. Minor Scale Event, Test Execution Report. 1985.
- [3] Wilfrid E. Baker. Explosions in the Air. 1973.
- [4] C.N. Kingery y G. Bulmash. Airblast Parameters from tnt Spherical Air Burst and Hemispherical Surface Burst. 1984.
- [5] Hyde D. User's Guide for Microcomputer Programs Conwep and Funpro – Applications of tm 5-855-1. 1988.
- [6] Renato N. Elias, Marcos A. D. Martins, and Alvaro L.G. Coutinho. Simple Finite Element-Based Computation of Distance Functions in Unstructured Grids. 2007.
- [7] Eugenio Oñate y Jerzy Rojek. Combination of Discrete Element and Finite Element Methods for Dynamic Analysis of Geomechanics Problems. 2003.
- [8] Glenn Randers-Pehrson y Kenneth A. Bannister. Airblast Loading Model for Dyna2d and Dyna3d. 1997.
- [9] Charles E. Needham. *Shock Wave and High Pressure Phenomena*. Springer, Albuquerque, USA, 2010.
- [10] National Transportation Safety Board (NTSB). Aircraft accident report: In-flight breakup over the atlantic ocean trans world airlines flight 800. 2000.
- [11] The Oklahoma Department of Civil Emergency Management. After Action Report Alfred P. Murrah Federal Building Bombing. 1995.
- [12] Eugenio Oñate, Jerzy Rojek, Robert L. Taylor, and Olgierd C. Zienkiewicz. Finite Calculus Formulation for Incompressible Solids Using Linear Triangles and Tetrahedra. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 2004.
- [13] L. I. Sedov. *Similarity and Dimensional Methods in Mechanics*. CRC Press, 10th edition, 1993.
- [14] J. A. Sethian. A Fast Marching Level Set Method for Monotonically Advancing Fronts. 1995.

- [15] Michael M. Swisdak. Simplified Kingery Airblast Calculations.
- [16] US-Army. Ufc-3-340-02 Structures to Resist the Effects of Accidental Explosions. 2008.